



Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Hamburg University of Applied Sciences

Masterarbeit

Malte Schölermann

Untersuchung des Drillknickens und Biegedrillknickens stabartiger Strukturen

*Fakultät Technik und Informatik
Department Fahrzeugtechnik und Flugzeugbau*

*Faculty of Engineering and Computer Science
Department of Automotive and
Aeronautical Engineering*



Malte Schölermann

**Untersuchung des Drillknickens und
Biegedrillknickens stabartiger Strukturen**

Masterarbeit eingereicht im Rahmen der Masterprüfung

im Studiengang Flugzeugbau
am Department Fahrzeugtechnik und Flugzeugbau
der Fakultät Technik und Informatik
der Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg

Erstprüfer/in: Professor Dr.-Ing. Eckart Nast

Zweitprüfer/in: Professor Dr.-Ing. Michael Seibel

Abgabedatum: 29.08.2022

I. Kurzreferat / Abstract

Name des Studierenden

Malte Schölermann

Thema der Masterthesis

Untersuchung des Drillknickens und Biegedrillknickens stabartiger Strukturen

Stichworte

Drillknicken, Biegedrillknicken, Maple, stabartige Struktur

Kurzreferat

In dieser Ausarbeitung wird das Biege-, Drill- und Biegedrillknicken stabartiger Strukturen betrachtet. Anschließend wird ein Maple-Tool für Studierende der HAW-Hamburg im Rahmen der Laborversuche erstellt, mit dem I-, L-, U-, Z- und T-Profilen untersucht werden können. Dabei wird die Rechnung Schritt für Schritt, vergleichbar mit einer Handrechnung, durchgeführt und dargestellt. Die Wahl der Koordinatensysteme und Verformungen werden graphisch dargestellt und die Struktur wird dabei mittels Theorie II.- und III. Ordnung untersucht. Auch werden Imperfektions- und Ersatzverfahren dargestellt. Die kritische Knicklast wird mit einem Knickversuch für ein L- und T-Profil ermittelt. Dieser Versuch wurde für das Mechanik-Labor der HAW-Hamburg entworfen.

Name of Student

Malte Schölermann

Title of the paper

Investigation of torsional and lateral-torsional buckling of rod-like structures

Keywords

torsional buckling, lateral-torsional buckling, Maple, rod-like structure

Abstract

Inside this report the lateral-, torsional- and lateral-torsional buckling of star-like structures is considered. A Maple tool will then be created for students at HAW Hamburg as part of the laboratory tests. This tool can be used to examine I-, L-, U-, Z- and T- profiles. The calculation is carried out and issued in a manner comparable to a manual calculation. The choice of coordinate systems and deformations are displayed graphically. The structure is thereby determined by means of theory II. and III. order examined. Imperfection and replacement methods are also presented. The critical buckling load is determined with a buckling test for an L- and T profile. This experiment was designed for the mechanics laboratory of the HAW Hamburg.

II. Inhaltsverzeichnis

I.	Kurzreferat / Abstract	3
II.	Inhaltsverzeichnis	4
III.	Abbildungsverzeichnis.....	6
IV.	Tabellenverzeichnis	11
V.	Abkürzungsverzeichnis.....	12
VI.	Symbolverzeichnis.....	13
1	Einleitung.....	16
2	Stand der Technik.....	18
2.1	Stabartige Strukturen	18
2.2	Flächenträgheitsmoment.....	19
2.3	Schubmittelpunkt	21
2.4	Torsion stabartiger Strukturen.....	22
2.5	Stabilitätsproblem	23
2.5.1	Stabilitätszustände.....	24
2.5.2	Schlankheitsgrad	27
2.6	Festigkeitsproblem	29
2.6.1	Theorie I. Ordnung.....	29
2.6.2	Theorie II. Ordnung.....	29
2.6.3	Geometrisch nichtlinear	30
2.6.4	Vergleich.....	35
2.6.5	Imperfektions-, Ersatz- und Abminderungsverfahren.....	36
3	Theorie der Berechnung.....	41
3.1	Bestimmung der kritischen Lasten	41
3.1.1	Eulersches Knicken (Biegeknicken).....	41
3.1.2	Biegedrillknicken	44
3.1.3	Drillknicken.....	48
3.1.4	Vergleichsübersicht.....	50
3.2	Bestimmung der Verformungen	51
3.2.1	Biegeknicken.....	51
3.2.2	Reines Drillknicken.....	61
3.2.3	Biegedrillknicken	64
3.2.4	Vergleich der Theorie II. und III. Ordnung	67
4	Berechnung	69
4.1	Doppelt symmetrisches I-Profil	69
4.1.1	Biegeknicken.....	70
4.1.2	Berechnung Drillknicken	73
4.2	Berechnung Biegedrillknicken.....	75
4.2.1	T-Profil	75
4.2.2	L-Profil.....	80

4.2.3	I-Profil.....	83
5	Umsetzung mit Maple	90
6	Experimentelle Untersuchung	98
6.1	Versuchsbeschreibung.....	98
6.2	Aufbau.....	100
6.3	Datenerhebung	104
6.3.1	Versuch L-Profil	104
6.3.2	Versuch T- Profil	106
6.4	Auswertung	107
7	Zusammenfassung	108
8	Literaturverzeichnis	111
Anhang A:	Materialdatenblatt.....	114
Anhang B:	Abminderungsverfahren.....	115
Anhang C:	Zeichnungen	116

III. Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1 Biegedrillknicken eines I-Profiles (Wolf S. 39)	16
Abbildung 2 Darstellung eines Stabquerschnittes mit Achsendefinition, Schubmittelpunkt und Flächenschwerpunkt	18
Abbildung 3 Starrkörper mit Infinitesimalen Flächenelement und dem Abstand zum Flächenschwerpunkt.....	20
Abbildung 4 Starrer Körper mit Schneidenlagerung und stabilisierenden Federn, (A) ungestört, (B) gestörtes Gleichgewicht (Flügge, 1967 S. 256)	24
Abbildung 5 beidseitig gelenkig gelagerter Stab mit zentrischer Druckbeanspruchung: (a) gerade Gleichgewichtslage, (b) stabile ausgeknickte Gleichgewichtslage, (c) qualitatives Last- Verschiebungsdiagramm (Mang, et al. S. 321)	25
Abbildung 6 Euler-Hyperbel (Göttsche, et al. S. 125)	27
Abbildung 7 Anpassung der Euler-Hyperbel (Göttsche, et al. S. 128)	28
Abbildung 8 Stab unter Längsbelastung nach Theorie 1. Ordnung	29
Abbildung 9 Stab unter Längsbelastung nach Theorie 2. Ordnung	30
Abbildung 10 Darstellung zur Bestimmung des Biegemomentes	31
Abbildung 11 Finite Element zur Darstellung der Krümmung	32
Abbildung 12 Darstellung der Winkelbeziehung	33
Abbildung 13 Darstellung der verschiedenen Theorien anhand eines Druckkraft- Auslenkungs-Diagramm einer stabförmigen Struktur unter Druckbelastung (Linke, et al., 2015 S. 276)	35
Abbildung 14 (a) Vorkrümmung, (b) Schiefstellung und (c) Lastexzentrizität	37

Abbildung 15 Ersatzsystem, Biegesteifigkeit wird mittels Drehfeder einbezogen .	38
Abbildung 16 Zuordnung von Querschnitten zur Knicklinie mit Abminderungsverfahren (Lohse, et al. S. 340) (Auszug aus der DIN EN 1993): Eurocode 3.....	39
Abbildung 17 Tabelle der Imperfektionsbeiwerte und der Verschiebung der Eulerhyperbel (Lohse, et al. S. 339)	40
Abbildung 18 Einfache Euler-Stab (A) unverformt, (B) verformt und (C) freigeschnitten	41
Abbildung 19 Einfach symmetrisches I-Profil.....	45
Abbildung 20 Betrachtung des Schubmittelpunktes (SMP) und Flächenschwerpunktes (FSP) eines I-Profiles beim Biegedrillknicken	45
Abbildung 21 Infinitesimales Element zur Darstellung der Abtriebskräfte im Zusammenhang mit den Spannungen (Linke, et al., 2015 S. 292).....	46
Abbildung 22 Drillknicken eines doppelt symmetrischen I-Profiles	48
Abbildung 23 Stabilitätsproblem Biegeknicken eines I-Profiles (Lohse, et al. S. 320)	51
Abbildung 24 Imperfektionsverfahren vorverformter Stab	52
Abbildung 25 Darstellung der maximalen Biegung mit Vorkrümmung nach Theorie II. Ordnung	53
Abbildung 26 Darstellung eines infinitesimalen Elementes der verformten Stabstruktur	54
Abbildung 27 Schnittreaktionen am verformten differenzialen Element.....	55
Abbildung 28 positives Schnittufer eines verformten Stabes	56

