



Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Hamburg University of Applied Sciences

Masterarbeit

Marc Gehring

Beitrag zur Definition von Ersatzimperfektionen an mehrteiligen Konstruktionen durch Überlagerung von Eigenformen

*Fakultät Technik und Informatik
Department Maschinenbau und Produktion*

*Faculty of Engineering and Computer Science
Department of Mechanical Engineering and
Production Management*

Marc Gehring

**Beitrag zur Definition von
Ersatzimperfectionen an mehrteiligen
Konstruktionen durch Überlagerung von
Eigenformen**

Masterarbeit eingereicht im Rahmen der Masterprüfung

im Studiengang Berechnung und Simulation im Maschinenbau
am Department Maschinenbau und Produktion
der Fakultät Technik und Informatik
der Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg

in Zusammenarbeit mit:
Liebherr-Werk Nenzing GmbH
Dr. Hans Liebherr Straße 1
6710 Nenzing
Österreich

Erstprüfer: Prof. Dr. Georgi Kolarov
Zweitprüfer : Dipl.-Ing. Axel Burkhardt

Abgabedatum: 02.05.2022

Marc Gehring

Thema der Masterarbeit

Beitrag zur Definition von Ersatzimperfectionen an mehrteiligen Konstruktionen durch Überlagerung von Eigenformen

Stichworte

Stabilitätsberechnung, Imperfectionen, Finite-Elemente-Methode, lineare Beulanalyse, nichtlineare Beulanalyse, Strukturmechanik, maschinelles Lernen

Kurzzusammenfassung

Die vorliegende Arbeit ist Teil eines Vorhabens den numerischen Aufwand bei der Bestimmung von Imperfectionen zu reduzieren. Speziell wird in dieser Arbeit der Einfluss der Auslöschung und Überhöhung der Amplituden von Imperfectionen auf das Tragverhalten eines Kastenträgers und einer Gitterrohrstruktur untersucht. Aus den Ergebnissen werden Anforderungen an ein Überlagerungsverfahren erarbeitet, welches die gegenseitige Beeinflussung von Eigenformen reduzieren soll. Das Überlagerungsverfahren wird der Linearkombination von Eigenformen gegenübergestellt.

Marc Gehring

Master's Thesis title

Englischer Titel

Keywords

buckling analysis, imperfections, finite element method, linear buckling, nonlinear buckling analysis, machine learning

Abstract

The present work is part of a project to reduce the numerical effort in the determination of imperfections. In particular, the influence of cancellation and exaggeration of the amplitudes of imperfections on the load-bearing behavior of a box girder and a lattice tube structure is investigated in this work. From the results, requirements are developed for a superposition method to reduce the mutual influence of eigenmodes. The superposition method is compared to the linear combination of eigenmodes.

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	III
Nomenklatur	X
1 Einleitung	1
2 Theoretische Grundlagen	4
2.1 Stabilitätsprobleme	4
2.2 Lineare Beulanalyse	7
2.3 Nichtlineare Beulanalyse	9
2.4 Newton-Raphson-Verfahren	10
2.5 Bogenlängen-Verfahren	11
2.6 Begleitende Eigenwertanalyse	13
3 Modellaufbau und Berechnung	14
3.1 Modellaufbau	14
3.2 Berechnung	16
3.3 Automatisierte Überlagerung von Eigenformen	21
4 Interaktion von Eigenformen als Imperfektion	24
4.1 Kastenträger	24
4.2 Gitterrohrstruktur	30
4.3 Definition von Anforderungen für ein Überlagerungsverfahren	33
5 Überlagerung von Eigenformen	36
5.1 Geometrische Betrachtung	36
5.2 Einfluss auf die Tragfähigkeit	47
5.3 Automatisierte Klassifizierung von Eigenformen	51
6 Fazit	56
Literatur	XII

Abbildungsverzeichnis

1.1	Lineare Überlagerung mit konstanten Gewichtungsfaktoren von zwei Eigenformen eines Balken	2
2.1	Die Euler-Hyperbel gibt die Knickspannung in Abhängigkeit des Schlankheitsgrades an	6
2.2	Klassifizierung des Beulverhaltens von Strukturen. Last-Verschiebungskurve des Durchschlagsproblems (links), des stabilen Beulverhaltens (mitte) und des instabilen Beulverhalten (rechts) [8]	7
2.3	Verformtes Stabelement mit Quer- und Längskraft [8]	8
3.1	Festlager-Seite des Kastenträgers. Die Randbedingungen werden an dem zentralen Masterknoten aufgebracht und über starre Kopplungen (rosa) mit dem Rand der Strukturelemente verbunden	15
3.2	Starre Kopplung der Gurtrohre mit einem Masterknoten.	17
3.3	Darstellung der als Imperfektion verwendeten Eigenformen. links: globale Eigenform, rechts: lokale Eigenform	19
3.4	Überlagerung aus globaler und lokaler Eigenform als Imperfektion. Lokale Verformungen um den Faktor 100 überhöht dargestellt.	20
3.5	Darstellung der als Imperfektion verwendeten Eigenformen. links: globale Eigenform, rechts: lokale Eigenform	20
3.6	Überlagerung aus globaler und lokaler Eigenform als Imperfektion	21
4.1	Kraft-Verformungs-Kurven von drei lokalen (links) und drei globalen (rechts) Imperfektionen mit unterschiedlicher Amplitude a . Die Kraft ist auf den ersten Eigenwert normiert	26
4.2	Membranspannungsanteil der Vergleichsspannung bei der Last F_{crit} . Die lokale Imperfektion reduziert die Tragwirkung auf die Kanten des Kastenträgers. Roter Bereich kennzeichnet hohe und blauer Bereich niedrige Vergleichsspannungen	27

Abbildungsverzeichnis

4.3	Membranspannungsanteil der Vergleichsspannung bei der Last $0,85F_{crit}$. Die überlagerte Imperfektion reduziert die Tragwirkung einseitig auf die Kanten des Kastenträgers. Roter Bereich kennzeichnet hohe und blauer Bereich niedrige Vergleichsspannungen	28
4.4	Ergebnisse der nichtlinearen Berechnung	29
4.5	Spannungsverteilungen auf primärem und sekundärem Pfad	30
4.6	Kraft-Verformungs-Kurven der Gitterrohrstruktur mit einzelnen Eigenformen als Imperfektion	32
4.7	Spannungsverteilungen auf primärem (links) und sekundärem (rechts) Pfad	33
4.8	Kraft-Verformungs-Kurven der Gitterrohrstruktur mit Überlagerung aus Eigenformen als Imperfektion	34
4.9	Last-Verformungskurven der Gitterrohrstruktur mit Skalierung der lokalen und globalen Eigenform	35
5.1	Beispiel für die Berechnung des Gewichtungswertes. Erste Zeile: Eulerfall 1, Zweite Zeile: Eulerfall 4	37
5.2	Beispiel für die Berechnung des Gewichtungswertes mit transformierter Verformung	38
5.3	Beispiel für die Berechnung des Gewichtungswertes am Kragarm (Eulerfall 1)	38
5.4	links: Verformung der ausgebeulten Platte, mitte: Rotationssumme der ausgebeulten Platte, rechts: Gewichtungswert	39
5.5	links: Detailausschnitt der Verformungen der ersten lokalen Eigenform, mittig: Detailausschnitt der Rotationen der ersten lokalen Eigenform rechts: Verteilung des Gewichtungswertes zur ersten lokalen Eigenform	40
5.6	Ergebnis der automatisch überlagerten Eigenformen	41
5.7	Änderung der Eigenform durch einen ungleichmäßig verteilten Gewichtungswert	42
5.8	Konvergenz der Imperfektion nach der Überlagerung verschiedener Anzahlen von Eigenformen. Dargestellt ist die Einhüllende der Amplitude einer Imperfektion	43
5.9	Verzerrung einer globalen Eigenform durch den Gewichtungswert	44
5.10	Eigenformen des Gurtrohres in der xy-Ebene	46
5.11	Überlagerung der lokalen Eigenformen an einem Gurtrohr	47

Abbildungsverzeichnis

5.12	Verformungsdifferenz der Kraft-Verformungs-Kurven für die lineare und gewichtete Überlagerung zur Kraft-Verformungs-Kurve der Einzelimperfektion aus Eigenform 2	48
5.13	Vergleichsspannungsverteilung unterschiedlicher Imperfektionen in der Seitenansicht. Oben: Einzelimperfektion Eigenform 2, Mitte: linear überlagerte Imperfektion aus Eigenformen 2 und 3, Unten: Gewichtete Imperfektion aus Eigenform 2 und 3	49
5.14	Steifigkeitsunterschied der linearen und gewichteten Überlagerung an der Gitterrohrstruktur	50
5.15	Vergleichsspannung bei $0,47F_{crit}$ mit Imperfektion aus Eigenform 2 und 4 links: gewichtete Überlagerung, rechts: lineare Überlagerung . .	51
5.16	Aufbau eines Autoencoders [3]	53
5.17	Vergleich einer lokalen und einer globalen Eigenform mit der jeweiligen Rekonstruktion durch den Autoencoder	54
5.18	Verteilung der Eigenformen im dreidimensionalen Feature-Raum. Blau: Niedrige Eigenform, Gelb: Hohe Eigenform	55

Tabellenverzeichnis

3.1	Abmessungen des Auslegermodells in mm	16
3.2	Parameter des linear elastischen Materialmodells	17
4.1	Beullasten zwei bis sieben des Kastenträgers in N	24
4.2	Beullasten der verformten Struktur mit 10 kN	26
4.3	Eigenwerte des Auslegers in kN	30

Nomenklatur

Abkürzungen

Abkürzung	Beschreibung
FEM	Finite-Elemente-Methode
KNN	Künstliches neuronales Netz
ML	Maschinelles Lernen
EF	Eigenform

Formelzeichen

Formelzeichen	Beschreibung
a_{global}	Amplitude der globalen Imperfektion
a_{lokal}	Amplitude der lokalen Imperfektion
B	B-Matrix
x	Balkenkoordinate
L	Balkenlänge
P	Belastung
ϕ	Eigenvektor
\hat{f}_{ext}	externe Kraft
I	Einheitsmatrix
E	Elastizitätsmodul
I	Flächenträgheitsmoment
g_N	Gewichtungswerte
G	Gleichungssystem
\hat{f}_{int}	interne Kraft
σ	Knickspannung
P_{crit}	kritische Belastung

A	Querschnittsfläche
λ_S	Schlankheitsgrad
α_n	Skalierungsfaktor
S	Spannungsversteifungsmatrix
K	Steifigkeitsmatrix
K_T	Tangentensteifigkeitsmatrix
i_S	Trägheitsradius
U_n	Verformungsvektoren
w	Verschiebung in z-Richtung des Balkens
u	Verschiebung in y-Richtung des Balkens
\hat{u}	Verschiebungsvektor
F	Zusatzkraft

1 Einleitung

Vom Rennwagen bis zum Raupenkran, der Trend Leichtbaupotentiale weiter auszuschöpfen ist in immer mehr Branchen verbreitet und führt somit zunehmend zu Strukturen, bei denen ein Versagen aufgrund der Stabilität an Relevanz gewinnt. Neben dem Festigkeitskriterium ist, gerade für schlanke Strukturen, auch die Stabilitätsgrenze das maßgebende Kriterium in der Auslegung, da ein Stabilitätsversagen schlagartig auftritt und meist katastrophale Folgen hat [6]. Das Versagen einer Struktur durch Stabilitätsverlust kann auftreten, wenn die Struktur oder nur Teilbereiche mit einer Druckkraft beansprucht werden. Zuerst wird die Struktur nur gestaucht, die Verformung ist näherungsweise proportional zur Kraft. Wird die Kraft über die Stabilitätsgrenze hinaus erhöht, haben kleine Störungen in der Geometrie oder der Last - Imperfektionen genannt - zur Folge, dass die Struktur sich schlagartig stark verformt. Der Zusammenhang zwischen Kraft und Verformung wird nichtlinear.

Strukturelle Imperfektionen können unterschiedliche Ursachen haben und müssen nicht immer nur aus dem Fertigungsprozess resultieren. Das Einbringen von Eigenspannungen durch zum Beispiel Schweißprozesse oder exzentrische Lasteinleitungen können ebenfalls als Imperfektionen betrachtet werden, welche zu einem Versagen aufgrund der Stabilität führen. Da diese Imperfektionen nur selten zum Zeitpunkt der Auslegung bekannt sind, wird nach einschlägigen Normen mit einer geometrischen Ersatzimperfektion gerechnet. Die normgerechte Ersatzimperfektion soll Einflüsse aus allen nicht messbaren und unbekanntem an der Struktur vorhandenen Imperfektionen abdecken.

Bei der Auslegung von stabilitätsgefährdeten Strukturen nach dem Eurocode 3 [4] kann eine Imperfektion als geometrische Ersatzimperfektion auf die Struktur aufgebracht werden. Das Berechnungsverfahren der Norm schreibt vor, dass die Imperfektion zur geringsten Tragfähigkeit der Struktur führen muss. Für die Berechnung mit einem Lastfall kann die Eigenform mit dem geringsten Lastmultiplikator aus der linearen Beulanalyse einer Struktur angesetzt werden. Wird eine Struktur jedoch mit mehreren Lastfällen belastet, muss für jeden Lastfall die kritischste Imperfektion ermittelt werden, da in unterschiedlichen Lastrichtungen auch unterschiedliche Teile der

1 Einleitung

Struktur versagenskritisch sein können. Am Beispiel der Strukturauslegung eines Rauenkrans erfordert das aktuelle Vorgehen das Lösen einer linearen Beulanalyse für jede Kombination aus den Auslegerstellungen und Lastfällen.

Die vorliegende Arbeit ist Teil eines Vorhabens, den numerischen Aufwand der Bestimmung einer Imperfektion zu verringern. Dafür soll eine Imperfektion aus mehreren Eigenformen überlagert werden, mit der mehrere Lastfälle konservativ berechnet werden können. Die Überlagerung von mehreren Eigenformen soll dabei die Schwächung der gesamten Struktur ermöglichen. Aufgrund der Möglichkeit, dass es zu Überschneidungen der Eigenformen kommen kann, ist zu beachten, dass es infolge der Überlagerung zu keiner ungewollten Auslöschung oder Überhöhung der Verformungen kommt. In Abbildung 1.1 ist die Überlagerung von zwei Eigenformen an einem Balken dargestellt. Durch die einfache Addition der Verformungen wird ersichtlich, dass es im äußeren Bereich des Balkens zu einer Überhöhung und im mittleren Bereich zu einer Auslöschung der Amplituden kommt. Zur Vermeidung dieses Effektes wird ein Überlagerungsverfahren entwickelt, welches die Beeinflussung in sich überschneidenden Bereichen reduziert. In der vorliegenden Arbeit wird die Überlagerung von Eigenformen als Im-

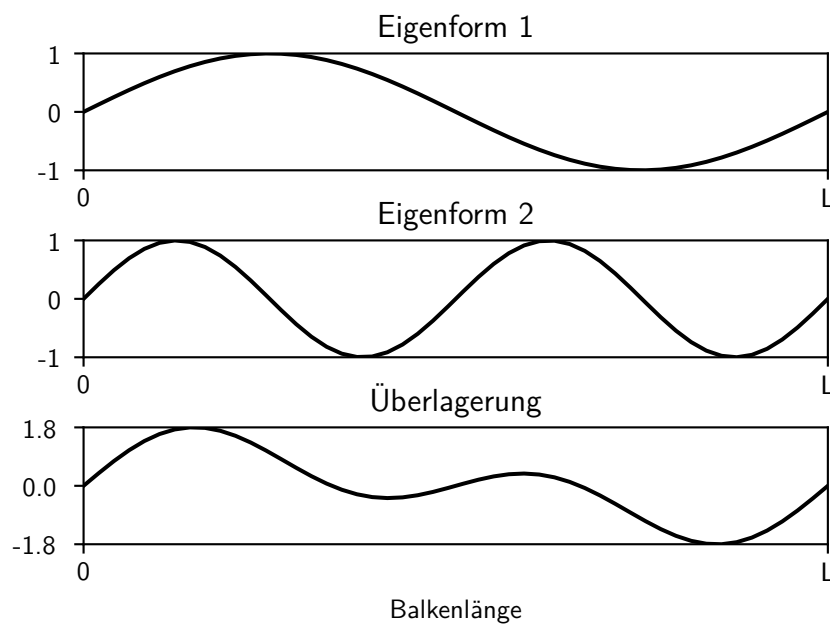


Abbildung 1.1: Lineare Überlagerung mit konstanten Gewichtungsfaktoren von zwei Eigenformen eines Balken

1 Einleitung

perfektion und deren Einfluss auf die Tragfähigkeit von stabilitätskritischen Strukturen untersucht. Speziell die Beeinflussung der Steifigkeit der Struktur durch Überlagerung der Eigenformen wird dabei anhand von Kraft-Verformungs-Kurven und Spannungsverteilungen analysiert. Dafür werden zuerst Prinzipmodelle definiert, welche ähnlich zu Strukturen im Kranbau sind. Zudem wird die Überlagerung von Eigenformen mittels eines automatisierten Verfahrens untersucht, womit die gegenseitige Beeinflussung von Eigenformen reduziert werden soll. Die Überlagerung von Eigenformen wird auf zwei Eigenformen beschränkt, um beobachtete Einflüsse isolieren zu können. Aus den Beobachtungen werden Anforderungen für das Überlagerungsverfahren formuliert und das Verfahren anschließend an diesen bewertet.

Im zweiten Kapitel werden die dafür notwendigen theoretischen Grundlagen aus der Stabilitätsberechnung erläutert. Im dritten Kapitel werden Berechnungsmodelle und die Berechnungsmethodik zur Untersuchung der Interaktion von Eigenformen vorgestellt. Die Ergebnisse der Interaktion von Eigenformen an einem Kastenträger und einer Gitterrohrstruktur werden im vierten Kapitel diskutiert. Im fünften Kapitel wird die automatisierte Überlagerung von Eigenformen analysiert und ein Ansatz für weitere Entwicklungen aufgezeigt.

2 Theoretische Grundlagen

Die Berechnung von Stabilitätsproblemen benötigt mathematische und strukturmechanische Grundlagen, welche in den folgenden Abschnitten erläutert werden. Das Kapitel beginnt mit der mathematischen Modellierung von Stabilitätsproblemen am Balken. Nachfolgend wird die näherungsweise Lösung der Gleichungen mit der nichtlinearen FEM für allgemeine Systeme und das einschlägige Regelwerk zur Aufbringung von Imperfektionen erläutert.

2.1 Stabilitätsprobleme

Als Stabilitätsproblem wird in der Strukturmechanik ein Belastungszustand bezeichnet, in dem eine Struktur der Belastung keine Steifigkeit mehr entgegensetzen kann. Für Flächentragwerke wie Platten oder Schalen wird dieses Phänomen Beulen genannt, für Balkenstrukturen wird vom Knicken gesprochen [8].

Das mechanisch einfachste System ist der Einfeldträger. An diesem können bereits viele grundlegende Phänomene von Stabilitätsproblemen hergeleitet werden. Leonhard Euler formulierte 1757 für den Balken der Länge L mit der Biegesteifigkeit EI die Differentialgleichung für das Stabilitätsproblem unter Druckbelastung durch die Normalkraft P .

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} + Pw = 0 \quad (2.1)$$

Mit der Definition $k = P/EI$ kann die allgemeine Lösung für die Verformung w senkrecht zur Balkenkoordinate x wie folgt angegeben werden.

$$w(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) \quad (2.2)$$

Dabei sind die Konstanten A und B aus den Randbedingungen des Balkens zu bestimmen. Für den momentenfrei gelagerten Einfeldträger gelten die Verformungsrandbedingungen $w(0) = w(L) = 0$. Durch Einsetzen der Randbedingung $w(0) = 0$ kann

2 Theoretische Grundlagen

die Konstante A zu null bestimmt werden. Aus der zweiten Randbedingung ergibt sich die Gleichung.

$$\sin(kL) = 0 \quad (2.3)$$

Mit der Forderung eine nicht-triviale Lösung zu berechnen, kann mit $kL = \pi$ und $k = P/EI$ die kleinste Knicklast des Balkens bestimmt werden.

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{L_k^2} \quad (2.4)$$

Das Einsetzen der berechneten Konstante k und A in die allgemeine Lösung der Differentialgleichung gibt die Knickfigur unter der Last P an.

$$w(x) = B \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \quad (2.5)$$

Aus Gleichung ist bereits erkennbar, dass die Verformung immer aus einer Überlagerung der Sinus und Kosinus-Funktion sein muss. Für den momentenfrei gelagerten Einfeldträger bleibt nur der Sinus-Term mit dem freien Parameter B übrig.

Wird in Gleichung 2.4 die kritische Kraft P_{crit} auf die Querschnittsfläche A des Balkens bezogen und der Schlankheitsgrad λ_s eingeführt, ergibt sich die Gleichung für die Knickspannung. Dabei ist i_S der Trägheitsradius der des Balkenquerschnittes. Die beschriebene Hyperbel wird Euler-Hyperbel genannt (Abbildung 2.1).

$$\sigma_{crit}(\lambda_S) = \frac{\pi^2 E}{\lambda_S} \quad (2.6)$$

$$\lambda_S = \frac{h}{i_S}, \quad i_S = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (2.7)$$

Der Schlankheitsgrad am Schnittpunkt von der Druckfestigkeit σ_F und der Euler-Hyperbel wird Streckgrenzschlankheitsgrad λ_F genannt und grenzt den Bereich des elastischen Versagens ($\lambda > \lambda_F$) vom Bereich des elasto-plastischen Versagens ($\lambda < \lambda_F$) ab. Im Übergangsbereich des elasto-plastischen Druckversagens und des elastischen Knickversagens kommt es zur Interaktion aus beiden Versagensarten. Neben

2 Theoretische Grundlagen

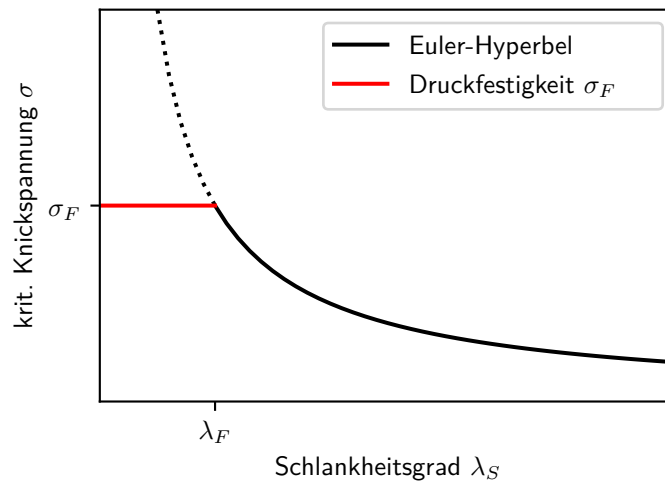


Abbildung 2.1: Die Euler-Hyperbel gibt die Knickspannung in Abhängigkeit des Schlankheitsgrades an

der Berechnung der kritischen Knicklast muss für alle Stabilitätsprobleme auch das Beulverhalten und der Gleichgewichtszustand eines Systems beurteilt werden. In der Mechanik werden die drei Arten des Beulverhaltens unterschieden.

