

Bachelorarbeit

Julian Holst

Entwurf und Implementierung von LQ-Reglern für ein
Ball-Wippe-System unter partieller Messbarkeit

Julian Holst

Entwurf und Implementierung von LQ-Reglern für ein Ball-Wippe-System unter partieller Messbarkeit

Bachelorarbeit eingereicht im Rahmen der Bachelorprüfung
im Studiengang *Bachelor of Science Elektro- und Informationstechnik*
am Department Informations- und Elektrotechnik
der Fakultät Technik und Informatik
der Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg

Betreuender Prüfer: Prof. Dr. Florian Wenck
Zweitgutachter: Prof. Dr. Michael Erhard

Eingereicht am: 16. März 2021

Julian Holst

Thema der Arbeit

Entwurf und Implementierung von LQ-Reglern für ein Ball-Wippe-System unter partieller Messbarkeit

Stichworte

LQR, LQ-Regler, Optimal, PIZ, Luenberger Beobachter, Reduzierter Beobachter, Kalman-Filter, Ball-Wippe-System, Positionsregelung, Nichtlineares System, Zustandsregelung, single input, multiple output, SIMO

Kurzzusammenfassung

Der Schwerpunkt dieser Arbeit ist die Erstellung und Implementierung eines LQR für ein nichtlineares SIMO-System. Dabei werden unterschiedliche Herangehensweisen erprobt. Das System besteht aus einer winkelgesteuerten Wippe auf der die Position einer Kugel gesteuert wird.

Julian Holst

Title of Thesis

Design and Implementation of LQ-Regulators for a Ball and Beam System under partial Measurability

Keywords

LQR, LQ-Regulator, Optimal, PI State Controller, Luenberger Observer, Reduced Order Observer, Kalman Filter, Ball and Beam System, Position Control, Nonlinear System, State Control, single input, multiple output, SIMO

Abstract

The main focus of this thesis is the design and implementation of an LQR for a linearized SIMO system. Different approaches are being tested. The system consists of an angle-controlled beam on which the position of a ball is being controlled.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	vii
Tabellenverzeichnis	x
Symbolverzeichnis	xi
1 Einleitung	1
1.1 Problemstellung	1
1.2 Ziele	2
2 Grundlagen	3
2.1 Systembeschreibung im Zustandsraum	3
2.1.1 Zustandsraumdarstellung	3
2.1.2 Lineare Systeme	4
2.1.3 Linearisierung nichtlinearer Systeme	6
2.1.4 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit	8
2.1.5 Stabilität	10
2.1.6 Zustandstransformation	11
2.2 Methoden zum Reglerentwurf	15
2.2.1 Zustandsreglerentwurf durch Polvorgabe	17
2.2.2 LQR	18
2.2.3 PIZ-Regler	20
2.3 Methoden der Zustandsschätzung	23
2.3.1 Luenberger-Beobachter	23
2.3.2 Reduzierter Beobachter	26
2.3.3 Kalman-Filter	29
2.4 Verwendete Software-Tools	30

3	Das Ball–Wippe–System	31
3.1	Aufbau und Hardware	32
3.1.1	Ball und Wippe	32
3.1.2	Gerüst	33
3.1.3	Rechnereinheit	34
3.2	Aktorik und Sensorik	35
3.2.1	Motor	35
3.2.2	Inkrementalgeber	35
3.2.3	Mikroschalter	36
3.2.4	Kameramodul	36
3.3	Signalverarbeitung in Simulink	41
3.3.1	Steuerung des Servomotors	42
3.3.2	Status-Bits und Kameradaten des Ball-Wippe-Systems	43
3.3.3	Verwertung der Messdaten	45
3.4	Zustandsraummodell	47
3.4.1	Untersuchung der Systemeigenschaften	51
4	Reglerentwürfe für das Ball-Wippe-System	54
4.1	Forderungen an die Regelung	54
4.2	LQ-Regler	55
4.2.1	Simulationsmodell des Regelkreises mit LQR	56
4.2.2	Anwendung der Wichtungsmatrizen am Ball-Wippe-System	57
4.2.3	Vorüberlegungen zum ersten LQR-Entwurf	57
4.2.4	Rechnergestützter LQR-Entwurf	60
4.3	PIZ-Regelung	68
5	Zustandsschätzung für das Ball-Wippe-System	72
5.1	Luenberger-Beobachter	72
5.2	Reduzierter Beobachter	73
5.3	Linearisiertes Kalman-Filter	75
5.3.1	Simulationsmodell des Regelkreises mit LQG-Regler	76
5.3.2	Anwendung der Diagonalmatrizen am Ball-Wippe-System	77
5.3.3	Rechnergestützter Kalman-Filter-Entwurf	79
6	Implementierung und Testergebnisse	83
6.1	LQR und Luenberger-Beobachter	84
6.1.1	Führungssprung	84

6.1.2	Sinus- und Rechteckschwingung	86
6.2	LQR und reduzierter Beobachter	88
6.2.1	Führungssprung	88
6.2.2	Sinus- und Rechteckschwingung	91
6.3	LQG-Regler	93
6.3.1	Führungssprung	93
6.3.2	Sinus- und Rechteckschwingung	94
6.4	PIZ und linearisiertes Kalman-Filter	96
6.4.1	Führungssprung	97
6.4.2	Sinus- und Rechteckschwingung	99
6.5	Vergleich der Implementierungen	100
6.5.1	Kompensation konstanter Störgrößen und Robustheit	102
7	Fazit	105
7.1	Zusammenfassung	105
7.2	Ausblick	106
	Literaturverzeichnis	108
	A Anhang	111
	Selbstständigkeitserklärung	112

Abbildungsverzeichnis

2.1	Wirkungsplan eines linearen Zustandsraummodells	5
2.2	Wirkungsplan des Regelkreises mit Zustandsrückführung und Vorfilter V .	15
2.3	Wirkungsplan eines PIZ-Regelkreises	21
2.4	Wirkungsplan der Regelstrecke mit Luenberger-Beobachter	24
2.5	Wirkungsplan des Regelkreises mit Beobachter, Zustandsrückführung und Vorfilter	25
2.6	Wirkungsplan des Regelkreises mit reduziertem Beobachter, Zustandsrückführung und Vorfilter	28
3.1	Foto von der Anlage (Entnommen aus: [Gerken, 2020, S. 36])	32
3.2	Kugel und Schiene (Entnommen aus: [Ingenieurbüro Gurski-Schramm, 2015])	33
3.3	Frontpanel der Rechereinheit	34
3.4	Bildmaterial des Kameramoduls am Monitor; die Stahlkugel ist mittig positioniert	37
3.5	Bildmaterial am Monitor bei zu starker Ausleuchtung des Raumes	38
3.6	Bildmaterial am Monitor bei zu schwacher Ausleuchtung der Anlage	38
3.7	Beispiel des Einflusses des Wippenwinkels auf die gemessene Ballposition (nicht maßstabsgetreu)	39
3.8	Ballerkennung der durchgeführten Messungen	40
3.9	Rauschen beim Messen der Ballposition	41
3.10	Anpassung der Stellgröße in Simulink	42
3.11	Zeitverläufe der Signale $DOUT1$ und $DOUT2$ (Entnommen aus: [Ingenieurbüro Gurski-Schramm, 2015])	42
3.12	Ausgangsfreigabe in Simulink	43
3.13	Auslesen der Kameradaten in Simulink	44
3.14	Aufbereitung der Kamera- und Statusdaten in Simulink	45
3.15	Anpassung der Sensordaten in Simulink	46

4.1	Nichtlineares Modell der Regelstrecke in Simulink	56
4.2	Regelkreis-Modell mit LQR und Vorfilter in Simulink	57
4.3	Sprungantwort der LQR-Simulation	61
4.4	Wippenwinkel während der Sprungantwort der LQR-Simulation	62
4.5	Ballposition bei der Sinusschwingung mit wechselndem Offset in der LQR-Simulation	63
4.6	Winkel während der Sinus- und Rechteckschwingung LQR-Simulation	64
5.1	Nichtlineares Modell der Regelstrecke inkl. Messungen in Simulink	76
5.2	Regelkreis-Modell mit LQG-Regler und Vorfilter in Simulink	77
5.3	Stationärer Bereich der Ballposition beim Führungssprung in der LQG-Simulation	81
5.4	Ausschnitt vom Wippenwinkel beim Führungssprung in der LQG-Simulation	81
6.1	Echtzeitmodell mit Luenberger-Beobachter, LQR und Vorfilter	84
6.2	Sprungantwort der Ballposition mit LQR und Luenberger-Beobachter	85
6.3	Wippenwinkel beim Führungssprung mit LQR und Luenberger-Beobachter	85
6.4	Ballposition bei der Sinus- und Rechteckschwingung mit LQR und Luenberger-Beobachter	86
6.5	Zwei Perioden der Ballposition bei der Sinus- und Rechteckschwingung mit LQR und Luenberger-Beobachter	87
6.6	Winkelverlauf bei der Sinus- und Rechteckschwingung mit LQR und Luenberger-Beobachter	88
6.7	Echtzeitmodell mit reduziertem Beobachter, LQR und Vorfilter	89
6.8	Sprungantwort der Ballposition mit LQR und reduziertem Beobachter	89
6.9	Wippenwinkel beim Führungssprung mit LQR und reduziertem Beobachter	90
6.10	Stellgrößenverlauf beim Führungssprung mit LQR und reduziertem Beobachter	90
6.11	Ballposition bei der Sinus- und Rechteckschwingung mit LQR und reduziertem Beobachter	91
6.12	Zwei Perioden der Ballposition bei der Sinus- und Rechteckschwingung mit LQR und reduziertem Beobachter	92
6.13	Winkelverlauf bei der Sinus- und Rechteckschwingung mit LQR und reduziertem Beobachter	92
6.14	Sprungantwort der Ballposition mit LQG-Regler	94
6.15	Wippenwinkel beim Führungssprung mit LQG-Regler	94

6.16	Ballposition bei der Sinus- und Rechteckschwingung mit LQG-Regler . . .	95
6.17	Zwei Perioden der Ballposition bei der Sinus- und Rechteckschwingung mit LQG-Regler	95
6.18	Winkelverlauf bei der Sinus- und Rechteckschwingung mit LQG-Regler . .	96
6.19	Einfluss der abweichenden Anfangsausrichtung des Wippenwinkels am LQR mit Luenberger-Beobachter	96
6.20	Echtzeitmodell mit Kalman-Filter und PIZ-Regler	97
6.21	Sprungantwort der Ballposition mit PIZ-Regler und linearisiertem Kalman- Filter	98
6.22	Wippenwinkel beim Führungssprung mit PIZ-Regler und linearisiertem Kalman-Filter	98
6.23	Winkelverlauf bei der Sinus- und Rechteckschwingung mit PIZ-Regler und linearisiertem Kalman-Filter	99
6.24	Zwei Perioden der Ballposition bei der Sinus- und Rechteckschwingung mit PIZ-Regler und linearisiertem	99
6.25	Winkelverlauf bei der Sinus- und Rechteckschwingung mit PIZ-Regler und linearisiertem Kalman-Filter	100
6.26	Stellgrößenverläufe der Regelkreise im stationären Bereich der Sprungant- worten	101
6.27	Regelverhalten an der Ballposition durch Beschwerung der rechten Wip- penseite	103
6.28	Regelverhalten an der Ballposition durch Einsatz des Squashballs	104

Tabellenverzeichnis

3.1	Status-Bits und Kameradaten des Ball-Wippe-Systems [Gerken, 2020]	. . .	44
3.2	Physikalische Werte des Systems [Ingenieurbüro Gurski-Schramm, 2015]	. . .	47

1 Einleitung

Das „Ball-Wippe-System“ ist eine mechanische Anlage, welche an der HAW Hamburg zur Vermittlung praktischen Wissens eingesetzt wird. Sie dient als ein Versuchsmodell im Bereich der Zustandsregelung.

Diese Bachelorarbeit handelt um dieses System und untersucht Möglichkeiten, die zu einer dynamischen und gezielten Regelung der Anlage beitragen können.

1.1 Problemstellung

Über das Ball-Wippe-System wurde bereits 2020 eine Masterarbeit an der HAW Hamburg von Lars Gerken formuliert [Gerken, 2020].

In dieser Arbeit wurden verschiedene Methoden zum Entwurf eines Zustandsreglers ausgetestet. Dazu gehörten jeweils die Vierfachpolvergabe, die Polvergabe durch die Approximation an ein PT_2 -Glied und das LQ-Verfahren. Ausschließlich der Luenberger Beobachter wurde zur Schätzung der Zustandsgrößen verwendet.

Zwei Führungsgrößen fanden in der Masterarbeit eine Anwendung. Eine war der Führungssprung von 0,1 Meter und die andere eine Sinusschwingung ohne Offset mit einer Amplitude von 0,2 Metern. [Gerken, 2020]

Hinsichtlich der von Herr Gerken getätigten Tests, ergibt sich die Überlegung für die Regelung dynamischere Führungsgrößen vorzuschreiben. Dies stellt eine große Anforderung dar, da das linearisierte Modell des Ball-Wippe-Systems bei hohen, dynamischen Zustandsgrößen ungenauer wird.

Ein LQ-Regler soll verwendet werden, da die Vermutung darin liegt, dass mit dem LQ-Entwurfsverfahren diese Aufgabenstellung gezielt und geeignet gelöst werden kann.

1.2 Ziele

Das Hauptziel dieser Arbeit ist die Erstellung einer dynamischen und effektiven Regelung der Ballposition mithilfe des LQ-Verfahrens.

Dazu gibt es folgende Forderungen:

- **Hohe und sprunghafte Führungswerte:** Der Fokus soll auf zwei Führungsgrößen liegen.

Einmal ein Führungssprung ohne Offset. Die Wippenmitte ($0m$) ist die Startposition und ab Sekunde Null (t_0), bzw. beim Versuchsstart, wechselt die Führungsgröße ihren Wert von $0m$ auf $0,3m$.

Der andere Sollwert ist eine sinusförmige Schwingung mit einer Amplitude von $0,1$ Metern. Der Offset der Sinusschwingung soll hierbei fortwährend zwischen $0,2$ Metern (rechte Seite der Wippe) und $-0,2$ Metern (linke Wippenseite) springen. Dies ist vergleichbar mit der Überlagerung einer Rechteckschwingung.

- **Begrenzung des Wippenwinkels:** Systembedingt kann die Wippe nur einen begrenzten Winkel in beide Drehrichtungen einnehmen. Wird diese Einschränkung beim Entwurf des Reglers ignoriert, stößt die Wippe gegen eines der beiden unterhalb liegenden Anschlagdämpfer. Die Regelung soll dies vermeiden.

- **Einhaltung der allgemeinen Güteforderungen:** Für geschlossene Regelkreise existieren allgemeine Gütekriterien.

Dazu gehören die Forderungen an Stabilität, Sollwertfolge sowie Störkompensation, Dynamik und Robustheit. [Lunze, 2020a, S. 358 ff.]

Alle Güteforderungen sollen möglichst eingehalten werden.

Um die Ziele zu erfüllen, werden unterschiedliche Beobachter ausgetestet und der LQ-Regler erweitert. Dieser Vorgang geschieht schrittweise.

2 Grundlagen

In diesem Kapitel werden die Grundlagen erläutert, welche für das Verständnis in späteren Kapiteln erforderlich sind.

Zum einen sind diese die mathematischen Hintergründe, die für den Überblick des Systemmodells und die Erstellung der Regler wichtig sind.

Zum anderen gehört eine Beschreibung der Software dazu, welche für die Bestimmung und Darstellung der Systemwerte, sowie für die Berechnungen und die Reglerauslegungen verwendet wird.

2.1 Systembeschreibung im Zustandsraum

Der Zustand eines dynamischen Systems ist ein Vektor mit n Zustandsgrößen ($n \in \mathbb{N}$). Ist der Zustand für einen Zeitpunkt bekannt, kann das Verhalten des Systems und dessen Zustände zu anderen Zeiten theoretisch berechnet werden. Der Zustand wird mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}(t)$ ausgedrückt.

Die Elemente des Zustandsvektors können physikalische Größen sein, welche das Verhalten von Energiespeichern in einem System beschreiben. Dazu gehören beispielsweise Spannungen, Ströme, Strecken oder Geschwindigkeiten.

[Unbehauen, 2007, S. 1] [Lunze, 2020a, S. 79]

Der Zustandsraum wird als ein n -dimensionaler Vektorraum verstanden, dessen Dimensionen die Zustandsgrößen einnehmen. [Lunze, 2020a, S. 80]

2.1.1 Zustandsraumdarstellung

Bei der Beschreibung eines Systems wird in der Regelungstechnik zwischen klassischen und modernen Verfahren abgegrenzt.

Die klassische Regelungstechnik hat ihren Fokus auf das Ein- und Ausgangsverhalten

von Systemen. Dies wird entweder durch Differentialgleichungen im Zeitbereich oder im Frequenzbereich durch Übertragungsfunktionen bewerkstelligt. Dabei wird das System mittels der Laplace-Transformation im Frequenzbereich modelliert.

Die moderne Regelungstechnik befasst sich mit der Zustandsraumdarstellung, bei der ein System durch seine Zustandsgrößen definiert wird. Die Beschreibung im Zeitbereich wird durch Zustandsdifferentialgleichungen und Ausgangsgleichungen beibehalten. Nicht nur das Ein- und Ausgangsverhalten ist dadurch berechenbar, sondern auch das Zustandsverhalten.

[Walter, 2019, S. 1 f.]

2.1.2 Lineare Systeme

Ein lineares System lässt sich mithilfe von linearen Differentialgleichungen physikalisch beschreiben.

Besitzt eine lineare Differentialgleichung eine Ordnung von $i > 1$, kann diese in i Differentialgleichungen erster Ordnung zerlegt werden. Durch diese Möglichkeit der Umformung ergeben sich für die gesamte Systembeschreibung n lineare Differentialgleichungen erster Ordnung. [Lunze, 2020a, S. 78] [Lunze, 2020b, S.15 f.]

Das Modell eines linearen Systems im Zustandsraum ist prinzipiell ein System mit n Differentialgleichungen erster Ordnung. Der Unterschied liegt in der Darstellungsform. Vektoren und Matrizen werden hierbei als Beschreibungsmittel verwendet. Somit lassen sich Systeme gut interpretieren und analysieren. Auch der Reglerentwurf und rechnergestützte Verfahren lassen sich damit geeignet umsetzen. [Lunze, 2020a, S. 74 f.]

Ein lineares Zustandsraummodell hat die Form:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (2.2)$$

Die erste Gleichung (2.1) wird als „Zustandsgleichung“ und die zweite Gleichung (2.2) als „Ausgabe-“ bzw. „Beobachtungsgleichung“ bezeichnet.

Der Vektor $\dot{\mathbf{x}}(t)$ ist die Zeitableitung des Zustandsgrößenvektors $\mathbf{x}(t)$ und beschreibt die Zustandsänderung über die Zeit. Dementsprechend besitzt er dieselbe Anzahl an Elementen wie $\mathbf{x}(t)$. (Dimension: $n \times 1$)

Der Vektor $\mathbf{u}(t)$ ist der Stellgrößenvektor. Er beinhaltet die m Eingänge des Systems, womit sich das System steuern lässt. (Dimension: $m \times 1$)

Der Vektor $y(t)$ ist der Regelgrößenvektor, welcher die p Ausgänge der Regelstrecke angibt. Um ein System regeln zu können, müssen die Regelgrößen gemessen werden. (Dimension: $p \times 1$)

Die Matrix A ist die Systemmatrix. Sie spezifiziert, auf welche Weise der aktuelle Zustand sich auf die zeitliche Zustandsänderung prägt. (Dimension: $n \times n$)

Die Matrix B ist die Eingangs- bzw. Steuermatrix. Der Einfluss der Stellgrößen auf die Zustandsänderung wird mit dieser Matrix definiert. (Dimension: $n \times m$)

Die Matrix C ist die Ausgabematrix. Sie gibt an, welche der Zustandsgrößen gemessen werden und wie sich diese auf die Ausgänge auswirken. (Dimension: $p \times n$)

Die Matrix D ist die Durchgangsmatrix. Sie führt Stellgrößeneinflüsse direkt auf die Regelgrößen zu. (Dimension: $p \times m$)

[Zacher und Reuter, 2017, S.397 f.] [Lunze, 2020a, S. 38, 76, 747]

Mittels eines Wirkungsplans (Abb. 2.1) lässt sich diese Darstellungsart visualisieren.

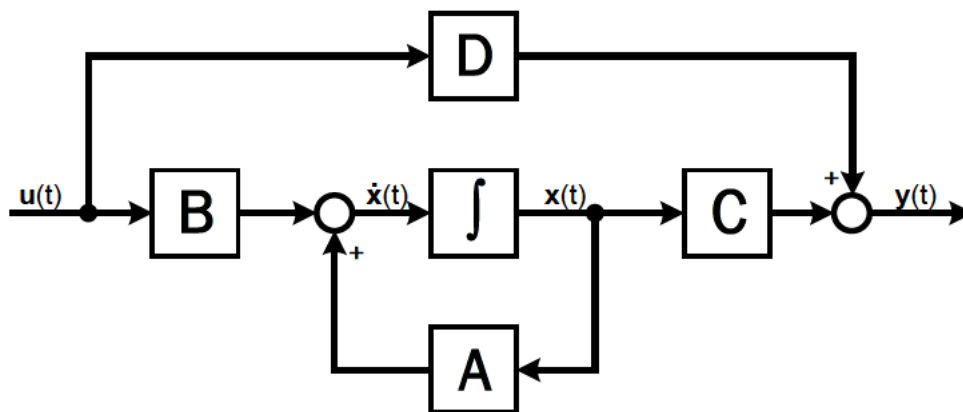


Abbildung 2.1: Wirkungsplan eines linearen Zustandsraummodells

Die Gleichungen (2.1) und (2.2) sind allgemeingültige Gleichungen, welche in der Literatur hauptsächlich im Kontext der Mehrgrößensysteme verwendet werden. Dies sind Systeme die mehrere Ein- und Ausgänge besitzen. Im Englischen wird hierfür die Abkürzung „MIMO“, also „multiple-input and multiple-output“ verwendet.

Eingrößensysteme bzw. Systeme mit nur einem Eingang und nur einem Ausgang, werden im englischsprachigen Raum als „SISO“ („single-input and single-output“) bezeichnet.

Analog werden je nachdem wie viele Stell- und Regelgrößen verfügbar sind, die Begrifflichkeiten „SIMO“ und „MISO“ ebenfalls verwendet.

[Lunze, 2020b, S. 4] [Lunze, 2020a, S.82]

Handelt es sich bei einem System um ein SISO-System, ändern sich in der Literatur die Kennzeichnungen in den Gleichungen (2.1) und (2.2) zu:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.3)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + du(t) \quad (2.4)$$

Da nur eine Eingangsgröße $m = 1$ und eine Ausgangsgröße $p = 1$ existieren, sind die Matrizen \mathbf{B} und \mathbf{C} Vektoren und werden dementsprechend durch Kleinschrift ausgedrückt. Die Transponierung „^T“ des Ausgabevektors \mathbf{c} soll verdeutlichen, dass es sich um einen Zeilenvektor handelt.

Die Durchgangsmatrix \mathbf{D} ist nun ein Skalar d und wird stattdessen als „Durchgriff“ bezeichnet.

[Lunze, 2020a, S. 76, 747]

Störgrößen

Reale Systeme besitzen Störsignale, welche sich auf das System und dessen Zustandsgrößen auswirken. Die Ursache davon können Eingangsgrößen sein, die von der Anlage nicht direkt beeinflussbar sind. Auch Modell- und Messungenauigkeiten gehören zu den Störgrößen. [Papageorgiou u. a., 2015, S. 317]

In der Zustandsraumdarstellung eines Systems können Störsignale mitberücksichtigt werden. Dazu werden die Zustands- und Ausgabegleichungen (2.1) und (2.2) mit den Störgrößenvektoren $\mathbf{z}(t)$ und $\mathbf{v}(t)$ erweitert:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{z}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.5)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t) + \mathbf{v}(t) \quad (2.6)$$

Eines der Aufgaben der Regelungstechnik ist es, die Störsignale durch geeignete Regelverfahren zu kompensieren. [Lunze, 2020a, S. 358 f.]

2.1.3 Linearisierung nichtlinearer Systeme

Die Darstellung nichtlinearer Systeme im Zustandsraum kann deshalb nicht wie zuvor mit definierten Matrizen erfolgen. Das kann unter anderem daran liegen, dass sich Zustandsgrößen nichtlinear auf das System auswirken.

Stattdessen besteht die Beschreibung jeweils aus einer Vektorfunktion \mathbf{f} mit n nichtlinearen Differentialgleichungen erster Ordnung und einem Ausgangsfunktionsvektor \mathbf{g} erster Ordnung der Dimension p :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.7)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (2.8)$$

[Adamy, 2018, S. 1 ff.]

Die Linearisierung eines nichtlinearen Systems kann durch verschiedene Methoden erfolgen. Im Rahmen dieser Bachelorarbeit wird die Approximation um eine Ruhelage durch die Taylor-Entwicklung behandelt.

Zu Beginn wird der Arbeitspunkt bzw. die Ruhelage $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{y}})$ ausgewählt, um die das System angenähert werden soll. Sinnvoll ist es hier einen Arbeitspunkt zu wählen, wovon das nichtlineare System nicht zu sehr abweicht. Für die Vektoren der Zustands-, Stell- und Regelgrößen gelten die Gleichungen (2.9) bis (2.11).

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^*(t), \\ \dot{\mathbf{x}}(t) &= \dot{\mathbf{x}}^*(t). \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^*(t), \\ \dot{\mathbf{u}}(t) &= \dot{\mathbf{u}}^*(t). \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \bar{\mathbf{y}} + \mathbf{y}^*(t), \\ \dot{\mathbf{y}}(t) &= \dot{\mathbf{y}}^*(t). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Die mit Asteriskus „*“ gekennzeichneten Vektoren sind die zeitlich abhängigen Abweichungen zur Ruhelage.

[Unbehauen, 2008, S. 25]

Nun kann die Taylor-Reihenentwicklung unter Berücksichtigung der Gleichung (2.7) angewendet werden, sodass sich die Berechnung (2.12) ergibt.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}] + \left. \frac{\delta \mathbf{f}}{\delta \mathbf{x}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \left. \frac{\delta \mathbf{f}}{\delta \mathbf{u}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \quad (2.12)$$

Die Gleichung (2.12) illustriert die Anwendung der Taylorreihe erster Ordnung. Das Restglied höherer Ordnung wird aufgrund der Annahme, dass die Zustandsgrößen in der Umgebung des Arbeitspunktes bleiben, vernachlässigt.

Durch Anpassung auf die in den Gleichungen (2.1) und (2.2) angewandte Form, ergibt sich das folgende linearisierte Zustandsraummodell:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\delta x_1} & \dots & \frac{\delta f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\delta x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\delta x_1} & \dots & \frac{\delta f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\delta x_n} \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\delta u_1} & \dots & \frac{\delta f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\delta u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\delta u_1} & \dots & \frac{\delta f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\delta u_m} \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}} \mathbf{u}(t) \quad (2.13)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\delta g_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\delta x_1} & \dots & \frac{\delta g_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\delta x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta g_p(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\delta x_1} & \dots & \frac{\delta g_p(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\delta x_n} \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \frac{\delta g_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\delta u_1} & \dots & \frac{\delta g_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\delta u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta g_p(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\delta u_1} & \dots & \frac{\delta g_p(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\delta u_m} \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}} \mathbf{u}(t) \quad (2.14)$$

Die Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} und \mathbf{D} sind hier sogenannte Jacobi-Matrizen.

[Unbehauen, 2008, S. 25 f.]

2.1.4 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Steuer- und Beobachtbarkeit eines Systems sind in der Regelungstechnik maßgebende Eigenschaften. Sie verraten, ob die gewünschte Regelung eines Systems überhaupt möglich ist. [Walter, 2019, S. 37]

Damit beispielsweise ein Zustandsregler durch Polzuweisung (Kap. 2.2.1) ausgelegt werden kann, muss das System vollständig steuerbar sein.

Ähnliches gilt für den Luenberger Beobachter (Kap. 2.3.1), welcher für dessen Erstellung ein vollständig beobachtbares System voraussetzt.

[Lunze, 2020b, S. 255, 352]

Vollständige Steuerbarkeit

Nur wenn der Eingang $\mathbf{u}(t)$ sämtliche Zustandsgrößen $x_i(t)$ eines Systems beeinflussen und in einer endlichen Zeit t_1 von einem beliebigen Anfangszustand $\mathbf{x}(t_0)$ in den Endzustand $\mathbf{x}(t_1)$ überführen kann, ist das System vollständig steuerbar ($t_0 \leq t_1 < \infty$).

Um die vollständige Steuerbarkeit rechnerisch zu belegen, existiert ein definiertes Kriterium von Kalman. Dies verwendet die Steuerbarkeitsmatrix \mathbf{S}_S :

$$\mathbf{S}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Das System ist nur dann vollständig steuerbar, wenn der Rang der Steuerbarkeitsmatrix n ist:

$$\text{Rang } \mathbf{S}_S \stackrel{!}{=} n \quad (2.16)$$

[Unbehauen, 2007, S. 46 ff.]

Vollständige Beobachtbarkeit

Ein System heißt vollständig beobachtbar, wenn die Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} und \mathbf{C} bekannt sind und aus den Verläufen der Ein- und Ausgängen $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{y}(t)$ bei endlicher Zeit t_1 der Anfangszustand $\mathbf{x}(t_0)$ genau bestimmt werden kann ($t_0 \leq t_1 < \infty$).

Auch hierzu gibt es eine von Kalman hergeleitete Bedingung, welche Gebrauch von der Beobachtbarkeitsmatrix \mathbf{S}_B macht:

$$\mathbf{S}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix muss für eine vollständige Beobachtbarkeit n sein:

$$\text{Rang } \mathbf{S}_B \stackrel{!}{=} n \quad (2.18)$$

[Unbehauen, 2007, S. 50 f.]

2.1.5 Stabilität

Unter einem stabilen System wird im Allgemeinen ein System verstanden, welches bei einer beschränkten Erregung mit einer beschränkten Bewegung antwortet.

Hier wird zwischen der Zustandsstabilität und der Eingangs-Ausgangs-Stabilität (kurz: E/A-Stabilität) differenziert.

[Lunze, 2020a, S. 421 f.] [Lunze, 2020b, S. 94 ff.]

Zustandsstabilität

Die Zustandsstabilität thematisiert die Stabilität des Gleichgewichtszustandes $\mathbf{x}_g = 0$. Das System befindet sich dabei in der Ruhelage $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}$ und ist ungestört ($u(t) = 0$).

Der Gleichgewichtszustand ist stabil, wenn für jede Umgebung ϵ eine Umgebung δ existiert, bei denen die beiden Bedingungen $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ und $\|\mathbf{x}(t)\| < \epsilon$ erfüllt sind. Der Anfangszustand \mathbf{x}_0 ist hierbei beliebig.

Die Bedingungen sind erfüllt, wenn die reellen Anteile der Eigenwerte λ_i der Systemmatrix \mathbf{A} kleiner sind als 0:

$$\Re(\lambda_i) \stackrel{!}{<} 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.19)$$

Dies wird als asymptotische Stabilität bezeichnet.

Die Zustandsstabilität wird ebenfalls erfüllt, wenn reelle Anteile der Eigenwerte gleich 0 sind:

$$\Re(\lambda_i) \stackrel{!}{\leq} 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.20)$$

Dazu muss aber die Matrix \mathbf{A} diagonalisierbar sein oder der Nullwert einfach auftreten. Das System ist hierbei nicht asymptotisch stabil.

[Lunze, 2020b, S. 57 f.]

Um die Eigenwerte der Systemmatrix zu ermitteln, wird das charakteristische Polynom $p_{\mathbf{A}}(\lambda)$ berechnet:

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 \quad (2.21)$$

Die Nullstellen dieser Gleichung sind dann die gesuchten Eigenwerte.

[Unbehauen, 2007, S. 15]

E/A-Stabilität

Bei der E/A-Stabilität wird das System als ein Übertragungsglied behandelt, das die Übertragungsfunktion $G(s)$ besitzt:

$$G(s) = \frac{\beta_0 + \beta_1 s + \beta_2 s^2 \cdots + \beta_q s^q}{\alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 \cdots + s^n} \quad (2.22)$$

Diese Funktion lässt sich über das lineare Zustandsraummodell des Systems berechnen:

$$G(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} \quad (2.23)$$

Ein lineares System ist E/A-stabil, wenn das System eine Zustandsauslenkung von $\mathbf{x}_0 = 0$ besitzt und zu einem beliebigen, beschränkten Eingangssignal $|u(t)| < u_{max}$ ein beschränktes Ausgangssignal $|y(t)| < y_{max}$ folgt.

Diese Definition ist erfüllt, wenn die reellen Anteile sämtlicher Pole s_i der Übertragungsfunktion (2.22) des Systems kleiner sind als 0:

$$\Re(s_i) \stackrel{!}{<} 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.24)$$

Alle Pole der Übertragungsfunktion sind Eigenwerte der Systemmatrix \mathbf{A} . Daraus folgt, dass bei asymptotischer Zustandsstabilität, die E/A-Stabilität garantiert ist.

[Lunze, 2020a, S. 428 ff.]

2.1.6 Zustandstransformation

Ein beliebiges Eingrößen-Zustandsraummodell kann durch Zustandstransformation in andere Modellformen überführt werden.

Die Zustandsgrößen werden mit der Transformationsmatrix \mathbf{T} in neue Zustandsgrößen transformiert.

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{x}(t) \quad (2.25)$$

Die Transformationsmatrix ist eine quadratische ($n \times n$) und reguläre Matrix.

[Lunze, 2020a, S. 140]

Es handelt sich weiterhin um dasselbe Systemverhalten, welches mit dem neuen Zustand beschrieben wird. Die Matrizen des Zustandsraummodells werden dementsprechend eben-

falls transformiert. [Walter, 2019, S. 40]

Ein Zustandsraummodell gemäß den Gleichungen (2.3) und (2.4) ändert sich durch die Transformation folgendermaßen:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{T}^{-1} \mathbf{b} u(t) = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{b}} u(t) \quad (2.26)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{T} \tilde{\mathbf{x}}(t) + du(t) = \tilde{\mathbf{c}}^T \tilde{\mathbf{x}}(t) + du(t) \quad (2.27)$$

Die Zustandstransformation ist in der Regelungstechnik relevant, weil damit unter anderem beliebige Zustandsraummodelle in normierte Modellformen transformiert werden können.

Regelungsnormalform

Eines der normierten Modellformen ist die Regelungsnormalform. Mit dieser Normalform können ausgewählte Verfahren zum Reglerentwurf durchgeführt werden. [Walter, 2019, S. 5]

Für gewöhnlich liegt das erstellte Zustandsraummodell eines Systems nicht bereits in Regelungsnormalform vor und muss in diese transformiert werden. Das bedeutet, dass die Transformationsmatrix \mathbf{T}_R der Regelungsnormalform benötigt wird.

Dazu wird zunächst die Steuerbarkeitsmatrix \mathbf{S}_S wie in der Gleichung (2.15) berechnet.

Zu einer Systembeschreibung im Zustandsraum existiert nur dann eine äquivalente Regelungsnormalform, wenn die Steuerbarkeitsmatrix invertierbar ist.

Dies ist der Fall, wenn das System vollständig steuerbar, also die Bedingung (2.16) erfüllt ist.

