Ästhetische Erfahrung in der Mathematik – eine vergessene Seite wird sichtbar

Wie können ästhetische Visualisierungen das intrinsische Interesse sowie das Verstehen von Wissen verbessern?

Bachelor-Thesis

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Fakultät Wirtschaft und Soziales
Department Soziale Arbeit
Soziale Arbeit

Tag der Abgabe: **16.10.2021**

Vorgelegt von: **Jamila Drewing**
[redacted]

Betreuende Prüferin: **Frau Prof. Dr. Bettina Radeiski**
Zweiter Prüfer: **Herr Jürgen Georg Brandt**

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Einleitung

> „Mit Schönheit und Kunstförmigkeit werden Aspekte von Mathematik angesprochen, die jenseits von Anwendungs- und Nützlichkeitserwägungen den Blick auf die Beziehung von Individuum und Gegenstand richten“ (Spies 2015: 173).

Im aktuellen Schulkontext scheinen SchülerInnen die hier angesprochene Schönheit und Kunstförmigkeit von Mathematik nicht oder nur wenig zu erfahren – zumindest dann nicht, wenn Anwendung und Nützlichkeit im Vordergrund pädagogischer Aufgaben stehen: An zentraler Stelle des Schulunterrichts steht die Kompetenz- und Handlungsorientierung, denn „das neue Bildungsideal ist der ‚flexible Mensch‘, der funktioniert, wo immer man ihn hinstellt. Um seine Verfügbarkeit für den Arbeitsmarkt zu garantieren, ist ‚lebenslanges Lernen‘ notwendig. Erlernt werden vor allem ‚Kompetenzen‘ – ein Schlüsselbegriff, der für das neoliberale Projekt zentral ist“ (Hellgermann 2013: 7). Neben Diskursen zu Auswirkungen der Kompetenzorientierungen bezüglich des Leistungsdrucks, der Selektionsmechanismen sowie internalisierter Macht- und Disziplintechniken – etwa, wenn SchülerInnen im Sinne des Selbstmanagements dazu angehalten werden, ihre Noten in Gruppenarbeiten auszuhandeln (vgl. ebd.: 6) – führt dies zu der Frage, was SchülerInnen hinsichtlich der Kompetenzorientierung verstehen lernen sollen. Offenbar macht es einen Unterschied, so Born/Oehler (2020: 15), ob SchülerInnen verstehen lernen, wie man rechnet und wie sie sich Informationen beschaffen können, um ein Verständnis zu ermöglichen, oder ob es tatsächlich um das Können geht. Im Rahmen der Konferenz für Fachbereichstage in Mannheim wurde ein offener Brief – unterzeichnet von sämtlichen beteiligten ProfessorInnen – formuliert, der eine Stellungnahme zum Thema „Mathematikunterricht und Kompetenzorientierung“ einnimmt und sich auf das mathematische (Nicht-)Können von SchülerInnen bezieht:

> „Viele Hochschuldozenten haben bereits auf die Mathematikdefizite von Studienanfängern aufmerksam gemacht: [Kn], [HP], [Bau], [Sch]. Den Studienanfängern fehlen Mathematikkenntnisse aus dem Mittelstufenstoff, sogar schon Bruchrechnung(!), Potenz- und Wurzelrechnung, binomische Formeln, Logarithmen, Termumformungen, Elementargeometrie und Trigonometrie. Diese Defizite sind schon längst kaum mehr aufholbar – weder in Vorkursen noch in Brückenkursen“ (Eisenmann et al. 2017).

Unzufriedenheit ist auch auf Seiten vieler SchülerInnen erkennbar: Im Jahre 2019 unterzeichneten tausende SchülerInnen eine Petition, in welcher sie angaben, dass die Abituraufgaben im Fach Mathematik zu schwierig gewesen seien (vgl. Czerny 2020).

In einem Interview im Deutschlandfunk bemängelt Ziegler (2019), dass in der Schule lediglich vermittelt werde, was sich als praktisch erweise, dabei sei die Mathematik durch ihre Bilder und Strukturen faszinierend und ein Fach mit lauter spannenden Geschichten und dieses vielseitige Bild der Mathematik müsse SchülerInnen viel präsenter gemacht werden (vgl. ebd.). An dieser Stelle kann bereits festgehalten werden, dass Lernende hinsichtlich neoliberaler Einflüsse auf das Schulsystems, in erster Linie Kompetenzen erlernen, die sie für den Arbeitsmarkt befähigen, was zur Folge hat, dass schulische Inhalte zu oberflächlich behandelt werden. Bezogen auf die Mathematik bedeutet die Abkehr der Inhaltsorientierung nicht nur, dass SchülerInnen den Mittelstufenstoff nur unzureichend beherrschen, sie bedeutet zudem, dass die „andere" Seite der Mathematik, die faszinierende Bilder und spannende Bilder verspricht, im Verborgenen bleibt. Wie diese andere Seite der Mathematik aussehen kann, verdeutlicht Bruder (2008: 2) in einem Dossier: Dort werden Mathematikschaffende und Kunstschaffende miteinander verglichen, weil beiden das kreative Arbeiten sowie das Schaffen von Mustern und Strukturen, „die Jahrhunderte überdauern können", gemeinsam ist. Dies führt zu Überschneidungen zwischen Kunst und Mathematik, so wird anhand der Geometrisierung in Malerei, Architektur und Bildhauerei im 20. Jahrhundert deutlich, dass sich in der bildenden Kunst viele Stile und Strömungen finden lassen, die sich praktisch wie auch theoretisch mit mathematischen Formen und Formeln beschäftigen (vgl. ebd.: 1).

Anhand der soeben beschriebenen Phänomene ergibt sich für diese Arbeit folgendes Ziel: Es soll zum einen ein Gestaltungsvorschlag entwickelt werden, der es Lernenden ermöglicht, eine *ästhetische Erfahrung* an bzw. mit mathematischen Aufgaben zu machen. Ähnlich wie beim Rätselraten soll durch die ästhetische Erfahrung ein spielerischer Lernumgang mit „trockenen" Formeln erworben werden. Durch das neue Erleben von Mathematik und einer intensiveren Beschäftigung mit ihr, soll erfasst werden, inwiefern sie als bereichernde Kunst verstanden werden kann. Anhand der ästhetischen Erfahrung soll argumentativ geprüft werden, ob durch Erfolgserlebnisse reflexiver Art das Verstehen sowie das Interesse an den Inhalten der Mathematik verbessert werden können. Die Umsetzung erfordert eine lernförderliche wie auch ästhetisch ansprechende *Visualisierung* von Mathematikaufgaben. Der Gestaltungsvorschlag soll Lernenden als Lernmaterial und als Ressource dienen, auf die sie beim Lernen in Eigenregie zurückgreifen können. Mit dem Blick auf Ästhetik als Ressource knüpft diese Arbeit an einen zentralen Begriff im Empowerment-Konzept an – ein Begriff, der nach Sohns (2007: 76) für die Leitlinien der Sozialen Arbeit maßgeblich ist: Demnach liegt dem Konzept das Ziel zugrunde, die Selbstgestaltungskräfte von Menschen in den Fokus zu rücken. Das Bereitstellen von Ressourcen nimmt dabei eine wichtige Rolle ein (vgl. ebd.).

Mit Blick auf die genannten Bedarfe und Ideen zu Lösungsansätzen lässt sich zum anderen folgende forschungsleitende Frage konkretisieren: *Wie können ästhetische Visualisierungen in der Mathematik das intrinsische Interesse sowie das Verstehen von Wissen verbessern?*
Um dieser Frage nachzugehen, wird im auf die Einleitung folgenden zweiten Kapitel erläutert, was unter ästhetischer Erfahrung zu verstehen ist, welche Zusammenhänge es zur Kunst gibt und damit einhergehend, wie Kunst und ästhetische Erfahrung *bildungswirksam* werden können, wenn von einer zweck- und leistungsorientierten Gesellschaft ausgegangen wird. Hierzu werden Argumente der Kunstpädagogik gewählt und vorgestellt. Das dritte Kapitel beinhaltet den Transfer des zweiten Kapitels auf den mathematischen Bereich: Es wird erläutert, was *mathematik*ästhetische Erfahrung bedeutet und inwiefern sie Ansprüchen von Bildungskonzepten gerecht wird. Zur Beantwortung dieser Frage werden Erklärungsansätze von Susanne Spies (2015) herangezogen, die sich diesen Fragen explizit widmet. Im vierten Kapitel geht es um die Visualisierung. Anhand von Erkenntnissen der Werbepsychologie wird zunächst verdeutlicht, welche Wirkungskraft Bilder im Allgemeinen haben können. Im weiteren Schritt wird die Visualisierung hinsichtlich des Lernens untersucht: Wie lassen sich Lerninhalte lernförderlich und ästhetisch ansprechend gestalten? Hier erweisen sich Erkenntnisse aus dem Instruktionsdesign, dem Multimediabereich, der Wahrnehmungs- und Gestaltpsychologie als hilfreich. Anschlussfähig ist dann das fünfte Kapitel, das sich auf die Visualisierung in der Mathematik bezieht und damit einhergehend, mit welchen Herausforderungen diese hinsichtlich des Darstellungswechselns zusammenhängt. Dazu wird im Bereich der Mathematikdidaktik recherchiert. Das sechste Kapitel beinhaltet eine Analyse exemplarischer Lehr- bzw. Lernvideos sowie von einer Mathematikaufgabe aus einem Schulbuch: Anhand der gewonnenen Erkenntnisse des vierten und fünften Kapitels wird analysiert, inwieweit innerhalb dieser Beispiele eine lernförderliche wie auch visuell ästhetische Visualisierung gelungen ist, um Anhaltspunkte für einen eigenen, optimierten Gestaltungsvorschlag zu haben. Das letzte Kapitel – Fazit und Ausblick – fasst zentrale Erkenntnisse dieser Arbeit zusammen und zeigt Forschungslücken auf.

2 Kunst und ästhetische Erfahrung

In diesem Kapitel wird erläutert, was unter einer ästhetischen Erfahrung im Rahmen der Kunst verstanden wird. Es geht um den Aufbau eines Grundverständnisses, welches erleichtern soll, die *mathematik*ästhetische Erfahrung in Kapitel 3.1 zu verstehen. Weil Kunst in Bildungskontexten immer schon einem Legitimationsdruck ausgesetzt (ausgehend von einer rational- und zweckorientierten Gesellschaft) und in dem Kontext mit diversen kritischen Fragen konfrontiert war, soll die ästhetische Erfahrung in der Kunst im Zusammenhang mit Bildung betrachtet werden, um ihre Argumente für den mathematikästhetischen Teil nutzen zu können. Im Folgenden wird deutlich, dass Kunst sowie der kunstähnliche Teil der Mathematik auf einer reflexiven Bildungsorientierung fußen. Mathematik ist als Hauptfach in Schulen grundsätzlich keinem Legitimationsdruck ausgesetzt, wenn die Inhalte – wie aktuell – darauf beschränkt bleiben, anwendungs- und nutzungsorientiert zu sein. Doch die ästhetische Erfahrung in der Mathematik weist eine hohe Ähnlichkeit zur ästhetischen Erfahrung in der Kunst auf und somit ist naheliegend, dass dieser Teil in Bildungsfragen kontrovers betrachtet wird.

Bevor die ästhetische Erfahrung genauer erläutert wird, ist jedoch darauf aufmerksam zu machen, dass der Begriff „ästhetisch“ in diesem Kontext anders zu verstehen ist als in allen anderen Zusammenhängen: Es wird sich zeigen, dass „ästhetisch“ hier das Erleben verschiedener Wahrnehmungsstufen bedeutet, wodurch das Subjekt am Ende eine Erkenntnis gewinnt. In allen anderen Kontexten – z.B. bei der ästhetischen Visualisierung – wird das Wort wie im alltäglichen Sprachgebrauch gebraucht, d.h., es wird synonym zu Begriffen wie „schön“ oder „ansprechend“ verwendet.

2.1 Was ist ästhetische Erfahrung?

Im theoretisch-wissenschaftlichen Diskurs wird häufig die Frage nach dem besonderen *Umgang* mit Kunst diskutiert. Weil an der Frage, wie wir Kunst wahrnehmen und erfahren, festgemacht wird, was Kunst (eigentlich) leistet, soll auch in dieser Arbeit ein kurzer Blick auf die Antworten geworfen werden. So wird zum Beispiel von Bender (2010) Wert daraufgelegt, *werkästhetische* und *rezeptionsästhetische* Ansätze auseinanderzuhalten (vgl. Bender 2010: 58). Werkästhetisch bedeutet, dass das *Ergebnis* des Werks im Vordergrund steht und nicht die künstlerische Tätigkeit selbst: Nach diesem Kunstverständnis wohnt die ästhetische Erkenntnis der Gestalt des Werkes bereits inne (vgl. Haarmann 2011: 4), sie gilt es zu interpretieren (vgl. Bertram 2005: 13). Beim rezeptionsästhetischen Kunstverständnis wird das Kunstwerk als Resultat einer *Interaktion* zwischen der betrachtenden Person und dem Werk aufgefasst (vgl. Pfisterer 2019: 388). D.h., das Wesen der Kunstwerke ist nicht nur über die zugeschriebenen Eigenschaften zu bestimmen, vielmehr entsteht es über die Praxis der Erfahrungen von Subjekten (vgl. Bertram 2005: 35). „Kunstwerke ringen darum, in gelungener Weise Konstellationen bereitzustellen, die für eine rezeptive Auseinandersetzung lohnend sind" (Bertram 2012: 265). Diese Konstellationen entstehen dadurch, dass verschiedene Elemente (z.B. Farben oder Formen) miteinander in Beziehung gesetzt werden (vgl. Bertram 2012: 266). Dennoch bleibt grundsätzlich ungewiss, ob ein Kunstwerk gelungen ist oder nicht, Kunstwerke bleiben immer umstritten (vgl. ebd.: 268). *Wenn* eine Person sich jedoch auf ein Kunstwerk einlässt und sich mit diesem auseinandersetzt, dann geben die Konstellationen des Werks den Rahmen vor, in dem gedacht und interpretiert werden kann (vgl. ebd.: 263), denn Kunstwerke enthalten Botschaften, die entschlüsselt werden können. Die Besonderheit der Kunst ist, dass sie immer mit kulturellen wie auch historischen Momenten in Verbindung steht (vgl. ebd.: 18). Dem ist abzuleiten, dass diese Momente in den Kunstwerken festgehalten werden, weil Kunstschaffende von ihrer Zeit, in der sie leben, geprägt werden und ihre persönlichen Erfahrungen im künstlerischen Schaffen zum Ausdruck bringen. Naheliegend ist, dass Kunstwerke somit eine persönliche Botschaft in sich tragen und deshalb die Auseinandersetzung mit dem Werk beeinflussen. Innerhalb des vom Werk vorgegebenen Rahmens sind jedoch verschiedene Interpretationen möglich, die subjektiv und selbstständig sind und beides zusammen (die vom Werk geleitete Aktivität beim Auseinandersetzen sowie die eigenständigen Interpretationen) ist als ästhetische Erfahrung zu verstehen (vgl. ebd.). *Dass* Kunst etwas leistet, kann also durch die notwendig entstehende *ästhetische Erfahrung* und ihrer Analyse näher bestimmt werden. Die ästhetische Erfahrung wird dabei allerdings nicht mehr über die Werkkategorie bestimmt und ist als spezifische Erfahrungsform unabhängig von der Kunst (vgl. Bender 2010: 58 f.). Wird einem Kunstwerk durch die sinnliche Wahrnehmung begegnet, ist die Basis zwangsläufig die ästhetische Erfahrung (vgl. Bender 2010: 58.). Die ästhetische Erfahrung ist somit die vermittelnde Funktion zwischen dem sinnlichen Besonderem und dem geistig Allgemeinen und bietet somit Möglichkeiten zur Erkenntnis (vgl. Bender 2010: 63).

Im Folgenden soll ein Beispiel für eine ästhetische Erfahrung gegeben werden, die im Rahmen einer Kunstproduktion entstanden ist. Das Produkt wiederum kann von anderen Menschen rezipiert und interpretiert werden. Peez (o.J.) beschreibt folgendes Szenario: Die *Aufmerksamkeit* eines Jugendlichen wird während einer Bahnfahrt geweckt, da er bei einem bestimmten Lichteinfall den Abdruck eines Gesichts auf der Fensterscheibe erkennt, welches er am Ende fotografieren wird (vgl. Peez o.J.: 8 f.). Das erste Strukturmerkmal, das zu nennen ist, ist die

„Aufmerksamkeit für Ereignisse und Szenen, die Gefallen und Interesse wecken und hierdurch unmittelbares Spüren der Wahrnehmung bedingen […]" (Peez o.J.: 9). *Aufgeschlossenheit und Neugier* sowie die *emotionale Eingebundenheit* sind folgende Strukturmerkmale, denn der Jugendliche ist neugierig auf etwas Ungewohntes und die emotionale Eingebundenheit im Augenblick besteht darin, dass der Gesichtsabdruck dem Jugendlichen ein Foto wert ist (vgl. ebd.: 9). Daran anschließende Strukturmerkmale sind der *Genuss der Wahrnehmung* sowie das *Erleben von Überraschung und Spannung*: Die Überraschung besteht in einem so deutlichen Gesichtsabdruck, der an der Fensterscheibe zu sehen ist, die Spannung kann beim Fotografieren ausgelöst worden sein, weil der Jugendliche feststellt, dass das Motiv sowie der dunkle Hintergrund schwinden, sobald die Bahn wieder anfährt und schneller wird (vgl. ebd.). Darauffolgende Strukturmerkmale sind das *Erleben von Subjektivität* und die *Anregung der Fantasie*: Das Verarbeiten des wahrgenommenen Motivs ist bei jeder betrachtenden Person verschieden und löst auch unterschiedliche Emotionen aus, je nachdem, was für Vorerfahrungen das Individuum im Leben gemacht hat, wird das neue Wahrgenommene anders mit dem Altbekanntem verknüpft (vgl. ebd.: 10). D.h., die eine Person erkennt in dem Gesichtsabdruck möglicherweise eine afrikanisch anmutende Maske., wohingegen eine andere Person Ähnlichkeiten mit Röntgenbildern zu sehen glaubt (vgl. ebd.). Im Nachhinein lässt sich Distanz zu diesem Augenblick, in welchem etwas wahrgenommen wurde, nehmen, der Jugendliche denkt über das Wahrgenommene nach: Ggf. überlegt er sich, wie dieser Gesichtsabdruck entstanden ist und ob vielleicht eine Person an der Scheibe eingeschlafen ist oder welche Lichtvoraussetzungen das Bild benötigt, um in Erscheinung treten zu können (vgl. ebd.). Dieser Prozess entspricht der *Reflexion* (vgl. ebd.). Für die Reflexion und Assoziation ist allerdings *Vorwissen* notwendig, welches sich wiederum aus früheren verarbeiteten Wahrnehmungserlebnissen ergeben hat (vgl. ebd.). Weiter kann nun die ästhetische Erfahrung mit dem künstlerischen Produkt in Beziehung gesetzt werden: Seh- und Lichteindrücke lassen sich durch das Abbild an der Fensterscheibe sowie durch Fotografie als Technik festhalten (vgl. ebd.). Damit werden die Strukturmerkmale *In-Beziehung-Setzen der ästhetischen Erfahrung mit künstlerischen Produkten* sowie das *Festhalten der ästhetischen Erfahrung in ästhetischer Produktion* beschrieben (vgl. Peez o.J.: 10f.). Das letzte Strukturmerkmal ist die *Mitteilung* durch das Foto: Es wird anderen mitgeteilt, was die Aufmerksamkeit erregt hat (vgl. ebd.).

Im Ergebnis lässt sich festhalten, dass Menschen in Auseinandersetzung mit Kunstwerken eine ästhetische Erfahrung machen können, die mit Emotionen und Verstehensprozessen verknüpft ist. Dabei setzen Menschen sich einerseits mit der persönlichen Botschaft des Künstlers oder

der Künstlerin auseinander, die mit historischen wie auch kulturellen Praktiken verflochten ist, andererseits setzen Menschen sich in dem Rahmen mit sich selbst auseinander und gewinnen möglicherweise eine neue Sichtweise auf sich und ihre Umwelt, in der sie leben. Kunstwerke stellen Konstellationen bereit, die Menschen dazu einladen, sich mit dem Kunstwerk auseinanderzusetzen. Es gibt jedoch keine Garantie, ob dies gelingen wird. Für die Arbeit bedeuten die gewonnenen Erkenntnisse folgendes: Es stellt sich die Frage, ob es in der Mathematik etwas gibt, das in Analogie zu einem Kunstwerk gesehen werden kann und eine ästhetische Erfahrung bzw. eine intensive Beschäftigung mit einem bestimmten Lerngegenstand ermöglicht. Gesetzt den Fall, dass es so etwas gibt, stellt sich ferner die Frage, wie Menschen dazu angeregt werden können, sich mit solchen mathematischen Inhalten auseinanderzusetzen. Ein Kunstwerk, das in einer bestimmten Art und Weise gestaltet ist, bietet einen visuellen Reiz. Es kann wahrgenommen werden. Dies ist in der Mathematik nicht so. D.h., Mathematik muss möglicherweise mit etwas visuell Anregendem verknüpft werden, das auf den mathematischen Inhalt, mit dem sich auseinandergesetzt werden soll, verweist.

2.2 Inwiefern sind Kunst und ästhetische Erfahrung bildungswirksam? Was wird im Rahmen der ästhetischen Erfahrung gelernt?

Das Fach Kunst „ist zwar seit rund 150 Jahren in der Schule verankert,[1] doch kämpft es seitdem immer wieder um seine Legitimation“ (Krautz 2020: 61). Doch Dinge (z.B. Bilder) stellen im Bezug von Selbst, Mitmenschen und der Mitwelt einen Anspruch, der insofern bildend ist, als dass der Mensch sich mit diesen Dingen individuell, aber auch mit der Sache an sich auseinandersetzt (vgl. Krautz 2018: 10). Im vorherigen Abschnitt wurde erklärt, was ästhetische Erfahrung in Auseinandersetzung mit einem Werk ist, ferner wurde ein Beispiel gegeben, wie auch beim künstlerischen Schaffen eine ästhetische Erfahrung entstehen kann. Zudem wurde erläutert, dass Kunstwerke Botschaften in sich tragen und „bemüht sind“, durch bestimmte Konstellationen dazu anzuregen, sich mit ihnen auseinanderzusetzen. Im Folgenden soll anhand des hermeneutischen Zirkels (Abb.1) Bezug darauf genommen werden, inwiefern die Auseinandersetzung mit einem Kunstwerk bildend ist.

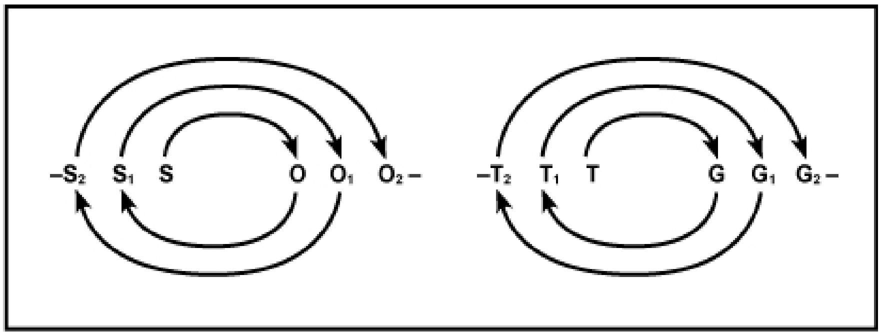


Abb. 1: Hermeneutischer Zirkel: Beziehung zwischen Subjekt und Objekt, vom Teil zum Ganzen und vom Ganzen zum Teil
Quelle: In Anlehnung an Danner (1979)

Mit einem ersten Verständnis wird einem Objekt (bzw. einem Bild) begegnet, welches erst in Auseinandersetzung mit diesem verändert wird und dadurch zu einem neuen Vorverständnis führt (vgl. Krautz 2018: 14). Es entsteht eine pendelartige Bewegung, die sich zwischen einem Vorverständnis und noch Neuem hin- und her bewegt (vgl. Uhlig 2013: 78). Dabei befasst sich das Subjekt durch das Sehen und Befassen mit dem Werk vom *Ganzen zum Teil* und andersherum, vom *Teil zum Ganzen*, wodurch sich bestimmte Analyseschritte ergeben (vgl. Krautz 2018: 159). Die Beschreibung kann sowohl für das Rezipieren von Kunst als auch das eigene Schaffen gelten. Wenn es darum geht, sich mit gegenständlichen Kunstwerken anderer Menschen auseinanderzusetzen, geht es der Beschreibung nach erst einmal darum, die Botschaft des Kunstwerks tiefer zu verstehen und sie im Allgemeinen deuten zu können. Wie erwähnt, gibt das Kunstwerk vor, in welche Richtung gedacht werden soll. Anschlussfähig sind eigene Interpretationen. Nach Höxter (2018: 1) beinhaltet Kunst soziale, ökonomische und politische Themen und hilft die wechselseitigen Abhängigkeiten zu erkennen. Indem gelernt wird, die spezifische Bildsprache von Bildern zu verstehen, können Fotografien, Filme, Architektur oder Malereien kontextbezogen gedeutet oder gestaltet werden (vgl. ebd.). Durch die Entwicklung einer Sachverständigkeit, wird dem Subjekt ermöglicht, selbstbestimmt und aktiv teilzuhaben an diversen Kulturformen sowohl aus der Vergangenheit als auch aus der Gegenwart (vgl. ebd.). Gleichwohl wird zu einem kreativen wie auch kritischen Wahrnehmungsvermögen gegenüber der eigenen Umwelt befähigt. Anschlussfähig ist der Gedanke nach Bertram (2014: 13 f.), dass Kunst sich als reflexive Praxisform betrachten lässt und wird sich die Kunst als menschliche Praxis gedacht, so erbringt sie Reflexionsleistungen, die dem Subjekt helfen, sich selbst zu begreifen (vgl. ebd.).

Der hermeneutische Zirkel lässt sich jedoch auch auf das künstlerische Schaffen, wie im vorherigen Abschnitt beschriebenen Beispiel mit dem Jugendlichen, übertragen: Der Jugendliche hat das Ganze (den Gesichtsabdruck an der Scheibe) gesehen und sich überlegt, wie dieser Abdruck zustande gekommen sein könnte. Durch die Auseinandersetzung mit dem

Gesichtsabdruck hat er etwas über Lichteinfälle und Fotografie lernen können (Teil des Ganzen, denn der Abdruck ist nur unter bestimmten Lichtvoraussetzungen sichtbar), schlussendlich ist ein Produkt entstanden (Foto), das von anderen rezipiert und interpretiert werden kann. Personen, die sich damit auseinandersetzen, fragen sich möglicherweise, weshalb dieser Gesichtsabdruck auf der Fensterscheibe fotografiert wird. Was soll damit mitgeteilt werden? Warum ist das interessant? Kurz: Die Personen, die sich damit auseinandersetzen werden, beginnen zu reflektieren, um das Bild und die Mitteilung von diesem zu verstehen.