- Stabiles Beulverhalten
- Instabiles Beulverhalten
- Indifferentes Beulverhalten

Das stabile Beulverhalten wird durch die noch vorhandene Tragfähigkeit der ausgebeulten Struktur charakterisiert, das System kommt in einer neuen Gleichgewichtslage zur Ruhe. Beim instabilen Beulverhalten gelangt das System jedoch nicht in eine Gleichgewichtslage und kollabiert. Dies ist der kritischste Typ der Beulverhalten, da dieser häufig zum totalen Versagen der Struktur führt. Das stabile und instabile Beulverhalten tritt beim sogenannten Verzweigungsproblem auf und ist häufig bei schalen- und plattenförmigen Strukturen zu beobachten. Die Last-Verschiebungskurve der Struktur verzweigt von ihrem Primärpfad in einem stabilen oder instabilen Sekundärpfad [1]. Das indifferente Beulverhalten beschreibt Systeme deren Tragfähigkeit nicht zu- oder abnimmt, wenn die Verformung weiter erhöht wird. Diese Eigenschaft ist typisch für das Durchschlagsproblem und tritt bei Strukturen mit stark nichtlinearer Last-Verschiebungskurve auf.

2 Theoretische Grundlagen

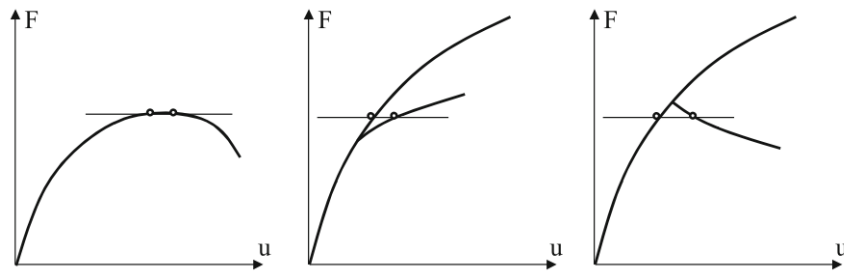


Abbildung 2.2: Klassifizierung des Beulverhaltens von Strukturen. Last-Verschiebungskurve des Durchschlagsproblems (links), des stabilen Beulverhaltens (mitte) und des instabilen Beulverhalten (rechts) [8]

Die Auslegung von stabilitätsgefährdeten Strukturen erfordert das Lösen von partiellen Differentialgleichungen. Im ingenieurtechnischen Alltag hat sich dafür in den letzten Jahrzehnten die FEM etabliert. In den folgenden Abschnitten werden die speziell für den Bereich der Stabilitätsberechnung genutzten numerischen Methoden vorgestellt und erläutert. Auf die Herleitung der linearen statischen Grundgleichung der FEM wird dabei verzichtet und auf Literatur verwiesen.

2.2 Lineare Beulanalyse

Unter Annahme der Theorie erster Ordnung, sowie linearer Kinematik gilt das Superpositionsprinzip für Kräfte und Verformungen an einem mechanischen System. Damit sind die Wirkungen einer Längs- und einer Querkraft an einem Balken vollständig entkoppelt. Jedoch ist aus der Anschauung für einen Einfeldträger bekannt, dass eine Zugkraft den Balken versteift und eine Druckkraft den Balken schwächt. Um diesen Effekt zu erklären, wird das Kräftegleichgewicht an einem Stabelement (Abbildung 2.3) in verformter Lage aufgestellt und der Zusammenhang zwischen äußerer Last und der Verformung des Elements hergestellt. Der Stab hat dabei die Ausgangslänge l_0 und die Länge l in verformter Konfiguration. Die Zusatzkraft F verursacht am verformten Stab ein Zusatzmoment zur Last P .

Durch Aufstellen des Momentengleichgewicht um den ersten Knoten und das Umstellen nach P kann die folgende Gleichung formuliert werden.

$$\frac{F}{l_0}(w_2 - w_1) = P \quad (2.8)$$

2 Theoretische Grundlagen

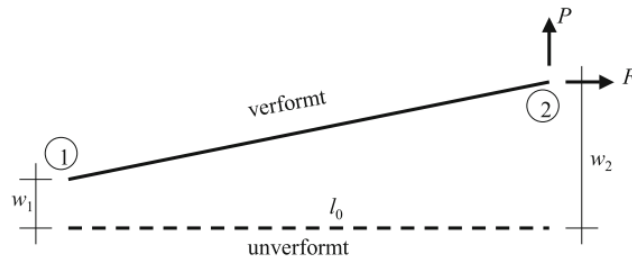


Abbildung 2.3: Verformtes Stabelement mit Quer- und Längskraft [8]

Da eine lineare Kinematik und kleine Rotationen vorausgesetzt werden, ist die Last F auch die Normalkraft im Stab und kann als Spannung $\sigma = F/A$ ausgedrückt werden. Die Gleichung kann in Matrixnotation wie folgt geschrieben werden.

$$\frac{\sigma A}{l_0} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = P \quad (2.9)$$

Durch diese Gleichung wird die äußere Last mit der Verformung des Stabelements verknüpft. Wird nun der Momentensatz ebenfalls auf den zweiten Knoten angewendet und die Längsverformung des Stabes einbezogen, kann der Zusammenhang zwischen äußerer Last P und den Verschiebungen u und w als Matrix-Vektor-Gleichung aufgeschrieben werden.

$$\left(\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\sigma A}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{1z} \\ P_{2x} \\ P_{2z} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Die Matrix S wird dabei Spannungsversteifungsmatrix genannt und bildet den eingangs erläuterten Effekt der Steifigkeitsänderung ab, indem sie mit der linearen Steifigkeitsmatrix addiert wird.

$$(\mathbf{K} + \mathbf{S})\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{f}}_{ext} \quad (2.11)$$

Ein Stabilitätsproblem ist definiert durch die Bedingung, dass Verformungen zustande kommen ohne, dass eine weitere Erhöhung der Kraft notwendig ist. Der lineare Zusammenhang zwischen der Spannung und der äußeren Last, sowie der Spannung und der Spannungsversteifungsmatrix lässt es zu, die Spannungsversteifungsmatrix mit einem Faktor zu multiplizieren mit dem die äußere Last gesteigert wird. Aufgrund der

2 Theoretische Grundlagen

Instabilitätsbedingung $\Delta \mathbf{f} = \mathbf{0}$ wird aus dem linearen Gleichungssystem das Eigenwertproblem, wobei λ der Faktor der kritischen Last ist.

$$(\mathbf{K} + \lambda \mathbf{S}(\sigma))\phi = \mathbf{0} \quad (2.12)$$

Der Vektor ϕ ist der Vektor der Verformungen zu einem kritischen Lastfaktor und wird Beuleigenform genannt. Aufgrund der Singularität des Gleichungssystems wird die Verformung auf 1 normiert bestimmt.

2.3 Nichtlineare Beulanalyse

Die Gleichheit der geleisteten inneren und äußeren Arbeit kann unter Annahme der Theorie erster Ordnung und einer linearen Kinematik diskretisiert werden und führt auf die Gleichung $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$. Diese Gleichung stellt das Gleichgewicht der inneren Kräfte $\mathbf{K}\mathbf{u}$ und der externen Kräfte \mathbf{f}_{ext} als lineare Abbildung dar. Die Anwendung der Theorie zweiter Ordnung und die Berücksichtigung der nichtlinearen Kinematik führen im Allgemeinen auf ein System aus nichtlinearen, partiellen Differentialgleichungen. Die Betrachtung von zeitunabhängigen Systemen führt dann zu nichtlinearen algebraischen Gleichungssystemen in der folgenden Form.

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}_{ext} = \mathbf{0} \quad (2.13)$$

Die internen Kräfte \mathbf{f}_{int} werden aus der internen Arbeit abgeleitet und können unter Annahme des linearen Spannungs-Dehnungs-Zusammenhangs wie folgt angegeben werden.

$$\mathbf{f}_{int} = \int_{(V)} \mathbf{B}^T(\hat{\mathbf{u}})\sigma dV \quad (2.14)$$

Das Gleichungssystem $\mathbf{G}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ kann dann mit üblichen Verfahren gelöst werden. In der Strukturmechanik hat sich das Newton-Raphson-Verfahren aufgrund seiner Effizienz verbreitet. Für Stabilitätsprobleme ist es jedoch hilfreich, ein Verfahren zu verwenden, welches auch fallende Äste im Last-Verformungs-Graph verfolgen kann. Deshalb hat sich hier das Bogenlängen-Verfahren etabliert. Beide Verfahren werden im Folgenden erläutert.

2.4 Newton-Raphson-Verfahren

In der linearen FEM wird zur Bestimmung der Verschiebungen ein lineares Gleichungssystem direkt gelöst. Aufgrund des nichtlinearen Gleichungssystems muss bei der Anwendung der nichtlinearen FEM die Lösung iterativ bestimmt werden. Ein bekanntes Verfahren zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme ist das Newton-Raphson-Verfahren. Aus der Tangente an der Funktion f im Punkt x_i ergibt sich die bekannte Iterationsvorschrift für skalare Gleichungen.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (2.15)$$

Für n-dimensionale Gleichungssysteme in der FEM wird die Verschiebung im Lastschritt analog berechnet. Zur näherungsweise Lösung der Gleichung 2.13 geht der Quotient aus Funktionswert f und Steigung f' in das Matrix-Vektor-Produkt aus der Tangentensteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T und dem Residuum der inneren und äußeren Kräfte $\mathbf{G}(\mathbf{u})$ über. Die Iterationsvorschrift lautet dann wie folgt.

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \left(\frac{\partial \mathbf{d}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_i} \right)^{-1} (-\mathbf{d}(\mathbf{u}_i)) = \mathbf{u}_i + \mathbf{K}_T^{-1} (-\mathbf{d}(\mathbf{u}_i)) \quad (2.16)$$

Die Tangentensteifigkeitsmatrix ist nicht nur eine Steifigkeitsmatrix, sondern enthält auch die Lasttangente und wird aus $\mathbf{G}(u)$ berechnet.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_T &= \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{u}}} \mathbf{f}_{\text{int}} - \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{u}}} \mathbf{f}_{\text{ext}} = \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{u}}} \int_{(V)} \mathbf{B}^T(\hat{\mathbf{u}}) \boldsymbol{\sigma} dV - \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{u}}} \mathbf{f}_{\text{ext}} \\ \mathbf{K}_T &= \int_{(V)} \mathbf{B}^T(\hat{\mathbf{u}}) \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \hat{\mathbf{u}}} dV + \int_{(V)} \frac{\partial \mathbf{B}^T(\hat{\mathbf{u}})}{\partial \hat{\mathbf{u}}} \boldsymbol{\sigma} dV - \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{u}}} \mathbf{f}_{\text{ext}} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Die Matrix kann in drei verschiedene Anteile zerlegt werden. Der erste Anteil ist die Anfangsverschiebungsmatrix \mathbf{K}_u . Diese ist ähnlich zur linearen Steifigkeitsmatrix. Unter der Annahme, dass die Spannungen linear von den Dehnungen abhängig sind und dass das Modell ausreichend gelagert ist, ist die Matrix positiv definit. Die Matrix \mathbf{K}_σ wird geometrische Matrix genannt und kann als Analogie zur Spannungsversteifungsmatrix \mathbf{S} interpretiert werden. Da die Spannungen direkt in die Matrix eingehen und diese vorzeichenbehaftet sind, kann dieser Anteil dazu führen, dass die Gesamtmatrix \mathbf{K}_T nicht mehr positiv definit ist. In diesem Fall kann es zu einer Verschiebung ohne weitere Krafterhöhung kommen und die Bedingung $\mathbf{K}_T \Delta \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ wäre erfüllt. Es läge

2 Theoretische Grundlagen

damit ein Stabilitätsproblem vor. Der dritte Anteil der Tangentensteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T ist die sogenannte Lasttangente \mathbf{K}_p . Diese wird aus dem Lastvektor \mathbf{f}_{ext} berechnet.

Bei der Berechnung der Verschiebung \mathbf{u}_{i+1} wird die inverse der Tangentensteifigkeitsmatrix benötigt. Da die Berechnung der Inversen nicht effizient ist, wird in der Regel das Gleichungssystem.

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{u} = -\mathbf{d} \quad (2.18)$$

gelöst. Mit dem Inkrement $\Delta \mathbf{u}$ und der aktuellen Verschiebung \mathbf{u}_i wird dann die neue Verschiebung \mathbf{u}_{i+1} berechnet.

2.5 Bogenlängen-Verfahren

Bei der Berechnung von Stabilitätsproblemen ist es von Interesse, den instabile Sekundärpfade eines Kraft-Verformungspfades oder zurückschlagende Verformungen auszuwerten. Mit dem zuvor vorgestellten Newton-Raphson-Verfahren kann aufgrund der indefiniten Tangentensteifigkeitsmatrix am Punkt des Stabilitätsverlustes nicht über die maximale Last hinaus gerechnet werden. Die Tangente der Kraft-Verformungskurve hat dort keinen Schnittpunkt mit einem konstanten Lastniveau, da sie horizontal verläuft. Für diese Anwendung wurden Kurvenverfolgungsverfahren, wie das Bogenlängen-Verfahren entwickelt. Dabei wird der Lastmultiplikator λ als zusätzliche Unbekannte behandelt und ergibt das folgende Gleichungssystem.

$$\mathbf{K}_T^i \Delta \mathbf{u}^i = \lambda \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{nr}^i \quad (2.19)$$

Da der Lastfaktor λ unbekannt ist, muss dieser auch iterativ bestimmt werden. Dafür wird dieser in Gleichung 2.20 inkrementell im Lastschritt n und der Iteration i ausgedrückt.

$$\mathbf{K}_T^i \Delta \mathbf{u}^i - \Delta \lambda \mathbf{F}_a = (\lambda_n + \lambda_i) \mathbf{F}_a - \mathbf{F}_{nr}^i = -\mathbf{R}^i \quad (2.20)$$

Durch die Multiplikation von links mit der inversen Tangentensteifigkeitsmatrix kann die Gleichung 2.20 umgeschrieben werden zu

$$\Delta \mathbf{u}^i = \Delta \lambda \Delta \mathbf{u}_I^i + \Delta \mathbf{u}_{II}^i. \quad (2.21)$$

2 Theoretische Grundlagen

Das Verschiebungsinkrement $\Delta \mathbf{u}^i$ in der Iteration i kann dann durch Lösen der Gleichungssysteme bestimmt werden.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_T^i \Delta \mathbf{u}_I^i &= \mathbf{F}_a \\ \mathbf{K}_T^i \Delta \mathbf{u}_{II}^i &= -\mathbf{R}^i \end{aligned} \quad (2.22)$$

Zur Bestimmung des unbekanntes Lastfaktors kann ein Vektor zwischen der vorherigen konvergierten Lösung des Lastschrittes n und der Lösung der Iteration i definiert werden.

$$\mathbf{t}^i = \Delta \mathbf{u}_n + \beta \lambda^i \quad (2.23)$$

Für die Iteration $i + 1$ wird das Verschiebungs- und Lastfaktorinkrement addiert

$$\mathbf{t}^{i+1} = \Delta \mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{u}^i + \beta(\lambda^i + \Delta \lambda) \quad (2.24)$$

Zwischen der Iteration $i + 1$ und i muss die Norm der Vektoren \mathbf{t}^i und \mathbf{t}^{i+1} konstant bleiben [2].

$$|\mathbf{t}^i| = |\mathbf{t}^{i+1}| \quad (2.25)$$

Wird in Gleichung 2.24 $\Delta \mathbf{u}^i$ durch Gleichung 2.21 ersetzt, ergibt sich eine quadratische Gleichung in Abhängigkeit von $\Delta \lambda$. Diese kann umgestellt werden, sodass die Koeffizienten a, b und c abgelesen werden können, um die Gleichung zu lösen.

$$a \lambda^2 + b \lambda + c = 0 \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} a &= \beta^2 + \Delta u_I^{(i)t} \Delta u_{II}^i \\ b &= 2(\beta^2 \lambda^i \Delta u_n^t \Delta u_I^i + \Delta u_{II}^{(i)t} \Delta u_{II}^i) \\ c &= 2\Delta u_n^t \Delta u_{II}^i + \Delta u_{II}^{(i)t} \Delta u_{II}^i \end{aligned} \quad (2.27)$$

Die quadratische Gleichung hat im Allgemeinen zwei reelle Nullstellen, $\Delta \lambda^{(1)}$ und $\Delta \lambda^{(2)}$, welche die Lastmultiplikatoren zu den Schnittpunkten des Suchradius mit dem Lastpfad angeben. Da eine Lösung des Polynoms zum zurückliegenden Gleichgewichtspunkt gehören muss, wird der Winkel zwischen den Vektoren zu dem letzten konvergierten Substep \mathbf{t}_{n-1} und der Lösung der aktuellen Iteration \mathbf{t}^{i+1} durch die Gleichung

$$\cos(\Theta) = \frac{\mathbf{t}^{i+1} \cdot \mathbf{t}_{n-1}}{|\mathbf{t}_n| \cdot |\mathbf{t}_{n-1}|} \quad (2.28)$$

2 Theoretische Grundlagen

berechnet. Die Nullstelle mit dem $\cos(\Theta)$ am dichtesten an 1 wird als nächste Lösung der Iteration ausgewählt. Mit der Verschiebung aus dem letzten konvergierten Substep \mathbf{u}_n und dem zugehörigen Lastmultiplikator λ_n wird der nächste Substep durch addieren des Verschiebungsincrement $\Delta\mathbf{u}_n + \Delta\mathbf{u}_i$ und des Lastmultiplikatorinkrements $\Delta\lambda$ ermittelt.

$$\begin{aligned}\lambda^{i+1} &= \lambda_n + \lambda_i + \Delta\lambda \\ \mathbf{u}^{i+1} &= \mathbf{u}_n + \Delta\mathbf{u}_n + \Delta\mathbf{u}^i\end{aligned}\tag{2.29}$$

2.6 Begleitende Eigenwertanalyse

Mit der linearen Beulanalyse werden die Verzweigungslasten einer Struktur unter Berücksichtigung der Ausgangssteifigkeit berechnet. Da sich diese Steifigkeit während der Belastung durch die Verformung der Struktur und den Spannungszustand verändern kann, wird die Berechnung eines Stabilitätsproblems mit der nichtlinearen Beulanalyse abgesichert. Diese liefert eine Aussage über die Stabilität eines Verzweigungspunktes und die verbleibende Steifigkeit der ausgebeulten Struktur. Wird bei der Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems das Newton-Raphson-Verfahren verwendet, liegt an dem Punkt des Stabilitätsverlustes der Struktur per Definition ein Konvergenzproblem vor. Um an diesem Punkt entscheiden zu können, ob die nicht erreichte Konvergenz physikalische Gründe hat oder ob es sich um eine unzureichende Diskretisierung handelt, kann die Lage der Eigenwerte über den Verlauf der Last beobachtet werden. Dieses Vorgehen wird begleitende Eigenwertanalyse genannt. An jedem konvergierten Lösungsschritt des nichtlinearen Gleichungssystems 2.13 liegt die Tangentensteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T vor. Diese beschreibt die Steifigkeit des Systems unter Berücksichtigung des aktuellen Spannungszustandes. Die Instabilitätsbedingung $\mathbf{K}_T\Delta u = \mathbf{0}$ kann nur erfüllt werden, wenn die Matrix \mathbf{K}_T singulär ist. Um diese Bedingung zu prüfen, wird das Eigenwertproblem

$$(\mathbf{K}_T^i - \lambda\mathbf{I}) = \mathbf{0}\tag{2.30}$$

gelöst. Mit einem Eigenwert $\lambda = 0$ ist der instabile Punkt der Lösung erreicht. Wird $\lambda < 0$ liegt die Lösung auf einem instabilen Pfad.

3 Modellaufbau und Berechnung

Im Rahmen dieser Arbeit wird der Einfluss der Überlagerung von Eigenformen als Imperfektion auf das Verhalten der Stabilität einer Struktur untersucht. Die dafür erforderlichen Finite Elemente Modelle werden im Folgenden vorgestellt und der Berechnungsablauf erklärt. Im Anschluss wird die Überlagerung von Eigenformen mittels eines Algorithmus zur gleichmäßigen Aufbringung von Ersatzimperfektionen eingeführt.

3.1 Modellaufbau

In der Festkörpermechanik werden zur Berechnung von Stabilitätsproblemen aus Gründen der Effizienz vorzugsweise Strukturelemente wie Schalen- und Balkenelemente verwendet. Für die folgenden Untersuchungen werden daher zwei unterschiedliche Prinzipmodelle, um beide Modellierungsansätze abzudecken. Die Geometrie wird an schlanke stabilitätsgefährdete Bauteile aus dem Kranbau angelehnt.

Kastenträger

Als erstes Modell wird ein Schalenmodell in Form eines Kastenträgers aufgebaut, um den Einfluss von lokalen und globalen Eigenformen als Imperfektion zu untersuchen. Der Kastenträger ist 8400mm lang und hat einen Rechteckquerschnitt aus 1mm Platten mit einer Kantenlänge von 130mm und 100mm. Die Abmessungen wurden so gewählt, dass der Eigenwert der ersten lokalen und der ersten globalen Eigenform dicht beieinanderliegen, damit nicht eine Versagensform durch einen sehr hohen Eigenwert ausgeschlossen werden kann. Die ersten zehn Eigenformen des Kastenträgers sind im Anhang dargestellt.