Als nächstes wird die letzte Zeile der invertierten Steuerbarkeitsmatrix bestimmt:

$$\mathbf{q}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \mathbf{S}_S^{-1} \quad (2.28)$$

Dann kann die Transformationsmatrix \mathbf{T}_R gebildet und somit die Transformation gemäß den Gleichungen (2.26) und (2.27) vollzogen werden:

$$\mathbf{T}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^T \\ \mathbf{q}^T \mathbf{A} \\ \mathbf{q}^T \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{q}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

[Lunze, 2020a, S. 160]

Zwischen den Matrizen der Regelungsnormform und der Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems (2.22) gibt es einige Parallelitäten. Sofern das System vollständig steuer- und beobachtbar ist, beinhaltet die Systemmatrix $\tilde{\mathbf{A}}_{RNF}$ die Koeffizienten im Nenner der Übertragungsfunktion und der Ausgabevektor $\tilde{\mathbf{c}}_{RNF}^T$ die Koeffizienten im Zähler:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{RNF} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{b}}_{RNF} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

$$\tilde{\mathbf{c}}_{RNF}^T = [\beta_0 - \beta_n \alpha_0 \quad \beta_1 - \beta_n \alpha_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1} - \beta_n \alpha_{n-1}], \quad \tilde{d}_{RNF} = \beta_n \quad (2.31)$$

Der Zeilenvektor $\tilde{\mathbf{c}}_{RNF}^T$ und der Durchgriff d_{RNF} haben bei nicht sprunghafigen Systemen ($q < n$) die Definition:

$$\tilde{\mathbf{c}}_{RNF}^T = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_q \quad 0 \quad \cdots \quad 0], \quad d_{RNF} = 0 \quad (2.32)$$

Beobachtungsnormalform

Ein weiteres normiertes Modell ist die Beobachtungsnormalform.

Im Gegensatz zur Regelungsnormform können damit Verfahren zur Beobachterausslegung durchgeführt werden.

Zur Bildung der Transformationsmatrix T_B muss erst die Beobachtbarkeitsmatrix \mathbf{S}_B wie in (2.17) berechnet werden.

Die Matrix \mathbf{S}_B muss invertierbar sein, damit zu einem System die Beobachtungsnormalform erstellt werden kann. Das System muss dafür vollständig beobachtbar sein, was bei der Erfüllung des Kriteriums (2.18) zutrifft.

Nun kann der Spaltenvektor \mathbf{r} berechnet und damit die Transformationsmatrix \mathbf{T}_B hergeleitet werden:

$$\mathbf{r} = \mathbf{S}_B^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$\mathbf{T}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{r} & \mathbf{A}\mathbf{r} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{r} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

In Anlehnung zur Übertragungsfunktion (2.22) hat die Beobachtungsnormalform folgende Definition:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{BNF} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{b}}_{BNF} = \begin{bmatrix} \beta_0 - \beta_n \alpha_0 \\ \beta_1 - \beta_n \alpha_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} - \beta_n \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$\tilde{\mathbf{c}}_{BNF}^T = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad d_{BNF} = b_n \quad (2.36)$$

Ist das System nicht sprungfähig, gilt für den Eingangsvektor $\tilde{\mathbf{b}}_{BNF}$ und den Durchgriff d_{BNF} :

$$\tilde{\mathbf{b}}_{BNF} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_q \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d_{BNF} = 0 \quad (2.37)$$

Werden die vorstehenden Gleichungen (2.35) bis (2.37) mit den Gleichungen (2.30) bis (2.32) verglichen, ist nachvollziehbar, dass die beiden Normalformen durch simple Be-

rechnung ineinander überführbar sind:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{BNF} = \tilde{\mathbf{A}}_{RNF}^T, \quad \tilde{\mathbf{b}}_{BNF} = \tilde{\mathbf{c}}_{RNF}, \quad \tilde{\mathbf{c}}_{BNF}^T = \tilde{\mathbf{b}}_{RNF}^T \quad (2.38)$$

Dies wird als „Dualität“ bezeichnet. [Lunze, 2020a, S. 163 ff.]

2.2 Methoden zum Reglerentwurf

In dieser Bachelorarbeit wird zur Regelung hauptsächlich eine statische Zustandsrückführung verwendet. Bei dieser Regelungsart wird der Zustandsvektor $\mathbf{x}(t)$ der Regelstrecke über den Zustandsregler \mathbf{K} auf den Stellgrößenvektor $\mathbf{u}(t)$ zurückgeführt. Dadurch wird ein Regelkreis mit n Schleifen geschaffen.

Die Zustandsrückführung ist definiert als:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (2.39)$$

[Walter, 2019, S. 82] [Lunze, 2020b, S. 150]

In Abbildung 2.2 ist der Wirkungsplan aus der Darstellung 2.1 mit einer Zustandsrückführung erweitert worden.

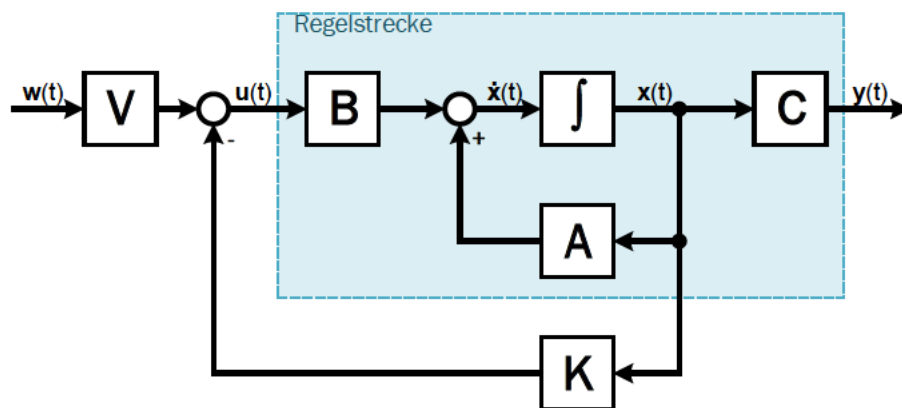


Abbildung 2.2: Wirkungsplan des Regelkreises mit Zustandsrückführung und Vorfilter V

Die Durchgangsmatrix wird durch die Annahme $D = O$ vernachlässigt.

Das Zustandsraummodell des geschlossenen Regelkreises mit Zustandsrückführung ist folgend formuliert:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(t) + \mathbf{BV}u(t) \\ &= \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(t) + \bar{\mathbf{B}}u(t)\end{aligned}\tag{2.40}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\tag{2.41}$$

Wie in (2.40) ersichtlich, ergibt sich für das Gesamtsystem die Systemmatrix $\bar{\mathbf{A}}$, welche andere Eigenwerte als die Matrix \mathbf{A} der Regelstrecke aufweist.

Die Zustandsrückführung besitzt die Fähigkeit, Eigenwerte der Regelstrecke gezielt zu verändern. Somit können instabile Regelstrecken stabilisiert werden. [Walter, 2019, S. 83] [Lunze, 2020b, S. 256]

Da der Regelgrößenvektor eine Funktion vom Zustand ist, wird durch eine Zustandsrückführung nicht die stationäre Genauigkeit garantiert.

Ein Vorfilter wird hierzu als Gegenmaßnahme verwendet und vor dem Regelkreis geschaltet. Die Regelgröße wird dadurch der Führungsgröße $\mathbf{w}(t)$ im stationären Zustand gleichgesetzt.

Das Vorfilter einer Zustandsrückführung wird folgendermaßen berechnet:

$$\mathbf{V} = [\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{BV}]^{-1}\tag{2.42}$$

[Walter, 2019, S. 83] [Lunze, 2020b, S. 186 ff.]

In den anschließenden Unterkapiteln werden zwei Zustandsrückführungen betrachtet. Erst wird der Entwurf durch Polvorgabe und dann durch die Methode der LQ-Regelung behandelt.

Danach wird die PIZ-Regelung erläutert. Dies ist eine Erweiterung des Zustandsregelkreises. Die Zustandsrückführung wird mit einem PI-Regler vereint und somit konstante Störgrößen kompensiert.

2.2.1 Zustandsreglerentwurf durch Polvorgabe

Der Entwurf eines Zustandsreglers durch Polvorgabe wird für den praktischen Anteil dieser Bachelorarbeit nicht direkt verwendet, ist jedoch eine wichtige Grundlage des hier behandelten PIZ-Reglers und des allgemeinen Verständnisses.

Die Pole der Übertragungsfunktion (2.22) eines Systems charakterisieren die Eigenbewegung und das Eingangs- sowie Ausgangsverhalten des Systems.

Durch einen Zustandsregler können diese Pole verschoben und somit das Systemverhalten verändert werden. Instabile Systeme können dadurch beispielsweise stabilisiert werden. Bei der Polvorgabe werden die gewünschten Pole des geschlossenen Kreises im Voraus festgelegt und der Regler \mathbf{K} so dimensioniert, dass diese Pole vom Gesamtsystem eingenommen werden.

[Lunze, 2020b, 249 ff., 354]

Ist das System vollständig steuer- und beobachtbar, sind alle Eigenwerte λ_i der Systemmatrix \mathbf{A} gleichzeitig die Pole s_i des Systems. [Lunze, 2020b, S. 161]

Unter dieser Voraussetzung werden Eigenwerte und Pole in der Literatur häufig synonym zueinander verwendet.

Im Folgenden wird angenommen, dass die gewünschten Eigenwerte $\bar{\lambda}_i$ bereits gegeben sind. Es wird des Weiteren angenommen, dass die Regelstrecke ein vollständig steuerbares SISO-System ist, dessen Zustandsraummodell vorliegt. Dann kann der Reglerentwurf erfolgen.

Aus den gewünschten Eigenwerten an den Regelkreis resultieren die gewünschten Koeffizienten $\bar{\alpha}^T$ des charakteristischen Polynoms der Systemmatrix $\bar{\mathbf{A}}$:

$$\begin{aligned}\bar{p}_{\bar{\mathbf{A}}} &= \prod_{i=1}^n (\lambda - \bar{\lambda}_i) = \lambda^n + \bar{\alpha}_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \bar{\alpha}_1 \lambda + \bar{\alpha}_0 \\ \Leftrightarrow \bar{\alpha}^T &= [\bar{\alpha}_0 \quad \bar{\alpha}_1 \quad \dots \quad \bar{\alpha}_{n-1}]\end{aligned}\tag{2.43}$$

Die Koeffizienten α^T vom Nenner der Übertragungsfunktion (2.22) der Regelstrecke müssen bestimmt werden. Dies geschieht über die Gleichung (2.43) des charakteristischen Polynoms $p_{\mathbf{A}}$.

Andererseits kann die Kalkulation von α^T auch durch eine Zustandstransformation geschehen. Hierfür wird das Zustandsraummodell eines Eingrößensystems wie in Kapitel 2.1.6 beschrieben, in die Regelungsnormalform transformiert.

Die Elemente der letzten Zeile der Systemmatrix \mathbf{A}_{RNF} sind die Koeffizienten mit negativem Vorzeichen.

Gleichzeitig ergibt sich hieraus die Transformationsmatrix \mathbf{T}_R , welche für diesen Reglerentwurf benötigt wird. Die Zustandsrückführung \mathbf{k}_R^T für das Eingrößensystems wird durch die beiden berechneten Koeffizientenvektoren hergeleitet:

$$\mathbf{k}_R = \bar{\boldsymbol{\alpha}}^T - \boldsymbol{\alpha}^T \quad (2.44)$$

Dieser Rückführvektor ist auf das System in Regelungsnormform zugeschnitten und muss zur Anwendung auf das eigentliche Zustandsraummodell über die Matrix \mathbf{T}_R angepasst werden:

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{k}_R \mathbf{T}_R^{-1} \quad (2.45)$$

2.2.2 LQR

Der LQR („*linear quadratic regulator*“) ist ein Teil der optimalen Regelung. Es ist eine weitere Möglichkeit eine Zustandsrückführung bei *linearen* Zustandsraummodellen zu implementieren. Im Gegensatz zur Polvorgabe wird ein *quadratisches* Gütefunktional vorgegeben, auf welches hin der Regler \mathbf{K} optimiert wird. [Papageorgiou u. a., 2015, S. 295]

Ziel ist die Minimierung des Gütefunktional J , welches definiert ist als:

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) dt \rightarrow \min \quad (2.46)$$

Die Matrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R} sind beliebige symmetrische Wichtungsmatrizen, welche die Dynamik der Zustands- und Stellgrößen beeinflussen. Der Rahmen ist hierbei, dass \mathbf{Q} positiv semidefinit und \mathbf{R} positiv definit ist.

Sind die Wichtungsmatrizen gewählt, werden sie in die Matrix-Riccatigleichung eingesetzt:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{O} \quad (2.47)$$

Die gesuchte Lösung dieser Gleichung ist die symmetrische, positiv definite Matrix \mathbf{P} . Dann kann der LQ-Regler \mathbf{K} errechnet werden:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (2.48)$$

[Lunze, 2020b, S. 304 ff., 313]

Dieser Regler ist „optimal“, da durch diesen das Gütefunktional (2.46) mit gegebenen Wichtungsmatrizen minimiert wird. [Braun, 2020, S.1]

Wahl der Wichtungsmatrizen

Die Wahl der Matrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R} ist nicht eindeutig und geschieht iterativ, basierend auf Erfahrung und dem physikalischen Verständnis des vorliegenden Systems.

Das Gütefunktional (2.46) gibt hierbei erste Ansätze. Soll beispielsweise die Zustandsgröße $x_i(t)$ besonders hochdynamisch geregelt werden, wird der Wert des Elements q_{ii} im Vergleich zu den restlichen Elementen von \mathbf{Q} hoch gesetzt.

Nachdem die Wichtungsmatrizen ausgewählt sind und der Regler berechnet ist, wird das Regelkreisverhalten geprüft. Entspricht die Dynamik nicht den eigenen Anforderungen, werden die Wichtungsmatrizen dementsprechend angepasst und der daraus entstehende Regelkreis wieder getestet. Dies geschieht solange bis die Anforderungen an die Dynamik erfüllt sind.

[Lunze, 2020b, S. 315 f.] [Mahdi, 2018, S. 119]

Oft werden aufgrund von Einfachheit Diagonalmatrizen als Wichtungsmatrizen verwendet. Somit wird nicht nur der Einfluss auf die Zustands- und Stellgrößenverhalten überschaubarer, sondern auch die Einhaltung der vorgeschriebenen Definitheiten. Eine Diagonalmatrix ist immer positiv definit bzw. semidefinit, solange ihre Elemente größer bzw. größer gleich Null sind. [Lunze, 2020b, S. 317 ff.] [Mahdi, 2018, S. 119]

Vor- und Nachteile des LQR-Entwurfs

Der LQ-Regelkreis besitzt einige Eigenschaften, die sich bereits aus dem Entwurf des Reglers ergeben. Dazu gehören die asymptotische Stabilität und eine gute Robustheit mit einem Phasenrand von $\phi \geq 60^\circ$ sowie einem Amplitudenrand zwischen $\frac{1}{2}$ und unendlich zu jeder Stellgröße.

Die Herleitung dieser Robustheit ist aus den vorigen Gleichungen nicht eindeutig. Es kann jedoch gezeigt werden, dass beispielsweise ein System mit einer Stellgröße $u(t)$ mit dem LQR die Gleichung (2.49) erfüllt. Die Frequenzgangsfunktion des offenen Kreises $G_0(j\omega) = \mathbf{k}^T(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$ umgeht hierbei den Einheitskreis um den kritischen Punkt.

$$1 + G_0(j\omega) \geq 1 \quad (2.49)$$

[Lunze, 2020b, S. 308 ff.] [Papageorgiou u. a., 2015, S. 309]

Im Gegensatz zur Polvorgabe wird außerdem eine bessere Dynamik sowie kleinere Verstärkungen erzielt.

Nachteil ist jedoch, dass die Eigenwertlagen nicht direkt beeinflusst werden können. Die Parametrierung der Wichtungsmatrizen nimmt außerdem unerwünscht viel Zeit in Anspruch.

[Dehnert, 2020, S. 44], [Mahdi, 2018, S. 119]

2.2.3 PIZ-Regler

Bei den vorigen Reglern wird lediglich eine Zustandsrückführung erstellt. Dieser alleine reicht aber nicht aus, um konstante Störgrößen zu kompensieren. Es entsteht eine bleibende Regelabweichung. [Dehnert, 2020, S. 30]

Der „PI-Zustandsrückführungs-Regler“ (auch „PI-Zustandsregler“) soll diese Eigenschaft vermeiden und eine Sollwertfolge mit Störgrößenkompensation garantieren. Es wird zusätzlich eine höhere Robustheit gegenüber Modellungenauigkeiten erzielt. [Lunze, 2020b, S. 191]

Der PIZ-Regler erweitert eine Zustandsregelung mit einem PI-Regler. Dadurch wird der Regelkreis, wie in Abbildung 2.3 zu sehen, zusätzlich zur Rückführung geschlossen.

Die Ordnung des geschlossenen Kreises wird durch die weitere Polstelle des I-Anteils auf $n + 1$ erhöht. Dies wird grundsätzlich mit einer Verlangsamung der Regelung verbunden. Es gibt mit dem PIZ-Regler die Möglichkeit der Verlangsamung entgegenzuwirken. [Grabmair und Gahleitner, 2019, S.727 ff.]

Bei dem PIZ-Regler ergeben sich durch $\tilde{\mathbf{V}}$ und $\tilde{\mathbf{V}}_I$ zwei weitere Freiheitsgrade im Regelkreis. Es gibt in der Literatur Ansätze diese Freiheitsgrade einzuschränken, welche in [Grabmair und Gahleitner, 2019] aufgegriffen und untersucht werden.

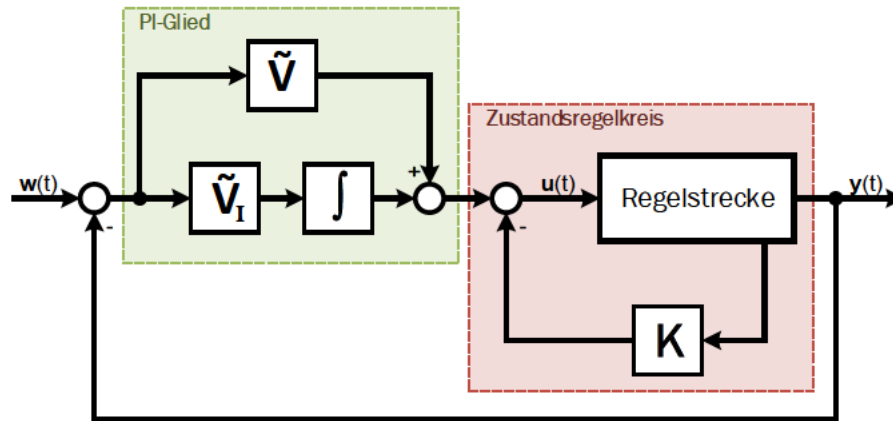


Abbildung 2.3: Wirkungsplan eines PIZ-Regelkreises

In [Wenck, 2019] wird ein weiterer Ansatz zur Auslegung gezeigt, der im Folgenden behandelt wird.

Es wird von einem Eingrößensystem in Regelungsnormalform ausgegangen. Liegt das Systemmodell nicht in Regelungsnormalform vor, wird es gemäß Kapitel 2.1.6 dahin transformiert. Damit bei dieser Auslegung eine Regelabweichung ausgeschlossen ist, darf die Regelstrecke kein Integralverhalten besitzen ($c_{RNF1} \neq 0$).

Ähnlich dem Zustandsreglerentwurf durch Polvorgabe, werden die Wunsch-Eigenwerte $\bar{\lambda}_i$ des geschlossenen PIZ-Regelkreises vorgegeben. Üblicherweise ist das Ziel, dasselbe Übertragungsverhalten wie vor der Anbindung des PI-Reglers zu erhalten. Somit muss nur der zusätzliche Eigenwert $\bar{\lambda}_{n+1}$ des Integralanteils ausgewählt werden.

Das daraus entstehende charakteristische Polynom (2.43) wird in folgende Gleichung eingesetzt:

$$\begin{bmatrix} \tilde{V}_I \\ \tilde{k}_{R1} \\ \tilde{k}_{R2} \\ \vdots \\ \tilde{k}_{Rn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{RNF1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{RNF2} & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ c_{RNFn} & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \left(\bar{\alpha} - \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_0 + \tilde{V} \cdot c_{RNF1} \\ \vdots \\ \alpha_{n-2} + \tilde{V} \cdot c_{RNF_{n-1}} \\ \alpha_{n-1} + \tilde{V} \cdot c_{RNF_n} \end{bmatrix} \right) \quad (2.50)$$

Der Vektor \tilde{k}_R^T ist hierbei die dem PIZ-Regler angepasste Zustandsrückführung in Regelungsnormalform.

Durch Auflösung der inversen Matrix in (2.50), kann die Gleichung jeweils in Formulierungen für \tilde{V}_I und $\tilde{\mathbf{k}}_R^T$ getrennt werden. Dadurch entstehen folgende Gleichungen:

$$\tilde{V}_I = \frac{\bar{\alpha}_0}{c_{RNF1}} \quad (2.51)$$

$$\tilde{\mathbf{k}}_R^T = \begin{bmatrix} -\frac{c_{RNF2}}{c_{RNF1}} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ -\frac{c_{RNFn}}{c_{RNF1}} & \vdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \bar{\alpha}_{n-1} \\ \bar{\alpha}_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_0 + \tilde{V} \cdot c_{RNF1} \\ \vdots \\ \alpha_{n-2} + \tilde{V} \cdot c_{RNFn-1} \\ \alpha_{n-1} + \tilde{V} \cdot c_{RNFn} \end{bmatrix} \right) \quad (2.52)$$

Es ist in (2.52) zu sehen, dass der P-Anteil \tilde{V} des PI-Gliedes in der Berechnung verwendet wird, obwohl dieser noch nicht bestimmt ist.

Ermittelt wird dieser über den Parameter \tilde{V}_I des I-Anteils.

Drei Möglichkeiten sind hierbei zur Auswahl von \tilde{V} vorgesehen, welche im Folgenden aufgelistet sind:

- **Vermeidung sprungförmiger Stellgrößenverläufe:**

$$\tilde{V} = 0 \quad (2.53)$$

Mit dieser Auslegung werden Sprünge an der Stellgröße $u(t)$ vermieden, falls das reale System diese nicht verträgt bzw. produzieren kann.

Dies entspricht der Verwendung eines reinen I-Reglers statt des PI-Reglers.

- **Stellgrößenverläufe der Form $u(0) = u(\infty)$:**

$$\tilde{V} = \begin{cases} \frac{\bar{\alpha}_0}{c_{RNF1}} & \text{wenn } \tilde{V}_I \neq 0 \\ \frac{-\tilde{k}_{RNF1}}{c_{RNF1}} & \text{wenn } \tilde{V}_I = 0 \end{cases} \quad (2.54)$$

Hier soll die Stellgröße zum Zeitpunkt $t = 0$ einen Sprung aufnehmen, welcher gleich dem stationären Endwert ist.

- **Pol-Nullstellen-Kompensation:**

$$\tilde{V} = -\frac{\tilde{V}_I}{\lambda_{n+1}} \quad (2.55)$$

Die zusätzliche Polstelle wird mit der zusätzlichen Nullstelle des PI-Reglers kompensiert. Dadurch wird, wie eingangs erwähnt, der Verlangsamung der Regeldynamik aufgrund der neuen Polstelle entgegengewirkt.

[Wenck, 2019, Kap. 8.4] [Grabmair und Gahleitner, 2019, S. 728]

2.3 Methoden der Zustandsschätzung

Ein Zustandsregler setzt voraus, dass alle Zustandsgrößen jederzeit bekannt sind. Idealerweise müssten dazu alle Zustandsgrößen gemessen und dem Regler übergeben werden. In der Praxis ist dies meist nicht umsetzbar.

Deshalb werden die Zustandsgrößen mithilfe eines Algorithmus, dem „Beobachter“, geschätzt. Solange die Stellgröße bekannt ist und geeignete Ausgangsgrößen gemessen werden, kann über den Beobachter der gesamte Zustand ermittelt werden.

[Kramer, 2008, S. 334]

2.3.1 Luenberger-Beobachter

Der Luenberger-Beobachter wird strukturell an das bestehende Modell (Abbildung 2.1) angeknüpft. Dort greift es die Stell- und Regelgrößen ab.

Mithilfe dieser Werte werden über das entworfene Zustandsraummodell des Systems Schätzungen bezüglich der Zustands- und Regelgrößenvektoren ($\hat{\mathbf{x}}(t)$ und $\hat{\mathbf{y}}(t)$) erstellt. Die geschätzten Regelgrößen werden mit den gemessenen Werten verglichen. Die daraus entstehende Abweichung $\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)$ wird über die Rückführmatrix \mathbf{L} an das Modell zurückgeführt (siehe Abbildung 2.4). Dadurch sinkt der Beobachtungsfehler $\|\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)\|$ und der geschätzte Zustand nähert sich dem des Systems an. [Lunze, 2020b, S. 349]

Der Luenberger-Beobachter hat folgende Zustandsgleichung:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}\mathbf{y}(t) \\ &= \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}\mathbf{y}(t) \end{aligned} \quad (2.56)$$

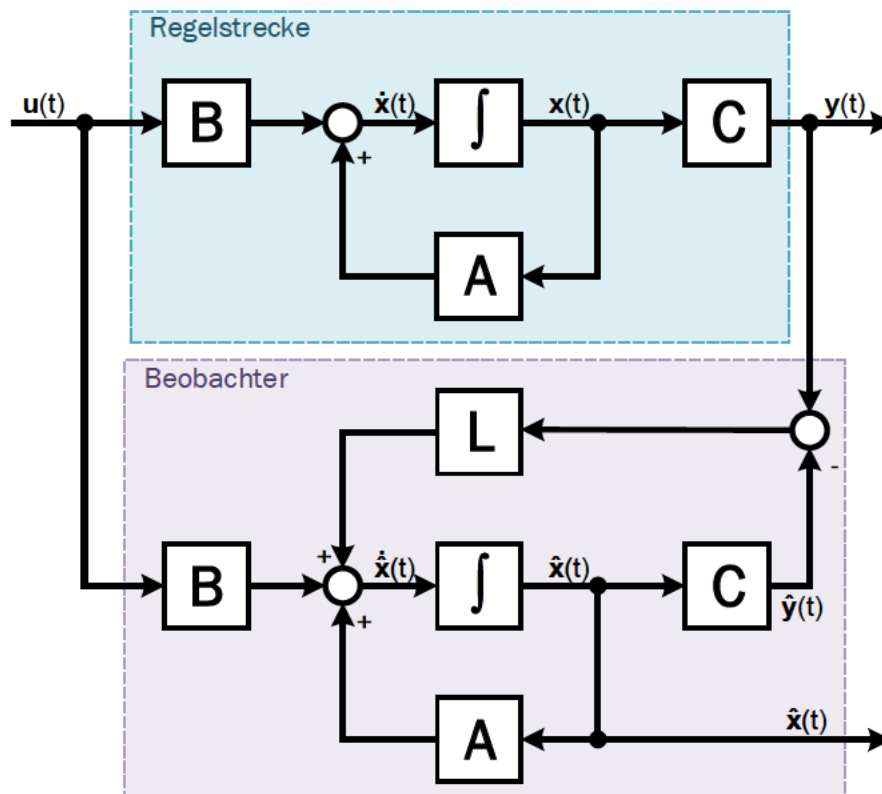


Abbildung 2.4: Wirkungsplan der Regelstrecke mit Luenberger-Beobachter

Luenberger-Beobachter mit Zustandsregler

Die Eigenwerte des Regelkreises mit Beobachter und Zustandsrückführung setzen sich aus den Eigenwerten von \bar{A} und \hat{A} zusammen. Die Zustandsrückführung K und die Rückführungsmatrix L beeinflussen sich somit nicht gegenseitig.

Der Beobachterentwurf und der Entwurf des Zustandsreglers können dementsprechend unabhängig voneinander formuliert werden. Daraus folgt, dass dieselben Berechnungen für den Regler aus Kapitel 2.2 gelten, obgleich ein Beobachter verwendet wird. Diese Charakteristik wird als „Separationstheorem“ bezeichnet. [Lunze, 2020b, S.357 f.]

Das Gesamtsystem mit Beobachter und Zustandsregler besitzt somit folgende Struktur:

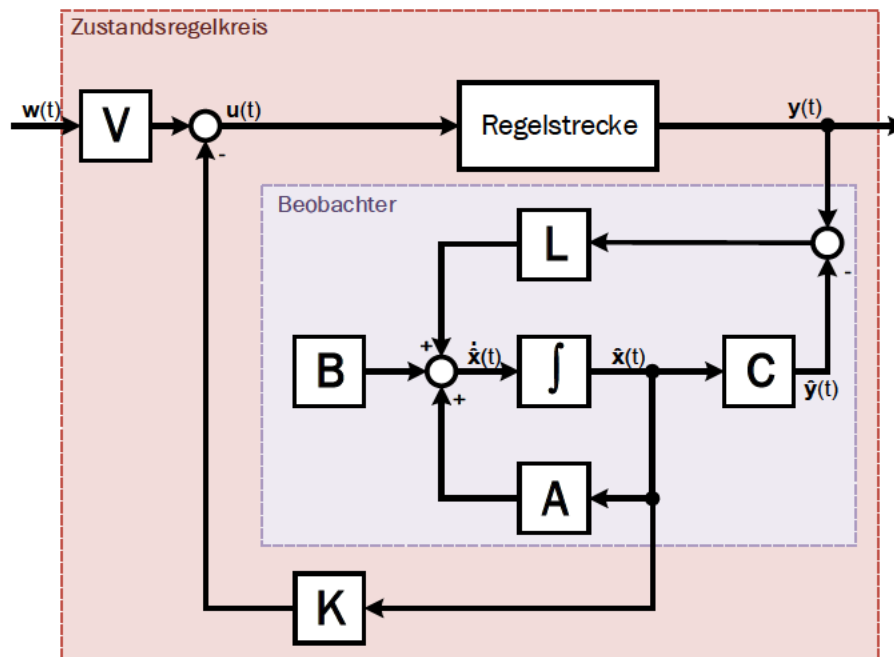


Abbildung 2.5: Wirkungsplan des Regelkreises mit Beobachter, Zustandsrückführung und Vorfilter

Wahl der Rückführmatrix

Die Eigenwertlagen $\hat{\lambda}_i$ der Matrix \hat{A} bestimmen wie dynamisch der Beobachtungsfehler abklingt. Solange das System vollständig beobachtbar ist, können diese Eigenwerte beliebig durch die Rückführmatrix L verschoben werden.

Je weiter links sich die Eigenwerte auf der reellen Achse befinden, desto schneller klingt der Schätzfehler ab. Dennoch können die Eigenwerte nicht wahllos weit links positioniert werden. Das Messrauschen würde dadurch verstärkt.

Deswegen muss bei der Wahl von L ein Kompromiss zwischen der Auswirkung des Messrauschens und der Dynamik der Beobachtungsfehler-Kompensation gefunden werden.

Gleichzeitig sollte darauf geachtet werden, dass die Beobachtereigenwerte weiter links als die Eigenwerte des geschlossenen Kreises $(A - BK)$ sind. Somit wird der Beobachtungsfehler schneller als die Dynamik des Regelkreises ausgeglichen.

[Lunze, 2020b, S. 352, 359 f.]

Liegt das Systemmodell eines Eingrößensystems in Beobachtungsnormalform (2.35) vor, ist die Berechnung der Rückführung l besonders einfach.

Hier ergibt sich die Rückführung \mathbf{l}_{BNF} aus den Koeffizienten der charakteristischen Polynome von jeweils \mathbf{A}_{BNF} und $\hat{\mathbf{A}}$:

$$\mathbf{l}_{BNF}^T = \boldsymbol{\alpha}^T - \hat{\boldsymbol{\alpha}}^T \quad (2.57)$$

Dann wird gegebenenfalls der Vektor \mathbf{l}_{BNF} über die Transformationsmatrix (2.34) für das ursprüngliche Systemmodell umgerechnet:

$$\mathbf{l} = \mathbf{T}_B \mathbf{l}_{BNF} \quad (2.58)$$

[Lunze, 2020b, S. 352 ff.]

2.3.2 Reduzierter Beobachter

Der zuvor beschriebene Luenberger-Beobachter ist ein Beobachter voller Ordnung. Es werden nicht nur die fehlenden Zustandsgrößen geschätzt, sondern auch die, die bereits gemessen werden. Hieraus ergibt sich die Überlegung dem Zustandsregler die Messwerte direkt zu übertragen und nur die restlichen Zustandsgrößen dafür zu beobachten, wodurch die Ordnung des Beobachters reduziert wird. [Lunze, 2020b, S. 365]

Zu diesem Ansatz wird zunächst der Zustand und folglich das Zustandsraummodell des Systems umgeordnet. Die gemessenen Zustandsgrößen $\mathbf{x}_1(t)$ sollen dabei die ersten Elemente des Zustandsvektors füllen und die zu schätzenden Werte $\mathbf{x}_2(t)$ die restlichen. Dies wird mit der Permutationsmatrix \mathbf{P}_m getätigt:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{P}_m \mathbf{x}(t) \quad (2.59)$$

Es gilt außerdem:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{P}_m \mathbf{A} \mathbf{P}_m^{-1}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{P}_m \mathbf{B}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{C} \mathbf{P}_m^{-1} \quad (2.60)$$

Der Regelgrößenvektor $\mathbf{y}(t)$ soll für die folgenden Berechnungen den Vektor $\mathbf{x}_1(t)$ ersetzen. Dazu wird eine Zustandstransformation durchgeführt:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^{-1} & -\mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Das neue Zustandsraummodell des Systems besitzt die folgende Form:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t), \quad \begin{bmatrix} \mathbf{y}(0) \\ \mathbf{x}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{x}_{20} \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

Mit den zuvor definierten Gleichungen kann das Modell des reduzierten Beobachters entwickelt werden. Dazu werden vorher Abkürzungen formuliert:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_o &= (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{12}) \\ \mathbf{B}_o &= \mathbf{B}_2 - \mathbf{L}\mathbf{B}_1 \\ \mathbf{E} &= \mathbf{A}_{21} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_o\mathbf{L} \end{aligned} \quad (2.64)$$

Außerdem wird ein neuer Zustandsgrößenvektor definiert:

$$\tilde{\mathbf{x}}_2(t) = \hat{\mathbf{x}}_2(t) - \mathbf{L}\mathbf{y}(t) \quad (2.65)$$

Der reduzierte Beobachter hat dann die Form:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2(t) = \mathbf{A}_o\tilde{\mathbf{x}}_2(t) + \mathbf{B}_o\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\mathbf{y}(t), \quad \tilde{\mathbf{x}}_2(0) = \tilde{\mathbf{x}}_{20} \quad (2.66)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_2(t) = \tilde{\mathbf{x}}_2(t) + \mathbf{L}\mathbf{y}(t) \quad (2.67)$$

Die Matrix \mathbf{L} ist wie beim Luenberger-Beobachter die festzulegende Rückführmatrix. Die Überlegungen zur Wahl von \mathbf{L} sind hierbei dieselben.

Es gilt diesmal die Eigenwerte von \mathbf{A}_o durch die Rückführungsmatrix zu verschieben.

[Lunze, 2020b, S. 365 ff.] [Fadali und Visioli, 2013, S. 377 ff.]