Kunst regt zum Reflektieren an und kann ästhetisch erfahren werden, wenn ein Mensch sich entscheidet, sich mit einem Kunstwerk auseinanderzusetzen. Anhand des hermeneutischen Zirkels wurde der Prozess des Erkenntnisgewinns im Rahmen der ästhetischen Erfahrung erklärt. Dabei nimmt die Reflexion eine zentrale Rolle ein. Im Zusammenhang mit dem Erkenntnisgewinn hat die Reflexion bei unterschiedlichen Autoren Erwähnung gefunden (s.o.). Dem kann entnommen werden, dass die Reflexion und damit einhergehend das hermeneutische Verstehen ein wesentliches Argument sind, um Kunst als bildungswirksam gelten zu lassen. Somit gilt es auch für den Teil, der die ästhetische Erfahrung in der Mathematik beinhaltet, eine Ebene zu finden, auf der Reflexion möglich ist.

3. Ästhetische Erfahrung in der Mathematik

In diesem Kapitel geht es um die Ästhetik der Mathematik: So wie in der Kunst danach gefragt wird, was ein Kunstwerk zu einem Kunstwerk macht und welche möglichen Emotionen und Erkenntnisse in Auseinandersetzung mit diesem erfahren werden können, fragt die Mathematikästhetik danach, ob es mathematische Schönheit geben kann, d.h.: Mathematik, die sich aufgrund spezifischer Eigenschaften ästhetisch bewerten lässt und die in Auseinandersetzung mit ihr ästhetisch erfahren werden kann. In dem Kontext wird thematisiert, was Lernende benötigen, damit ihnen eine mathematikästhetische Erfahrung gelingen kann. Es wird sich zeigen, dass die Voraussetzungen, die es für eine mathematikästhetische Erfahrung braucht, vom jeweiligen mathematischen Inhalt abhängen. Ferner geht es um die Frage, wie es der ästhetischen Erfahrung in der Mathematik bzw. dem Kunstcharakter der Mathematik gelingt, Eintritt in Bildungskonzepte zu erlangen. Kunst ist bildend, weil sie zur Reflexion anregen kann. Menschen reflektieren, um Dinge nachvollziehen und verstehen zu können und somit wird in diesem Kapitel die Frage geklärt, wie die ästhetische Erfahrung in der Mathematik Möglichkeiten zur Reflexion bietet.

3.1 Was ist ästhetische Erfahrung in der Mathematik?

Die Mathematikästhetik blickt in zwei Richtungen: *Die eine Perspektive* rückt das Phänomen ästhetischer Werturteile in den Blick, gefragt wird nach mathematischen Schönheitsurteilen oder nach der Möglichkeit von ästhetischen Erfahrungen mit Mathematik (vgl. Spies 2015: 174). *Die andere Perspektive* fragt nach Parallelen von Mathematik und Kunst, dadurch, dass schaffende MathematikerInnen verglichen werden mit MalerInnen, KomponistInnen oder DichterInnen (vgl. ebd.: 174). Schönheit der Mathematik im Verständnis hier schließt neben Theorien und Beweisen auch mathematische Muster[1] mit ein, die für die Schulmathematik von Bedeutung sind (vgl. ebd.: 176). Das sind beispielsweise anschauliche mathematische Begründungen, präformale Beweise oder Problemlösestrategien (vgl. ebd.). Diese miteingeschlossen, spricht Spies (2015: 176) von *schönen Stücken der Mathematik*. Um herauszufinden, welche Rolle die Künstlerähnlichkeit mathematischen Schaffens im Mathematikunterricht einnehmen kann, müssen beide Forschungsrichtungen dahingehend untersucht werden, dass deutlich wird, wie ästhetische Werturteile und der Kunstcharakter der Mathematik zum Reflexionsmoment werden können (vgl. Spies 2015: 175). Die ästhetischen Momente können in vier Eigenschaftskomplexe kategorisiert werden: 1.) *Tragweite oder Relevanz*, 2.) *Ökonomie oder relative Einfachheit*, 3.) *epistemische Transparenz*, 4.) *emotionale Wirksamkeit* (vgl. Spies 2015: 176).

Was bedeutet *Tragweite* als ästhetisches Moment? Damit ist das Potential von einem Stück Mathematik gemeint, das sich auf einen innermathematischen Zusammenhang bezieht (vgl. ebd.). Welche Faktoren können für die ästhetische Bewertung herangezogen werden? Ästhetisch bewertet werden könnte die Relevanz eines Resultates sowie dessen innermathematische Vernetzung, wobei die mathematische *Schönheit* sich dann z.B. im disziplinübergreifenden Zusammenhang zwischen Geometrie und Algebra ausdrücken würde (vgl. ebd.). Mathematische Schönheit kann aber auch bei einem Beweis empfunden werden, wenn die Heuristik, die ihm zugrunde liegt, über den aktuellen Fall hinaus angewendet werden kann oder wenn ein elementares Konzept in besonderer Weise für weitere Verallgemeinerungen anschlussfähig ist (vgl. ebd.). Für die mathematische Schönheit ist die Tragweite relevant, wenn sie mit anderen Eigenschaften gemeinsam auftritt oder sich mit ihnen in Beziehung setzt (beispielsweise als

---

[1] Beispiele für Träger mathematischer Schönheit sind häufig Beweise, Theoreme oder auch ganze Theorien und besondere Argumentationsgänge. Spies folgt der Idee von Hardy (1940), der allgemein von den „Mustern der Mathematiker" spricht, da sich mit diesem Begriff der Rahmen potenzieller Träger explizit öffnet (vgl. Spies 2015: 176).

Bezugsgröße im Rahmen der Ökonomie) (vgl. ebd.). Was bedeutet *Ökonomie* als ästhetisches Moment? Die mathematische Schönheit liegt hier in der Kürze und Einfachheit, wobei die Einfachheit keine absolut angebbare Größe ist, sondern subjektiv gewertet und erfahren wird (vgl. ebd.: 177). *Epistemische Transparenz* als ästhetisches Moment: Schönheit liegt hier in der Klarheit, in der Transparenz, im tieferen Verstehen und Erkennen, welches über die Gültigkeit des Beweises hinausgeht und für welches sich häufig Metaphern aus dem Bereich der visuellen Anwendung finden (vgl. ebd.). *Emotionale Wirksamkeit*[2]*: A*llgemein lösen schöne Stücke der Mathematik sowohl beim Produzierenden, als auch beim Rezipierenden eine Vielfalt an Emotionen aus, wobei die Emotionen häufig mit den genannten Eigenschaftskomplexen einhergehen: So. kann beim Finden der innermathematischen Tragweite oder der Ökonomie Emotionen wie Überraschung oder Erstaunen hervorgerufen werden und ein „Aha!- Erlebnis" im Sinne der epistemischen Transparenz kann das Gefühl von Unausweichlichkeit auslösen (vgl. ebd.: 17 f.).

Nachdem nun die Eigenschaften vorgestellt wurden, die schönen mathematischen Gegenständen innewohnen, sowie mögliche Erfahrungen, die Subjekte anhand dieser machen können, stellt sich die Frage, was das Subjekt – bzw. was SchülerInnen – brauchen, um solche ästhetischen Erfahrungen mit einem entsprechenden mathematischen Gegenstand machen zu können. Bezüglich der *Tragweite* und der *Ökonomie* ist für das Erkennen mathematischer Schönheit ein instruktives Aufzeigen an Beispielen, Übung, Gewöhnung und Informationswissen, welches über das konkrete Problem hinausgeht, notwendig, wohingegen *epistemische Transparenz* und *emotionale Wirksamkeit* das eigenständige Erforschen der Gegenstände bedürfen (vgl. Spies 2015: 178).

Insgesamt hält Spies fest, dass die Ästhetik erst durch die emotionale Wirksamkeit entstehen kann, denn mathematische Schönheit – verdeutlicht anhand der vorgestellten Charakteristika – ist äußerst facettenreich. Die Verbindung der ästhetischen Beziehung von Eigenschaften, die einem Objekt immanent sind, mit dem subjektivem epistemischem wie emotionalem Erleben (vgl. Spies 2015: 178). Verdeutlicht wird an dieser Stelle die „Subjektorientierung und die eigentümliche Wechselbeziehung von Emotionen, Intuition und Rationalem in den verschiedenen Facetten der mathematischen Schönheit", wodurch „tragfähige Gemeinsamkeiten mit

[2] Die *Emotionale Wirksamkeit* wird bei Spies gemeinsam mit weiteren Punkten erwähnt, die in ihrer Gestalt eine ästhetische Erfahrung ermöglichen können. Allerdings entspricht die Emotionale Wirksamkeit vermutlich schon *an sich* der ästhetischen Erfahrung, denn dem Subjekt wird durch Reflexion seine Emotion (z.B. das Gefühl der Überraschung) bewusst.Damit scheint sie nicht etwas zu sein, das eine ästhetische Erfahrung hervorruft, sie scheint vielmehr ein *Beispiel* für eine ästhetische Erfahrung zu sein.

Beschreibungen ästhetischer Erfahrung in anderen Bereichen“ gezeigt werden (Spies 2015: 178 f.), denn im Fokus steht die Beziehung zwischen Subjekt und Gegenstand (vgl. ebd.: 179).

Analog zu einem Kunstwerk, dem die Auseinandersetzung mit sich gelungen ist, sind hier schöne Stücke Mathematik zu nennen, die sich aufgrund bestimmter Eigenschaften besonders gut für eine ästhetische Erfahrung eignen. Je nachdem, um was für ein Stück Mathematik es sich handelt, bieten sich unterschiedliche Möglichkeiten an, was als schön empfunden werden kann. Ebenso wie bei einem Kunstwerk gilt, dass die Ästhetik von Mathematik erst durch die emotionale Wirksamkeit entsteht. Es gibt mathematische Inhalte, denen aufgrund ihrer Eigenschaften bestimmte Potenziale inhärent sind. Jedoch werden diese mathematischen Inhalte bzw. Stücke Mathematik erst zur schönen Mathematik, wenn sie in Auseinandersetzung mit ihnen ästhetisch erfahren werden. Die Voraussetzung, um mathematische Schönheit zu erkennen, ist ein gutes mathematisches Vorwissen.

3.2 Wie wird der Kunstcharakter der Mathematik bildungswirksam?

Die ästhetische Erfahrung in der Mathematik hat zu ästhetischen Erfahrungen in anderen Bereichen als Gemeinsamkeit die Beziehung zwischen Subjekt und Gegenstand, wodurch sie zum Anhaltspunkt von Fragen mathematischer Bildung wird (vgl. Spies 2015: 178 f.). Am Beispiel der *Reflexion* über das Ästhetische in der Mathematik wird erklärt, wie die Beziehung, die durch das Erhalten schöner Mathematik hervorgerufen wurde, bildungswirksam werden kann (vgl. ebd.: 179). Das Nachdenken über das eigene Handeln, Denken bzw. über den Gegenstand wird als Mittel in (Allgemein-)Bildungskonzepten festgehalten: Einerseits als Bildungsziel an sich, andererseits um die Entwicklung zu einem gebildeten Bürger/einer gebildeten Bürgerin zu ermöglichen (vgl. ebd.). Ein ästhetisches Erlebnis in der Mathematik kann unterschiedliche Reflexionsebenen ansprechen (vgl. ebd.: 180). Vier Reflexionsebenen können dazu festgehalten werden: Die Inhaltsreflexion, die Gegenstandsreflexion, die Bedeutungs- bzw. Sinnreflexion sowie die Selbstreflexion (vgl. Spies 2015: 181 f. zit. n. Bauer 1990). Die *Inhaltsreflexion* betreffend, werden drei Punkte genannt: Inhaltsreflexion kann zum einen das Erkennen von Strukturen und Mustern bedeuten, zum zweiten kann Inhaltsreflexion das Vollziehen von Darstellungswechseln bedeuten oder – zum dritten – die Auswahl von Heurismen (etwa das Bilden von Analogien), wodurch dann wiederum innermathematische Vernetzungen erkannt werden können (vgl. Spies 2015: 180 zit. n. Bauer 1990: 8). In der *Gegenstandsreflexion* wird diskutiert, was allseits als schöne Mathematik gilt und welche „Klassiker“ es in der Mathematikästhetik gibt (vgl. Spies 2015: 180 zit. n. Bauer 1990). Es geht jedoch auch um Fragen zur

Mathematikästhetik als Teildisziplin der Philosophie, über die beispielsweise reflektiert wird, ob Mathematik eine Kunstform ist, was Mathematik mit Künsten gemeinsam hat oder wie sich unterschiedliche Stile zeigen, wenn stilistisch etwa mehrere Wege zum Lösen einer Aufgabe in Frage kommen und man sich für einen Weg explizit entscheiden kann (vgl. Spies 2015: 180 f.). *Bedeutungs- bzw. Sinnreflexion*: Die Reflexionsebene hier ist die reine Mathematik[3], die durch Schönheit und Kunstförmigkeit Anerkennung findet (vgl. ebd.: 181). Selbst entwickelte, kreative Problemlösungsprozesse können reflektiert werden, Begriffsbildungsprozesse können dokumentiert werden oder gemeinsame Themen, die sowohl die Mathematik als auch die Kunst beinhalten, können verglichen werden (vgl. ebd.: 182). *Selbstreflexion*: An dieser Stelle kann die ästhetische Erfahrung selbst zum Gegenstand der Reflexion werden: Hervorgerufen wird dies durch Fragen zur epistemischen Transparenz oder zur emotionalen Wirksamkeit – z.B. die Frage, ob die Lösung für das Subjekt erstaunlich einfach war, warum dies erstaunlich war, wieso oder ob es ein „Aha!-Erlebnis" gegeben hat oder welchen Lösungsweg es am attraktivsten empfunden hat (vgl. ebd.). In Abb.2 wird ein Beispiel gegeben, wie eine solche Selbstreflexion in Mathematikbüchern angeregt werden können: Lernende werden gefragt, welchen Lösungsweg sie am schönsten finden und warum.

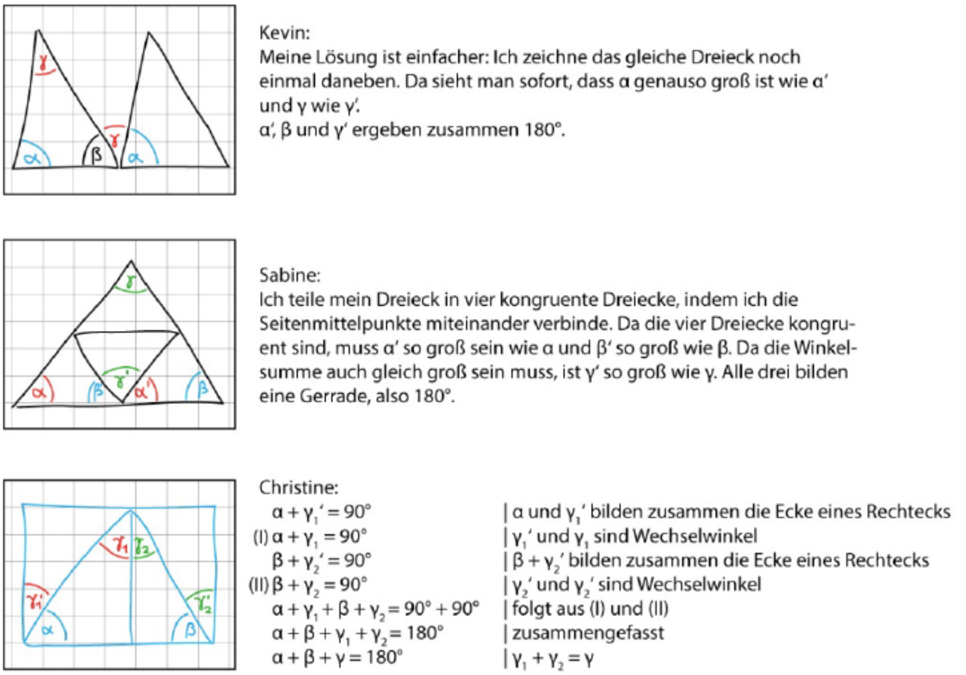


Abb. 2: Reflexion: Welcher Lösungsvorschlag gefällt am besten
Quelle: In Anlehnung an Spies (2015: 183)

[3] Unterschieden wird die *„reine Mathematik"* von der *„angewandten Mathematik"* , wobei der reinen Mathematik eigene Realität zugeschrieben wird, die unabhängig vom menschlichen Erfindungsgeist- und losgelöst von der Gesellschaft ist und wohingegen es bei der angewandten Mathematik um die Nützlichkeit und Relevanz in Alltag und Gesellschaft geht (vgl. Loos/Ziegler 2015: 3 f.).

Deutlich wird, dass trotz einer determinierten Wissenschaft viel Raum gegeben ist, um subjektive Entscheidungen treffen zu können (vgl. Spies 2015: 182). Die ästhetische Perspektive der Mathematik geht über die außermathematischen Anwendungen hinaus, sie lässt sich überprüfen und schafft durch das subjektiv epistemische und emotionale Erleben einen neuen Reflexionsgegenstand, der *bildungswirksam* ist: Die „Beziehung von Mensch und Mathematik" (vgl. ebd.: 184).

In Verbindung mit dem zweiten Kapitel lässt sich festhalten, dass es einerseits viele Gemeinsamkeiten zwischen Kunst und Mathematik gibt und dass Mathematik andererseits selbst zur Kunst werden kann. Kunstwerke sowie schöne Stücke Mathematik bieten die Möglichkeit zur ästhetischen Erfahrung, sofern sich ein Subjekt mit ihnen auseinandersetzt. Die ästhetische Erfahrung ist mit reflexiven Prozessen verbunden, die sich anhand des hermeneutischen Zirkels erklären lassen. Die reflexiven Prozesse gehen mit verschiedenen aufeinander aufbauenden Erkenntnisstufen einher. Dadurch, dass Kunst bzw. der Kunstcharakter von Mathematik Reflexion ermöglichen – und zwar im Rahmen der ästhetischen Erfahrung, zu der es in Auseinandersetzung mit ihnen kommt – werden sie bildungswirksam, denn das Subjekt gelangt dabei zu einer neuen Erkenntnis. Bezüglich der Parallelen von Kunst und Mathematik lässt sich festhalten, dass sowohl die Kunst mit Augenblicken historischer und kultureller Praktiken in Verbindung steht als auch die Mathematik: So weisen Loos und Ziegler (2015: 3) daraufhin, dass Mathematik neben ihrer Anwendung auch als Kulturleistung gesehen werden kann, die sich über Jahrtausende immer weiterentwickelt hat. MathematikerInnen unterliegen beim Entdecken und Konstruieren von Mathematik immer der aktuellen Zeit und Gesellschaft, in der sie leben und von der sie motiviert werden (vgl. ebd.: 7). Offensichtlich wird Mathematik jedoch weder als Kunst noch als Kulturleistung wahrgenommen. Naheliegend ist, dass ihr Potenzial erst „sichtbar" gemacht werden muss. Dies führt zum nächsten Kapitel, in welchem es um die ästhetische und lernförderliche Visualisierung geht.

4 Lernförderliche und ästhetische Visualisierung

„Die Visualität und die Bilder kehrten zurück – und das mit Macht" (Stiegler 2008: 2). In diesem Kapitel geht es darum, die Begrifflichkeit *Visualisierung* einer Definition zuzuordnen und das Potenzial sowie die Wirkmächtigkeit von Visualisierungen aufzuzeigen. Dieses Wissen soll für den geplanten Gestaltungsvorschlag helfen, das Interesse sowie die Aufmerksamkeit für ein bestimmtes und noch unbekanntes mathematisches Thema herzustellen, welches das Potenzial für eine ästhetische Erfahrung liefert. Zudem liegt nahe, dass die angestrebte ästhetische Erfahrung in der Mathematik nur gelingen kann, wenn die entsprechenden mathematischen Inhalte verstanden werden. Um dieses Verständnis ermöglichen zu können, soll ebenfalls auf visuelle Mittel zurückgegriffen werden. Somit gilt es in diesem Kapitel auszuarbeiten, was eine ästhetische aber auch lernförderliche Visualisierung ausmacht.

4.1 Was ist Visualisierung?

Visualisierung entstammt dem lateinischen Wort „Visualis“, bedeutet „zum Sehen gehörig“ und meint, dass es einen Transformationsprozess von Daten, Informationen und Wissen in visuelle Darstellungsformen gibt (vgl. Gruber-Beerfeltz 2009: 14). Durch Schmitz lässt sich ergänzen, dass Visualisieren im metaphorischen Sinne aber auch „Einsicht“ oder das mentale „Verstehen“ bedeuten kann (vgl. Schmitz 2017: 16). Ferner kann Visualisierung sowohl als Prozess als auch als Produkt gedeutet werden: Visualisieren als Prozess meint den Vorgang des Visualisierens, wobei dann verschiedene Tätigkeiten als Visualisierung bezeichnet werden, Visualisierung als Produkt meint die Ergebnisse des Prozesses – etwa ein mental oder external erzeugtes Bild, welches durch die Tätigkeiten entstanden ist (vgl. ebd.: 15 f., 20 f.).

4.2 Potenzial und Wirkung von Visualisierungen – wie Bilder Wahrheiten verkaufen

Bilder haben das Potenzial, eigene Wirklichkeiten zu schaffen und damit rücken sie in das Interessensfeld der Werbepsychologie, verschiedener Wissenschaften, der Ökonomie und der Politik (vgl. Brodbeck 2020: 67 f.). Ötsch und Graupe (2020: 2) differenzieren am Beispiel der Wirtschaft aus, dass Bilder über Zustände der Wirtschaft, über die Auswirkungen auf die Zukunft oder von designten Produkten als *Realität* empfunden werden, worauf die wirtschaftliche Handlung dann Bezug nimmt. Gender Marketing könnte ein konkretes Beispiel dazu liefern, inwiefern Bilder Wirklichkeiten schaffen und die Wahrnehmung prägen können: Anhand einer Untersuchung zu Coca-Cola Zero und Coca-Cola Light, ergaben sich Indizien dafür, dass Gender Marketing durch eine Werbung, die geschlechtsspezifisch gestaltet wurde, bestimmte Botschaften vermitteln konnte, mit dem Ergebnis, dass Coca-Cola Light tendenziell mit dem weiblichen Geschlecht assoziiert wurde und Coca-Cola Zero mit dem männlichen (vgl. Schütz/Sprenger/Falkenauer 2017: 43).[4] Die Werbung beeinflusst die Konsumentscheidungen dadurch, dass das Geschlecht mit bestimmten Stereotypen einhergeht d.h., dem jeweiligen Geschlecht werden spezifische Eigenschaften zugesprochen (vgl. ebd.: 37).

Wenn Bilder bzw. Visualisierungen ein so machtvolles Instrument sein können, wenn sie Realitäten schaffen können und Informationen überbringen können, stellt sich die Frage, ob der Effekt von guten Visualisierungen sich auch auf Schulmaterialien übertragen lässt. Zugespitzt gefragt: Wenn sich Produkte durch gekonnte Visualisierungen verkaufen lassen, lassen sich dann auch schulbezogene Themen verkaufen?

4.3 Visualisierung beim Lernen – Erkenntnisse für den Gestaltungsvorschlag

Anders als Texte, die abschnittweise gelesen werden, können Informationen in Bildern auf einen Blick erfasst werden (vgl. Niegemann et al. 2008: 223). In zwei Metaanalysen konnte festgehalten werden, dass die Behaltens- und Verstehensleistung erheblich verbessert werden konnte, wenn Bilder eingebunden wurden, wobei sich transformierende Bilder als besonders effektiv erwiesen haben (vgl. ebd.: 224). Insgesamt sind vier Funktionen zu erwähnen, die Bildern zukommen: Sie können eine kognitive-, motivationale-, dekorative- oder kompensatorische Funktion haben (vgl. ebd.: 222). Um Bilder sinnvoll gestalten- und zum Lernen nutzbar zu machen, wird im Folgenden thematisiert, welche neurowissenschaftlichen und kognitionspsychologischen Erkenntnisse zur Informationsverarbeitung vorliegen und wie Bildverstehen funktioniert, um anschließend Kriterien für eine lernförderliche sowie motivierende Gestaltung ableiten zu können.

4.3.1 Erkenntnisse aus dem Instruktionsdesign und der kognitiven Psychologie

<u>Multimedia</u>

Multimedia bezeichnet die Kombination von Visualisierungen und weiteren medialen Ebenen, wobei Visualisierungen bei der Wissensvermittlung insbesondere mit medialen Ebenen wie text- und auditiven Inhalten eingesetzt werden (vgl. Preuß/Kauffeld 2019: 404). In zahlreichen Büchern und Arbeiten finden drei Theorien immer wieder Erwähnung: 1.) Cognitive Load Theory, 2.) Kognitive Theorie des multimedialen Lernens (Mayer), 3. Integratives Modell des Text- und Bildverstehens (vgl. z.B. Astleitner et al. 2006; vgl. Niegemann et al. 2008; vgl. Rey 2009;

[4] Die Aussage wird im Ergebnis gestützt, aber gleichzeitig durch eine kritische Bezugnahme zur Methode der Untersuchung, relativiert

vgl. Reinhold 2018; vgl. Preuß/Kauffeld 2019). Gemeinsam ist allen drei Theorien der Bezug zum *Gedächtnismodell* von Baddeley (1992) (vgl. Niegemann et al. 2008: 50; Rey 2009: 23, 37). Letzteren beiden ist zusätzlich die *duale Kodierungstheorie* nach Paivio (z.B. 1986) gemeinsam (vgl. Rey 2009: 37). Im Folgenden geht es weniger darum, die Theorien in ihren Details vorzustellen, vielmehr sollen die gemeinsamen genannten Bezugspunkte festgehalten werden, die bereits Aufschluss darüber geben, worauf bei einer gehirngerechten Gestaltung zu achten ist.

<u>Theorie der dualen Kodierung (Paivio)</u>
Verbale oder nonverbale Stimuli (Reize der Außenwelt) aktivieren das sensorische Register[5] (vgl. Seufert 2017: 5). Je nach Art des Reizes, gelangt dieser in das verbale oder non-verbale System (vgl. ebd.), wobei Wörter, Sätze und Texte ausschließlich im verbalen System verarbeitet werden, wohingegen Bilder imaginal *oder* verbal enkodiert werden (vgl. Schnotz 2001: 299). Die Informationen interagieren innerhalb des jeweiligen Systems, gleichzeitig sind die Systeme jedoch auch durch referentielle Verbindungen miteinander verknüpft und können sich somit gegenseitig aktivieren (vgl. Seufert 2017: 5). So kann etwa aus der Repräsentation „Hund“, die auditiv ist, ein mentales Bild eines Hundes generiert werden (vgl. Rey 2009: 34).

<u>Arbeitsgedächtnismodell (Baddeley)</u>
Im Arbeitsgedächtnismodell werden drei Komponenten angenommen: 1. Die zentrale Exekutive, die die Subsysteme[6] steuert (vgl. Rey 2009: 23), 2. der visuell- räumliche Notizblock, der Informationen erhält, die optisch wahrnehmbar und räumlich erfassbar sind (vgl. Reinhold 2018: 90), 3. die phonologische Schleife, die auditive Informationen verarbeitet (vgl. ebd.: 91). Die Informationen werden kurz im Arbeitsgedächtnis gespeichert, in der Mathematik können so auch Zwischenergebnisse während eines Rechenprozesses bereitgehalten werden (vgl. Zoelch/Berner/Thomas 2019: 28).[7] Es wird allerdings davon ausgegangen, dass dem Arbeitsgedächtnis eine begrenzte Speicherkapazität zugrunde liegt (vgl. ebd.: 90). Die

---

[5]Es wird in dem Kontext auch vom Ultrakurzzeitgedächtnis gesprochen (vgl. Zoelch/Berner/Thomas 2019: 27).
[6] Abbildungen aus dem Internet zufolge, scheinen die Subsysteme der visuell- räumliche Notizblock und die phonologische Schleife zu sein.
[7] Beim Addieren beispielsweise werden nicht nur Summanden gespeichert oder Ergebnisse aus dem Langzeitgedächtnis abgerufen, sondern Zwischenergebnisse können kurz präsent gehalten werden (vgl. Zoelch/Berner/Thomas 2019: 27).