Abbildung 29 maximale Verdrehung in Abhängigkeit der Druckkraft nach Theo. II. Ordnung mit Imperfektion	63
Abbildung 30 Maximale Verdrehung in Abhängigkeit der Druckkraft nach Theo. III. Ordnung mit und ohne Imperfektion	64
Abbildung 31 Stabilitätsproblem Biegedrillknicken eines I-Profils (Lohse, et al. S. 320)	64
Abbildung 32 Verschiebungen beim Biegedrillknicken eines einfach symmetrischen I-Profils	65
Abbildung 33 Gesamte Verformung beim Biegedrillknicken	66
Abbildung 34 Querschnitt doppelt symmetrisches I-Profil	70
Abbildung 35 Biegeknicken mit Imperfektion nach Theo. 2. Ordnung eines doppelt symmetrischen I-Profils	71
Abbildung 36 Knicklast nach Theorie III. Ordnung für das I-Profil	72
Abbildung 37 Torsion/ Verdrehung des I-Profils bei reinem Drillknicken	74
Abbildung 38 T-Profil Querschnitt und beidseitiger Gabellagerung und Belastung	75
Abbildung 39 T-Profil Querschnitt.....	77
Abbildung 40 maximale Verformung des T- Profils infolge Biegedrillknicken	78
Abbildung 41 maximale Verformung des T- Profils infolge Biegedrillknicken mit Theorie III. Ordnung	79
Abbildung 42 links: Dünnwandiges L-Profil mit Flächenschwerpunkt FSP und Schubmittelpunkt SMP rechts: Stab mit beidseitiger Gabellagerung und Druckkraft	80
Abbildung 43 Verformung infolge Biegedrillknicken in der Stabmitte nach Theorie II. Ordnung	82

Abbildung 44 Verformung infolge Biegedrillknicken in der Stabmitte nach Theorie III. Ordnung	83
Abbildung 45 I-Profil mit Abmaßen	83
Abbildung 46 I-Profil mit Koordinatensystem zur Bestimmung des Flächenschwerpunktes.....	84
Abbildung 47 Darstellung der Abschnittskoordianten "s"	86
Abbildung 48 Detailansicht der Lage vom Schubmittelpunkt und Flächenschwerpunkt	86
Abbildung 49 maximale Verschiebung infolge Biegedrillknicken mit Theorie II. Ordnung	88
Abbildung 50 maximale Verformung des I-Profiles infolge Biegedrillknicken nach Theorie III. Ordnung	89
Abbildung 51 Startseite des Maple- Tools	90
Abbildung 52 Startansicht des I-Profiles.....	90
Abbildung 53 Berechnung des Flächenschwerpunktes	91
Abbildung 54 Berechnung vom Schubmittelpunkt	91
Abbildung 55 Berechnung der kritischen Lasten	92
Abbildung 56 Bestimmung der Verformungsgleichung nach Theorie II. Ordnung	93
Abbildung 57 Anzeige der Verformungsart und der Biegeanteil	94
Abbildung 58 Darstellung des Torsionanteils.....	94
Abbildung 59 Darstellung der Normalspannungen in der Stabmitte	95
Abbildung 60 Darstellung der Schubspannungen in der Stabmitte.....	95

Abbildung 61 Darstellung der Gleichungen und der eingesetzten Verformungsgleichungen.....	96
Abbildung 62 Darstellung der bestimmenden Verformung und des Biegeanteils .	97
Abbildung 63 Darstellung des Torsionanteils mit und ohne Imperfektion nach Theorie III. Ordnung	97
Abbildung 64 Schematische Darstellung des Knickversuches, Zustand (A) vor der Auslenkung und Zustand (B) nach dem Ausknicken	98
Abbildung 65 Darstellung vom Knickversuch.....	98
Abbildung 66 Nahaufnahme der Messuhr	99
Abbildung 67 Versuchsaufbau.....	100
Abbildung 68 Drehvorrichtung zu Kraftaufbringung, Brücke und obere Aufnahme	101
Abbildung 69 untere Aufnahme und Kraftmessdose	102
Abbildung 70 Aufnahme mit Einlegescheiben	103
Abbildung 71 L-Profil Querschnitt	104
Abbildung 72 T-Profil Querschnitt.....	106
Abbildung 73 Versuch L-Profil	107
Abbildung 74 Last-Verformungs-Diagramm (Zweidler, 2020).....	109

IV. Tabellenverzeichnis

Tabelle 1 Vergleich der verschiedenen Berechnungstheorien I. bis III. Ordnung .	36
Tabelle 2 Vergleich der verschiedenen Verformungen mit den Profileigenschaften (Grote, et al., 2018)	50
Tabelle 3 Vergleich Theorie II. und III. Ordnung	67
Tabelle 4 Berechnung des Flächenschwerpunktes	84
Tabelle 5 Berechnung des Flächenträgheitsmoment	84
Tabelle 6 Berechnung des Flächenmomentes erster Ordnung	86
Tabelle 7 Datenerhebung L-Profil.....	105
Tabelle 8 Datenerhebung T-Profil.....	106

V. Abkürzungsverzeichnis

Abkürzung	Bedeutung
BK	Biegeknicken
BDK	Biegedrillknicken
DGL	Differenzialgleichung
DK	Drillknicken
E-Modul	Elastizitätsmodul
FSP	Flächenschwerpunkt
Kap.	Kapitel
RB	Randbedingungen
SMP	Schubmittelpunkt
geo.	geometrisch

VI. Symbolverzeichnis

Symbol	Bedeutung	Einheit
<u>Großbuchstaben</u>		
A	Fläche	mm^2
E	Elastizitätsmodul	N/mm^2
F	Kraft	N
G	Schubmodul	N/mm^2
I	Trägheitsmoment	mm^4
M	Moment	Nmm
N	Normalkraft	N
S	Flächenmoment erster Ordnung	mm^3
Q	Querkraft	N

Kleinbuchstaben

b	Breite	<i>mm</i>
h	Höhe	<i>mm</i>
t	Dicke	<i>mm</i>
e	Abstand Flächenschwerpunkt zum Schubmittelpunkt	<i>mm</i>
y	Abstand in y- Richtung	<i>mm</i>
z	Abstand in z- Richtung	<i>mm</i>

Griechische Zeichen

α	Imperfektionsbeiwert	-
ε	Dehnung	<i>mm/m</i>
κ	Krümmung	<i>1/mm</i>
λ	Schlankheitsgrad	-
σ	Spannung	<i>N/mm²</i>
φ	Biegewinkel	°
χ	Abminderungsbeiwert	-
ϑ	Verdrehung	<i>rad</i>

Indizes

F	Feder
geo	geometrisch
ges	gesamt
k	kritisch
p	polar
x, y, z	Eigenschaften in die Koordinatenrichtung
ϑ	Verdrehung
1, 2, 3	Abschnittsnummern
0	Vorverformung im unbelasteten Zustand

1 Einleitung

In dieser Ausarbeitung wird die Erstellung eines Maple-Tools zur Berechnung des Biege-, Drill- und Biegedrillknickens stabartiger Strukturen beschrieben. Die Ausarbeitung wird im Rahmen der Masterthesis an der HAW Hamburg erarbeitet. Mithilfe des Berechnungstools sollen I-, U-, Z-, T- und L- Profile berechnet werden können. Die Profile werden zum Beispiel zum Aussteifen von Torsionskästen, Platten oder Hauptfeldern im Flugzeugbau verwendet.