Reduzierter Beobachter mit Zustandsregler

Die Zustandsrückführung \mathbf{K} kann nicht ohne Weiteres an den reduzierten Beobachter geknüpft werden wie es beim Luenberger-Beobachter der Fall ist.

Die geschätzten Zustandsgrößen müssen gemäß (2.67) in die verwertbaren Zustandsgrößen umgeformt werden. Eine Rücktransformation von (2.61) ist gegebenenfalls notwendig. Außerdem soll der vollständige Zustand inklusive Schätz- und Messwerte in die ursprüngliche Sortierung umgeformt werden.

Hierfür wird die folgende Matrix verwendet:

$$T_o = P_m^{-1} \begin{bmatrix} C_1^{-1} & -C_1^{-1}C_2 \\ O & I \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

Nun können die geschätzten sowie gemessenen Zustandsgrößen der Zustandsrückführung übertragen werden. Strukturell ist dies folgendermaßen aufgebaut:

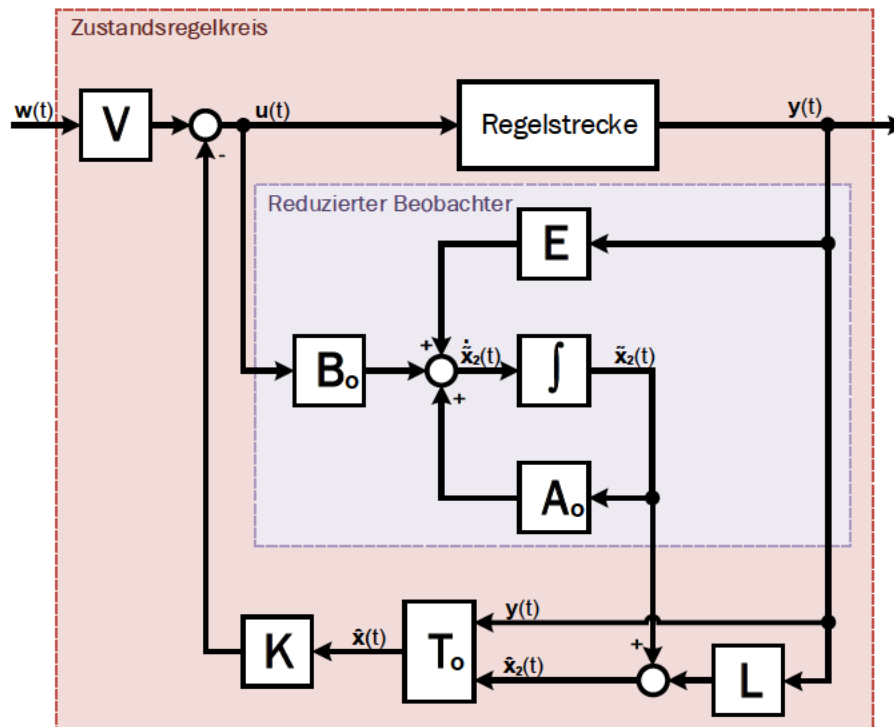


Abbildung 2.6: Wirkungsplan des Regelkreises mit reduziertem Beobachter, Zustandsrückführung und Vorfilter

[Lunze, 2020b, S. 367 f.] [Fadali und Visioli, 2013, S. 378 f.]

Im Vergleich zum Luenberger-Beobachter ist der reduzierte Beobachter komplexer, aber effizienter.

Das Messrauschen wirkt sich jedoch stärker auf die Schätzung aus, da die gemessenen Werte nicht mehr über den Beobachter gefiltert werden. Es ist also durchaus sinnvoll einen Beobachter voller Ordnung statt den reduzierten Beobachter zu verwenden, wenn die Messung besonders verrauscht ist.

[Fadali und Visioli, 2013, S. 377]

2.3.3 Kalman-Filter

Das Kalman-Filter findet bei Systemen Anwendung, bei denen die Zustandsmessung verrauscht ist. Das Ziel ist hierbei die Minimierung der Schätzfehlervarianz. [Kramer, 2008, S. 338]

Da das Rauschen ein grundlegender Teil des Kalman-Filters ist, wird ein System der Form (2.5) und (2.6) mit $\mathbf{D} = \mathbf{O}$ betrachtet.

Beide Störsignale des Systems werden jeweils als unkorreliertes, mittelwertfreies, weißes, gaußsches Rauschen angenommen. Der Vektor $\mathbf{z}(t)$ ist hierbei das Systemrauschen und der Vektor $\mathbf{v}(t)$ das Messrauschen. [Botsch und Utschick, 2020, S. 214, 224]

Das Systemrauschen muss nicht immer eine physikalische Bedeutung haben. Stattdessen kann dessen Ausmaß als Beschreibungsmittel dafür gelten, wie sehr das erstellte Systemmodell von dem realen System abweicht. [Zarchan und Musoff, 2015, S. 108]

Strukturell ändert sich im Vergleich zum Luenberger-Beobachter (Abbildung 2.4) nichts. Die Gleichung (2.56) trifft ebenfalls zu. Der Unterschied liegt in der Bestimmung der Rückführmatrix \mathbf{L} .

Der Schätzfehler ist definiert als:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$$

Die Rückführmatrix \mathbf{L} wird so gewählt, dass die Schätzfehlervarianz $E\{e_i^2\}$ minimal ist. Dies wird durch die folgende Gleichung ausgedrückt:

$$\min_{\mathbf{L}} \sum_{i=1}^n E\{e_i^2\} = \min_{\mathbf{L}} \sum_{i=1}^n \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e_i^2(t) dt \quad (2.69)$$

[Lunze, 2020b, S.375 f.]

Die Beschreibung der Rauschsignale geschieht beim Kalman-Filter über dessen Kovarianzen, wodurch zwei Diagonalmatrizen entstehen:

$$\mathbf{Q}_K = Cov(\mathbf{z}(t)), \quad \mathbf{R}_K = Cov(\mathbf{v}(t)) \quad (2.70)$$

Hierbei ist \mathbf{Q}_K eine $n \times n$ -Matrix und \mathbf{R}_K eine $p \times p$ -Matrix.

Beide Matrizen sollen so genau wie nur möglich bestimmt werden. Es kann jedoch unter Umständen nötig sein, diese iterativ durch Experimente anzunähern.

[Kim, 2016, S. 48 f.]

Sind beide Kovarianzmatrizen bestimmt, werden diese in die Matrix-Riccatigleichung eingesetzt, dessen numerische Lösung die positiv definite Matrix \mathbf{P}_K ist:

$$\mathbf{A}\mathbf{P}_K + \mathbf{P}_K\mathbf{A}^T - \mathbf{P}_K\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P}_K + \mathbf{Q}_K = \mathbf{O} \quad (2.71)$$

Die optimale Rückführung ist dann:

$$\mathbf{L} = \mathbf{P}_K\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1} \quad (2.72)$$

Werden ein LQ-Regler und ein Kalman-Filter zusammen verwendet, wird die Gesamtheit als LQG-Regler („linear quadratic gaussian“) bezeichnet.

[Lunze, 2020b, S. 375, 377]

2.4 Verwendete Software-Tools

MATLAB (kurz für: *Matrix Laboratory*) ist eine von der MathWorks Inc. herausgegebene Software. Sie ist ein international bekanntes, und in der Industrie und Forschung anerkanntes Programm. MATLAB wird unter anderem für die rechnergestützte Bearbeitung von Aufgaben in der Mathematik, Physik und Regelungstechnik verwendet.

Mit der Software und dessen Tools können numerische Berechnungen getätigt und vordefinierte Funktionen aufgerufen werden. Eine Vielzahl dieser Funktionen sind speziell für die Regelungstechnik getrimmt. Darunter fallen unter anderem Befehle zur Erstellung eines Systems im Zustandsraum sowie der Design von Zustandsreglern und Beobachtern. Das Verhalten eines Regelkreises kann berechnet und simuliert werden. [Pietruszka und Glöckler, 2021, S. V f.,] [Zacher und Reuter, 2017, S. 417ff.]

Simulink ist ein Werkzeug in MATLAB. Es ist eine interaktive, graphische Umgebung, die zur Erstellung eines Regelsystems in Form eines Wirkungsplans verwendet werden kann. Eine übersichtliche Form der Visualisierung kann damit für die Regelung und Messung geschaffen werden. [Zacher und Reuter, 2017, S. 417] [Pietruszka und Glöckler, 2021, S. 189 ff.]

In dieser Bachelorarbeit wird das Programmsystem MATLAB und Simulink nicht nur für numerische Berechnungen und zur Simulation, sondern auch als Datenleser und Regler der realen Anlage verwendet.

Dazu werden in Echtzeit Sensordaten von der Anlage aufgenommen, verwertet und gewünschte Stellgrößen zur Anlage weitergeleitet.

3 Das Ball–Wippe–System

In diesem Kapitel wird sich näher mit der SIMO-Regelstrecke „ball and beam“ beschäftigt.

Dazu gehört die Beschreibung der physischen Struktur der Anlage sowie deren mechanischen Gegebenheiten.

Dann werden die Funktionsweisen des Aktors und der Sensoren beschrieben und bewertet.

Anschließend wird die Implementierung des Echtzeitmodells des Systems in Simulink behandelt.

Im letzten Abschnitt wird das Zustandsraummodell des Systems dargestellt und dessen Eigenschaften untersucht.

Das Ball-Wippe-System wurde vom Ingenieurbüro Gurski-Schramm hergestellt und vertrieben. Ein Teil der Lieferung dieser Anlage war die Bedienungsanleitung [Ingenieurbüro Gurski-Schramm, 2015]. Diese enthält diverse Informationen über das System und wird deshalb als Hauptquelle in diesem Kapitel verwendet.

3.1 Aufbau und Hardware

Ein Foto des Ball-Wippe-Systems ist in Abbildung 3.1 dargestellt.

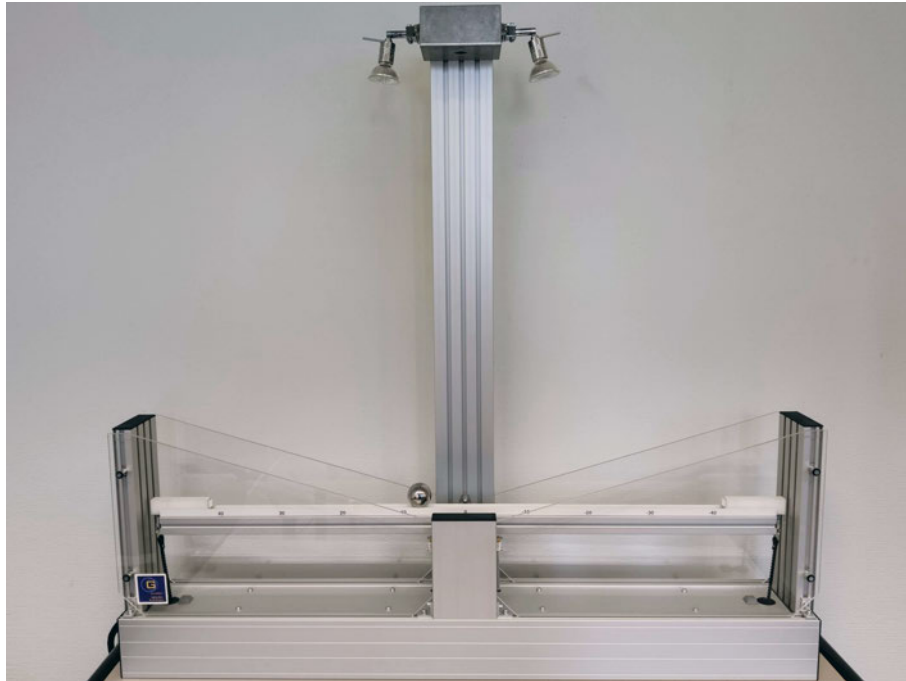


Abbildung 3.1: Foto von der Anlage (Entnommen aus: [Gerken, 2020, S. 36])

3.1.1 Ball und Wippe

Die Kugel des Ball-Wippe-Systems ist aus Stahl und besitzt einen Radius von $R = 0,02m$. Das Gewicht beträgt $m = 0,27kg$. [Ingenieurbüro Gurski-Schramm, 2015]

Die Wippe des Systems besteht aus einem Aluminiumprofil an dessen Oberseite eine Plastikschiene mit einer Breite von $D = 0,017m$ befestigt ist (siehe Abbildung 3.2). Die Wippe wird mittig ausgelenkt, wobei Länge und Gewicht auf beiden Seiten gleich ist.

Auf der Schiene kann die Kugel entlang der Wippe rollen, ohne die Bahn zu verlassen. Damit beschränkt sich die Position des Balles auf eine Dimension.

Der Radius der Wippe beträgt $l_w = 0,5m$. Dennoch kann die Kugel auf der Schiene lediglich einen maximalen Radius von $0,4m$ erreichen, bevor sie gegen einen Dämpfer stößt.

Der Rollradius r (siehe Abbildung 3.2) der Kugel ergibt sich durch folgende Berechnung:

$$r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2} = 0,0181 \text{ m} \quad (3.1)$$

Auf den Unterseiten der beiden Wippenenden sind jeweils die Enden eines Zahnriemens

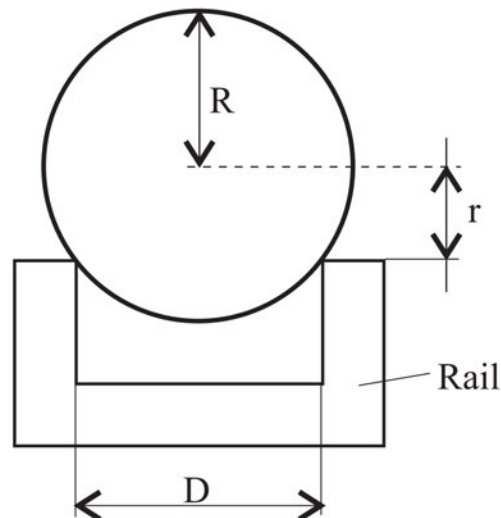


Abbildung 3.2: Kugel und Schiene (Entnommen aus: [Ingenieurbüro Gurski-Schramm, 2015])

befestigt. Dieser Riemen wird durch ein Zahnrad am Motor betrieben, sodass der Winkel α der Wippe entsprechend ausgerichtet werden kann.

[Ingenieurbüro Gurski-Schramm, 2015]

Durch Messung konnte festgestellt werden, dass die Wippe einen maximalen bzw. minimalen Winkel von $\alpha_{max,min} \approx \pm 0,2325 \text{ rad} \hat{=} \pm 13,44^\circ$ zur Waagerechten einnehmen kann. Dann stößt sie gegen eines der beiden unterhalb liegenden Anschlagdämpfern.

3.1.2 Gerüst

Die Wippe ist mit Plexiglas-Scheiben umgeben, welche jeweils durch Aluminiumprofile aufgespannt sind. Die Kugel kann damit den Aufbau der Anlage nicht verlassen, sollte sie von der Schiene abgelenkt werden.

An eines der Profilstangen ist ein Inkrementalgeber zur Winkelmessung befestigt, welches mit der Wippenmitte gekoppelt ist.

An derselben Stange ist $0,725\text{ m}$ über der Wippe eine Aluminiumbox angebracht. Darin befindet sich ein Kameramodul, welches durch ein Loch die Anlage von oben herab aufzeichnet. Diese Kamera wird zur Messung der Ballposition verwendet. An der Aluminiumbox sind zudem zwei Halogenlampen montiert, die für eine bessere Belichtung des Balles sowie der Wippe zuständig sind.

Der untere Bereich der Anlage ist mit Aluminiumprofilen und einem Plastikdeckel umschlossen. Darin befindet sich der vordere Teil des Motors und zwei Zahnräder, welche den Zahnriemen befestigen und zu den Wippenenden ausrichten.

3.1.3 Rechnereinheit

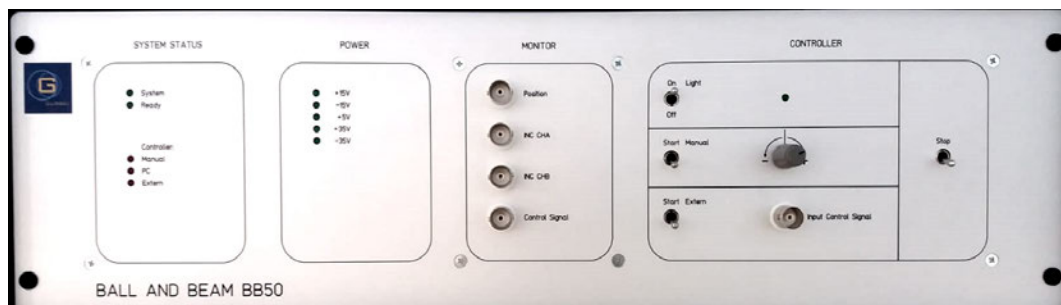


Abbildung 3.3: Frontpanel der Rechnereinheit

Die Hardware des Systems befindet sich in einer Rechnereinheit, welche außerhalb des Aufbaus des Ball-Wippe-Systems positioniert ist.

Die Hardware nimmt die Sensordaten auf, verwertet sie und gibt sie als Input an einen PC weiter. Die Kameradaten und dessen Verwertung werden außerdem an einem Monitor weitergeleitet, was das Bildmaterial und Ballerkennung visualisiert (näheres in Kapitel 3.2.4). Der PC gibt der Rechnereinheit den gewünschten Wert der Stellgröße $u(t)$ vor, welcher es in den benötigten Strom umrechnet und dann dem Motor leitet.

An dem Frontpanel der Rechnereinheit (siehe Abbildung 3.3) sind diverse Statusanzeigen, Schnittstellen und Einstellmöglichkeiten verfügbar.

Hier können unter anderem die Halogenlampen ein- und ausgeschaltet oder die manuelle Steuerung der Wippe bedient werden.

3.2 Aktorik und Sensorik

In diesem Abschnitt werden der Aktor und die Sensoren des Ball-Wippe-Systems untersucht. Die Sensorik wird außerdem bewertet und der mögliche Einfluss auf die Regelung durchleuchtet.

3.2.1 Motor

Der Aktor des Systems ist ein permanent-erregter Gleichstrommotor mit Kugellager, welcher links an der Rückseite der Anlage montiert ist. Der zugehörige Servoverstärker befindet sich in der Rechneinheit, welcher den zugeführten Strom des Motors kontrolliert.

[Ingenieurbüro Gurski-Schramm, 2015]

Diese Kombination wird als Servomotor bezeichnet. Hier ist der Vorteil, dass die Drehzahl bzw. Winkelstellung des Motors gezielt geregelt und stabilisiert werden kann. [Probst, 2016, S. 1, 5]

Somit ist über den Zahnriemen eine genaue Ausrichtung des Wippenwinkels möglich.

3.2.2 Inkrementalgeber

Eines der Sensoren ist der Inkrementaldrehgeber. Dieser ist mit der Drehachse der Wippe gekoppelt und gibt bei Winkeländerungen zwei Impulse aus. Dadurch kann nicht nur eine allgemeine Änderung des Winkels, sondern auch dessen Drehrichtung bestimmt werden. Innerhalb einer vollständigen Umdrehung von 360° existieren 20.000 gleichmäßig verteilte Inkremente, was einer Schrittweite von $\Delta = \frac{360^\circ}{20000} = 0,018^\circ \approx 314,16 \mu rad$ entspricht. Der aktuellen Winkelmessung werden somit pro Schritt $0,018^\circ$ addiert bzw. subtrahiert. [Ingenieurbüro Gurski-Schramm, 2015]

Wird die Messung des maximalen Winkels aus Kapitel 3.1.1 miteinbezogen, gibt es für die Wippe ca. 746 erreichbare Inkremente.

Der Vorteil an dieser Winkelmessung ist, dass kein Rauschen sondern ein geringer Quantisierungsfehler vorhanden ist.

Nachteil am Inkrementalgeber ist jedoch, dass für eine exakte Messung die Startposition α_0 bekannt sein muss. Dies kann sich als schwierig erweisen und bei Ausrichtung nach Augenmaß zu ungenau sein.

Bei dem Ball-Wippe-System kann das Problem eingeschränkt werden, indem der gewünschte Startwinkel als $\alpha_0 = 0^\circ$ gewählt wird. Dann kann die Stahlkugel auf die Schiene gelegt und die Wippe solange ausgerichtet werden, bis die Kugel nicht mehr eigenständig rollt.

Dennoch ist diese Methodik nicht einwandfrei. Durch Reibung und Unebenheiten der Fahrbahn durch z.B. Verschleiß entsteht ein Puffer. Dieser muss erst von der Hangabtriebskraft der Kugel überwältigt werden, damit die Kugel bei schräger Wippenlage rollen kann.

Messungen haben hierbei ergeben, dass der Puffer eine Ungenauigkeit von insgesamt $\alpha_{Puffer} \approx 0,738^\circ$ im Umkreis der gewollten Winkelstellung $\alpha = 0^\circ$ verursacht. Dies entspricht etwa 2,75% des verfügbaren Winkelbereiches der Wippe ($2\alpha_{max}$).

Der Versatz zur horizontalen Wippenlage, der durch den Puffer entstehen kann, wird als konstante Störgröße bei der Messung des Wippenwinkels bewertet. Dessen Ausmaß auf die stationäre Genauigkeit des Balles ist in Kapitel 6 ersichtlich.

3.2.3 Mikroschalter

Das Ball-Wippe-System besitzt zwei Mikroschalter, welche unterhalb der Wippenmitte angebracht sind.

Kurz bevor die Wippe den maximalen bzw. minimalen Winkel erreicht, wird eines von den beiden Mikroschaltern betätigt und geschlossen. Dies soll die jeweilige Endlage der Wippe signalisieren. Dies ermöglicht die Integrierung einer Schutzfunktion (siehe Kapitel 3.3.1)

[Ingenieurbüro Gurski-Schramm, 2015]

3.2.4 Kameramodul

Das Kameramodul dient zur Messung der eindimensionalen Ballposition auf der Schiene. Dazu wird von dem aufgenommenen Bildmaterial ausschließlich eine Bildzeile zur Auswertung verwendet, welche entlang der hellen Schiene der Wippe verläuft.

Die Ballerkennung funktioniert auf Basis von Kontrast. Die Bildzeile wird dabei von links nach rechts analysiert. Wird bei der Analyse eine ausgeprägte Dunkelheit wahrgenommen, so wird das dortige Bildelement als Ball festgelegt und die Auswertung der Zeile beendet. Diese Untersuchung wird kontinuierlich durchgeführt, um mögliche Änderungen des Standortes zu registrieren.

Die Ballposition wird auf der Wippe berechnet, indem zu Beginn jeder Bildzeilen-Auswertung ein Timer gestartet wird.

Dieser Timer wird bei der Detektion des Balles gestoppt und der Zeitwert als linear zur Position vermessen. Dem PC wird durch entsprechende Umrechnung in der Rechneinheit die Ballposition so ausgegeben, dass die Wippenmitte einer Auslenkung von $0m$ zum Ursprung entspricht.

[Ingenieurbüro Gurski-Schramm, 2015] [Gurski-Schramm, 2021]

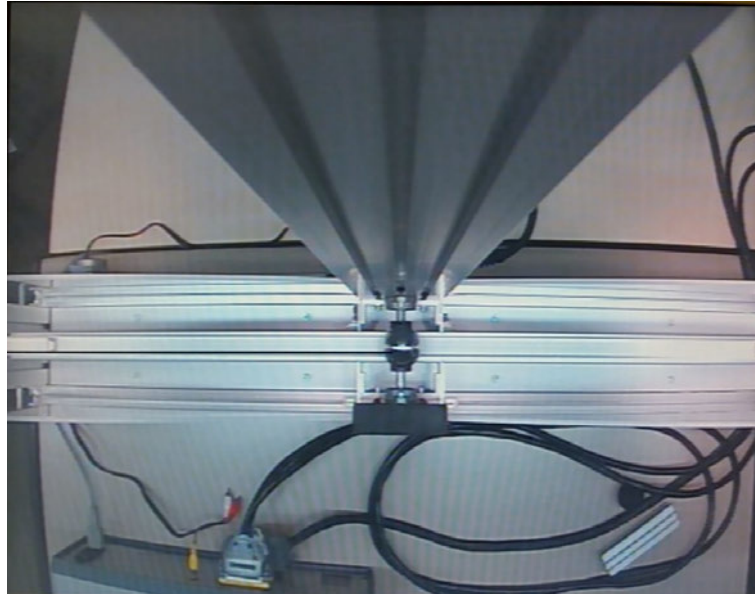


Abbildung 3.4: Bildmaterial des Kameramoduls am Monitor; die Stahlkugel ist mittig positioniert

Die Balldetektion wird für den Benutzer durch Anschluss eines Monitors mit der Rechneinheit visualisiert (siehe Abbildung 3.4).

Ein schwarzer Streifen verläuft entlang der analysierten Bildzeile und endet dort, wo die Rechneinheit die Kugel wahrnimmt. Der Benutzer hat somit einen Überblick über die derzeitige Ballpositionserkennung.

[Ingenieurbüro Gurski-Schramm, 2015]

Das Verfahren zur Auswertung der Ballposition birgt einige Nachteile, die zu Ungenauigkeiten führen. Diese werden im Folgenden einzeln erläutert.

Sprunghafte Fehlerkennungen der Ballposition

Da die Ballerkennung auf Kontrast basiert, ist eine gute und gleichbleibende Ausleuchtung der Anlage von hoher Wichtigkeit. Um dies zu gewährleisten, sind die zwei Halogenlampen der Anlage jeweils auf beide Seiten der Wippe gerichtet.

Durch mehrere Versuche konnte festgestellt werden, dass die Ballerkennung sehr empfindlich auf die Lichtverhältnisse reagiert.

Bei zu starker Ausleuchtung des gesamten Raumes wird der helle Raum an der Stahlkugel reflektiert. Auf dem Bildmaterial der Kamera (Abbildung 3.5) wird die Kugel deshalb als sehr hell wahrgenommen. Folglich endet der schwarze Streifen nicht beim Ball, sondern zieht durch das gesamte Bild.

Die Ballerkennung nimmt hier an, dass die Kugel sich am rechten Rand der Schiene befindet, was einer maximalen Auslenkung von $+0,4\text{ m}$ zum Ursprung entspricht.

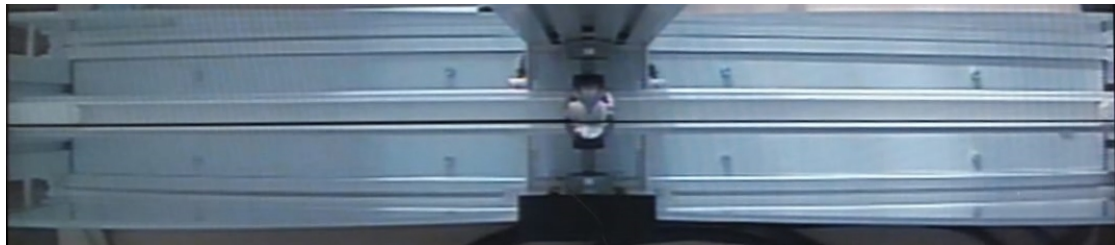


Abbildung 3.5: Bildmaterial am Monitor bei zu starker Ausleuchtung des Raumes

Bei zu schwachem Umgebungslicht wird der Schatten am linken Ende der Wippe im Bildmaterial so dunkel, dass es fälschlicherweise als Ball erkannt wird. Wie in Abbildung 3.6 zu sehen, endet der schwarze Streifen (zur besseren Erkennbarkeit rot gekennzeichnet) dadurch frühzeitig. Die Rechneinheit gibt an, dass die Kugel sich bei der minimalen Position von $-0,4\text{ m}$ aufhält.



Abbildung 3.6: Bildmaterial am Monitor bei zu schwacher Ausleuchtung der Anlage

Die resultierende sprunghafte Fehlerkennung kann durch eine Konfiguration des Potentiometers $P1$ auf der Hauptplatine der Rechneinheit vermieden werden. Dieser ist für die Kontrastempfindlichkeit der Ballerkennung zuständig und muss auf das Umgebungslicht angeglichen werden.

Unstetige Lichtverhältnisse, welche beispielsweise durch Sonnenlicht verursacht werden, gestalten diesen Lösungsweg jedoch als unzuverlässig.

In dem Labor in dem die Messungen an der Anlage getätigt wurden, konnte die Einstrahlung des Sonnenlichtes nicht vollständig abgeschottet werden. Ungeachtet dessen wurde der Potentiometer so eingestellt, dass keine sprunghaften Fehler der Ballerkennung bei keiner bis schwacher Sonneneinstrahlung vorkommen. Grund dafür sind die schwachen Lichtverhältnisse zu Herbst- und Winterzeiten in Hamburg bei denen die Messungen dieser Bachelorarbeit getätigt wurden. Somit konnte eine fehlerfreie Balldetektion vorwiegend gewährleistet werden.

Einfluss der Winkelstellung auf die gemessene Ballposition

Aufgrund der eindimensionalen Auswertung der Kameradaten, gelten die Messungen der Ballposition lediglich für den Wippenwinkel $\alpha = 0^\circ$.

Ist der Winkel jedoch $\alpha(t) \neq 0^\circ$, ist die Ballpositionsmessung $x'_{mess}(t)$ inakkurat und weicht vom realen Wert $x'_{real}(t)$ ab. Dieser Effekt wird durch hohe, absolute Werte der realen Ballposition sowie des Wippenwinkels verstärkt.

In Abbildung 3.7 ist diese Problematik schematisch zu einem Zeitpunkt dargestellt.

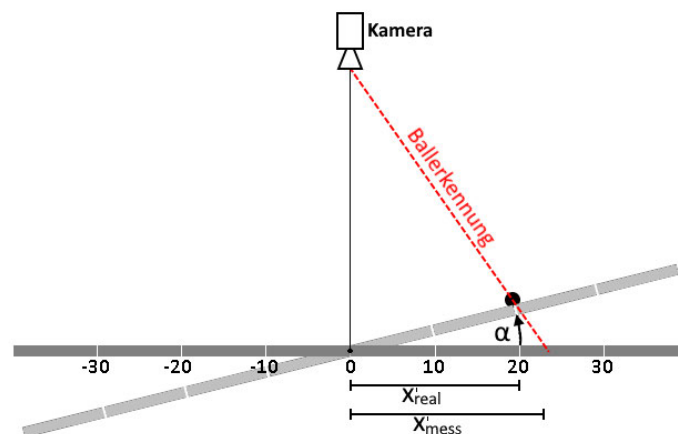


Abbildung 3.7: Beispiel des Einflusses des Wippenwinkels auf die gemessene Ballposition (nicht maßstabsgetreu)

Der reale Standort der Kugel lässt sich in diesem Fall geometrisch annähern. Dazu muss in der Auswertung der Ballposition der gemessene Wippenwinkel miteinbezogen werden.

Verzeichnung des Kamerabildes

Das Kamerabild besitzt, wie in Abbildung 3.4 zu sehen, eine Verzeichnung. Diese stimmt mit der Beschreibung in [Luhmann und Maas, 2017] einer tonnenförmigen Verzeichnung überein.

Die Wippe wird so wahrgenommen als sei die Wippenmitte in Richtung Kamera gewölbt und somit gebogen. Eine geometrischen Annäherung der realen Ballposition mit dem Wippenwinkel ist damit nicht direkt anwendbar.

Die Verzeichnung führt außerdem bei der Messung zu einer nichtlinearen Abweichung zur realen Ballposition.

Offset und Messrauschen

Aufgrund der Ballerkennung mithilfe von Kontrast, wird erst der Ball erkannt, wenn ein Bereich innerhalb der Bildzeile dunkel genug ist. Dieser Bereich liegt nicht zwingend auf der Ballmitte.

Je nach Lichtverhältnis und der Einstellung des Potentiometers $P1$, verschiebt sich der Offset entlang der Kugel. Bei den getätigten Messungen ist der Offset hauptsächlich auf der linken Seite der Kugel. In Abbildung 3.8 ist dieser Offset auf dem Bildmaterial des Kameramoduls zu sehen. Der schwarze Streifen ist zur besseren Erkennbarkeit rot markiert.

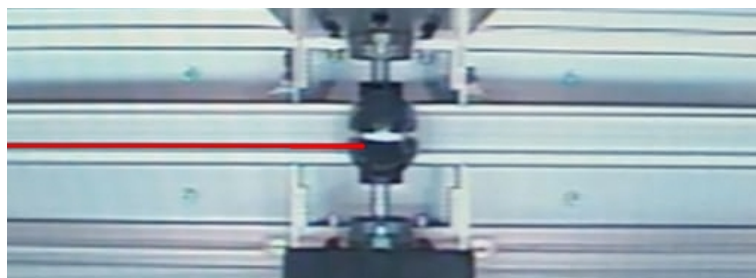


Abbildung 3.8: Ballerkennung der durchgeführten Messungen

Zusätzlich gibt es zu dem Offset ein Messrauschen, welches durch das Bildrauschen der Kamera und wechselhaftem Umgebungslicht bedingt ist.

In Abbildung 3.9 ist das Messrauschen in einem Ausschnitt von 10 Sekunden dargestellt. Die Kugel befindet sich bei dieser Messung nicht in Bewegung.

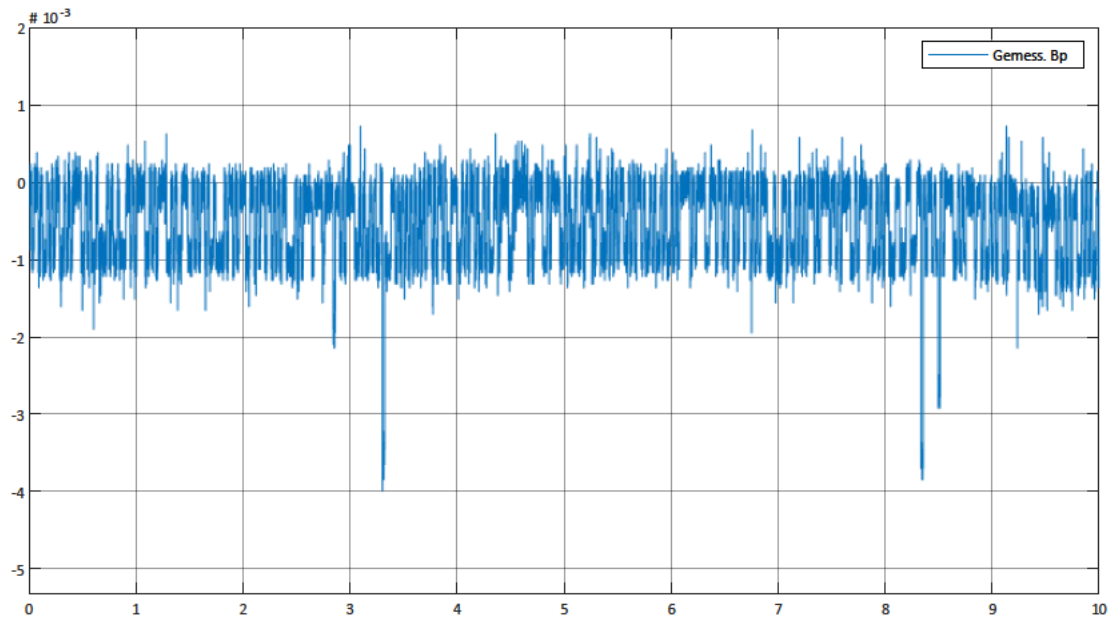


Abbildung 3.9: Rauschen beim Messen der Ballposition

3.3 Signalverarbeitung in Simulink

Die Implementierung des Ball-Wippe-Systems in Simulink wurde bereits von [Gerken, 2020] erstellt und im Rahmen dieser Bachelorarbeit geringfügig erweitert. Hier werden die Einzelheiten kurz erläutert.