Verarbeitungsgeschwindigkeit wird folglich erhöht, wenn nur wenige Informationen zeitgleich verarbeitet werden müssen (vgl. Born/Oehler 2020: 74).

Empfehlungen zur Gestaltung, Gestaltungsprinzipien

Multimedial gestaltete Wissensinhalte wirken sich positiv auf die Lernleistung aus, sofern einige relevante Gestaltungsprinzipien eingehalten wurden (vgl. Preuß/Kauffeld 2019: 404 f.). Diese leiten sich aus den zuvor beschriebenen Erkenntnissen ab und lauten wie folgt: 1. Das *Kohärenzprinzip*: Irrelevante Informationen sollten weggelassen werden, 2. Das *Signalisierungsprinzip*: Relevante Informationen dagegen sollten besonders hervorgehoben werden, 3. Das *Redundanzprinzip*: Informationen sollten nicht wiederholt und mehrfach genannt werden, 4. Das *räumliche Kontiguitätsprinzip*: Bilder und Texte, die zusammengehören, sollten nahe beieinander platziert werden (vgl. ebd.: 405 in Anlehnung an Mayer 2009[8]). Studien mit Blickbewegungsaufzeichnung (Hegarty/Carpenter/Just 1996) zeigen, dass Lernende Texte in Sequenzen lesen und nach jeder Sequenz den entsprechenden Aspekt in der Grafik betrachten. Dies kann durch eine sinnvolle Zerlegung des Textes und der zur Texteinheit zugeordneten Grafik erheblich vereinfacht werden (vgl. Niegemann 2008: 230 zit. n. Clark/Mayer 2002; Mayer 2005c). 5. Das *zeitliche Kontiguitätsprinzip*: Bilder und Texte, die zusammengehören, sollten simultan präsentiert werden (vgl. Preuß/Kauffeld 2019: 405).

Kritik

Kritisch anzumerken ist, dass motivationale und emotionale Aspekte nur unzureichend in den Modellen berücksichtigt werden (vgl. z.B. Rey 2009: 40). Jedoch werden gelernte Inhalte nach Born und Oehler (2020: 61 f.) deutlich besser im Langzeitgedächtnis abgespeichert, wenn der Lerngegenstand positiv bewertet wurde, da die *positive emotionale* Bewertung mit der Aktivierung des Hippocampus einhergeht. „Herausragend ist unser inneres ‚Belohnungssystem' das über den Neurotransmitter Dopamin gesteuert wird" (Born/Oehler 2020.: 62). Positive Erfahrungen führen zur Dopaminausschüttung und werden dadurch in kortikalen Strukturen abgespeichert (vgl. ebd.). Auch die motivationalen Ebenen beeinflussen das Lernen, denn zwischen kognitiven und motivationalen Variablen gibt es eine direkte Verbindung – dies ist die

[8] Was die Verarbeitung von Informationen betrifft, ist die Annahme in dieser Theorie, dass es zwei kognitive Systeme gibt: Das eine System ist der Aufnahme von Informationen zugänglich, das andere für die Interpretation der Informationen (vgl. Reinhold 2018: 109). Es findet eine duale Kodierung statt (vgl. Reinhold 2018: 109 zit n. Paivio 1990). Bezüglich des Arbeitsgedächtnis haben die kognitiven Systeme in dieser Theorie Kapazitäten, die jeweils unabhängig voneinander sind (vgl. Reinhold 2018: 110 zit. n. Mayer 2009).

Aufmerksamkeit (vgl. Astleitner et al. 2006: 10). Somit sind für die Visualisierung bzw. Gestaltung von Lerninhalten – neben der Berücksichtigung der Speicherkapazität des Arbeitsgedächtnisses – Erkenntnisse heranzuziehen, die die motivationalen und emotionalen Aspekte berücksichtigen.

4.3.2 Erkenntnisse zur menschlichen Wahrnehmung

Einer Untersuchung von Studierenden der University of Sydney zufolge, wurden attraktiver gestaltete Infografiken länger und mit höherer Genauigkeit von den Testpersonen betrachtet: „Aufgabenstellungen wurden in Verbindung mit ästhetisch ansprechenden Grafiken geduldiger bearbeitet und weitaus seltener abgebrochen als solche, deren grafische Darstellung als unattraktiv bezeichnet wurde" (Delekta 2010: 59). Für eine langfristige Speicherung von Informationen ist es notwendig, dass die Information so gestaltet ist, dass sie einen Reiz auslöst und die Aufmerksamkeit auch aufrechterhalten wird, um sich mit dem Gegenstand intensiver und schließlich auf einer inhaltlichen Ebene auseinandersetzen zu können (vgl. ebd.: 59).

<u>Visuelle Wahrnehmung</u>

Visuelle Wahrnehmung bedeutet das individuelle *Interpretieren* von wahrgenommenen Gestalten, es geht weniger um die tatsächlichen Wahrnehmungsbilder (vgl. Moritz 2019: 62). Individuell, weil das Wahrnehmen von Informationen vom persönlichen Sehvermögen, von persönlichen Erfahrungen und kulturellen Ausprägungen[9] abhängig ist (vgl. ebd.). Die visuelle Wahrnehmung kann als offenes System gesehen werden, das sich durch individuelle Erfahrungen fortlaufend ändert (vgl. ebd.). Gesucht wird nun ein Anhaltspunkt, der eine objektivere Grundlage schafft, sodass RezipientInnen unabhängig von ihren individuellen Erfahrungen oder kulturellen Prägungen von entsprechend gestalteten Lernmaterialien profitieren können. „Für die Analyse und Klassifizierung der Wahrnehmungsphänomene existieren unterschiedliche Ansätze einer allumfassenden Gestalt- und Ganzheitspsychologie, mit der eine wissenschaftlich fundierte Theorie zur Funktionsweise von visuellen Zeichen- und Ordnungssystemen etabliert werden soll" (ebd.: 62). Resultiert sind konkrete Gestaltgesetze, die im folgenden Abschnitt vorgestellt werden.

[9] Kulturell verschieden sind z.B. die Leserichtung oder die Bedeutung von Farben (vgl. Moritz 2019: 62).

Gestalttheorie und Gestaltungsgesetze

> „Die gestalterischen Aussagen werden explizit davon bestimmt, inwieweit es einem Designer gelingt, das Zusammenspiel von Gestaltungselementen visuell eindeutig und ästhetisch ansprechend zu visualisieren. Gestalterische Aussagen sind ein wichtiger Bestandteil der visuellen Kommunikation und tragen wesentlich zur Informationsvermittlung bei“ (Moritz 2019: 70).

Nach der Gestalttheorie entspricht die wahrgenommene Welt der Wahrheit, sodass verinnerlichte Erfahrungen zu assoziativen Verknüpfungen führen und visuelle Eindrücke strukturieren (vgl. Moritz 2019: 63). Elemente werden nach Form, Farbe[10] und Größe geordnet, um nach bereits bekannten Mustern zu organisieren und zu interpretieren (vgl. ebd.: 63). Ein Teil der Visualisierung wird beim Ordnen als Figur, die im Vordergrund ist, interpretiert und alles Weitere als Hintergrund (vgl. ebd.). Die vordergründige Figur charakterisiert sich durch Formen, die dominant und symmetrisch sind, durch Konturen und Flächen, die einfach erkennbar sind, sowie durch Flächen, die stark strukturiert sind und sich vom Untergrund abheben (vgl. Moritz 2019: 64). Damit ist das wichtigste Ordnungsprinzip die Vordergrund-Hintergrundbeziehung (vgl. ebd.). Zudem bevorzugt das menschliche Wahrnehmungssystem „einfache und übersichtlich geordnete visuelle Strukturen in geometrischer und symmetrischer Anordnung mit hohem Aufmerksamkeitswert, die ästhetischen und harmonischen Maßstäben gerecht werden“ (ebd.: 64). Geordnete Formen wirken prägnanter und rufen somit eine höhere Aufmerksamkeit hervor (vgl. ebd.: 68). Im Folgenden werden diejenigen Gestaltungsgesetze vorgestellt, die für das Vorhaben in der Arbeit von Bedeutung sind. [11]

Gesetz der Figur-Grund-Trennung: Bei der Wahrnehmung hebt sich das Objekt vom Umfeld ab, wobei symmetrische, hellere und kleine Flächen als Figur wahrgenommen werden, wohingegen asymmetrische oder dunklere Flächen als Hintergrund wahrgenommen werden (vgl. cmyctastic 2021).[12] Gesetz der Gleichheit: Elemente, die z.B. in Form oder Farbe ähnlich sind, werden als zusammengehörig wahrgenommen (vgl. ebd.). Gesetz der Nähe: Ebenso

[10] Kollektivistische Farbmeinungen, die losgelöst von kulturellen Prägungen sind und die ein visuelles Ambiente schaffen, sind realitätsbezogene Farben, denn sie resultieren aus der Umwelt, z.B. Farbtöne, die sich aus den Jahreszeiten ergeben (vgl. Moritz 2019: 117). Farbklänge, die auf aufgehellten oder abgedunkelten Farben basieren, die aus der Natur bekannt sind und somit einem speziellen Nutzernaturell entsprechen, gelten also als harmonisch und als motivierend (vgl. Moritz 2019: 122).

[11] Es gibt noch das Gesetz der geschlossenen Form, d h., dass Rahmen Flächen abgrenzen, sodass Objekte innerhalb des Rahmens als zusammengehörig wahrgenommen werden, es gibt weiter das Gesetz der Erfahrung, d h., dass bei der visuellen Wahrnehmung schon bekannte Zusammenhänge abgerufen werden, sodass das Gehirn angedeutete und unvollständige Bilder um fehlende Teile zu diesem Bekannten ergänzt und es gibt das Gesetz der Kontinuität, d h., dass Elemente, die eine durchgehende Linie bilden, gruppiert werden (vgl. cmyctastic 2021).

[12] Geht es um den Kontrast, müsste jedoch auch eine schwarze Figur auf einem weißen Hintergrund dem Gesetz entsprechen.

werden Dinge, die nahe aneinander sind, als zusammengehörig wahrgenommen (vgl. ebd.). Gesetz der Prägnanz (Gesetz der guten Gestalt): Alles wird so einfach wie möglich, d.h. in Kreisen, Quadraten, Dreiecken und Rechtecken wahrgenommen, um Inhalte kurz und eindeutig darzustellen (vgl. ebd.).

Bildverstehen

Werden Bilder nur oberflächlich wahrgenommen, sodass der attentive (d.h. bewusste, analytische) Prozess sich dem präattentiven (d.h. dem automatisch und unkontrolliert geschehenden) Prozess *nicht* anschließt, wird die pädagogische Absicht nicht entschlüsselt (vgl. Niegemann et al. 2008: 211, 215). Dies kann an mangelndem Vorwissen des Rezipienten liegen oder an fehlender Vertrautheit der Darstellungs- oder Steuerungscodes (vgl. ebd.: 215). Zur Unterstützung des natürlichen Bildverstehens, innerhalb dessen das Subjekt die Abbildung auf dem Bild erkennt, werden Darstellungscodes genutzt, z.B. die Trennung von Figur und Grund, eine klare Schattierungs- und Farbinformation (vgl. ebd.: 216 f., 236). Zur Unterstützung des indikatorischen Bildverstehens, in welchem der Inhalt des Bildes verstanden werden soll, werden Steuerungscodes genutzt: Solche erfüllen den Zweck, die Rezeption des Bildes zu lenken sowie die Analyse des Lernenden zu unterstützen (vgl. Niegemann et al. 2008: 214, 236). Dies kann in Form von Texten geschehen oder in Form von Bildern, wobei im letzteren Fall zwischen expliziten und impliziten Steuerungscodes unterschieden wird (vgl. ebd. zit. n. Weidemann 1993): Explizite Steuerungscodes können dem Bild hinzugefügte Pfeile, farbige Hervorhebungen oder Ausschnittvergrößerungen sein, wodurch die Aufmerksamkeit auf relevante Bildelemente gelenkt oder (mit Pfeilen) Bewegungen angedeutet werden (vgl. Niegemann et al. 2008: 215). Implizite Steuerungscodes können nebeneinanderliegende Bilder sein, die dazu anhalten, miteinander verglichen zu werden oder die Hervorhebung bestimmter Elemente durch eine detaillierte Darstellung (vgl. ebd.).

Inwiefern helfen die gewonnenen Erkenntnisse, eine ästhetische wie auch lernförderliche Visualisierung im Gestaltungsvorschlag realisieren zu können? Bezüglich einer ästhetischen Visualisierung, die motivierend wirkt, hilft die Erkenntnis, dass Bilder Wahrheiten und Realitäten „verkaufen“ können. Bilder sind in der Lage zu kommunizieren und ein ganz bestimmtes Wissen zu vermitteln. Sofern es gelingt, die Botschaft/das Wissen „Mathematik ist spannend“ zu überbringen, kann davon ausgegangen werden, dass in dem Moment Interesse und Motivation hergestellt werden. Bezüglich einer ästhetischen Visualisierung, die lernförderlich wirkt, hilft die Erkenntnis, dass mit Gestaltprinzipien gearbeitet werden kann, um die begrenzte Speicherkapazität des Arbeitsgedächtnisse zu berücksichtigen. Ferner hilft die Erkenntnis, dass

Gestaltungsgesetze, Darstellungs- und Steuerungscodes helfen, Inhalte ästhetischer zu visualisieren, indem relevante Inhalte besser hervorgehoben- und zu verknüpfende Inhalte besser verdeutlicht werden. Im fünften Kapitel wird deutlich, inwiefern dies vor allem im Umgang mit Darstellungswechseln in mathematischen Aufgaben bedeutsam ist.

5 Visualisierung in der Mathematik und Herausforderungen

In diesem Kapitel wird erläutert, was unter Visualisierung in der Mathematik zu verstehen ist: Dazu wird erläutert, inwiefern sich Tätigkeiten sowie Produkte bzw. Resultate von Tätigkeiten als Visualisierungen begreifen lassen. Eine besondere Rolle nehmen Darstellungen bzw. Darstellungswechsel ein, da diese zum Teil mit großen Schwierigkeiten verbunden sind. Der Zusammenhang zum vorangegangenen Kapitel ist, dass sich dieses Problem mit Hilfe visueller Mittel lösen oder zumindest schmälern lässt.

5.1 Was ist Visualisierung in der Mathematik?

Visualisieren in der Mathematik bedeutet insbesondere das Arbeiten mit graphischen *Darstellungen*, die Verständnis und Erkenntnisgewinn zum Ziel haben, indem sie mathematische Konzepte repräsentieren (vgl. Schmitz 2017: 17). Ein Beispiel für ein mathematisches Konzept ist etwa ein gezeichnetes Rechteckt, welches in diesem Fall das geometrische Konzept – nämlich die geometrische Form „Rechteck – repräsentiert (vgl. ebd.). Teilt man dieses Rechteck in gleiche Teile, um einen Bruch darzustellen, wäre es das algebraische Konzept (vgl. ebd.). Dargestellt werden können also Konzepte bzw. geometrische und algebraische Konzepte, dargestellt werden können aber auch Daten und Zusammenhänge (vgl. ebd.).

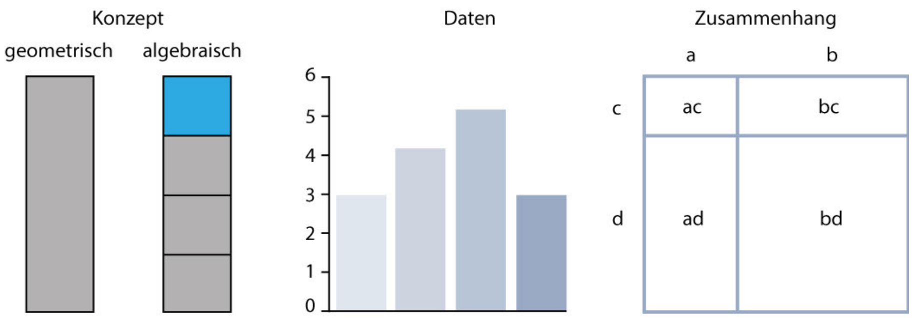


Abb. 3: Visualisierung von Konzept, Daten, Zusammenhang mit Rechtecken
Quelle: In Anlehnung an Schmitz (2017: 18)

In der Mathematik*didaktik* wurden Fragestellungen zur Visualisierung aus unterschiedlichen Disziplinen vereint (vgl. Schmitz 2017: 19). In dem Buch „Beliefs von Lehrerinnen und Lehrern der Sekundarstufen zum Visualisieren im Mathematikunterricht“ wird ein Modell erarbeitet, in welchem verschiedene Visualisierungsbegriffe mit Hilfe von fünf Tätigkeiten beim Visualisieren beschreiben lassen (vgl. ebd.: 8), wobei am Ende die Definition von Arcavis den Vorzug bekommt: Dieser Definitionsbegriff bietet einen guten Überblick zu dem, was unter Visualisierung verstanden werde kann und schließt Visualisierung als Prozess aber auch als Produkt mit ein (vgl. ebd.: 44 f.). Insgesamt lassen sich fünf Tätigkeiten in der mathematikdidaktischen Literatur festhalten, die Visualisierung definieren können und die im Folgenden kurz erklärt werden. Diese sind: Erstellen, Interpretieren, Vorstellen, Darstellen und Transformieren (vgl. ebd.: 40). Beim *Erstellen* und *Interpretieren* zieht Schmitz Theorien von Zimmermann und Cunningham (1991a) sowie Duval (2014) heran (vgl. ebd.: 24): Nach ersteren beiden meint Visualisierung das Erstellen und Verwenden geometrischer und geographischer Repräsentationen[13], wohingegen letzterer nur das Erkennen visueller Repräsentationen als Visualisierung bezeichnet (vgl. ebd.). Weil die Repräsentationen sowohl für das Erkennen als auch für das Verwenden Input für die Tätigkeit sind, fasst Schmitz Erkennen und Verwenden als Interpretieren zusammen (vgl. ebd.: 24). Repräsentationen als Output entstehen wiederum beim Erstellen (vgl. ebd.). Repräsentation meint in diesem Sinne die bildliche (und nicht nur symbolische) Darstellung (vgl. ebd.). Es wird also eine *nicht*-bildliche Darstellung oder eine Idee durch eine bildliche Darstellung zu einem neuen Gedanken (vgl. ebd.: 34). Das heißt, ein mathematischer Inhalt wurde zunächst sichtbar gemacht und das sichtbar gemachte wurde dann verwendet (vgl. ebd.: 42). Visualisierung kann folglich die Tätigkeit „Erstellen einer bildlichen Darstellung“, die Tätigkeit „Interpretieren einer bildlichen Darstellung“ oder beide Tätigkeiten bedeuten (vgl. Schmitz 2017: 29). Visualisierung als *Darstellung* bedeutet ebenfalls, dass etwas materiell dargestellt wird[14] – etwa ein gedankliches Bild (mentale Repräsentation), welches man dann zeichnet (externale Repräsentation), beziehungsweise bedeutet Visualisierung hier die Tätigkeit „materielles Darstellen“, durch welches der Wechsel von einer mentalen Repräsentation in eine externale Repräsentation ermöglicht wurde (vgl. ebd.: 29 f.). Wo ist der Unterschied zwischen Erstellen und Darstellen, wenn in beiden Fällen ein Wechsel von mental nach external stattfindet und das Ergebnis eine bildliche Darstellung ist? Der Unterschied ist, dass beim Erstellen ein Wechsel von nicht-bildlich (z.B. eine nicht-bildliche mentale Idee) nach bildlich stattfindet, wohingegen beim Darstellen schon ein Bild vorhanden ist – nämlich mental vor dem

[13] Zur sauberen Anwendung der Begrifflichkeiten, weist Schmitz darauf hin, dass alle bildlichen Darstellungen Repräsentationen sind, dass umgekehrt jedoch nicht alle Repräsentationen bildliche Darstellungen sind, denn Repräsentationen können zum Beispiel auch symbolisch sein (etwa ¼ als Repräsentation für „Bruch ein Viertel“) (vgl. Schmitz 2017: 46 f.).
[14] Schmitz bezieht sich hier auf Zitate von Boeckmann (1982: 14).

Auge – welches dann external dargestellt wird (vgl. ebd.: 30). Was bedeutet Visualisierung als *Vorstellung*? Im Bereich der Psychologie wird bezüglich der Visualisierung die Fähigkeit des räumlichen Denkens erforscht: Zum Beispiel das mentale Drehen eines Würfels (vgl. ebd.: 31). Gegeben ist also ein external bildliches Objekt (Input), welches sich als mentales Objekt vorstellt (Output) und mental verändert wird (vgl. ebd.: 31 f.). Visualisierung als *Transformieren* bedeutet, dass bildliche Objekte unterschiedlich verändert werden, wobei sich das Transformieren hier nicht nur auf mentale Repräsentationen bezieht, sondern genauso auch auf externale (vgl. ebd.: 33).

Mit Hilfe von drei Dimensionen können die fünf Tätigkeiten geordnet werden: 1. Beim Erstellen und Interpretieren werden Repräsentationswechsel von einer *nicht*-bildlichen Darstellung oder eine Idee durch eine *bildliche* Darstellung zu einem neuen Gedanken, 2. Beim Vorstellen und Darstellen wird der Wechsel *zwischen* mentalen und externalen bildlichen Darstellungen beschrieben und 3. wird beim Transformieren das Verändern mentaler *oder* externaler bildlicher Vorstellungen beschrieben (vgl. ebd.: 34). Die Tätigkeiten als Visualisieren wurden isoliert betrachtet. Schmitz (2017: 42) weist an der Stelle aber daraufhin, dass die beschriebenen Tätigkeiten nicht in allen Situationen voneinander trennbar sind und dass Visualisierung häufig auch in diversen Kombinationen dieser Tätigkeiten formuliert wird. Das Darstellen, das isoliert als Visualisierung betrachtet wird, meint im Sprachgebrauch häufig auch die Interpretation mit, ohne dass diese aber explizit erwähnt wird (vgl. ebd.: 43). Genauso korrelieren auch Transformieren und Interpretieren, weil das Interpretieren manchmal nur möglich ist, wenn vorher etwas transformiert wurde (vgl. ebd.). Für alle Visualisierungsprozesse gilt, dass eine bildliche Darstellung entweder als Input oder als Output beteiligt war (vgl. ebd.).

Der Fokus lag auf der Visualisierung als Tätigkeit. Insbesondere der Punkt, dass das Darstellen häufig isoliert betrachtet wird und Interpretationen jedoch häufig mitdenkt, sollte für das Kapitel 5.2 im Kopf behalten werden. Dies könnte beim Darstellungswechsel und den damit verbundenen Schwierigkeiten eine Rolle spielen.

5.2 Relevanz von Darstellungen und Herausforderungen im Umgang mit ihnen

In diesem Abschnitt geht es vor allem um Visualisierungen (bzw. Darstellungen) als *Produk*t, also dem Resultat einer Visualisierung als Tätigkeit und um damit im Zusammenhang stehende Herausforderungen, die sich auf den Darstellung*swechsel* beziehen.
„In der Mathematik werden unter Darstellungen Objekte verstanden, die für etwas Anderes stehen. Diese anderen Objekte sollen dann repräsentiert werden“ (Geyer 2018: 6). Im

vorherigen Kapitel wurde aufgezeigt, dass dies z.B. geometrische oder algebraische Objekte bzw. Konzepte sein können. Insgesamt lassen sich drei Arten von Darstellungen unterscheiden: Die enaktiven Darstellungen (eine mathematische Eigenschaft kann durch eine Handlung erfahren werden), die ikonischen Darstellungen[15] (Sachverhalte werden im Bild z.B. durch Skizzen oder genaue Zeichnungen dargestellt) sowie die symbolischen Darstellungen (vgl. Hilgers 2021). Letztere werden z.B. von Kuhnke (2012: 9) ausdifferenziert: Sie unterscheidet zwischen mathematisch-symbolischen Darstellungen und sprachlich-symbolischen Darstellungen aus. Die sprachlich- symbolischen Darstellungen können mit oder ohne Kontextbezug sein: „Timo geht zweimal in den Keller und holt jeweils vier Flaschen", „zweimal vier" (ebd.: 9). Eine mathematisch-symbolische Darstellung kann z.B. „1/4" von einem Kreis sein. Nach Dreher (2013: 227) können Darstellungen als Werkzeuge gesehen werden, um mathematisch denken- und kommunizieren zu können. Als Beispiel nennt Kuntze (2013: 18) mathematische Objekte, die häufig "unsichtbar" und „multipel" repräsentierbar sind, deswegen ist das Nutzen von Darstellungen von so hoher Bedeutung. An dieser Stelle sei angemerkt, dass im Unterricht aus zeitlichen Gründen häufig nicht mit bildlichen Darstellungen gearbeitet wird, dass einige Inhalte zu komplex gehalten werden, um sie bildlich darzustellen zu können oder dass einige LehrerInnen für manche Inhalte keine bildlichen Darstellungen kennen (vgl. Schmitz 2017: 373).

Für die Allgemeine Hochschulreife im Fach Mathematik gibt es Bildungsstandards, in denen unter anderem das Verwenden mathematischer Darstellungen als mathematische Kompetenz festgelegt ist (vgl. ebd.). „Diese Kompetenz umfasst das Auswählen geeigneter Darstellungsformen, das Erzeugen mathematischer Darstellungen und das Umgehen mit gegebenen Darstellungen" (ebd.: 16). Doch dadurch, dass das Wechseln zwischen Darstellungen häufig an ein höheres Anforderungsniveau gekoppelt ist, ergeben sich für Lernende viele Schwierigkeiten, Darstellungen zu nutzen (vgl. ebd.: 26). Friesen (2018: 171) weist darauf hin, dass scheinbare Verständnisprobleme vieler Lernenden häufig auf Probleme beim Darstellungswechsel zurückzuführen sind.

Folgende Erklärung dazu ist vorstellbar: Nach Schmitz (2017: 43) wird das Darstellen häufig isoliert als Visualisierung betrachtet und meint häufig die Interpretation mit, ohne, dass diese explizit erwähnt wird (s.o.). Möglicherweise werden Sachverhalte in Lehrbüchern dargestellt und dazugehörige Interpretationen bleiben unsichtbar. Vorstellbar ist, dass Lernende teilweise

[15] Dies geht Hand in Hand mit der Visualisierung „Darstellung" als Tätigkeit (s.o.)