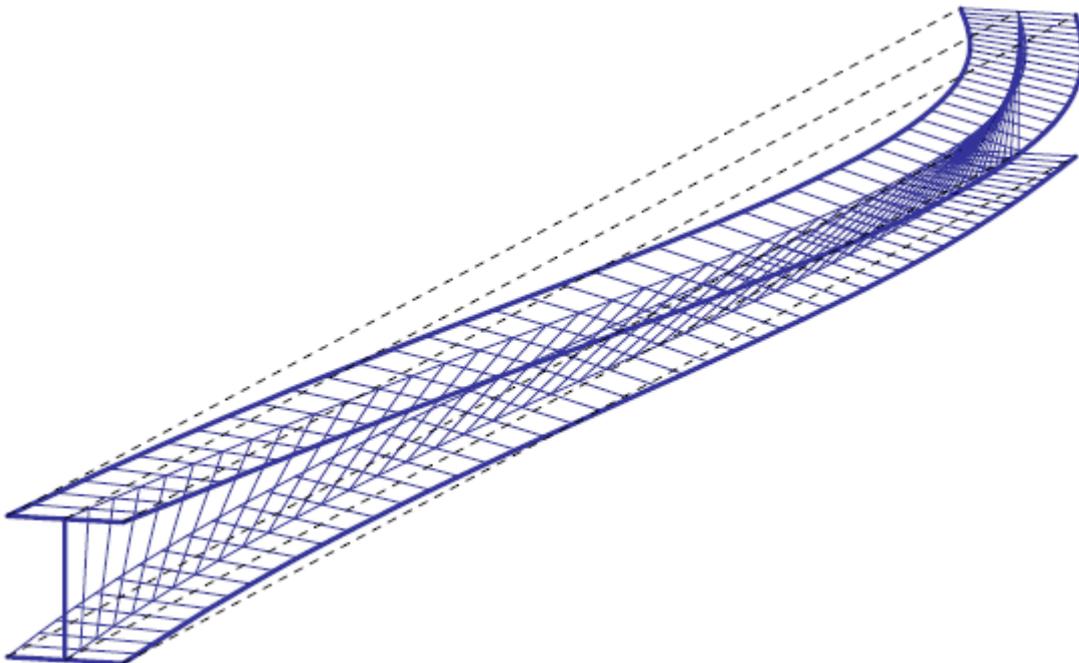


Abbildung 1 Biegedrillknicken eines I-Profils (Wolf S. 39)

Am Anfang dieser Ausarbeitung wird definiert, was eine stabartige Struktur ist. Im Anschluss werden Definitionen verschiedener Querschnittsvariablen und das Stabilitäts- und Festigkeitsproblem erläutert. Danach wird die Theorie der Berechnung dargestellt und eine Handrechnung durchgeführt. Nach der Berechnung wird die Umsetzung des Maple-Tools und ein Versuch zur Bestimmung der kritischen Last dargestellt.

Mit der Theorie I. Ordnung wird der Stab nur in seiner Längsachse belastet und somit wirken nur reine Druckspannungen. Kommt es zu einer kleinen Auslenkung (Knicken) wirken auch Biegespannungen. Dabei ist die Aufgabe der Biegesteifigkeit die Stabilisierung des Gleichgewichtes und nicht das Übertragen von Kräften. Mit der Theorie II. Ordnung wird die kritische Knicklast bestimmt. Des Weiteren kann mittels Imperfektion auch die Verformung unterhalb der kritischen Last bestimmt werden. Die Theorie III. Ordnung ermöglicht eine Betrachtung der Verformung oberhalb der kritischen Knicklast. Zusätzlich wird die Verformung des Stabes auch mit Imperfektion nach Theorie III. Ordnung berechnet.

Die Ausarbeitung ist eine theoretische Betrachtung des Biegedrillknickens. Um die theoretische kritische Knickkraft zu validieren, werden mit einem Knickversuch die kritischen Kräfte für ein L- und T-Profil ermittelt. Die Bestimmung der kritischen Knicklast hat in der Auslegung eine wichtige Bedeutung, da oberhalb dieser Last die Struktur knickt und eine große Verformung mit sich bringt.

Für die Theorie und Berechnung gilt, dass bei Verformungen die Querschnittsform des Stabes erhalten bleibt. Die Stäbe werden mit der Biegetorsionstheorie betrachtet. Die Kraft greift ideal im Flächenschwerpunkt an und ist richtungstreu. Auch wird ausschließlich mit elastischen Materialverhalten unterhalb von der Dehngrenze und ohne Plastifizierungen gerechnet. Die Verwölbung in Folge einer Torsionsbelastung sorgt für eine lineare Verwölbung der Profilmittellinie. Lokales Beulen oder andere lokale Stabilitätsfälle werden nicht betrachtet.

2 Stand der Technik

2.1 Stabartige Strukturen

Stabartige Strukturen sind dünnwandige, schlanke Bauteile. Die Belastung ist eine reine Druckbelastung, welche in der Längsachse eingeleitet wird. Des Weiteren ist die äußere Belastung deutlich größer als die des Eigengewichtes, wodurch das Eigengewicht vernachlässigt werden kann. Die auftretenden Schnittkräfte sind denen der Balkenstrukturen gleichzusetzen. (Linke, et al., 2015)

In dieser Ausarbeitung werden lediglich die offenen Profile (L, U, Z, T und Doppel-T) betrachtet. Dabei sollte beachtet werden, dass dünnwandige offene Profile nur geringe Torsionskräfte aufnehmen können.

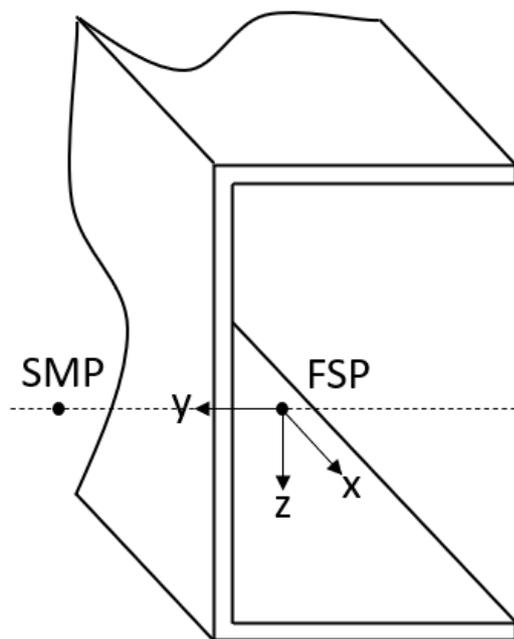


Abbildung 2 Darstellung eines Stabquerschnittes mit Achsdefinition, Schubmittelpunkt und Flächenschwerpunkt

Übersicht der verschiedenen Profile

Doppelsymmetrische Profile	Schubmittelpunkt liegt im Flächenschwerpunkt	I ¹
Punktsymmetrische Profile	SMP liegt im FSP oder auf einer Symmetrieachse	Z L ²
Einfachsymmetrische Profile	SMP und FSP liegen auf einer Symmetrieachse	I T C U
Unsymmetrische Profile	SMP und FSP sind getrennt voneinander	L

2.2 Flächenträgheitsmoment

Flächenschwerpunkt (FSP)

Um das Flächenträgheitsmoment zu bestimmen, wird der FSP benötigt. Der Flächenschwerpunkt errechnet sich aus dem Flächenmoment erster Ordnung (statisches Moment) geteilt durch die Fläche (Flächenmoment 0. Ordnung).

$$y_s = \frac{S_y}{A} \text{ und } z_s = \frac{S_z}{A} \quad (2.1)$$

$$A = \int_A dA \quad (2.2)$$

$$S_y = \int_A z dA \text{ und } S_z = \int_A y dA \quad (2.3)$$

Die Gleichung 2.3 stellt das Flächenmoment erster Ordnung dar.

¹ Oberer- und unterer-Gurt haben die gleiche Breite = doppelt sym.; unterschiedlich breit = einfachsym.

² Beide Schenkel gleich lang = Punktsymmetrisch; Schenkel unterschiedlich lang = unsymmetrisch

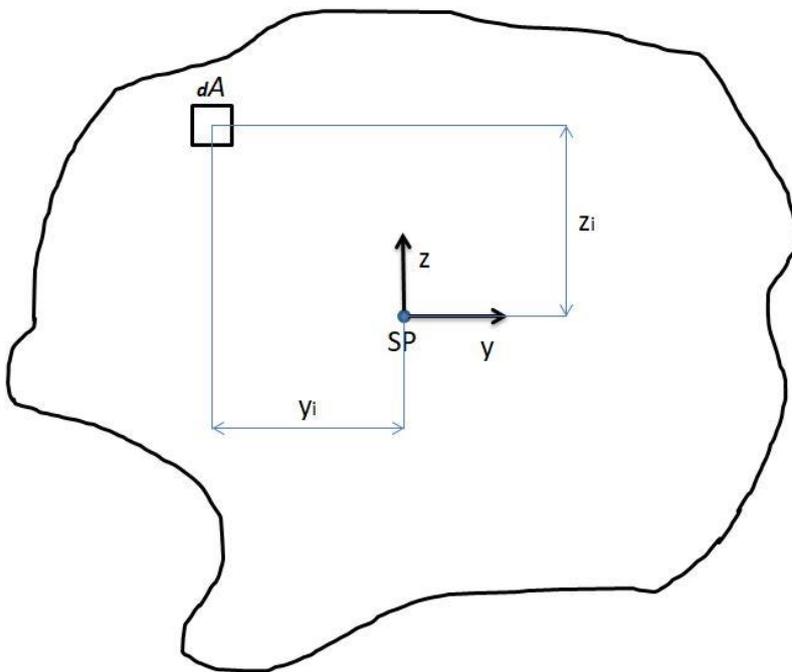


Abbildung 3 Starrkörper mit Infinitesimalen Flächenelement und dem Abstand zum Flächenschwerpunkt