Das Geometriemodell wird mit linearen Schalenelementen vernetzt, da die Imperfektion als Knotenverschiebung aufgebracht werden und die Robustheit der linearen Schalenelemente ausgenutzt werden soll. Des Weiteren wird auf Elemente mit quadratischer Ansatzfunktion aus Gründen der Effizienz verzichtet. Die zu erwartende Abweichung der Eigenwerte und Eigenformen kann vernachlässigt werden, da alle Berechnungen nur vergleichend zwischen unterschiedlichen Imperfektionen durchgeführt

3 Modellaufbau und Berechnung

werden. Damit wird der Modellfehler der linearen Elemente sich nicht auf die Ergebnisse dieser Arbeit auswirken. Eine Detaildarstellung der Vernetzung ist in Abbildung 3.1 abgebildet. Die Aufbringung von Lasten und Randbedingungen erfolgt an den Enden

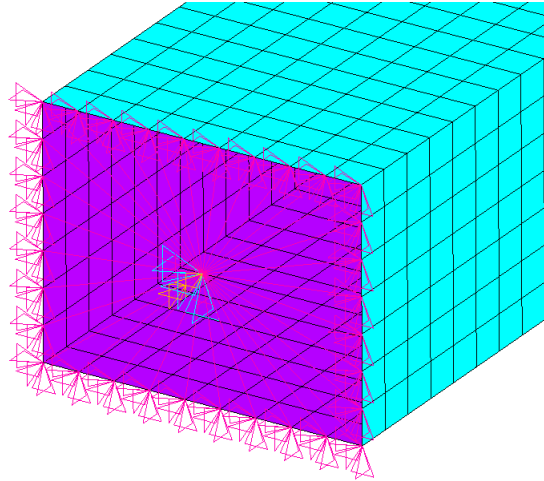


Abbildung 3.1: Festlager-Seite des Kastenträgers. Die Randbedingungen werden an dem zentralen Masterknoten aufgebracht und über starre Kopplungen (rosa) mit dem Rand der Strukturelemente verbunden

des Kastenträgers über Sterne aus starren Kopplungen. Die Randknoten der Strukturelemente werden mit einem Masterknoten im Flächenschwerpunkt des Querschnittes gekoppelt. Einseitig werden alle translatorischen Freiheitsgrade und der Rotationsfreiheitsgrad um die Längsachse des Trägers gesperrt. Die andere Seite des Trägers wird mit einer Längskraft beaufschlagt und in Querrichtung am Masterknoten gelagert. Damit entspricht das Modell den Randbedingungen des zweiten Euler-Falls.

Gitterrohrstruktur

Die strukturmechanische Berechnung der Stabilität eines Gitterrohrrahmens erfolgt in der Regel aus Effizienzgründen mit einem Balkenmodell. Die Untersuchung der Interaktion von Eigenformen als Imperfektion wird daher an einem dreidimensionalen Balkenmodell durchgeführt. Im Folgenden wird ein vereinfachtes Modell eines Kranauslegers berechnet, um die Überlagerung der Eigenformen an Balkenelementen zu testen. Dabei wird speziell auf die Mehrteiligkeit und die räumliche Gitterrohrstruktur Wert gelegt. Das Modell verzichtet gezielt auf Details wie die Koppelstellen der modularen Auslegersegmente, um die Komplexität des Modells gering zu halten und die Effekte des

3 Modellaufbau und Berechnung

Überlagerungsverfahrens isolieren zu können. Die Abmessungen der Gitterrohrstruktur sind in Tabelle 3.1 aufgeführt.

Tabelle 3.1: Abmessungen des Auslegermodells in mm

Abmessung	Wert
Achsabstand Gurtrohre horizontal	2700
Achsabstand Gurtrohre vertikal	2400
Halbzeug Gurtrohr	R219,1x10
Halbzeug Diagonale	R101,6x5
Länge Gurtrohre	61330
Gesamtlänge Ausleger	81330

Die Vernetzung des Gitterrohrrahmens erfolgt mit 1372 linearen Balkenelementen. Wie beim Schalenmodell des Kastenträgers steht auch hier die Robustheit und Effizienz des Modells im Vordergrund.

Die Modellierung der Randbedingungen des Gitterrohrrahmens ist an die Anbindung eines Auslegers an ein Grundgerät im Kranbau angelehnt. Die Lagerung und Kraftaufbringung erfolgt über die starre Kopplung der Gurtrohrenden mit einem Masterknoten in der Mitte der vier Gurtrohre. Der Masterknoten ist 10m in Längsrichtung von dem Ende der Gurtrohre entfernt, um die Kopfstücke eines Auslegers zu approximieren und das bei einer asymmetrischen Verformung entstehende Biegemoment nicht zu vernachlässigen. Am unbelasteten Ende sind alle Verschiebungen, sowie die Rotation um die Längsachse und um die schwache Querachse des Auslegers gesperrt. Am belasteten Ende sind nur die Verschiebungen quer zum Ausleger gesperrt. Die Belastung wird als Längskraft einseitig über den Masterknoten aufgebracht (Abbildung 3.2).

3.2 Berechnung

Die zuverlässige Berechnung von Stabilitätsproblemen erfordert aufgrund des im Allgemeinen nichtlinearen Verhaltens von schlanken Strukturen einen mehrstufigen Berechnungsprozess. In den folgenden Abschnitten wird dieser erst allgemein erläutert, nachfolgend wird dann im Einzelnen auf das modellspezifische Vorgehen eingegangen.

Der Berechnungsprozess beginnt mit einer geometrisch und physikalisch linearen statischen Berechnung unter einer Bemessungslast F , um den Spannungszustand in der Struktur zu berechnen. Hier wird für beide Modelle eine Kraft von 30 kN gewählt. Dies entspricht einer Kraft von 125% der kleinsten Euler-Last. Die Verzweigungslasten einer Struktur werden mittels einer linearen Beulanalyse, wie in Kapitel 2 erläutert,

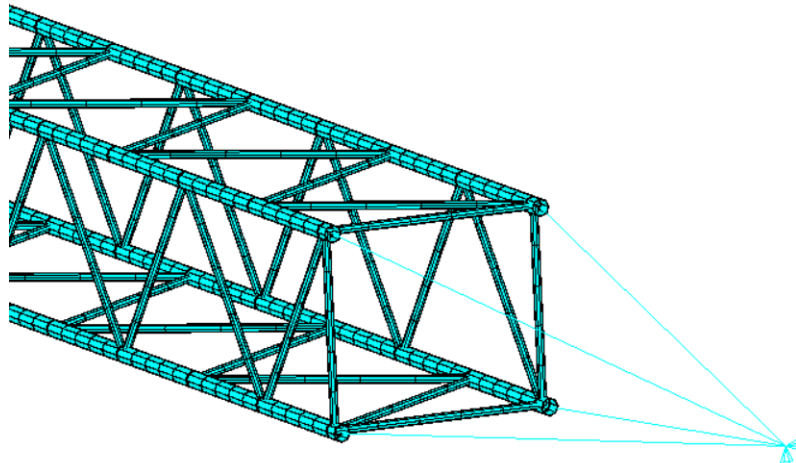


Abbildung 3.2: Starre Kopplung der Gurtrohre mit einem Masterknoten.

Tabelle 3.2: Parameter des linear elastischen Materialmodells

Materialeigenschaft	Wert
Elastizitätsmodul	210.000 MPa
Querkontraktionszahl	0,3

berechnet. Die Berechnung des Eigenwertproblems mit dem Block-Lanczos-Verfahren liefert die Lastfaktoren λ_i für die Verzweigungslasten. Jede Verzweigungslast hat eine zugehörige Verformungsfigur U_i welche die Versagensform der Struktur unter der Last charakterisiert.

Da die Eigenwerte und damit die kritischen Lasten unter der Annahme der linearen Steifigkeit und der Theorie erster Ordnung bestimmt werden, sind die errechneten Knicklasten nicht konservativ, wenn die Strukturen starke Nichtlinearitäten aufweisen. Aufgrund der Verwendung der linearen Steifigkeit kann auch der Einfluss einer Imperfektion nur bedingt abgebildet werden. Um diese Effekte zu berücksichtigen, muss der nichtlineare Kraft-Verformungszusammenhang mittels einer nichtlinearen Beulanalyse ermittelt werden. Mit dieser Analyse wird zum einen die Verformung und Spannung bei bestimmten Belastungen unter Berücksichtigung der nichtlinearen Kinematik bewertet und zum anderen der Kraft-Verformungszusammenhang diskutiert, um den Einfluss von Imperfektion auf instabile Punkte und Verzweigungen zu bewerten.

Die Berechnung der nichtlinearen Kraft-Verformungskurve erfolgt unter der Annahme der linearen Elastizität, da nur die Auswirkungen unterschiedlicher Imperfektionen auf das Steifigkeitsverhalten untersucht werden.

3 Modellaufbau und Berechnung

Die Imperfektion der Modelle wird als geometrische Ersatzimperfektion berücksichtigt. Dafür werden die Knoten des FE-Netzes durch Verformungsfelder verschoben, um eine Exzentrizität im Kraftfluss zu erzeugen. Für die Verformungsfelder werden die Eigenformen der linearen Beulanalyse benutzt, um eine möglichst kritische Vorverformung zu gewährleisten.

Besteht eine Imperfektion nur aus einer Eigenform, wird der Skalierungsfaktor der Verformung als Amplitude festgelegt, da die Vektorsumme der Verformung einer Eigenform in der Regel auf eins normiert ist. Wird eine Struktur für mehrere Lastfälle ausgelegt, können in jedem Lastfall unterschiedliche Bereiche der Struktur relevant für das Versagen sein. Wird beispielsweise eine einseitig eingespannte Gitterrohrstruktur durch eine Druckkraft in Längsrichtung auf die Gurtrohre belastet, wird die Last durch die geraden Gurtrohre getragen. In diesem Lastfall sind die Imperfektionen im Gurtrohr relevant. Mit einer Belastung durch eine Querkraft an der Spitze der Gitterrohrstruktur, wird die Kraft durch die Diagonalen getragen. Die konservative Imperfektion für diesen Fall sollte aus einer Überlagerung der ersten Eigenformen beider Lastfälle bestehen, um beide Versagensformen einleiten zu können. Der einfachste Ansatz für eine überlagerte Imperfektion I ist die lineare Kombination der Verformungsvektoren U_n mit den Skalierungsfaktoren α_n .

$$I = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \dots + \alpha_n U_n \quad (3.1)$$

Die Vorzeichen der Faktoren α_n und damit die Richtung der Eigenform, werden so gewählt, dass die maximale Verschiebung der Imperfektion maximal wird. Ist die Imperfektion überlagert, werden die Verformungen auf die Knotenkoordinaten addiert und die Elemente damit spannungsfrei vorverformt.

Imperfektion des Kastenträgers

Schalenmodelle zeigen in der Regel neben dem globalen Knicken auch noch lokale Eigenformen aufgrund der dünnwandigen Strukturen im Kraftfluss. Um zuerst den Einfluss der Überlagerung auf die Steifigkeit charakterisieren zu können, wird der zuvor vorgestellte Kastenträger mit den folgenden Imperfektionen gerechnet.

- Imperfektion aus globaler Eigenform
- Imperfektion aus lokaler Eigenform
- Überlagerung aus globaler und lokaler Eigenform als Imperfektion

3 Modellaufbau und Berechnung

Zuerst wird die globale Imperfektion in Form von der globalen Eigenform als einzelne Imperfektion aufgegeben, um die auftretenden Effekte isolieren zu können. Die globale Eigenform ist in Abbildung 3.3 links dargestellt. Die Amplitude einer Imperfektion zur Bemessung von stabilitätsgefährdeten Strukturen wird durch den Eurocode 3 geregelt. Da dieses Regelwerk die Basis für Stabilitätsnachweise im Stahlbau ist, wird dieser als Orientierung für die Größe der Imperfektion in den folgenden Untersuchungen herangezogen. Der Ausgangswert der Amplitude wird nach Eurocode 3 Teil 1-1 [4] zu $L/200 = 42 \text{ mm}$ festgelegt. Um die Sensitivität des Strukturverhaltens auf die Amplitude zu untersuchen, wird diese in zwei Schritten verändert. Um die Effekte von Auslöschungen zu untersuchen, wird zudem noch der Einfluss sehr großer und sehr kleiner Amplituden betrachtet.

Für die Untersuchung des Einflusses der lokalen Imperfektion auf das Stabilitätsversagen wird aus den ersten zehn Eigenformen die Eigenform mit dem kleinsten Eigenwert als Imperfektion auf die Struktur aufgebracht, welche ausschließlich aus Verformungen in Teilbereichen der Struktur besteht. Die gewählte Eigenform ist in Abbildung 3.3 rechts dargestellt. Der Ausgangswert für die Amplitude der Imperfektion wird nach dem Eurocode 3 Teil 1-5 [5] gewählt. Der Eurocode schreibt vor, dass der Faktor für die Berechnung der Amplitude aus der kleinsten Abmessung des Beulfeldes bestimmt wird. Da das Verformungsmaximum der gewählten lokalen Eigenform auf der Fläche mit 130mm Kantenlänge im Querschnitt auftritt wird die kleinste Abmessung mit $L_k = 130 \text{ mm}$ als maßgebend herangezogen. Die Amplitude der Imperfektion ergibt sich zu $L_k/200 = 0,65 \text{ mm}$. Auch in diesem Fall wird dieser Wert variiert, um die Sensitivität des Strukturverhaltens zu untersuchen.

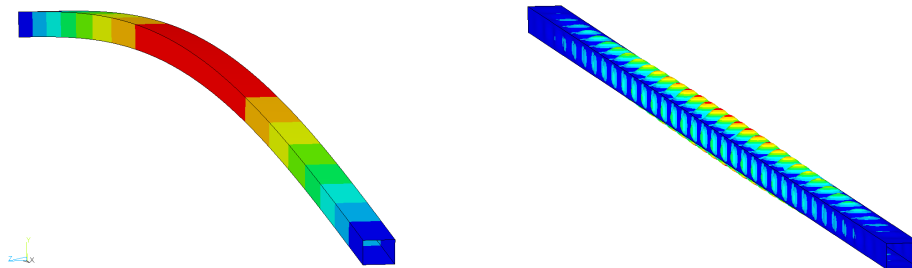


Abbildung 3.3: Darstellung der als Imperfektion verwendeten Eigenformen. links: globale Eigenform, rechts: lokale Eigenform

Die Änderung der Tragwirkung von Imperfektionen wird anschließend noch durch die lineare Überlagerung von lokalen und globalen Eigenformen zu einer kombinierten

3 Modellaufbau und Berechnung

Imperfektion untersucht. Die Überlagerung der lokalen und globalen Imperfektion ist beispielhaft in der Abbildung 3.4 dargestellt.

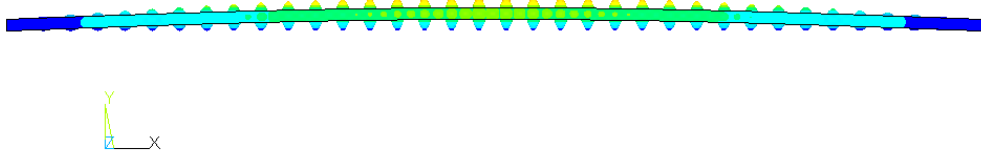


Abbildung 3.4: Überlagerung aus globaler und lokaler Eigenform als Imperfektion. Lokale Verformungen um den Faktor 100 überhöht dargestellt.

Imperfektion der Gitterrohrstruktur

Die Eigenformen von Balkenstrukturen können ebenfalls in lokale und globale Formen klassifiziert werden. Das globale Knicken bezeichnet dabei das Versagen der gesamten Struktur und das lokale Knicken das Ausweichen eines oder mehrerer Einzelstäbe oder eines Teils der Balkenstruktur.

Die Interaktion aus Einzelstabknicken und Gesamtstabknicken wird untersucht, indem zuerst nur die erste globale Eigenform als Imperfektion auf das Modell aufgebracht wird. Dabei wird die Amplitude der Imperfektion nach dem Eurocode 3 [4] mit der Bauteillänge $L = 61330 \text{ mm}$ zu $L/200 = 306,65 \text{ mm}$ gewählt. Das Versagen des Einzelstabes wird untersucht, indem die zweite Eigenform als Imperfektion auf das Modell aufgegeben wird. Die zweite Eigenform besteht nur aus lokalen Verformungen an den Gurtrohrabschnitten. Die Amplitude der Imperfektion wird nach der Vorgabe der Eurocode 3 [4] mit der Bauteillänge $L = 4030 \text{ mm}$ zu $L/200 = 20,15 \text{ mm}$ bestimmt. Die lokale und die globale Imperfektion ist in Abbildung 3.5 dargestellt.

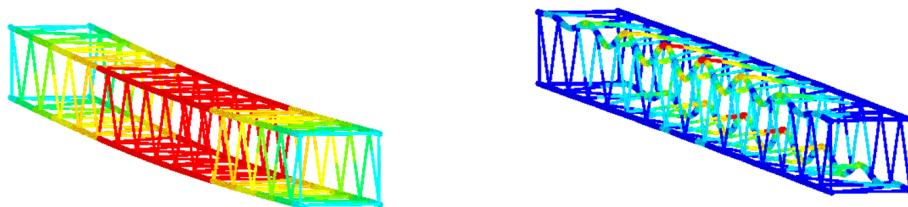


Abbildung 3.5: Darstellung der als Imperfektion verwendeten Eigenformen. links: globale Eigenform, rechts: lokale Eigenform

Die kombinierte Imperfektion wird durch die lineare Überlagerung der lokalen und globalen Eigenform mit konstanten Skalierungsfaktoren berechnet. Um die Sensitivität des Strukturverhaltens auf die Anteile der Imperfektion zu untersuchen, werden die Skalierungsfaktoren variiert. Die Überlagerung von zwei Eigenformen ist beispielhaft in Abbildung 3.6 dargestellt.

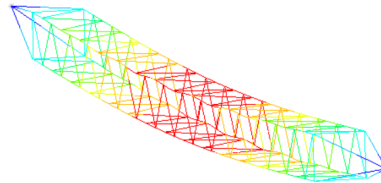


Abbildung 3.6: Überlagerung aus globaler und lokaler Eigenform als Imperfektion

3.3 Automatisierte Überlagerung von Eigenformen

Die händische Überlagerung von Eigenformen ist aufgrund der großen Anzahl an Kombinationsmöglichkeiten aus Vorzeichen und Amplitude nicht effektiv und sinnvoll. Des Weiteren bringt die Anzahl der Bauteile einer Gesamtstruktur eine Vielzahl an Eigenformen mit sich, die kombiniert werden müssen. Der Aufwand einer Überlagerung potenziert sich demnach.

Neben dem steigenden Aufwand kommt es bei der Überlagerung als Linearkombination dazu, dass sich Eigenformen mit unterschiedlichen Vorzeichen in kritischen Bereichen auslöschen oder so überlagern, dass das Berechnungsergebnis zu konservativ wird. Im Folgenden wird daher ein Überlagerungsverfahren vorgestellt, welches die Steuerung der Amplitude und des Vorzeichens übernimmt und den Betrag der Auslöschung von Eigenformen reduziert.

Die Überlagerung mit reduzierter Auslöschung erfordert das ortsabhängige Skalieren der Eigenformen. Überschneiden sich zwei Eigenformen in einem Bereich muss die Verformung der zweiten Eigenform in dem Bereich der Überschneidung stetig verringert werden, um die Verformung der ersten Eigenform nicht auszulöschen oder zu überhöhen. Eine stetige Eigenform wird gefordert, da das Einbringen von Unstetigkeiten in der nichtlinearen Beulanalyse zu unphysikalischen Spannungsüberhöhungen führen würde. Die Stetigkeit wird durch die Ermittlung eines stetig verteilten Gewicht-

3 Modellaufbau und Berechnung

tungswertes für jede Eigenform erreicht. Durch das Aufsummieren des Gewichtungswertes jeder Eigenform wird die Belegung der Struktur mit Imperfektionen verfolgt.

Dieser Ablauf wird mittels eines mehrstufigen Überlagerungsalgorithmus umgesetzt. Der Algorithmus besteht aus den folgenden Einzelschritten, welche für eine vorgegebene Anzahl an Eigenformen ausgeführt wird und die Imperfektion so iterativ überlagert wird.

Schritt 1: Normierung des Verschiebungs- und Rotationsfeldes

Schritt 2: Berechnung des Gewichtungswertes für jeden Knoten

Schritt 3: Skalieren der Eigenform mit den Gewichtungswerten

Schritt 4: Ermitteln des Vorzeichens der Eigenform

Schritt 5: Aufsummieren der skalierten Eigenformen zu einer Imperfektion

Eine numerisch berechnete Eigenform besteht aus Verformungen und Verdrehungen für jeden Knoten des FE-Netzes. Die Verformungen auf den Maximalwert der Vektorsumme normiert. Damit liegt der Wertebereich einer Verschiebung zwischen minus eins und eins. Die Rotationen sind die Ableitung der Verformungen und stellen den Tangens des Verformungswinkels dar. Ihr Wertebereich ist theoretisch unbegrenzt aufgrund der Asymptoten des Tangens, liegt praktisch jedoch auch zwischen minus eins und eins.

Die Verformung einer Eigenform besteht im Allgemeinen aus Wellen welche analytisch durch eine Überlagerung harmonischer Funktionen beschrieben werden kann. Die Auslöschung dieser Wellen kann durch die Einführung einer Funktion verhindert werden, deren Werteverteilung der Verteilung von harmonischen Verformungen in einer Eigenform folgt. Mit der theoretischen Überlegung, dass die lokal betrachtete Verformung einer Eigenform immer dem Sinus - oder dem Kosinus, da kein Anfangspunkt betrachtet wird - entspricht, kann unter Verwendung der differentiellen Beziehung zwischen Verformung und Rotation eine Funktion definiert werden, welche die lokalen Verformungen auf der Struktur erkennt und Werte nahe eins liefert. Die Funktion ist durch das Additionstheorem $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ inspiriert.

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{x}_i^2 + (\nabla \mathbf{x}_i)^2 \quad (3.2)$$

Dabei ist \mathbf{x}_i das Verformungsfeld und $\nabla \mathbf{x}_i$ das Rotationsfeld der Eigenform i . Wenn das Verformungsfeld dem Sinus entspricht, wird das Rotationsfeld aufgrund der dif-

3 Modellaufbau und Berechnung

ferentiellen Beziehung dem Kosinus entsprechen. Dort wo das Verformungs- und Rotationsfeld kleine Amplituden hat oder nicht harmonisch verläuft, wird ein niedriger Wert berechnet, sodass hier noch weitere Eigenformen überlagert werden können.

Die Gleichung 3.2 wird für jede Eigenform ausgewertet und aufsummiert, um die folgenden Eigenformen zu skalieren. Die Eigenform N wird mit dem Gewichtungswert \mathbf{g}_N skaliert. Der Startwert des Gewichtungswertes ist der Einsvektor, um die erste Eigenform immer vollständig auf die Struktur aufzubringen.

$$\mathbf{g}_N = \mathbf{1} + \sum_{i=1}^N \mathbf{G}_{i-1} \quad (3.3)$$

Um nun mit dem Gewichtungswert \mathbf{g}_N die Eigenform N zu skalieren, werden die Verformungen und Rotationen der Eigenform durch den Gewichtungswert geteilt und aufsummiert Gleichung 3.4.