Schwierigkeiten haben, diese Information, die in der Interpretation liegt, zu entschlüsseln. Folglich fällt es schwer, mit vorliegenden Darstellungen umzugehen oder selbst etwas darzustellen (Visualisierung „Darstellung“ als Tätigkeit). Im vierten Kapitel wurden Mittel zur Visualisierung[16] genannt, die den Darstellungswechsel vereinfachen können, z.B. das Verwenden von Steuerungscodes. Für die Lehr- und Lernmaterialien, die im sechsten Kapitel analysiert werden, gilt es zu überprüfen, inwiefern visuelle Hilfen für Darstellungswechsel eingesetzt wurden. Für den eigenen Gestaltungsvorschlag – ebenfalls im sechsten Kapitel – sollen visuelle Hilfen für den Darstellungswechsel verwendet werden. Zudem sollen auch die Interpretationen bzw. Denkschritte visualisiert werden, um Zusammenhänge zu verdeutlichen, denn das Verstehen der Aufgaben ist schlussendlich die Basis, um eine ästhetische Erfahrung in der Mathematik zu gewährleisten und Mathematik dadurch noch tiefgreifender zu verstehen.

6 Analyse der Visualisierungen von Lehr- und Lernmaterialien und eigener Gestaltungsvorschlag

Um Anhaltspunkte zu haben, ob die Visualisierung des eigenen Gestaltungsvorschlags sich auf Lehr- bzw. Lernbücher oder Lehr- bzw. Lernvideos beziehen soll, musste erfasst werden, welche Medien von Lernenden überhaupt genutzt werden. Bücher oder Videos? Gerade im Hinblick auf die Zeit der Coronapandemie, zu der der Unterricht sowohl für SchülerInnen als auch für Studierende digital stattgefunden hat, musste überlegt werden, ob sich etwas hinsichtlich der Nutzung bestimmter Lehr- und Lernmaterialien verändert hat, bzw. ob sich Tendenzen in eine bestimmte Richtung entwickelt haben. Eine differenzierte Betrachtung dazu befindet sich in Anhang A. Im Folgenden werden die Visualisierungen zweier Mathematikvideos sowie einer Aufgabe aus einem Mathematikbuch analysiert. Um eine Grundlage zu haben, auf der die Visualisierungen beurteilt werden können, werden die gewonnenen Erkenntnisse des vierten und fünften Kapitels herangezogen. Das Vorgehen, um eine Auswahl der Lehr- bzw. Lernmaterialien zu treffen, die im Folgenden analysiert werden, wird in Anhang B beschrieben. Für die Analyse der Visualisierung der ausgewählten Lehr- und Lernmaterialien sowie den im Anschluss folgenden eigenen Gestaltungsvorschlag, lassen sich folgende Punkte heranziehen:

[16] Visualisierung hier meint, dass Zusammenhänge sichtbar gemacht werden, dies unterscheidet sich vom Begriff der Visualisierung im mathematischen Kontext

- Mit welchen Mitteln könnte versucht worden sein, das Interesse für das mathematische Thema zu wecken, für das Thema zu motivieren und Aufmerksamkeit herzustellen?
- Wurden Gestaltungsprinzipien des Multimedia verwendet, um die Kapazität des Arbeitsspeichers zu berücksichtigen?
- Mit welchen Mitteln wurden verschiedene Darstellungen miteinander verbunden?
- Mit welchen Mittel wurde versucht, das natürliche und indikatorische Bildverstehen zu unterstützen?
- Wird zum eigenen Nachdenken und zur Reflexion angeregt, um eine ästhetische Erfahrung zu ermöglichen?

Um Verwirrungen vorzubeugen, ist darauf aufmerksam zu machen, dass das Gestaltungsgesetz „Gesetz der Nähe“ gleichzeitig auch dem Gestaltungsprinzip „Räumliches Kontiguitätsprinzip“ entspricht sowie auch einem impliziten Steuerungscode. Denn in allen Fällen geht es darum, dass Bilder bzw. Bilder und Texte als zusammengehörig empfunden werden, wenn sie nahe aneinander platziert sind. Ferner entspricht das Gestaltungsgesetz „Gesetz der Gleichheit“ in einigen Kontexten auch gleichzeitig dem Signalisierungsprinzip sowie einem expliziten Steuerungscode (ein Inhalt wird hervorgehoben). D.h. teilweise sind die Gestaltungsgesetze, Gestaltungsprinzipien und Steuerungscodes nicht trennscharf voneinander zu sehen. Da die Gesetze jedoch getrennt voneinander bewertet werden, kommt es teilweise zu Wiederholungen.

6.1 Videoanalyse zu Mathe-simpleclub: Extremwertaufgabe

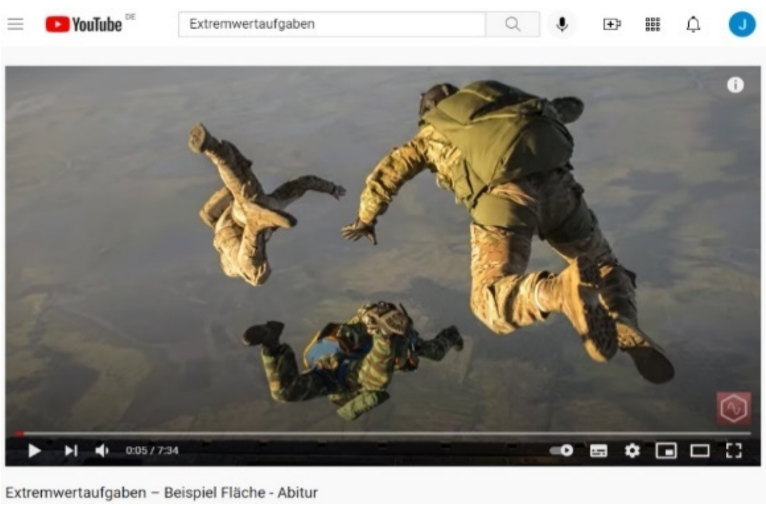


Abb. 4: Vorschau in Mathematikvideo: Motivation für Extremwertaufgabe
Quelle: Mathe-simpleclub (2015)

Mit welchen Mitteln könnte versucht worden sein, das Interesse für das mathematische Thema zu wecken, für das Thema zu motivieren und Aufmerksamkeit herzustellen?

Das Video beginnt mit einer kleinen Vorschau, in der drei Bilder präsentiert werden, die eine extreme Aktivität darstellen: Eines der Beispiele ist in der Abb.4 zu sehen. Bilder dieser Art könnten ausgewählt worden sein, um einen Überraschungseffekt (und damit Aufmerksamkeit) zu erzeugen, sofern die Erwartung war, dass das Video wie im klassischen Schulunterricht, mit einer Überschrift an der Tafel, beginnt. Möglicherweise sollen die Bilder auch mit „Coolness" in Verbindung gebracht werden: Den Mut zu haben, sich etwas Extremes zu wagen. Mut ist vermutlich eine positiv besetzte Emotion. Dadurch könnte versucht worden sein, eine positive Emotion bei den Betrachtenden des Videos auszulösen. Die Auwahl der Extrembeispiele könnte ferner darauf abzielen, dass Lernende sich in Erinnerung rufen, dass etwas *Extremes* etwas *Maximales* hat, was folglich auch für *Extrem*wertaufgaben gelten muss: An dieser Stelle wird eine Analogie hergestellt, die dazu beitragen kann, dass etwas Unbekanntes (Extremwertaufgabe) besser an etwas Bekanntes (die gezeigten Beispiele) anknüpften kann. Der Lernstoff wird so ggf. besser verstanden und behalten; folglich kann Lernfrust (eine unangenehme Emotion) vermieden werden.

Im Folgenden werden die Betrachtenden des Videos in die eine Geschichte eingebunden: In dieser gilt es dafür zu sorgen, dass die Schafe möglichst viel Platz haben und glücklich sind (vgl. 00:25-0:41). Die Betrachtenden werden dadurch zum Akteur bzw. zur Akteurin, möglicherweise mit dem Ziel, einer passiven Haltung entgegenzuwirken und sich mit der Geschichte zu identifizieren. Anschließend wird erneut darauf hingewiesen, dass die Schafsweide möglichst groß werden soll und dass es sich in diesem Video jedoch um ein Mathevideo handelt und das Ganze also ausgerechnet werden muss (vgl. 01:07-01:15). Es folgt ein Geräusch, das als ein ärgerliches Fluchen interpretiert werden könnte (vgl.01:15-01:18). Dies könnte der Versuch sein, bei den Lernenden das Gefühl von Belustigung und des Verstandenwerdens auszulösen, um dadurch mehr Leichtigkeit ins Lernen zu bringen. Im Ergebnis scheinen die YouTuber einige Anstrengungen unternommen zu haben, um diejenigen, die sich mit diesem Lehr- bzw. Lernvideo beschäftigen (müssen), zu motivieren. Dazu wurden sowohl visuelle als auch auditive Mittel eingesetzt. Letzteres könnte bezüglich der Interaktion ein Vorteil gegenüber Lehr- und Lernbüchern sein.

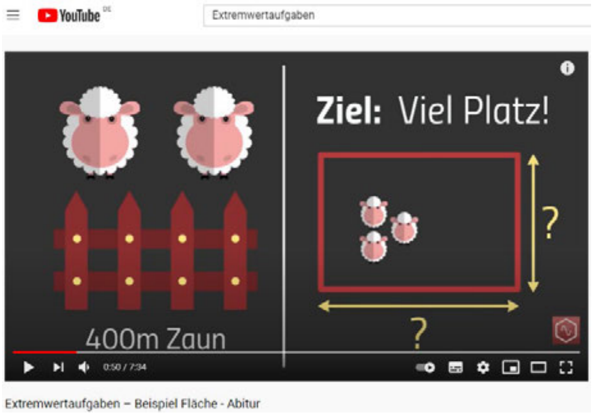


Abb. 5: Wenige und nur relevante Inhalte werden gezeigt
Quelle: Mathe-simpleclub (2015)

Wurden Gestaltungsprinzipien des Multimedia verwendet, um die Kapazität des Arbeitsspeichers zu berücksichtigen? Ab min. 00:27 wird folgende Vorgehensweise deutlich: Es folgt ein Satz und die relevantesten Inhalte des gesprochenen Satzes werden gemeinsam mit diesem unmittelbar eingeblendet. Die Vorgehensweise erfüllt das Kohärenzprinzip dahingehend, dass nur Inhalte genannt werden, die wirklich wichtig für das Verstehen der Aufgabe sind. Die Vorgehensweise erfüllt ferner das Signalisierungsprinzip, weil nur relevante Inhalte (durch das Einblenden dieser) hervorgehoben werden. Zudem wurden die Kantenlängen mit zwei gelben Pfeilen sowie einem Fragezeichen versehen (siehe Abb.5). Deutlich wird somit, dass diese Kantenlängen besonders relevant für die Bearbeitung der Aufgabe sind. Ferner wird das Redundanzprinzip erfüllt, weil Informationen durch die soeben beschriebene Vorgehensweise nicht mehrfach wiederholt werden. Das räumliche Kontiguitätsprinzip wird berücksichtigt, denn Bilder und Text sind nahe aneinander platziert. Die oben genannte Vorgehensweise zeigt, dass relevante Bilder und dazugehörige Texte während des Sprechens eingeblendet werden. Damit werden Text und Bild gemeinsam präsentiert, wodurch das zeitliche Kontiguitätsprinzip berücksichtigt wird. Folgt man dem Video, lässt sich feststellen, dass insgesamt zwar relativ viele Bilder mit kleinschrittigen Erklärungen präsentiert werden, dass jedes Bild an sich betrachtet jedoch nur wenige Informationen enthält. Damit wird die Speicherkapazität im Arbeitsgedächtnis nicht überlagert, denn es sind immer nur wenige Informationen auf einmal zu verarbeiten.

Mit welchen Mitteln wurden verschiedene Darstellungen miteinander verbunden? Im Folgenden (siehe dazu Abb.6) werden Lernende mit vier verschiedenen Registern/Darstellungen konfrontiert: Mit der sprachlich-symbolischen Darstellung (gesprochene Erklärungen), mit der ikonischen Darstellung (Zeichnung des Geheges in Form von einem Rechteck, d.h. als geometrisches Objekt), sowie der mathematisch-symbolischen Darstellung (Formel).

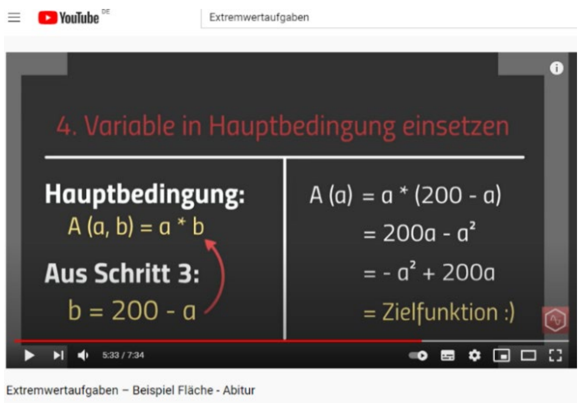


Abb. 6: Roter Pfeil als expliziter Steuerungscode
Quelle: Mathe-simpleclub (2015)

Abb. 7: Steuerungscode durch gleiche Farbe (Gelb)
Quelle: Mathe-simpleclub (2015)

In Abb. 6 wird ein expliziter Steuerungscode genutzt (roter Pfeil), der deutlich macht, dass das *Ergebnis* von b in die obere Gleichung *anstelle* von dem Buchstaben b einzusetzen ist. Dies wird zudem dadurch verdeutlicht, dass die Formel für die Hauptbedingung (linker Teil oben von Abb.6) in der gleichen Farbe (Gelb) wie die Schritte des Ausrechnens von b (linker Teil unten von Abb.6) präsentiert wird (Gesetz der Gleichheit). Dass b ausgerechnet und in die Formel (Hauptbedingung) eigesetzt wird, um damit die Zielfunktion zu errechnen, wird ebenfalls durch die gleiche Farbe (Gelb) bzw. durch das Gesetz der Gleichheit verdeutlicht. Die sprachlich-symbolische Darstellung ist gut vernetzt mit der ikonischen- sowie auch der mathematisch-symbolischen Darstellung, weil das Gesprochene zeitgleich in visueller Form eingeblendet wird (zeitliches Kontiguitätsprinzip). Die ikonische Darstellung wird auch mit der mathematisch-symbolische Darstellung gut verbunden: Der linke Teil von Abb.7 wurde im Video zuvor kleinschrittig erklärt, farblich hervorgehoben wurden die Kantenlängen a und b (Gesetz der Gleichheit, expliziter Steuerungscode, Signalisierungsprinzip). Im rechten Teil von Abb. 7 wird der Zusammenhang der Kantenlängen zur Formel durch die gleiche Farbe (Gelb) verdeutlicht (Gesetz der Gleichheit).

Mit welchen Mittel wurde versucht, das natürliche und indikatorische Bildverstehen zu unterstützen? Dazu wird das Gesetz der Figur-Grund-Trennung angewendet, denn der Hintergrund ist in einem dunklen Grau gestaltet und die Schrift sowie die Objekte sind in Weiß bzw. in Rot zu sehen und bieten einen guten Kontrast zum Hintergrund. Damit wird das natürliche Bildverstehen unterstützt. Zudem wird Gesetz der Gleichheit verwendet, weil beide Kantenlängen in Gelb gezeichnet sind (siehe Abb.7). Sie werden durch dieselbe Farbgebung als zusammengehörig wahrgenommen, was für die Aufgabe Sinn macht, denn für die Berechnung des Flächeninhalts werden die Seiten miteinander multipliziert (siehe Abb.7). D.h., das indikatorische Bildverstehen wird an dieser Stelle unterstützt. Beim Gesetz der Nähe werden Dinge als zusammengehörig wahrgenommen, die im Bild nahe aneinander platziert sind. Beispielsweise ist der gezeichnete Zaun in Abb.5 der (links im Bild) nahe an den Zaun, der als geometrisches Objekt – einem Rechteck (rechts im Bild von Abb.5) platziert und kann mit diesem als zusammengehörig wahrgenommen werden. Das Gesetz der Nähe entspricht zudem einem impliziten Steuerungscode und führt dazu, dass das indikatorische Bildverstehen gefördert wird. Nach dem Gesetz der Prägnanz werden Elemente so einfach wie möglich, z.B. in Kreisen oder Quadraten wahrgenommen. Das menschliche Gehirn bevorzugt einfache und geordnete Figuren in geometrischer und symmetrischer Anordnung; geordnete Figuren wirken prägnanter und ziehen die Aufmerksamkeit auf sich (siehe Kapitel 4.3.2). Die Schafe sowie das Gehege werden einfach dargestellt und beinhalten keine Details. Vermutlich ist diese Darstellungsform als zu verarbeitender Inhalt aus soeben genannten Gründen einfacher vom Gehirn zu verarbeiten.

Insgesamt wurden visuelle wie auch auditive Mittel genutzt, um die Motivation und das Interesse für das Thema herzustellen. Verschiedene Darstellungen sowie das natürliche als auch das indikatorische Bildverstehen wurden insbesondere durch Gestaltungsgesetze und durch verschiedene Steuerungscodes unterstützt. Allerdings werden keine Fragen gestellt, die zum eigenen Nachdenken anregen. Abgesehen davon, dass die Lernenden in die Geschichte eingebunden werden, empfangen sie lediglich die Erklärungen. Eine intensivere Beschäftigung mit „Aha-Erlebnissen" kann vermutlich nur durch gezielte und lösbare Aufgaben/Fragen entstehen, die zur Reflexion anregen.

6.2 Videoanalyse zu Mathe by Daniel Jung: Extremwertaufgabe

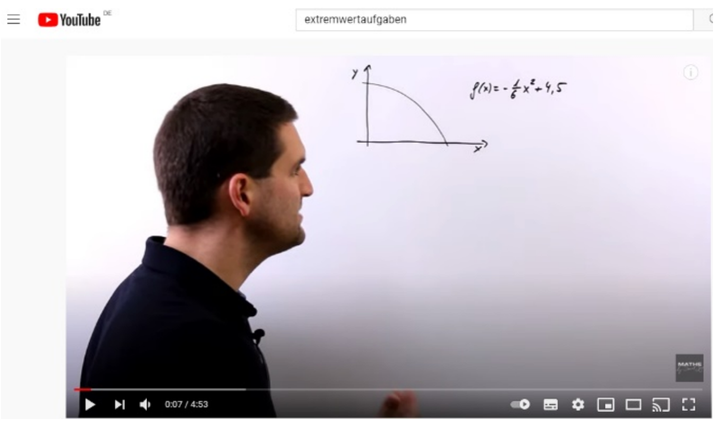


Abb. 8: Anfang eines Mathematikvideos: Extremwertaufgabe
Quelle: Mathe by Daniel Jung (2014)

Mit welchen Mitteln könnte versucht worden sein, das Interesse für das mathematische Thema zu wecken, für das Thema zu motivieren und Aufmerksamkeit herzustellen? In der Abb. 8 ist der Einstieg des Videos zu sehen: Vorbereitet wurde eine Skizze. Erklärt wird zunächst, unter welcher Playlist das Video gespeichert wird, welche Versionen thematisiert werden (mit Dreieck und Viereck), dass der Typ der Funktionsgleichung keine Rolle spielt und in welchem Quadranten sich das angeführte Beispiel bewegen soll (vgl. 00:03-0:32). Der Bereich des Quadranten (dies sind die römischen Zahlen im Bild), wird mit einer schnellen Handbewegung angedeutet. Zumindest im Einstieg ist nicht erkennbar, dass visuelle Mittel eingesetzt werden, die für das Thema motivieren oder die Aufmerksamkeit durch einen bestimmten visuellen Reiz erregen soll. Möglicherweise soll das Gefühl von Sicherheit erzeugt werden, wenn es um den Umgang mit solchen Aufgaben geht (Sicherheit wäre dann eine positive Emotion), indem darauf hingewiesen wird, dass der *Typ* der Funktion für die Bearbeitung der Aufgabe unrelevant ist: Lernende brauchen sich folglich nicht durch kompliziert erscheinende Funktionen verunsichern lassen. Ferner wird erwähnt, welche Versionen er noch thematisieren wird. Auch dies kann Sicherheit geben, falls die Sorge besteht, dass die Version, die es zu verstehen gilt, hier (noch) nicht erklärt wird.

Abb. 9: Flächeninhalt Dreieck soll maximal werden
Quelle: Mathe by Daniel Jung (2014)

Wurden Gestaltungsprinzipien des Multimedia verwendet, um die Kapazität des Arbeitsspeichers zu berücksichtigen? Das Kohärenzprinzip wird eingehalten, weil nur Informationen genannt werden, die für die Bearbeitung der Aufgabe relevant sind. Das Signalisierungsprinzip dagegen wird nicht eingehalten: Es wird lediglich der Hinweis gegeben, dass man sich, wie in seinem ersten Video erklärt, fragen soll, was minimal oder maximal werden soll und dass es in diesem Fall der Flächeninhalt des Dreiecks ist (vgl. 01:40-01:50). Die relevante Information (Der Flächeninhalt, den es zu maximieren gilt), hätte farblich oder in Textform hervorgehoben werden können. Das Redundanzprinzip wird eingehalten, weil Informationen nicht mehrfach wiederholt werden. Das räumliche Kontiguitätsprinzip wird nur zum Teil erfüllt: Die Funktion, die zum Graphen gehört, ist nahe an diesen platziert. Die Formel des Flächeninhalts für das Dreieck hat jedoch eine höhere Distanz zum Graphen und zu der Funktion. Für die visuelle

Wahrnehmung wäre es hinsichtlich der räumlichen Kontiguitätsprinzips einfacher, wenn auch die Formel für den Flächeninhalt nahe am Dreieck platziert worden wäre. Das zeitliche Kontiguitätsprinzip wird ebenfalls nur zum Teil erfüllt: An einigen Stellen wird die verbalisierte Formel zeitgleich visualisiert, indem sie aufgeschrieben wird (vgl. z.B. 01:50-1:54). Im weiteren Verlauf werden jedoch zwei Alternativen für eine Formel nur sprachlich erwähnt (vgl. 01:54- 02:06). Zudem wird darauf hingewiesen, dass die Variante, die er aufgeschrieben hat, zu bevorzugen ist. Der Grund dazu wird jedoch nicht genannt. Die Information zu den Alternativen kann Sicherheit geben: Dies wäre der Fall, wenn sich ein Schüler oder eine Schülerin für eine Alternative entschieden hätte und ohne diese Information möglicherweise den Entschluss gefasst hätte, falsch zu liegen. Möglicherweise sollten solche Informationen jedoch vor der Erklärung der Aufgabe gegeben werden (als Information, die im Hinterkopf zu behalten ist), um im Folgenden nicht den Erklärungsfluss zu unterbrechen und um das zeitliche Kontiguitätsprinzip einzuhalten. Im Verlauf werden der Ausgangszeichnung immer mehr Informationen hinzugefügt (vergleiche dazu Abb.8 und Abb.10). Dies könnte die Verarbeitung der Informationen hinsichtlich der begrenzten Speicherkapazität des Arbeitsgedächtnis erschweren.

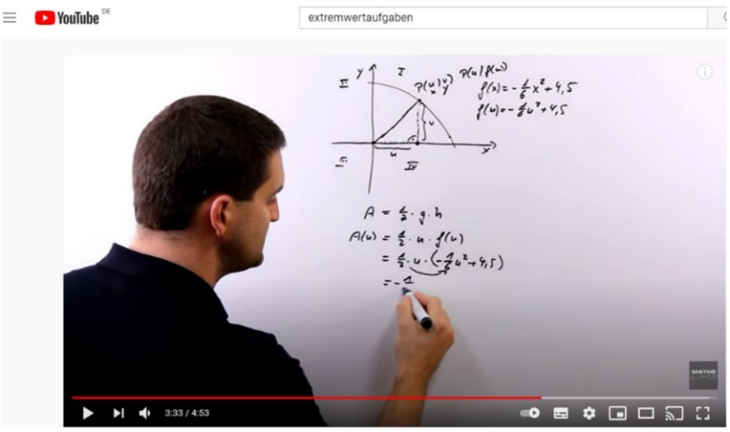


Abb. 10: Verbindungspfeil als expliziter Steuerungscode
Quelle: Mathe by Daniel Jung (2014)

Mit welchen Mitteln wurden verschiedene Darstellungen miteinander verbunden? Abb.10 zeigt, dass auch in diesem Video die sprachlich-symbolische-, die ikonische- sowie die mathematisch-symbolische Darstellung vorkommen. Es wird ein Punkt P (u/v) vorgegeben, mit dem (sprachlichen) Hinweis, dass dies einem X- bzw. Y-Wert entspricht (vgl. 00:42-00:50). Dadurch werden die mathematisch-symbolische und die sprachlich-symbolische Darstellung miteinander vernetzt. Im Weiteren werden die *Strecken* u und v eingezeichnet: Verbal und mit einer Handbewegung wird noch einmaldarauf hingewiesen, dass u dem x bzw. v dem y entspricht, die eingezeichneten Punkte werden miteinander zu einem Dreieck verbunden (vgl. 00:52-01:21). Die Darstellungen werden also verbal und mit einer Handbewegung miteinander in Verbindung gesetzt. An dieser Stelle hätten sich Steuerungscodes, z.B. in Form von Pfeilen angeboten oder unterschiedliche Farben: Zur Verdeutlichung, dass u dem x entspricht, hätte für diese beiden Buchstaben die gleiche Farbe gewählt werden können (Gesetz der Gleichheit), für die Information, dass v auf der Zeichnung y entspricht, hätten auch v und y in einer anderen gemeinsamen Farbe präsentiert werden können (Gesetz der Gleichheit). Nach dem Hinweis darauf, dass es die Fläche des Dreiecks zu maximieren gilt, wird die Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks aufgeschrieben (vgl. 01:48-02:06). Das Dreieck hätte farblich hervorgehoben werden können (impliziter Steuerungscode), um zu verdeutlichen, dass es diesen Flächeninhalt zu maximieren gilt. Aber auch eine sprachlich-symbolische Darstellung (etwa das Wort „maximieren“ in schriftlicher Form) hätten die Relevanz hervorheben können. Allerdings wird an folgender Stelle (siehe Abb.10) mit einem expliziten Steuerungscode in Form eines Verbindungsbogens gearbeitet: Dieser zeigt den ersten Schritt des Ausmultiplizierens an: ½ * - 1/6 (vgl. 03:31-03:32).

Mit welchen Mittel wurde versucht, das natürliche und indikatorische Bildverstehen zu unterstützen? Das Gesetz der Figur-Grund-Trennung wird durch die Farbgebung (schwarz-weiß) eingehalten, sie bietet ausreichend Kontrast, um Hintergrund und Figur voneinander abgrenzen zu können, wodurch das natürliche Bildverstehen unterstützt wird. Das Gesetz der Gleichheit kommt hier *nicht* zum Tragen, denn es wird nur mit einer Farbe gearbeitet. Im vorangegangenen Abschnitt wurden schon Vorschläge bezüglich farblicher Hervorhebungen gemacht, die das indikatorische Bildverstehen vermutlich besser unterstützt hätten. Das Gesetz der guten Gestalt wird schon durch die Aufgabe an sich erfüllt, da es um den Flächeninhalt eines Dreiecks (einer einfach wahrzunehmenden Figur) geht. Abgesehen von den aufgestellten Kriterien könnten hier noch die Schrift und die Skizze herangezogen werden, die von Hand gezeichnet sind. Schrift und Skizze wären besser erkennbar, wenn sie mit Hilfe eines Programms präsentiert worden wären. Dadurch hätte das natürliche Bildverstehen erleichtert werden können.