Flächenträgheitsmoment

Das Flächenträgheitsmoment zweiter Ordnung (I_{yy}, I_{zz}) berechnet sich wie das Flächenträgheitsmoment erster Ordnung, nur dass der Abstand der Fläche quadratisch eingeht.

$$I_{yy} = \int z^2 \cdot dA, I_{zz} = \int y^2 \cdot dA, I_{yz} = - \int yz \cdot dA \quad (2.4)$$

Besteht die Fläche aus mehreren Teilflächen, so können diese aufsummiert werden.

$$I_{yy} = \sum I_{yyi}, I_{zz} = \sum I_{zzi}, I_{yz} = \sum I_{yzi} \quad (2.5)$$

Satz von Steiner

Der Satz von Steiner bezieht den Einfluss des Abstandes zur Schwerachse mit ein. Liegt der Schwerpunkt der Teilfläche nicht in der Schwerachse, so ergänzt sich die Formel für das Flächenträgheitsmoment um den Steineranteil. Der Steineranteil setzt sich aus der Teilfläche multipliziert mit dem Abstand von der Schwerachse zum

Teilflächenschwerpunkt zum Quadrat zusammen. Wird die Biegung um die y-Achse betrachtet, so ist der Abstand in z-Richtung (90° zur Biegeachse in der Ebene) relevant.

$$\text{Steineranteil: } y_i^2 \cdot A_i \quad (2.6)$$

Flächenträgheitsmoment mit Steiner Anteil.

$$I_{yy} = I_y = \sum I_{yyi} + \sum z_i^2 \cdot A_i \quad (2.7)$$

$$I_{zz} = I_z = \sum I_{zzi} + \sum y_i^2 \cdot A_i \quad (2.8)$$

$$I_{yz} = \sum I_{yzi} - \sum y_i z_i \cdot A_i \quad (2.9)$$

Das polare Trägheitsmoment um den Schubmittelpunkt.

$$I_p = I_y + I_z \quad (2.10)$$

Berechnung des polaren Flächenmomentes 2. Grades um den Schubmittelpunkt.

$$I_0 = I_y + I_z + A(e_y^2 + e_z^2) \quad (2.11)$$

Mit dem polaren Trägheitsmoment wird noch der Flächenträgheitsradius eingeführt.

$$i_p^2 = i_y^2 + i_z^2 = \frac{I_p}{A} \quad (2.12)$$

Das Kapitel 2.2 wurde mit den Quellen (Gross, et al., 2004), (Gross, et al., 2017) und (Wittenburg, et al., 2014) geschrieben.

2.3 Schubmittelpunkt

„Der Schubmittelpunkt [...] ist derjenige Punkt eines Querschnittes, durch den die Wirkungslinien der Querkräfte Q_y und Q_z verlaufen müssen, damit der Querschnitt torsionsfrei bleibt“ (Mahnken, 2015 S. 248).

Ist das Profil einfach symmetrisch, so liegt der SMP auf der Symmetrielinie. Für doppelt oder punktsymmetrische Querschnitte ist der SMP gleich dem FSP.

Um den SMP zu bestimmen, werden die statischen Flächenmomente (Gl.(2.3)) des Querschnittes und die Flächenträgheitsmomente benötigt. Mit diesen werden die Schubflüsse q_i bestimmt.

$$q_i(s_i) = \frac{Q_z}{I_y} \cdot S_{yi}(s_i) + \frac{Q_y}{I_z} \cdot S_{zi}(s_i) \quad (2.13)$$

Für die Schubflüsse werden die wirkenden Kräfte im jeweiligen Abschnitt bestimmt.

$$F_i = \int q_i \cdot ds_i \quad (2.14)$$

Im Anschluss wird die Summe der Momente um einen Punkt aufgestellt. Mit der oberen Definition und den berechneten Kräften kann der Abstand e_y und somit auch die Lage vom SMP bestimmt werden. (Linke, et al., 2015) (Mahnken, 2015)

$$\sum M^{(S)} = Q_z \cdot e_y + \sum F_{zi} \cdot r_{\perp} = 0 \quad (2.15)$$

$$\sum M^{(S)} = Q_y \cdot e_z + \sum F_{yi} \cdot r_{\perp} = 0 \quad (2.16)$$

2.4 Torsion stabartiger Strukturen

Beim Drill- und Biegedrillknicken kann es, wie der Name schon sagt, zum Verdrillen des Stabes kommen. Dafür wird die Differentialgleichung der Wölbkrafttorsion genauer betrachtet. Diese ist eine Differentialgleichung 3. Ordnung, welche sich aus dem Torsionsmoment nach St. Venant und Biegetorsionsmoment infolge der Wölbspannungen zusammensetzt.

$$T = T_{SV} + T_W = GI_T \vartheta' - EC_T \vartheta''' \quad (2.17)$$

Der Anteil nach St. Venant (T_{SV}) setzt sich aus dem Schubmodul (G), Torsionsflächenmomentes (I_T) und (ϑ') der ersten Ableitung der Verdrehung zusammen. Das Schubmodul wird mit dem E-Modul und der Querkontraktionszahl ν bestimmt.

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.18)$$

Das Torsionsflächenmoment setzt sich aus den einzelnen Torsionsflächenmomenten des Profils zusammen. Dabei ist t_i die Dicke des Profilquerschnittsteils, h_i die jeweilige Länge und η ein Profil-Korrekturfaktor.

$$I_T = \sum_i I_{Ti} = \frac{\eta}{3} \sum_i h_i (t_i)^3 \quad (2.19)$$

Die Gleichung des Biegetorsionsmoment (T_W) infolge der Wölbspannungen setzt sich aus dem E-Modul, den Wölbwiderstand (C_T) und (ϑ''') der dritten Ableitung der Verdrehung zusammen. Der Wölbwiderstand wird mit den Einheitsverwölbungen (u_i^*) bestimmt, welche wiederum mit den Verschiebungsverläufen (u_i) berechnet werden. (Linke, et al., 2015)

$$C_T = \int_A u^2 dA \quad (2.20)$$

$$u_i(x, s_i) = \frac{\partial u_i}{\partial s_i} = -\frac{Tr_{\perp i}}{GI_T} \left(1 - \frac{2z_i}{r_{\perp i}} \right) \quad (2.21)$$

$$u_i^*(s_i) = \frac{u_i(x, s_i)}{\vartheta'(x)} = -u_i(x, s_i) \frac{GI_T}{T} \quad (2.22)$$

2.5 Stabilitätsproblem

Betrachten wir einen Stab mit einer Druckbelastung; die Druckspannungen sind im zulässigen Bereich und dennoch kommt es zu einem Versagen des Stabes. Eine mögliche Ursache dafür kann eine reine Festigkeitsbetrachtung sein. Um dieses zu verhindern, sollten Leichtbausysteme auch unter dem Aspekt der Stabilität untersucht werden. Ein System mit Stabilitätsverlust verformt sich. Diese Verformungen sind nicht

mehr klein und daher auch nicht mit der linearen Theorie berechenbar. (Linke, et al., 2015)

2.5.1 Stabilitätszustände

Ein System unter Belastung kann verschiedene Stabilitätszustände einnehmen. Diese Zustände sind stabil, instabil und indifferent.

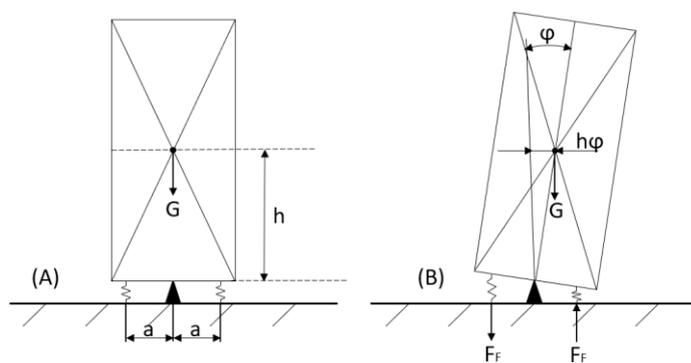


Abbildung 4 Starrer Körper mit Schneidenslagerung und stabilisierenden Federn, (A) ungestört, (B) gestörtes Gleichgewicht (Flügge, 1967 S. 256)

Die Stabilitätszustände werden anhand eines Blocks verdeutlicht. Dieser Block ist mittig auf einer Schneide gelagert. Jeweils auf der linken und rechten Seite, im Abstand a , wird der Block von einer Feder gestützt (siehe Abbildung 4). Im geraden, aufgerichteten Zustand seien die Federn entspannt und dadurch kräftefrei.

Werden die Federn nun in der aufgerichteten Position entfernt, so kippt der Block trotz seines Gleichgewichtszustandes entweder nach rechts oder links. Der Grund dafür ist, dass das Gleichgewicht nicht stabil ist.