Bevor die Eigenform auf die Imperfektion aufsummiert wird, muss das Vorzeichen bestimmt werden. Die Entscheidung wird über die Fläche unter der Imperfektion getroffen. Da eine größere Eigenform tendenziell auch größere Spannungen liefert und konservative Spannungs- und Steifigkeitsergebnisse liefern sollte, wird das Vorzeichen so angepasst, dass mit jeder aufsummierten Eigenform, die Fläche unter der Imperfektion größer wird.

$$\mathbf{I} = \mathbf{U}_1 + \sum_{i=2}^N \frac{\mathbf{U}_i}{\mathbf{g}_i^2} \quad (3.4)$$

4 Interaktion von Eigenformen als Imperfektion

Eine Eigenform als Imperfektion bestimmt das Tragverhalten einer Struktur maßgeblich durch die Einbringung von Exzentrizitäten in den Kraftfluss. Bei der automatisierten Überlagerung von Eigenformen muss deshalb der Einfluss auf die Steifigkeit und die Spannungsverteilung einzelner Imperfektionen oder von Kombinationen bekannt sein. Außerdem ist die Phänomenologie der Steifigkeitsänderung durch Aufbringung von Imperfektionen und die Interaktion der einzelnen Eigenformen für die Definition von Anforderungen an das Überlagerungsverfahren zu untersuchen. In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der Untersuchung von verschiedenen Eigenformen als Imperfektion an den zwei zuvor vorgestellten Prinzipmodellen präsentiert. Dabei wird zuerst das Schalenmodell herangezogen und der Einfluss einer globalen und einer lokalen Eigenform erläutert.

4.1 Kastenträger

Die lineare Beulanalyse des Kastenträgers liefert eine erste kritische Beullast von $F_{crit} = 24 \text{ kN}$ für die erste Eigenform des Trägers. Die Eigenform ist dabei die erste globale Versagensform des Eulerfalls. Weitere Eigenformen sind lokale Beulformen, dessen Eigenwerte in Tabelle 4.1 aufgelistet sind. Die Eigenformen sind im Anhang dargestellt.

Tabelle 4.1: Beullasten zwei bis sieben des Kastenträgers in N

Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6	Mode 7
25072	25072	25088	25088	25114	25115

Die lineare Beulanalyse stellt die ideale Traglast der Struktur dar und kann nicht immer für den Nachweis dieser verwendet werden, da nur die lineare Steifigkeit der unbelasteten Struktur modelliert wird. Um eine abgesicherte Tragfähigkeit zu berechnen,

4 Interaktion von Eigenformen als Imperfektion

wird eine Imperfektion aufgegeben und eine nichtlineare Beulanalyse durchgeführt. Zuerst wird die Reaktion des Modells auf einzelne Imperfektionen diskutiert, im Anschluss erfolgt dann die Überlagerung der Eigenformen, um die Interaktion der Eigenformen zu beurteilen.

Die nichtlineare Beulanalyse des Kastenträgers mit einer kleinen globalen Imperfektion zeigt zu Beginn der Belastung einen linearen Anstieg der Verformung. Die Steigung des linearen Zusammenhangs kann als Längssteifigkeit des Nennquerschnittes identifiziert werden. Wird die Last weiter gesteigert, wird die Verformung nichtlinear und nähert sich asymptotisch der Last der globalen Knickform an, bis die Tangente des Lastpfades nahezu horizontal wird und ein Stabilitätsverlust vorliegt. Die Verformung des Trägers beschränkt sich zu Beginn der Belastung auf die Stauchung durch die Druckkraft. Mit größer werdender Last wird das Biegemoment durch die Exzentrizität der Imperfektion größer. Das größere Biegemoment resultiert wiederum in einer größeren Durchbiegung des Kastenträgers. Der Effekt verstärkt sich selbst und die Nichtlinearität der Verformung wird stetig größer. Die äußere Last wird nur noch durch die Biegesteifigkeit des Querschnittes getragen weshalb sich eine lineare Spannungsverteilung über den Querschnitt einstellt. Bei allen Varianten kommt es nicht zum lokalen Beulen, die Last wird durch den gesamten Querschnitt des Trägers getragen. Die Kraft-Verformungs-Kurven sind in Abbildung 4.1 dargestellt.

Die nichtlineare Beulanalyse des Kastenträgers mit einer lokalen Imperfektion zeigt ein deutlich anderes Verhalten als die Berechnung der globalen Imperfektion. Die Last kann bis über den Eigenwert gesteigert werden ohne, dass die Struktur einen Stabilitätsverlust zeigt. Durch die lokale Imperfektion werden die Flächen vorgekrümmt. Eine lokale Krümmung reduziert die Tragwirkung der Längssteifigkeit aufgrund der geringeren Biegesteifigkeit. Die Last wird in die Ecken des Querschnittes umgelagert und dort durch nicht ausgebeulte Bereiche wieder durch die Längssteifigkeit getragen. Die Lastumlagerung ist in der Verteilung der Spannungsverteilung erkennbar (Abbildung 4.2). Die Kraft-Verformungs-Kurven verschiedener Imperfektionen sind in Abbildung 4.1 dargestellt. Wird die Amplitude der Imperfektion und damit die Vorkrümmung der Platten erhöht, reduziert sich die Längssteifigkeit und auch der Anteil der gekrümmten Fläche. Die Längssteifigkeit der Gesamtstruktur nimmt demzufolge mit steigender Amplitude ab.

In Abbildung 4.1 ist sichtbar, dass die Druckbelastung erhöht werden kann ohne, dass globales Knicken auftritt. Da die Struktur bereits lokal ausgebeult ist verringert sich der tragende Querschnitt und damit die Steifigkeit des Kastenträgers. Aus diesem

4 Interaktion von Eigenformen als Imperfektion

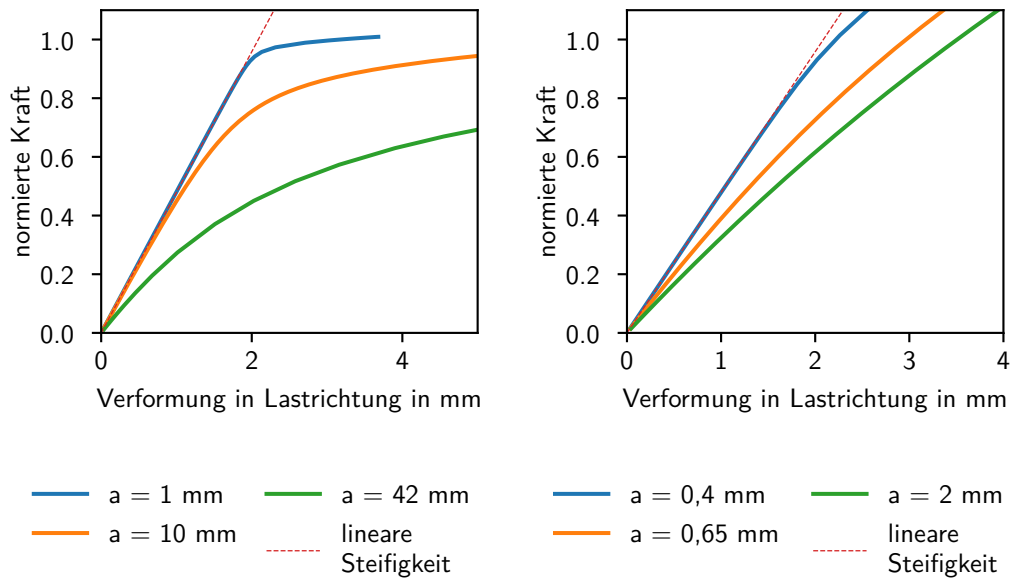


Abbildung 4.1: Kraft-Verformungs-Kurven von drei lokalen (links) und drei globalen (rechts) Imperfektionen mit unterschiedlicher Amplitude a . Die Kraft ist auf den ersten Eigenwert normiert

Grund muss der Eigenwert der globalen Eigenform früher auftreten. Die Lage der Eigenwerte der verformten und nichtlinear vorgespannten Struktur wird untersucht (Begleitende Eigenwertanalyse, s. Abschnitt 2.6), um diese Aussage zu bestätigen. Die Eigenwerte bei einer Last von 10 kN sind in Tabelle 4.2 dargestellt. Der erste Eigenwert gehört zur globalen Versagensform und tritt bei einer Last von $0,71 F_{crit}$ auf. Diese Versagensform müsste daher in der nichtlinearen Beulanalyse vor Erreichen der Kraft F_{crit} und trotz der bereits lokal kollabierten Struktur auftreten.

Die berechnete lokale Imperfektion besteht nur aus einer symmetrischen Eigenform, welche auch nur ein symmetrisches Verformungsverhalten aufweist. Dadurch, dass der Träger momentenfrei bleibt und die Längskräfte im Flächenschwerpunkt der Querschnitte bleiben, kann kein globales Knicken eingeleitet werden.

Tabelle 4.2: Beullasten der verformten Struktur mit 10 kN

Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5
17260	25574	25574	25596	25596

4 Interaktion von Eigenformen als Imperfektion

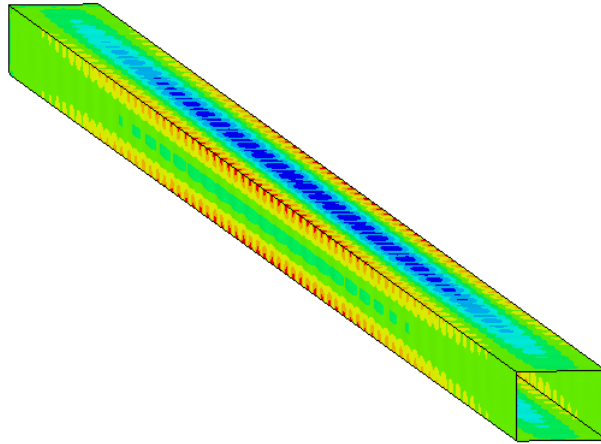


Abbildung 4.2: Membranspannungsanteil der Vergleichsspannung bei der Last F_{crit} . Die lokale Imperfektion reduziert die Tragwirkung auf die Kanten des Kastenträgers. Roter Bereich kennzeichnet hohe und blauer Bereich niedrige Vergleichsspannungen

Das Einleiten der lokalen und globalen Versagensformen kann an dem Kastenträger somit getrennt den einzelnen Imperfektionen zugeordnet werden. Um sowohl globale als auch lokale Versagensformen einzuleiten, werden nun beide Eigenformen überlagert und die Auswirkung auf die Traglast berechnet. Die Überlagerung zeigt erwartungsgemäß eine reduzierte Anfangssteifigkeit durch die lokale Eigenform (Abbildung 4.4). Es stellt sich wieder ein Verformungsbild mit lokaler Krümmung durch die lokalen Anteile in der Imperfektion ein. Durch die globale Imperfektion geht die Verformung dann aber in ein globales Ausknicken über. Die Kraft-Verformungs-Kurve der kombinierten Imperfektion zeigt eine asymptotische Näherung zu niedrigeren Traglasten als die reine globale Imperfektion in Abbildung 4.1. In der Abbildung 4.3 ist an der Spannungsverteilung in den Ecken zu erkennen, dass die äußere Last durch die Biegesteifigkeit der Eckbereiche einseitig getragen wird. Der effektiv tragende Querschnitt ist durch die einseitige Tragwirkung der Biegung geringer und der Kastenträger knickt früher aus.

Die bisherigen Analysen zeigen, dass die globale Eigenform einer Imperfektion für den globalen Stabilitätsverlust in der Kraft-Verformungs-Kurve verantwortlich ist. Die Lastumlagerung auf die Ecken der Struktur zeigt, dass auch die lokale Imperfektion

4 Interaktion von Eigenformen als Imperfektion

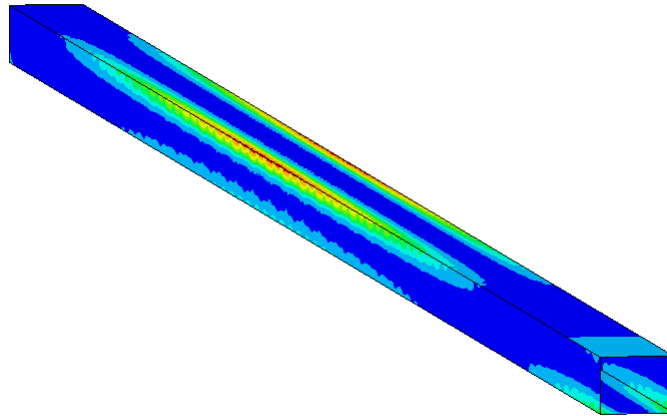


Abbildung 4.3: Membranspannungsanteil der Vergleichsspannung bei der Last $0,85F_{crit}$. Die überlagerte Imperfektion reduziert die Tragwirkung einseitig auf die Kanten des Kastenträgers. Roter Bereich kennzeichnet hohe und blauer Bereich niedrige Vergleichsspannungen

für das globale Tragverhalten nicht vernachlässigbar ist. Jedoch tritt ohne globale Imperfektion kein Stabilitätsproblem auf, da die Struktur nicht in den unsymmetrischen Verformungspfad verzweigt.

Da in der Praxis Strukturen nicht immer symmetrisch sind und zentrisch belastet werden, ergeben sich dadurch auch unsymmetrische Eigenformen. Im Folgenden wird der Einfluss von unsymmetrischen Imperfektionen an dem Kastenträger untersucht. Für die Berechnung der Imperfektion wird ein Biegemoment um die schwache Achse am Ende des Trägers aufgebracht und die erste Eigenform als Imperfektion benutzt. Die Amplitude der Imperfektion wird nach Eurocode 3 ebenfalls zu $0,65 \text{ mm}$ bestimmt. Mit der nichtlinearen Beulanalyse wird eine Kraft-Verformungs-Kurve ermittelt. In dieser ist sichtbar, dass die Struktur mit der unsymmetrischen lokalen Imperfektion zu Beginn der Belastung sich linear Verhalten, da die Membrantragfähigkeit der Schale die Drucklast trägt. Die Last kann gesteigert werden, bis die Verzweigungslast erreicht ist. Die Verformung des Kastenträgers verzweigt dann in einen Lastpfad mit unsymmetrischer Verformungskonfiguration. Vor der Verzweigung der Struktur trägt die Struktur hauptsächlich über den Querschnitt des Kastens gleichverteilt. Lokale Spannungserhöhungen sind im Bereich der Imperfektion durch die Exzentrizität ersichtlich. Nach der Verzweigung des Lastpfades ist die Membran-Komponente der

4 Interaktion von Eigenformen als Imperfektion

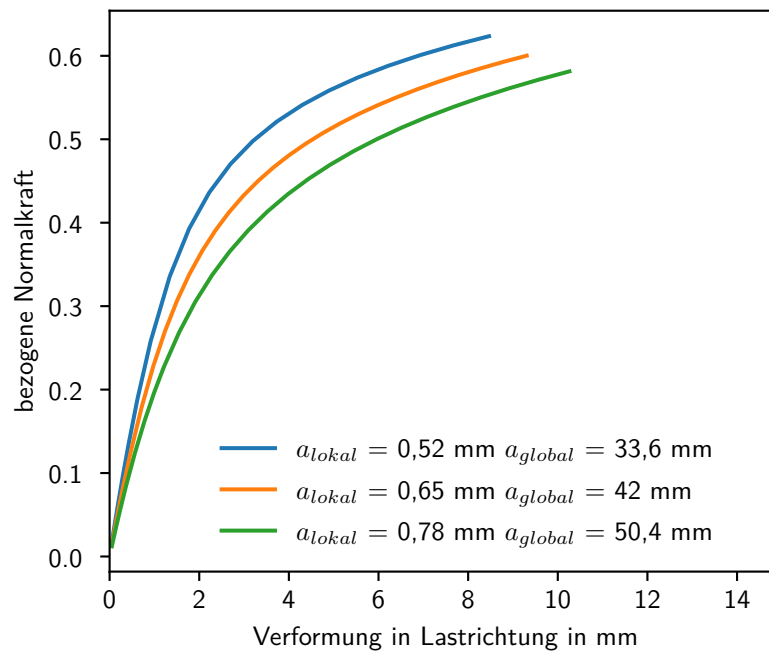


Abbildung 4.4: Ergebnisse der nichtlinearen Berechnung

Normalspannungsverteilung linear über den Querschnitt verteilt, die Struktur trägt durch ihr Biegeträgheitsmoment des Querschnittes global (Abbildung 4.5). Somit kann gezeigt werden, dass eine unsymmetrische lokale Imperfektion auch eine globale Versagensform einleiten kann.

Zusammenfassend kann für den Kastenträger festgehalten werden, dass die globale Imperfektion nur globale Versagensformen einleiten kann. Es zeigt sich ein nichtlinearer Kraft-Verformungs-Pfad der sich an die lineare Eulerlast annähert. Lokales Beulen kann nur eingeleitet werden, wenn auch eine lokale Imperfektion aufgebracht wird. Durch die Einbringung von lokalen Vorkrümmungen wird die Drucklast umgelagert und die Steifigkeit reduziert. Aufgrund der symmetrischen Imperfektion wird das globale Versagen nicht eingeleitet. Demnach ist eine unsymmetrische Imperfektion nötig, um die globale unsymmetrische Versagensform einzuleiten.

4 Interaktion von Eigenformen als Imperfektion

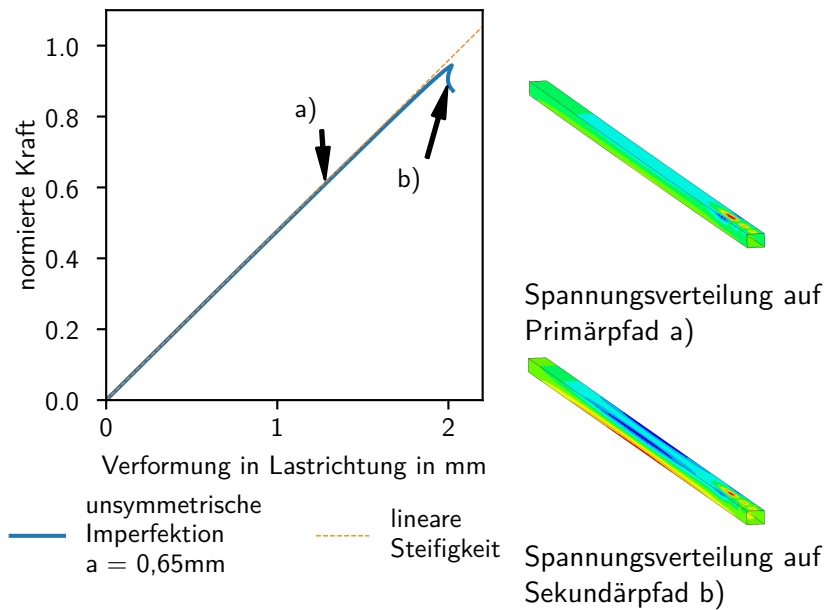


Abbildung 4.5: Spannungsverteilungen auf primärem und sekundärem Pfad

4.2 Gitterrohrstruktur

Die lineare Beulanalyse der Gitterrohrstruktur liefert eine erste Beullast von 19122 kN die zur globalen Eigenform gehört. Weitere Beullasten sind in Tabelle 4.3 aufgelistet und gehören zu den lokalen Beulformen der Gurtrohre. Diese sind im Anhang dargestellt.

Tabelle 4.3: Eigenwerte des Auslegers in kN

Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6
20539	20557	20570	20586	20588

Die nichtlineare Beulanalyse der Struktur mit der globalen Eigenform als Imperfektion zeigt einen nichtlinearen Verlauf und einen Verzweigungspunkt im Kraft-Verformungs-Graphen. Die Verformung ist unter geringer Last global und affin zur Imperfektion. Die Biegung des Auslegers nimmt mit der Last zu und erhöht dadurch die Druckspannung in den Gurtrohren einseitig. Erreicht die Druckspannung ein kritisches Niveau, beult das Gurtrohr lokal aus (Abbildung 4.7). Die Biegesteifigkeit des Auslegers nimmt aufgrund der lokalen Biegung der Gurtrohre schlagartig ab und die Verformung der

4 Interaktion von Eigenformen als Imperfektion

Struktur verzweigt auf einen Sekundärpfad. Dabei wird die Last in die Diagonalen umgelagert und die globale Verformung des Auslegers wird größer. Die Verformung nimmt auf dem instabilen Sekundärpfad weiter zu, da die Gurtrohre lokal tragen und durch ihre geringere Biegesteifigkeit größere Verformungen in Längsrichtung des Rohres zulassen. Mit einer geringeren Amplitude der Imperfektion wird das Tragverhalten qualitativ nicht beeinflusst (Abbildung 4.6). Die Steifigkeit der Struktur ist größer als die der Ausgangsvariante und führt daher zu geringeren Verformungen. Die Spannungen sind trotz größerer Tragfähigkeit geringer, da die Gurtrohre mit weniger Exzentrizität die Last zum größeren Teil durch die Längssteifigkeit statt der Biegesteifigkeit abtragen.

Die lokale Eigenform als Imperfektion zeigt einen nahezu ideal linearen Verlauf der Last bis zu einer reduzierten Verzweigungslast. Die Verformung auf dem Primärpfad bildet sich zuerst symmetrisch aus und wird durch die Biegung der Gurtrohre dominiert. In der Nähe des Verzweigungspunktes wird die Verformung dann unsymmetrisch aufgrund der geringeren Biegesteifigkeit der verformten Gurtrohre. Die Asymmetrie führt dazu, dass die Verformung des Auslegers in einen unsymmetrischen Sekundärpfad verzweigt und eine globale Versagensform eingeleitet wird. Die begleitende Eigenwertanalyse zeigt hier, dass die globale Eigenform auch nach dem Ausbeulen der lokalen Gurte noch möglich ist, jedoch durch den Abfall der Last verhindert wird. Mit geringerer Amplitude der Imperfektion steigt die Steifigkeit der Struktur und die Verzweigungslast steigt ebenfalls, da die geringere Krümmung der Gurtrohre eine höhere Drucksteifigkeit bewirkt.

Die nichtlineare Berechnung der Imperfektion aus einer Kombination von lokalen und globalen Eigenformen Abbildung 4.8 zeigt ein ähnliches Verhalten zur nichtlinearen Berechnung mit lokaler Imperfektion. Die Steifigkeit verhält sich zu Beginn der Kraft-Verformungs-Kurve ebenfalls nahezu linear und wird zunehmend nichtlinear je mehr Last aufgebracht wird. Die Verformung wird zuerst durch die globale Biegung des Auslegers dominiert. Die Druckkraft auf die Gurte steigt bis zum Verzweigungspunkt und fällt dann auf dem instabilen Sekundärpfad wieder ab. Im Vergleich zur lokalen und globalen Imperfektion erreicht die kombinierte Imperfektion geringere Lasten und der Umschlag in den Sekundärpfad erfolgt weniger abrupt.