Das Video von Mathe-simpleclub erfüllt mehrere Kriterien, die eine gute Visualisierung ausmachen, auch werden mehrere motivationale Faktoren verwendet. Ein Vorteil ist auch, dass pro Bild weniger Informationen verwendet werden, wohingegen Daniel Jung in seinem Video mit einem Bild arbeitet, dem im Laufe des Videos immer mehr Informationen hinzugefügt werden, die zusätzlich nicht alle Gestaltungsgesetze berücksichtigen. Dadurch könnte die Arbeitsspeicherkapazität im Gehirn überlastet werden. Vorteilhaft ist jedoch, dass er noch weitere relevante Informationen benennt: Beispielsweise, inwiefern die Formel zur Berechnung des Dreieckflächeninhalts alternativ aussehen kann oder dass der Typ der Funktion zur

Bearbeitung der Aufgabe nicht von Bedeutung ist. Vorzuschlagen wäre ein Video, das aus genannten Gründen der Vorgehensweise wie auch der Gestaltung von Mathe-simpleclub folgt, allerdings mit dem Zusatz von relevanten Informationen, wie Daniel Jung sie nennt. In beiden Videos wird lediglich erklärt und Lernende bleiben somit in einer passiven Haltung: Möglicherweise könnten die BetrachterInnen des Videos mehr zum eigenen Denken angeregt werden, z.B. durch Fragen. Nach einer kurzen Pause zum Überlegen könnte das Video mit den Erklärungen fortfahren. Ein Vorteil von Videos gegenüber Büchern ist die Interaktion oder z.B. auch, das zeitliche Kontiguitätsprinzip einzusetzen (indem das Gesprochene zeitgleich visuell eingeblendet wird). Ein Nachteil ist, dass man zurückspulen müsste und nicht genau weiß, bis zu welcher Stelle, wenn man sich eine Erklärung oder ein Bild nochmals anhören bzw. ansehen möchte.

6.3 Analyse einer Extremwertaufgabe aus einem Mathematikbuch

Mit einem 40 m langen Zaun soll an einer Hauswand ein Rechteck eingezäunt werden. Wie lang müssen die Seiten des Rechtecks gewählt werden, damit es einen möglichst großen Flächeninhalt besitzt. Wie groß wäre dieser dann?

Fig. 1

Verstehen der Aufgabe

- Der Zaun ist 40 m lang. An der Hauswand wird kein Zaun benötigt.
- Der Flächeninhalt A (in m^2) soll maximal werden.

Einführung einer Variablen, Aufstellen einer Funktionsgleichung

Für die Länge der Querseiten AB und CD wählt man die Variable x. Da die Gesamtlänge des Zauns 40 m beträgt, bleibt für die Längsseite BC eine Länge von $40 - 2x$.
Die Funktion $x \to A$ mit der Funktionsgleichung $A = x \cdot (40 - 2x)$ ist quadratisch.
Der x-Wert des Scheitels der dazugehörigen Parabel ist die gesuchte Länge der Querseite.

Bestimmung des Scheitels

Man bestimmt den Scheitelpunkt, z.B. mithilfe des GTR, und erhält S(10|200). Da die Parabel nach unten geöffnet ist, ist der Flächeninhalt für $x = 10$ mit 200 am größten. Für die andere Seite des Rechtecks erhält man $40 - 2 \cdot 10 = 20$.

Antwortsatz

Wird für die Querseite des Rechtecks 10 m gewählt, so ist die Längsseite 20 m lang und der Flächeninhalt mit 200 m^2 maximal. Das heißt, das Haus muss mindestens 20 m lang sein.

Fig. 2

Abb. 11: Schwierigkeiten beim Darstellungswechsel
Quelle: Marita Friesen (2018: 171)

Mit welchen Mitteln könnte versucht worden sein, das Interesse für das mathematische Thema zu wecken, für das Thema zu motivieren und Aufmerksamkeit herzustellen? Möglicherweise wird versucht, durch ein realistisches Bild für das mathematische Thema zu begeistern: SchülerInnen erkennen, inwiefern die Beschäftigung mit Extremwertaufgaben sich auch im realen Leben als hilfreich erweisen könnte. Das realistische Bild könnte auch dahingehend motivierend sein, dass Lernende nicht nur mit einer mathematischen Zeichnung konfrontiert werden und eine bessere Vorstellung erlangen, was ein Extremwertproblem bedeuten kann.

Wurden Gestaltungsprinzipien des Multimedia verwendet, um die Kapazität des Arbeitsspeichers zu berücksichtigen? Das Kohärenzprinzip wird eingehalten, weil der Text nur Informationen enthält, die für die Bearbeitung der Aufgabe relevant sind. Das Signalisierungsprinzip wird allerdings nicht eingehalten: Relevante Informationen werden nicht hervorgehoben. Dies hätte durch einen impliziten Steuerungscodes (farbliche Hervorhebung) gemacht werden können. Das Redundanzprinzip wird eingehalten, weil Informationen nicht mehrfach wiederholt werden. Das räumliche Kontiguitätsprinzip wird zum Teil erfüllt: Bild und Text sind nahe beieinander platziert, jedoch liegen die mathematische Zeichnung und das realistische Bild weiter auseinander und werden möglicherweise nicht automatisch miteinander in Verbindung gebracht. Text und Bild werden gleichzeitig präsentiert und erfüllen damit das räumliche Kontiguitätsprinzip.

Mit welchen Mitteln wurden verschiedene Darstellungen miteinander verbunden? SchülerInnen werden in dieser Aufgabe mit vier Darstellungsregistern konfrontiert: Das 1. Register ist die Aufgabe in Textform an sich (das sprachliche Register[17]), das 2. Register ist das Schrägbild vom Gebäude mit einem eingezäunten, rechteckigen Grundstück (das ikonische Register[18]), wobei die Eckpunkte des Rechtecks mit den Buchstaben A, B, C und D versehen wurden, das 3. (geometrische) Register bezieht sich auf die Seitenlängen des eingezäunten Grundstücks/ Rechtecks und das 4. (algebraische) Register beinhaltet die Variable x, die auf dem Bild die kurze Seite des Zaunes darstellt (vgl. Friesen 2018: 171). SchülerInnen sollen in der Aufgabe die Seitenlänge des umzäunten Rechtecks herausfinden, wenn dessen Flächeninhalt möglichst groß ist. Im Folgenden wird nun für die Länge BC der Term 40-2x eingeführt, der jedoch in der Zeichnung weder zu sehen ist noch mit ihr verknüpft wird. „Allein in diesem Gedankengang stecken wiederum drei der unterschiedlichen Register mit eigenen Konventionen: (a) die lange Seite der Rechtecksfläche wird als Seite BC bezeichnet (geometrische Register), (b) im algebraischen Register als Term mit 40-2x formuliert und (c) als Längsseite des Zaunes bezeichnet (Register der Sachsituation). Dieser Gedankengang splittet sich wiederum in drei weitere Register (ebd.), die hier nicht weiter aufgeführt werden, da dieses Beispiel lediglich die Problematik präsentieren soll, die grafische Abbildung mit dem visualisierten Bild zu verknüpfen. Dieses Beispiel unterstreicht die angeführte Vermutung, dass das Problem darin liegt, dass Interpretationen (bzw. Gedankengänge) nicht mit dargestellt werden und folglich ist es

[17] Das sprachliche Register entspricht der zuvor definierten sprachlich-symbolischen Darstellung
[18] Das ikonische Register entspricht der zuvor definierten ikonischen Darstellung

schwerer, Darstellungswechsel nachzuvollziehen. In diesem Beispiel hätten sich zudem Steuerungscodes angeboten, die die Vernetzung der Darstellungen oder die Wechsel besser veranschaulicht hätten. Z.B. hätte der Term 40-2x die gleiche Farbe wie die Strecke BC haben können. Ferner hätten auch Gedankenschritte vermehrt visuell dargestellt werden müssen.
Mit welchen Mittel wurde versucht, das natürliche und indikatorische Bildverstehen zu unterstützen? Das Gesetz der Figur-Grund-Trennung wird zwar eingehalten, weil die Figuren erkennbar sind, allerdings hätte eine höhere Kontrastierung möglicherweise geholfen, das natürliche Bildverstehen noch besser zu unterstützen. Das Gesetz der Gleichheit wird hier nicht berücksichtigt: Dies hätten z.B. Elementen in gleicher Farbe sein können, die sowohl im realistischen Bild als auch in der mathematischen Zeichnung vorkommen und folglich als zusammengehörig wahrgenommen würden. Das Gesetz der guten Gestalt wird eingehalten, die Zeichnungen werden in einfacher Form präsentiert.

Auch in dieser Aufgabe wird lediglich eine Frage gestellt und möglicherweise fällt es einigen Lernenden schwer, diese Frage beantworten zu können, weil der Darstellungswechsel wenig visualisiert wurde. Im Rahmen der mathematikästhetischen Erfahrung wurde bezüglich der Inhaltsreflexion unter anderem das Vollziehen von Darstellungswechseln genannt (siehe Kapitel 3.2). Dafür hätte sich diese Extremwertaufgabe anbieten können, vorausgesetzt, dass Lernende die Aufgabe verstehen. Hier wurde das Potenzial von Visualisierungen nicht genutzt, um damit allen Lernenden die Aufgabe verständlich zu machen und somit wird einigen Lernenden vermutlich die Möglichkeit genommen, eine ästhetische Erfahrung im soeben beschriebenen Sinn, machen zu können.

6.4 Gestaltungsvorschlag

Das Thema, um das es im Gestaltungsvorschlag geht, ist das sogenannte Apfelmännchen- Fraktal: Im Rahmen der digitalen Kunst hat sich, abgesehen von 3-D-Bildern oder pixelfreien Vektorgrafiken, auch die *mathematische Kunst* entwickelt, in dieser lassen sich sogenannte Fraktale generieren (vgl. Bruder 2008: 1). Der Begriff „fraktal“ leitet sich von dem lateinischen Wort „fractus“ ab und bedeutet übersetzt „gebrochen“ (vgl. Deussen/Ningelgen 2018:109). Bei Fraktalen handelt es sich um geometrische Objekte, die – anders als andere geometrische Objekte – extrem gebrochen sind (vgl. Reiter o.J.: 13): „Denkt man sich beispielsweise ein Mikroskop auf einen Punkt einer glatten Kurve gerichtet, so stimmt diese bei zunehmender Vergrößerung immer besser mit der Kurventangente überein: die ‚Struktur‘ verschwindet immer mehr“ (ebd.). Entdecker des Fraktals war der Mathematiker Benoit Mandelbrot, der auch für die grafische

Darstellung der Fraktale berühmt geworden ist (vgl. Welt 2010.). Deshalb spricht man im Zusammenhang mit dem Apfelmännchen auch von der Mandelbrotmenge.
Anhand des Gestaltungsvorschlags soll zudem erkennbar werden, dass eine abstrakte Formel so veranschaulicht werden kann, dass auch jüngere SchülerInnen das Thema verstehen könnten. Zudem soll gezeigt werden, dass es eine große Spanne zwischen sehr leichter Darstellung und sehr abstrakter Darstellung gibt, innerhalb der viele Abstufungen möglich sind. Der Gestaltungsvorschlag dazu befindet sich der Form halber in Anhang C. Eine detaillierte Erklärung zur Visualisierung des Gestaltungsvorschlags befindet sich in Anhang D.

7 Fazit und Ausblick

Primäres Ziel dieser Arbeit war es, der Frage nachzugehen, wie das mathematische Interesse sowie das Verstehen mittels ästhetischer Visualisierung verbessert werden kann. Mit Bezug zum Titel der Arbeit „Ästhetische Erfahrung in der Mathematik – eine vergessene Seite wird sichtbar", ging es darum, herauszufinden, wie mathematische Aufgaben visualisiert werden können, um eine ästhetische Erfahrung in der Mathematik zu ermöglichen.
Um sich dem Thema anzunähern, wurde recherchiert, wie sich ästhetische Erfahrung in der Kunst begreifen lässt und wie diese in Bildungskonzepten legitimiert werden kann. Die ästhetische Erfahrung resultiert aus einer intensiven Beschäftigung mit einem Objekt (z.B. einem Kunstwerk). Dabei leitet das Objekt durch seine Beschaffenheit die Aktivitäten derjenigen Person, die sich mit diesem auseinandersetzt, denn das Objekt präsentiert eine bestimmte Botschaft und gibt somit den Rahmen vor, in welchem interpretiert und gedacht werden kann. Innerhalb des Rahmens sind die Aktivitäten der Person jedoch individuell und eigenständig. Alle Aktivitäten zusammen (die vom Objekt geleiteten sowie die eigenen), die in Auseinandersetzung mit dem Objekt entstehen, lassen sich als ästhetische Erfahrung begreifen. Der Versuch, das Objekt zu verstehen, geht mit hermeneutisch-reflexiven Prozessen einher, zwangsläufig wird danach gefragt, warum ein Künstler/eine Künstlerin diese Botschaft ausdrückt. Kunst ist bildungswirksam, weil sie zur Reflexion anregt und diese Reflexion ermöglicht neue Erkenntnisse. Das Verstehen der ästhetischen Erfahrung in der Kunst hilft Gemeinsamkeiten und Analogien in der mathematikästhetischen Erfahrung zu erkennen: Beiden ästhetischen Erfahrungen ist die Person-Objekt-Beziehung gemeinsam, die mit hermeneutisch-reflexiven Prozessen einhergeht. Beiden ist gemeinsam, dass sie sowohl im kreativen Schaffen erlebt werden können als auch beim Rezipieren. Beim kreativen Schaffen knüpft sowohl die Kunst als auch die Mathematik an historische und kulturelle Praktiken an. Kunst und Mathematik reagieren auf Themen der

aktuellen Zeit und beziehen sich im Schaffen mitunter auf Themen vergangener Zeiten, die zu jener Zeit prägend waren. Bezüglich des Rezipierens lassen sich folgende Analogie bilden: Schöne Stücke Mathematik sind analog zu Kunstwerken zu betrachten, denn so wie Kunstwerke bestimmte Konstellationen bereitstellen, damit Subjekte sich mit ihnen auseinandersetzen, gibt es in der Mathematik schöne Stücke Mathematik, die aufgrund spezifischer Eigenschaften eine ästhetische Erfahrung auf verschiedenen Ebenen ermöglichen. Die Erkenntnisprozesse der mathematikästhetischen Erfahrung sowie mögliche Emotionen (z.B. Erstaunen, Aha-Erlebnisse, Spannung, Überraschung) sind die gleichen wie jene, die anhand von Kunstwerken gemacht werden können. Da auch die mathematikästhetische Erfahrung mit reflexiven Erkenntnisprozessen verbunden ist, ist auch sie bildungswirksam.

Um das Potenzial von Mathematik durch den Einsatz von Ästhetik zur Geltung bringen zu können, wurde im Rahmen der Werbepsychologie untersucht, wie Bilder wirken. Es konnte gezeigt werden, dass Bilder „Wahrheiten" ausdrücken, damit eine bestimmte Zielgruppe ein bestimmtes Produkt möglichst kauft. Als sekundäres Ziel dieser Arbeit konnte anhand des Gestaltungsvorschlags konnte gezeigt werden, dass das Potenzial solcher Bilder sich auch auf schulbezogene Themen anwenden lässt. Um das mathematische Verstehen als Basis für die ästhetische Erfahrung zu verbessern, wurde erarbeitet, was eine lernförderliche und ästhetische Visualisierung ist. Eine lernförderliche Visualisierung lässt sich durch Gestaltungsprinzipien realisieren, die Anwendung dieser vermeiden eine Überlastung der begrenzten Speicherkapazität des Arbeitsgedächtnisses. Die Anwendung von Gestaltungsgesetzen hilft, Inhalte von Bildern zu erkennen und diese besser entschlüsseln und verstehen zu können. Ferner sollte erfasst werden, was Visualisierung in der Mathematik bedeutet. Diese kann sich in einer Tätigkeit oder als Produkt einer Tätigkeit ausdrücken. Als Tätigkeiten wurden das Erstellen, Interpretieren, Darstellen, Vorstellen sowie das Transformieren genannt. Visualisierungen als Produkt können mathematisch-symbolische Darstellungen, mathematisch-sprachliche Darstellungen sowie ikonische Darstellungen sein. In dem Kontext wurde festgehalten, dass der Darstellungs*wechsel* mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden ist. Scheinbare Verständnisprobleme sind häufig auf Probleme des Darstellungswechsels zurückzuführen. Die exemplarischen und somit keinesfalls einen Anspruch allgemeingültigen Erkenntnisgewinns anstrebenden Videoanalysen sowie die entsprechende Analyse einer Mathematikaufgabe eines Schulbuchs haben ergeben, dass es bezüglich der Visualisierungen hohe qualitative Unterschiede gibt und dass grundsätzlich wenig Anlass zur Reflexion gegeben wird.

Im Folgenden sollen zentralen Erkenntnisse zusammengefasst werden, um im Anschluss einen Blick auf Forschungsbedarfe zu geben. Wie in der Einleitung erwähnt, führt die

Kompetenzorientierung dazu, dass mathematisches Wissen zu oberflächlich behandelt wird, sodass SchülerInnen Schwierigkeiten haben, Abituraufgaben zu lösen oder in Studiengängen folgen zu können. Ein Teil, der die ästhetische Erfahrung ausmacht, sind positive Emotionen (Aha-Erlebnisse, Überraschung, Spannung, Erstaunen). Ein Aha-Erlebnis *ist* bereits ein Lernerfolg. Da die ästhetische Erfahrung mit einer intensiven Beschäftigung mit dem Lerngegenstand und mit reflexiven Erkenntnisprozessen einhergeht, lässt sich sagen, dass eine intensive Beschäftigung mit einem Lerngegenstand, die Möglichkeit zur Reflexion sowie resultierende positive Emotionen Lernerfolge ermöglichen. Naheliegend ist, dass Lernerfolge auch das Interesse fördern. Anhand des Gestaltungsvorschlags wurde deutlich, dass mathematische Themen, die nicht anwendungsorientiert sind, aber ästhetisch erfahren (und damit gut verstanden) werden, dazu führen, dass zwangsläufig auch das für die Praxis relevante mathematische Verständnis verbessert wird. Zudem konnte gezeigt werden, dass mathematisches, künstlerisches Schaffen, bei dem kein Zweck verfolgt wird, im *Nachhinein* dazu führen kann, dass das Resultat des Schaffens praktische Anwendung finden kann.

Die Erkenntnis, dass Bilder Realitäten präsentieren und den Kauf bestimmter Produkte beeinflussen können, hat ermöglicht, sich zu überlegen, wie sich ein mathematisches Thema „verkaufen“ lässt. Als weiteres wichtiges Ergebnis konnte darauf verwiesen werden, dass Gestaltungsprinzipien und Gestaltungsgesetze nicht immer angewendet werden. Dies wurde vor allem anhand der Analysen der Lehr bzw. Lernmaterialien deutlich. Das Anwenden der Gestaltungsprinzipien und Gestaltungsgesetze ist jedoch insbesondere für den Darstellungswechsel relevant, denn verschiedene Darstellungen können mit Hilfe dieser sehr viel besser in Beziehung gesetzt werden. Im Zusammenhang mit dem Darstellungswechsel ist zudem die Erkenntnis von Bedeutung, dass Darstellen häufig das Interpretieren impliziert. Genau hier scheint das Problem zu sein, denn abgesehen davon, dass das Potenzial einer guten Visualisierung nicht ausgeschöpft wird, fehlt Lernenden häufig der Bezug zwischen verschiedenen Darstellungen, weil Gedankengänge nicht visualisiert wurden**.** Im Unterricht wird häufig aus bestimmten, wie mutmaßlich etwa zeitlichen Gründen nicht mit bildlichen Darstellungen gearbeitet oder weil einige Inhalte als zu komplex gehalten werden, um sie bildlich darzustellen. Dabei wurde am Beispiel des Darstellungswechsel deutlich, wie wichtig es ist, *gerade* abstrakte Inhalte besser zu veranschaulichen. Anhand des Gestaltungsvorschlags konnte gezeigt werden, dass es grundsätzlich möglich ist, abstrakte Inhalte anschaulich und verständlich zu erklären und verschiedene Darstellung miteinander in Beziehung zu setzen, wenn das Potenzial der lernförderlichen und ästhetischen Visualisierung genutzt wird. Anhand der Erkenntnisse lässt sich die Frage, die der

Arbeit zugrunde lag, wie folgt beantworten: Ästhetische Visualisierungen in der Mathematik können das Interesse herstellen, indem Bilder genutzt werden, die versuchen, das Interesse für ein bestimmtes mathematischen Thema zu wecken. Das Verstehen kann durch die Anwendung von Gestaltungsprinzipien und Gestaltungsgesetzen verbessert werden und dadurch, dass abstraktes Wissen durch anschauliche Bilder dargestellt wird. Das Nutzen von Bildern kann zudem die Reflexion anregen, um sich intensiver mit einem Thema zu befassen. Das mathematische Verstehen durch Möglichkeiten der Visualisierungen zu erleichtern und zu verbessern ist die Basis, um eine ästhetische Erfahrung machen zu können. Nur wenn der Inhalt verstanden wird, kann im nächsten Schritt die Schönheit von Mathematik, die auf verschiedenen Ebenen erkannt und entdeckt werden. Obwohl grundsätzlich gezeigt werden konnte, dass das Potenzial ästhetischer Visualisierungen nicht genutzt wird und diese sich als hilfreich erweist, ist bezüglich des Hervorrufens mathematischen Interesses ungewiss, wie hoch der Anteil der Ästhetik ist, der motivierend wirkt. Beispielsweise wurden in dem Video von Mathe-simpleclub häufig auditive Mittel genutzt, um zu motivieren. Innerhalb der Recherche ist zudem der Eindruck entstanden, dass es unterschiedliche Vorstellungen und Konzepte gibt, die einen guten Mathematikunterricht ausmachen. Es wäre jedoch interessant herauszufinden, was bei mathematikinteressierten Menschen tatsächlich das Interesse hervorgerufen hat. Entsteht das Interesse im Unterricht? Entsteht das Interesse, weil LehrerInnen motivierend wirken oder besonders gut erklären können? Oder entsteht mathematisches Interesse außerhalb des Unterrichts, z.B. durch die Eltern, die sich für Mathematik interessiert haben. Ist das Interesse vielleicht schon in der Kindheit entstanden – etwa beim Zusammenbauen von Legosteinen? Um diese Fragen beantworten zu können und um herauszufinden, ob es bei mathematikinteressierten Menschen einen Konsens gibt, der das Interesse hervorgerufen hat, könnte eine empirische Studie angelegt werden, in welcher mathematikinteressierte Menschen befragt werden. Erkenntnisse dazu wären für den Unterricht aber auch für die Gestaltung von Lernmaterialien, die dem Lernen in Eigenregie dienen, relevant.

Für die Soziale Arbeit ergeben sich folgende Ziele: Im Sinne des Empowerment-Konzepts und mit Blick auf das Individuum können zwar Lernmaterialien entwickelt werden, die das Lernen in Eigenregie vereinfachen. Diese können als Ressource gesehen werden, auf die das Individuum beim Lernen in Eigenregie zurückgreifen kann und die der zeitlichen Verknappung im Unterricht entgegenwirken. Dennoch gilt es, durch sozialpolitisches Engagement neoliberalen Einflüssen im Schulsystem entgegenzuwirken, damit auch im Unterricht eine Rückkehr zur Inhaltsorientierung stattfinden kann. Das bedeutet unter anderem, dass finanzielle Mittel zur Verfügung gestellt werden, um die genannten Forschungslücken zu schließen.

Literaturverzeichnis

ARCAVI, A. (2003): The role of visual representations in the learning of mathematics. In: Educational Studies in Mathematics, *52* (3), 215-241.

ASTLEITNER, H./PASUCHIN, I./WIESNER, C. (2006): Multimedia und Motivation – Modelle der Motivationspsychologie als Grundlage für die didaktische Mediengestaltung. In: MedienPädagogik Zeitschrift für Theorie und Praxis der Medienbildung, 1-19.

BADDELEY, A. D. (1992): Working memory. In: Science, 255, 556-559.

BAUER, L. (1990): Mathematikunterricht und Reflexion. In: mathematik lehren, 38, 6-9.

BENDER, S./Zentrum für Schul- und Bildungsforschung (ZSB) der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg (Hg.) (2010): Kunst im Kern von Schulkultur. Ästhetische Erfahrung und ästhetische Bildung in der Schule. 34. Bd. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften | GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden.

BERNHARDT, H. (2014): Warum wir etwas schön finden. Online unter: https://www.deutschlandfunk.de/aesthetik-warum-wir-etwas-schoen-finden.1148.de.html?dram:article_id=283644 (Zugriff: 25.09.2021).

BERTRAM, G. (2005): Kunst. Eine philosophische Einführung. Stuttgart: Reclam.

BERTRAM, G. (2013): Ästhetische Erfahrung und die Modernität der Kunst. In: Deines, S./Liptow, J./Seel, M. (Hg.): Kunst und Erfahrung. Beiträge zu einer philosophischen Kontroverse. Berlin: Suhrkamp Verlag.

BERTRAM, G. (2014): Kunst als menschliche Praxis. Eine Ästhetik. Berlin: Suhrkamp Verlag.

BOECKMANN, K. (1982): Warum soll man im Unterricht visualisieren? Theoretische Grundlagen der didaktischen Visualisierung. In: Kautschitsch H./Metzler W. (Hg.): Visualisierung in der Mathematik. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, 11-33.

BORN, A./OEHLER, C. (2020): Kinder mit Rechenschwäche erfolgreich fördern. Ein Praxisbuch für Eltern, Lehrer und Therapeuten. 6. erw. und überarb. Aufl. Stuttgart: W. Kohlhammer GmbH.

BRODBECK, K.-H. (2020): Zur Theorie und Philosophie des Bildes. In: Ötsch, W. O./Graupe, S. (Hg.): Imagination und Bildlichkeit der Wirtschaft. Zur Geschichte und Aktualität imaginativer Fähigkeiten in der Ökonomie. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, 35-73.

BRUCHWITZ, A. (2017): Der Goldene Schnitt - Inspirationen für die Bildgestaltung. Online unter: https://www.whitewall.com/de/mag/goldener-schnitt#goldener-schnitt-fotografie (Zugriff: 25.09.2021).

BRUDER, R. (2008): Dossier Mathematik und Kunst. Online unter: https://www.wissenschaftsjahr.de/2008/coremedia/generator/wj2008/de/b__Downloads/06__Presse/Dossier__Kunst.pdf (Zugriff. 25.09.2021).

BUBNER, R. (1989): Ästhetische Erfahrung. Frankfurt a.M: Suhrkamp.

CLARK, R. C./MAYER, R. E. (2002): E-Learning and the science of instruction. Proven Guidelines for consumers and designers of multimedia learning. San Francisco: Jossey-Bass Pfeiffer.

CMYKTASTIC (2020): Gestalterische Gesetze. Online unter: https://www.cmyktastic.ch/gestalterische-gesetze/ (Zugriff: 25.09.2021).

CZERNY, S. (2020): Abi-Prüfung. Im Mathe-Unterricht ist von Anfang an der Wurm drin. Online unter: https://deutsches-schulportal.de/stimmen/im-mathe-unterricht-ist-von-anfang-an-der-wurm-drin/ (Zugriff: 25.09.2021).

DANNER, H. (1979): Methoden geisteswissenschaftlicher Pädagogik. München: UTB Reinhardt.