Zur Implementierung der Anlagedaten wird das Simulink-Tool „Desktop Real-Time“ verwendet. Dies erweitert die Block-Bibliothek von Simulink, sodass eine Anbindung zu einer Ein-/Ausgabe-Hardware bewerkstelligt werden kann.

Die E/A-Karte „MF624“ der Firma Humusoft wird hierfür eingesetzt. [Gerken, 2020, S. 53]

3.3.1 Steuerung des Servomotors

Die zugeführte Stellgröße $u(t)$ ist die Antriebskraft an der Welle des Servomotors. Diese muss in ein Volt-Signal umgeformt werden, welches von der Rechneinheit interpretiert werden kann. Dieser Bereich umfasst $\pm 10\text{ V}$, wobei 1 V einer Kraft von $2,15\text{ N}$ entspricht. [Ingenieurbüro Gurski-Schramm, 2015]

Die Umwandlung von $\frac{1\text{ V}}{2,15\text{ N}}$ geschieht entsprechend in Simulink (Abbildung 3.10).



Abbildung 3.10: Anpassung der Stellgröße in Simulink

Sicherheitsfunktion bei Ansteuerung des Motors

Bei einem Programmausfall soll der Motor automatisch gestoppt werden, um mögliche Schäden zu verhindern.

Dies soll mit den zwei Signalen $DOUT1$ und $DOUT2$ bewerkstelligt werden, dessen Zeitverläufe in Abbildung 3.11 visualisiert sind.

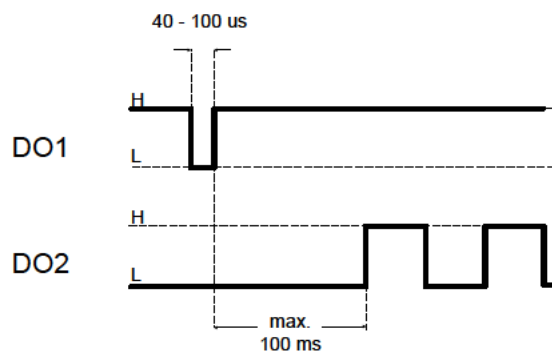


Abbildung 3.11: Zeitverläufe der Signale $DOUT1$ und $DOUT2$ (Entnommen aus: [Ingenieurbüro Gurski-Schramm, 2015])

Dem Ausgang $DOUT1$ wird ein dauerhafter High-Pegel mit einem kurzzeitigen Low-Pegel-Impuls in der Länge von $40 - 100\ \mu\text{s}$ gesendet. Nach diesem Impuls soll innerhalb von 100 ms ein Rechtecksignal an $DOUT2$ folgen, welches eine Frequenz von $10 - 1000\text{ Hz}$ aufweist.

Solange das Rechtecksignal übertragen wird, wird der Ausgang für das Steuersignal freigegeben und der Motor kann weiterhin gesteuert werden.

[Ingenieurbüro Gurski-Schramm, 2015]

Diese Sicherheitsmaßnahme wird in Simulink umgesetzt (siehe Abbildung 3.12). Im linken

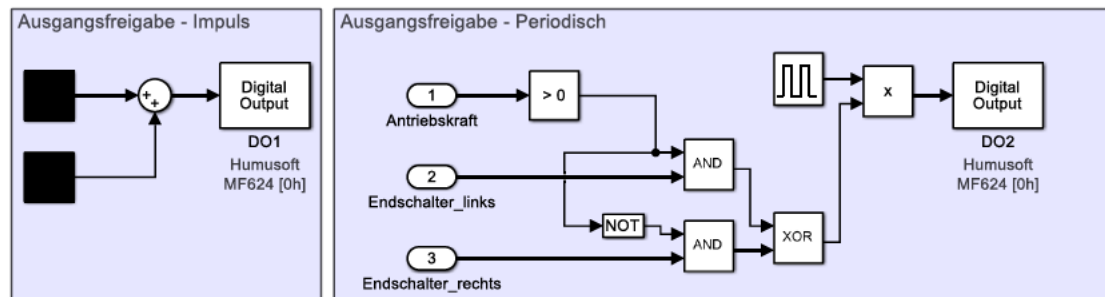


Abbildung 3.12: Ausgangsfreigabe in Simulink

Bildabschnitt wird für *DOUT1* unmittelbar bei Ausführung der Regelung der Low-Pegel-Impuls über zwei Sprungfunktionen ausgegeben.

Im rechten Abschnitt wird das Rechtecksignal dauerhaft an *DOUT2* übertragen. Die Übertragung wird nur dann abgebrochen und die Ansteuerung des Motors blockiert, wenn zwei Bedingungen erfüllt sind:

Die eine Bedingung ist, dass die Wippe eines der beiden Mikroschalter betätigt und somit eine Endlage erreicht hat. Die zweite Bedingung ist, dass die Stellgröße $u(t)$ weiterhin in Richtung Endlage eine Kraft auswirkt.

Somit wird verhindert, dass der Motor die Wippe gegen einen der beiden Anschlagdämpfer drückt und sich dabei gegebenenfalls beschädigt.

3.3.2 Status-Bits und Kameradaten des Ball-Wippe-Systems

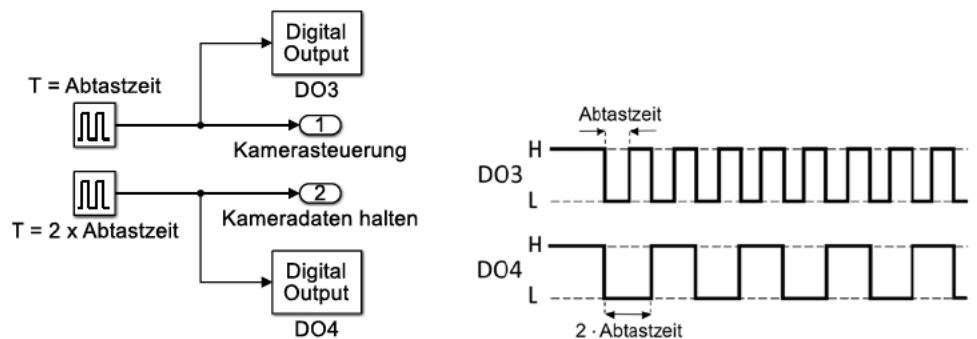
Die Rechereinheit des Ball-Wippe-Systems gibt 8 digitale Eingangssignale aus, welche gelesen werden. Hierzu gibt es ein eigenes Register, dessen Status über den Ausgang *DOUT3* gesetzt wird. Je nach Einstellung des Registers werden über die Eingangsbits unterschiedliche Signale abgefangen. In der Tabelle 3.1 sind die Signale und die jeweiligen Register-Status aufgelistet.

Es ist aus der Tabelle ersichtlich, dass nicht alle Kameradaten zum selben Zeitpunkt gelesen werden können, da nicht alle Kamerabits denselben Register-Status teilen.

Eingangsbit	Signal	Status des Registers
0	Linke Endlage	0
	Kamerabit 0	1
1	Rechte Endlage	0
	Kamerabit 1	1
2	System bereit	0
	Kamerabit 2	1
3	Ausgangsfreigabe	0
	Kamerabit 3	1
4	Kamerabit 8	0
	Kamerabit 4	1
5	Kamerabit 9	0
	Kamerabit 5	1
6	Kamerabit 10	0
	Kamerabit 6	1
7	Kamerabit 11	0
	Kamerabit 7	1

Tabelle 3.1: Status-Bits und Kameradaten des Ball-Wippe-Systems [Gerken, 2020]

Deshalb muss das Auslesen dieser Daten schrittweise erfolgen. Zu diesem Zweck existiert das Ausgangssignal *DOU4*, mit dem die Aktualisierung der Kamerabits pausiert wird. In Abbildung 3.13 ist die Implementierung dieses Verfahrens in Simulink aufgeführt.



(a) Struktur in Simulink

(b) Zeitverläufe von *DOU3* und *DOU4*
(Entnommen aus: [Gerken, 2020])

Abbildung 3.13: Auslesen der Kameradaten in Simulink

Die Abtastzeit in der die Kameradaten gehalten werden, ist doppelt so groß wie die Abtastzeit zum Schalten des Registers. Somit können alle 12 Kamerabits eines Zeitpunktes gelesen und danach eine Aktualisierung durchgeführt werden. Die Abtastzeit der Register-Schaltung ist auf 4 ms gesetzt.

Ein MATLAB-Funktionsblock ist für die Abnahme der Kamera- und Statusbits zuständig (siehe Abbildung 3.14). Hier werden alle gespeicherten Daten aus dem vorigen Register-Zyklus mit den Daten aus dem derzeitigen Register-Zyklus zusammengefasst und bereitgestellt.

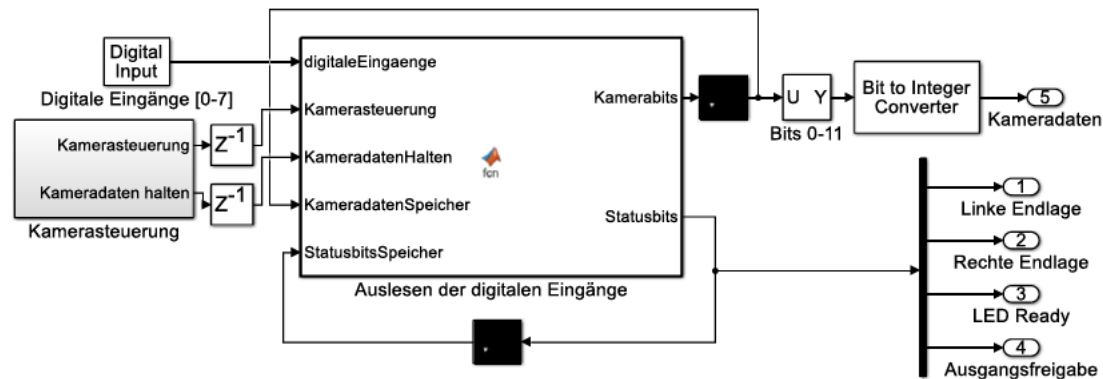


Abbildung 3.14: Aufbereitung der Kamera- und Statusdaten in Simulink

3.3.3 Verwertung der Messdaten

Für die Messdaten der Ballposition $x'_{mess}(t)$ existiert ein analoger Input. Die Rechenreinheit des Ball-Wippe-Systems gibt hier die Sensordaten des Kameramoduls bereits in Werte aus, welche äquivalent zur Ballposition sein sollen. Der genaue Vorgang und die Ungenauigkeiten dieses Messverfahrens sind in Kapitel 3.2.4 beschrieben.

Es wird eine Spannung ausgegeben, welche einen Wertebereich von $\pm 10 V$ besitzt. Mit dem Faktor $\frac{1m}{25V}$ wird in Simulink die Spannung auf das Streckenmaß in Metern umgewandelt (siehe Abbildung 3.15).

Weitere Anpassungen werden vorgenommen, um die in Kapitel 3.2.4 beschriebenen Messfehler teilweise zu beheben.

Mit dem „Sample and hold“-Baustein („S/H“) in Abbildung 3.15 wird der erste Positionswert der Kugel abgefangen und dauerhaft von den künftigen Positionswerten subtrahiert. Damit wird der Offset beseitigt.

Diese Lösung ist nicht perfekt, da das Messrauschen und mögliche Änderungen der Lichtverhältnisse nicht berücksichtigt werden. Dennoch wird der tatsächliche Offset gut angenähert.

Außerdem werden sprunghafte Fehlerkennungen der Messung entfernt. Dies geschieht mit der MATLAB-Funktion „Vermeidung sprunghafter Fehlerkennungen“, welche in Abbildung 3.15 zu sehen ist. Die Funktion vergleicht die aktuelle Position mit der vorigen Messung. Ist der Unterschied größer als $0,07\text{ m}$, wird zu diesem Zeitpunkt der Ball bei der vorigen Messung angenommen.

Die sprunghaften Fehlerkennungen sind für gewöhnlich sehr kurzzeitig. Deshalb reicht diese Annahme aus, ohne die Dynamik der Regelung sonderlich zu beeinflussen.

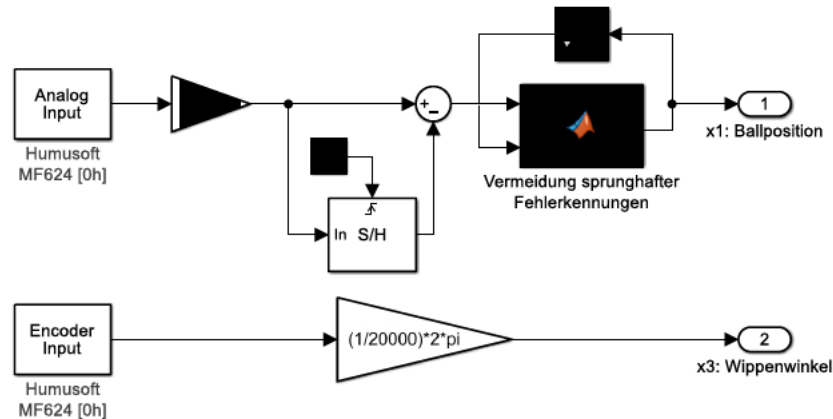


Abbildung 3.15: Anpassung der Sensordaten in Simulink

Der Encoder-Input gibt den derzeitigen Zählerstand des Wippenwinkels aus. Beim Start der Echtzeitregelung setzt die Rechereinheit diesen auf 0 und addiert bzw. subtrahiert diesen pro Signal des Inkrementalgebers um 1. Der ganzzahlige Zählerstand muss demnach zur Auswertung in den Radianten $\alpha(t)$ umgeformt werden. Dazu wird in Simulink, wie in Abbildung 3.15 ersichtlich, der Faktor $\frac{2\pi\text{ rad}}{20.000}$ verwendet. Dieser Faktor ergibt sich aus den 20.000 Inkrementen, die eine vollständige Umdrehung ($2\pi\text{ rad}$) beinhaltet.

Insgesamt wird hier der Regelgrößenvektor $\mathbf{y}(t)$ ausgegeben, welcher für die Regelung genutzt wird. Beide Messungen werden mit einer Abtastzeit von $T_{\text{Sample}} = 1\text{ ms}$ aufgenommen.

3.4 Zustandsraummodell

Das Zustandsraummodell der Anlage und dessen Linearisierung sind in der Betriebsanleitung [Ingenieurbüro Gurski-Schramm, 2015] berechnet und erstellt. Im Rahmen dieser Bachelorarbeit sind nur die Differentialgleichungen und die Umformung in ein linearisiertes Zustandsraummodell relevant. Die Herleitung des nichtlinearen Zustandsraummodells trägt für diese Thesis keine Relevanz.

Vier Zustandsgrößen werden für den Zustand $\mathbf{x}(t)$ gewählt. Diese sind die Ballposition auf der Wippe $x'(t)$ sowie die Winkelstellung der Wippe $\alpha(t)$ und dessen Zeitableitungen:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'(t) \\ \dot{x}'(t) \\ \alpha(t) \\ \dot{\alpha}(t) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Die für das Zustandsraummodell relevanten physikalischen Größen sind in Tabelle 3.2 definiert.

Formelzeichen	Beschreibung	Wert	Einheit
m	Masse der Stahlkugel	0,27	kg
r	Rollradius der Kugel	0,018	m
M	Masse der Wippe	1,122	kg
D	Breite der Schiene	0,017	m
b	Reibungskoeffizient der Antriebsmechanik	1,0	Ns/m
K	Steifheit der Antriebsmechanik	0,001	N/m
l	Länge des Kraftarms an der Wippe	0,49	m
l_w	Radius der Wippe	0,5	m
r	Rollradius der Kugel	0,181	m
I_b	Drehmoment der Kugel	$43,2 \cdot 10^{-6}$	$kg \ m^2$
I_w	Drehmoment der Wippe	0,1378	$kg \ m^2$
g	Schwerebeschleunigung	9,81	m/s^2
$u(t)$	Antriebskraft vom Motor	—	—

Tabelle 3.2: Physikalische Werte des Systems [Ingenieurbüro Gurski-Schramm, 2015]

In der Anleitung [Ingenieurbüro Gurski-Schramm, 2015] sind zwei nichtlineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die gesamte Systembeschreibung aufgeführt. Um eine bessere Übersichtlichkeit dieser Differentialgleichungen zu verschaffen, existieren folgende konstante Abkürzungen:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= m + \frac{I_b}{r^2} & b_3 &= b l^2 \\
 a_2 &= \frac{m r^2 + I_b}{r} & b_4 &= K l^2 \\
 a_3 &= m g & b_5 &= a_2 \\
 b_1 &= I_b + I_w & b_6 &= a_3 \\
 b_2 &= 2 m & &
 \end{aligned}$$

Für die beiden Differentialgleichungen gelten dann:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}'(t) &= \frac{a_2[(b_2 \dot{x}'(t) x'(t) + b_3)\dot{\alpha}(t) + b_4 \alpha(t) - b_6 x'(t) \cos(\alpha(t))]}{a_1(m x'^2(t) + b_1) - a_2 b_5} \\
 &+ \frac{(m x'^2(t) + b_1)(a_3 \sin(\alpha(t)) + m x'(t) \dot{\alpha}^2(t)) - a_2 l \cos(\alpha(t)) u(t)}{a_1(m x'^2(t) + b_1) - a_2 b_5} \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{\alpha}(t) &= \frac{-(b_2 \dot{x}'(t) x'(t) + b_3)\dot{\alpha}(t) - b_4 \alpha(t) - b_6 x'(t) \cos(\alpha(t))}{m x'^2(t) + b_1} \\
 &- \frac{b_5(a_3 \sin(\alpha(t)) + m x'(t) \dot{\alpha}^2(t))}{a_1(m x'^2(t) + b_1) - a_2 b_5} \\
 &- \frac{a_2 b_5[(b_2 x'(t) \dot{x}'(t) + b_3)\dot{\alpha}(t) + b_4 \alpha(t) - b_6 x'(t) \cos(\alpha(t))]}{(m x'^2(t) + b_1)(a_1(m x'^2(t) + b_1) - a_2 b_5)} \\
 &+ \left(1 + \frac{a_2 b_5}{a_1(m x'^2(t) + b_1) - a_2 b_5}\right) \frac{l \cos(\alpha(t)) u(t)}{m x'^2(t) + b_1} \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

Durch die Gleichungen 3.3 und 3.4 lassen sich vier Differentialgleichungen erster Ordnung und somit ein nichtlineares Zustandsraummodell des Systems herleiten:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_2(t) &= \frac{a_2[(b_2 x_1(t) x_2(t) + b_3)x_4(t) + b_4 x_3(t) - b_6 x_1(t) \cos(x_3(t))]}{a_1(m x_1^2(t) + b_1) - a_2 b_5} \\
 &+ \frac{(m x_1^2(t) + b_1)(a_3 \sin(x_3(t)) + m x_1(t) x_4^2(t)) - a_2 l \cos(x_3(t)) u(t)}{a_1(m x_1^2(t) + b_1) - a_2 b_5} \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

$$\dot{x}_3(t) = x_4(t) \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4(t) = & \frac{-(b_2 x_1(t) x_2(t) + b_3)x_4(t) - b_4 x_3(t) + b_6 x_1(t) \cos(x_3(t))}{m x_1^2(t) + b_1} \\ & - \frac{b_5(a_3 \sin(x_3(t)) + m x_1(t) x_4^2(t))}{a_1(m x_1^2(t) + b_1) - a_2 b_5} \\ & - \frac{a_2 b_5[(b_2 x_1(t) x_2(t) + b_3)x_4(t) + b_4 x_3(t) - b_6 x_1(t) \cos(x_3(t))]}{(m x_1^2(t) + b_1)(a_1(m x_1^2(t) + b_1) - a_2 b_5)} \\ & + \left(1 + \frac{a_2 b_5}{a_1(m x_1^2(t) + b_1) - a_2 b_5}\right) \frac{l \cos(x_3(t)) u(t)}{m x_1^2(t) + b_1} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Die Taylor-Entwicklung wird für die Linearisierung des Zustandsraummodells verwendet. Ausschließlich das Polynom erster Ordnung ohne Restglied wird zur Näherung eingesetzt. Der Arbeitspunkt ist folgend definiert:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_0 \quad (3.9)$$

In der Nähe des Arbeitspunktes werden zusätzlich folgende Annahmen bezüglich des Wippenwinkels $\alpha(t)$ bzw. $x_3(t)$ gemacht:

$$\sin(x_3(t)) \approx x_3(t), \quad \cos(x_3(t)) \approx 1 \quad (3.10)$$

Damit entsteht das linearisierte Zustandsraummodell des Ball-Wippe-Systems:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ A_{21} & 0 & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_{41} & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \\ 0 \\ B_4 \end{bmatrix} u(t) \quad (3.11)$$

Die Elemente des Modells sind:

$$A_{21} = \frac{-a_2 b_6 (a_1 (m x_{10}^2 + b_1) - a_2 b_5) + 2m a_1 a_2 x_{10} (b_6 x_{10} + l u_0)}{(a_1 (m x_{10}^2 + b_1) - a_2 b_5)^2} \quad (3.12)$$

$$A_{23} = \frac{a_3 (mx_{10}^2 + b_1) + a_2 b_4}{a_1 (mx_{10}^2 + b_1) - a_2 b_5} \quad (3.13)$$

$$A_{24} = \frac{a_2 b_3}{(a_1 (mx_{10}^2 + b_1) - a_2 b_5)} \quad (3.14)$$

$$A_{41} = \frac{b_6 (-mx_{10}^2 + b_1)}{(mx_{10}^2 + b_1)^2} - \left[1 + a_2 b_5 \frac{2a_1 mx_{10}^2 + 2a_1 b_1 - a_2 b_5}{(a_1 (mx_{10}^2 + b_1) - a_2 b_5)^2} \right] \frac{2mlx_{10}u_0}{(mx_{10}^2 + b_1)^2} - a_2 b_5 b_6 \frac{mx_{10}^2 (3a_1 mx_{10}^2 + 2a_1 b_1 - a_2 b_5) + b_1 (-a_1 b_1 + a_2 b_5)}{[(mx_{10}^2 + b_1) (a_1 (mx_{10}^2 + b_1) - a_2 b_5)]^2} \quad (3.15)$$

$$A_{43} = -\frac{b_4}{mx_{10}^2 + b_1} - \frac{a_3 b_5}{a_1 (mx_{10}^2 + b_1) - a_2 b_5} - \frac{a_2 b_4 b_5}{(mx_{10}^2 + b_1) (a_1 (mx_{10}^2 + b_1) - a_2 b_5)} \quad (3.16)$$

$$A_{44} = -b_3 \left(\frac{1}{(mx_{10}^2 + b_1)} + \frac{a_2 b_5}{(mx_{10}^2 + b_1) (a_1 (mx_{10}^2 + b_1) - a_2 b_5)} \right) \quad (3.17)$$

$$B_2 = -\frac{a_2 l}{(a_1 (mx_{10}^2 + b_1) - a_2 b_5)} \quad (3.18)$$

$$B_4 = \left(1 + \frac{a_2 b_5}{(a_1 (mx_{10}^2 + b_1) - a_2 b_5)} \right) \frac{l}{mx_{10}^2 + b_1} \quad (3.19)$$

Die Werte der Ausgabematrix \mathbf{C} der Ausgangsgleichung 3.20 weisen auf, welche Zustandsgrößen von den Sensoren der Anlage gemessen werden. In diesem Fall sind die gemessenen Zustandswerte gleichzeitig die Regelgrößen und müssen nicht umgerechnet werden.

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (3.20)$$

Einen Durchgriff besitzt das System nicht.

[Ingenieurbüro Gurski-Schramm, 2015]

Werden die Werte aus der Tabelle 3.2 in das linearisierte Modell ((3.11) bis (3.19)) eingesetzt, ergibt sich folgende Zustandsgleichung mit gerundeten Elementen:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0,3483 & 0 & 6,598 & 0,03158 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 19,24 & 0 & -0,3501 & -1,744 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -0,06444 \\ 0 \\ 3,559 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (3.21)$$

Durch das Zustandsraummodell des Ball-Wippe-Systems wird rechnerisch deutlich, dass es sich aufgrund einer Stellgröße und zwei Regelgrößen um ein SIMO-System handelt.

3.4.1 Untersuchung der Systemeigenschaften

Bevor zu der Regelstrecke eine Regelung erstellt wird, werden die Eigenschaften des Systems untersucht. Diese sind die Steuer- und Beobachtbarkeit sowie die Stabilität. Die Verfahren sind dazu in den Grundlagen (Kapitel 2.1) erläutert.

Steuer- und Beobachtbarkeit

Die **Steuerbarkeit** des Ball-Wippe-System wird überprüft. Dazu wird zunächst die Steuerbarkeitsmatrix (2.15) berechnet:

$$\mathbf{S}_S = \begin{bmatrix} 0 & -0,0644 & 0,1124 & 23,3128 \\ -0,0644 & 0,1124 & 23,3128 & -40,7391 \\ 0 & 3,5595 & -6,2082 & 8,3419 \\ 3,5595 & -6,2082 & 8,3419 & -10,2136 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Gemäß (2.16) wird der Rang dieser Matrix bestimmt:

$$\text{Rang } \mathbf{S}_S = 4 = n$$

Der Rang der Matrix ist n . Die Regelstrecke ist somit per Definition vollständig steuerbar.

Als nächstes wird die **Beobachtbarkeit** untersucht, welche über (2.17) berechnet wird:

$$\mathbf{S}_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,3483 & 0 & 6,5983 & 0,0316 \\ 19,2407 & 0 & -0,3501 & -1,7441 \\ 0,6075 & -0,3483 & -0,0111 & 6,5432 \\ -33,5583 & 19,2407 & 0,6106 & 2,6919 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Der Rang der Matrix ist:

$$\text{Rang } \mathbf{S}_B = 4 = n$$

Das System ist gemäß (2.18) vollständig beobachtbar.

Stabilität

Die **Zustandsstabilität** wird durch die Eigenwertlagen der Systemmatrix bestimmt (siehe Gleichungen (2.19) bzw. (2.20)).

Dazu wird erst das charakteristische Polynom (2.21) berechnet:

$$p_A(\lambda) = \lambda^4 + 1,7441\lambda^3 + 0,6984\lambda^2 - 126,8337 \quad (3.24)$$

Die Nullstellen bzw. Eigenwerte sind dann:

$$\lambda_1 = -0,4348 + j3,3229; \quad \lambda_2 = -0,4348 - j3,3229; \quad \lambda_3 = -3,8261; \quad \lambda_4 = 2,9516$$

Die Regelstrecke ist weder asymptotisch stabil (2.19) noch zustandsstabil (2.20), da der reelle Anteil von λ_4 größer ist als 0.

Daraus folgt, dass der Zustand der Regelstrecke stabilisiert werden muss, damit die Zustandsgrößen bei Erregung nicht gegen unendlich laufen.

Die **E/A-Stabilität** muss in diesem Fall nicht zusätzlich errechnet werden. Wie in Kapitel 2.2.1 erläutert, sind alle Eigenwerte von **A** gleichzeitig die Pole des Systems, wenn das System vollständig steuer- und beobachtbar ist. Diese Vorschrift ist bei der Regelstrecke erfüllt.

Somit wird die Voraussetzung für die E/A-Stabilität (2.24) nicht eingehalten und das System ist E/A-instabil.

Das E/A-Verhalten muss dementsprechend stabilisiert werden, damit die Regelgrößen bei beschränkten Stellgrößen bei $t \rightarrow \infty$ nicht gegen unendlich laufen.

4 Reglerentwürfe für das Ball-Wippe-System

Der Zustand sowie das E/A-Verhalten des Ball-Wippe-Systems sind, wie in Kapitel 3.4.1 erläutert, instabil. Die Stabilisierung des Systems kann durch eine Zustandsrückführung erfolgen (siehe Kapitel 2.2). In diesem Fall wird die Zustandsrückführung über das LQ-Verfahren ermittelt.

Das System ist laut Kapitel 3.4.1 vollständig steuerbar. Die Reglerentwürfe aus Kapitel 2.2 können somit uneingeschränkt vollzogen werden.

In diesem Kapitel wird zunächst festgelegt, welches Regelkreisverhalten durch den Regler bewerkstelligt werden soll.

Dann wird der LQ-Regler entworfen. Da das Verfahren hierbei iterativ verläuft, wird der erste LQR mithilfe einer Simulation entwickelt. Dieser wird dann gegebenenfalls bei der Implementierung am realen System angepasst.

Bei dem Entwurf des PIZ-Reglers wird kein Simulationsmodell verwendet, da sich hieraus kein Mehrwert ergibt. Stattdessen wird dieser direkt bei der Implementierung am realen System ermittelt.

4.1 Forderungen an die Regelung

Die Ziele, welche die Regelung verwirklichen soll, sind in Kapitel 1.2 definiert.

Während Stabilität, Sollwertfolge, Störgrößenkompensation und Robustheit allgemeine und eindeutige Vorsätze sind, werden Dynamikforderungen individuell festgelegt.

Im Folgenden werden diese Forderungen zu jeder Führungsgröße erläutert:

- **Führungssprung:** Die Führungssprungantwort auf $0,3\text{ m}$ soll keine Überschwinger besitzen. Der Sollwert soll möglichst schnell, innerhalb weniger Sekunden, erreicht werden.

In der Theorie ist eine Regelung auf den exakten Sollwert möglich. In der Praxis ist dies durch Störeinflüsse oft nicht realisierbar. Deshalb wird hier von einem Toleranzband von $\Delta x_1 = \pm 3\%$ des stationären Sollwertes ausgegangen. Dies ergibt sich zu:

$$\Delta x_1 = \pm 3\% \cdot 0,3\text{ m} = \pm 9\text{ mm} \quad (4.1)$$

- **Sinusschwingung:** Die Sinusschwingung hat eine Amplitude von $0,1\text{ m}$ und eine Frequenz von $0,5\text{ Hz}$. Diese wird mit einer Rechteckschwingung überlagert, welche über eine Amplitude von $0,2\text{ m}$ und eine Frequenz von $\frac{1}{30}\text{ Hz}$ verfügt.

Prinzipiell springt der Offset der Sinusschwingung durch die Rechteckschwingung alle 15 Sekunden von $\pm 0,2\text{ m}$ auf $\mp 0,2\text{ m}$.

Die Kugel soll mit der Regelung eine möglichst saubere Sinusschwingung nach den Einschwingvorgängen abfahren. Als „sauber“ wird hier ein Sinus definiert, dessen Halbschwingungen symmetrisch sind. Die oberen und unteren Halbschwingungen sollen außerdem im Betrag deckungsgleich erscheinen. Die Bahnfolge der Kugel soll der Führungsgröße gleichen.

4.2 LQ-Regler

Der LQ-Regler ist der Schwerpunkt dieser Arbeit. Deshalb wird der LQR-Entwurf in diesem Kapitel ausführlich und praxisnah behandelt.

Zunächst wird das Simulationsmodell des Ball-Wippe-Systems und dann des LQ-Regelkreises beschrieben und dargestellt.

Dann wird in diesem Kapitel ausgearbeitet, inwiefern das Gütefunktional (2.46) an das Ball-Wippe-System angepasst wird und welche Vorüberlegungen dabei zu der Parametrierung der Wichtungsmatrizen entstehen.

Danach wird der LQR rechnergestützt mithilfe von MATLAB jeweils für die Simulation und dann für das reale System entworfen.

4.2.1 Simulationsmodell des Regelkreises mit LQR

Die nichtlinearen Zustandsgleichungen aus Kapitel 3.4 werden bei der Erstellung des Simulationsmodells verwendet.

Das entsprechende Modell ist in Simulink strukturiert und in Abbildung 4.1 dargestellt.

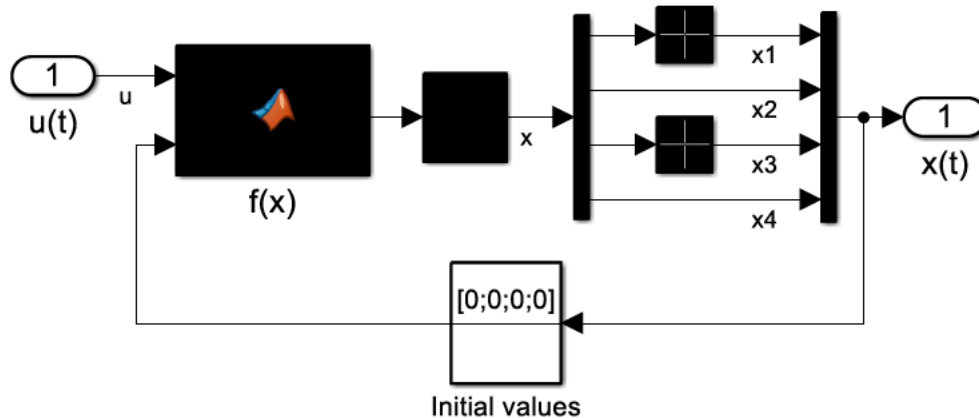


Abbildung 4.1: Nichtlineares Modell der Regelstrecke in Simulink

Der MATLAB-Funktionsblock „f(x,u)“ in der Abbildung beinhaltet die nichtlinearen Zustandsgleichungen (3.5) bis (3.8) in Code-Form.

Die Begrenzungen der Ballposition ($x_{1,max/min} = \pm 0,4\text{ m}$) und des Wippenwinkels ($x_{3,max/min} \approx \pm 0,2325\text{ rad}$) des realen Systems sind bei dem Modell miteinbezogen worden. Außerdem wird der Anfangszustand $x_0 = \mathbf{0}$ gesetzt.

Der LQ-Regler benötigt nur die Zustandsgrößen. Deshalb wird die Messung über die Ausgabematrix C hier nicht berücksichtigt. Es wird im Grunde davon ausgegangen, dass der Beobachter dem Zustandsregler die exakten Zustandsgrößen übergibt.

Das Simulations-Modell wird mit dem Regler k^T , dem Vorfilter V , einer Begrenzung der Stellgröße von $\pm 21,5\text{ N}$ und den Führungsgrößen erweitert. Dadurch ergibt sich die Simulink-Struktur in Abbildung 4.2.

Mit diesem Modell wird in Kapitel 4.2.4 der erste LQ-Regler designt.

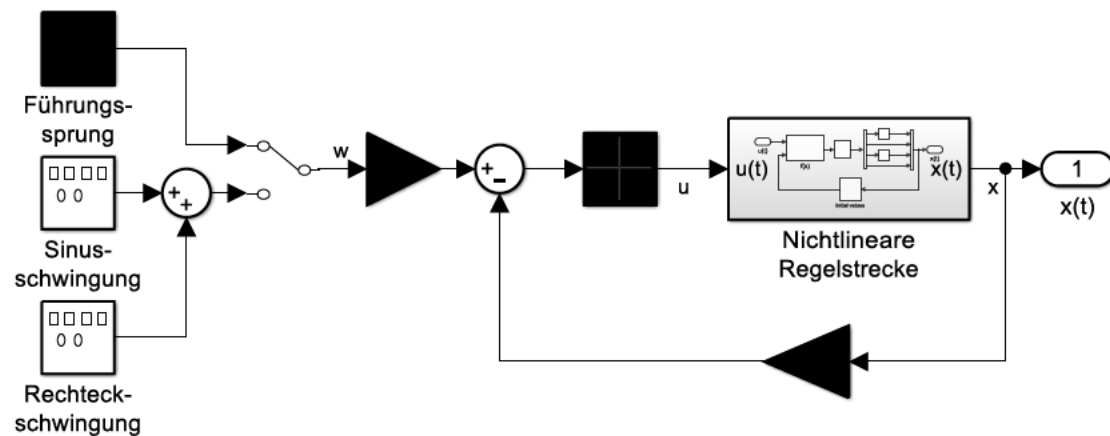


Abbildung 4.2: Regelkreis-Modell mit LQR und Vorfilter in Simulink

4.2.2 Anwendung der Wichtungsmatrizen am Ball-Wippe-System

Die Wichtungsmatrizen des Gütefunktional in (2.46) werden auf die Gegebenheiten des Ball-Wippe-Systems angepasst.