Um den Einfluss der einzelnen Eigenformen zu untersuchen werden mehrere Varianten mit unterschiedlichen Amplituden-Kombinationen aus lokalen und globalen Eigenformen gerechnet. Die Kurvenschar Abbildung 4.9 zeigt dabei ein qualitativ einheitliches Tragverhalten; die Nichtlinearität durch die globale Imperfektion ist zu Beginn der

4 Interaktion von Eigenformen als Imperfektion

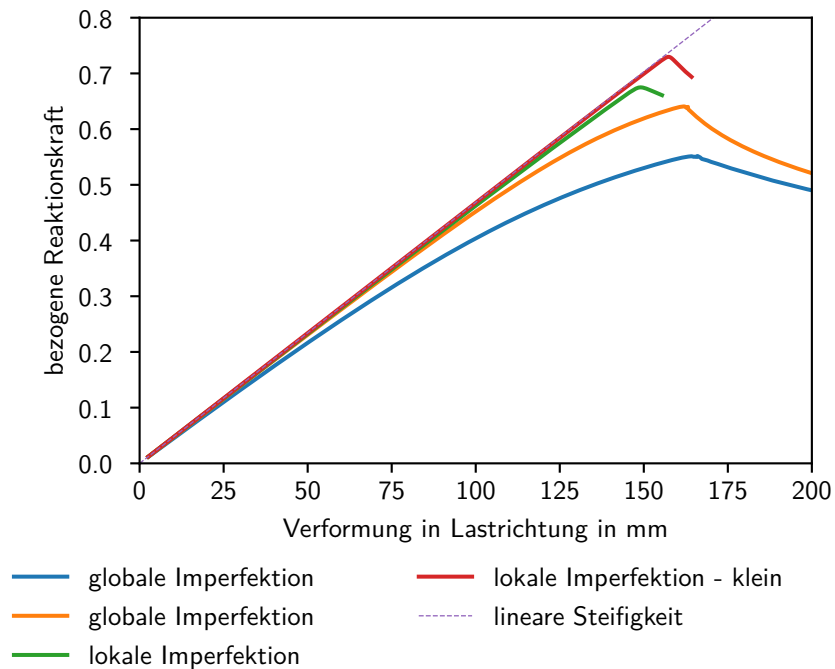


Abbildung 4.6: Kraft-Verformungs-Kurven der Gitterrohrstruktur mit einzelnen Eigenformen als Imperfektion

Belastung dominant und alle Kurven verzweigen in eine globale Versagenskonfiguration. Die Imperfektionen mit dem größten und kleinsten Anteil der globalen Eigenform bilden in dieser Schar die obere und untere Schranke der Kollaps-Last. Dies zeigt, dass die Wahl der Amplitude der globalen Eigenformen einer kombinierten Imperfektion den größten Einfluss auf das Tragverhalten der Struktur hat.

Zusammenfassend kann für die Gitterrohrstruktur festgehalten werden, dass die Struktur mit einer globalen Imperfektion unter Belastung eine größere Nichtlinearität zeigt. Der Verformungspfad der Struktur verzweigt durch lokales Beulen der Gurtrohre in einen instabilen Sekundärpfad. Mit steigender Amplitude der globalen Imperfektion steigt auch die Beullast und die Nichtlinearität des Primärpfades. Die lokale Imperfektion führt ebenfalls zu lokalen Beulen und daraufhin globalem Versagen durch eine Verzweigung auf einen instabilen Pfad. Die Verformungen sind bis zur Verzweigungspunkt nahezu linear.

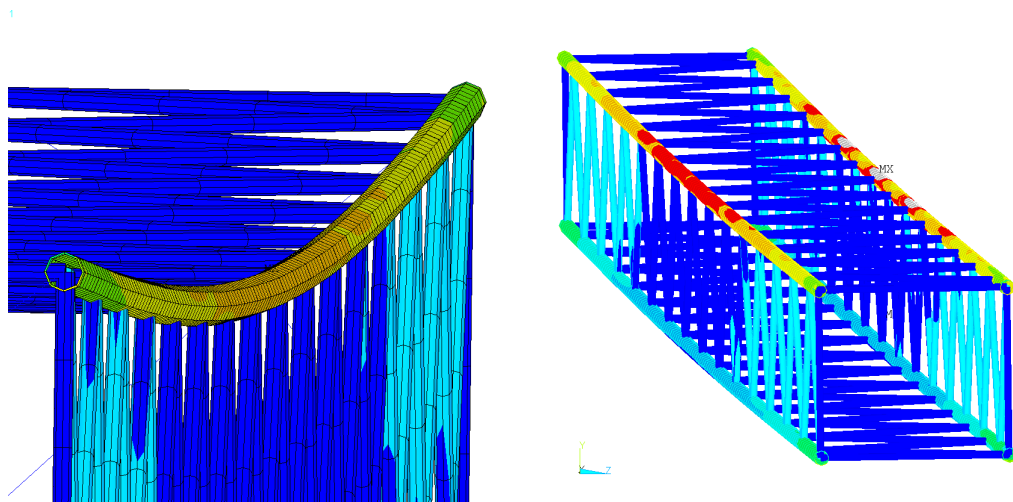


Abbildung 4.7: Spannungsverteilungen auf primärem (links) und sekundärem (rechts) Pfad

4.3 Definition von Anforderungen für ein Überlagerungsverfahren

Die Überlagerung von lokalen und globalen Eigenformen als Imperfektion beeinflusst die Tragfähigkeit der zuvor analysierten Prinzipmodelle signifikant. Daher werden in diesem Abschnitt die Anforderungen an ein automatisiertes Überlagerungsverfahren definiert, mit dem eine konservative Imperfektion ermittelt werden soll. Aus der Berechnung der globalen Imperfektionen ist ersichtlich, dass Schalenstrukturen nicht zwingend eine lokale Beulform einleiten und damit die Steifigkeit der Struktur nicht konservativ ist. Deshalb ist es erforderlich, dass ein Überlagerungsverfahren die globale Eigenform in der Imperfektion berücksichtigt. Die maximale Tragfähigkeit im Kraft-Verformungs-Graphen des Kastenträgers und der Gitterrohrstruktur zeigen eine starke Abhängigkeit von der Amplitude der Imperfektion. Daraus kann abgeleitet werden, dass das Überlagerungsverfahren die geforderte Amplitude mit minimaler Abweichung überlagern muss, um eine zu konservative Auslegung zu vermeiden.

4 Interaktion von Eigenformen als Imperfektion

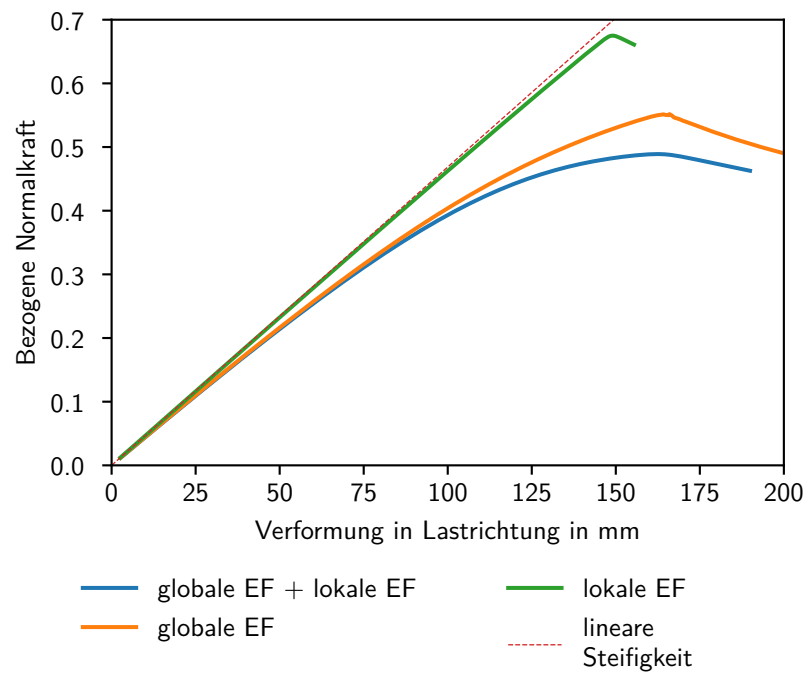


Abbildung 4.8: Kraft-Verformungs-Kurven der Gitterrohrstruktur mit Überlagerung aus Eigenformen als Imperfektion

Zusammenfassend können die Anforderungen an ein Überlagerungsverfahren somit wie folgt definiert werden. Das Überlagerungsverfahren muss . . .

- lokale Eigenformen in der Imperfektion berücksichtigen, damit die Struktur lokale Lastumlagerungen einleiten kann.
- globale Eigenformen überlagern, damit die Struktur die nichtlinearen Verformungen der Struktur einleiten kann.
- die Amplitude der Eigenformen den Vorgaben entsprechend skalieren.

4 Interaktion von Eigenformen als Imperfektion

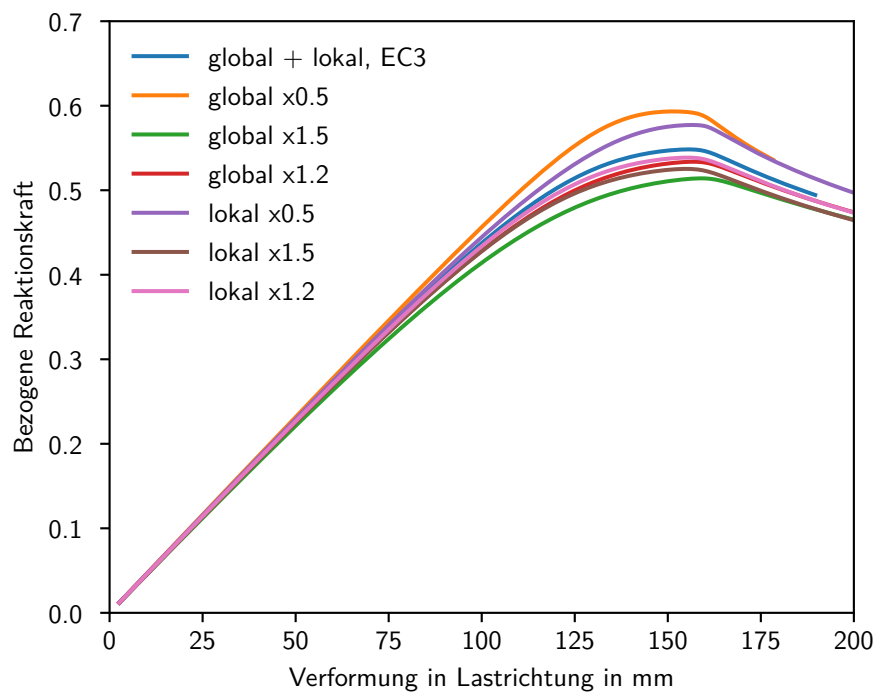


Abbildung 4.9: Last-Verformungskurven der Gitterrohrstruktur mit Skalierung der lokalen und globalen Eigenform

5 Überlagerung von Eigenformen

Im vorangegangenen Kapitel wurde die Interaktion von Eigenformen behandelt, um die Anforderungen an ein Überlagerungsverfahren zu definieren. An den zuvor erlangten Ergebnissen wird nun das Verfahren der Gewichtung von Eigenformen (s. Abschnitt 3.3) zur automatisierten Überlagerung bewertet. Die Bewertung wird zuerst an rein geometrischen Parametern wie der Verteilung des Gewichtungswertes über der Struktur und der resultierenden Verformungsverteilung der Imperfektion vorgenommen. Im Anschluss wird die Qualität der Überlagerung dann an Ergebnissen aus der nichtlinearen Beulanalyse der imperfekten Struktur diskutiert und bewertet.

5.1 Geometrische Betrachtung

Um die Überschneidungen in den Eigenformen zu detektieren und Auslöschungen zu minimieren, wird das in Abschnitt 3.3 eingeführte Überlagerungsverfahren angewendet. Der Gewichtungswert (Gleichung 3.2) bestimmt die Veränderung des Verformungsfeldes der Eigenform und ist damit ein wichtiges Bewertungskriterium für die Ergebnisqualität des Überlagerungsalgorithmus. Das Feld aus Gewichtungswerten wird aus der Rotation und Verformung einer Eigenform berechnet. Um eine gleichmäßige Skalierung der Eigenform in überschneidenden Bereichen zu gewährleisten, muss der Gewichtungswert eine Eigenform möglichst gleichmäßig skalieren.

Die Ermittlung des Gewichtungswertes kann zuerst am stark vereinfachten Beispiel getestet werden. In Abbildung 5.1 sind in der ersten Zeile die auf das Maximum normierten Verläufe der Verformung und Rotation für die Eigenform am 1D-Balken mit momentenfreier Lagerung (Eulerfall 2) dargestellt. Aufgrund der rein sinusförmigen Lösung ist der Gewichtungswert konstant über die Balkenlänge (Abbildung 5.1 oben). Die Verläufe der Verformung und der Rotation stimmen mit dem Additionstheorem $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ überein und liefert dadurch einen konstanten Gewichtungswert. Der dargestellte Gewichtungswert skaliert somit eine Eigenform ohne die Form zu verzerren.

5 Überlagerung von Eigenformen

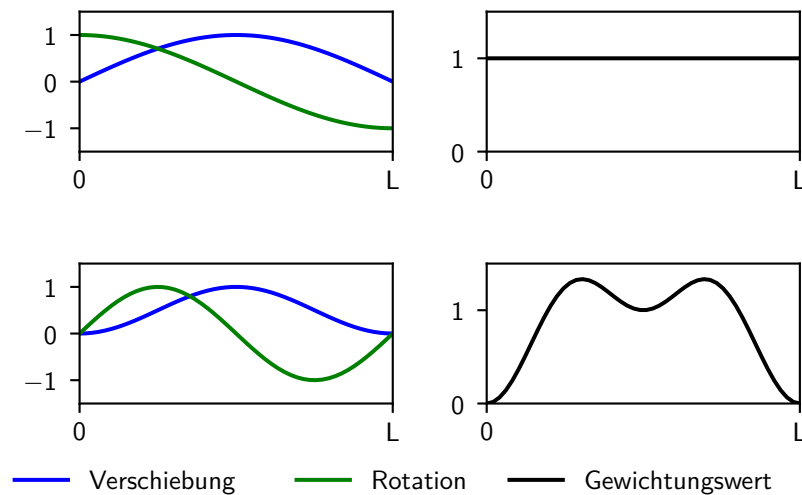


Abbildung 5.1: Beispiel für die Berechnung des Gewichtungswertes. Erste Zeile: Eulerfall 1, Zweite Zeile: Eulerfall 4

Werden die Randbedingungen des 1D-Balkens nun so geändert, dass die Verformungen nicht mehr der Sinus-Funktion entsprechen, ändert sich auch der Verlauf der Rotation (Abbildung 5.1 unten). An der analytischen Lösung des Eulerfalls vier ist sichtbar, dass die Verformungen zwar noch ausschließlich aus einer Kosinus-Funktion bestehen, diese jedoch um eine Konstante verschoben sind (s. Gleichung 5.1).

$$w(x) = -0.5 \left(\cos \left(\frac{2\pi x}{L} \right) - 1 \right) \quad (5.1)$$

Da die Wendepunkte der Verformung nicht mehr auf der Balkenachse liegen und die Amplitude der Verformung und Rotation nicht mehr gleich ist, ist der Gewichtungswert nicht mehr konstant über die Balkenlänge. Die Skalierung einer Eigenform mit dem ungleichmäßig verteilten Gewichtungswert würde eine Verzerrung der Eigenform zufolge haben.

Da die Knickform eines Stabes für alle Randbedingungen aus einer Überlagerung von Sinus- und Kosinus-Funktionen besteht, kann die Verformung u des Eulerfalls 4 durch die einfache Transformation $\hat{u} = 2u - 1$ wieder so umgerechnet werden, dass die Maxima und Minima der Rotation und der Verformung wieder dem Additionstheorem $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ genügen und Gleichung 3.2 über die gesamte Balkenlänge einen konstanten Gewichtungswert liefert. Ziel der Transformation ist es, die Wendepunkte

5 Überlagerung von Eigenformen

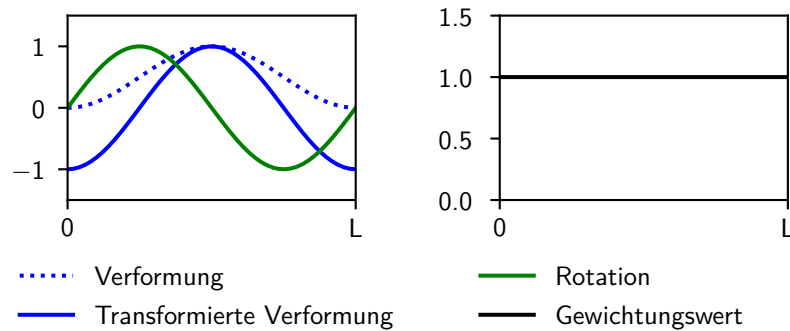


Abbildung 5.2: Beispiel für die Berechnung des Gewichtungswertes mit transformierter Verformung

der Verformung auf die Balkenachse zu verschieben, um die zu skalierende Eigenform mit einem ungleichmäßig verteilten Gewichtungswert zu verzerren.

Damit die Wendepunkte als Ausgangspunkt für eine Transformation dienen können, müssen zwei Wendepunkte auf der Struktur gefunden werden. Die Verformung des ersten Eulerfalls ist ebenfalls eine Kosinus-Funktion die durch eine Konstante verschoben wurde. Da die Verformung der Kragarms jedoch nur über das Intervall $[0, \pi/2]$ definiert ist, liegt nur ein Wendepunkt auf der Struktur. Der zweite Wendepunkt liegt auf der gedachten Verlängerung der Biegelinie am eingespannten Ende. Wird der Gewichtungswert für den ersten Eulerfall berechnet, ist schnell ersichtlich, dass dieser aufgrund der konstanten Komponente in der Verschiebung ebenfalls keinen konstanten Gewichtungswert liefert.

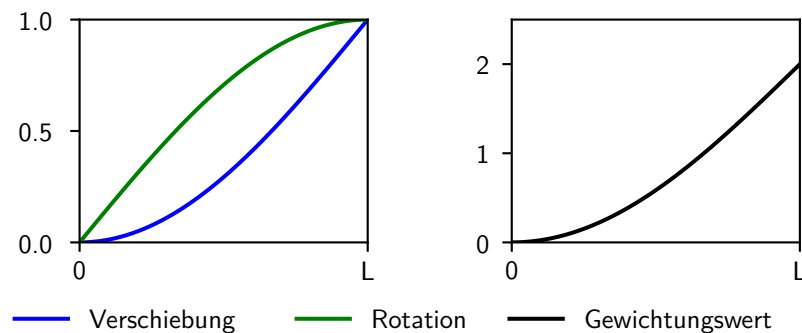


Abbildung 5.3: Beispiel für die Berechnung des Gewichtungswertes am Kragarm (Eulerfall 1)

5 Überlagerung von Eigenformen

Werden diese Überlegungen auf eine ebene quadratische Platte mit gelenkiger Lagerung an den Rändern übertragen, ergibt sich in x - und y -Koordinatenrichtungen ein harmonischer Verlauf der Verformung aus der Plattenebene heraus (Abbildung 5.4). Die Vektorsumme der Rotationen ist in den Ecken der Platte null, da die Knoten sich dort nicht verdrehen können. In der Mitte der Seiten ist die Rotation maximal, da die Verformung in der Mitte der Platte hier die Knoten verdreht. Die Berechnung des Gewichtungswertes liefert auf den Symmetrielinien der Platte einen Wert nahe eins, da auf diesen Linien dort die Verformung maximal ist, wo die Rotationsumme ein Minimum erreicht. Jedoch ist auch eine Richtungsabhängigkeit sichtbar, da die Rotationen am Rand nicht konstant sind und in den Ecken null sind. Auf einer Schnittlinie diagonal durch die Platte ist deshalb der harmonische Verlauf der Verformung und Rotationsumme nicht gegeben und kann die Gewichtungsfunktion nicht erfüllen. Eine

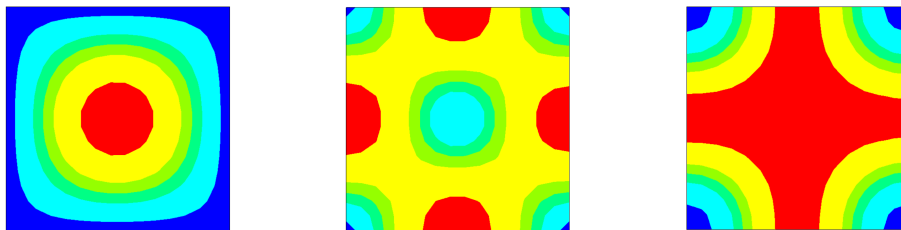


Abbildung 5.4: links: Verformung der ausgebeulten Platte, mitte: Rotationsumme der ausgebeulten Platte, rechts: Gewichtungswert

Transformation kann hier die Rotation so verschieben, dass der Verlauf einer harmonischen Funktion entspricht. Da die Verformung am Rand der Platte jedoch immer null ist, muss eine Transformation hier den harmonischen Verlauf superponieren und in der Mitte der Platte keine Transformation durchführen. Dies zeigt, dass die Transformation der Verformungen ein Ansatz zur Identifikation der Beulen auf einer Struktur ist, dieser aber an komplexeren Modellierungen als einem Balken scheitert. Im Folgenden wird die Gewichtungsfunktion daher ohne Transformation weiterhin verwendet und die Auswirkung des ungleichmäßig verteilten Gewichtungswertes auf die Überlagerung der Eigenformen zu einer Imperfektion untersucht.

Kastenträger

Wird der Gewichtungswert für eine lokale Eigenform des Kastenträgers berechnet, ergibt sich eine zweidimensionale Verteilung der Gewichtungswerte als Ergebnis (Abbildung 5.5). Da die Rotationen und die Verformungen der Eigenform auf ihr Maximum normiert werden, ist der Maximalwert der Gewichtungswerte ebenfalls eins. Entlang

5 Überlagerung von Eigenformen

der Mittellinie längs des Kastenträgers ist der Gewichtungswert nahezu eins, da dort die Verformung und Rotationen harmonisch verlaufen. Je weiter die Amplitude der Eigenform abnimmt, desto geringer wird der Gewichtungswert, da die Verformungen auf das Maximum der gesamten Eigenform normiert werden. Des Weiteren gibt es aufgrund der rechteckigen Anordnung der Beulen Knoten, an denen weder Verformungen noch Rotationen vorkommen. In Richtung dieser Knoten fällt der Gewichtungswert ebenfalls ab und ist an dem Knoten null. In Abbildung 5.5 ist die Verteilung des Gewichtungswertes mit der zugehörigen Eigenform dargestellt.