DELEKTA, P. (2010): Poesie der Daten. Über Mehr- und Nullnutzen durch eine ästhetische Gestaltung von Informationsgrafiken. In: Neuwerk: Zeitschrift für Designwissenschaft, 2010 (2), 52-63.

DEUSSEN, O./NINGELGEN, T. (2018): Programmieren lernen mit Computergrafik. Eine Einführung mit Java und Processing. Konstanz: Springer Vieweg.

DREHER, A. (2013): Den Wechsel von Darstellungsformen fördern und fordern oder vermeiden? In: Sprenger, J./Wagner, A./Zimmermann, M. (Hg.): Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen. Didaktische Sichtweisen vom Kindergarten bis zur Hochschule. Ludwigsburg: Springer Fachmedien Wiesbaden, 215-225.

DUVAL, R. (2014): Commentary. Linking epistemology and semio-cognitive Modeling. In: visualization. ZDM, 46 (1), 159–170.

FRIESEN, M. (2018): Visualisierungen im Matheunterricht. Verknüpfung mit anderen Darstellungen und optimale Nutzung. In: MNU Journal, 2018 (3), 171-173.

GEYER, L. (2018): Fähigkeiten beim Darstellungswechsel von Zahlen. Vergleichende Untersuchung zwischen Studierenden Lehramt Mathematik und Lehramt Deutsch, Diplomarbeit im Fach Naturwissenschaften am Institut für Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen an der Karl-Franzens-Universität Graz.

GRUBER-BEERFELTZ, I. (2009): Mit der Baumscheibe lernen. Das konstruktive Visualisieren als Methode zur Aneignung komplexer Sachverhalte. Österreich: Verlag novum publishing gmbh.

HAARMANN, A. (o.J.): Künstlerische Praxis als methodische Forschung? Online unter: http://www.dgae.de/wp-content/uploads/2011/09/Haarmann.pdf (Zugriff: 25.09.2021).

HEGARTY, M./CARPENTER, P.A./JUST, M. A. (1996): Diagrams in the comprehension of scientific texts. In T. Barr et al. (Hg.): Handbook of reading research. 2. Aufl. Mahwah; NJ: Erlbaum, 641−668.

HELLGERMANN, A. (2013): Neoliberalismus in der Schule. Diskussion Kompetenzgehirnwäsche: Machtausübung durch Individualisierung. Online unter: http://attac-bildung-erziehung.de/wp-content/uploads/2011/07/Rundbrief19.pdf (Zugriff: 25.09.2021).

HILGERS, A. (2021): Darstellungsebenen bewusst wechseln. Enaktiv – ikonisch – symbolisch konkret. Online unter: https://www.friedrich-verlag.de/mathematik/konzepte-methoden/das-eis-prinzip-sinnvoll-im-matheunterricht-umsetzen/ (Zugriff: 25.09.2021).

HÖXTER, C. (2018): Das Schulfach Kunst. Online unter: Das Schulfach Kunst | Deutscher Kulturrat (Zugriff: 14.10.2021).

INITIATIVE D21 (2021a): D21-Digital-Index 2020/2021 – Jährliches Lagebild zur Digitalen Gesellschaft. Online unter: https://initiatived21.de/app/uploads/2021/02/d21-digital-index-2020_2021.pdf#page=50 (Zugriff: 25.09.2021).

INITIATIVE D21 (2021B): Digitaler Unterricht: „Lehrkräfte bleiben zu oft auf sich gestellt“ Online unter: https://initiatived21.de/digitaler-unterricht-lehrkraefte-bleiben-zu-oft-auf-sich-gestellt/ (Zugriff: 25.09.2021).

KIMESWENGER, B. (2017): M-Arts: Eine Brücke zwischen Mathematik und Kunst. In: Pädagogische Horizonte, 1 (1), 305-316.

KRAUTZ, J. (2018): Zwischen Nähe und Distanz. Online unter: file:///C:/Users/User/Downloads/Krautz-ZwischenNheundDistanzBeitragDoKoMnchen_mit_Abb%20(5).pdf (Zugriff: 25.09.2021).

KRAUTZ, J. (2020): Kunstpädagogik. Eine systematische Einführung. Paderborn: Wilhelm Fink Verlag, ein Imprint der Brill-Gruppe (Koninklijke Brill NV, Leiden, Niederlande; Brill USA Inc., Boston MA, USA; Brill Asia Pte Ltd, Singapore; Brill Deutschland GmbH, Paderborn, Deutschland) (UTB; 5427).

KUHN, A./ZIEGLER, G. M. (2020): „Mathematik ist faszinierend schön“ Online unter: https://deutsches-schulportal.de/unterricht/guenter-ziegler-mathematik-ist-faszinierend-schoen (Zugriff: 25.09.2021).

KUHNKE, K./HUßMANN S. et al. (Hg.) (2013): Vorgehensweisen von Grundschulkindern beim Darstellungswechsel. Eine Untersuchung am Beispiel der Multiplikation im 2. Schuljahr. Dortmund: Springer Spektrum.

KULTUSMINISTERKONFERENZ (2012): Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Online unter: https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf (Zugriff: 25.09.2021).

KUNTZE, S. (2013): Vielfältige Darstellungen nutzen im Mathematikunterricht. In: Sprenger, J./Wagner, A./Zimmermann, M. (Hg.): Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen. Didaktische Sichtweisen vom Kindergarten bis zur Hochschule. Ludwigsburg: Springer Fachmedien Wiesbaden, 17-33.

LOOS, A./ZIEGLER, G. M. (2015): Gesellschaftliche Bedeutung der Mathematik. In: Bruder, R. et al. (Hg.): Handbuch der Mathematikdidaktik. Berlin; Heidelberg: Springer Spektrum, 3-17.

MATHE BY DANIEL JUNG (2014): Extremwertproblem, Punkt auf Graph, Dreieck, maximaler Flächeninhalt, Ansatz | Mathe by Daniel Jung [YouTube], https://www.youtube.com/watch?v=yCoSLQ2d3bI

MATHE - SIMPLECLUB (2015): Extremwertaufgaben – Beispiel Fläche - Abitur [YouTube], https://www.youtube.com/watch?v=b7TBoX1x1t8&t=301s

MAYER, R. E. (2005): Principles for Reducing Extraneous Processing in Multimedia Learning. Coherence, Signaling, Redundancy, Spatial Contiguity, and Temporal Contiguity Principles. In: R. E. Mayer (Hg.): The Cambridge Handbook of Multimedia Learning. Cambridge: Cambridge University Press, 183−200.

MAYER, R. E. (2009): Multimedia learning. 2. Aufl. Cambridge: Cambridge University Press.

MENDE, M. A./FISCHER, M. H. (2018): Symmetrie in den Kognitionswissenschaften. In: Petsche, H.-J. (Hg.): Grenzen im Fokus der Wissenschaften: Eine multidisziplinäre Vorlesungsreihe (Trafo Verlagsgruppe Berlin), 197-212.

MORITZ, T. (2019): Screenografie kompakt. Der immersive Bildraum grafischer Benutzeroberflächen. Potsdam: Springer Vieweg.

NIEGEMANN, H. M. et al. (2008): Kompendium multimediales Lernen. Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

OEVERMANN, U. (2001): Bausteine einer Theorie künstlerischen Handelns aus soziologischer Sicht. Unveröff. Manuskript. Frankfurt a.M.

OLSCHEWSKI, F. (2015): Symmetrie (Mathe) – die 4 häufigsten Arten einfach erklärt. Online unter: https://www.nachhilfe-team.net/lernen-leicht-gemacht/symmetrie/ (Zugriff: 25.09.2021).

ÖTSCH W. O./GRAUPE S. (2020): Imagination und Bildlichkeit in der Ökonomie – eine Einführung, in: Ötsch W. O./Graupe S. (Hg.): Imagination und Bildlichkeit der Wirtschaft. Zur Geschichte und Aktualität imaginativer Fähigkeiten in der Ökonomie. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, 1-33.

PAIVIO, A. (1986): Mental representations. A dual coding approach. New York: Oxford University Press.

PAULUS, L. (2015): „Schöne Ordnung“: Messung des impliziten Affekts zur Wirkung von symmetrischen Mustern unter Berücksichtigung von Komplexität. Eine fEMG Studie, Diplomarbeit im Fach Psychologie an der Universität Wien.

PEEZ, G. (o.J.): Zur Bedeutung ästhetischer Erfahrung für Produktion und Rezeption in gegenwärtigen Konzepten der Kunstpädagogik. Online unter: https://www.gmp-vmp.de/media/pdf/Musik_erfinden/Peez.pdf (Zugriff: 25.09.2021).

PERRETT, D. (2010): In Your Face. The New Science of Human Attraction.

PFISTERER, U. (Hg.) (2019): Metzler Lexikon Kunstwissenschaft. Ideen, Methoden, Begriffe – Sonderausgabe. 2. erw. und aktualisierte Aufl. Berlin: J.B. Metzler Verlag.

PREUß, P./KAUFFELD, S. (2019): Visualisierung in der Lehre. In: Kauffeld, S./Othmer, J. (Hg.): Handbuch Innovative Lehre. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, 404-408.

RANZ, G. (2015): Die Verzeitlichung des Zeitlosen. Eine Untersuchung des didaktischen Potentials der Einbindung von Elementen aus der Geschichte der Mathematik in den Mathematikunterricht. Diplomarbeit im Fach Naturwissenschaften am Institut für Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen an der Karl-Franzens-Universität Graz.

REINHOLD, F. (2018): Wirksamkeit von Tablet-PCs bei der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs aus mathematischer und psychologischer Perspektive. Eine empirische Studie in Jahrgangsstufe 6, Dissertation im Fach Mathematikdidaktik an der Technischen Universität München.

REITER, R. (o.J.): Die Ästhetik der Fraktale. Mathematik und Kunst des Unendlichen. Online unter: http://www.zonk.at/fraktale/rafael_reiter_die_aesthetik_der_fraktale.pdf (Zugriff: 25.09.2021).

REY, G. D. (2009): E-Learning. Theorien, Gestaltungsempfehlungen und Forschung. Online unter: http://www.elearning-psychologie.de/elearning_multimedia.html (Zugriff: 25.09.2021).

SCHLAG, B. (2013): Lern- und Leistungsmotivation. 4. Aufl. Dresden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

SCHMIDT, T./WOLFF, C. (2017): Der Einfluss von User Interface-Attributen auf die Ästhetik. In: Burghardt M. (Hg.): Mensch und Computer 2017 – Tagungsband, 10.–13. September 2017, Regensburg.

SCHMITZ, A. (2017): Beliefs von Lehrerinnen und Lehrern der Sekundarstufen zum Visualisieren im Mathematikunterricht, Dissertation im Fach Mathematik und Naturwissenschaften an der Universität Kassel.

SCHNEIDER, A. (2017): Verschränkte Deixis. In: Krautz, J. (Hg.): Beziehungsweisen und Bezogenheiten. Relationalität in Pädagogik, Kunst und Kunstpädagogik. 4.Bd. München: Kopaed Verlag, 479-497.

SCHNOTZ, W. (2001): Wissenserwerb mit Multimedia. In: Unterrichtswissenschaft: Zeitschrift für Lernforschung, 29 (4), 292-318.

SCHÜTZ, K. / SPRENGER, S./ FALKENAUER, F. (2017): Form men only? Wie Gender Marketing implizite Einstellungen schafft am Beispiel von Coca-Cola. In: Journal of Business and Media Psychology, 8 (1), 37-44.

SEUFERT, T. (2017): Kognitive Grundlagen des Lernens. Online unter: https://www.uni-ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/adprostu/Zertifikatskurse/Instruktionsdesign/Leseprobe_ID_KGL_2017_03.pdf (Zugriff: 25.09.2021).

SOHNS, A. (2007): Empowerment als Leitlinie Sozialer Arbeit. In: Michel-Schwartze, B. (Hg.): Methodenbuch Soziale Arbeit. Basiswissen für die Praxis. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften | GWV Fachverlage GmbH, 73-99.

SPIEGEL REISE (2019): Kathedrale Notre Dame de Paris. Das Herz der Nation. Online unter: https://www.spiegel.de/reise/staedte/kathedrale-notre-dame-das-am-meisten-besuchte-wahrzeichen-von-paris-a-1263069.html (Zugriff: 25.09.2021).

SPIES, S. (2015): Bildsame Schönheit. Zur Integration des Ästhetischen im mathematikdidaktischen Bildungsdiskurs. In: mathematica didactica, 38, 173-195.

STIEGLER, B. (2008): »Iconic Turn« und gesellschaftliche Reflexion. In: Trivium, 2008 (1), 1-6

TAGESSPIEGEL (2017): Mathematikunterricht und Kompetenzorientierung – ein offener Brief. Online unter: https://www.tagesspiegel.de/downloads/19549926/2/offener-brief.pdf (Zugriff: 25.09.2021).

UHLIG, B. (2013): Bilder erschließen und verstehen. In: Kirchner, C. (Hg.): Kunst-Didaktik für die Grundschule. Berlin, 70-98.

WEIDENMANN, B. (1993): Informierende Bilder. In: B. Weidenmann (Hg.): Wissenserwerb mit Bildern. Bern et al.: Hans Huber, 9–58.

WELT (2010): Mandelbrot bewies die Schönheit der Mathematik. Online unter: https://www.welt.de/wissenschaft/article10361079/Mandelbrot-bewies-die-Schoenheit-der-Mathematik.html (Zugriff: 25.09.2021).

ZIMMERMANN, W./CUNNINGHAM, S. (1991): Editors' Introduction. What Is Mathematical Visualization? In: Zimmermann, W./Cunningham, S. (Hg.): Visualization in Teaching and Learning Mathematics. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1–8.

ZOELCH, C./BERNER, V.-D./THOMAS, J. (2019): Gedächtnis und Wissenserwerb. In: Urhahne, D. /Dresel, M./ Fischer, F. (Hg.): Psychologie für den Lehrberuf. Berlin: Springer Verlag GmbH, ein Teil von Springer Nature 2019, 23-52.

ANHÄNGE

Inhaltsverzeichnis

Anhang A

Auswahl eines Mediums für die Gestaltungsvorschläge

Im Institut für Informationswissenschaft und Wirtschaftsinformatik der Universität Graz wurde 2017 im Rahmen einer Lehrveranstaltung eine Untersuchung zur Mediennutzung durchgeführt: 554 Studierende sowie 436 Universitätslehrende konnten befragt werden (vgl. Reichmann 2018: 15). Vermutet wurde eine dominierende elektronische Mediennutzung, das Ergebnis zeigte jedoch bei allen Befragten eine eindeutige Präferenz für Printmedien, insbesondere für gedruckte Büchern (vgl. Reichmann 2018: 17). Hervorzuheben ist, dass selbst Inhalte elektronischer Medien zum Lesen vorzüglich ausgedruckt wurden (vgl. Reichmann 2018: 19). Es stellt sich die Frage, ob sich dies durch den digitalen Unterricht zur Corona-Pandemie geändert hat.

Im Februar 2021 wurde eine Studie zum digitalen Unterricht veröffentlicht: Studie D21-Digital-Index 2020/2021 Erfahrungen und Einstellungen zu digitalem Unterricht (vgl. deutscher bildungsserver 2021). 74 % der Lehrkräfte und SchülerInnen zeigen sich digitalem Unterricht gegenüber offen, mit der Einschränkung, dass sich dieser als effektiv erweisen muss (vgl. D21 Initiative e.V. 2020/2021: 6). Dies zeigt, wie jung dieses Forschungsgebiet noch ist, obwohl wir in einer Zeit leben, die von digitalen Innovationen geprägt ist. Wie unerforscht der digitale Unterricht ist, wird auch durch das Ergebnis von 68 % der SchülerInnen und LehrerInnen bekräftigt, die angaben, Hürden beim digitalen Unterricht erlebt zu haben, wobei eine unzureichende Verfügung von Geräten sowie einer mangelhaften Internetverbindung 30 % der erlebten Schwierigkeiten ausmachen (vgl. D21 Initiative e.V. 2020/2021: 3). Auch die Hürde, die sich durch eine uneinheitliche Vorgehensweise bezüglich der Unterrichtsmaterialien ergibt, liegt bei 42% (vgl. D21 Initiative e.V. 2020/2021: 3). In einer Dissertation von Engelmann (2019) werden Emotionen in einer computerbasierten Lernumgebung versucht zu erfassen: Engelmann (2019: 35) bezieht sich in dieser unter anderem auf eine Studie von Bosch und D'Mello (2017), die Emotionen in einer computerbasierten Lernumgebung erfasst haben, mit dem Ergebnis, dass neben Emotionen wie Flow und Engagement zu den häufigsten Emotionen auch Verwirrung, Frustration und Langeweile gehörten. Engelmann (2019: 57) kommt nach einer tiefgehenden Analyse zu dem Ergebnis, dass Emotionsregulation (in dem Fall von Studierenden) in einer computerbasierten[1] Lernumgebung gefördert werden muss, dass es jedoch noch an empirischen Studien mangelt. Insgesamt zeichnet sich ab, dass grundsätzlich zwar eine

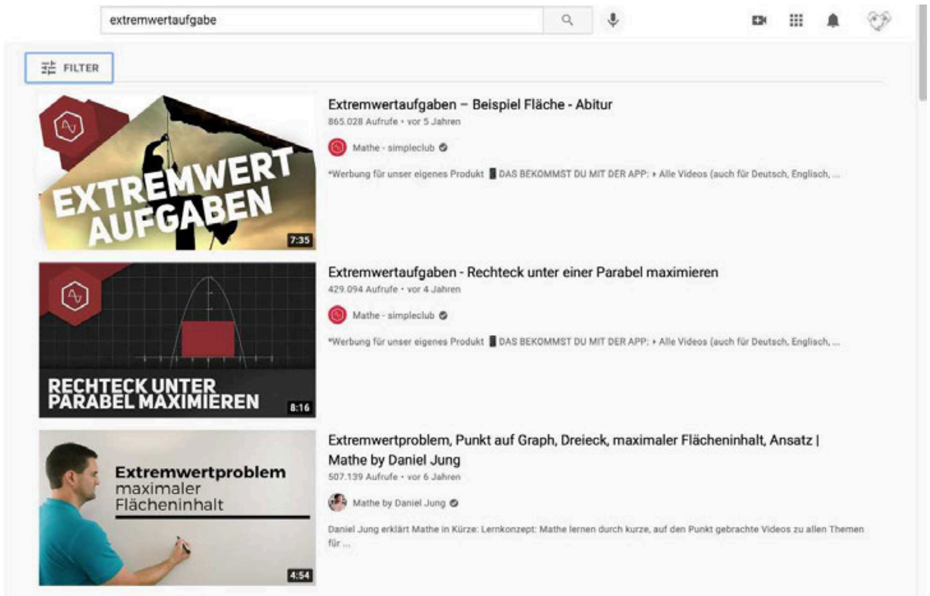
[1] „Computerbasiertes Lernen wird im Rahmen dieser Arbeit als Überbegriff für jede Art des Lernens verwendet, bei dem Lernenden das Lernmaterial an einem Computer präsentiert wird, d.h. Lernen, bei dem der Computer als digitales Lernmedium dient“ (Engelmann 2019: 33).

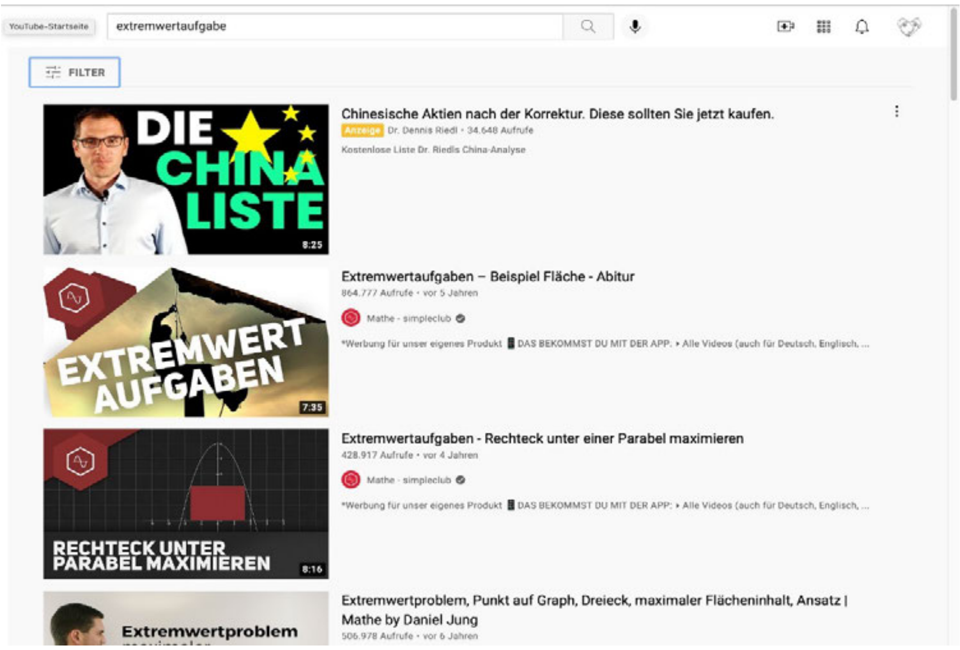
Bereitschaft besteht, sich zunehmend mit elektronischen Medien zu beschäftigen, dass es jedoch einiges zu erforschen gibt, um eine optimale Bedingung zur Nutzung dieser gewährleisten zu können. Nach dem Direktor des Direktorats für Bildung „fließen unter 3 % der Bildungsausgaben in neue Technologien und Entwicklung entsprechender Pädagogik (Schleicher 2021 :53). Zudem scheinen auch Printmedien aktuell noch genutzt zu werden (s.o.).

Anhang B
Auswahl der zu analysierenden Lehr- und Lernmaterialien

Für die Analyse im Folgenden wurden zwei Lehr-Lernvideos zweier YouTuber ausgewählt, die zum Erlernen mathematischer Themen besonders häufig von YouTube-Algorithmen vorgeschlagen werden. Anzunehmen ist, dass diese Videos dann auch am häufigsten aufgerufen werden.[2] Um herauszufinden, welche mathematischen Videos am meisten vorgeschlagen werden, wurden zwei verschiedene Personen darum gebeten, das Wort „Extremwertaufgabe“ bei YouTube einzugeben und die Vorschläge der Videos abzufotografieren. Beide Personen haben zuvor noch nie in YouTube nach mathematischen Videos recherchiert. Dies sollte die Voraussetzung sein, denn naheliegend ist, dass Personen, die mathematische Videos schon bevorzugt von *bestimmten* YouTuberInnen angesehen haben, dann vor allem auch Videos *dieser* YouTuberInnen vorgeschlagen bekommen. Die Annahme dazu sind spezifische Algorithmen von YouTube und infolgedessen wäre das Ergebnis hinsichtlich der am meist vorgeschlagenen Lehr-Lernvideos vermutlich verfälscht worden. Die folgenden beiden Abbildungen beinhalten die abfotografierten Videovorschläge der soeben erwähnten Personen. Zu sehen ist, dass beide Personen zwei Mal das gleiche Video vorgeschlagen bekommen haben: Das eine Video ist von „Mathe - simpleclub“ mit 864.777 Aufrufen, das andere ist von „Mathe by Daniel Jung“ mit 506.978 Aufrufen.

[2] Ob die Videos besonders häufig vorgeschlagen werden, weil sie zuvor besonders häufig aufgerufen wurden, kann bezüglich der Algorithmen zwar eine Rolle spielen, muss aber keineswegs ein Garant für eine gute Qualität der Videos (Gestaltung, Inhalte etc.) sein, denn anzunehmen ist, dass noch weitere Faktoren eine Rolle spielen, die YouTube-Vorschläge beeinflussen. Die Algorithmen von YouTube sowie das YouTube-Marketing scheinen Aspekte eines komplexen Systems zu sein.



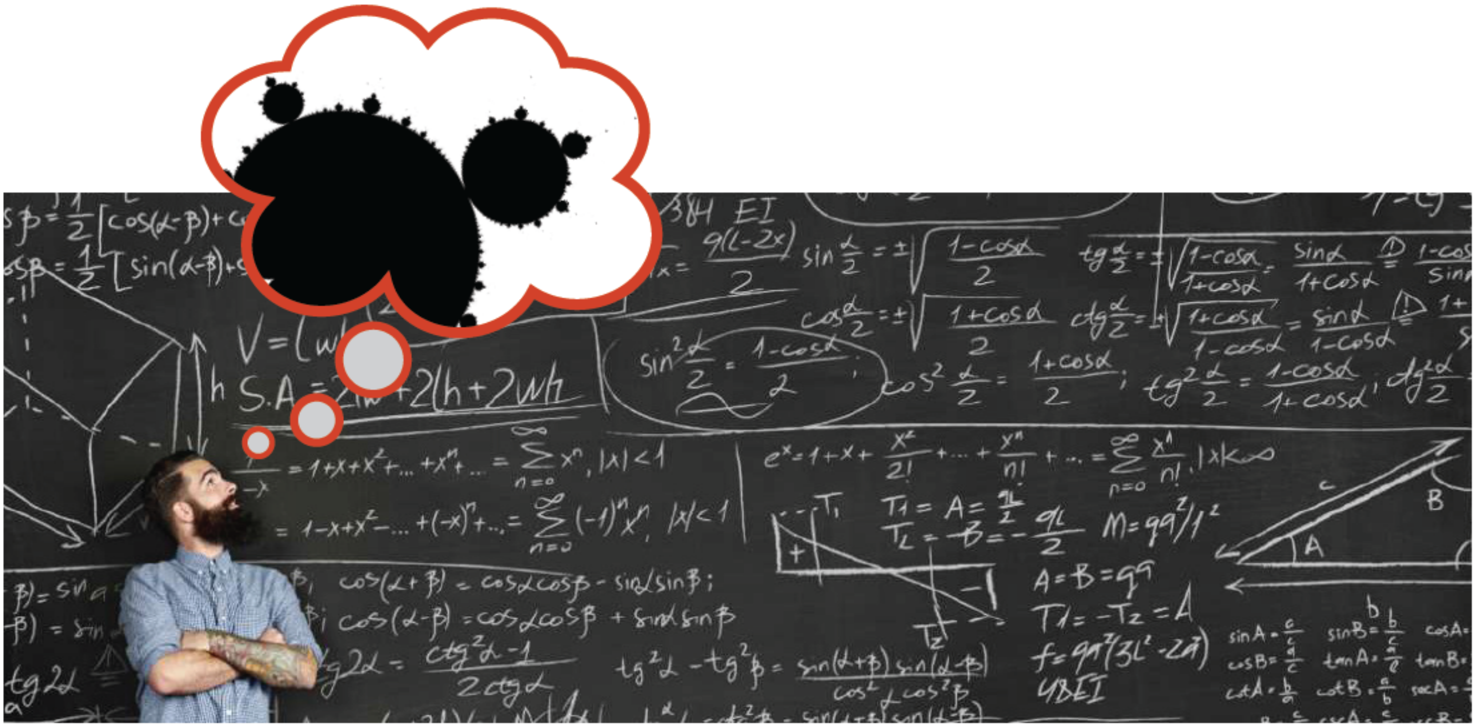


Im Folgenden soll der Einstieg beider Videos analysiert werden, denn es besteht die naheliegende Annahme, dass bereits die Anfänge Aufschluss über den Stil der Visualisierung und der Interaktion geben, anhand dessen mathematische Inhalte erklärt werden. Vermutlich entscheidet auch der Einstieg darüber, ob sich eine Person das Video bis zum Schluss ansieht oder ob sie sich doch eher für ein anderes entscheidet. Ferner erfolgt die Analyse anhand der soeben genannten Kriterien. Anschließend soll auch eine visualisierte Aufgabe aus einem Mathebuch analysiert werden. An dieser wird besonders die Herausforderung des Darstellungswechsels deutlich.