Die Matrix Q ist hierbei eine 4×4 -Matrix, da vier Zustandsgrößen existieren. Die Matrix R wird aufgrund einer einzigen Stellgröße zu einem Skalar R . Somit gilt bei Anwendung am Ball-Wippe-System folgendes allgemeingültiges Gütefunktional:

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T(t) \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + u(t)Ru(t) dt \rightarrow \min \quad (4.2)$$

4.2.3 Vorüberlegungen zum ersten LQR-Entwurf

Um die Zustandsrückführung mit dem LQ-Verfahren am Ball-Wippe-System zu erstellen, müssen die Wichtungsmatrizen zunächst parametrisiert werden.

In diesem Abschnitt wird erläutert, welche erste Festlegung der Wichtungsmatrizen ausgewählt wird. Dies beinhaltet Vereinfachungen des Gütefunktional (4.2) und die Analyse der Einflüsse der Wichtungsparameter auf die Stell- und Zustandsgrößen.

Dann wird auf Basis der Überlegungen der erste LQR entworfen und der Vorgang zu weiteren, iterativen Anpassungen beschrieben.

Vereinfachungen des Gütefunktional

Aus dem Gütefunktional (4.2) wird deutlich, dass eine Veränderung von R keinen Einfluss auf den Regler hat, wenn die Elemente in \mathbf{Q} proportional zu R sind. Daraus folgt, dass eine vorläufige Festlegung des Wichtigkeitsskalars $R = 1$ die Freiheitsgrade beim Entwurf nicht einschränkt und somit nur \mathbf{Q} parametrisiert werden muss.

Des Weiteren wird \mathbf{Q} vorerst als Diagonalmatrix \mathbf{Q}_{diag} betrachtet, um eine schnelle Parametrisierung ohne sonderliche Beachtung der Definitheit zu ermöglichen.

Werden die vorigen Überlegungen auf das Gütefunktional (4.2) angewendet, ergibt sich folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_{diag} \mathbf{x}(t) + u(t) R u(t) dt \rightarrow \min \\ &= \int_0^{\infty} q_{11} x_1^2(t) + q_{22} x_2^2(t) + q_{33} x_3^2(t) + q_{44} x_4^2(t) + u^2(t) dt \rightarrow \min \end{aligned} \quad (4.3)$$

Jede Zustandsgröße wird einzeln über die Diagonalelemente von \mathbf{Q}_{diag} angesprochen.

Durch die Quadrierung der Zustandsgrößen und der Stellgröße, wirken sich diese ohne Vorzeichen auf das Funktional aus.

Dementsprechend können Abweichungen der Zustandsgrößen über die Elemente höchstens beschränkt ($q_{ii} > 0$) oder nicht beschränkt ($q_{ii} = 0$) werden. Eine Verringerung des Gütefunktional durch Abweichungen ($q_{ii} < 0$) ist aufgrund der positiven Semidefinitheit von \mathbf{Q}_{diag} nicht möglich. Abweichungen können somit nicht „belohnt“ werden.

Der Skalar R ist dahingegen positiv definit ($R > 0$). Eine Beschränkung der Stellgröße ist somit immer der Fall.

In der Gleichung 4.3 wird die Führungsgröße nicht berücksichtigt. Wird das Funktional damit erweitert, ergibt sich folgende Gleichung:

$$J = \int_0^{\infty} q_{11} (x_1(t) - w(t))^2 + q_{22} x_2^2(t) + q_{33} x_3^2(t) + q_{44} x_4^2(t) + u^2(t) dt \rightarrow \min \quad (4.4)$$

Die Abweichung zwischen Ballposition und Führungsgröße wird in (4.4) minimiert, während die restlichen Größen den Nullwert anstreben.

Einfluss der Wichtungparameter auf die Regeldynamik

In Kapitel 2.2.2 wird erwähnt, dass das Gütefunktional erste Ansätze zur Parametrierung der Wichtungsmatrizen bietet. Diese Ansätze werden im Folgenden mithilfe der Gütefunktionale (4.4) und (4.2) formuliert.

Die Ballposition ist der Schwerpunkt der Regelung. Deshalb wird der Wert von q_{11} im Vergleich zu den anderen Elementen höher gesetzt. Somit wird die Ballposition vergleichsweise dynamischer und priorisierter geregelt als die restlichen Größen, da Abweichungen von $x_1(t)$ zur Führungsgröße $w(t)$ sich stärker auf das Gütefunktional (4.4) auswirken.

Die Ballgeschwindigkeit $x_2(t)$ wird nur soweit über q_{22} beschränkt, dass keine Überschwinger vorkommen.

Ein größerer Wert verlangsamt die Dynamik der Sollwertfolge.

Der Parameter q_{33} wirkt sich auf den Wippenwinkel $x_3(t)$ aus. Hier gilt die Vorgabe diesen so zu verstellen, sodass die Begrenzung von $x_{3,max/min} \approx \pm 0,2325 \text{ rad}$ nicht überschritten wird. Die Wippe stößt somit nicht gegen die Anschlagdämpfer.

Auch hier verringert ein zu großer Wert die Dynamik der Ballpositionsregelung, da dauerhaft kleine Wippenwinkel den Ball nur langsam beschleunigen können.

Die Beschränkung der Winkelgeschwindigkeit $x_4(t)$ durch q_{44} soll ebenfalls verhindern, dass der Wippenwinkel die Begrenzung erreicht.

Das Element q_{33} ist bereits für das effektive Ausmaß des Winkels zuständig. Dennoch ist dies bei Sprüngen in der Führungsgröße nicht ausreichend. Es können kurzzeitig hohe Auslenkungen des Winkels entstehen, die mit hohen Winkelgeschwindigkeiten einhergehen. Dies wird mit der Größe von q_{44} vermieden.

Dennoch darf q_{44} nicht zu hoch gewichtet werden, da der Wippenwinkel sonst zu langsam nachjustiert wird und somit eine langsamere Dynamik sowie Überschwinger bei der Sollwertfolge des Balles entstehen können.

Der multiplikative Unterschied zwischen R und Q sagt im Allgemeinen aus, wie dynamisch die Stellgröße $u(t)$ auf Änderungen der Zustandsgrößen $\mathbf{x}(t)$ reagiert. Ist dieser Unterschied klein, wird die Anforderung an $u(t)$ gering und die Zustandsregelung wird träger. Höhere Abweichungen von $\mathbf{x}(t)$ sind erforderlich, bis über die Stellgröße eine Regelung vollzogen wird.

Bei großem multiplikativen Unterschied wird der Zustand dynamischer geregelt und $u(t)$ wird stärker ausgelastet. Gleichzeitig drücken sich dann Störeinflüsse von Prozess und

Messungen deutlicher am Eingang aus. Dadurch wird beispielsweise der Einfluss des Messrauschens an der Stellgröße stärker und hochfrequenter.

Erste Parametrierung und Verfahren

In Anbetracht der vorangegangenen Überlegungen kann für den Führungssprung folgende, erste Parametrierung verfasst werden:

$$\mathbf{Q}_{diag} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad R = 1$$

Diese Wichtung wird am Simulationsmodell angewendet und bei Nichterfüllung der Forderungen an die Regelung iterativ angepasst. Dies geschieht bei jedem Element von \mathbf{Q}_{diag} in Zehnerpotenz-Schritten. Wird durch das Simulationsergebnis deutlich, dass sich ein besserer Wert eines Elementes zwischen zwei Zehnerpotenzen befindet, wird dieser schrittweise angenähert.

Dieses Vorgehen ermöglicht eine schnelle Anpassung der Parameter von \mathbf{Q}_{diag} .

Im weiteren Verlauf werden zusätzlich die Einflüsse der außerdiagonalen Elemente von \mathbf{Q} überprüft und bei einem positiven Effekt auf die Regeldynamik übernommen.

4.2.4 Rechnergestützter LQR-Entwurf

In MATLAB existiert die Funktion „lqr“ zur Erstellung des LQ-Reglers. Diese führt die numerischen Berechnungen (2.47) und (2.48) durch.

Die Wichtungsmatrizen, die Systemmatrix \mathbf{A} und der Steuervektor \mathbf{b} des linearisierten Ball-Wippe-Modells werden hier übergeben. Die Ausgaben der Funktion sind die Zustandsrückführung \mathbf{k}^T , die Matrix \mathbf{P} und die Eigenwerte $\bar{\lambda}_i$ des resultierenden Regelkreises:

$$[\mathbf{k}^T, \mathbf{P}, \text{lambda_bar}] = \text{lqr}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{Q}, \mathbf{R});$$

Dann wird für die stationäre Genauigkeit der Ballposition das Vorfilter V berechnet. Dazu wird die Gleichung (2.42) direkt in MATLAB übertragen. Ausschließlich die erste

Zeile der Ausgabematrix C wird verwendet, da lediglich eine Stellgröße vorliegt und nur die Sollwertfolge der Ballposition von Bedeutung ist.

Simulation

Bei dem Simulationsmodell hat sich beim Führungssprung folgende Wichtung als ausreichend erwiesen:

$$Q_{Sprung} = \begin{bmatrix} 10000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}, \quad R_{Sprung} = 1 \quad (4.5)$$

Die Zustandsrückführung und das Vorfilter ergeben sich hierbei zu:

$$k^T \approx [105, 5515 \quad 64, 8067 \quad 105, 211 \quad 13, 2773], \quad V = 100, 146 \quad (4.6)$$

In Abbildung 4.3 ist die Sprungantwort des daraus entstehenden Regelkreises dargestellt.

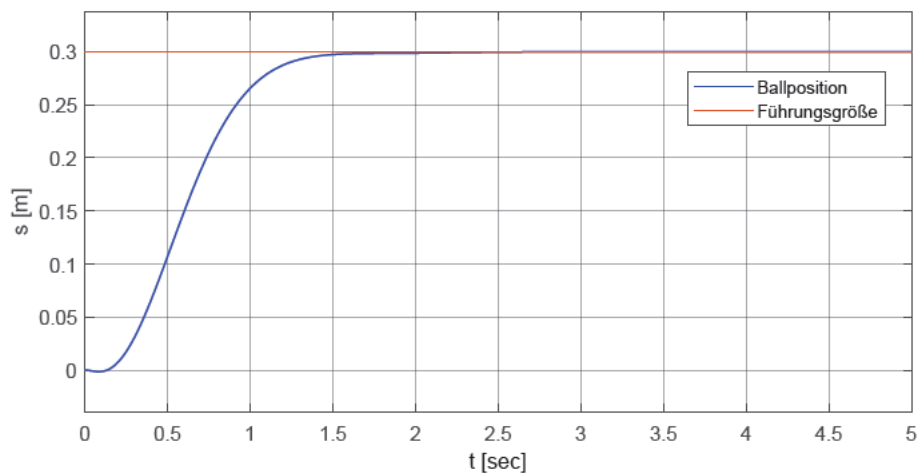


Abbildung 4.3: Sprungantwort der LQR-Simulation

Alle Dynamikforderungen aus Kapitel 4.1 an die Ballpositionsregelung werden hier sichtlich erfüllt. Das System ist stabil und eine Sollwertfolge im Toleranzband findet vor 1,5 Sekunden ohne Überschwinger statt.

Außerdem bleibt der Wippenwinkel, wie in Abbildung 4.4 zu sehen, innerhalb des vorgegebenen Bereiches von $\pm 0,2325 \text{ rad}$.

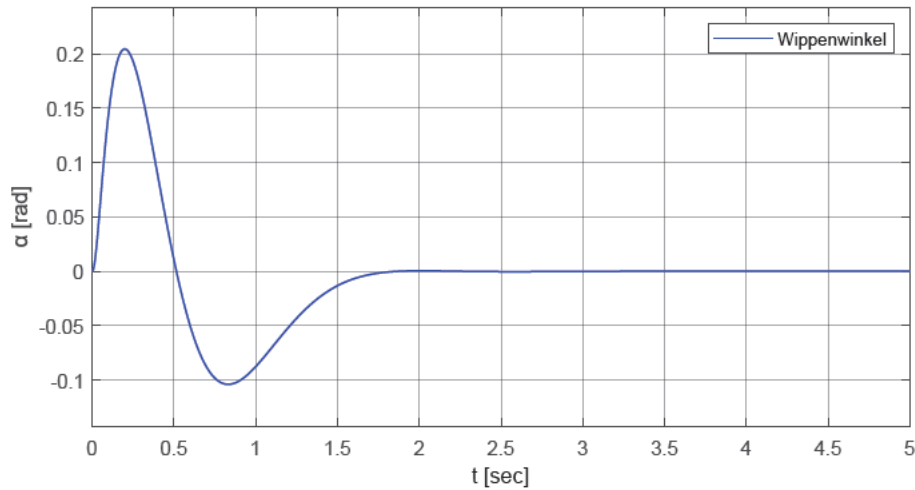


Abbildung 4.4: Wippenwinkel während der Sprungantwort der LQR-Simulation

Da für die Sinusschwingung mit überlagelter Rechteckschwingung andere Dynamikforderungen gelten, müssen der Regler und folglich die Wichtungsmatrizen angepasst werden.

Folgende Parametrierung wurde hierfür bestimmt:

$$Q_{Sinus} = \begin{bmatrix} 8000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad R_{Sinus} = 100 \quad (4.7)$$

Die Elemente von Q_{Sinus} sind im Vergleich zu Q_{Sprung} in (4.5) geringer und R höher, sodass die Stellgröße stärker beschränkt und die Regelung träger wird.

Diese Charakteristik ist gewollt, da zwischen den Sinusschwingungen der Führungsgröße und der Ballposition eine dauerhafte Phasendifferenz entsteht. Dies hat den Ursprung in der mechanischen Trägheit des Ball-Wippe-Systems. Wird die Stellgröße kaum gewichtet, versucht die Regelung stetig mit der aktuellen Führungsgröße mitzuhalten. Die träge Dynamik des Ball-Wippe-Systems ist dazu jedoch nicht in der Lage. Die Amplitude der Bahnfolge der Kugel ist dann geringer als die der Führungsgröße, was nicht der Dynamikforderung in 4.1 entspricht.

Die Einhaltung der Amplitude der Bahnfolge wird ebenfalls durch eine geringere Be-

schränkung der Ballgeschwindigkeit über q_{22} erzielt. Dadurch werden höhere Ballgeschwindigkeiten und somit größere Überschwinger zum aktuellen Führungswert bewerkstelligt. Diese Wirkung ist jedoch im Vergleich zum Einfluss von R gering und es muss darauf geachtet werden, dass durch die höheren Ballgeschwindigkeiten nicht auch zu hohe Wippenwinkel zur Bremsung der Kugel resultieren.

Folgende Zustandsrückführung und Vorfilter resultieren aus der Wichtung (4.7):

$$\mathbf{k}^T \approx [15,8563 \quad 7,0726 \quad 14,6805 \quad 2,5412], \quad V = 10,4508 \quad (4.8)$$

Eine deutlich geringere Verstärkung wird hier im Vergleich zu (4.6) aufgrund der signifikant höheren Gewichtung von R realisiert. Diese Auswirkung deckt sich mit dem in Kapitel 4.2.3 beschriebenen Einfluss einer trägeren Dynamik.

In Abbildung 4.5 ist das Verhalten der Ballposition zur Führungsgröße dargestellt.

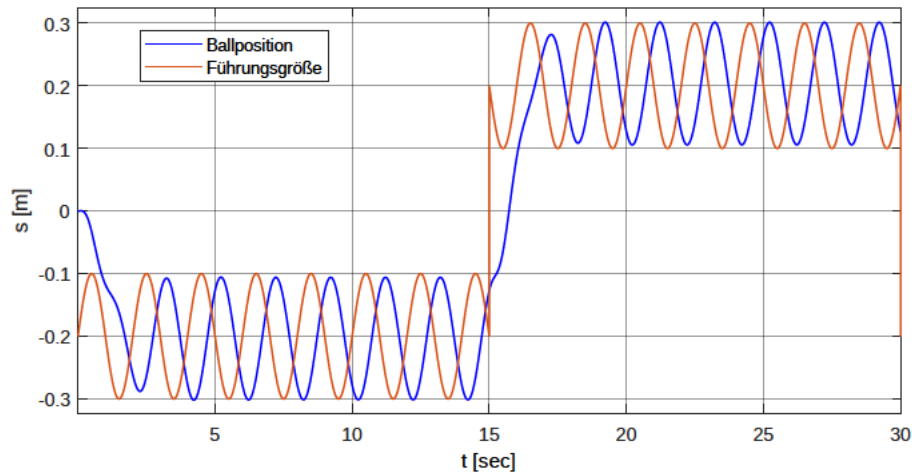


Abbildung 4.5: Ballposition bei der Sinusschwingung mit wechselndem Offset in der LQR-Simulation

Es ist zu erkennen, dass die Amplituden des Balles auf beiden Seiten der Wippe nicht wie die Führungsgröße die $\pm 0,1 \text{ m}$ erreichen. Das liegt daran, dass zur Erstellung des Reglers das linearisierte Modell des Systems verwendet wird. Die Ungenauigkeit dieser Linearisierung wird bei höheren Winkelstellungen größer, welche aufgrund der Schwingung dauerhaft eintreten. Auf beiden Seiten entsteht ein abweichender Offset. Eine identische Bahnfolge kann somit mit einem linearen Zustandsregler nicht direkt erfüllt werden.

Um dennoch die $\pm 0,3 \text{ m}$ an der Amplitude der Führungsgröße nicht sehr zu überschreiten, wird durch die Regelung eine Stauchung der Schwingung erzeugt.

Der Verlauf der Ballposition entspricht nach den Einschwingvorgängen der in Kapitel 4.1 definierten „sauberen“ Sinusschwingung. Außerdem bleibt, wie in Abbildung 4.6 zu sehen, der Wippenwinkel im vorgeschriebenen Bereich.

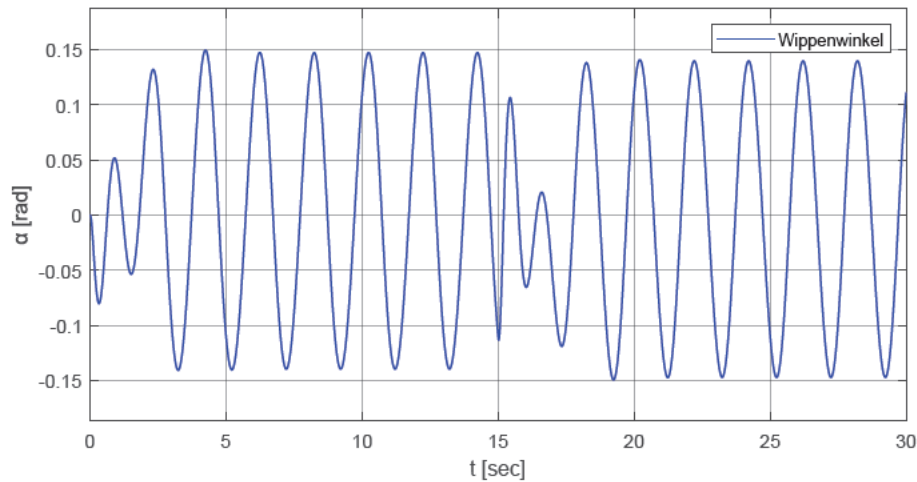


Abbildung 4.6: Winkel während der Sinus- und Rechteckschwingung LQR-Simulation

Praxis

Die Parametrierung von Q muss bei Anwendung am Ball-Wippe-System angepasst werden, da Unterschiede zwischen dem nichtlinearen Modell in Abbildung 4.2 und der realen Anlage existieren.

Außerdem haben sich je nach Beobachter andere Wichtungen bewährt, da der Beobachter einen Einfluss auf die Gesamtdynamik des Systems hat.

Im Folgenden sind die in der Praxis ermittelten Wichtungsmatrizen zu den Beobachtern aufgelistet. Die resultierenden Zustandsrückführungen, Vorfilter und Eigenwerte des geschlossenen Kreises sind ebenfalls aufgeführt:

- **Luenberger-Beobachter:** Die in der Simulation erstellten Wichtungen (4.5) und (4.7) führen in der Praxis zu deutlichen Überschwingern und einer sehr trägen Regelung. Deshalb werden im Vergleich zu diesen Wichtungen andere Parametrierungen vorgenommen, die ein dynamischeres Regelverhalten erzeugen.

- Führungssprung:

$$\mathbf{Q}_{Sprung} = \begin{bmatrix} 16200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad R_{Sprung} = 1 \quad (4.9)$$

$$\mathbf{k}^T \approx [132,7995 \quad 101,5348 \quad 137,2617 \quad 10,7105], \quad V \approx 127,394 \quad (4.10)$$

$$\bar{\lambda}_1 \approx -1,8804, \quad \bar{\lambda}_2 \approx -5,8451, \quad \bar{\lambda}_{3,4} \approx -12,7996 \pm j10,3985 \quad (4.11)$$

- Sinus- und Rechteckschwingung:

$$\mathbf{Q}_{Sinus} = \begin{bmatrix} 16200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 450 \end{bmatrix}, \quad R_{Sinus} = 6 \quad (4.12)$$

$$\mathbf{k}^T \approx [57,6474 \quad 37,6338 \quad 73,4744 \quad 10,9626], \quad V \approx 52,242 \quad (4.13)$$

$$\bar{\lambda}_{1,2} \approx -2,3476 \pm j2,9469, \quad \bar{\lambda}_3 \approx -2,7995, \quad \bar{\lambda}_4 \approx -30,8451 \quad (4.14)$$

- **Reduzierter Beobachter:** Der reduzierte Beobachter begünstigt im Gegensatz zum Luenberger-Beobachter eine dynamischere Regelung, aufgrund der direkten Übergabe der akkuraten Messdaten.

Im Vergleich zu der Wichtung in (4.9) wird beim Führungssprung die Ballposition über q_{11} höher und die Ballgeschwindigkeit über q_{22} geringer gewichtet.

Diese Parametrierung führt vergleichsweise beim Luenberger-Beobachter zu Überschwingern. Beim reduzierten Beobachter entsteht dagegen eine schnelle Sollwertfolge ohne Überschwinger. Damit die Wippe weiterhin nicht gegen die Anschlagdämpfer stößt, wird die Winkelgeschwindigkeit über q_{44} stärker beschränkt.

Bei der Sinus- und Rechteckschwingung müssen die Wichtungen ebenfalls angepasst werden. Dies geschieht im Vergleich zu (4.12) primär über die höhere Gewichtung der Stellgröße durch R , um gleichzeitig dem größeren Einfluss des Messrauschens an der Stellgröße entgegenzuwirken.

- Führungssprung:

$$Q_{Sprung} = \begin{bmatrix} 20200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3110 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 \end{bmatrix}, \quad R_{Sprung} = 1 \quad (4.15)$$

$$\mathbf{k}^T \approx [147,635 \quad 96,8639 \quad 145,2574 \quad 13,1537], \quad V \approx 142,23 \quad (4.16)$$

$$\bar{\lambda}_1 \approx -3,1328, \quad \bar{\lambda}_2 \approx -4,898, \quad \bar{\lambda}_3 \approx -8,3999, \quad \bar{\lambda}_4 \approx -25,8917 \quad (4.17)$$

- Sinus- und Rechteckschwingung:

$$Q_{Sinus} = \begin{bmatrix} 20200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3410 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad R_{Sinus} = 20 \quad (4.18)$$

$$\mathbf{k}^T \approx [37,6424 \quad 23,0749 \quad 36,892 \quad 4,5258], \quad V \approx 32,237 \quad (4.19)$$

$$\bar{\lambda}_1 \approx -2,472, \quad \bar{\lambda}_{2,3} \approx -3,7052 \pm j5,7846, \quad \bar{\lambda}_4 \approx -6,4842 \quad (4.20)$$

- **Kalman-Filter:** Das Kalman-Filter ermöglicht wie der reduzierte Beobachter eine dynamischere Regelung bzw. Sollwertfolge als der Luenberger-Beobachter. Diese ist jedoch nicht so dynamisch wie beim reduzierten Beobachter.

Deshalb ergibt sich beim Führungssprung eine Parametrierung der Elemente von Q_{Sprung} , welche sich jeweils zwischen den Werten in (4.9) und (4.15) befinden.

Bei der Sinus- und Rechteckschwingung wird aufgrund des geringeren Rauscheinflusses nicht nur der Skalar R vergrößert, um die Bahnfolge zu gewährleisten. Auch die Beschränkung der Ballgeschwindigkeit über q_{22} wird dafür verringert.

- Führungssprung:

$$\mathbf{Q}_{Sprung} = \begin{bmatrix} 17200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}, \quad R_{Sprung} = 1 \quad (4.21)$$

$$\mathbf{k}^T \approx [136,6656 \quad 92,8479 \quad 136,0139 \quad 11,5022], \quad V \approx 131,26 \quad (4.22)$$

$$\bar{\lambda}_1 \approx -2,6961, \quad \bar{\lambda}_2 \approx -4,5749, \quad \bar{\lambda}_{3,4} \approx -14,7158 \pm j5,7568 \quad (4.23)$$

- Sinus- und Rechteckschwingung:

$$\mathbf{Q}_{Sinus} = \begin{bmatrix} 20200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 480 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 450 \end{bmatrix}, \quad R_{Sinus} = 6 \quad (4.24)$$

$$\mathbf{k}^T \approx [63,6797 \quad 36,8748 \quad 72,275 \quad 10,9120], \quad V \approx 58,274 \quad (4.25)$$

$$\bar{\lambda}_{1,2} \approx -1,9971 \pm j3,0253, \quad \bar{\lambda}_3 \approx -3,3738, \quad \bar{\lambda}_4 \approx -30,8407 \quad (4.26)$$

In den Parametrierungen von \mathbf{Q} in (4.9) bis (4.24) ist erkennbar, dass diese keine außer-diagonalen Elemente ungleich Null enthalten. Dies hat zwei Ursachen:

- Beim Führungssprung haben diese Elemente einen marginalen Einfluss auf die Regelung des Ball-Wippe-Systems und können deshalb ausgelassen werden.

So ist beispielsweise für den Führungssprung eine Festlegung der Variablen $q_{14} = q_{41} < 0$ sinnvoll, falls die Wippe ruckartig gegen die Anschlagdämpfer stößt. Das Gütefunktional (4.4) wird in diesem Fall mit

$$+(q_{14} + q_{41})(x_1(t) - w(t))x_4(t)$$

erweitert. Da zu Anfang ($t = 0$ s) der Term $(x_1(t) - w(t))$ einen hohen, negativen Wert aufweist, wird mit dem negativen Wert von $(q_{14} + q_{41})$ eine positive Winkelgeschwindigkeit beschränkt. Erst wenn die Ballposition nahe der Führungsgröße ist, sind größere Winkelgeschwindigkeiten nahezu unbeschränkt.

Somit wird die Winkelgeschwindigkeit beschränkt, ohne die in 4.2.3 angeführten Nachteile der trägen Regelung um den Sollwert zu erhalten.

Der Wert von $(q_{14} + q_{41})$ kann für eine merkbare Wirkung jedoch nicht hoch genug gesetzt werden, da sonst die positive Semidefinitheit von \mathbf{Q} nicht realisiert wird. Der Einfluss auf die Regelung ist letztlich gering und es ist sinnvoller ein Diagonalelement zu verändern, damit die Wippe nicht mehr gegen die Anschlagdämpfer stößt.

- Bei der Sinus- und Rechteckschwingung führt eine Festlegung der außerdiagonalen Elemente zu einem Widerspruch der Dynamikforderung im Abschnitt 4.1. Die außerdiagonalen Elemente führen zu jeweils zwei gewichteten Zustandsgrößen, welche mit Vorzeichen das Gütefunktional beeinflussen. Beispielsweise der Term:

$$+(q_{ij} + q_{ji})(x_i(t)x_j(t)).$$

Damit die Sinusschwingung der Ballposition sauber verläuft, müssen diese Zustandsgrößen gleichzeitig ihr Vorzeichen wechseln. Sonst existieren innerhalb einer Halbperiode jeweils eine Bestrafung und eine Belohnung dieses Terms im Gütefunktional.

Bei dem vorhandenen Zustand $\mathbf{x}(t)$ des Ball-Wippe-Modells gibt es keine zwei Größen, die gleichzeitig ihre Vorzeichen wechseln. Deshalb ist eine Belegung der außerdiagonalen Elemente hier nicht der Dynamikforderung entsprechend.

4.3 PIZ-Regelung

Der PIZ-Regler ermöglicht die Gestaltung eines robusteren Regelkreises mit dem Ball-Wippe-System. Außerdem werden konstante Störgrößen ausgeglichen. Dazu gehört auch der in Kapitel 3.2.2 beschriebene „Puffer“.

Die Regelungsnormalform der Regelstrecke muss gebildet werden, damit die Berechnung des PIZ-Reglers durchgeführt werden kann (siehe Kapitel 2.1.6). Wie bei dem Entwurf des Vorfilters wird hierfür das Ball-Wippe-Modell als Eingrößensystem behandelt, dessen einzige Regelgröße $y(t)$ die Ballposition ist ($\mathbf{C} = \mathbf{c}^T = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$).

Die Gleichungen (2.15), (2.28) und (2.29) werden in MATLAB berechnet. Dadurch entsteht folgende Transformationsmatrix:

$$\mathbf{T}_R \approx \begin{bmatrix} 23,4638 & 0 & -0,0644 & 0 \\ 0 & 23,4638 & 0 & -0,0644 \\ 0 & 0 & 3,5595 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3,5595 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Die Matrizen der Regelungsnormalform werden über (2.26) und (2.27) ermittelt:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{RNF} &\approx \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 126,8337 & 0 & -0,6984 & -1,7441 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{b}}_{RNF} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathbf{c}}_{RNF}^T &\approx [23,4638 \quad 0 \quad -0,0644 \quad 0] \end{aligned} \quad (4.28)$$

Als nächstes werden die Wunschpole $\bar{\lambda}_i$ des PIZ-Regelkreises vorgegeben. Diese ergeben sich aus den Eigenwerten des LQ-Regelkreises ($\bar{\lambda}_{LQR,i}$) und dem zusätzlichen Eigenwert des Integralanteils vom PI-Regler ($\bar{\lambda}_{n+1}$).

Außerdem wird \tilde{V} über die Pol-Nullstellen-Kompensation (2.55) errechnet, um die dort angeführte Verlangsamung der Regeldynamik zu vermeiden.

Die zusätzliche Polstelle ist somit der einzige Freiheitsgrad des PI-Gliedes, welcher noch festgelegt werden muss.

Je weiter links sich diese Polstelle auf der reellen Achse befindet, desto schneller werden Störgrößen kompensiert. Gleichzeitig wirkt sich über die zusätzliche Schließung des Regelkreises das Rauschen der Ballpositionsmessung doppelt auf die Stellgröße aus. Ist der zusätzliche Eigenwert zu weit links, wird das Rauschen an der Stellgröße verstärkt.

Über Messungen am realen System wurde die Polstelle $\bar{\lambda}_{n+1} = -18$ gewählt, da dieser eine genügend schnelle Störgrößenkompensation ermöglichte, ohne die Stellgröße stark zu belasten.

Die Eigenwerte $\bar{\lambda}_{LQR,i}$ ergeben sich aus den Wichtungsmatrizen.

Folgende Wichtungen wurden für den PIZ-Regler iterativ bestimmt:

$$\mathbf{Q}_{Sprung} = \begin{bmatrix} 1220 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}, \quad R_{Sprung} = 1 \quad (4.29)$$

$$\mathbf{Q}_{Sinus} = \begin{bmatrix} 1220 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}, \quad R_{Sinus} = 15 \quad (4.30)$$

Diese unterscheiden sich deutlich von den vorigen Wichtungen aus der Praxis, weil der PIZ-Regler ein signifikant anderes Regelverhalten erzeugt.

Das sollte theoretisch nicht passieren, da der PIZ-Regelkreis dieselben Eigenwerte besitzt wie die des LQ-Regelkreises. Der zusätzliche Eigenwert $\bar{\lambda}_{n+1} = -18$ ist außerdem zu weit links positioniert, um einen merkbaren Einfluss auf die Regeldynamik zu haben.

Die Ursache liegt darin, dass das reale System sich anders verhält als das mathematische Modell, welches für die Anpassung der Zustandsrückführung an die PIZ-Regelung (siehe (2.50)) verwendet wird. Deshalb muss die Wichtung nochmals angepasst werden.

Dennoch sind die Einflüsse der Elemente von \mathbf{Q} dieselben, sodass das gewünschte Regelverhalten wie zuvor iterativ angenähert wird.

Mit (4.29) bzw. (4.30) hat das Gesamtsystem die Eigenwerte:

$$\begin{aligned} \text{Sprung:} \quad & \bar{\lambda}_1 \approx -2,2168 + j2,8192, \quad \bar{\lambda}_2 \approx -2,2168 - j2,8192, \\ & \bar{\lambda}_3 \approx -2,5583, \quad \bar{\lambda}_4 \approx -25,2039, \quad \bar{\lambda}_5 = -18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sinus:} \quad & \bar{\lambda}_1 \approx -1,4173 + j3,0395, \quad \bar{\lambda}_2 \approx -1,4173 - j3,0395, \\ & \bar{\lambda}_3 \approx -3,1529, \quad \bar{\lambda}_4 \approx -6,9568, \quad \bar{\lambda}_5 = -18 \end{aligned}$$

Gemäß (2.43) ergeben sich somit die Koeffizienten der charakteristischen Polynome zu:

$$\begin{aligned} \text{Sprung:} \quad & \bar{\alpha}^T \approx [14928 \quad 12402 \quad 4251 \quad 780 \quad 50] \\ \text{Sinus} \quad & \bar{\alpha}^T \approx [4440,7 \quad 3412,7 \quad 1289 \quad 294,8 \quad 30,9] \end{aligned}$$

Nun können die Parameter des PIZ-Reglers in der Reihenfolge (2.51), (2.55) und (2.52) inklusive der Rücktransformation (2.45) berechnet werden.

Im Folgenden sind die Ergebnisse aufgeführt:

$$\begin{aligned} \text{Sprung:} \quad & \tilde{V}_I \approx 636,2, \quad \tilde{V} \approx 35,3443, \\ & \tilde{\mathbf{k}}^T \approx \begin{bmatrix} 498,6297 & 182,9017 & 228,5902 & 16,9233 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \text{Sinus:} \quad & \tilde{V}_I \approx 189,2594, \quad \tilde{V} \approx 10,5144, \\ & \tilde{\mathbf{k}}^T \approx \begin{bmatrix} 140,3349 & 55,4553 & 85,367 & 9,2075 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.32)$$

5 Zustandsschätzung für das Ball-Wippe-System

Das Ball-Wippe-System misst die Ballposition auf der Schiene und die Winkellage der Wippe. Es werden somit nur die Zustandsgrößen $x_1(t)$ und $x_3(t)$ gemessen.