Um die Stabilität zu bestimmen, wird das System minimal ($\sin(\varphi) \approx \varphi$) aus seiner Gleichgewichtslage (A) ausgelenkt. Für das Beispiel bedeutet es eine kleine Drehung um die Schneidenspitze. Diese Auslenkung (B) erzeugt ein Moment ($G \cdot h \cdot \varphi$) des Eigengewichts.

Kann das entstehende Moment ($F_F \cdot 2 \cdot a$) der beiden Federn das Moment aus dem Eigengewicht nicht ausgleichen, so kippt der Block und das System ist **instabil**. Wenn beide Momente gleichgroß sind,

$$\mathbf{G \cdot h \cdot \varphi = F_F \cdot 2 \cdot a = 2 \cdot k \cdot a^2 \cdot \varphi} \quad (2.23)$$

verbleibt der Block in der ausgelenkten Stellung. Dieser Zustand wird als **indifferent** bezeichnet.

Das System ist **stabil**, wenn der Block nach einer kleinen Auslenkung wieder in seine ursprüngliche Lage (A) zurückkehrt. Für das Beispiel bedeutet es, dass das Moment der Federn größer ist als das des Eigengewichtes. (Flügge, 1967)

$$\mathbf{G \cdot h \cdot \varphi < F_F \cdot 2 \cdot a = 2 \cdot k \cdot a^2 \cdot \varphi} \quad (2.24)$$

Nach Erreichen der kritischen Last knickt die Struktur seitlich aus. Dabei kann das System, bei einem doppelt symmetrischen Profil, in zwei Richtungen ausknicken. Die Richtung bei einem idealen Stab ist dabei nicht vorhersagbar. Aus dem Grund gibt es im Last-Verschiebungsdiagramm (Abbildung 5 (c)) ein Verzweigungspunkt. Ab dem Überschreiten der kritischen Last, kommt es zu einer großen Durchbiegung w der Stabstruktur. (Mang, et al.)

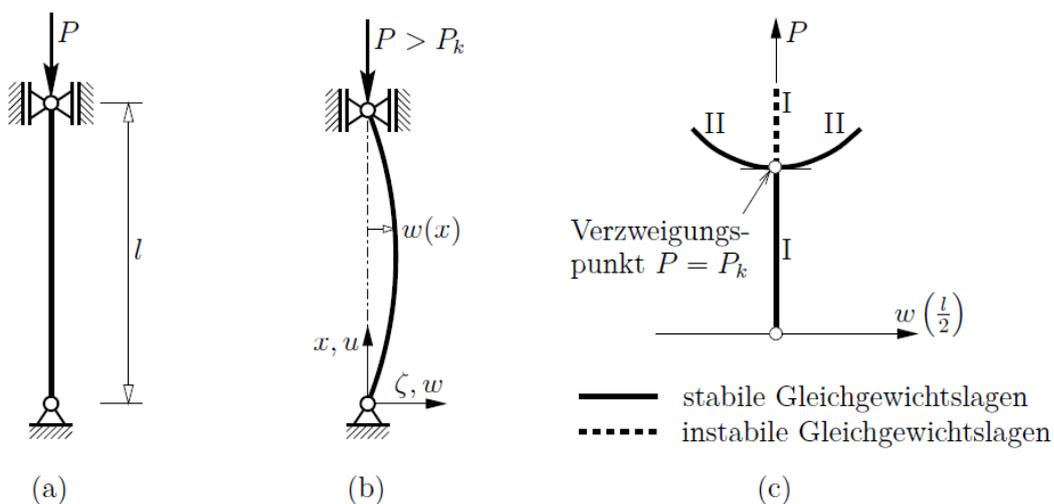


Abbildung 5 beidseitig gelenkig gelagerter Stab mit zentrischer Druckbeanspruchung: (a) gerade Gleichgewichtslage, (b) stabile ausgeknickte Gleichgewichtslage, (c) qualitatives Last-Verschiebungsdiagramm (Mang, et al. S. 321)

2.5.2 Schlankheitsgrad

Der Schlankheitsgrad ist ein Maß für das Knickverhalten/ die Knickempfindlichkeit von Stabwerken und setzt sich aus den geometrischen Abmessungen (Stablänge, Querschnitt und Randbedingungen (RB)) des Stabes zusammen. Die Abmessungen sind im σ_k enthalten. Die (Gl. (2.25)) ist auch bekannt als Euler-Hyperbel und stellt die Knickspannungslinie dar.

$$\lambda^2 = \frac{E\pi^2}{\sigma_k} \quad (2.25)$$

Je kleiner der Schlankheitsgrad, desto höher ist die kritische Last und somit desto knickunempfindlicher ist die Struktur.

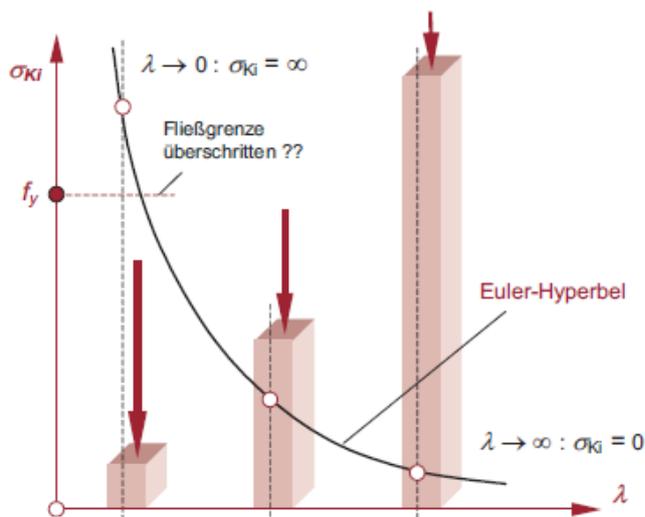


Abbildung 6 Euler-Hyperbel (Göttsche, et al. S. 125)

Die Euler-Hyperbel verläuft bei $\lambda = 0$ für $\sigma_k \rightarrow \infty$, deshalb wird σ_k durch den Materialparameter der Fließgrenze begrenzt. Oberhalb dieser kommt es zum Zerdrücken des Stabes.

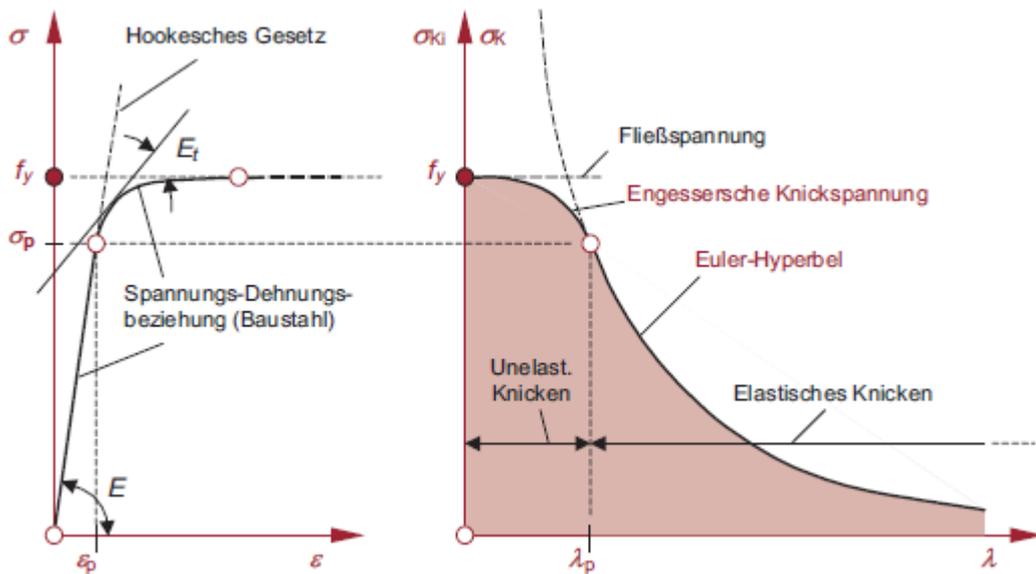


Abbildung 7 Anpassung der Euler-Hyperbel (Göttsche, et al. S. 128)

Unterhalb der Fließgrenze wird die Euler-Hyperbel mit einer parabolischen Funktion bis zur Proportionalitätsgrenze (σ_p) nach Tetmajer und Kármán angenähert. In dem Bereich wird ein elastisch-plastisches Materialverhalten vorausgesetzt, weshalb mit dem Engesserschen E-Modul (E_T) und der Engesserschen Knickspannung (T) gerechnet wird. Der E-Modul hängt von der Knickspannung und der Querschnittsform ab.

$$T = \frac{4EE_T}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_T})^2} \text{ mit } E_T = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \text{ für } \varepsilon > \varepsilon_p \quad (2.26)$$

Stäbe oberhalb von (σ_p) oder λ_p bilden plastische Randzonen. Dieser Bereich wird nicht in der Ausarbeitung betrachtet. Alle Verformungen unterliegen dem Hookschen Gesetz. (Bürgermeister, et al., 1966) (Göttsche, et al.)