Anhang C

Gestaltungsvorschlag

WO KOMMEN PLÖTZLICH DIESE GANZEN APFELMÄNNCHEN HER?



„[...] es gibt dann plötzlich Muster, die auftauchen aus mathematischen Prozessen, aus Überlegungen, aus Konstruktionen, manchmal so auch aus den Zahlen raus. Und die können ganz faszinierend und überraschend sein. Zum Beispiel die Fraktale und die Apfelmännchen, die ja vor einiger Zeit aufgetaucht sind [...]"

(Ziegler 2008).

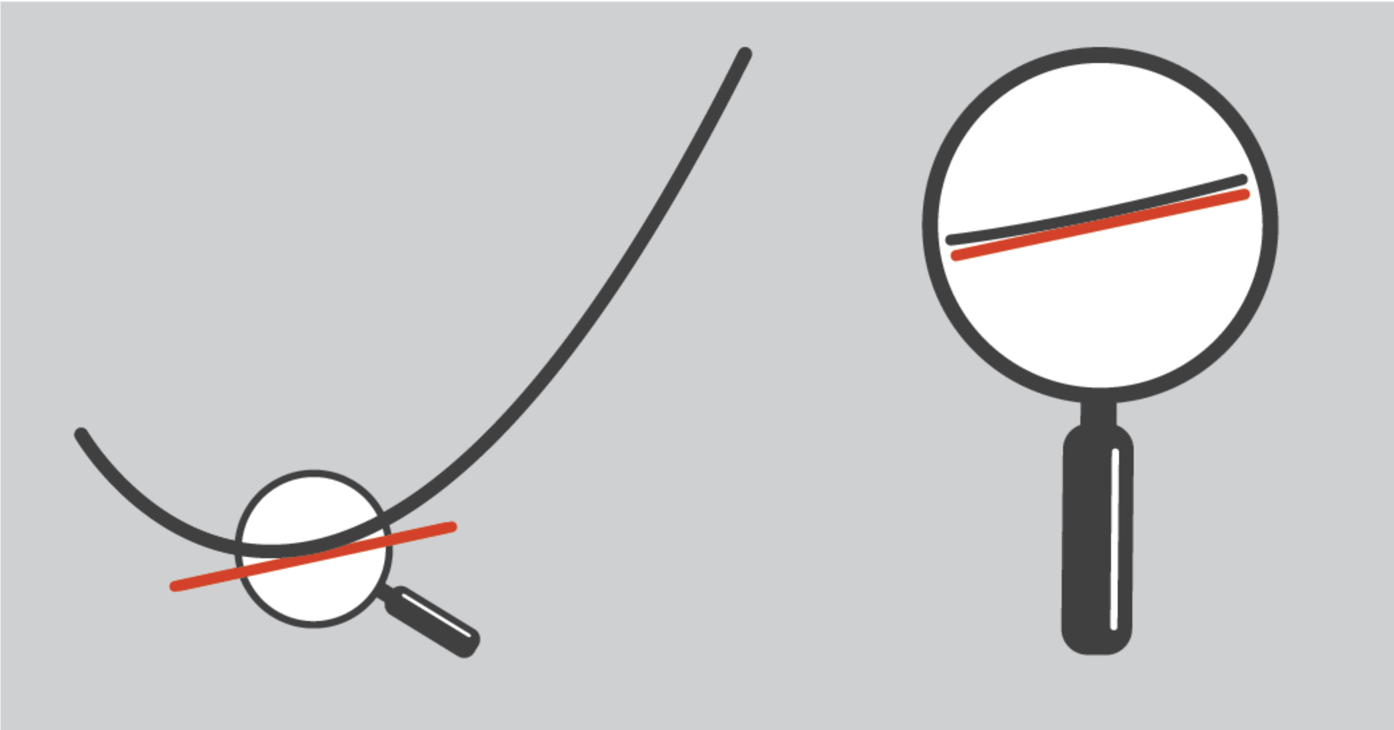
der Mathematiker Benoit Mandelbrot:
er Zufall die Apfelmännchen entdeckt.

ABER WAS MACHT DAS APFELMÄNNCHEN NUN SO BESONDERS

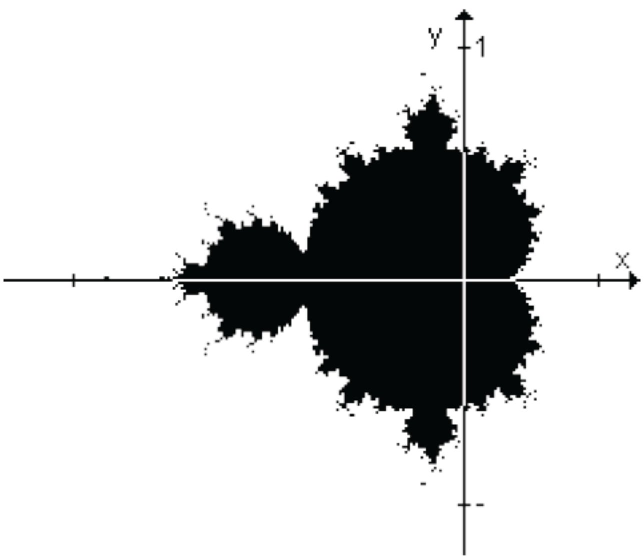
Die Tangente (**rote** Gerade) berührt die Kurve. Stell dir vor, du vergrößerst die Kurve an dem Punkt, an dem sie mit der Kurve zusammentrifft.

Was passiert dann?

Der vergrößerte Teil der Kurve wird immer mehr einer Geraden, bzw. seiner Tangente ähneln. Vergrößert man noch weiter, wird die Struktur (Kurve) immer mehr verschwinden.



DU WIRST GLEICH SEHEN, DASS DAS BEIM APFELMÄNNCHEN (ALS FRAKTALES GEOMETRISCHES OBJEKT) **ANDERS** IST



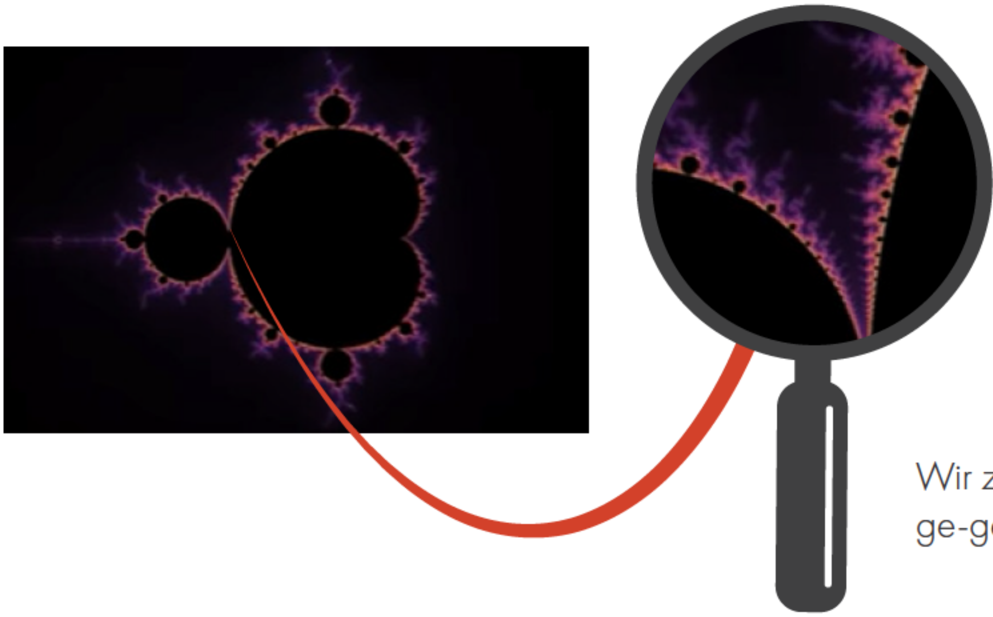
Bevor wir anfangen:

Merke dir schon einmal zwei Stichworte. **Unendlich** und **begrenzt**. Und wir sagen: Unendlich gehört in den weißen Bereich und begrenzt gehört in den schwarzen Bereich. Es gehört zu der Menge.

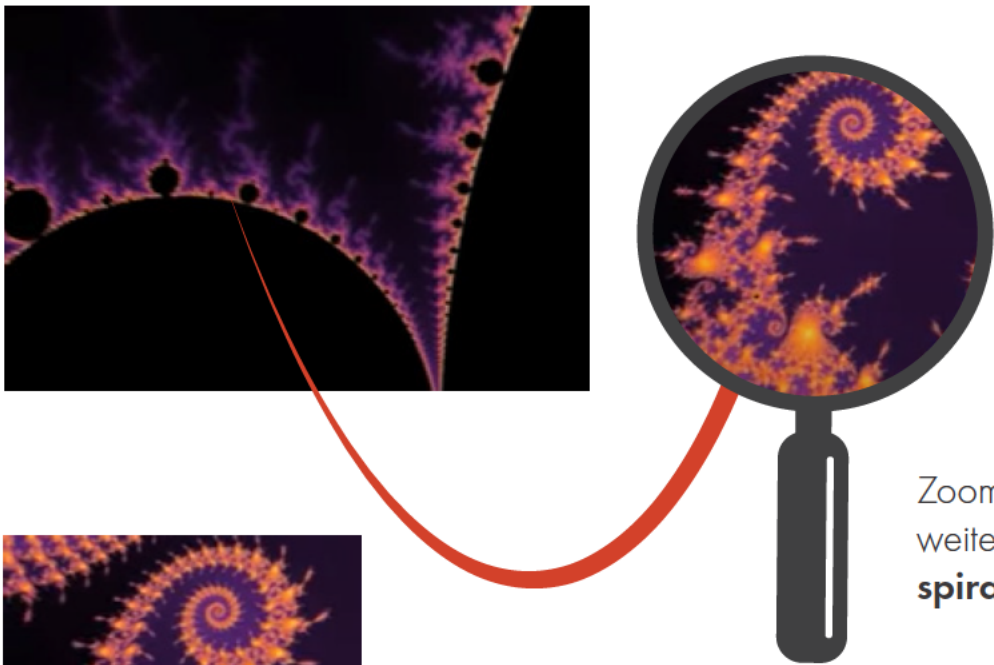
WIR NEHMEN DAS APFELMÄNNCHEN UNTER DIE LUPE

Das ist das sogenannte Apfelmännchen. Wenn du den Teil heranzoomst, siehst du, dass auf den Rändern noch **weitere** Apfelmännchen zu sehen sind.

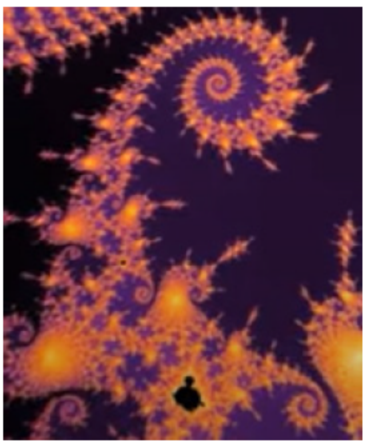
Ein Teil von dem Muster sieht ähnlich aus wie das ganze Muster. Man spricht von **selbstähnlichen, fraktalen** Mustern und diese wiederholen sich.



Wir zoomen die lila-orange-gelben Ränder heran.

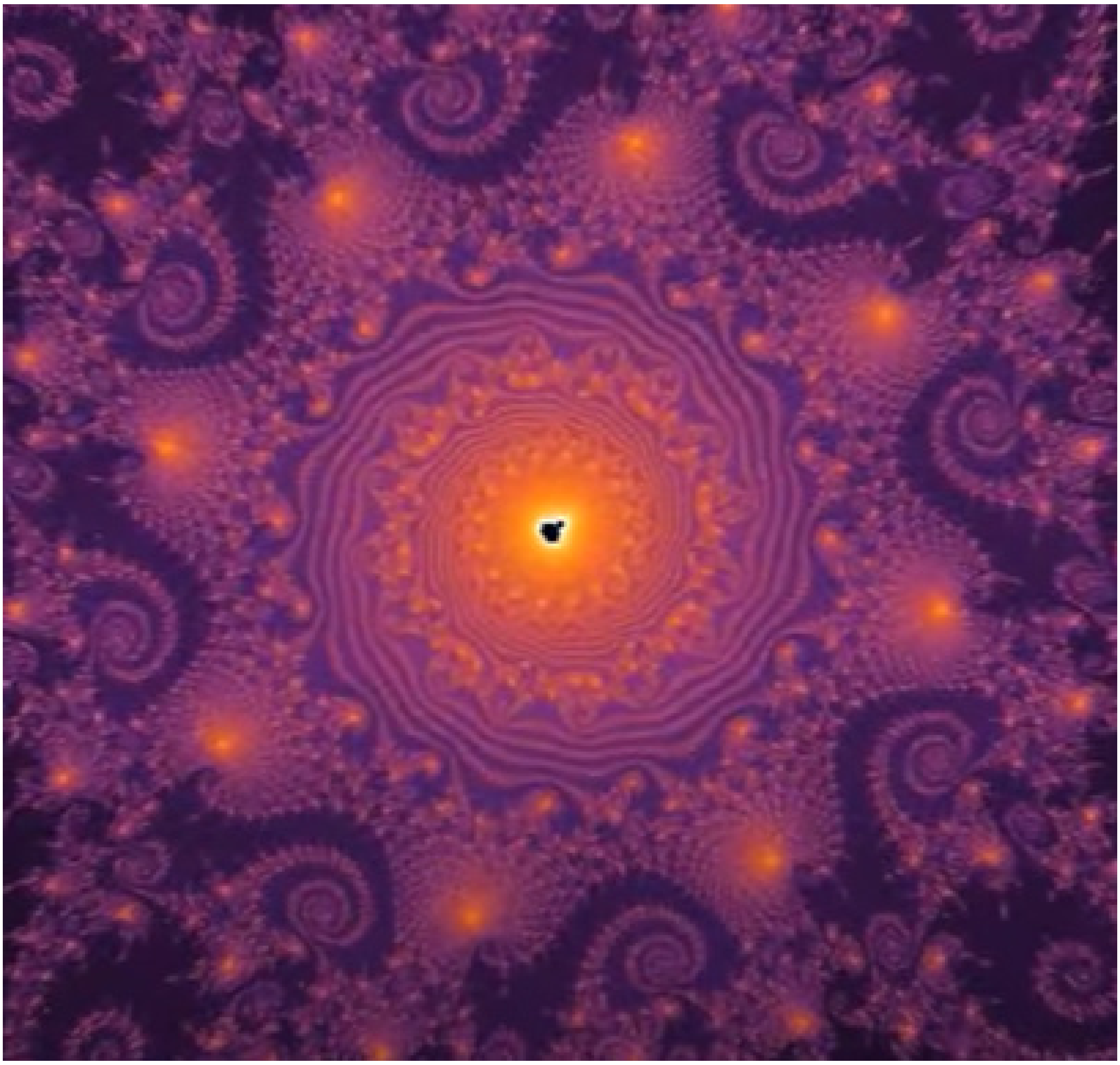


Zoomt man die Ränder noch weiter heran, so sieht man **spiralenförmige** Muster.



Wenn du an selbstähnliche und sich wiederholende Strukturen denkst: **Was vermutest du**, was du sehen wirst, wenn du in diese Spirale immer weiter und weiter hineinzoomst**?**

RICHTIG! DAS APFELMÄNNCHEN



Welche Formel verbirgt sich hinter dieser großartigen Entdeckung?

FORMEL DER MANDELBROTMENGE

$$Z_{n+1} = Z_{n^2} + C$$

Z_{n+1} ist das Gleiche wie $Z_{n^2} + C$, also reicht es mit einem von beiden zu rechnen.
Wir nehmen $Z_{n^2} + C$

n ist Index im Array Z.

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Z	**0**	**2**	**6**	**38**		
	Z_0	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5

Wir wollen nacheinander die Werte im Array (Z-Werte) ausrechnen und schauen dann, ob die Ergebnisse gegen unendlich gehen oder ob sie begrenzt sind.

Startwert	**Konstante**	
$Z_0 = 0$	$C = 2$	$Z_0 = 0$
$Z_1 = Z_{0^2} + C = 0^2 + 2 = 2$		$Z_1 = 2$
Z_2	$2^2 + 2 = 6$	$Z_2 = 6$
Z_3	$6^2 + 2 = 38$	$Z_3 = 38$
Z_4		
Z_5		

Um den nächsten Wert auszurechnen, brauchst du den vorherigen Wert. Das heißt für Z_1 benötigst du das Ergebnis von Z_0. Für Z_2 benötigst du das Ergebnis von Z_1 usw.

Unser Startwert ist $Z_0 = 0$, die Konstante C ist 2.

Rechne Z_4 und Z_5 aus. Was vermutest du: Werden die Ergebnisse ins Unendliche gehen oder werden sie begrenzt sein? Wir prüfen auch unser nächstes Beispiel.

$$Z_{n^2} + C$$

n ist Index im Array Z.

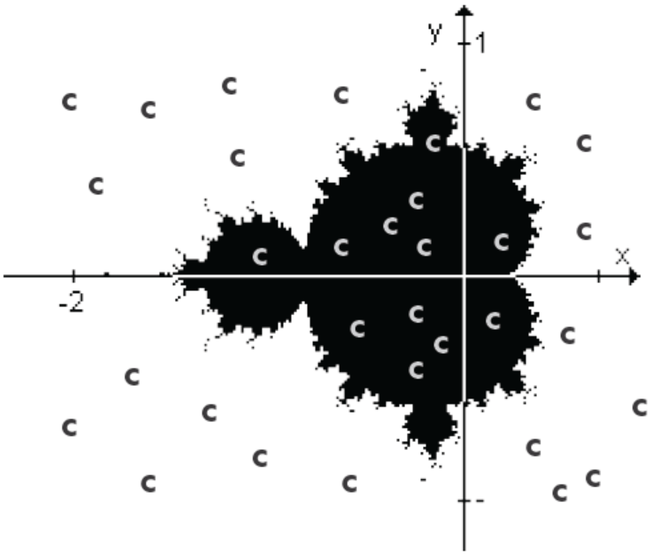
n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Z	**0**	**-1**	**0**		
	Z_0	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4

Unser Startwert ist wieder $Z_0 = 0$, unsere Konstante C ist diesmal -1.

Startwert	**Konstante**	
$Z_0 = 0$	$C = -1$	$Z_0 = 0$
$Z_1 = Z_{0^2} + C = 0^2 + (-1) = -1$		$Z_1 = -1$
Z_2	$(-1)^2 + (-1) = 0$	$Z_2 = 0$

Rechne Z_3 und Z_4 aus.

Gehen die Ergebnisse gegen unendlich oder sind sie begrenzt?



Wir haben zu Beginn festgehalten:

Etwas, das gegen **unendlich** geht, ist der weiße Bereich.
Etwas, das **begrenzt** ist, gehört zur Mandelbrotmenge in den schwarzen Bereich.

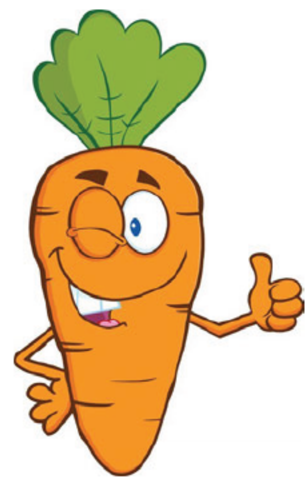
Schaue dir an, welche Konstante (c-Wert) dazu geführt hat, dass die Ergebnisse (Z) gegen unendlich gehen. Und welche Konstante hat dazu geführt, dass die Ergebnisse bei irgendeiner Zahl begrenzt sind?

Trage die C-Werte in dieser Zeichnung in den **entsprechenden Bereich** ein.

Wir wissen: Wenn man in die fransigen Ränder hineinzoomt, kommen lauter Strukturen, die sich selbst ähneln und irgendwann kommt wieder das **Apfelmännchen**. Das heißt, unser großes Apfelmännchen, das ganz am Anfang gezeigt wurde, ist nur ein Teil vom ___________________?

Nachdem wir gelernt haben, was sich wiederholende Strukturen und selbstähnliche Strukturen sind: Was glaubst du, **welches Gemüse** solche **fraktale Strukturen** hat?

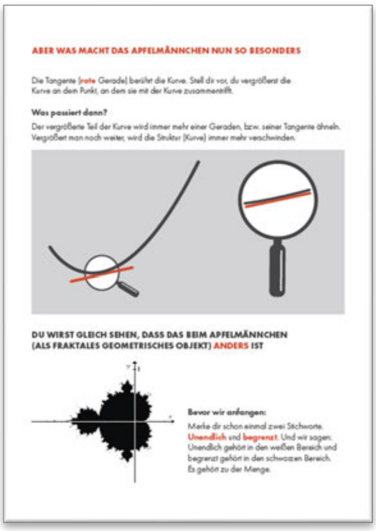
Haben die Zahlenfolgen dich überrascht? Wenn ja, warum?



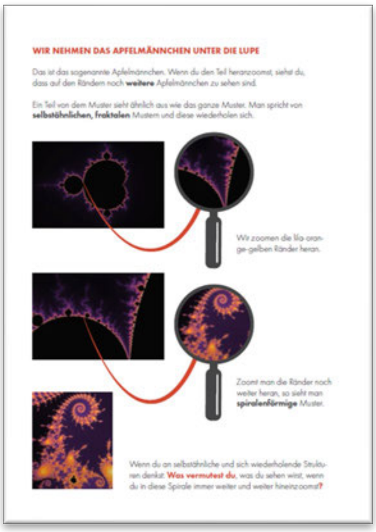
Anhang D

Erklärung zur Visualisierung des Gestaltungsvorschlags

Ausgewählt wurde ein Bild mit einem jungen Mann, der dem derzeitigen Trend zu folgen scheint: Die Frisur (Undercut und Vollbart), der Kleidungsstil (schlichtes Hemd) sowie das Tattoo scheinen ein aktueller Trend zu sein, der im Alltag häufig zu beobachten ist. Die Idee ist, dass Lernende sich mit ihm identifizieren, denn er könnte „einer von ihnen" sein. Ausgehend von dem Vorurteil, dass Mathematik häufig mit zwanghaftem Lernen verbunden ist, soll hier jemand gezeigt werden, der sich gerne und ohne Zwang mit Mathematik beschäftigt. Der junge Mann, der ein Student, ein Kommilitone oder Freund sein könnte, ist in einer lässigen Haltung (verschränkte Arme) zu sehen und fragt sich, woher diese ganze Apfelmännchen kommen. Da er vor einer Tafel steht, an der diverse mathematische Formeln zu sehen sind, könnte das „Apfelmännchen" für einen Überraschungseffekt sorgen, denn der Begriff scheint erst einmal nicht zur Mathematik zu passen. Dieser Überraschungseffekt könnte ebenfalls Aufmerksamkeit erzeugen. Die einleitende Frage ist in roter Farbe zu sehen, abgesehen von dem Wort „Apfelmännchen", dieses soll durch eine andere Farbe (schwarz) hervorgehoben werden. Da Elemente in gleicher Farbe als zusammengehörig empfunden werden (*Gesetz der Gleichheit*) und das Apfelmännchen in der Gedankenblase ebenfalls in schwarz zu sehen ist, soll erfasst werden, dass die Figur in der Gedankenblase eben dieses Apfelmännchen ist. Bis zu dieser Stelle geht es lediglich darum, mit *visuellen Reizen* das Interesse hervorzurufen. So wie ein *Kunstwerk* Konstellationen bereitstellt, damit Menschen sich mit ihm auseinandersetzen und seine Botschaft entschlüsseln, besteht hier durch die Auswahl der Bilder die Hoffnung, dass die Aufmerksamkeit von Lernenden erregt wird, um sich mit dem Apfelmännchen auseinanderzusetzen. Ausgehend davon, dass die Aufmerksamkeit hergestellt werden konnte, soll diese durch das Zitat von Ziegler gesteigert werden: Vielleicht wundern sich einige, weshalb „plötzlich“ Muster und Apfelmännchen auftauchen. Zudem benutzt Ziegler Worte wie „faszinierend“ und „überraschend“, damit wird denjenigen, deren Aufmerksamkeit hergestellt werden konnte, gezeigt, dass das Thema, das sie erwartet, offensichtlich von anderen positiv bewertet wird. Im unteren Bild wird der Entdecker des Apfelmännchens in einer dynamischen Haltung (Arme geöffnet) gezeigt: nach Nach Ranz (2015: 55 f.) wird in der mathematischen Lehre kaum Bezug auf die Personen genommen, die über Jahrhunderte das mathematische Wissen erst entwickelt haben, Schulmathematik wird dadurch zu einer *unmenschlichen* und abstrakten Welt. D.h., das Bild von Mandelbrot wird gezeigt, damit Lernende sehen, dass sich hinter dieser Entdeckung, die mit Mathematik in Verbindung steht, ein Mensch verbirgt und Mathematik keine „unmenschliche“ Welt ist.