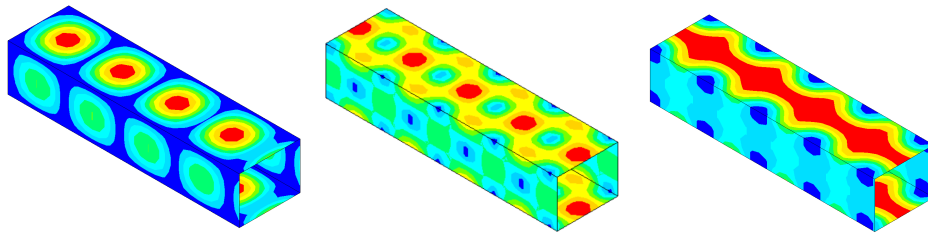


Abbildung 5.5: links: Detailausschnitt der Verformungen der ersten lokalen Eigenform, mittig: Detailausschnitt der Rotationen der ersten lokalen Eigenform rechts: Verteilung des Gewichtungswertes zur ersten lokalen Eigenform

Die Überlagerung von Eigenformen als lineare Kombination mit skalaren Gewichtungsfaktoren ist der einfachste Ansatz, um mehrere Versagenskonfigurationen in einer Imperfektion zu berücksichtigen. Wenn sich die einzelnen Eigenformen jedoch in ihren Verformungen überschneiden, entstehen positive und negative Überlagerungen bis hin zur Auslöschung von Verformungen. Dieser Effekt kann leicht mit lokalen Eigenformen an dem zuvor vorgestellten Kastenträger gezeigt werden. In Abbildung 5.6 ist der Verlauf der Verformungen entlang einer Schnittkante von zwei lokalen Eigenformen an einem Ausschnitt der Oberfläche des Kastenträgers gezeigt. Die Eigenformen werden zu gleichen Teilen in der linearen Überlagerung berücksichtigt und ergeben eine Erhöhung der Amplitude um 30 %. Aufgrund der Auslöschungen ist das Maximum der Imperfektion nun verschoben.

Wird der in Abschnitt 3.3 vorgestellte Algorithmus auf die ersten zwei lokalen Eigenformen des Kastenträgers zur Berechnung einer Imperfektion angewendet, kann die Auswirkung der zuvor geschilderten ungleichmäßigen Verteilung des Gewichtungswertes und die Auslöschung von Verformungen bewertet werden.

Der Algorithmus beginnt mit der vollständigen Gewichtung der ersten Eigenform. Diese Eigenform wird auf die vorgegebene Amplitude der Imperfektion skaliert aber nicht in ihrer Form verändert, da die Struktur zu Beginn der Überlagerung als ideal

5 Überlagerung von Eigenformen

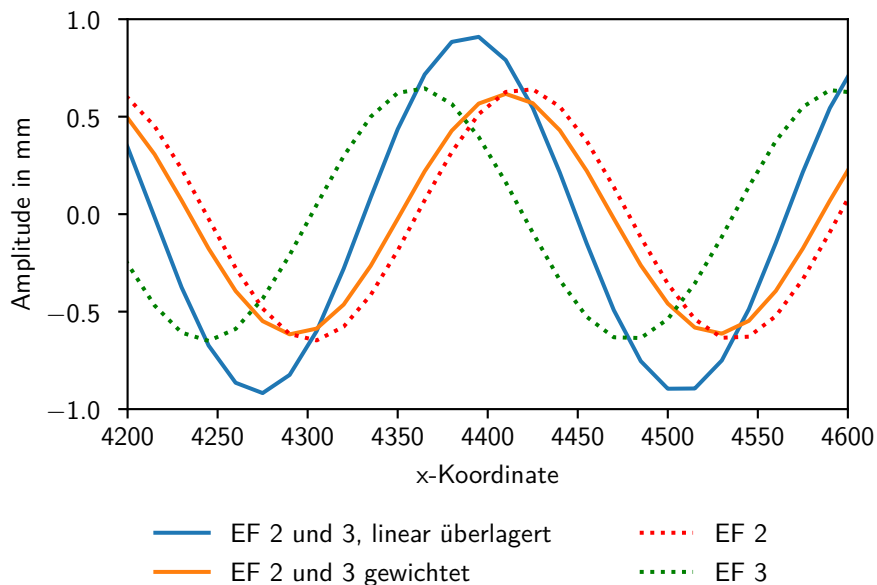


Abbildung 5.6: Ergebnis der automatisch überlagerten Eigenformen

angenommen wird und die erste Eigenform immer vollständig berücksichtigt wird. Da die zweite Eigenform um eine halbe Beulfeldlänge versetzt ist, kommt es bei einer Überlagerung der zweiten Eigenform mit konstantem Skalierungsfaktoren zu Auslöschungen und Addition von Amplituden. Um diese Effekte zu minimieren, wird die zweite Eigenform mit dem Quadrat des Kehrwert des aktuellen Gewichtungswertes multipliziert. In Bereichen mit sinus- oder kosinusförmigen Verformungen und dadurch einem hohen Gewichtungswert, wird die Verformung der zweiten Eigenform reduziert. Das Ergebnis der gewichteten Überlagerung und die skalierte Eigenform ist in Abbildung 5.7 dargestellt. An dem Verformungsverlauf der zweiten Eigenform ist deutlich zu erkennen, dass dieser sich durch den ungleichmäßigen Gewichtungswert qualitativ stark verändert. Die dargestellte resultierende Imperfektion zeigt jedoch eine geringere Erhöhung der Amplitude und nur eine leichte Verschiebung in Richtung der zweiten Eigenform.

Um den gesamten Kastenträger mit einer Imperfektion zu versehen, müssen mehrere Eigenformen überlagert werden. Die zuvor festgestellte geringe Erhöhung der Imperfektionsamplitude durch das Überlagern einer gewichteten Eigenform, kann durch die Überlagerung mehrerer Eigenformen stark zunehmen und damit deutlich größer als die durch den Eurocode 3 geforderte Imperfektion werden. Die Untersuchung der Einflüsse

5 Überlagerung von Eigenformen

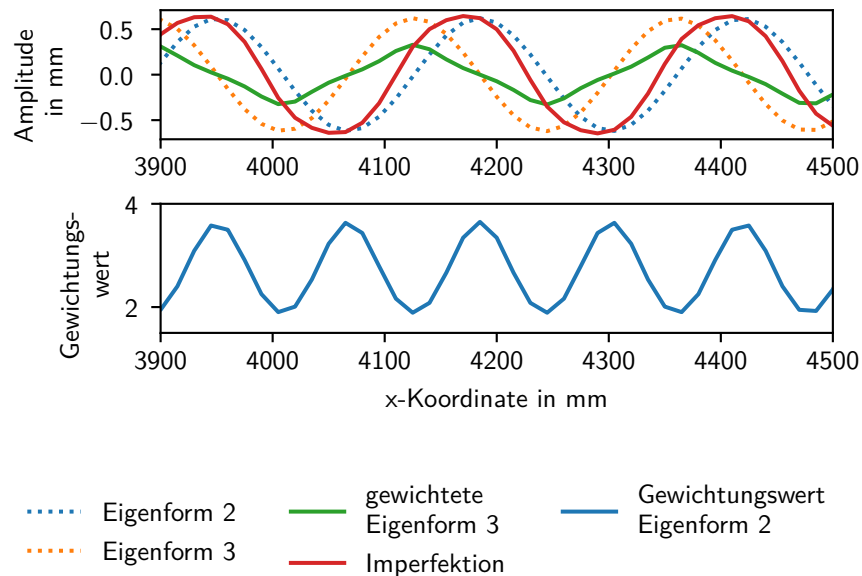


Abbildung 5.7: Änderung der Eigenform durch einen ungleichmäßig verteilten Gewichtungswert

von Imperfektionen (Kapitel 4) hat gezeigt, dass dies zu einer verminderten Steifigkeit und höheren Verformungen führt und sich damit konservativ auf den Nachweis auswirkt. Um diesen Effekt zu verhindern, wird im Folgenden die Konvergenz der Imperfektion untersucht.

Konvergenz ist erreicht, wenn die Amplitude der Imperfektion nach einer bestimmten Anzahl von überlagerten Eigenformen an keiner Stelle signifikante Änderungen mehr zeigt. Dafür werden lokale Eigenformen des Kastenträgers überlagert und die Hüllkurve der Imperfektionen entlang einer Schnittkante dargestellt. Bereits nach der zweiten Eigenform ändert sich die Amplitude in der Mitte des Trägers nur noch geringfügig. Der Gewichtungswert ist hier am höchsten, da die erste Eigenform hier die maximale Amplitude erreicht. Durch das Quadrieren der Gewichtungswerte nach jeder überlagerten Eigenform (s. Gleichung 3.4), steigen diese stark an und verhindern in der Mitte des Kastenträgers die Überlagerung weiterer Eigenformen. Die Amplitude konvergiert. Im äußeren Bereich ist der Gewichtungswert aufgrund der kleineren Amplituden nach den ersten Eigenformen geringer als in der Mitte. Der Algorithmus überlagert aus diesem Grund in den folgenden Iterationsschritten überwiegend im äußeren Bereich des Balkens, wodurch sich die Amplitude der Imperfektion hier

5 Überlagerung von Eigenformen

stark ändert. Die spätere Konvergenz der Imperfektion im äußeren Bereich hat eine ungleichmäßige Verteilung der Amplitude über die Länge des Trägers zufolge. Am Vergleich der zweiten und 15. Imperfektion wird deutlich, dass die Form der ersten Eigenform auch nach der Überlagerung mehrerer Eigenformen erhalten bleibt.

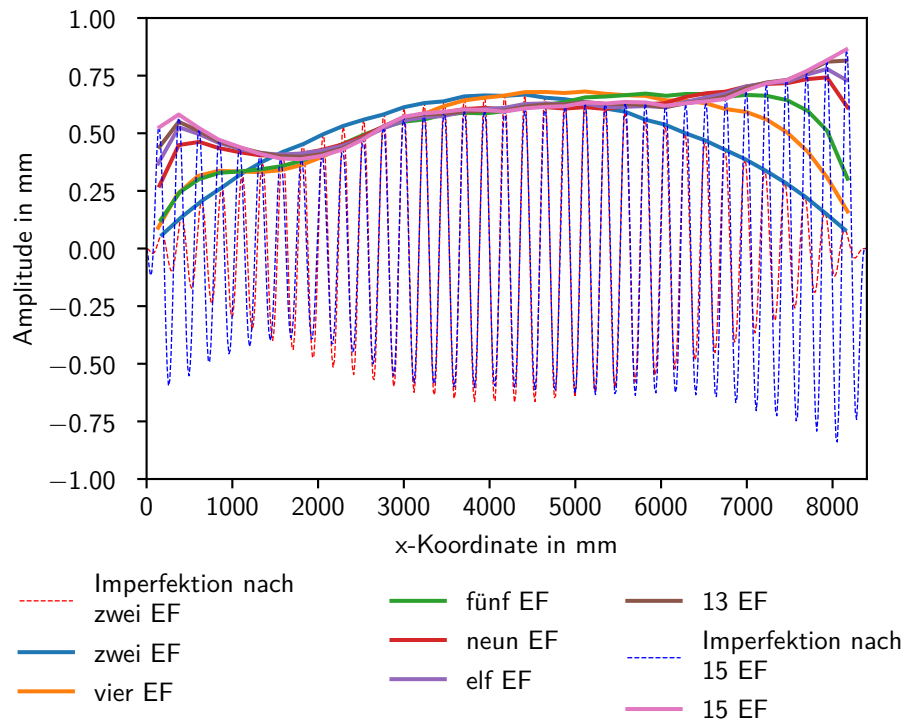


Abbildung 5.8: Konvergenz der Imperfektion nach der Überlagerung verschiedener Anzahlen von Eigenformen. Dargestellt ist die Einhüllende der Amplitude einer Imperfektion

Die Untersuchungen zur Interaktion von Eigenformen haben gezeigt, dass der Kastenträger nur eine konservative Tragfähigkeit erreichen kann, wenn auch eine globale Imperfektion auf die Struktur aufgebracht wird. Die Lage der Eigenwerte von einer globalen Eigenform wird durch den Schlankheitsgrad der Gesamtstruktur bestimmt und kann somit für unterschiedliche Strukturen variieren. Die globale Eigenform kann als erstes auftreten, wenn der Schlankheitsgrad klein genug ist. Sind an der Struktur ungestützte Flächen im Kraftfluss vorhanden, werden die lokalen Eigenformen in der linearen Beulanalyse mit kleineren Eigenwerten vor der globalen Eigenform auftreten. Da der Gewichtungswert von der Reihenfolge des Auftretens der Eigenformen abhängig ist, wird im Folgenden die Auswirkung dieser auf die überlagerte Imperfektion unter-

5 Überlagerung von Eigenformen

sucht. Dafür wird am Kastenträger die globale Eigenform mit den ersten zwei lokalen Eigenformen so überlagert, dass die globale Eigenform zuerst und zuletzt auftritt.

Tritt die globale Eigenform nach den lokalen Eigenformen auf, ergibt sich nach der Überlagerung der ersten zwei lokalen Eigenformen eine nach außen abfallende Verteilung des Gewichtungswertes. Diese kommt durch die abfallende Amplitude der lokalen Eigenformen zustande. Wird die folgende globale Eigenform nun durch die Gewichtungswert der lokalen Eigenformen geteilt, wird die Amplitude der globalen Eigenform verringert. Die glockenähnliche Verteilung des Gewichtungswertes verzerrt die globale Eigenform in der Mitte des Trägers, sodass die resultierende Imperfektion nicht mehr affin zur ersten Eigenform ist (Abbildung 5.9).

Wird die globale Eigenform vor den lokalen Eigenformen überlagert, kommt es nicht zu einer Verzerrung, da der Gewichtungswert mit dem Wert ein an jedem Knoten initialisiert wird. Nach der Überlagerung der globalen Eigenform ist der Gewichtungswert konstant eins, da die Eigenform dem zweiten Eulerfall entspricht und daher von der Gewichtungsfunktion richtig berechnet wird (vgl. Abschnitt 5.1). Durch den konstanten Gewichtungswert werden die folgenden lokalen Eigenformen nicht verzerrt. Mit

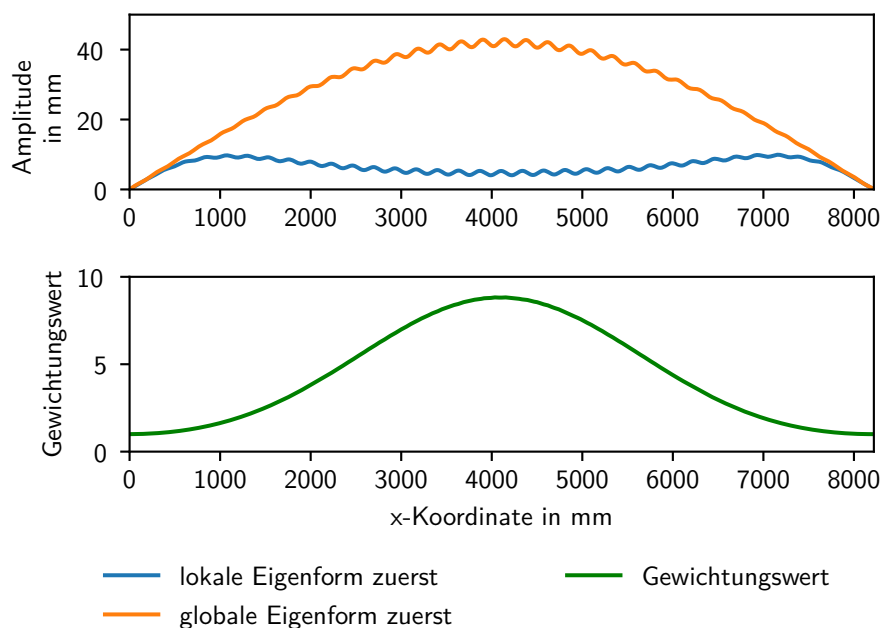


Abbildung 5.9: Verzerrung einer globalen Eigenform durch den Gewichtungswert

der Untersuchung des Reihenfolgeinflusses kann gezeigt werden, dass mit dem vorgestellten Überlagerungsalgorithmus Imperfektionen für Strukturen überlagert werden

5 Überlagerung von Eigenformen

können, bei denen die globale Eigenform zuerst auftritt. Um die Erstellung von Imperfektionen auch für allgemeine Strukturen möglich zu machen, müssen die globalen Eigenformen überlagert separat überlagert werden. Aufgrund der Anforderung, dass das Überlagerungsverfahren vollständig automatisiert sein soll, wird in Abschnitt 5.3 ein Vorschlag für ein weiteres Vorgehen für die Klassifizierung ausgearbeitet.

Gitterrohrstruktur

Schalenmodelle beulen in der Regel senkrecht zu der Fläche. Damit wird der skalare Gewichtungswert hauptsächlich aus einer Komponente ermittelt und zur Skalierung auch wieder auf diese Komponente angewendet. Bei dreidimensionalen Balkenmodellen knicken Einzelstäbe in der Regel zuerst in die Richtung der schwachen Hauptachse ihres Querschnittes. Die zweite, starke Hauptachse kann in Eigenformen höherer Ordnung als Knickrichtung auftreten. Bei der Skalierung der Eigenform höherer Ordnung wird diese dann mit einem Gewichtungswert skaliert, der für eine andere Verformungskomponente ermittelt wurde. Aufgrund dieser Diskrepanz muss der Überlagerungsalgorithmus zusätzlich zu den Schalenmodellen noch an Balkenelementen getestet werden. Die Überlagerung der Eigenformen wird an der Gitterrohrstruktur unter zentrischer Druckbelastung getestet. Dafür wird zuerst die Überlagerung von zwei lokalen Eigenformen gebildet und an einem ausgewählten Gurtrohr ausgewertet. Die Eigenformen des Gurtrohrs sind in der xy -Ebene dargestellt (Abbildung 5.10). Die erste lokale Eigenform zeigt zwei überlagerte harmonische Verschiebungen des Gurtes und wird mit voller Gewichtung auf die Struktur aufgebracht. Die Amplitude wird zu $L/200 = 20,1 \text{ mm}$ vom Überlagerungsalgorithmus festgelegt. Die vierte Eigenform ist die gespiegelte Form der zweiten Eigenform und würde diese damit vollständig auslöschen. Die zehnte Eigenform ist die lokale Eigenform höherer Ordnung, da ein zusätzlicher "Knoten" ohne Verformung in der Mitte des Gurtrohres auftritt.

Der nach der zweiten Eigenform berechnete Gewichtungswert zeigt eine ungleichmäßige Verteilung über die Gurtrohlänge, da die Verformung aus zwei überlagerten harmonischen Anteilen besteht. Die zweite Eigenform geht vollständig und ohne Gewichtung in die Imperfektion ein. Die vierte Eigenform wird aufgrund des hohen Gewichtungswertes in der Mitte des Auslegers weniger gewichtet. Da diese jedoch symmetrisch zur zweiten Eigenform ist, löscht diese die Verformung der Imperfektion in den Randbereichen fast vollständig aus, da der Gewichtungswert durch die abfallende Amplitude der zweiten Eigenform nicht ausreicht, um die vierte Eigenform zu unterdrücken. Die Amplitude in der Mitte des Gurtrohres wird aufgrund dessen um 25%

5 Überlagerung von Eigenformen

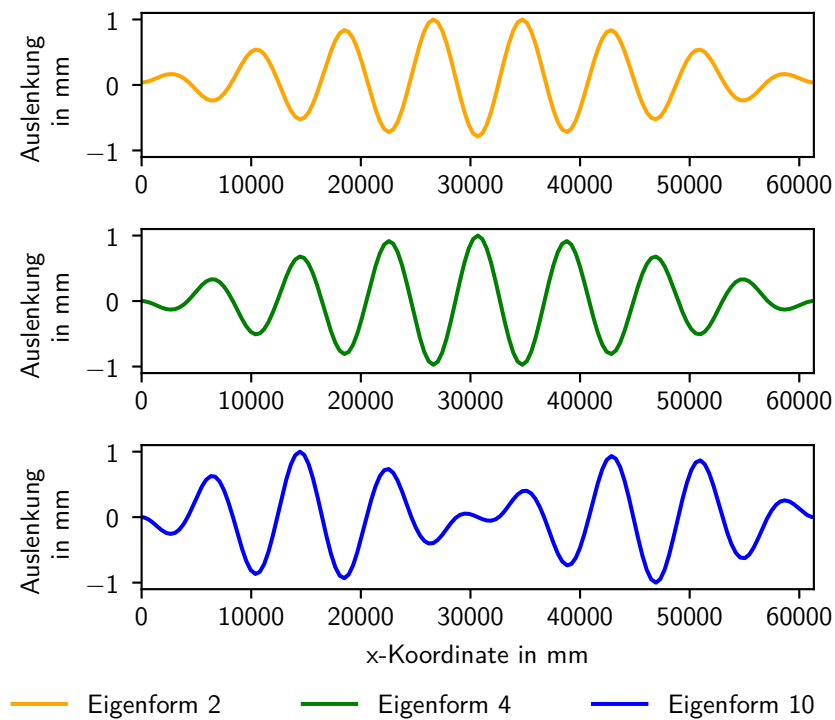


Abbildung 5.10: Eigenformen des Gurtrohres in der xy-Ebene

reduziert. Da Eigenform fünf bis neun nur aus Verformungen in der xz-Ebene bestehen (s. Anhang), steigt der Gewichtungswert weiter an ohne, dass die Imperfektion in der xy-Ebene beeinflusst wird. Dies hat zur Folge, dass die zehnte Eigenform in der Mitte des Gurtrohres stark unterbewertet wird und wenig Beitrag zur Imperfektion leistet. An den äußeren Bereichen wird die Verformung der zehnten Eigenform stärker gewichtet, da der Gewichtungswert dort noch nicht stark angestiegen ist. Mit der Überlagerung am Gurtrohr wird gezeigt, dass die Behandlung von Balkenstrukturen mit einer skalaren Gewichtungsfunktion zur Unterbewertung von Eigenformen höherer Ordnung kommt. Des Weiteren ist ersichtlich gerade an der Gitterrohrstruktur ersichtlich, dass die Auslöschung von Eigenformen bei der Überlagerung dazu führen kann, dass Teile der Struktur nicht durch die Imperfektion verformt werden.