2.6 Festigkeitsproblem

2.6.1 Theorie I. Ordnung

Bei der Theorie erster Ordnung wird das System oder ein Teil dessen im unverformten Zustand betrachtet. Durch das Aufstellen der relevanten Gleichungen am unverformten System, kommt es zu einer relativ einfachen und schnellen Lösung. Jedoch ist die Aussagekraft dieser auch gering, denn das Stabilitätsproblem ist nicht berechenbar (Linke, et al., 2015).

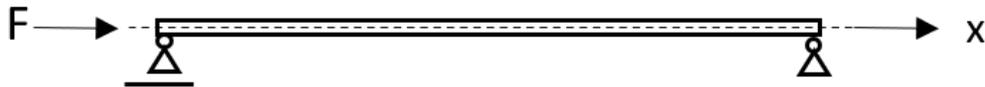


Abbildung 8 Stab unter Längsbelastung nach Theorie 1. Ordnung

Die Spannung ergibt sich aus der Druckkraft F .

$$\sigma_x = \frac{F}{A} \quad (2.27)$$

2.6.2 Theorie II. Ordnung

Die Theorie II. Ordnung unterscheidet sich zur Theorie I. Ordnung, indem die Schnittgrößen am verformten System bestimmt werden. Bei der Theorie II. Ordnung sind die Verformungen des Systems im Vergleich zu den geometrischen Abmessungen sehr klein aber nicht Null. Daher gilt die Annahme bei kleinen Verformungen.

$$\sin(\alpha) \approx \tan(\alpha) \approx \alpha \text{ und } \cos(\alpha) \approx 1 \quad (2.28)$$

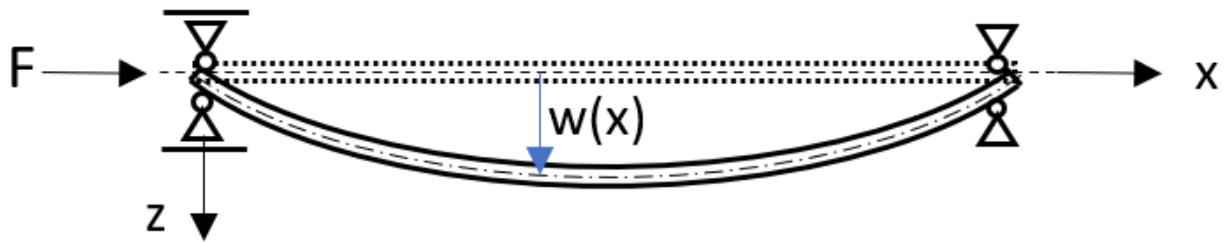


Abbildung 9 Stab unter Längsbelastung nach Theorie 2. Ordnung

Eine Linearisierung der kleinen Verformungen ist zulässig. Auch können die Differentialgleichungen der Balkenbiegung verwendet werden.

$$-M = E \cdot I \cdot w'' \quad (2.29)$$

$$-Q = E \cdot I \cdot w''' \quad (2.30)$$

$$q = E \cdot I \cdot w'''' \quad (2.31)$$

Hierbei wird die Krümmung der Biegelinie des Systems ausreichend mit

$$\frac{1}{\kappa_y} = w''(x) \quad (2.32)$$

beschrieben. Das Stabilitätsproblem ist berechenbar, jedoch ist die Größe der Verformung nicht vorhersagbar. (Bürgermeister, et al., 1966)

2.6.3 Geometrisch nichtlinear

Die geometrisch nichtlineare Theorie wird auch als Theorie III. Ordnung bezeichnet. Im Gegensatz zur Theorie II. Ordnung sind die Verformungen nicht mehr klein, sondern endlich. Aufgrund der endlich großen Verformungen müssen nicht-lineare Zusammenhänge, wie z.B. für die Krümmung

$$\frac{1}{\kappa_y} = \frac{w''}{\sqrt{1 + w'^2}^3}, \quad (2.33)$$

verwendet werden. Obwohl die Verformungen groß sind, unterliegen die Verzerrungen den elastischen Spannungsbereich. Lediglich an der Stelle der größten Krümmung

kommt es am Rand zu einer plastischen Verformung. Diese werden auch als plastische Randzonen bezeichnet und gehören nicht mehr zum elastischen Bereich. (Bürgermeister, et al., 1966)

Im Folgenden wird die Krümmung Gl. (2.33) hergeleitet.

Die Herleitung wird mit der Biegung um die y-Achse veranschaulicht. Es wirkt lediglich das Biegemoment M_{by} , welches eine gerade Biegung (ohne seitliche Auslenkungen oder Einflüsse der y-Koordinate) hervorruft.

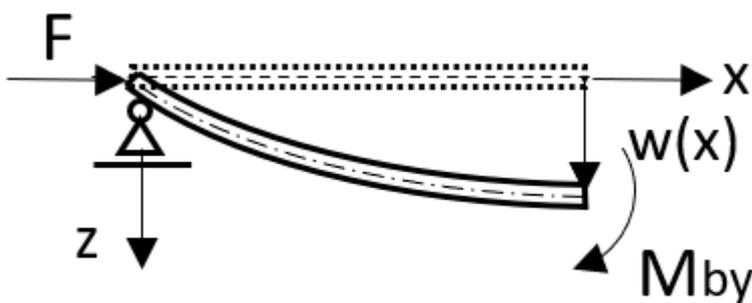


Abbildung 10 Darstellung zur Bestimmung des Biegemomentes

Das Biegemoment ist die Summe der Spannungen aller infinitesimalen Flächenelemente mit deren Abstand zur neutralen Faser. Die Spannung kann durch die Dehnung multipliziert mit dem E-Modul (Hookeschen Gesetz) ersetzt werden.

$$M_{by} = \int_A z \sigma_x dA \text{ mit } \sigma_x = E \varepsilon_x \rightarrow M_{by} = E \int_A z \varepsilon_x dA \quad (2.34)$$

Die Dehnung und Stauchung des Querschnittes in x-Richtung ist abhängig vom Abstand zur neutralen Faser. Diese Beziehung wird durch die Krümmung κ , bzw. durch den Krümmungsradius ρ ausgedrückt.

$$M_{by} = E \int_A z \varepsilon_x dA \text{ mit } \varepsilon_x = -\frac{z}{\rho} \rightarrow M_{by} = -\frac{E}{\rho} \int_A z^2 dA \quad (2.35)$$

Der Integralausdruck kann mit Gl.(2.4) zum Flächenträgheitsmoment umgeschrieben werden. Dadurch erhalten wir die Biegesteifigkeit (EI_y) des Balkens. Um die Biegelinie zu erhalten, kann der Krümmungsradius zur Krümmung umgeschrieben werden.

$$M_{by} = -\frac{EI_y}{\rho} \text{ mit } \kappa_y = \frac{1}{\rho} \rightarrow \kappa_y = -\frac{M_{by}}{EI_y} \quad (2.36)$$

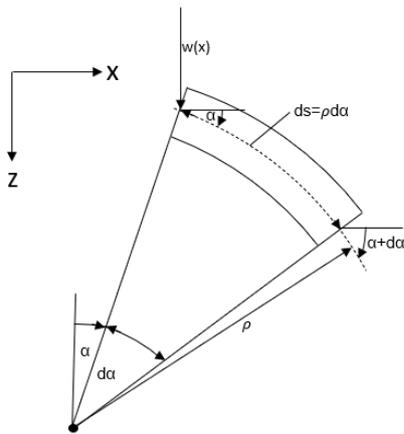


Abbildung 11 Finite Element zur Darstellung der Krümmung

Im Anschluss muss die Krümmung noch mit der Biegelinie in Bezug gesetzt werden. Dazu wird die Krümmung mit der Bogenlänge $ds = \rho d\alpha$ eines infinitesimal kleinen Elementes ausgedrückt.

$$ds = \rho d\alpha \text{ mit } \kappa_y = \frac{1}{\rho} \rightarrow \kappa_y = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dx} \frac{dx}{ds} \quad (2.37)$$

Nach der Brucherweiterung mit dx wird der erste Bruch erneut mit dw' erweitert.