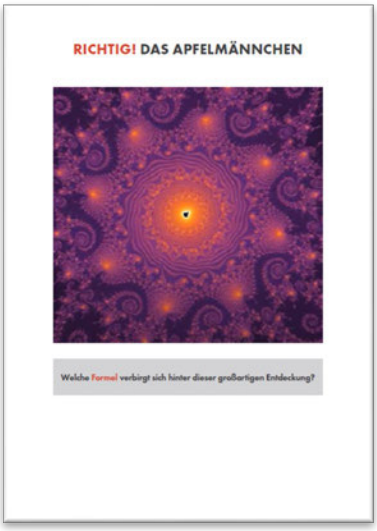


Um die Besonderheit des Apfelmännchens zu verstehen, wird ein Vergleich benötigt. Die Erklärung soll anhand von einem Bild erfolgen, denn grundsätzlich wird die Behaltens- und Verstehensleistung erheblich verbessert, wenn Bilder eingebunden werden. Es wäre möglich, abstrakt und nur sprachlich zu formulieren, dass ein Punkt, den man sich auf einer Kurve vergrößert denkt, bei zunehmender Vergrößerung immer mehr seiner Tangente ähnlich sehen wird. Dieser Satz lässt sich visuell vermutlich sehr viel schneller erfassen. Anzunehmen ist, dass allgemein bekannt ist, welchen Zweck eine Lupe erfüllt. Da im Text bereits angekündigt wird, dass es um die Vergrößerung eines Punktes geht, wird die Lupe als solche vermutlich auch erkannt. Damit Lernende beide Bilder miteinander vergleichen und sie erkennen, dass das rechte Bild mit der Lupe den Punkt auf der Kurve des linken Bildes in Vergrößerung zeigt, wurde mit *Steuerungscodes* gearbeitet: Die Farben von der Kurve und der Tangente sind gleichgeblieben (*Gesetz der Gleichheit*), zudem ist die Lupe in *beiden* Bildern zu sehen, auch das soll zum Vergleichen des linken und rechten Bildes anhalten. Wenn Lernende sehen, dass der vergrößerte Teil der Kurve immer mehr einer Geraden bzw. der Tangente der Kurve ähnelt, ist vermutlich besser vorstellbar, dass die Struktur „Kurve“ bei einer weiteren Vergrößerung noch weiter verschwinden würde. Diese Erkenntnis ist wichtig, um die Besonderheit des Apfelmännchens (bzw. die Besonderheit von fraktalen geometrischen Objekten) zu verstehen. Anschließend wird erneut auf das Apfelmännchen aufmerksam gemacht, in roter Farbe wird das Wort „anders“ hervorgehoben. Gegebenenfalls fragt man sich, *wie* dieses „anders“ aussieht, wenn die Struktur des fraktalen geometrischen Objektes bei zunehmender Vergrößerung *nicht* verschwindet. Es wird wieder das Apfelmännchen gezeigt, das bereits als Teil im ersten Bild in der Textblase zu sehen war. Die Wörter „unendlich“ und „begrenzt“ werden in Rot hervorgehoben (*impliziter Steuerungscode*): Die Lernenden sollen sich für das Folgende etwas merken und fragen sich vielleicht, warum sie ausgerechnet diese beiden Wörter im Kopf behalten sollen. Gelingt es, dass Lernende sich diese Fragen stellen, ist eine erste Auseinandersetzung mit dem mathematischen Thema gegeben. Deutlich wird zudem, dass der Bezug zum Apfelmännchen offenbar zu anderer Zeit wieder aufgenommen wird. Hier wird versucht, einen *hermeneutischen Prozess* herzustellen: Das Apfelmännchen wird zunächst als Ganzes gezeigt. Allerdings muss erst ein Teil besser verstanden werden, um zu späterer Zeit das Ganze noch besser zu verstehen und die Worte „unendlich“ und „begrenzt“ einordnen zu können. Der Text ist nah am Bild platziert, damit es mit diesem als zusammengehörig wahrgenommen wird. D.h., es wurde das *räumliche Kontiguitätsprinzip* bzw. ein *impliziter Steuerungscode* verwendet.

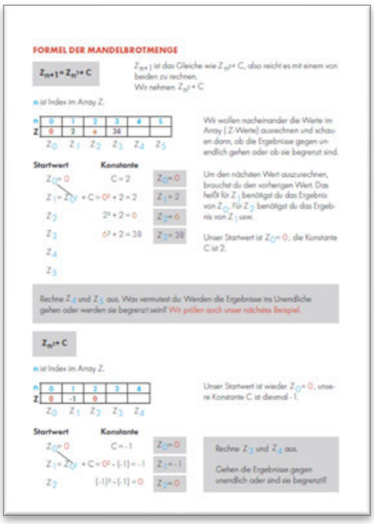


Lernmaterialien, die ästhetisch ansprechend sind, werden geduldiger bearbeitet und seltener abgebrochen, Informationen sollen so gestaltet werden, dass sie einen Reiz auslösen und die Aufmerksamkeit aufrechterhalten (siehe Kapitel 4.3.2). Es besteht die Hoffnung, dass die

Bilder mit ihren Mustern für den ein- oder anderen *ästhetisch ansprechend* wirken. Bilder dieser Art werden vermutlich weniger mit Mathematik in Verbindung gebracht, d.h. sie lösen optimalerweise das Gefühl von Überraschung und Neugierde aus. Um sich in Erinnerung zu rufen, dass ein Teil von jeweils zwei unterschiedlichen geometrischen Objekten in Vergrößerung verglichen werden soll, wurde auch hier die Lupe verwendet, um die Vergrößerung eines bestimmten Ausschnitts darzustellen. Die Wörter „fraktal" und „selbstähnlich" sind in fettgedruckter Schrift hervorgehoben, denn diese bringen auf den Punkt, was es eigentlich bedeutet, dass die Struktur bei zunehmender Vergrößerung eines solchen Objektes nicht verschwindet, sondern sich wiederholt. D.h., wenn ein bestimmter Ausschnitt betrachtet wird, bleibt es bei der Vergrößerung nicht bei der Anzahl an Elementen, die man auf den ersten Blick sehen kann. Vielmehr „zerbrechen" sie erneut in unzählige weitere Teile. Die Verbindungsbögen (*expliziter Steuerungscode*) machen deutlich, welcher Teil des Apfelmännchens unter der Lupe vergrößert wird. Die Bilder sind nahe aneinander platziert (sowohl das linke zum jeweils rechten als auch das obere zum unteren) damit deutlich wird, dass der bereits vergrößerte Teil in der nächsten Zeile erneut vergrößert wird. Bezüglich des *hermeneutischen Zirkels* geht es nun darum, den *Teil des Ganzen* zu verstehen: Durch die schrittweise Vergrößerung und dem Hinweis durch die in fett geschriebenen Worte „selbstähnlich" und „fraktal" soll verstanden werden, dass dieser Teil, der vom Apfelmännchen herangezoomt wird, am Ende eine ähnliche Struktur haben wird, wie das *ganze* Apfelmännchen. Mit der Absicht, dass diese Botschaft verstanden wird, wird unterstützend die Frage gestellt: „*Wenn du an selbstähnliche und sich wiederholende Strukturen denkst: Was vermutest du, was du sehen wirst, wenn du in diese Spirale immer weiter und weiter hineinzoomst*?". Die Frage soll zum Denken anregen, sie soll dazu anregen, sich die Bilder noch einmal genauer anzugucken. Eine Frage kann vielleicht auch das Gefühl von Spannung auslösen, denn man weiß ja noch nicht genau, was man sehen wird. Die direkte Sprache ist der Versuch der *Interaktion*. Lernende werden in das Geschehen eingebunden und können *aktiv* mitdenken. Dies ist der Versuch, einer passiven Haltung, in der lediglich rezipiert wird, vorzubeugen. „Was vermutest du" ist in roter Farbe geschrieben, damit Lernende sich die Frage durchlesen. Die farbliche Hervorhebung entspricht im Multimedia dem *Signalisierungsprinzip*. Beim indikatorischen Bildverstehen entspricht es dem *expliziten Steuerungscode*.



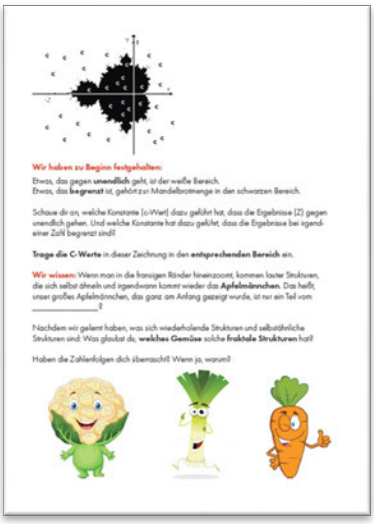
Jenachdem, ob die Lernenden durch die zuvor gestellte Frage wussten, dass nun wieder das Apfelmännchen zu sehen sein wird, werden sie sich vielleicht freuen, dass sie richtig gelegen haben oder sie werden überrascht sein. In beiden Fällen wäre der Lerngegenstand mit *positiven Emotionen* verknüpft und die Aufmerksamkeit möglicherweise aufrechterhalten. Anschlussfähig ist dann ein Übergang zum mathematischen Teil, der etwas formellastiger sein wird. Es wird angekündigt, dass es im nächsten Schritt um die Formel gehen wird (Wort in Rot hervorgehoben). Durch das Wort „großartig“ in der Frage unter dem Bild soll der Gegenstand, zu dem eine Formel gehört, emotional positiv besetzt werden. Die Absicht ist, weiterhin zu motivieren und die Aufmerksamkeit durch die Frage aufrechtzuerhalten.



Bei der mathematischen Erklärung wurde darauf geachtet, dass das Bild nicht mit Informationen oder mit zu viel Text überladen ist, damit die Informationen gut vom Gehirn verarbeitet werden können und die Arbeitsspeicherkapazität des Gehirns nicht überlastet wird. Im Text werden nur die Informationen erwähnt, die wirklich relevant sind, um die Aufgabe verstehen zu können (*Kohärenzprinzip*). Die Ergebnisse, die zusammen eine Zahlenfolge bilden und aufzeigen, ob sie gegen unendlich gehen oder bei einer Zahl begrenzt bleiben, werden in grauen Feldchen festgehalten. Damit soll deutlich werden, dass die Ergebnisse zusammenhängen und zusammenhängend betrachtet werden müssen. Die Hervorhebung der relevanten Information entspricht dem *Signalisierungsprinzip* bzw. einem *expliziten Steuerungscode*. Wichtige Informationen sind ferner die Formel, mit der es zu rechnen gilt, die Information, dass es einen Startwert gibt sowie die Gegebenheit der Konstante C. Diese Wörter wurden hervorgehoben, indem sie in fett markiert worden sind. Die Texte wurden größtenteils nahe an das Bild, welches sie erklären, platziert (*räumliches Kontiguitätsprinzip*). Allerdings hätte die Erklärung zum Startwert näher an diesen platziert werden müssen. Aufgrund der Länge der anderen Texte ist dies nicht der Fall, als Ausgleich wurde auf die Möglichkeit des Gestaltungsgesetztes (*Gesetz der Gleichheit*) zurückgegriffen: Der Startwert ist dadurch erkennbar (auch im Text), dass er eine blaue 0(n) und eine rote 0 (als Ergebnis) enthält. Dadurch wurde die *mathematisch-symbolische Darstellung* (Startwert) mit der *sprachlich-symbolischen Darstellung* (Text) in Zusammenhang gebracht. Die Zahlenbeispiele sind einem Video[3] entnommen. In diesem wurde in sprachlicher Form ausgedrückt, dass es sich bei Z um einen Array handelt, bei n um den Index und dass für den nächsten Z-Wert immer das vorherige Ergebnis benötigt wird. Diese sprachliche Information wurde hier *visualisiert*: Dazu wurde eine Tabelle erstellt, wobei Z und n neben der Zeile stehen, der sie entsprechen. Direkt neben der Tabelle ist ein kurzer Text, der erklärt, wie Z und n zusammenhängen. Um diesen Zusammenhang zu visualisieren, wurde mit ebenfalls mit Gestaltungsgesetzen gearbeitet: Nach dem *Gesetz der Gleichheit*, werden Farben, die gleich sind, als zusammengehörig empfunden (siehe Kapitel 4.3.2). Das n ist immer in blau zu sehen, einmal in der Tabelle (0,1,2,3,4,5) und einmal in Verbindung mit dem jeweiligen Z, welches auszurechnen ist (ebenfalls in der Abfolge 0,1,2,3,4,5). Damit soll verdeutlicht werden, was mit „dem nächsten Z-Wert“ gemeint ist, denn ausgehend vom letzten Z-Wert gilt für den nächsten Z-Wert im Index immer n+1. Die Ergebnisse in den grauen Feldern haben unterschiedliche Farben und ergeben, betrachtet man die gesamte Zahlenfolge, eine bestimmte Farbkombination. Diese Zahlen bzw. die Farbkombination, die sie zusammen ergeben, ist auch in der Tabelle zu sehen. D.h., es wurde das *Gesetz der Gleichheit* verwendet, um anhand zwei verschiedener bildlicher Darstellungen, den Zusammenhang von n und dem nächsten Z-Wert zu verdeutlichen. Um verständlich zu machen, inwiefern das Ergebnis des vorherigen Z-Werts benötigt wird, um den nächsten, erst noch folgenden Z-Wert zu errechnen, wurde ein *expliziter*

[3] Brotcruncher (2019): Die Mandelbrotmenge - Theorie und Implementation

Steuerungscode – ein Verbindungsstrich – verwendet: Der letzte Z-Wert wird eingesetzt, um den neuen Z-Wert zu errechnen, somit wurde ein *Verbindungsstrich* vom letzten Z-Wert gezeichnet, der in die nächste Zeile (in der der nächste Z-Wert ausgerechnet wird), führt. Und zwar eingesetzt in der entsprechenden Formel. Zudem wird deutlich, dass statt des Wortes „Z" in der Formel einfach das Ergebnis, dass es zu diesem Z bereits gibt, eingesetzt werden kann. Um dieses Schema zu verdeutlichen, wurde die 0 sowohl als Ergebnis im grauen Feld als auch eingesetzt in der Formel, um den darauffolgenden Z-Wert zu errechnen, in Rot gezeichnet. D.h., auch hier wurde das *Gesetz der Gleichheit* angewandt.
Im unteren Beispiel ist zu sehen, dass sich die rote Farbe (die rote 0) in einem bestimmten Abstand wiederholt. D.h., wenn einer Zahl jeweils eine bestimmte Farbe zugewiesen wird, sind Strukturen gegebenenfalls schneller erkennbar. Die Struktur wird noch deutlicher, wenn die nächsten Z-Werte errechnet werden, wozu die Lernenden (wieder in direkter Ansprache) aufgefordert werden. Ferner werden sie durch eine Frage zum Nachdenken angeregt und da zu Beginn darauf hingewiesen wurde, dass die Wörter „begrenzt" und „unendlich" im Kopf zu behalten sind, könnte nun bei einigen das *Gefühl von Überraschung* oder *tieferer Erkenntnis* entstanden sein (Emotionen, die bei einer *ästhetischen Erfahrung* entstehen können), denn die Wörter können jetzt mit der errechneten Zahlenfolge in Verbindung gebracht werden: Begrenzt heißt, dass die Zahlenfolge bei einer bestimmten Zahl begrenzt bleibt. In diesem Fall liegt die Begrenzung bei -1. Unendlich heißt, dass die Ergebnisse der Z-Werte gegen die Unendlichkeit streben und eben nicht bei einer bestimmten Zahl begrenzt sind.



Wir haben zu Beginn festgehalten:
Etwas, das gegen **unendlich** geht, ist der weiße Bereich.
Etwas, das **begrenzt** ist, gehört zur Mandelbrotmenge in den schwarzen Bereich.

Schaue dir an, welche Konstante (c-Wert) dazu geführt hat, dass die Ergebnisse (Z) gegen unendlich gehen. Und welche Konstante hat dazu geführt, dass die Ergebnisse bei irgendeiner Zahl begrenzt sind?

Trage die C-Werte in dieser Zeichnung in den **entsprechenden Bereich** ein.

Wir wissen: Wenn man in die fransigen Ränder hineinzoomt, kommen lauter Strukturen, die sich selbst ähneln und irgendwann kommt wieder das **Apfelmännchen**. Das heißt, unser großes Apfelmännchen, das ganz am Anfang gezeigt wurde, ist nur ein Teil vom ________________?

Nachdem wir gelernt haben, was sich wiederholende Strukturen und selbstähnliche Strukturen sind: Was glaubst du, **welches Gemüse** solche **fraktale Strukturen** hat?

Haben die Zahlenfolgen dich überrascht? Wenn ja, warum?

Hier findet ein Rückbezug zum Apfelmännchen statt. Allerdings mit dem Zusatz, dass in dieser Zeichnung im Vergleich zur vorherigen (Bild 2), mehrere kleine Cs zu sehen sind. In fettgedruckter Schrift werden erneut die Begriffe „unendlich" und „begrenzt" hervorgehoben

(*Signalisierungsprinzip*). Auf diese ist bereits zu Beginn sowie in den Rechenbeispielen aufmerksam gemacht worden. Die Absicht ist, dass Lernende bis zu dieser Stelle den Zusammenhang der Worte „begrenzt“ und „unendlich“ und der Zahlenfolgen erkannt haben. Ferner soll bereits erkannt worden sein, dass unendliche Zahlenfolgen nicht zur Mandelbrotmenge, bzw. dem Apfelmännchen gehören, wohingegen Zahlenfolgen, die bei einer bestimmten Zahl begrenzt sind, zur Mandelbrotmenge gehören. Im Folgenden soll verstanden werden, dass die Worte nicht nur mit der Zahlenfolge, sondern auch mit der *Konstante C* zusammenhängen und die Konstante C lässt sich wiederum mit dem Bild in Beziehung setzen. Kurz: Die *mathematisch-symbolische Darstellung* (Formel und die errechneten Ergebnisse) sollen mit der *ikonischen Darstellung* (Bild des Apfelmännchens bzw. der Mandelbrotmenge) verknüpft werden. Durch die Frage, die zur Konstante C gestellt wird, soll in Erinnerung gerufen werden, dass die begrenzte oder unendliche Zahlenfolge *von dieser Konstante C* abhängt. *Diese* Zahl ist diejenige, von der sich schlussendlich sagen lässt, ob sie zum Bereich der Mandelmenge gehört oder nicht. In diesem Fall gehört die 2 (Rechenbeispiel 1, Konstante **C= 2**) nicht zur Mandelbrotmenge, weil die Zahlenfolge gegen unendlich geht. Die Zahl -1 (Rechenbeispiel 2, Konstante **C = -1**) gehört zur Mandelbrotmenge, weil aus ihr, eingesetzt in die Formel, eine Zahlenfolge resultiert, die bei -1 begrenzt bleibt. Um zu verdeutlichen, dass die Struktur, die sich in den Zahlenfolgen ergeben hat, von der Konstante C abhängt, wurde das Bild mit kleinen Cs versehen.[4] In fettmarkierter Schrift wird dazu aufgefordert, die C-Werte, die im Rechenbeispiel eingesetzt wurden, in den entsprechenden Bereich im Bild einzutragen (d.h., in die Mandelbrotmenge oder außerhalb der Mandelbrotmenge). In roter Schrift hervorgehoben erfolgt eine weitere Erinnerung „*Wir wissen: Wenn man in die fransigen Ränder hineinzoomt, kommen lauter Strukturen, die sich selbst ähneln und irgendwann kommt wieder das Apfelmännchen. Das heißt, unser großes Apfelmännchen, das ganz am Anfang gezeigt wurde, ist nur ein Teil vom* ________________*?* Hier soll ein Rückbezug zu den Bildern aus Bild 3 hergestellt werden: Es geht um selbstähnliche Strukturen, ein Teil des Ganzen ist strukturell ähnlich wie das Ganze, es soll verstanden werden, dass das Apfelmännchen, das in klein zu sehen ist (Bild 4), in vergrößerter Form wieder so aussehen würde, wie das „große“ Apfelmännchen in Bild 3, welches Stück für Stück herangezoomt wurde. Die Frage hätte alternativ an der Stelle folgen können, an der das Apfelmännchen erneut zu sehen war, also in Bild 4. In diesem Fall wird die Frage zur Abrundung an den Schluss gestellt, weil sie zusammen mit der folgenden Frage das Bilden einer Analogie vereinfachen soll: Lernende sollen erkennen, dass fraktalen und selbstähnlichen

---

[4] Möglicherweise wäre es in dem Zusammenhang sinnvoller gewesen, den Text, der sich auf die Konstante bezieht, näher an das Bild zu platzieren (*räumliches Kontiguitätsprinzip*).

Strukturen nicht nur im mathematischen Bereich zu entdecken sind, sondern auch in der Natur. Am Beispiel des Blumenkohls wird ebenfalls deutlich, dass ein Teil (ein Blumenkohlröschen) ähnlich aussieht wie der gesamte Kohl. Im Zusammenhang mit der Frage „*Das heißt, unser großes Apfelmännchen, das ganz am Anfang gezeigt wurde, ist nur ein Teil vom* ___________“, soll eine Analogie zu anderen Dingen, die fraktal sind, gebildet werden. Lernende sollen verstehen, dass Mathematik nicht nur anhand von Formeln zu sehen ist, sie ist „unsichtbar“ in vielen anderen Dingen. Z.B. in der Natur. Die letzte Frage, ob die Zahlenfolgen überrascht haben und wenn ja, warum, soll zur Selbstreflexion anregen, die erlebten Emotionen während der Wissensaneignung sollen den Lernenden bewusst werden.

Vorausgesetzt, dass ein Interesse für das Apfelmännchen hergestellt werden konnte, bietet dieses Thema mehrere Möglichkeiten zur Reflexion und damit einhergehend zur ästhetischen Erfahrung: Die mathematische Schönheit kann z.B. in der Einfachheit erlebt werden, denn eine relativ schlichte Formel lässt schnell die Strukturen von Zahlenfolgen erkennen und gibt Aufschluss darüber, ob die Zahl, die für die Konstante C eingesetzt wurde, Teil der Mandelbrotmenge ist oder nicht. Die Mandelbrotmenge bzw. das Apfelmännchen bietet zudem die Möglichkeit des tieferen Verstehens (epistemische Transparenz), denn es können Analogien gebildet werden: Das große Apfelmännchen ist vielleicht auch nur ein Teil von etwas noch größerem, so wie ein vergrößertes Blumenkohlröschen in Vergrößerung so aussehen würde, wie ein ganzer Blumenkohl. Mit der Entdeckung der Fraktale können naturale Phänomene besser nachvollzogen werden. So werden Fraktale verwendet, um z.B. das Wachstum von Pflanzen, der Entstehung von Wolken oder von Meeresorganismen beschreiben zu können (vgl. Crilly 2009: 103). Ferner kann das Gefühl von Erstaunen durch das Apfelmännchen an sich ausgelöst werden, weil die Besonderheit von fraktalen geometrischen Objekten verstanden wird oder weil das Apfelmännchen, welches sich wiederholt, erstaunlich ist. Anschlussfähig an das aktuelle Verständnis sind komplexe Zahlen: Es wurde eine gute Basis erarbeitet, um thematisieren zu können, dass die Konstante C eigentlich eine komplexe Zahl ist. Komplexe Zahlen bestehen aus einer reellen Zahl[5] *und einem imaginären Wert*[6] *(vgl. Brotcruncher 2019: 06:32-06:38). In diesem Beispiel wurde der Einfachheit halber eine komplexe Zahl ohne imaginären Anteil gewählt.*[7] *Stellt man sich die reellen Zahlen auf der x-Achse vor und die imaginären Werte auf der y-Achse, entsteht eine zweidimensionale Ebene (vgl. ebd.: 06:15-06:17).*

---

[5] Das sind Zahlen, die auf dem Zahlenstrahl vorkommen (vgl. Brotcruncher 2019: 01:21-01:47).
[6] Das Element i gehört nicht zu den reellen Zahlen, es bildet einen eigenen Zahlenstrahl, der rechtwinklig zum Zahlenstrahl ist (vgl. ebd.: 05:11-05:35).
[7] Die 2 gehört zu den komplexen Zahlen, jedoch hat sie keinen imaginären Anteil (vgl. ebd.: 12:08-12:12).

Bildquellennachweis zum Gestaltungsvorschlag

Abb. S.1 oben: Zusammengestellt aus eigener Darstellung und Mathe-Filme im Experten-Check – UNICUM ABI

Abb. S.1 unten: In Anlehnung an Fractals and the art of roughness

Abb. S.2 oben: Eigene Darstellung

Abb. S.2 unten: Mandelbrotmenge

Abb. S.3: Eigene Darstellungen mit Ausschnitten aus dem YouTube-Video: Mandelbrot Zoom 10^227 [1080x1920]

Abb. S.4: Ausschnitt aus dem YouTube-Video: Mandelbrot Zoom 10^227 [1080x1920]

Abb. S.5: Eigene Darstellungen und Zahlenbeispiel aus dem YouTube-Video: Die Mandelbrotmenge Theorie und Implementation

Abb. S.6: oben: Zusammengestellt aus eigener Darstellung und Mandelbrotmenge

Abb. S.6 unten: Clipart-Bild Glücklich Blumenkohl cartoon

Abb. S.6 unten: Winking Karotte Cartoon-Charakter

Abb. S.6 unten: Cartoon Glückliche Lauchfigur

Literaturverzeichnis Anhänge

ABI.UNICUM.DE (2015): Kann nur der „Rain Man“ diese Aufgabe im Kopf lösen? | Foto: Thinkstock/Pinkypills. Online unter: https://abi.unicum.de/entertainment/filme/der-mathe-film-check (Zugriff: 03.10.2021).

BOSCH, N/D’MELLO, S. K. (2017): The affective experience of novice computer programmers. International Journal of Artificial Intelligence. In: Education, 27 (1), 181– 206.

BROTCRUNCHER (2019): Die Mandelbrotmenge – Theorie und Implementation [YouTube],https://www.youtube.com/watch?v=LaHSbUWAQUE&t=964s

CLIPARTLOGO.COM (2021): Glücklich Blumenkohl cartoon Clipart. Online unter: https://de.clipartlogo.com/istock/happy-cauliflower-cartoon-1723958.html (Zugriff: 03.10.2021).

CRILLY, T. (2009): Mathematik. 50 Schlüsselideen. Übers. von Thomas Filk. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

DEPOSITPHOTOS (o.J.): Cartoon Glückliche Lauchfigur. Online unter: https://de.depositphotos.com/vector-images/lauch.html?qview=18081705 (Zugriff: 03.10.2021).

DEUTSCHER BILDUNGSSERVER (2021): Studie D21-Digital-Index 2020 /2021: Erfahrungen und Einstellungen zu digitalem Unterricht (Vorab-Ergebnisse). Online unter: https://www.bildungsserver.de/nachricht.html?nachricht_id=1225 (Zugriff: 25.09.2021).

ENGELMANN, P. A. M. (2019): Emotionsregulation beim Lernen: Analyse der Emotionen in einer computerbasierten Lernumgebung und Förderung von kognitiver Neubewertung durch ein Videotraining, Dissertation im Fach Philosophie der Technischen Universität München.

INFORMATIK UNI-LEIPZIG.DE (2002): Mandelbrotmenge. Online unter: https://www.informatik.uni-leipzig.de/~meiler/Schuelerseiten.dir/DPlotzki/html/mndlbrt.htm (Zugriff: 03.10.2021).

MATHE BY DANIEL JUNG (2014): Extremwertproblem, Punkt auf Graph, Dreieck, maximaler Flächeninhalt, Ansatz | Mathe by Daniel Jung [YouTube], https://www.youtube.com/watch?v=yCoSLQ2d3bI

MATHE - SIMPLECLUB (2015): Extremwertaufgaben – Beispiel Fläche - Abitur [YouTube], https://www.youtube.com/watch?v=b7TBoX1x1t8&t=301s

PIXERS (O.J.): WINKING KAROTTE CARTOON-CHARAKTER. ONLINE UNTER: https://pixers.at/leinwandbilder/winking-karotte-cartoon-charakter-halt-einen-daumen-62730203#configurator (Zugriff: 03.10.2021).

REICHMANN, G. (2018): Printmedien versus elektronische Medien. Eine empirische Studie zur Nutzung von Büchern, Zeitschriften und Zeitungen. In: Information – Wissenschaft & Praxis, 69 (1), 11-20.

SCHMITZ, A. (2017): Beliefs von Lehrerinnen und Lehrern der Sekundarstufen zum Visualisieren im Mathematikunterricht, Dissertation im Fach Mathematik und Naturwissenschaften an der Universität Kassel.

TED.COM (2010): Fractals and the art of roughness. Online unter: https://www.ted.com/talks/benoit_mandelbrot_fractals_and_the_art_of_roughness (Zugriff: 03.10.2021).

TTHSQUE 12 (2013): Mandelbrot Zoom 10^227 [1080x1920] [YouTube], https://www.y-outube.com/watch?v=PD2XgQOyCCk&t=108s

Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit ohne fremde Hilfe selbstständig verfasst und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Wörtlich oder dem Sinn nach aus anderen Werken entnommene Stellen sind in allen Fällen unter Angabe der Quelle kenntlich gemacht.

Hamburg, 15.10.21 [redacted]

Ort, Datum