Damit ein Zustandsregler funktioniert, müssen alle Zustandsgrößen diesem übergeben werden. Mithilfe eines Beobachters werden jeweils die Ballgeschwindigkeit $x_2(t)$ und die Winkelgeschwindigkeit $x_4(t)$ geschätzt. Dies geschieht auf Basis des linearen Ball-Wippe-Modells ((3.11) bis (3.20)) und der aktuellen Messdaten von $x_1(t)$ und $x_3(t)$.

Das Ball-Wippe-System ist gemäß Kapitel 3.4.1 vollständig beobachtbar. Die Beobachterentwürfe aus Kapitel 2.3 können somit eingesetzt werden.

Zunächst wird der Luenberger-Beobachter für das System entworfen.

Dann wird der Entwurf des reduzierten Beobachters behandelt.

Im letzten Abschnitt dieses Kapitel wird das Kalman-Filter erstellt. Dieses verlangt ähnlich dem LQ-Regler Parameter, welche unter anderem iterativ angenähert werden müssen. Deshalb wird ein Simulationsmodell verwendet, mit dessen Einsatz das erste Kalman-Filter designt wird. Bei der Implementierung in das reale System wird dieses gegebenenfalls angepasst.

5.1 Luenberger-Beobachter

Der Luenberger-Beobachter wird in MATLAB mithilfe der Funktion „*place*“ bestimmt. Diese Funktion gibt bei Vorgabe der transponierten System- und Ausgabematrizen sowie der gewünschten Eigenwertlagen $\hat{\lambda}_i$ von $\hat{\mathbf{A}}$ die Rückführmatrix \mathbf{L} des Beobachters aus:

```
L = place(A', C', lambda_hat)
```

Bei Anwendung am Ball-Wippe-System sind folgende Eigenwerte gewählt worden:

$$\hat{\lambda}_1 = -65,814, \quad \hat{\lambda}_2 = -65,884, \quad \hat{\lambda}_3 = -65,744, \quad \hat{\lambda}_4 = -65,849 \quad (5.1)$$

Diese Eigenwerte sind in etwa das 35-fache des dominierenden Pols des geschlossenen Kreises beim Führungssprung in (4.11). Bei der Sinus- und Rechteckschwingung entspricht dies dem 28-fachen des reellen Anteils des dominierenden Polpaars in (4.14).

Es ergibt sich die Rückführmatrix:

$$\mathbf{L} \approx \begin{bmatrix} 131,7 & 0,03 \\ 4335,7 & 10,6 \\ -0,0016 & 129,8 \\ 19,14 & 4102,4 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Die Eigenwertlagen des Luenberger-Beobachters sind im Vergleich zu den Eigenwerten des geschlossenen Kreises sehr weit links positioniert. Daraus lassen sich zwei Aussagen ableiten.

Zum einen ist das Messrauschen nicht erheblich, sodass bei sehr niedrigen reellen Beobachtereigenwerten die Stellgröße nicht stark von Rauscheinflüssen belastet wird. Zum anderen gibt es große Abweichungen zwischen dem mathematischen Modell und dem realen Ball-Wippe-System, welche durch eine hochdynamische Schätzfehler-Kompensation mithilfe der Messung behoben werden muss.

5.2 Reduzierter Beobachter

Da die Eigenwerte des Luenberger-Beobachters sich ohnehin sehr weit links befinden, ergibt sich die Überlegung die Messdaten direkt dem Zustandsregler zu übertragen. Dies erfolgt beim reduzierten Beobachter.

Der reduzierte Beobachter wird analog zu den Gleichungen in Kapitel 2.3.2 in MATLAB berechnet.

Zunächst wird die Permutationsmatrix \mathbf{P}_m bestimmt. Nur die Zustandsgrößen $x_1(t)$ und $x_3(t)$ werden gemessen. Die Permutationsmatrix wird so aufgestellt, dass diese Zustands-

größen nach der Transformation die ersten Elemente des Zustandsvektors einnehmen:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_3(t) \\ x_2(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \mathbf{P}_m \mathbf{x}(t) \quad (5.3)$$

Diese Forderung wird mit der folgenden Permutationsmatrix erfüllt:

$$\mathbf{P}_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Die Matrizen des Ball-Wippe-Modells resultieren nach der Transformation (2.60) zu:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_m \mathbf{A} \mathbf{P}_m^{-1} &= \left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & & \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & & \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,3483 & 6,598 & 0 & 0,03158 \\ 19,24 & -0,03501 & 0 & -1,744 \end{array} \right], \\ \mathbf{P}_m \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,06444 \\ 3,559 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} \mathbf{P}_m^{-1} = [\mathbf{C}_1 \mid \mathbf{C}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Die zusätzliche Zustandstransformation (2.61) wird hierbei nicht benötigt, da $\mathbf{x}_1(t)$ aus (5.3) bereits der Regelgrößenvektor $\mathbf{y}(t)$ ist ($\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{y}(t)$).

Als nächstes wird die Rückführmatrix \mathbf{L} für den reduzierten Beobachter bestimmt. Dies wird wieder mit der MATLAB-Funktion „*place*“ bewerkstelligt. Dazu werden die transponierten Matrizen \mathbf{A}_{22} und \mathbf{A}_{12} mit den Beobachtereigenwerten vorgegeben:

$$\mathbf{L} = \text{place}(\mathbf{A}_{22}', \mathbf{A}_{12}', \text{lambda_hat})$$

Folgende Eigenwerte wurden für den reduzierten Beobachter näherungsweise am Ball-Wippe-System bestimmt:

$$\hat{\lambda}_1 = -53,2574, \quad \hat{\lambda}_2 = -53,2744 \quad (5.6)$$

Diese Eigenwerte sind beim Führungssprung das ca. 17-fache des dominanten Pols des Zustandsregelkreises in (4.17). Bei der Sinus- und Rechteckschwingung entspricht dies dem 21,5-fachen des dominanten Pols in (4.20).

Im Vergleich zum Luenberger-Beobachter (siehe Kapitel 5.1) sind die Eigenwerte hier weiter rechts platziert. Dies ist zu erwarten, da das Messrauschen beim reduzierten Beobachter sich direkt auf die Stellgröße auswirkt.

Die Rückführmatrix ergibt sich zu:

$$\mathbf{L} \approx \begin{bmatrix} 53,2574 & 0,0316 \\ 0 & 51,5303 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Die Matrizen des reduzierten Beobachters werden gemäß den Gleichungen in (2.64) in MATLAB berechnet. Folgende Werte resultieren:

$$\mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} -53,2574 & 0 \\ 0 & -53,2744 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_o \approx \begin{bmatrix} -0,0644 \\ 3,5595 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} \approx \begin{bmatrix} -2836,7 & 4,9167 \\ 19,2407 & -2745,6 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Die Matrix \mathbf{T}_o (2.68) ist hier die Inverse der Permutationsmatrix \mathbf{P}_m , da die Transformation in (2.61) nicht verwendet wird und somit diesbezüglich keine Rücktransformation nötig ist.

In diesem Fall ist \mathbf{P}_m (5.4) selbstinvers:

$$\mathbf{T}_o = \mathbf{P}_m^{-1} = \mathbf{P}_m \quad (5.9)$$

Damit sind alle benötigten Parameter für den reduzierten Beobachter bestimmt.

5.3 Linearisiertes Kalman-Filter

Das Ball-Wippe-System ist ein nichtlineares System. Die Entwicklung des Kalman-Filters wird somit nicht an ein lineares System, sondern an ein linearisiertes Modell des Systems durchgeführt. Das Kalman-Filter wird in diesem Fall als ein „linearisiertes Kalman-Filter“ bezeichnet. [Kim, 2016, S. 116]

Die Beobachtereigenwerte des erstellten reduzierten Beobachters (5.6) sind zwar weiter rechts auf der komplexen Ebene aufgestellt als beim Luenberger-Beobachter, dennoch sind diese deutlich weiter links als die Eigenwerte des geschlossenen Kreises. Dies ist

nötig, um der Ungenauigkeit des mathematischen Modells des Ball-Wippe-Systems entgegenzuwirken.

Zusammen mit den dem Zustandsregler direkt übertragenen Messwerten, ergibt sich eine hohe Rauschbelastung an der Stellgröße.

Um eine möglichst gute Schätzung und dennoch eine Entlastung der Stellgröße zu erreichen, ist der Einsatz des Kalman-Filters sinnvoll. Hier werden die beiden Messungen und deren Rauscheinflüsse unterschiedlich gewichtet.

Zunächst wird das Simulationsmodell für den Beobachter erstellt. Dann wird das linearisierte Kalman-Filter jeweils für das Simulationsmodell und danach für die reale Anlage rechnergestützt entworfen.

5.3.1 Simulationsmodell des Regelkreises mit LQG-Regler

Die Simulink-Struktur der Regelstrecke in Abbildung 4.1 wird mit den Messungen erweitert.

Dazu werden das Rauschen der Ballpositionsmessung und die Quantisierung der Wippenwinkelmessung in die Struktur übernommen. Daraus entsteht das Modell in Abbildung 5.1.

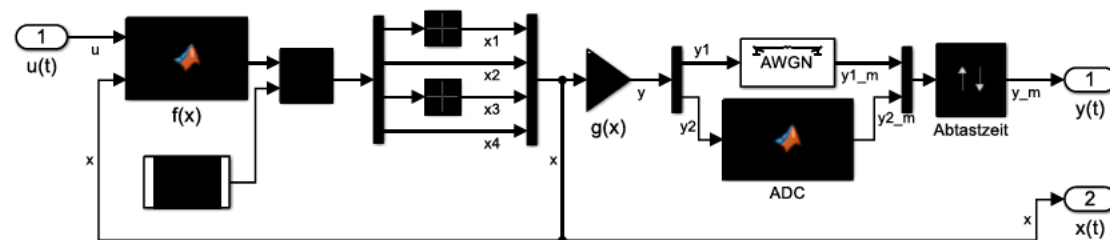


Abbildung 5.1: Nichtlineares Modell der Regelstrecke inkl. Messungen in Simulink

Die Ballpositionsmessung $y_1(t)$ wird über den Simulink-Block „AWGN“ mit einem weißen, gaußschen Rauschprozess überlagert. Damit dieses Rauschen äquivalent zu den realen Beschaffenheiten ist, wird bei der Anlage für 30 Sekunden die Ballposition im Stillstand gemessen. Bei der Abtastzeit von $T_A = 1 \text{ ms}$ (siehe Kapitel 3.3.3) entspricht dies 30.000 Messpunkten. Diese Messdaten werden extrahiert und die Varianz berechnet, dessen Wert in den AWGN-Block eingesetzt wird. Die Varianz ist folgende:

$$\sigma_{y_1}^2 \approx 326,56 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2$$

In dem eigens erstellten Funktionsblock „ADC“ wird die Messung des Wippenwinkels an die Schrittweite der realen Anlage $\Delta \approx 314,16 \mu\text{rad}$ (siehe Kapitel 3.2.2) angepasst.

Beide Regelgrößen werden dann mit der Abtastzeit $T_A = 1 \text{ ms}$ diskretisiert.

Das Simulink-Modell des geschlossenen Kreises in Abbildung 4.2 wird mit dem linearisierten Kalman-Filter vervollständigt. Das Resultat ist ein LQG-Regelkreis mit Vorfilter, welches ist in Abbildung 5.2 illustriert ist.

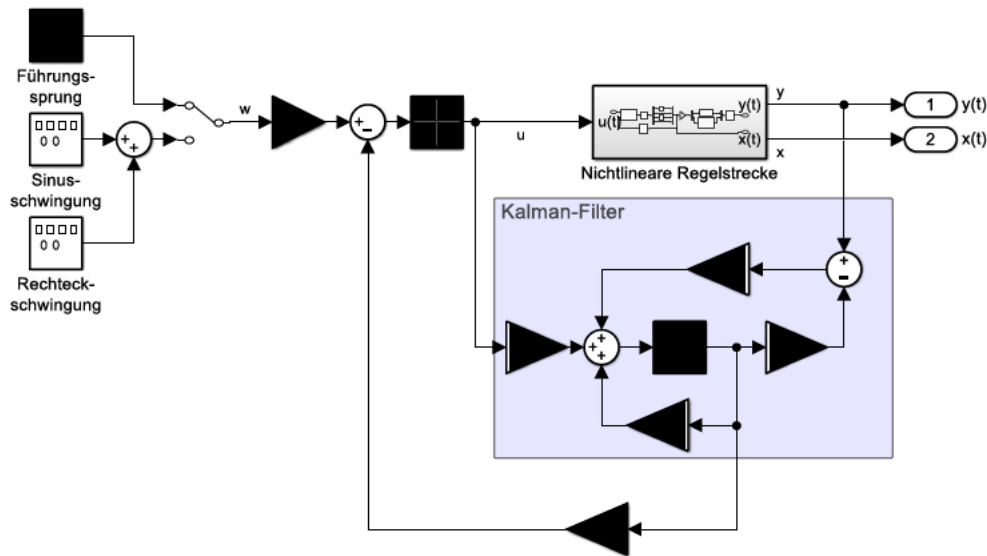


Abbildung 5.2: Regelkreis-Modell mit LQG-Regler und Vorfilter in Simulink

Mit diesem Modell wird das erste linearisierte Kalman-Filter entworfen.

5.3.2 Anwendung der Diagonalmatrizen am Ball-Wippe-System

Die Diagonalmatrizen des Kalman-Filters sind, wie in Kapitel 2.3.3 erläutert, Kovarianzmatrizen. Daraus folgt, dass die Diagonalelemente die Varianzen der Rauschprozesse sind.

Die Matrix Q_K ist aufgrund von vier vorhandenen Zustandsgrößen eine 4×4 -Matrix. Die Matrix R_K ist eine 2×2 -Matrix, da zwei Regelgrößen existieren.

Die Diagonalmatrizen haben somit die Form:

$$\mathbf{Q}_K = \begin{bmatrix} \sigma_{z_1}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{z_2}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{z_3}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{z_4}^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_K = \begin{bmatrix} \sigma_{v_1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{v_2}^2 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Die Elementwerte von \mathbf{Q}_K können zum Teil allgemein geltend festgelegt werden. Das liegt daran, dass die Änderungsraten der Ballposition $\dot{x}_1(t)$ und des Wippenwinkels $\dot{x}_3(t)$ jeweils einzig von deren Geschwindigkeiten $x_2(t)$ und $x_4(t)$ abhängen. Diese Formulierung ist folgerichtig, weshalb hier von keinem Prozessrauschen ausgegangen werden kann:

$$z_1(t) = 0 \text{ m}, \quad z_3(t) = 0 \text{ rad}$$

Daraus folgt:

$$\sigma_{z_1}^2 = 0 \text{ m}^2, \quad \sigma_{z_4}^2 = 0 \text{ rad}^2 \quad (5.11)$$

Die restlichen Elemente von \mathbf{Q}_K sind nicht eindeutig und müssen iterativ bestimmt werden.

Das Element $\sigma_{v_1}^2$ von \mathbf{R}_K ist die Varianz des Messrauschens $v_1(t)$ der Ballposition. Dieser Wert ist bereits in Kapitel 5.3.1 bestimmt worden:

$$\sigma_{v_1}^2 = \sigma_{y_1}^2 \approx 326,56 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2 \quad (5.12)$$

Der Wert von $\sigma_{v_2}^2$ der Matrix \mathbf{R}_K berechnet sich aus der Varianz des Messrauschens $v_2(t)$ des Wippenwinkels.

Bei der Messung des Wippenwinkels existiert durch die Funktionsweise des Inkrementalgebers kein Messrauschen. Es gibt jedoch einen Quantisierungsfehler, welcher durch die Abweichungen zwischen der realen und der quantisierten Zustandsgröße von $x_3(t)$ entsteht. Dieser lässt sich als ein Quantisierungsrauschen interpretieren, bei dem der reale Winkel sich gleichverteilt um eine halbe Schrittweite $\frac{\Delta}{2}$ oberhalb und unterhalb des digital gemessenen Wertes befinden kann.

Die Varianz des Quantisierungsrauschen ergibt sich zu:

$$\sigma^2 = \frac{\Delta^2}{12} \quad (5.13)$$

[Wunsch und Schreiber, 2006, S. 164 f.]

Der Inkrementalgeber hat wie in Kapitel 3.2.2 beschrieben eine Schrittweite von $0,018^\circ$. Dies entspricht einem Radianten von $\Delta = \pi 10^{-4} \text{ rad}$. Somit ergibt sich, in (5.13) eingesetzt, eine Varianz von:

$$\sigma_{v_2}^2 \approx 8,2247 \cdot 10^{-9} \text{ rad}^2 \quad (5.14)$$

Insgesamt ergeben sich für die Diagonalmatrizen in (5.10) die Werte:

$$\mathbf{Q}_K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{z_2}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{z_4}^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_K = \begin{bmatrix} 326,56 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2 & 0 \\ 0 & 8,2247 \cdot 10^{-9} \text{ rad}^2 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Es müssen für die folgende Auslegung des linearisierten Kalman-Filters ausschließlich die Werte von $\sigma_{z_2}^2$ und $\sigma_{z_4}^2$ der Matrix \mathbf{Q}_K bestimmt werden.

5.3.3 Rechnergestützter Kalman-Filter-Entwurf

Die MATLAB-integrierte Funktion „lqe“ wird zur Erzeugung des Kalman-Filters verwendet. Diese verlangt als Eingabe die Diagonalmatrizen, die Systemmatrix \mathbf{A} und die Ausgabematrix \mathbf{C} . Die Funktion fordert zusätzlich die Matrix \mathbf{G} , da MATLAB hier im Vergleich zu (2.5) von einer abgeänderten Zustandsgleichung ausgeht:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{G}\mathbf{z}(t)$$

Diese Matrix \mathbf{G} ist jedoch für die Auslegung des Kalman-Filters nach Kapitel 2.3.3 irrelevant und kann ignoriert werden, indem diese als 4×4 -Einheitsmatrix festgelegt wird:

$$\mathbf{G}\mathbf{z}(t) = \mathbf{I}_4\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}(t)$$

Die Funktion „lqe“ gibt dann die optimale Rückführmatrix \mathbf{L} , die Matrix \mathbf{P}_K und die Beobachtereigenwerte $\hat{\lambda}_i$ aus:

$$[\mathbf{L}, \mathbf{P}_K, \text{lambda_hat}] = \text{lqe}(\mathbf{A}, \mathbf{G}, \mathbf{C}, \mathbf{Q}_K, \mathbf{R}_K)$$

Simulation

Das Prozessrauschen $\mathbf{z}(t)$ und die damit verbundenen Unsicherheiten am Modell entstehen bei der Simulation ausschließlich durch die Linearisierung des nichtlinearen Zustandsraummodells des Ball-Wippe-Systems.

Hier wurden nach iterativer Annäherung die folgenden Werte von $\sigma_{z_2}^2$ und $\sigma_{z_4}^2$ zur Erweiterung der Gleichung (5.15) bestimmt:

$$\sigma_{z_2}^2 = 0,001 \frac{m^2}{s^2}, \quad \sigma_{z_4}^2 = 0,001 \frac{rad^2}{s^2} \quad (5.16)$$

Die resultierende Rückführung des linearisierten Kalman-Filters gilt sowohl für den Führungssprung, als auch für die Sinus- und Rechteckschwingung:

$$\mathbf{L} \approx \begin{bmatrix} 10,2131 & 13,8216 \\ 54,5597 & 51,8455 \\ 0,3481 & 25,2678 \\ 11,0455 & 321,6366 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Mit dem in Kapitel 4.2.4 erstellten LQR ergibt sich ein Regelverhalten, welches mit den Abbildungen 4.3, 4.4, 4.5 und 4.6 übereinstimmt. Die Schätzungen des linearisierten Kalman-Filters sind somit genau genug, um die Regeldynamik nicht merkbar zu beeinflussen.

Bei genauer Betrachtung des stationären Bereiches (Abbildung 5.3) ist erkennbar, dass der Schätzwert kaum vom Messrauschen beeinflusst wird. Stattdessen nähert sich dieser der realen Ballposition der Simulation an.

Wie erwartet bleibt die Ballposition aufgrund der Rauschverhältnisse nicht exakt auf den Sollwert. Mit der Einbeziehung des Toleranzbandes (4.1) wird die gewünschte Sollwertfolge dennoch eingehalten.

Auch bei näherer Betrachtung des Winkelverlaufes (Abbildung 5.4) wird eine gute Schätzung erreicht. Die Abweichungen zum realen Wert sind hier marginal und die Quantisierung wird geglättet.

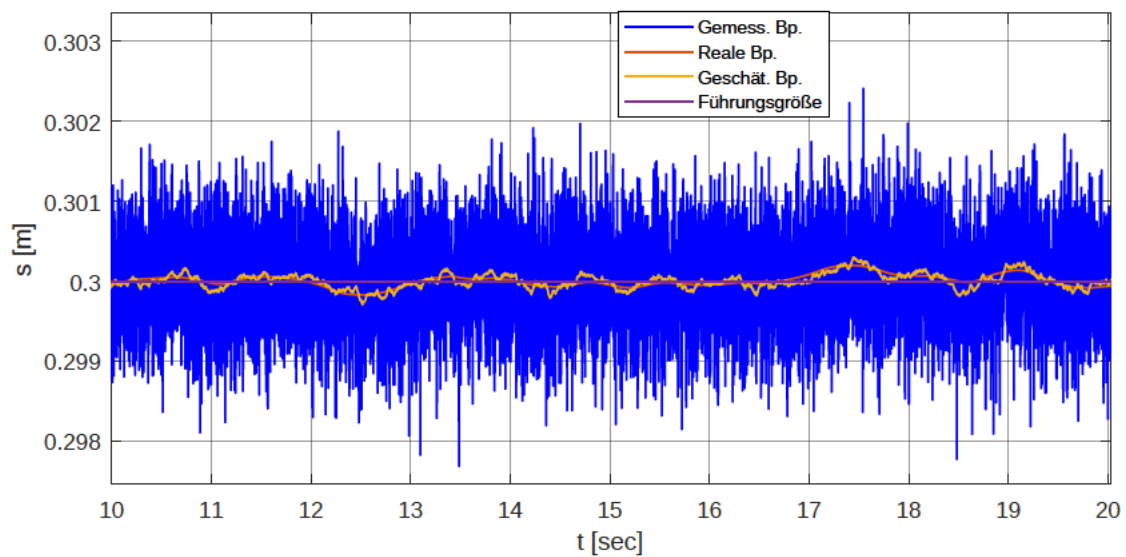


Abbildung 5.3: Stationärer Bereich der Ballposition beim Führungssprung in der LQG-Simulation

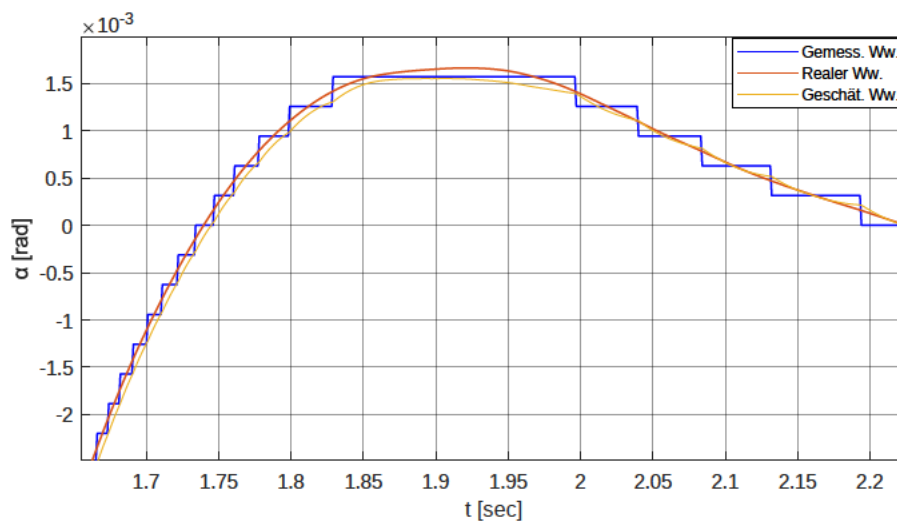


Abbildung 5.4: Ausschnitt vom Wippenwinkel beim Führungssprung in der LQG-Simulation

Praxis

Bei Implementierung am Ball-Wippe-System liegt die Vermutung nahe, dass die beiden Varianzen in (5.16) vergrößert werden müssen. Das liegt daran, dass die Unsicherheiten beim System nicht mehr ausschließlich aus der Linearisierung entstehen. Allgemeine

Ungenauigkeiten des nichtlinearen Modells zur realen Anlage fließen mit in das Prozessrauschen $\mathbf{z}(t)$ ein.

Folgende Varianzen wurden in der Praxis iterativ bestimmt:

$$\sigma_{z_2}^2 = 1 \frac{m^2}{s^2}, \quad \sigma_{z_4}^2 = 40 \frac{rad^2}{s^2} \quad (5.18)$$

Diese Werte sind wie erwartet höher als bei der Simulation. Dennoch gibt es deutliche Unterschiede zwischen den beiden Varianzen. Die Varianz $\sigma_{z_4}^2$ ist 40-fach größer als $\sigma_{z_2}^2$. Daraus lässt sich schließen, dass besonders die mathematische Beschreibung der Winkelgeschwindigkeit der Wippe (3.8) sehr ungenau ist, was zu einem großen Ausmaß des Prozessrauschens $z_4(t)$ führt.

Zusammengefasst entstehen für den Echtzeitbetrieb folgende Diagonalmatrizen:

$$\mathbf{Q}_K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \frac{m^2}{s^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \frac{rad^2}{s^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_K = \begin{bmatrix} 326,56 \cdot 10^{-9} m^2 & 0 \\ 0 & 8,2247 \cdot 10^{-9} rad^2 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Hieraus ergibt sich die Rückführmatrix:

$$\mathbf{L} \approx \begin{bmatrix} 59,1535 & 0,5813 \\ 1749,6 & 31,9938 \\ 0,0146 & 371,7242 \\ 5,5024 & 69089 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

6 Implementierung und Testergebnisse

In diesem Kapitel werden die Regler- und Beobachterentwürfe aus den Kapiteln 4 und 5 implementiert. Dazu werden die Simulink-Strukturen für das Ball-Wippe-System aus dem Abschnitt 3.3 in einem Block zusammengefasst. Dies bildet die Regelstrecke bzw. das Ball-Wippe-System im Echtzeitmodell.

Zu der Regelstrecke werden dann in Simulink die Regelungen gemäß den Wirkungsplänen in den Kapiteln 2.2 und 2.3 geformt.

Die Ergebnisse werden anhand von Zeitverläufen der Messungen visualisiert und beschrieben. Ein Vergleich zu den geschätzten Zustandsgrößen und der Führungsgröße wird zusätzlich unternommen.

Vier Kombinationen der in den Grundlagen (Kapitel 2) behandelten Regler und Beobachter werden untersucht.

Diese sind:

- LQR und Luenberger-Beobachter
- LQR und reduzierter Beobachter
- LQR und linearisiertes Kalman-Filter (LQG-Regler)
- PIZ und linearisiertes Kalman-Filter

Bei allen Kombinationen werden nach Erstellung des Echtzeit-Modells in Simulink erst die Ergebnisse beim Führungssprung und dann bei der Sinus- und Rechteckschwingung behandelt.

6.1 LQR und Luenberger-Beobachter

Zunächst wird der LQ-Regler mit dem Luenberger-Beobachter erstellt und getestet. Das Echtzeitmodell der Regelstrecke wird hierfür mit der Struktur eines Luenberger-Beobachters, einer Zustandsrückführung und einem Vorfilter erweitert. Dies gleicht dem Wirkungsplan in Abbildung 2.5. Die Auswahl der Führungsgrößen und die Begrenzung der Stellgröße werden ebenfalls hinzugefügt.

Durch die hohen Vorfilter-Werte in (4.10) und (4.13) ergeben sich kurzzeitig sehr hohe Anfangswerte an der Stellgröße. Um die Mechanik des Ball-Wippe-Systems zu schonen, wird die Begrenzung auf $\pm 8N$ statt den möglichen $\pm 21,5N$ gesetzt.

Es entsteht das Simulink-Modell in Abbildung 6.1.

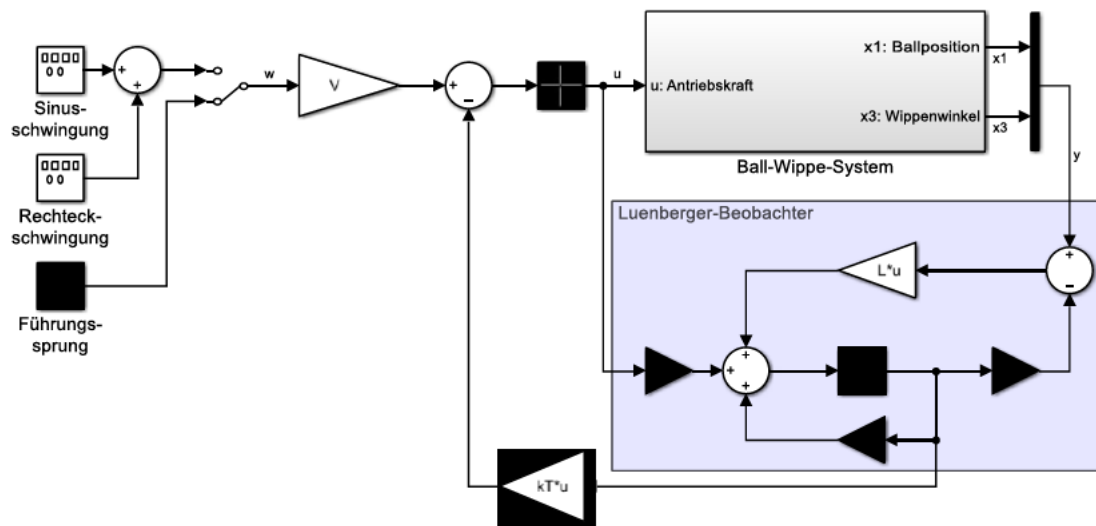


Abbildung 6.1: Echtzeitmodell mit Luenberger-Beobachter, LQR und Vorfilter

Mit diesem Modell werden die Tests im Folgenden getätigt.

6.1.1 Führungssprung

Der Führungssprung von 0 m auf $0,3\text{ m}$ wird als erstes getestet.

Die Regler- und Beobachterparameter in (4.10) und (5.2) werden dafür in das Modell in Abbildung 6.1 eingesetzt.

Dadurch entsteht die Sprungantwort der Ballposition in Abbildung 6.2.

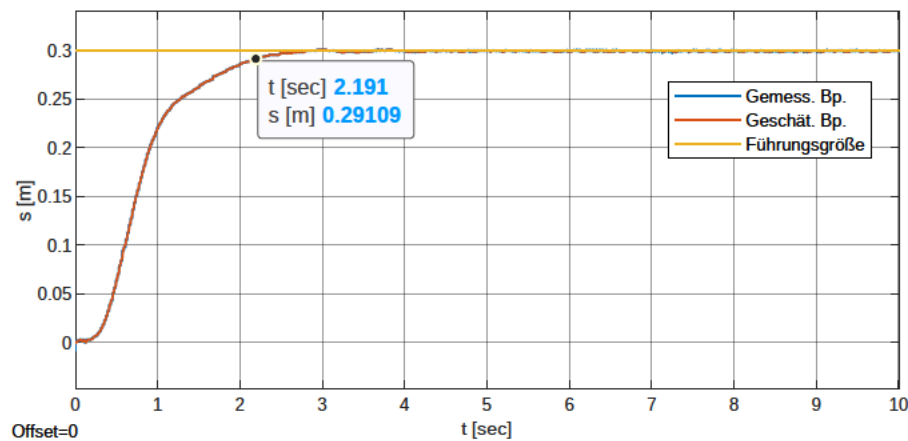


Abbildung 6.2: Sprungantwort der Ballposition mit LQR und Luenberger-Beobachter

Die geschätzten und gemessenen Ballpositionswerte sind hier sehr ähnlich und überdecken sich. Dies ist bei den sehr niedrigen Beobachtereigenwerten (5.1) prinzipiell zu erwarten. Der Schätzfehler klingt somit besonders schnell ab.

Wie in Abbildung 6.2 dargestellt, erreicht die Kugel innerhalb von ca. 2,191 Sekunden das vorgeschriebene Toleranzband von $\pm 9\text{ mm}$ (4.1). Überschwinger sind nicht vorhanden.

Der Wippenwinkel erreicht wie in Kapitel 1.2 verlangt nicht die Begrenzung von $x_{3,max/min} \approx \pm 0,2325\text{ rad}$ und stößt somit nicht gegen einen Anschlagdämpfer.

Diese Tatsache ist in Abbildung 6.3 deutlich erkennbar.

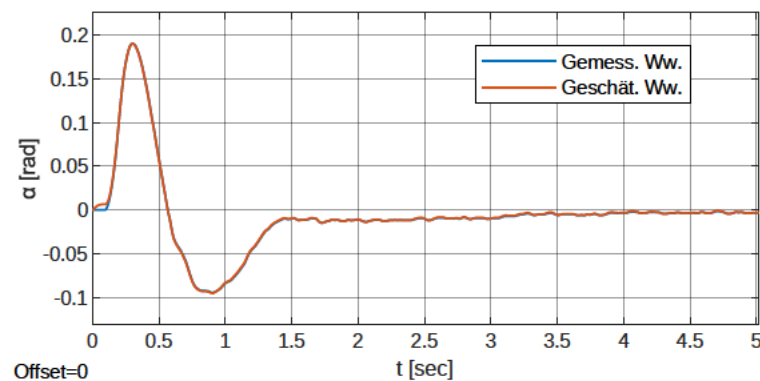


Abbildung 6.3: Wippenwinkel beim Führungssprung mit LQR und Luenberger-Beobachter

Trotz der niedrigen Beobachtereigenwerte existiert zu Beginn der Regelung eine sichtbare Diskrepanz zwischen der gemessenen und geschätzten Wippenwinkel.

Die Schätzung erwartet hier, dass direkt beim Start die Wippe ausgelenkt werden kann, obwohl diese sich laut Messung noch in einer Totzeit befindet.

Das Zustandsraummodell des Ball-Wippe-Systems berücksichtigt dementsprechend zur Berechnung der Winkelgeschwindigkeit der Wippe $\dot{x}_3(t)$ keine Totzeiten. Dies ist nicht nur beim linearisierten, sondern auch beim nichtlinearen Modell der Fall. Das wird durch den Winkel-Verlauf des Simulationsergebnisses des nichtlinearen Modells in Abbildung 4.4 deutlich.

Im nichtlinearen Modell ist $\dot{x}_3(t)$ zu der Zustandsgröße $x_4(t)$ identisch (siehe (3.7)). Somit betrifft die fehlende Totzeit in erster Linie die Berechnung der Winkelbeschleunigung der Wippe $\dot{x}_4(t)$ in (3.8).

6.1.2 Sinus- und Rechteckschwingung

Als nächstes ist die Sinus- und Rechteckschwingung die Führungsgröße. Dieselbe Rückführung (5.2) des Luenberger-Beobachters von zuvor wird hier verwendet. Nur der LQR k^T und das Vorfilter V ändern sich den Dynamikforderungen entsprechend zu den Angaben in (4.13).

Der Verlauf der Ballposition ist hier abgesehen von der Phasenverschiebung sehr ähnlich zur Führungsgröße. Dies ist in Abbildung 6.4 zu sehen.