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{d\alpha}{dw'} \frac{dw'}{dx} = \frac{d\alpha}{dw'} w'' \rightarrow \kappa_y = \frac{d\alpha}{dw'} w'' \frac{dx}{ds} \quad (2.38)$$

Mit der Winkelbeziehung und dem Ableiten dieser nach w' folgt:

$$\tan \alpha = \frac{dw}{dx} = w' \rightarrow \alpha = \arctan w' \rightarrow \frac{d\alpha}{dw'} = \frac{1}{1 + w'^2} \quad (2.39)$$

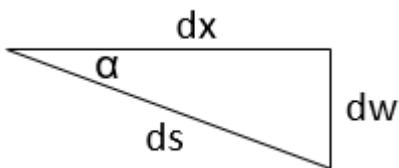


Abbildung 12 Darstellung der Winkelbeziehung

Diese wird in die Gl. der Krümmung eingesetzt und der Term $\frac{dx}{ds}$ mit dem Satz des Pythagoras ersetzt.

$$\frac{dx}{ds} \text{ mit } ds^2 = dx^2 + dw^2 \Leftrightarrow \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + w'^2}} \quad (2.40)$$

Durch das Einsetzen folgt der zweite Ausdruck für die Krümmung. Die Vorgehensweise lässt sich äquivalent für die Krümmung um die z-Achse herleiten.

$$\kappa_y = \frac{w''}{1 + w'^2} \frac{1}{\sqrt{1 + w'^2}} = \frac{w''}{\sqrt{1 + w'^2}^3} \quad (2.41)$$

Beide Gleichungen der Krümmung werden gleichgesetzt. Die Vorgehensweise lässt sich äquivalent für die Krümmung um die z-Achse herleiten. (Bürgermeister, et al., 1966)

$$\kappa_y = -\frac{M_{by}}{EI_y} = \frac{w''}{\sqrt{1 + w'^2}^3} \text{ und } \kappa_z = -\frac{M_{bz}}{EI_z} = \frac{v''}{\sqrt{1 + v'^2}^3} \quad (2.42)$$

Die Spannung für die Theorie II. und III. Ordnung berechnet sich aus dem Druck- und Biegeanteil. Durch die beidseitige Gabellagerung kann der Einfluss der Wölbspannung vernachlässigt werden. (Lohse, et al.)

$$\sigma_x = \frac{F}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z < \sigma_{Rp0,2} \quad (2.43)$$

Die Schubspannungen aus der Torsion bestimmen sich mit: (Lohse, et al.) (Fischer, et al., 2008)

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t} = \frac{GI_t \vartheta'}{I_t/t_{max}} = Gt_{max} \vartheta' < \tau_{t,zul} = 0,7 \cdot \sigma_{Rp0,2} \quad (2.44)$$

Mit der Gleichung der Verdrehung (ϑ_2 : ist die Verdrehung nach Theorie II. Ordnung):

$$\vartheta(x) = \vartheta_2 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \rightarrow \vartheta'(x) = \vartheta_2 \frac{\pi}{l} \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \quad (2.45)$$

2.6.4 Vergleich

Bei den Spannungsproblemen der Theorie I.-, II.- und III. Ordnung ist die Gleichgewichtslage immer eindeutig. Mit zunehmender Last steigt die Verformung des Systems bis zum Erreichen der Festigkeitsgrenze monoton an. Deswegen wird es auch als **Festigkeitsproblem** bezeichnet. (Bürgermeister, et al., 1966)

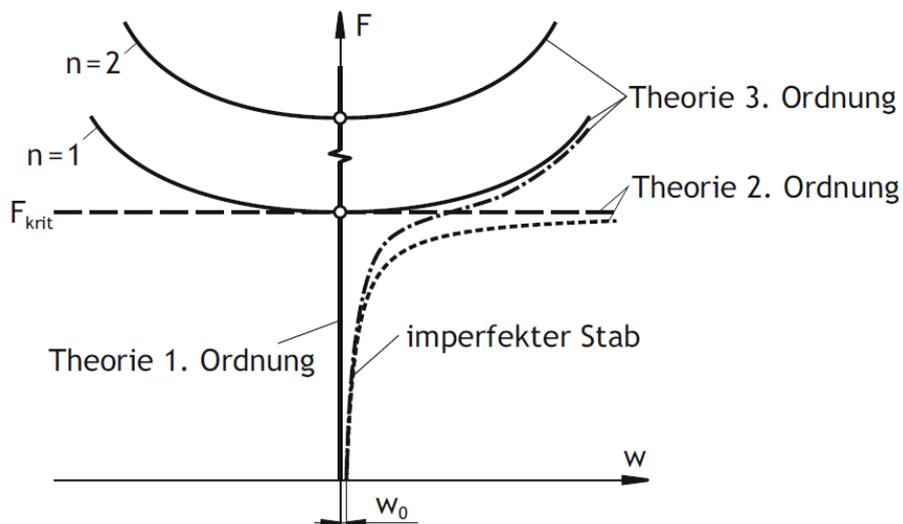


Abbildung 13 Darstellung der verschiedenen Theorien anhand eines Druckkraft-Auslenkungs-Diagramm einer stabförmigen Struktur unter Druckbelastung (Linke, et al., 2015 S. 276)

In der Abbildung 13 ist die Kraft über der Verformung abgebildet. Im Kapitel 2.6 wurden bisher nur die Grundlagen der unterschiedlichen Theorien betrachtet. Im Kapitel 3 wird auf die Gleichungen der kritischen Werte und im Kapitel 3.2 auf die der verschiedenen Verformungen aus Abbildung 13 eingegangen. In der folgenden Tabelle 1 werden die Unterschiede und Möglichkeiten der Theorien zusammengefasst.

Tabelle 1 Vergleich der verschiedenen Berechnungstheorien I. bis III. Ordnung

Theorien	Eigenschaften
I. Ordnung	<ul style="list-style-type: none"> • Gleichgewicht am unverformten System • Verformungen sind klein • Stabilitätsproblem ist nicht berechenbar!
II. Ordnung	<ul style="list-style-type: none"> • Gleichgewicht am verformten System • Verformungen klein (Linearisierung zulässig) • kritische Lasten sind berechenbar • Verformung sind nicht berechenbar!
III. Ordnung (Geometrisch nichtlinear)	<ul style="list-style-type: none"> • Gleichgewicht am verformten System • Verformungen sind endlich (kleine Linearisierung zulässig) • kritische Lasten und Verformung berechenbar

2.6.5 Imperfektions-, Ersatz- und Abminderungsverfahren

Es wird zwischen den materiellen und geometrischen Imperfektionen unterschieden. In dieser Ausarbeitung werden lediglich die geometrischen Imperfektionen erläutert. Zu diesen gehören die Vorkrümmung, Schiefstellung und Lastexzentrizität.

Die Vorverformung kann mit $e_0 = 1/1000$ angenommen werden. Für reine Biegung kann $e_0 = v_0$ gesetzt werden. Bei reinem Drillknicken wird die Vorverdrehung mit $\vartheta_0 = 0,1$ angenommen. Für das Biegedrillknicken wird mit e_0 die Vorverformungen rechnerisch bestimmt.

$$\vartheta_0 = e_0 \frac{\pi^2 EI_z}{F_k l^2 + z_m \pi^2 EI_z} \text{ und } v_0 = \frac{\vartheta_0 F_k l^2}{\pi^2 EI_z} \quad (2.46)$$

Eine weitere Möglichkeit, die nur erwähnt wird, ist die Unterteilung der Verformungen mithilfe der Eigenwerte. Dabei wird der Eigenwert $v_0 = 1$ gesetzt und der Anteil der

Verdrehung ϑ_0 dazu bestimmt. Damit wird das Verhältnis der Verformungsanteile bestimmt. Je nach Literatur und Profil, liegt das Verhältnis ϑ_0/v_0 zwischen 0,2 bis 0,3. Dabei gilt, dass die Summe aus Biegung und Verdrehung kleiner als e_0 sein muss. (Ebel, 2014) (Kala, et al., 2017) (Kala, 2013)

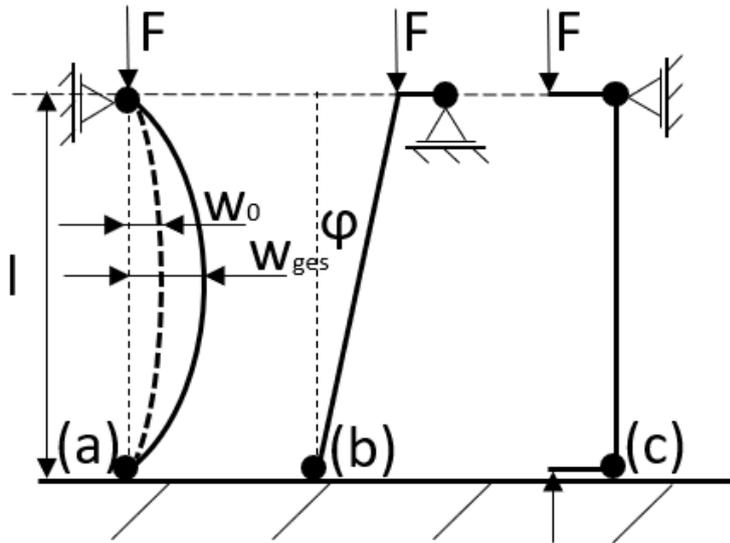


Abbildung 14 (a) Vorkrümmung, (b) Schiefstellung und (c) Lastexzentrizität

Unter den Begriff der Ersatzverfahren gehören Vereinfachungen wie zum Beispiel den Gebrauch eines Ersatzsystems. Für das Ersatzsystem wird das Gleichgewicht aufgestellt und die Federsteifigkeit ist gleich der Biege- oder Torsionssteifigkeit.