5 Überlagerung von Eigenformen

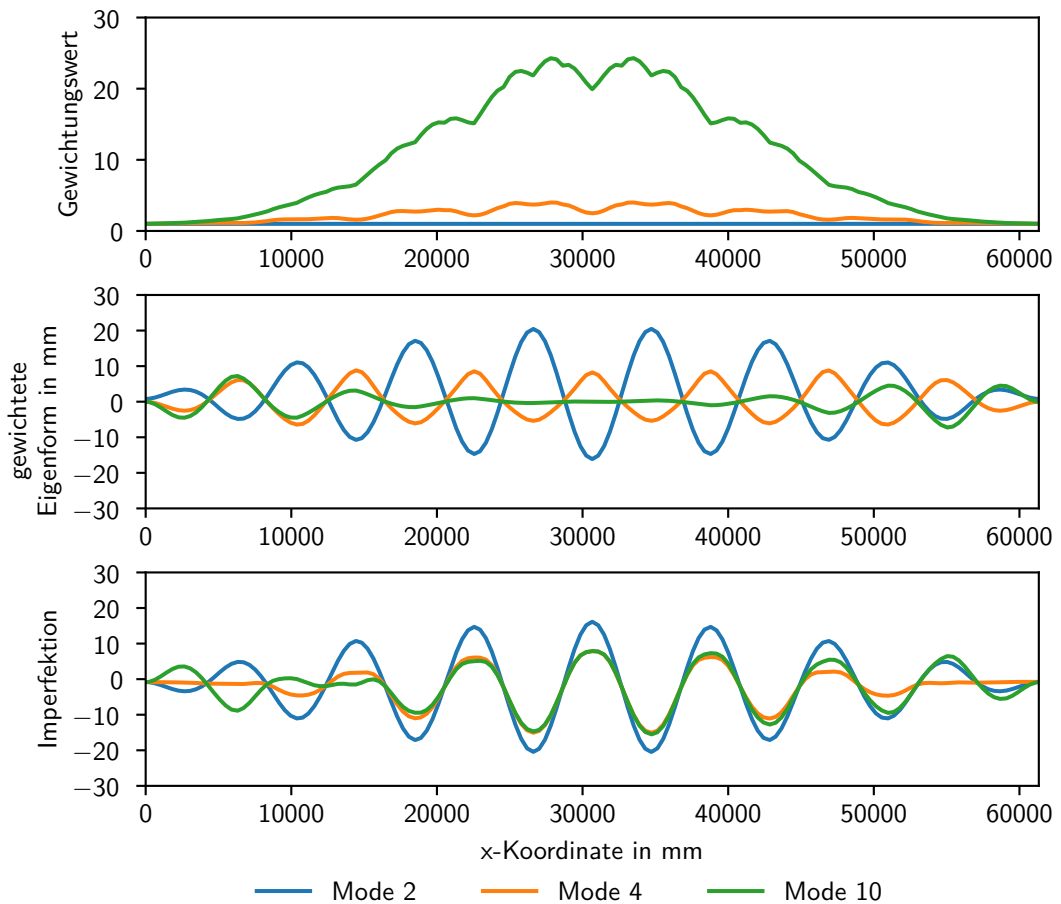


Abbildung 5.11: Überlagerung der lokalen Eigenformen an einem Gurtrohr

5.2 Einfluss auf die Tragfähigkeit

Die zuvor vorgestellte Aufbringung von Imperfektionen durch verschiedene Arten der Überlagerung wird nun durch die Berechnung mittels der nichtlinearen Beulanalyse untersucht, um festzustellen, ob sich ein signifikanter Einfluss auf die Tragfähigkeit der Teststrukturen ergibt. Um die Auswirkungen auf die Tragfähigkeit zu untersuchen, wird die Vergleichsspannung unter einer fixierten Last bei verschiedenen Imperfektionen verglichen. Des Weiteren wird die Kraft-Verformungs-Kurve der nichtlinearen Berechnung zu Vergleich herangezogen, die Änderung der Steifigkeit der Strukturen zu bewerten.

Kastenträger

Die nichtlineare Berechnung der linear überlagerten Imperfektion aus zwei lokalen Eigenformen am Kastenträger, zeigt einen qualitativ ähnlichen Verlauf zu den Ergebnissen im Kapitel 4. Die Kraft-Verformungs-Kurve verläuft unterhalb der Geraden der linearen Steifigkeit aufgrund der geringeren Steifigkeit durch die Lastumlagerung in die Ecken des Querschnitts. Die linear überlagerte Imperfektion erzielt die geringste Steifigkeit und damit die größte Verformung, da die Überlagerung der Amplituden zu einer Erhöhung der Maximalamplitude der Imperfektion führt. Um den Unterschied der Verfahren darzustellen wird die Differenz der jeweiligen Kraft-Verformungs-Kurve zur Kraft-Verformungs-Kurve der Einzelimperfektion gebildet und daran verglichen. Die Differenz ist normiert auf die maximale Verformung der Einzelimperfektion aus der zweiten Eigenform und in Abbildung 5.12 dargestellt.

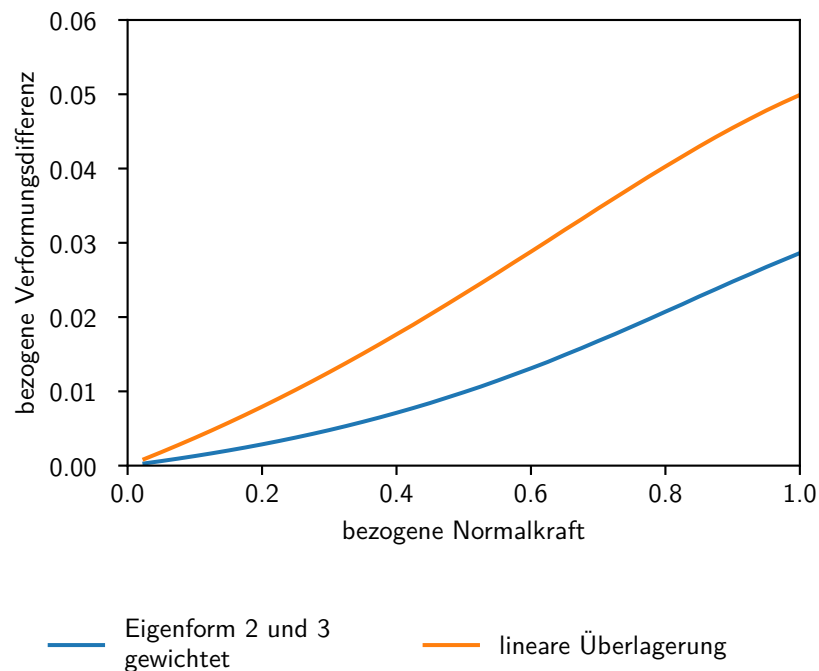


Abbildung 5.12: Verformungsdifferenz der Kraft-Verformungs-Kurven für die lineare und gewichtete Überlagerung zur Kraft-Verformungs-Kurve der Einzelimperfektion aus Eigenform 2

5 Überlagerung von Eigenformen

Die nichtlineare Berechnung der gewichteten Imperfektion zeigt, dass die Struktur eine geringere Steifigkeit hat als die linear überlagerte Imperfektion, da über einen längeren Bereich des Trägers eine größere Amplitude durch den geringeren Gewichtungswert zustande kommt. Diese größere Amplitude in den Außenbereichen sorgt auch im äußeren Bereich des Trägers für höhere Spannungen und größere Kraftumlagerungen. In Abbildung 5.13 ist ein Vergleich der Spannungsverteilungen von der zweiten Eigenform als Imperfektion, der gewichteten Imperfektion und der linear überlagerten Imperfektion bei einer Last von $24 \text{ kN}(F_{crit})$ dargestellt. Hier ist anhand der roten Konturlinien deutlich sichtbar das die gewichtete Imperfektion in größeren Bereichen eine höhere Auslastung erzielt als die Struktur mit der Einzelimperfektion.

Die Anwendung des Überlagerungsverfahrens am Kastenträger zeigt eine konservative Verteilung der Imperfektion über die Struktur, da der Bereich in dem die Imperfektion aufgebracht wird, größer ist. Zudem werden die Auslöschung und Addition der Amplitude vermieden und kann so nicht zu Spannungsüberhöhungen führen, die zu weit auf der sicheren Seite liegen.

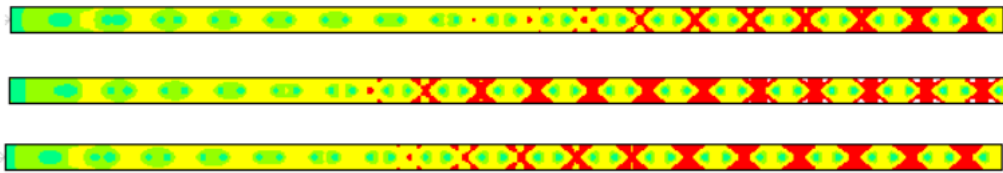


Abbildung 5.13: Vergleichsspannungsverteilung unterschiedlicher Imperfektionen in der Seitenansicht. Oben: Einzelimperfektion Eigenform 2, Mitte: linear überlagerte Imperfektion aus Eigenformen 2 und 3, Unten: Gewichtete Imperfektion aus Eigenform 2 und 3

Da das vorangegangene Kapitel gezeigt hat, dass der Einfluss der globalen Imperfektion maßgeblich für die Steifigkeit ist, wird auch hier noch der Einfluss der globalen Imperfektion auf die Abweichungen zwischen einer linearen Überlagerung und einer gewichteten Imperfektion bewertet. Die globale Imperfektion wird mit 42 mm als erste Knickform aufgegeben. Die nichtlineare Beulanalyse zeigt, dass die Steifigkeit der linear überlagerten Imperfektion geringfügig kleiner ist als die der Gewichteten. Dies kann durch die größere Amplitude der Imperfektion erklärt werden. Die Spannungsverteilung auf dem Kastenträger ist jedoch nahezu identisch. Die maximale Spannung weicht um ca. 1% ab.

5 Überlagerung von Eigenformen

Gitterrohrstruktur

Die Überlagerung von Eigenformen an der Gitterrohrstruktur zeigt in der geometrischen Betrachtung signifikante Auslöschungen und Additionen der Amplitude. Diese Effekte sollen nun auf ihre Auswirkung auf die Tragfähigkeit der Struktur untersucht werden. Zuerst wird die Steifigkeit anhand der Kraft-Verformungs-Kurve beurteilt und zusätzlich wird die Vergleichsspannung zur Bewertung herangezogen.

Die Kraft-Verformungs-Kurve der nichtlinearen Beulanalyse der Gitterrohrstruktur zeigt, dass die unterschiedlichen Imperfektionen keine signifikanten Einfluss auf die Anfangssteifigkeit der Druckgurte haben. Beide Lastpfade sind bei Lasten $< 0,4F_{crit}$ nahezu linear. Die linear überlagerte Imperfektion mit einer signifikanten Interaktion der Eigenformen, zeigt eine früher eintretende Grenzlast der Druckgurte. Diese Grenzlast wird durch das lokale Ausknicken der Gurte und damit dem Versagen der Struktur begrenzt.

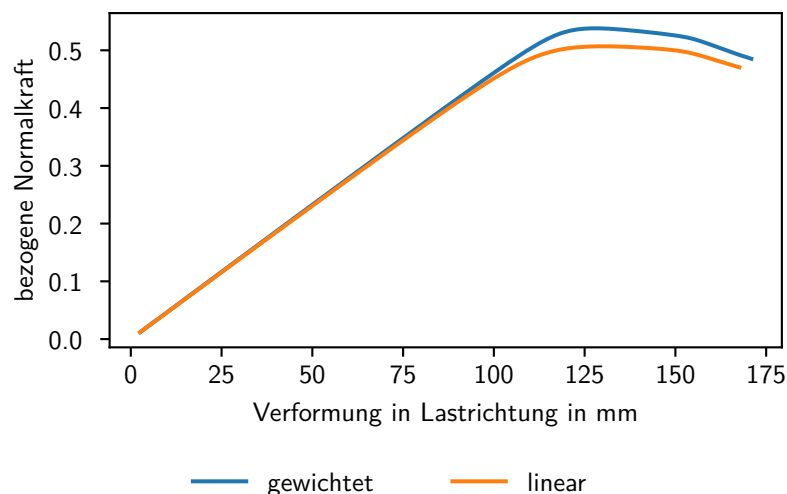


Abbildung 5.14: Steifigkeitsunterschied der linearen und gewichteten Überlagerung an der Gitterrohrstruktur

Die Spannungsverteilungen der unterschiedlich überlagerten Imperfektionen werden kurz vor dem Stabilitätsverlust bei $0,47F_{crit}$ verglichen. Die linear überlagerte Imperfektion zeigt eine überhöhte Biegespannung an einem der beiden Gurtrohre, die mit Imperfektionen versehen wurden, da sich die Eigenform dort konstruktiv überlagert haben und eine große Amplitude zustande gekommen ist. Am zweiten Gurtrohr wurde die Imperfektion nahezu vollständig ausgelöscht und trägt daher nur durch einen erhöhten

5 Überlagerung von Eigenformen

Längsspannungsanteil. Die gewichtete Imperfektion zeigt auf beiden Gurtrohren einen moderaten Biegespannungsanteil, da die zweite Eigenform die Imperfektion der ersten zwar reduziert hat aber nicht vollständig ausgelöscht.

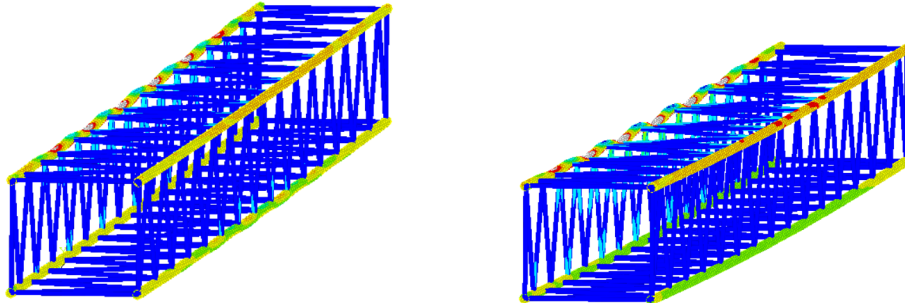


Abbildung 5.15: Vergleichsspannung bei $0,47F_{crit}$ mit Imperfektion aus Eigenform 2 und 4 links: gewichtete Überlagerung, rechts: lineare Überlagerung

5.3 Automatisierte Klassifizierung von Eigenformen

Im Abschnitt 5.1 wurde durch die Untersuchung der Gewichtungsfunktion an einem Kastenträger gezeigt, dass die Reihenfolge der Überlagerung die resultierende Imperfektion beeinflusst. Enthält eine Imperfektion eine globale Eigenform, muss die globale Eigenform zu Beginn mit der Gewichtungsfunktion überlagert werden oder manuell mittels linearer Kombination mit den gewichteten lokalen Eigenformen überlagert werden. Da das Überlagerungsverfahren vollständig automatisiert ablaufen soll, muss die Klassifizierung der lokalen und globalen Eigenformen ebenfalls automatisiert werden.

Die Unterscheidung von lokalen und globalen Eigenformen ist jedoch nicht eindeutig definiert. Der Eurocode 3 verwendet die Beschreibungen 'lokales Beulen' und 'globales Knicken' und verweist damit auf die unterschiedlichen Versagensmechanismen des Beulens und Knickens. Da diese Unterscheidung nicht anhand eindeutiger Kriterien definiert ist, fällt die Implementierung eines Algorithmus schwer.

Mit den Methoden des maschinellen Lernens (ML) können aus einer Menge an Beispielen, Muster in mehrdimensionalen Daten sichtbar gemacht werden, die mit manuellen oder analytischen Methoden zur Bestimmung von Funktionen nicht auffindbar sind. Da der Aufwand zur Generierung von Beispielen mittels Simulationsmodellen gering ist, kann ein Datensatz mit vertretbarem Aufwand erstellt werden. Während des Trainings lernt ein ML-Modell den Datensatz so gut wie möglich zu repräsentieren,

5 Überlagerung von Eigenformen

indem eine Kostenfunktion minimiert wird. Dabei werden die Modellparameter iterativ angepasst. Das maschinelle Lernen wird anhand der Art des Datensatzes und des Trainings in drei unterschiedliche Klassen eingeteilt:

- Überwachtes Lernen (supervised learning)
- Unüberwachtes Lernen (unsupervised learning)
- Bestärktes Lernen (reinforcement learning)

Für Modelle, die dem überwachtem Lernen zugeordnet werden können, muss ein Beispieldatensatz erstellt werden, welcher lokale und globale Eigenformen mit richtiger Klassifikation enthält. Dieser muss in einem manuellen Prozess erstellt werden und einem künstlichen neuronalen Netz (KNN) dann in einem Trainings-Prozess gezeigt werden. Dabei werden die Parameter des Modells iterativ so eingestellt, dass der Fehler der Klassifizierung für die Trainingsdaten minimal wird.

Beim unüberwachten Lernen wird dem Netzwerk ein Datensatz ohne vorgegebene Klassifikation präsentiert. Somit kann das Netzwerk von selbst ein Muster in den Daten erkennen. Aufgrund der nicht notwendigen Klassifikation der Beispieldaten reduziert sich der Aufwand, um den Datensatz vorzubereiten signifikant. Es sind jedoch mehr Beispieldaten notwendig. Das Ergebnis eines unüberwacht gelernten Modells ist eine Repräsentation der Eingangsdaten in einem Vektor mit weniger Dimensionen, latente Repräsentation genannt. Um aus diesem Vektor eine Klassifikation ableiten zu können, wird die latente Repräsentation mit Clustering-Algorithmen in Gruppen eingeteilt.

Das bestärkte Lernen erfordert ein mathematisches Modell der Umwelt, in der ein Computerprogramm selbstständig Aktionen ausübt, um die Umwelt zu beeinflussen und ein definiertes Ziel zu erreichen. Diese Art des Lernens wird hier nur der Vollständigkeit halber aufgeführt und nicht weiter betrachtet.

Modellierung und Datengenerierung

Für die Klassifizierung von Eigenformen ist eine Anwendung von Algorithmen des überwachtem oder unüberwachten Lernens denkbar. Da der Aufwand zur Erstellung des Datensatzes in der Praxis geringgehalten werden soll und die Einteilung in lokale und globale Beulformen an komplexeren Strukturen nicht eindeutig ist, wird hier der Ansatz des unüberwachten Lernens verfolgt. Dabei wird ein KNN in Form von einem Convolutional Autoencoder verwendet. Diese Architektur des KNN ist für die Bildverarbeitung vorgestellt worden und wird dort zur Feature-Extraktion durch Kompression

5 Überlagerung von Eigenformen

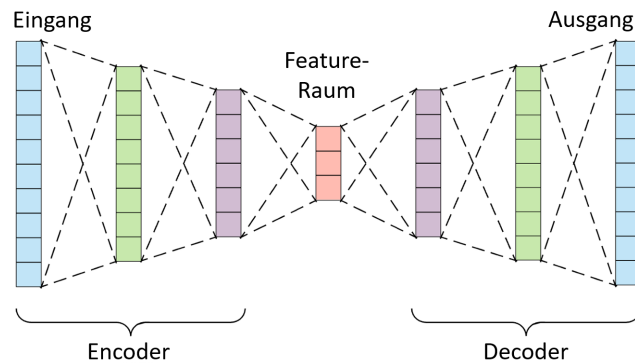


Abbildung 5.16: Aufbau eines Autoencoders [3]

der Bilder benutzt. Als Feature werden dabei markante Bildeigenschaften bezeichnet. Durch die Verwendung der diskreten Faltung kann das Netzwerk die Umgebung eines Pixels in den Lernprozess einbeziehen und lernt Zusammenhänge im Bild effizienter.

Ein Autoencoder (Abbildung 5.16) besteht aus Encoder-Teil der die Bilddaten in eine niedriger dimensionale Repräsentation komprimiert und einem Decoder-Teil welcher die Daten in die Ursprungsform dekomprimiert. Dabei bestehen Encoder und Decoder aus jeweils einer Ein- und Ausgangsebene und beliebig vielen Zwischenebenen. Der Ausgang des Encoder-Teils wird als Feature-Raum oder Feature-Vektor bezeichnet. Aufgrund der Bewährtheit von Autoencodern in der Bildverarbeitung wird die Klassifizierung von lokalen und globalen Eigenformen zuerst an einer Platte durchgeführt da sich die Verformung als Bild darstellen lassen. Dafür werden 200 Eigenformen einer rechteckigen Platte mit dem Seitenverhältnis $L/B = 2$ berechnet und als Matrix aus den Verschiebungen senkrecht zur Plattenebene als Bild angeordnet.

Unter den 200 unterschiedlichen Eigenformen treten lokale häufiger als globale Eigenformen auf. Der Datensatz muss daher ausgeglichen werden, damit das Modell die Möglichkeit hat die Features von lokalen und globalen Eigenformen gleichermaßen zu lernen. Dazu werden Kopien von manuell ausgewählten globalen Eigenformen erstellt und dem Datensatz hinzugefügt.