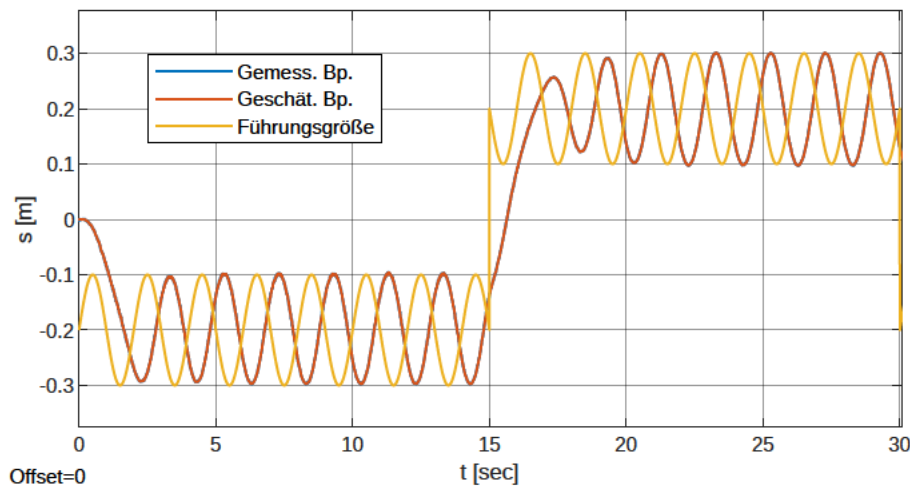


Abbildung 6.4: Ballposition bei der Sinus- und Rechteckschwingung mit LQR und Luenberger-Beobachter

Auch hier überdecken sich die geschätzten und gemessenen Ballpositionswerte. Nach den Einschwingvorgängen werden auf beiden Wippenseiten jeweils eine Periode wie

in Abbildung 6.5 genauer betrachtet. Hier wird deutlich, dass jeweils bei beiden Seiten ein abweichender Offset im Vergleich zur Führungsgröße entsteht. Beide Offsets besitzen geringfügig kleinere absolute Werte als die Rechteckschwingung vorgibt.

In der Simulation (Abbildung 4.5) ist im Gegensatz dazu der absolute Offset etwas größer als die Rechteckschwingung. Dieser Unterschied lässt sich auf die Ungenauigkeiten des Zustandsraummodells vom Ball-Wippe-System zurückführen. Auch die nichtlinearen Zusammenhänge zwischen Messung und realer Ballposition, wie in Kapitel 3.2.4 beschrieben, können die Ursache sein.

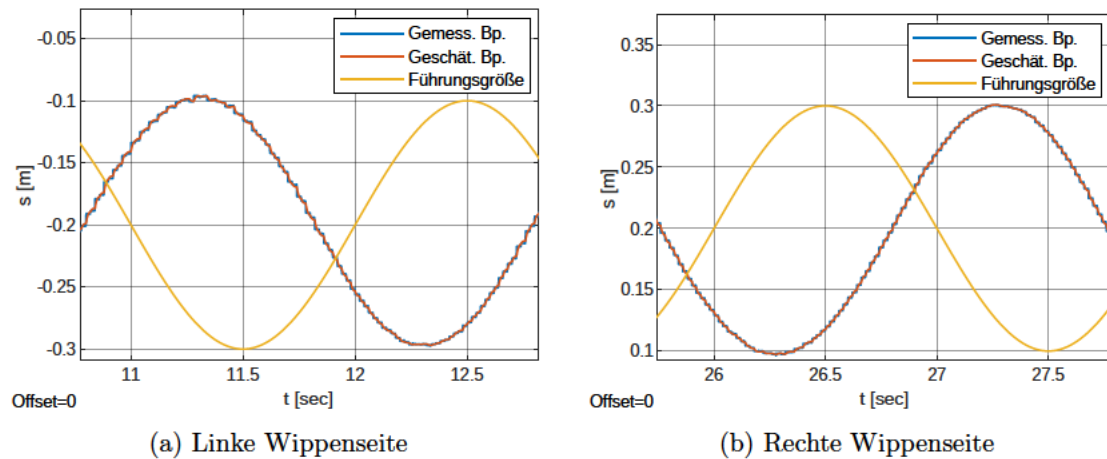


Abbildung 6.5: Zwei Perioden der Ballposition bei der Sinus- und Rechteckschwingung mit LQR und Luenberger-Beobachter

Die Verläufe beider Perioden in der Abbildung 6.5 wirken aufgrund des Rauscheinflusses und der Quantisierung durch die Positionsmessung wie sehr unsaubere Sinusschwingungen. Diese Störeinflüsse betreffen jedoch die Messung und nicht die reale Ballposition. Zwischen der Führungsgröße und der Ballposition herrscht eine Phasenverschiebung, welche $\phi \approx 144^\circ$ beträgt.

Der Winkelverlauf bleibt wie gefordert innerhalb des Bereiches von $x_{3,max/min} \approx \pm 0,2325 \text{ rad}$ (siehe Abbildung 6.6).

Die gemessenen und geschätzten Winkelverläufe überdecken sich hier ebenfalls.

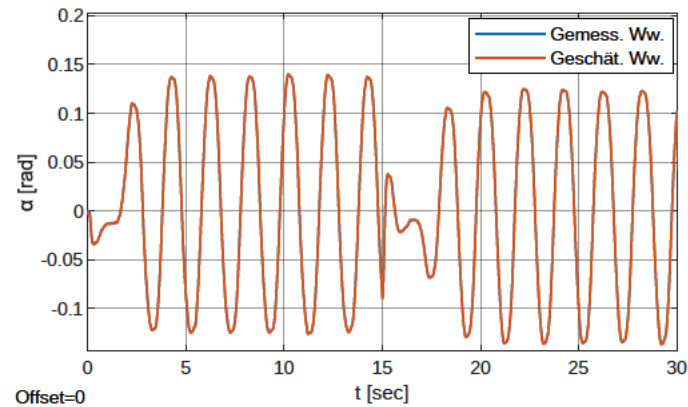


Abbildung 6.6: Winkelverlauf bei der Sinus- und Rechteckschwingung mit LQR und Luenberger-Beobachter

6.2 LQR und reduzierter Beobachter

Die anfängliche Diskrepanz in Abbildung 6.3 und sonstige Abweichungen zwischen Schätzungen und Messungen beim Luenberger-Beobachter können durch den Einsatz eines reduzierten Beobachters beseitigt werden. Hier wird sich vollkommen auf die Messungen der Ballposition und des Wippenwinkels verlassen. Nur die restlichen Zustandsgrößen ($x_2(t)$ und $x_4(t)$) werden geschätzt.

Die direkte Übertragung von akkuraten Messungen kann außerdem zu einer Besserung der Regeldynamik führen.

Im Vergleich zu der Simulink-Struktur beim Luenberger-Beobachter in Abbildung 6.1 ändern sich die Parameter des Beobachters. Eine direkte Übertragung der Messungen $\mathbf{y}(t)$ sowie eine Rücktransformation in die ursprünglichen Zustandsgrößen müssen hinzugefügt werden (siehe Wirkungsplan in 2.6).

Dadurch entsteht das Simulink-Modell in Abbildung 6.7.

6.2.1 Führungssprung

Die Beobachtermatrizen ((5.7, (5.8) und (5.9)) und die Reglergrößen (4.16) werden in das Simulink-Modell eingesetzt.

Dadurch entsteht beim Führungssprung der Ballpositions-Verlauf in Abbildung 6.8.

Die Kugel erreicht ohne Überschwinger innerhalb von ca. 1,138 Sekunden das Toleranzband.

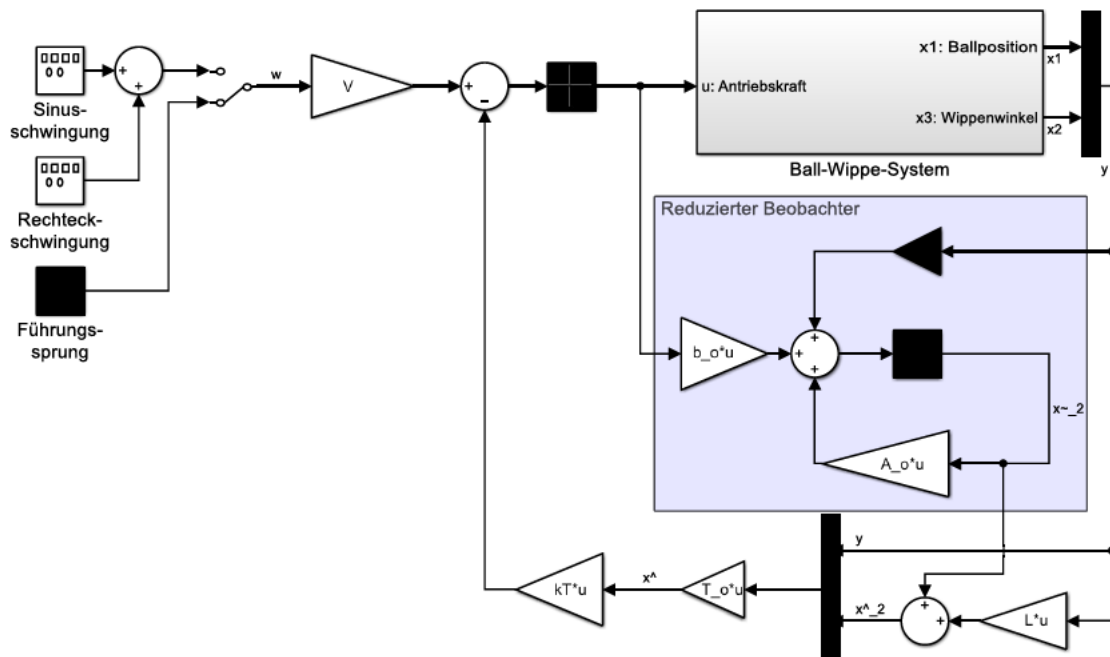


Abbildung 6.7: Echtzeitmodell mit reduziertem Beobachter, LQR und Vorfilter

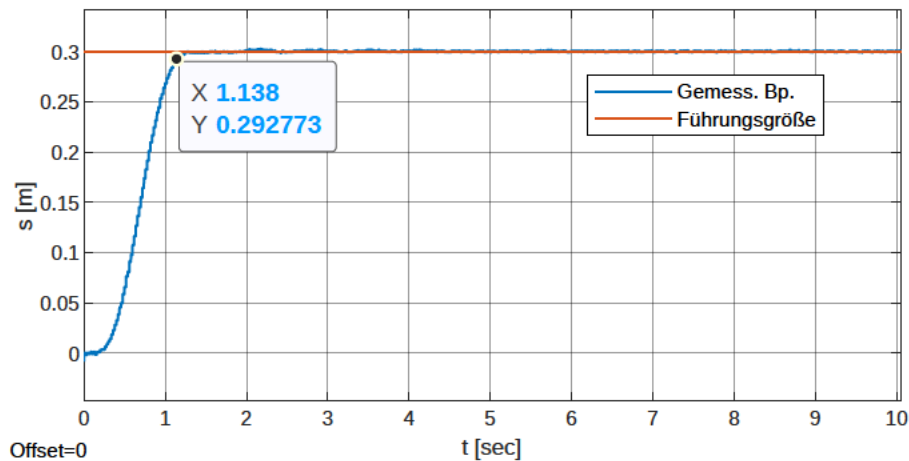


Abbildung 6.8: Sprungantwort der Ballposition mit LQR und reduziertem Beobachter

Die Messung der Ballposition wird über die vorhandenen Pixel des Bildsensors vom Kameramodul vollzogen (siehe Erläuterung in Kapitel 3.2.4) und somit quantisiert. Deshalb kann eine genauere Festlegung zu welchem Zeitpunkt das Toleranzband erreicht wird ($0,291\text{ m}$), in der Messung nicht bewerkstelligt werden.

Dennoch kann im Vergleich zu dem Ergebnis beim Luenberger-Beobachter (Abbildung

6.2) von einem fast 50% geringeren Zeitaufwand zur Erfüllung der Sollwertfolge ausgegangen werden. Der reduzierte Beobachter ermöglicht somit wie erwartet eine bessere Regeldynamik.

Die festgelegte Begrenzung des Wippenwinkels wird nicht über- bzw. unterschritten (siehe Abbildung 6.9).

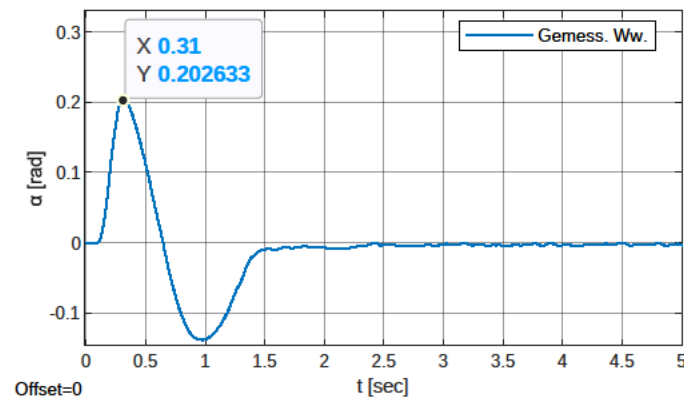


Abbildung 6.9: Wippenwinkel beim Führungssprung mit LQR und reduziertem Beobachter

Der Nachteil der sich aus der Anwendung des reduzierten Beobachters ergibt, ist der hohe Rauscheinfluss an der Stellgröße $u(t)$. Dies ist in Abbildung 6.10 zu sehen.

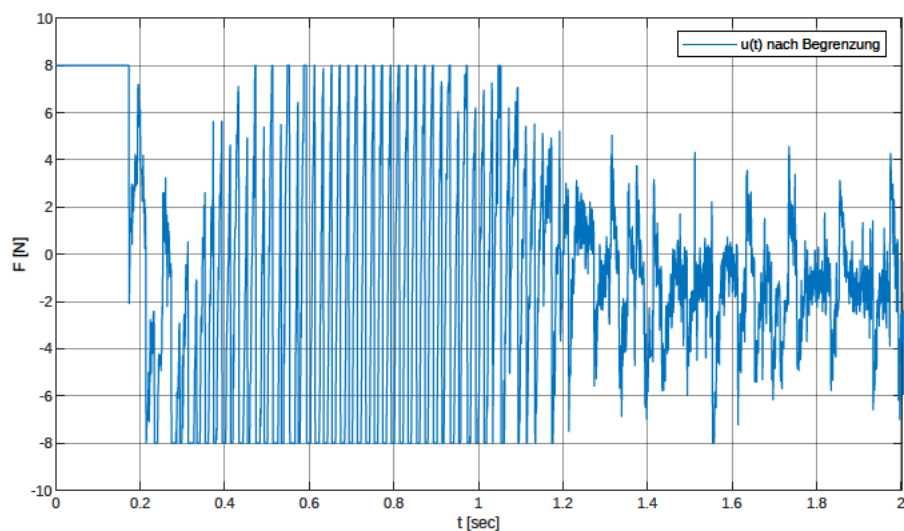


Abbildung 6.10: Stellgrößenverlauf beim Führungssprung mit LQR und reduziertem Beobachter

Ein besonders starkes und hochfrequentes Rauschen ergibt sich, wenn die Kugel in Bewegung ist. Dort wird dauerhaft die Begrenzung von $\pm 8\text{ N}$ ausgenutzt. Auch im Stillstand setzt sich ein ausgeprägtes, hochfrequentes Rauschen durch. Dies belastet den Motor und die Mechanik der Anlage.

6.2.2 Sinus- und Rechteckschwingung

Die Führungsgröße ist nun die Sinus- und Rechteckschwingung.

Die Zustandsrückführung sowie das Vorfilter werden gemäß (4.19) angepasst.

Das Verhalten der Ballposition ist in Abbildung 6.11 illustriert.

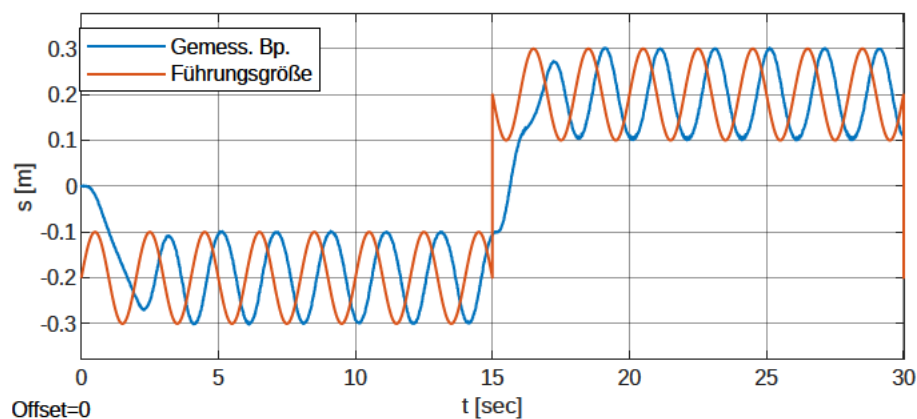


Abbildung 6.11: Ballposition bei der Sinus- und Rechteckschwingung mit LQR und reduziertem Beobachter

Auch hier werden zwei Perioden nach den Einschwingvorgängen genauer betrachtet (Abbildung 6.12).

Die Phasenverschiebung zwischen Führungsgröße und Ballposition beträgt hier $\phi \approx 118^\circ$ und hat sich im Vergleich zur Anwendung des Luenberger-Beobachters um 26° verringert. Dies ist aufgrund der höheren Dynamik zu erwarten.

Auf der rechten Wippenseite in Abbildung 6.12b ergibt sich im unteren Bereich der Amplitude ein stärkeres Rauschen. Dies beschränkt sich nicht nur auf die Messung, sondern beeinflusst auch die reale Ballposition. Diese Tatsache wird unter Betrachtung des Wippenwinkels zu diesen Zeitbereichen eindeutig (siehe Abbildung 6.13b).

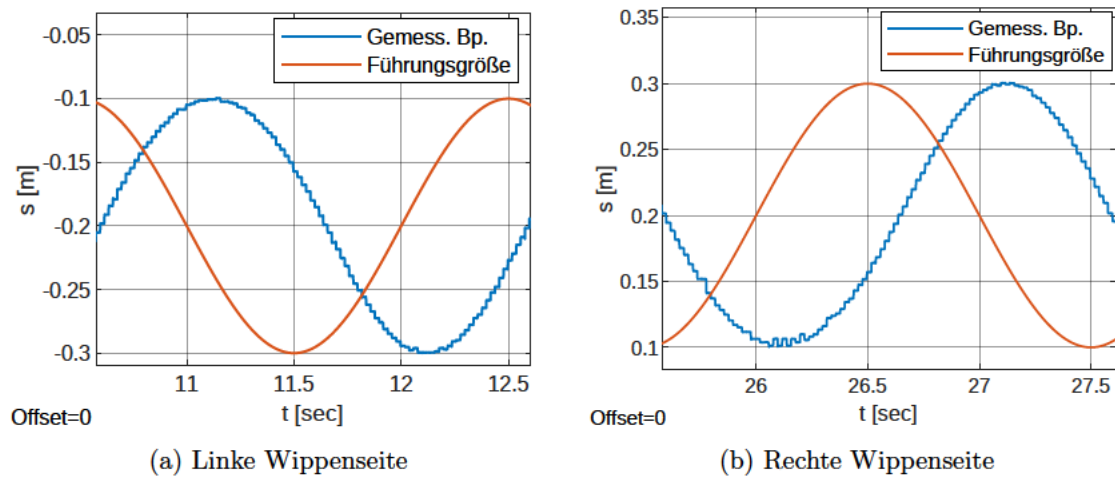


Abbildung 6.12: Zwei Perioden der Ballposition bei der Sinus- und Rechteckschwingung mit LQR und reduziertem Beobachter

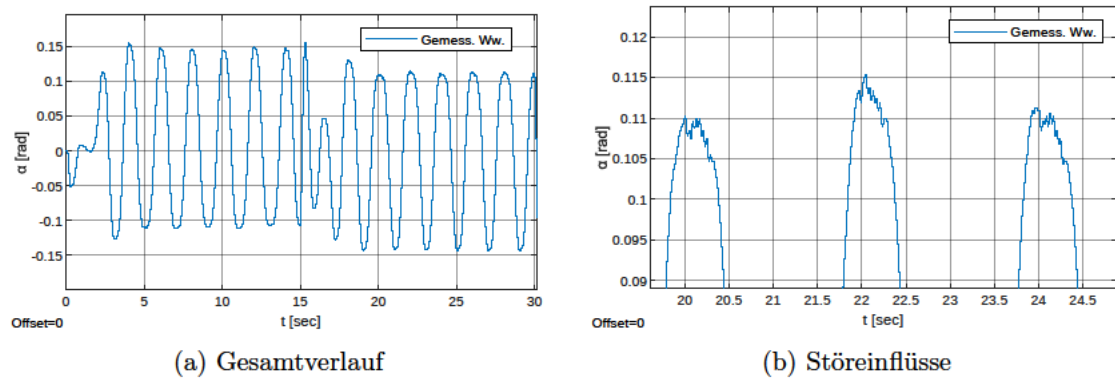


Abbildung 6.13: Winkelverlauf bei der Sinus- und Rechteckschwingung mit LQR und reduziertem Beobachter

Die Ursache kann eine ungleichmäßige Beleuchtung sein, sodass sich in der Nähe der Ballposition von $0,1\text{ m}$ ein stärkeres Messrauschen ungefiltert auf die Stellgröße durchsetzt. Dadurch schaukelt die Wippe hochfrequent.

Im Vergleich zur Anwendung des Luenberger-Beobachters wird somit eine weniger exakte Sinusschwingung erzeugt.

Der Wippenwinkel bleibt, wie in Abbildung 6.13a zu sehen, innerhalb der geforderten Begrenzung.

6.3 LQG-Regler

In Kapitel 6.1 ist deutlich geworden, dass das Zustandsraummodell des Ball-Wippe-Systems für die Berechnung des Wippenwinkels keine Totzeiten miteinbezieht. Dies ist bei der Berechnung der Ballposition nicht der Fall (siehe Simulationsergebnis in Abbildung 4.3).

Mit dem reduzierten Beobachter kann dies behoben werden, jedoch wird dazu die Stellgröße mit starken hochfrequenten Rauscheinflüssen belastet. Außerdem wird bei der Sinus- und Rechteckschwingung als Führungsgröße eine unsaubere Sinusschwingung der Ballposition ausgelöst.

Das linearisierte Kalman-Filter kann die Nachteile der vorangegangenen Beobachter umgehen. Die unterschiedlichen Varianzen der Diagonalmatrizen sorgen für unterschiedliche Gewichtungen der Messungen und der Prozesse des Modells. Dadurch wirkt sich das Messrauschen an der Ballposition vergleichsweise schwächer auf die Stellgröße aus. Gleichzeitig werden die Diskrepanzen zwischen gemessenem und geschätztem Wippenwinkel trotz der Filterung über den Beobachter minimiert.

Die Simulink-Struktur des LQR mit linearisiertem Kalman-Filter (LQG-Regler) ist mit dem Modell des Regelkreises mit dem Luenberger-Beobachter in Abbildung 6.1 identisch.

6.3.1 Führungssprung

Beim Führungssprung werden die Parameter des Reglers und des Kalman-Filters in (4.22) und (5.17) in das Simulink-Modell eingesetzt.

Somit ergibt sich das in Abbildung 6.14 dargestellte Verhalten der Ballposition.

Die Kugel erreicht innerhalb von ungefähr 1,841 Sekunden das Toleranzband. Die Dynamik der Sollwertfolge befindet sich somit zwischen den vorangegangenen Anwendungen der Beobachter. Dies ist zu erwarten, da mit dem Kalman-Filter immer noch ein Abgleich zwischen dem inakkuraten Zustandsraummodell und den akkurateren Messungen stattfindet. Dieser Abgleich ist jedoch im Vergleich zu der Anwendung mit dem Luenberger-Beobachter optimierter über die Diagonalmatrizen angepasst.

Der Wippenwinkel bleibt im eingeschränkten Bereich (siehe Abbildung 6.15).

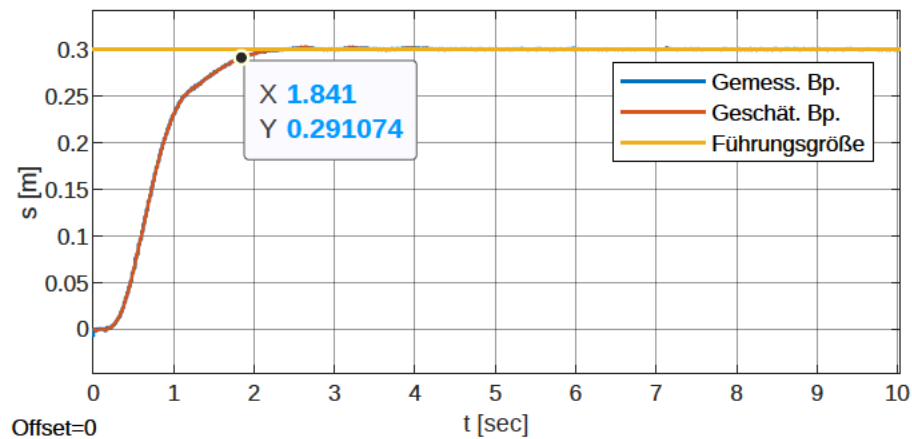


Abbildung 6.14: Sprungantwort der Ballposition mit LQG-Regler

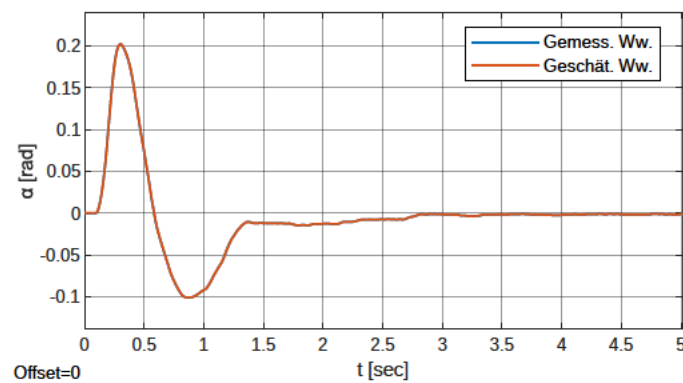


Abbildung 6.15: Wippenwinkel beim Führungssprung mit LQG-Regler

6.3.2 Sinus- und Rechteckschwingung

Bei der Sinus- und Rechteckschwingung als Führungsgröße werden die vorigen Reglerwerte im Simulink-Modell mit den Werten in (4.25) ersetzt.

Das resultierende Verhalten der Ballposition ist in Abbildung 6.16 visualisiert.

Jeweils eine Sinusperiode auf beiden Wippenseiten wird in Abbildung 6.17 untersucht.

Zwischen der Führungsgröße und dem Verlauf der Ballposition existiert eine Phasenverschiebung von $\phi = 126^\circ$. Dies ist geringer als beim Luenberger-Beobachter, aber größer als beim reduzierten Beobachter. Da die Regeldynamik des LQG-Reglers sich zwischen der beiden Beobachter-Anwendungen befindet, ist dies auch zu erwarten.

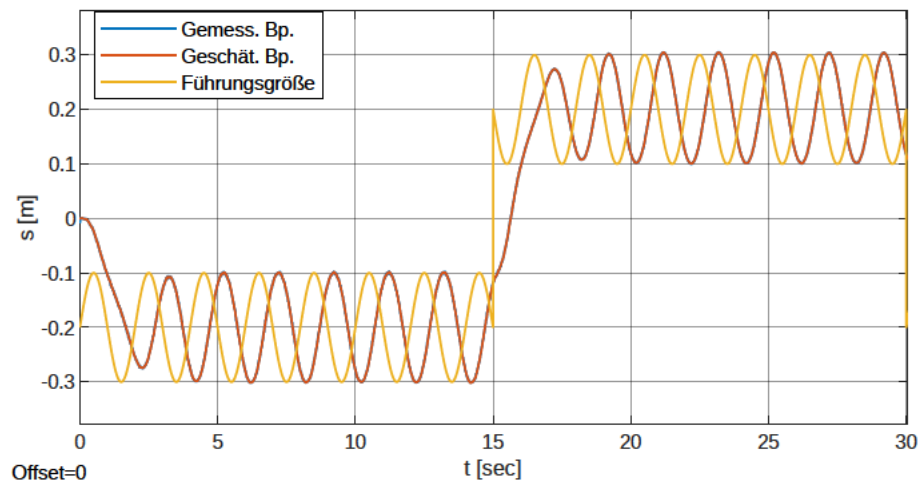


Abbildung 6.16: Ballposition bei der Sinus- und Rechteckschwingung mit LQG-Regler

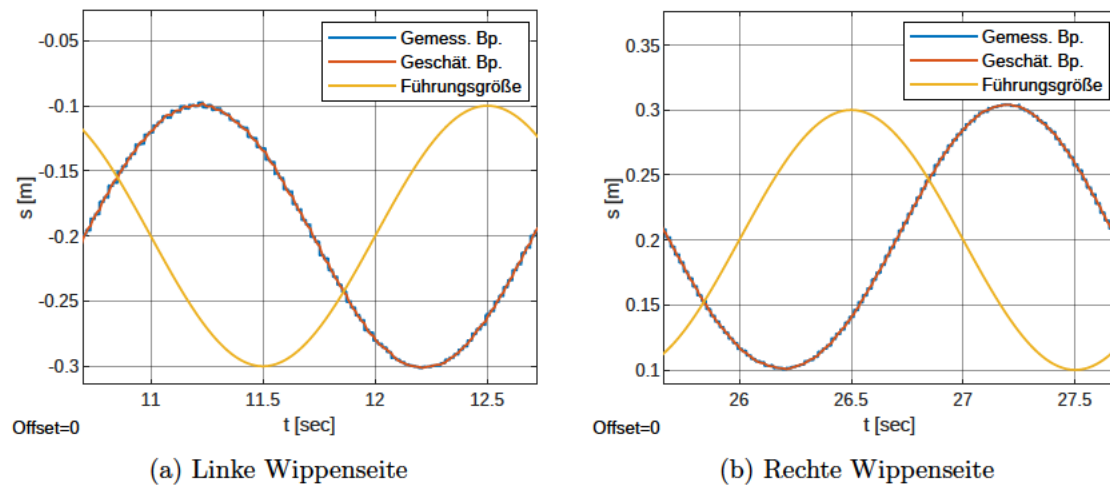


Abbildung 6.17: Zwei Perioden der Ballposition bei der Sinus- und Rechteckschwingung mit LQG-Regler

Der Wippenwinkel verläuft innerhalb der vorgeschriebenen Begrenzung. Dies ist in Abbildung 6.18 erkennbar.

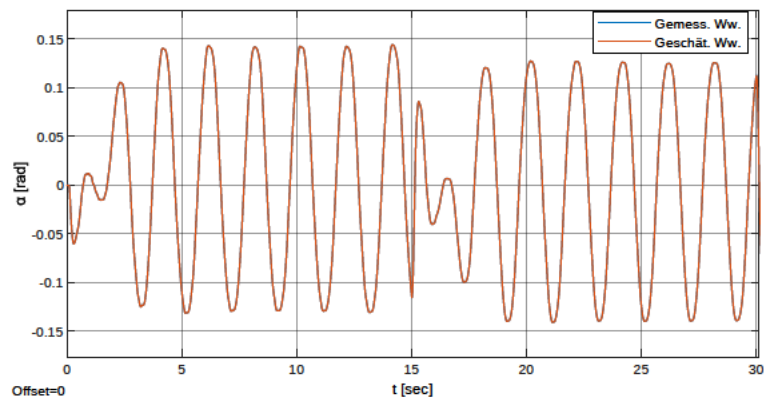


Abbildung 6.18: Winkelverlauf bei der Sinus- und Rechteckschwingung mit LQG-Regler

6.4 PIZ und linearisiertes Kalman-Filter

Ein Aspekt welcher in den vorigen Unterkapiteln nicht adressiert wird, ist die in Kapitel 3.2.2 erläuterte konstante Störgröße. Diese ergibt sich aufgrund eines Anfangswinkels der Wippe ($x_3(t_0)$), welche nicht exakt 0° ist.

Durch „Try-and-Error“ wurde in den vorigen Messungen der Anfangswinkels dem gewünschten 0° angenähert.

In Abbildung 6.19 ist das mögliche Ausmaß der konstanten Störgröße am Beispiel der Ausführung mit dem Luenberger-Beobachter zu erkennen.

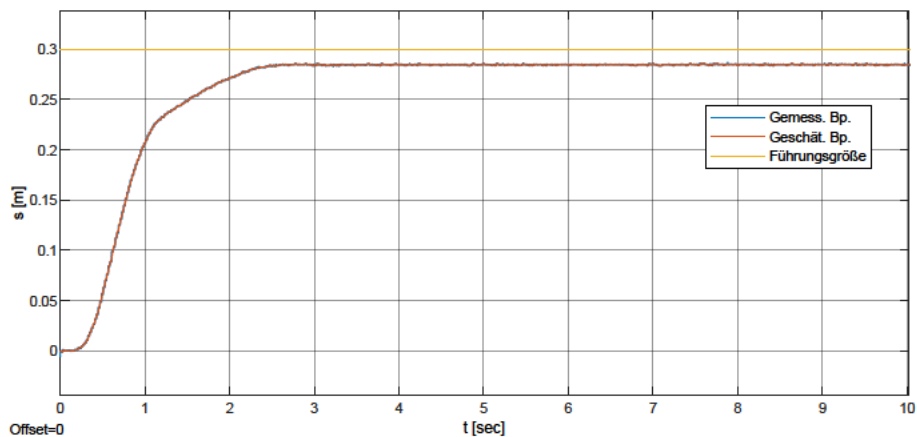


Abbildung 6.19: Einfluss der abweichenden Anfangsausrichtung des Wippenwinkels am LQR mit Luenberger-Beobachter

Die Kugel befindet sich hier außerhalb des Toleranzbandes. Die Dynamikforderung sowie Sollwertfolge werden somit nicht erfüllt.

Diese Problematik betrifft alle zuvor behandelten Regelkreise. Bei der Sinus- und Rechteckschwingung ergibt sich durch die konstante Störgröße ein dauerhafter Offset, welcher signifikant von der Rechteckschwingung abweicht.

Mit dem PIZ-Regler wird die konstante Störgröße automatisch abgeglichen, sodass der Anfangswinkel nicht mehr durch „Try-and-Error“ angepasst werden muss.

Die Simulink-Struktur des PIZ-Regelkreises entspricht dem Wirkungsplan in Abbildung 2.3. Die Ausnahme ist die Verwendung eines Kalman-Filters zur Zustandsschätzung. Dadurch entsteht das Modell in Abbildung 6.20.

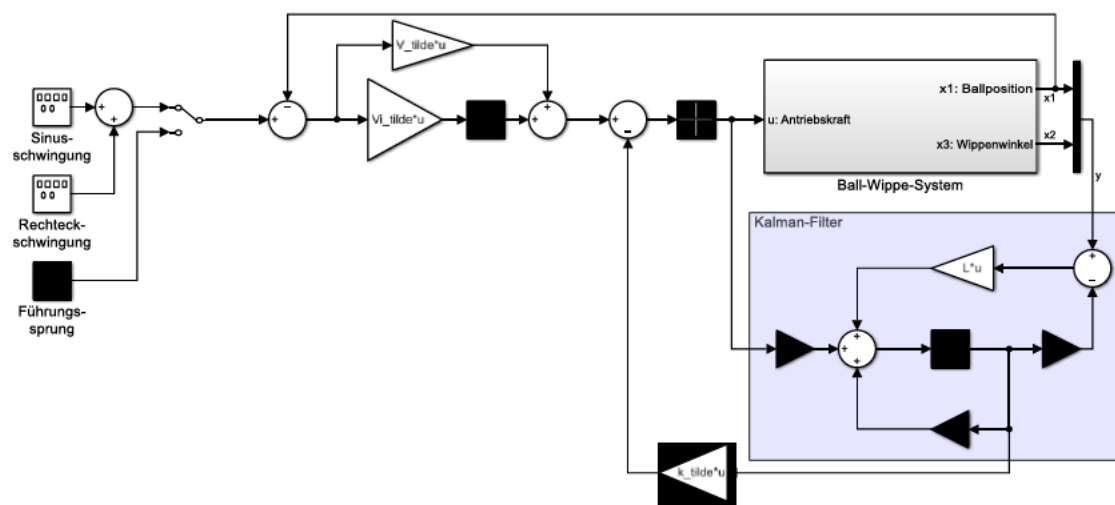


Abbildung 6.20: Echtzeitmodell mit Kalman-Filter und PIZ-Regler

6.4.1 Führungssprung

Im Simulink-Modell werden die Parameter des PIZ-Reglers in (4.29) und die Rückführung des linearisierten Kalman-Filters in (5.17) verwendet.

Die Sprungantwort der Ballposition ist in Abbildung 6.21 dargestellt.

Die Stahlkugel ist innerhalb von ungefähr 1,581 Sekunden im Toleranzband. Dies ist schneller als der LQG-Regler im vorigen Abschnitt. Mit dem PIZ-Regler wird somit bei selbigen Beobachter eine dynamischere Sollwertfolge erzielt.

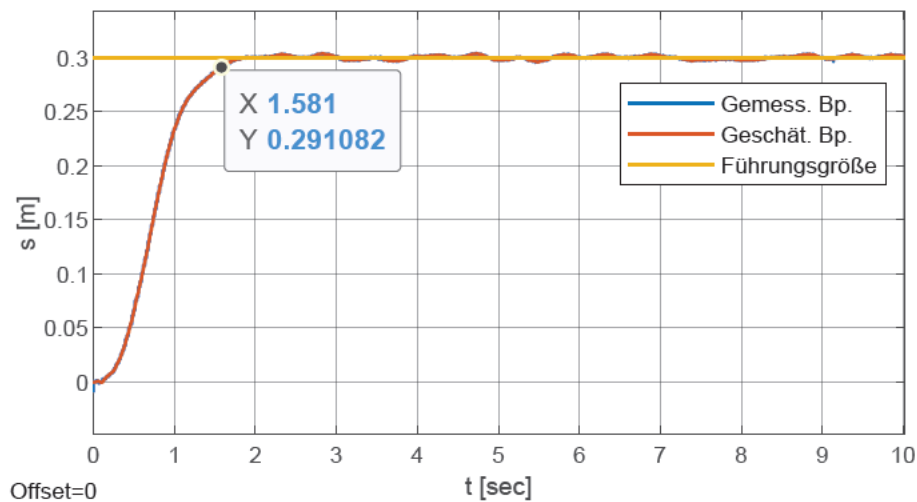


Abbildung 6.21: Sprungantwort der Ballposition mit PIZ-Regler und linearisiertem Kalman-Filter

Eine weitere Charakteristik ist das permanente Schwingen um den Sollwert, welches in der Abbildung erkennbar ist. Der PIZ-Regler versucht hier dauerhaft die Rauscheinflüsse zu kompensieren. Die Kugel verlässt dabei jedoch nicht das Toleranzband.

Trotz der schnelleren Dynamik wird die Winkelbegrenzung der Wippe im Vergleich zum LQG-Regler (Abbildung 6.16) weit unterschritten. Dies ist in der Abbildung 6.22 deutlich.

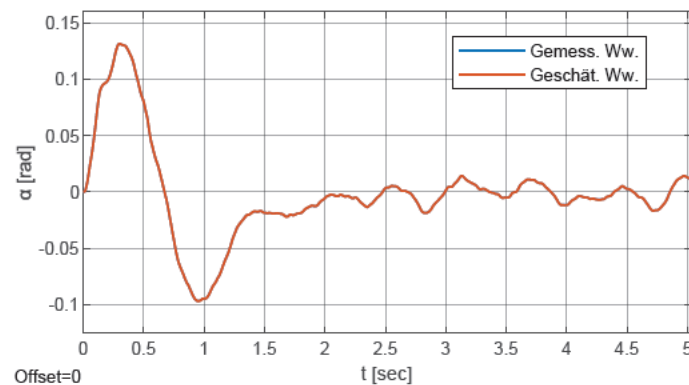


Abbildung 6.22: Wippenwinkel beim Führungssprung mit PIZ-Regler und linearisiertem Kalman-Filter

6.4.2 Sinus- und Rechteckschwingung

Die Sinus- und Rechteckschwingung nimmt als nächstes die Führungsgröße ein. Die Parameter des PIZ-Reglers werden dementsprechend an die Werte in (4.30) angepasst. Damit ergibt sich das Regelverhalten der Ballposition in Abbildung 6.23.

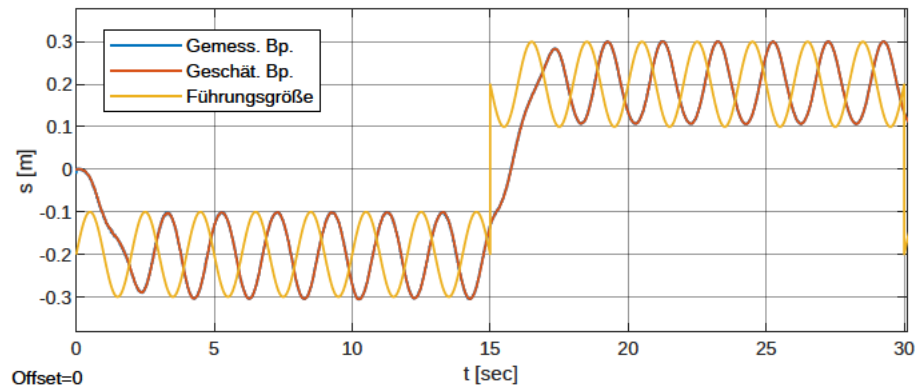


Abbildung 6.23: Winkelverlauf bei der Sinus- und Rechteckschwingung mit PIZ-Regler und linearisiertem Kalman-Filter

In Abbildung 6.24 werden zwei Perioden nach den Einschwingvorgängen auf beiden Wippenseiten betrachtet.

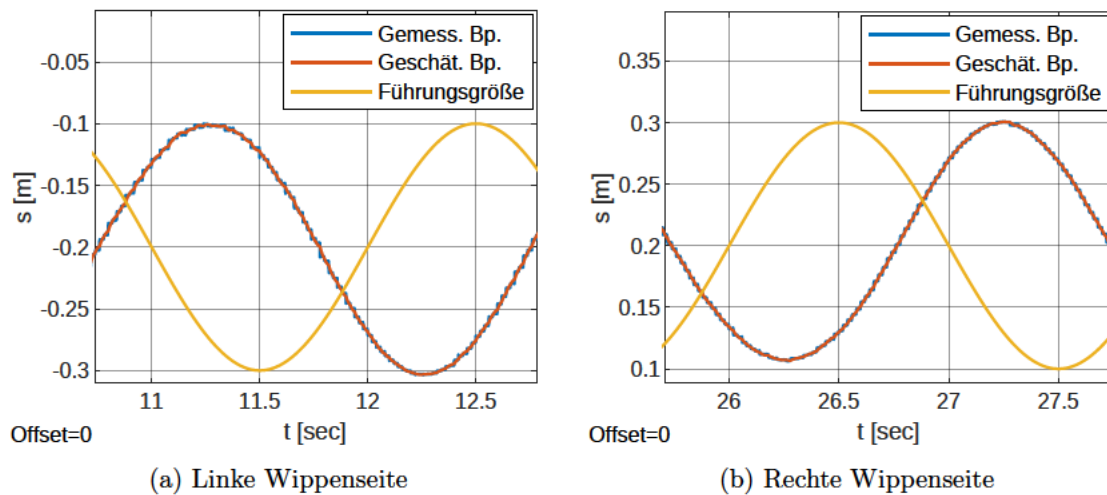


Abbildung 6.24: Zwei Perioden der Ballposition bei der Sinus- und Rechteckschwingung mit PIZ-Regler und linearisiertem Kalman-Filter

Die Phasenverschiebung zur Führungsgröße beträgt hier $\phi \approx 132^\circ$ und hat sich somit im Vergleich zu der Anwendung mit dem LQG-Regler vergrößert. Das liegt vermutlich an

den I-Anteil des PI-Reglers. Dieser benötigt durch die ständigen Vorzeichenwechsel der Steigung der Führungsgröße mehr Zeit, um die Stellgröße dementsprechend anzupassen. Eine weitere Ursache kann die vergleichsweise hohe Gewichtung des Skalars R in (4.30) sein, was zu einer trägeren Regelung und somit zu einer höheren Phasenverschiebung führt.

Der eingeschränkte Bereich des Wippenwinkels wird wie in Abbildung 6.25 sichtbar, nicht überschritten.

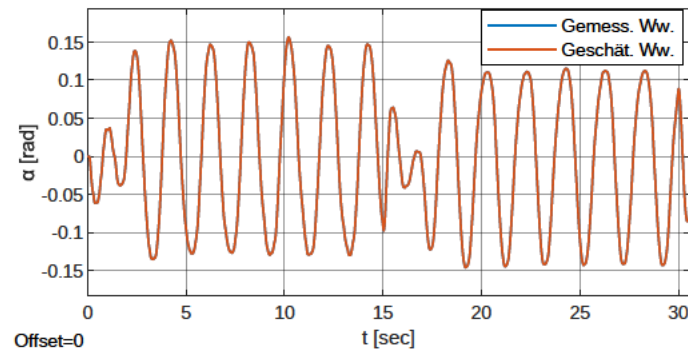


Abbildung 6.25: Winkelverlauf bei der Sinus- und Rechteckschwingung mit PIZ-Regler und linearisiertem Kalman-Filter

6.5 Vergleich der Implementierungen

Alle behandelten Regelkreise erfüllen die Forderung nach Stabilität.

Die Dynamikforderungen und Sollwertfolge werden ebenfalls erfüllt, sofern der Anfangswinkel $x_3(t_0) = 0^\circ$ näherungsweise gewährleistet werden kann. Damit wird auch die Forderung nach Robustheit realisiert, da trotz der Unsicherheiten beim Zustandsraummodell die restlichen Forderungen erfüllt werden.

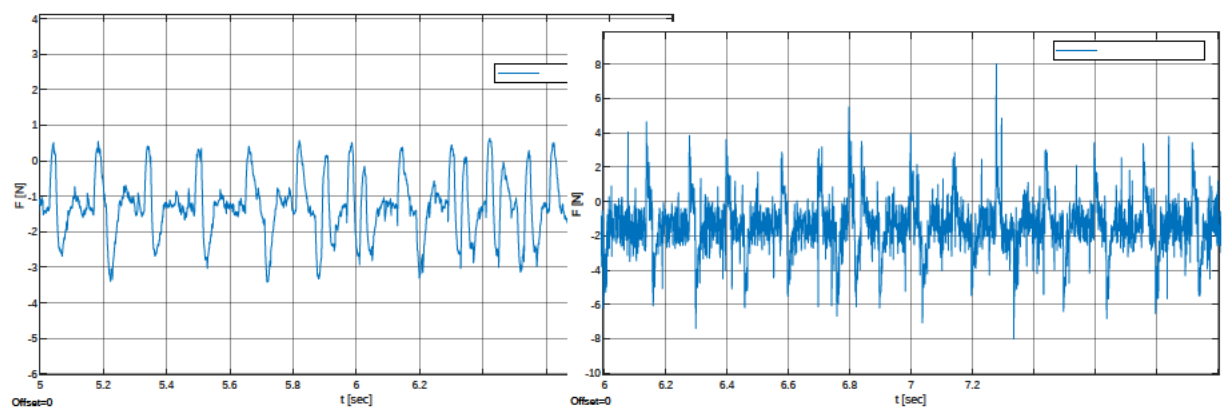
Eine Ausnahme bildet der Regelkreis mit reduziertem Beobachter. Dieser überträgt verstärkte Rauscheinflüsse der Ballpositionsmessung auf die Stellgröße, sodass der Ball keine saubere Sinusschwingung durchfährt. Die Dynamikforderung wird somit nicht verwirklicht.

Die höchste Dynamik besitzt der Regelkreis mit reduziertem Beobachter. Hier wird beim Führungssprung der Sollwert am schnellsten erreicht. Auch die Phasendifferenz zwischen

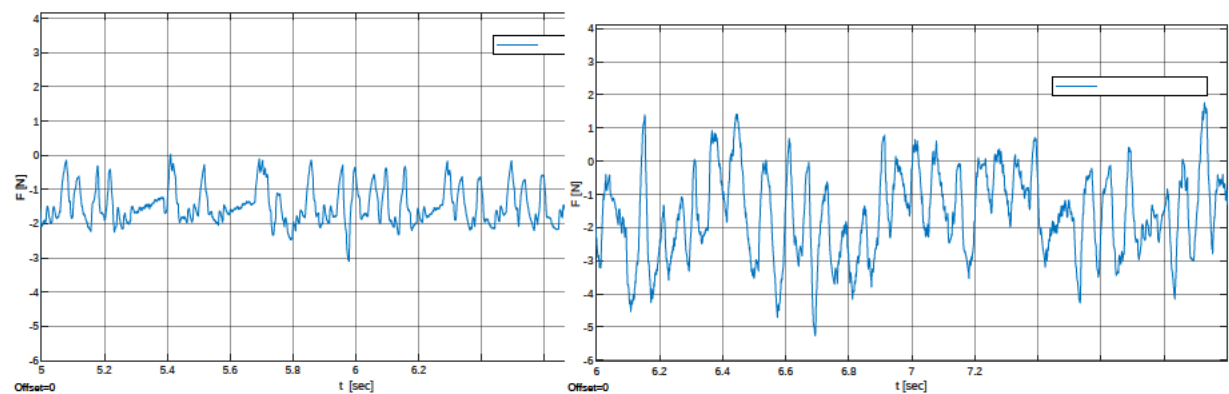
Führungsgröße und Ballpositionsverlauf ist bei der Sinus- und Rechteckschwingung am geringsten.

Ausgeprägte hochfrequente Schwingungen an der Stellgröße belasten den Motor und die Mechanik.

Zum Vergleich sind in Abbildung 6.26 die Stellgrößenverläufe aller Regelkreise aufgezeichnet. Diese Messungen sind jeweils ca. 1,2 Sekunden lange Ausschnitte im stationären Bereich der Sprungantworten aller behandelten Regelkreise. Hier ist zu beachten, dass sich die Skalierung der y-Achse beim reduzierten Beobachter aufgrund des Ausmaßes des Stellgrößenverlaufs von den anderen Diagrammen unterscheidet.



(a) Ausführung mit Luenberger-Beobachter (b) Ausführung mit reduziertem Beobachter



(c) Ausführung mit LQG-Regler (d) Ausführung mit PIZ-Regler

Abbildung 6.26: Stellgrößenverläufe der Regelkreise im stationären Bereich der Sprungantworten

Die Belastung hochfrequenter Schwingungsanteile an der Stellgröße ist bei der Ausführung mit dem reduzierten Beobachter in Abbildung 6.26b am stärksten.

Beim LQG-Regler (Abbildung 6.26c) sind diese am geringsten. Der Regelkreis mit dem PIZ-Regler in Abbildung 6.26d besitzt trotz desselben Kalman-Filters wie beim LQG-Regler hochfrequenter Schwingungsanteile und ein größeres Ausmaß niederfrequenter Schwingungen. Das liegt einerseits daran, dass durch den PI-Regler die Messung der Ballposition zusätzlich auf den Stellgrößeneingang geschaltet wird. Andererseits schwingt die Kugel, wie in Kapitel 6.4.1 erläutert, durch die Regelung um den stationären Sollwert. Dies wirkt sich niederfrequent auf die Stellgröße aus.

Insgesamt werden nur beim reduzierten Beobachter der Motor und die Mechanik stark belastet. Die restlichen Regelkreise können diesbezüglich bedenkenlos eingesetzt werden.

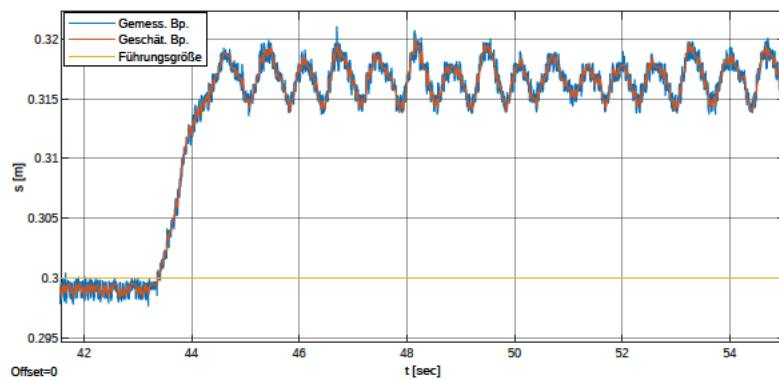
6.5.1 Kompensation konstanter Störgrößen und Robustheit

Als nächstes werden die Vorteile des PIZ-Regelkreises genauer untersucht. Diese Vorteile sind die Kompensation konstanter Störgrößen und die größere Robustheit. Dazu wird zum Vergleich der LQG-Regelkreis aufgrund desselben Beobachters herangezogen.

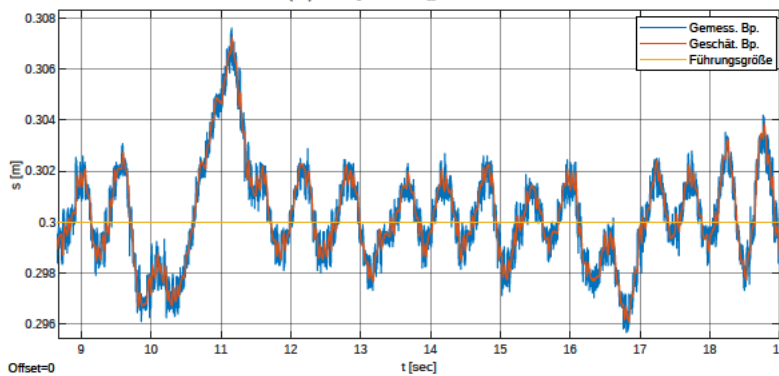
Als erstes wird nach Erfüllung der Sollwertfolge beim Führungssprung das rechte Wippenende beschwert. Hierzu wird ein 146 g schweres Stück Aluprofil auf das rechte Ende der Wippe gelegt. Dies erzeugt eine konstante Störgröße, welche sich auf das Ball-Wippe-System auswirkt. Die Ergebnisse der Ballpositionen sind in Abbildung 6.27 dargestellt.

Die Ballposition beim LQG-Regler in Abbildung 6.27a verlässt nach der Beschwerung das Toleranzband und fängt an zu schwingen. Diese Schwingung sollte prinzipiell nicht passieren, wird jedoch aufgrund von dortigen Unebenheiten der Schiene verursacht.

Beim PIZ-Regler entsteht zum Zeitpunkt der Beschwerung ($t \approx 10,5 \text{ s}$) in Abbildung 6.27b eine kurzzeitige Erhöhung der Ballposition. Der PI-Anteil des PIZ-Reglers sorgt hierbei für eine Kompensation der Störgröße. Das Toleranzband wird dadurch nicht verlassen.



(a) LQG-Regelkreis

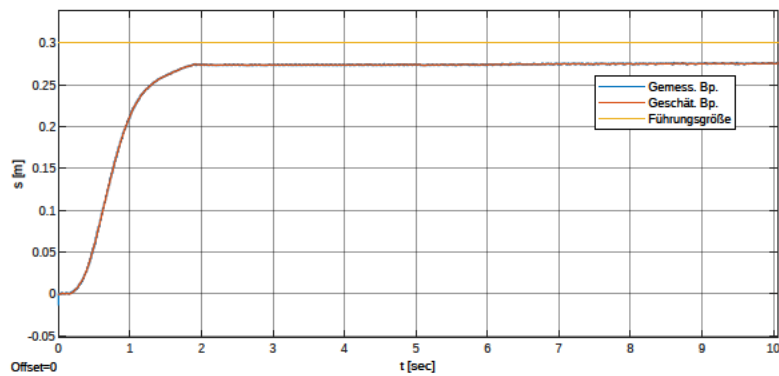


(b) PIZ-Regelkreis

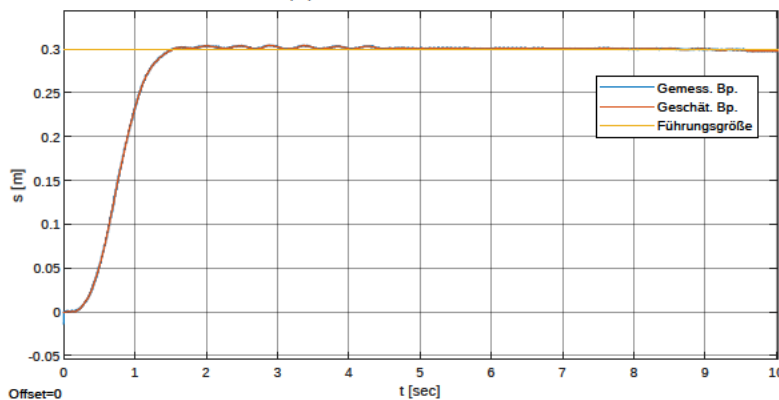
Abbildung 6.27: Regelverhalten an der Ballposition durch Beschwerung der rechten Wippen-
penseite

Als nächstes werden die Robustheiten der beiden Regelkreise getestet. Dazu wird anstelle der Stahlkugel ein Squashball verwendet. Die Masse des Balles verringert sich somit von $m = 0,27 \text{ kg}$ auf $m = 0,022 \text{ kg}$. Diese Änderung wird zur Prüfung der Robustheiten nicht in das Zustandsraummodell übernommen.

Es ergeben sich die Sprungantworten in Abbildung 6.28.



(a) LQG-Regelkreis



(b) PIZ-Regelkreis

Abbildung 6.28: Regelverhalten an der Ballposition durch Einsatz des Squashballs

Der LQG-Regelkreis kann in Abbildung 6.28a nicht die Sollwertfolge sicherstellen. Die Änderung der Masse des Balles führt zu einer großen Ungenauigkeit des Zustandsraummodells. Die Robustheit, die der LQR bietet (siehe Kapitel 2.2.2), reicht somit nicht aus. Der PIZ-Regelkreis bewahrt dahingegen in Abbildung 6.28b die Sollwertfolge und ist damit robuster.

Eine weitere Eigenschaft die sich hier bildet, ist ein deutlich abgeschwächtes Schwingen des Balles um den Sollwert (siehe zum Vergleich Abbildung 6.21). Dies liegt nicht an der Gewichtsänderung des Balles. Der Squashball weist eine matt-schwarze Oberfläche auf. Wie in Kapitel 3.2.4 erläutert, basiert die Messung der Ballposition auf Kontrast. Dadurch wird das Messrauschen über das Kameramodul im Gegensatz zum Einsatz der silbernen, reflektierenden Stahlkugel minimiert.

7 Fazit

7.1 Zusammenfassung

Das Ball-Wippe-System ist ein instabiles, nichtlineares SIMO-System. Die Position einer Stahlkugel wird hier über die Winkelstellung der Wippe gesteuert.

Das Ball-Wippe-System besitzt einen DC-Servomotor zur Einstellung der Stellgröße $u(t)$. Ein Kameramodul und ein Inkrementalgeber werden für die Messungen von zwei Zustandsgrößen verwendet. Diese sind die Ballposition $x_1(t)$ und der Wippenwinkel $x_3(t)$. Die restlichen Zustandsgrößen (Geschwindigkeit der Kugel $x_2(t)$ und Winkelgeschwindigkeit der Wippe $x_4(t)$) wurden mit einem Beobachter geschätzt.

Das Zustandsraummodell des Systems wurde linearisiert und mithilfe des LQ-Verfahrens wurde eine Zustandsrückführung erstellt. Damit wurde das System stabilisiert und geregelt.

Hierbei ergaben sich je nach Beobachter unterschiedliche Möglichkeiten zur Einstellung der Regeldynamik über den LQ-Regler. Getestet und verglichen wurden jeweils der Luenberger-Beobachter, der reduzierte Beobachter und das linearisierte Kalman-Filter. Der LQR wurde dann durch die PIZ-Regelung erweitert. Damit wurden konstante Störgrößen kompensiert und eine hohe Robustheit erzielt.

Die Führungsgrößen waren jeweils ein Führungssprung von 0 m auf $0,3\text{ m}$ und eine Sinusschwingung mit der Amplitude von $0,1\text{ m}$, welche mit einer Rechteckschwingung mit der Amplitude von $0,2\text{ m}$ überlagert wurde.

Mit allen behandelten Regelkreisen konnten gute Ergebnisse erlangt werden. Nur die Ausführung mit dem reduzierten Beobachter erfüllte nicht die Dynamikforderungen für die Sinus- und Rechteckschwingung. Die Kompensation konstanter Störgrößen und eine hohe Robustheit konnten wie erwartet nur mit dem PIZ-Regelkreis erfüllt werden.

Das Zustandsraummodell des Ball-Wippe-Systems wurde als ungenau determiniert. Dies betraf in erster Linie die Berechnung der Winkelbeschleunigung der Wippe $\dot{x}_4(t)$.

7.2 Ausblick

Mit den behandelten Methoden und dem Modell des Ball-Wippe-Systems konnten ausreichende Regelungen vollzogen werden.

Dennoch existieren Verbesserungsmöglichkeiten, die zu einer Besserung des Regelverhaltens oder zu akkurateren Ergebnissen führen können. Diese werden im Folgenden aufgelistet:

- **Anpassung des Zustandsraummodells:**

Wie in Kapitel 6.1.1 beschrieben, fehlt zur Berechnung der Winkelbeschleunigung $\dot{x}_4(t)$ eine Totzeit. Diese Totzeit entsteht vermutlich durch die Elastizität des Zahnriemens, welcher die Antriebskraft an der Motorwelle auf die Wippe überträgt. Damit ergibt sich eine Trägheit zwischen der Stellgröße und der damit verbundenen Winkeländerung, welches sich als eine Verzögerung bzw. Totzeit ausdrückt.

Eine akkurate Berechnung des Wippenwinkels könnte sich ergeben, wenn die Totzeit untersucht und bei der Berechnung von $\dot{x}_4(t)$ miteinbezogen wird.

Existieren durch die Einbeziehung der Totzeit kaum Unterschiede zwischen dem nichtlinearen Zustandsraummodell und dem realen System, ergibt sich die Möglichkeit einen Optimierungsalgorithmus für den LQR-Entwurf zu benutzen.

Ein Beispiel ist im Forschungsartikel [Wang u. a., 2014]. Hier wurde zur Erstellung des LQR der „Improved Artificial Bee Colony“-Algorithmus verwendet.

- **Anpassungen des Kamerabildes:**

Die Bewertung wie sauber die Kugel in Kapitel 6 die Sinus- und Rechteckschwung abfährt, geschah auf Basis der Messungen des Kameramoduls. Dies ist aber im Vergleich zur realen Ballposition nicht ganz richtig.

Wie in Kapitel 3.2.4 erläutert, beeinflussen der Wippenwinkel und die Verzeichnung des Kamerabildes die Ballpositionsmessung. Dies schmälert die Glaubwürdigkeit der Messergebnisse.

Deshalb sollte das Kameramaterial entzerrt werden. Ansätze dazu liefert das Buch [Luhmann und Maas, 2017]. Dann kann zur Auswertung der Ballposition der Wippenwinkel berücksichtigt werden. Dies sollte durch simple geometrische Berechnungen möglich sein.

- **Reduzierung des Messrauschens:**

In Kapitel 6.5.1 konnte festgestellt werden, dass der Squashball aufgrund seiner matt-schwarzen Oberfläche für deutlich geringeres Messrauschen bei der Ballerkennung sorgt.

Daraus ergibt sich die Überlegung den Reflexionsgrad der Stahlkugel mithilfe einer dunklen Lackierung zu reduzieren. Dadurch werden gleichzeitig die in Kapitel 3.2.4 beschriebenen sprunghaften Fehlerkennungen sowie die Empfindlichkeit auf das Umgebungslicht dezimiert.

Literaturverzeichnis

- [Adamy 2018] ADAMY, Jürgen: *Nichtlineare Systeme und Regelungen*. 3. Springer Berlin Heidelberg, 2018. – ISBN 978-3-662-55685-6
- [Botsch und Utschick 2020] BOTSCH, Michael ; UTSCHICK, Wolfgang: *Fahrzeugsicherheit und automatisiertes Fahren: Methoden der Signalverarbeitung und des maschinellen Lernens*. 1. Carl Hanser Verlag, 2020. – ISBN 978-3-446-46804-7
- [Braun 2020] BRAUN, Anton: *Optimale und adaptive Regelung technischer Systeme: Mathematische Grundlagen, praktisch relevante Beispiele und numerische Simulationen mit MATLAB®*. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2020. – ISBN 978-3-658-30916-9
- [Dehnert 2020] DEHNERT, Robert: *Entwurf robuster Regler mit Ausgangsrückführung für zeitdiskrete Mehrgrößensysteme*. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2020. – ISBN 978-3-658-29900-2
- [Fadali und Visioli 2013] FADALI, M. S. ; VISIOLI, Antonio: *Digital Control Engineering - Analysis and Design*. 2. Elsevier, 2013. – ISBN 978-0-12-394391-0
- [Gerken 2020] GERKEN, L.: *Entwurf und Implementierung einer Positionsregelung für ein nichtlineares Ball-Wippe-System*, Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg, Masterthesis, 2020
- [Grabmair und Gahleitner 2019] GRABMAIR, Gernot ; GAHLEITNER, Reinhard: PI-Zustandsregler - eine methodische Neubetrachtung. In: *at - Automatisierungstechnik* 67 (2019), Nr. 9, S. 727–738
- [Gurski-Schramm 2021] *Persönliches Gespräch mit Herrn Gurski-Schramm vom Ingenieurbüro Gurski-Schramm*. 2021. – Gesprächsnotiz
- [Ingenieurbüro Gurski-Schramm 2015] Ingenieurbüro Gurski-Schramm (Veranst.): *BB50 Laboratory Setup Ball and Beam*. V5.0. 2015

- [Kim 2016] KIM, P.: *Kalman-Filter für Einsteiger: mit MATLAB Beispielen*. 1. CreateSpace, 2016. – ISBN 978-1-5027-2378-9
- [Kramer 2008] KRAMER, Ulrich: *Kraftfahrzeugführung: Modelle - Simulation - Regelung*. Carl Hanser Verlag, 2008. – ISBN 978-3-446-41709-0
- [Luhmann und Maas 2017] LUHMANN, Thomas ; MAAS, Hans-Gerd ; HEIPKE, Christian (Hrsg.): *Photogrammetrie und Fernerkundung: Handbuch der Geodäsie, herausgegeben von Willi Freeden und Reiner Rummel*. Springer Berlin Heidelberg, 2017. – ISBN 978-3-662-47094-7
- [Lunze 2020a] LUNZE, J.: *Regelungstechnik 1: systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*. 12. Springer Berlin Heidelberg, 2020. – ISBN 978-3-662-60746-6
- [Lunze 2020b] LUNZE, J.: *Regelungstechnik 2: Mehrgrößensysteme, digitale Regelung*. 10. Springer Berlin Heidelberg, 2020. – ISBN 978-3-662-60760-2
- [Mahdi 2018] MAHDI, M.C.: *Attitude Stabilization for CubeSat: Concepts and Technology*. Cambridge Scholars Publishing, 2018. – ISBN 9781527506510
- [Papageorgiou u. a. 2015] PAPAGEORGIOU, Markos ; LEIBOLD, Marion ; BUSS, Martin: *Optimierung: Statische, dynamische, stochastische Verfahren für die Anwendung*. Springer Berlin Heidelberg, 2015. – ISBN 978-3-662-46936-1
- [Pietruszka und Glöckler 2021] PIETRUSZKA, Wolf D. ; GLÖCKLER, Michael: *MATLAB® und Simulink® in der Ingenieurpraxis: Modellbildung, Berechnung und Simulation*. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2021. – ISBN 978-3-658-29740-4
- [Probst 2016] PROBST, U.: *Servoantriebe in der Automatisierungstechnik: Komponenten, Aufbau und Regelverfahren*. 2. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2016. – ISBN 978-3-658-03592-1
- [Unbehauen 2007] UNBEHAUEN, H.: *Regelungstechnik II: Zustandsregelungen, digitale und nicht-lineare Regelsysteme*. 9. Vieweg, 2007. – ISBN 978-3-8348-9139-6
- [Unbehauen 2008] UNBEHAUEN, H.: *Regelungstechnik I: Klassische Verfahren zur Analyse und Synthese linearer kontinuierlicher Regelsysteme, Fuzzy-Regelsysteme*. 15. Vieweg+Teubner, 2008. – ISBN 978-3-8348-9491-5

- [Walter 2019] WALTER, Hildebrand: *Zustandsregelung: Analyse und Synthese von Zustandsregelungen einschließlich Regleroptimierung*. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2019. – ISBN 978-3-658-21075-5
- [Wang u. a. 2014] WANG, Haiquan ; LIAO, Lei ; WANG, Dongyun ; WEN, Shengjun ; DENG, Mingcong: Improved Artificial Bee Colony Algorithm and Its Application in LQR Controller Optimization. In: *Mathematical Problems in Engineering* (2014)
- [Wenck 2019] WENCK, F.: *Zustandsregelung*. 2019. – Vorlesungsunterlagen, Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
- [Wunsch und Schreiber 2006] WUNSCH, G. ; SCHREIBER, H.: *Stochastische Systeme*. 4. Springer Berlin Heidelberg, 2006. – ISBN 978-3-540-29226-5
- [Zacher und Reuter 2017] ZACHER, S. ; REUTER, M.: *Regelungstechnik für Ingenieure: Analyse, Simulation und Entwurf von Regelkreisen*. 15. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2017. – ISBN 978-3-658-17632-7
- [Zarchan und Musoff 2015] ZARCHAN, Paul ; MUSOFF, Howard: *Fundamentals of Kalman Filtering - A Practical Approach - Progress in Astronautics and Aeronautics*. Bd. 246. 4. American Institute of Aeronautics and Astronautics/Aerospace Press (AIAA), 2015. – ISBN 978-1-62410-276-9

A Anhang

Anhang A.1: Bachelorthesis als PDF-Datei

Anhang A.2: MATLAB Programmcode


Anhang A.3: MATLAB Simulink-Modelle

Anhang A.4: Messdaten

Die Anhänge zur Arbeit befinden sich auf CD und können beim Erstgutachter eingesehen werden.

Erklärung zur selbstständigen Bearbeitung einer Abschlussarbeit

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit ohne fremde Hilfe selbständig verfasst und nur die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Wörtlich oder dem Sinn nach aus anderen Werken entnommene Stellen sind unter Angabe der Quellen kenntlich gemacht.

Ort Datum  Unterschrift im Original