Ergebnisse

Der Aufbau des Autoencoders ist so gewählt, dass der Encoder-Teil die Eigenform mit 1900 Knoten in eine physikalisch nicht interpretierbare 480-dimensionale Repräsentation komprimiert, aus welcher der Decoder-Teil eine möglichst identische Rekonstruktion mit 1900 Knoten wiederherstellen kann. Die Rekonstruktion einer loka-

5 Überlagerung von Eigenformen

len und einer globalen Eigenformen ist Abbildung 5.17 dargestellt. Es ist ersichtlich, dass die keine großen Abweichungen zeigen und die Eigenformen nahezu identisch zu ihren Rekonstruktionen sind. Dadurch kann darauf geschlossen werden, dass der Autoencoder im Encoder-Teil eine Abbildung gelernt hat, welche die Daten des Bildes verlustfrei komprimiert. Der hochdimensionale Feature Vektor kann mittels einer

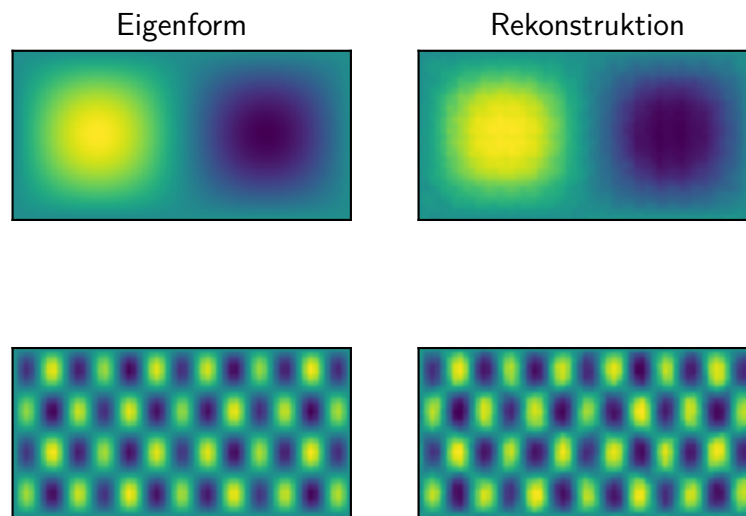


Abbildung 5.17: Vergleich einer lokalen und einer globalen Eigenform mit der jeweiligen Rekonstruktion durch den Autoencoder

Hauptkomponentenanalyse für den Datensatz so transformiert werden, dass die lineare Abhängigkeit der 480-dimensionalen Vektoren minimiert wird. Mittels der Hauptkomponentenanalyse wird der Feature-Vektor auf drei Features reduziert, um eine visualisierbare Darstellung der 200 Eigenformen im Feature Raum zu berechnen. Die Lage der Eigenformen im dreidimensionalen Feature Raum zeigt eine Häufung um die Achse des ersten Features. Nur wenige Eigenformen haben große zweite und dritte Komponenten. Des Weiteren zeigt die Verteilung der Eigenformen, dass die unteren Eigenformen auch mit niedrigen Werten als erstes Feature korrelieren und höhere Eigenformen auch höhere Feature-Werte haben. Dieses Prinzipbeispiel zeigt, dass die Anwendung von ML ein vielversprechender Ansatz für die Klassifizierung von Eigen-

5 Überlagerung von Eigenformen

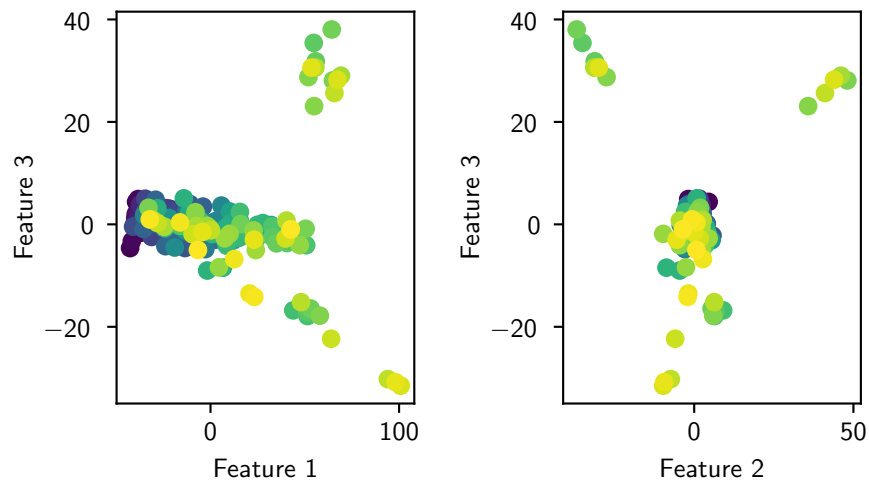


Abbildung 5.18: Verteilung der Eigenformen im dreidimensionalen Feature-Raum.
Blau: Niedrige Eigenform, Gelb: Hohe Eigenform

formen ist. Die strukturierte Verteilung der 200 Eigenformen im Feature-Raum, lässt darauf schließen, dass es in den Daten ein lernbares Muster gibt. Wird dieses Muster in einen Datensatz überführt und ein überwachter Klassifizierungsalgorithmus gelernt, kann die Unterscheidung von Plattenbeulformen möglicherweise automatisiert werden. Weitere Entwicklungspotentiale dieser Methode sind die Übertragung auf räumliche Strukturen wie einen Kastenträger oder eine Gitterrohrstruktur, durch die Verarbeitung von Punktwolken [7].

6 Fazit

Die Berechnung von Stabilitätsproblemen ist gerade im Leichtbau ein zentraler Bestandteil der Auslegung von dünnwandigen und schlanken Strukturen. Die nichtlineare Beulanalyse wird in der Regel als mehrstufiger Prozess durchgeführt. Zuerst werden die linearen Verzweigungslasten und die zugehörigen Eigenformen der Struktur mit der linearen Beulanalyse berechnet. Für die nichtlineare Beulanalyse wird dann eine Imperfektion auf die Struktur aufgebracht, um die Störeinflüsse auf die Steifigkeit gesichert abbilden zu können. Da die an der Struktur vorhandenen Imperfektionen nicht immer gemessen werden können, wird nach dem Eurocode 3 eine geometrische Ersatzimperfektion in Form von der ersten Eigenform verwendet.

Werden bei der Auslegung einer Struktur mehrere Lastfälle berücksichtigt, können unterschiedliche Teile einer Struktur relevant für das Versagen sein. Die lineare Beulanalyse muss daher für jeden Lastfall wiederholt werden, um die erste Eigenform zu bestimmen und resultiert bei vielen Lastfällen in viel Berechnungsaufwand.

Die vorliegende Arbeit ist Teil eines Vorhabens, den numerischen Aufwand der Bestimmung einer Imperfektion zu verringern. Dies wird erreicht in dem alle Teile einer Struktur mit einer Imperfektion versehen werden. Bei der Überlagerung der Eigenformen kann es jedoch zur Auslöschung und Überhöhung der Amplituden kommen, sodass die resultierende Imperfektion nicht den Vorgaben des Eurocode 3 entspricht. In der vorliegenden Arbeit wurde daher der Einfluss der Überlagerung von Eigenformen auf das Stabilitätsverhalten untersucht. Dabei wurden die Effekte bei der Überlagerung einer globalen und einer lokalen Eigenform anhand der Spannungsverteilung und der Kraft-Verformungs-Kurve untersucht. Aus den Ergebnissen wurden Anforderungen für das gewichtete Überlagerungsverfahren abgeleitet und die Methode daran bewertet. Die Überlagerung mittels der Gewichtung von Eigenformen wurde der Überlagerung mit konstanten Skalierungsfaktoren gegenübergestellt.

Durch die nichtlineare Beulanalyse einer lokalen Imperfektion wird gezeigt, dass diese durch Lastumlagerungen einen signifikanten Einfluss auf das Tragverhalten und den Kraftfluss in der Struktur haben, da sie durch lokale Krümmungen die Längssteifigkeit reduzieren. Ist eine lokale Imperfektion symmetrisch leitet diese jedoch kein globales

6 Fazit

Versagen ein, sondern führt lediglich zu einer Steifigkeitsreduktion. Die Berechnung der globalen Imperfektion zeigt, dass diese den größten Einfluss auf die Tragfähigkeit haben, da sie zu globalem Versagen führen. Die nichtlineare Berechnung der Struktur zeigt einen ausgeprägten Punkt, an dem die Steifigkeit signifikant abfällt und die aufgebrauchte Kraft in einer starken Verformung resultiert. Die Überlagerung von lokalen und globalen Eigenformen zeigt beide Effekte kombiniert. Die Anfangsteifigkeit wird durch Lastumlagerungen reduziert und die globale Verformung der Struktur verläuft asymptotisch zu einer Grenzlast, die mit steigender Amplitude der Imperfektion geringer wird.

Die lineare Überlagerung von lokalen Eigenformen führt zu einer signifikanten Überhöhung der Amplitude der resultierenden Imperfektion aufgrund der Interaktion der Eigenformen. Die überhöhten Amplituden können durch die gewichtete Überlagerung von Eigenformen reduziert, aber nicht vollkommen vermieden werden. Durch die Gewichtung lokaler und globaler Eigenformen ist ersichtlich, dass die Reihenfolge der Bearbeitung der Eigenformen einen signifikanten Einfluss auf die Imperfektion hat. Der ungleichmäßig verteilte Gewichtungswert der lokalen Eigenformen verzerrt eine globale Eigenform so, dass die Imperfektion ihre Affinität zur kritischsten Eigenform verliert. Die Verzerrung kann durch die Kombination der linearen Überlagerung der globalen Eigenformen mit der gewichteten Überlagerung von lokalen Eigenformen durch eine manuelle Klassifizierung in lokale und globale Eigenformen vermieden werden.

Schlussfolgerung

Die Interaktion von lokalen und globalen Imperfektionen und deren Einfluss auf die Steifigkeit einer Struktur wurde in der vorliegenden Arbeit untersucht. Für die nichtlineare Beulanalyse des Kastenträgers hat sich gezeigt, dass die globale Imperfektion einen signifikanten Einfluss auf die berechnete Tragfähigkeit hat und diese immer in der Imperfektion enthalten sein muss, um eine abgesicherte Tragfähigkeit zu ermitteln.

Eine automatisierte Überlagerung der Eigenformen gelingt am Schalenmodell für lokale Eigenformen, sodass die Imperfektion affin zur ersten Eigenform bleibt. Bei der Gewichtung von globalen Eigenformen muss zuvor eine Klassifizierung der zu überlagernden Formen durchgeführt werden, um die globale Eigenform nach der Gewichtung gesondert oder als Erstes zu überlagern.

Ausblick

Die Untersuchungen haben gezeigt, dass die Gewichtungsfunktion nur in bestimmten Fällen die Eigenformen wie gewünscht zu einer gleichmäßigen Imperfektion überlagert. Hier besteht die Möglichkeit einen Ansatz zu entwickeln, der sowohl die Konvergenz der Imperfektion und Gleichmäßigkeit der Verformung als auch die Überlagerung von lokalen und globalen Eigenformen sicherstellt.

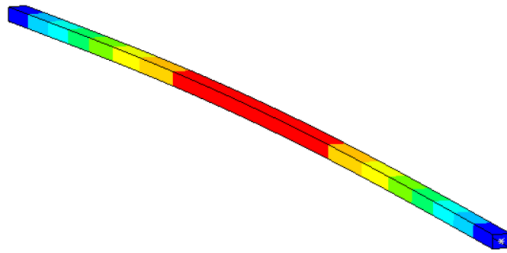
Alternativ kann die Bearbeitung von lokalen und globalen Eigenformen durch eine vorhergehende automatisierte Klassifizierung ermöglicht werden. Der vorgestellte Ansatz mit einer unüberwachten Lernstrategie für Eigenformen an einer Platte kann weiterführend mit Clustering-Algorithmen analysiert werden, um eine automatisierte Unterscheidung von globalen und lokalen Eigenformen zu entwickeln.

Des Weiteren sollte die Klassifizierung durch einen unüberwachten und einen überwachten Lernalgorithmus gegenübergestellt werden und für den praktischen Einsatz im Hinblick auf Entwicklungsaufwand und Genauigkeit an Prinzipbeispielen bewertet werden. Weiterführend kann die Verallgemeinerung auf dreidimensionale Geometrien durch die Verwendung von künstlichen neuronalen Netzwerken für die Klassifizierung von Punktwolken verfolgt werden.

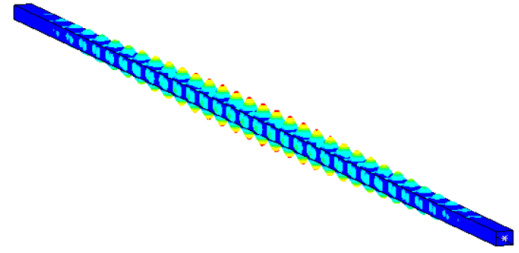
Literatur

- [1] David Bushnell. „Buckling of Shells – Pitfall for Designers“. In: *AIAA Journal* 19.9 (1981), S. 1183–1226. ISSN: 00011452. DOI: 10.2514/3.60058.
- [2] M. A. Crisfield. „An arc-length method including line searches and accelerations“. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 19.9 (1983), S. 1269–1289. ISSN: 10970207. DOI: 10.1002/nme.1620190902.
- [3] Arden Dertat. *Applied Deep Learning - Part 3: Autoencoders*. 2017. URL: [Link](#).
- [4] DIN EN 1993-1-1. *Eurocode 3: Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten – Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau*. 2020.
- [5] DIN EN 1993-1-5. *Eurocode 3 – Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten – Teil 1-5: Plattenförmige Bauteile*. 2019.
- [6] Neue Presse. *Brückeneinsturz bei A 7: Staatsanwaltschaft erhebt Anklage wegen fahrlässiger Tötung*. 2018. URL: [Link](#).
- [7] Charles R. Qi u. a. „PointNet: Deep learning on point sets for 3D classification and segmentation“. In: *Proceedings - 30th IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, CVPR 2017* 2017-January (2017), S. 77–85. DOI: 10.1109/CVPR.2017.16. arXiv: 1612.00593.
- [8] Wilhelm Rust. *Nichtlineare Finite-Elemente-Berechnungen*. 2009. ISBN: 9783658133771. DOI: 10.1007/978-3-8349-8500-2.

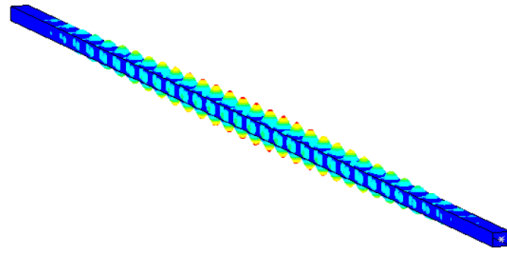
Anhang A



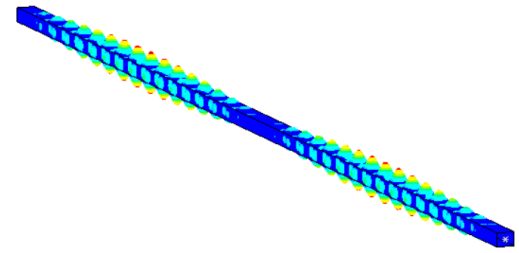
Eigenform 1, Eigenwert: 0,80017



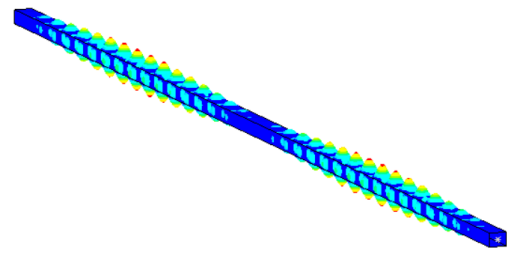
Eigenform 2, Eigenwert: 0,83575



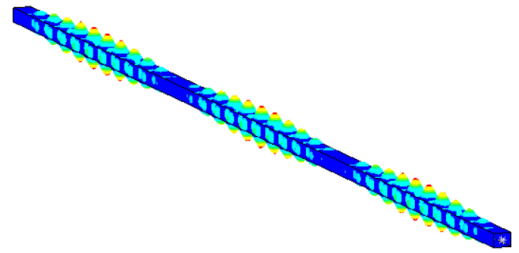
Eigenform 3, Eigenwert: 0,83575



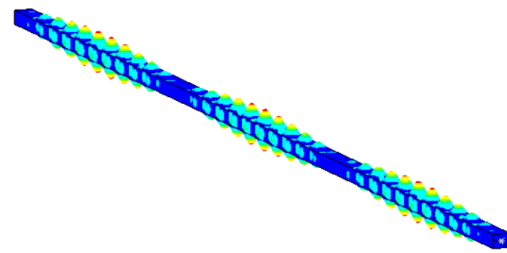
Eigenform 4, Eigenwert: 0,83627



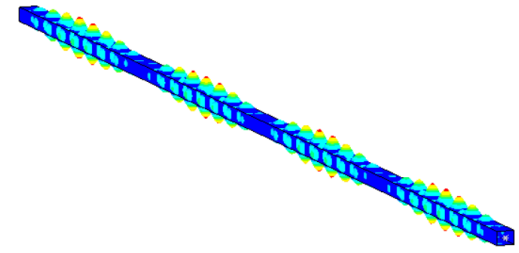
Eigenform 5, Eigenwert: 0,83629



Eigenform 6, Eigenwert: 0,83715

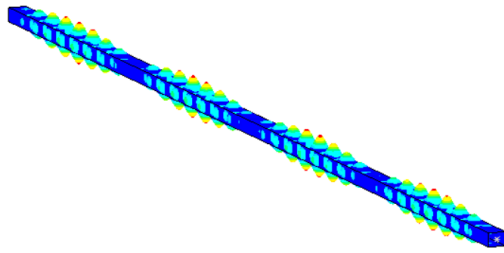


Eigenform 7, Eigenwert: 0,83718

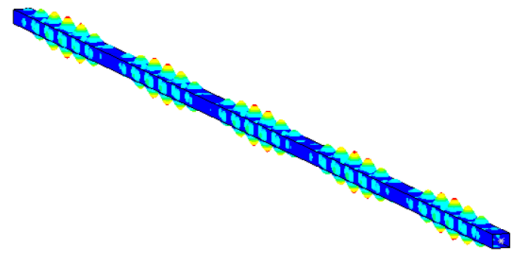


Eigenform 8, Eigenwert: 0,83838

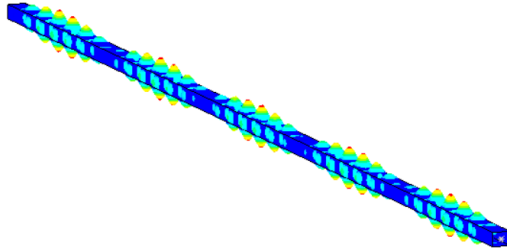
Literatur



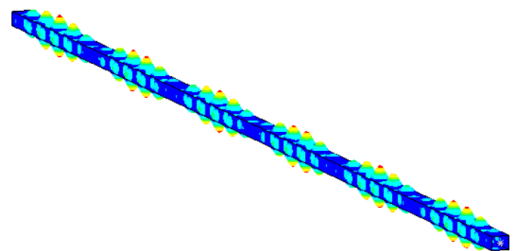
Eigenform 9, Eigenwert: 0,83844



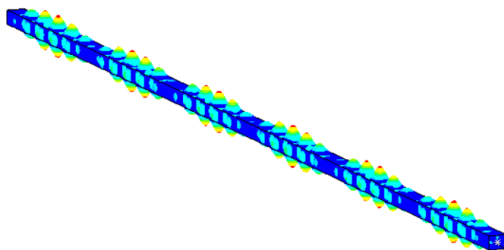
Eigenform 10, Eigenwert: 0,83996



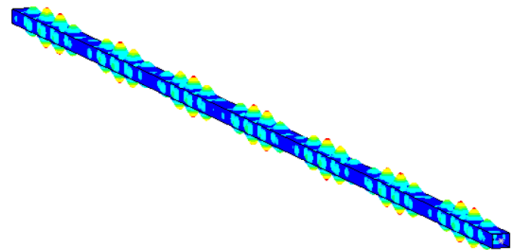
Eigenform 11, Eigenwert: 0,84005



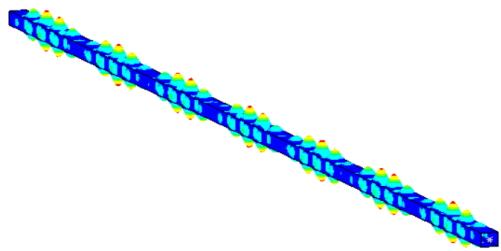
Eigenform 12, Eigenwert: 0,84190



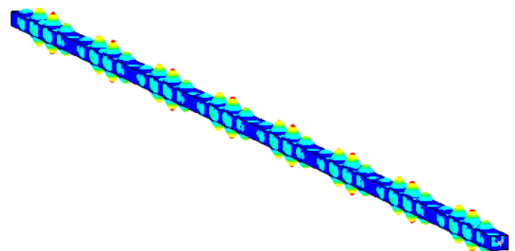
Eigenform 13, Eigenwert: 0,84202



Eigenform 14, Eigenwert: 0,84420

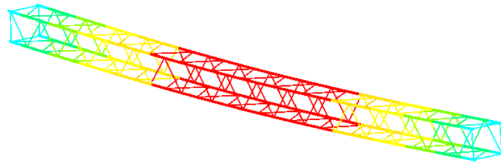


Eigenform 15, Eigenwert: 0,84434

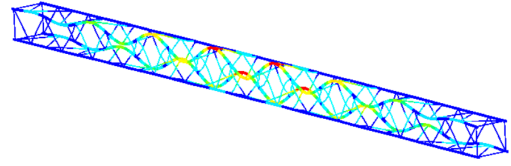


Eigenform 16, Eigenwert: 0,84687

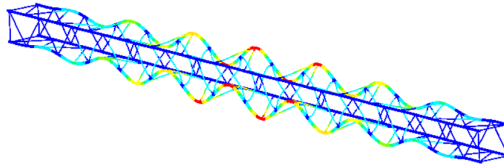
Anhang A



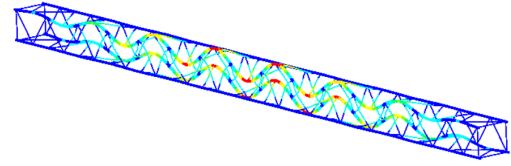
Eigenform 1, Eigenwert: 0,83141



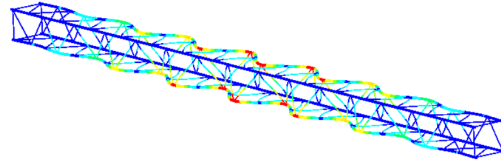
Eigenform 2, Eigenwert: 0,89302



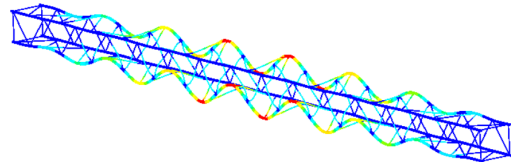
Eigenform 3, Eigenwert: 0,89381



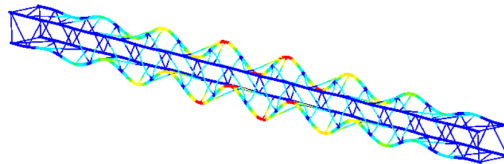
Eigenform 4, Eigenwert: 0,89436



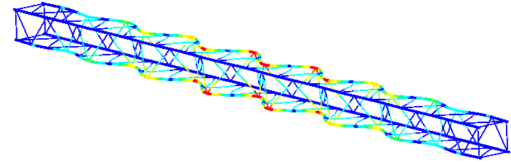
Eigenform 5, Eigenwert: 0,89508



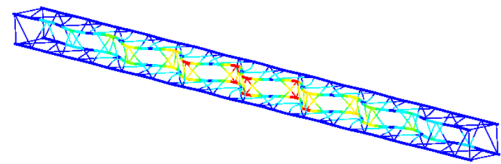
Eigenform 6, Eigenwert: 0,89514



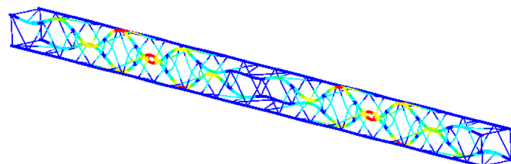
Eigenform 7, Eigenwert: 0,89590



Eigenform 8, Eigenwert: 0,89672



Eigenform 9, Eigenwert: 0,89751



Eigenform 10, Eigenwert: 0,93627

Erklärung zur selbstständigen Bearbeitung der Arbeit

Hiermit versichere ich,

Marc Gehring

dass ich die vorliegende Masterarbeit - bzw. bei einer Gruppenarbeit die entsprechend gekennzeichneten Teile der Arbeit - mit dem Thema:

Beitrag zur Definition von Ersatzimperfectionen an mehrteiligen Konstruktionen durch Überlagerung von Eigenformen

ohne fremde Hilfe selbständig verfasst und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Wörtlich oder dem Sinn nach aus anderen Werken entnommene Stellen sind unter Angabe der Quellen kenntlich gemacht.

- die folgende Aussage ist bei Gruppenarbeiten auszufüllen und entfällt bei Einzelarbeiten -

Die Kennzeichnung der von mir erstellten und verantworteten Teile der Masterarbeit ist erfolgt durch:

Ort

Datum

Unterschrift