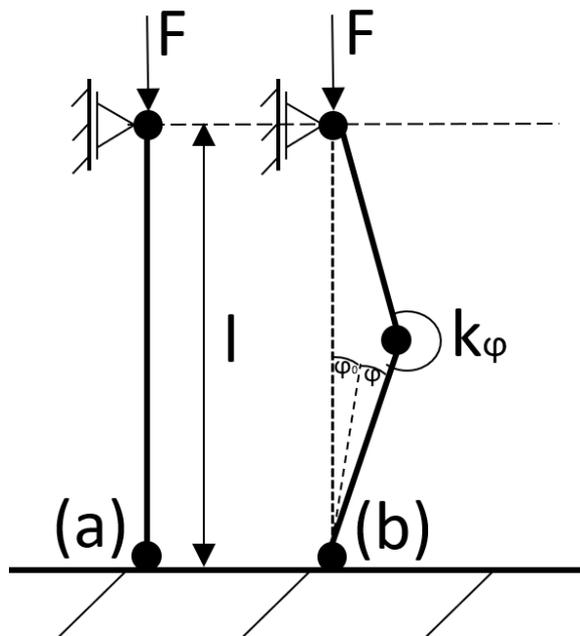


Abbildung 15 Ersatzsystem, Biegesteifigkeit wird mittels Drehfeder einbezogen

Auch gibt es ein Ersatzverfahren, mit dem mittels Koeffizienten das System berechnet wird. Dabei wird eine Tabelle (Abbildung 16) verwendet, um die Klasse des Profils und somit die Koeffizienten zu ermitteln. (Bauingenieurwesen) (Göttsche, et al.)

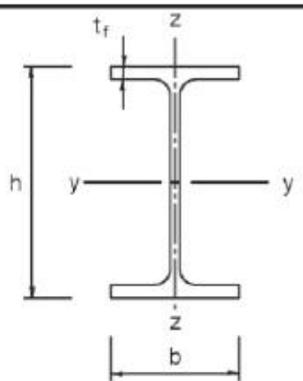
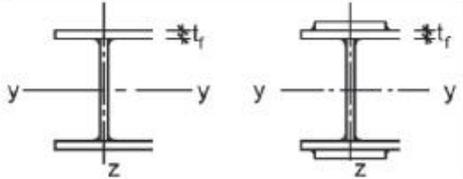
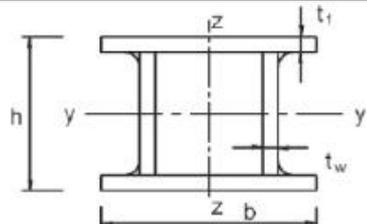
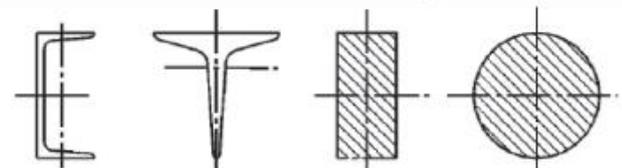
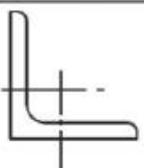
Querschnitt	Begrenzungen	Ausweichen rechtwinklig zur Achse	Knicklinie	
			S 235 S 275 S 355 S 420	S 460
gewalzte I-Querschnitte 	$h/b > 1,2$	$t_f \leq 40 \text{ mm}$	y-y z-z	a a ₀
		$40 \text{ mm} < t_f \leq 100$	y-y z-z	b a
	$h/b \leq 1,2$	$t_f \leq 100 \text{ mm}$	y-y z-z	b a
		$t_f > 100 \text{ mm}$	y-y z-z	d c
Geschweißte I-Querschnitte 	$t_f \leq 40 \text{ mm}$	y-y z-z	b c	b c
	$t_f > 40 \text{ mm}$	y-y z-z	c d	c d
Hohlquerschnitte 	warmgefertigte	jede	a	a ₀
	kaltgefertigte	jede	c	c
Geschweißte Kastenquerschnitte 	allgemein (außer den Fällen der nächsten Zeile)	jede	b	b
	dicke Schweißnähte: $a > 0,5t_f$ $bt_f < 30$ $hlt_w < 30$	jede	c	c
U-, T- und Vollquerschnitte 		jede	c	c
L-Querschnitte 		jede	b	b

Abbildung 16 Zuordnung von Querschnitten zur Knicklinie mit Abminderungsverfahren (Lohse, et al. S. 340) (Auszug aus der DIN EN 1993): Eurocode 3

Mit den Koeffizienten kann mit einem Imperfektionsbeiwert α eine Herabsenkung der Euler-Hyperbel bestimmt werden. Diese Veränderung der Euler-Hyperbel sorgt für ein Anpassen der theoretisch berechneten Werte an die realen getesteten Werte (Lohse, et al.).

Knicklinie	a_0	a	b	c	d
Imperfektionsbeiwert α	0,13	0,21	0,34	0,49	0,76

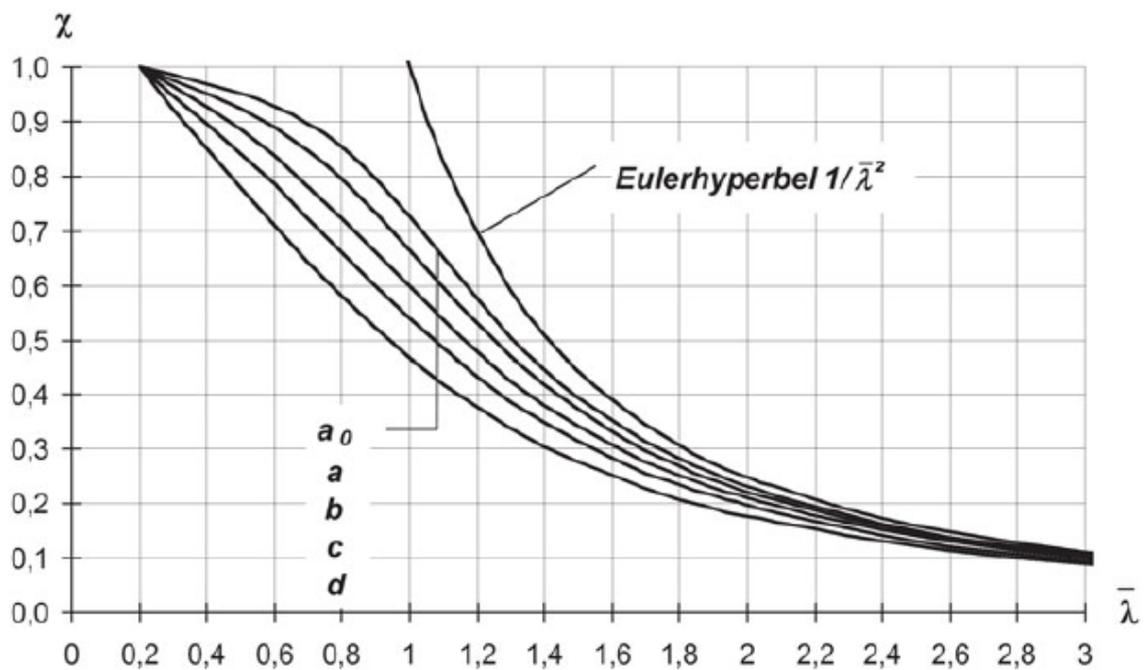


Abbildung 17 Tabelle der Imperfektionsbeiwerte und der Verschiebung der Eulerhyperbel (Lohse, et al. S. 339)

Die Formeln zur Berechnung des Abminderungsverfahrens sind im **Anhang B** dargestellt.

3 Theorie der Berechnung

In diesem Kapitel werden die theoretischen Hintergründe der Berechnung betrachtet und die jeweiligen Gleichungen hergeleitet.

3.1 Bestimmung der kritischen Lasten

3.1.1 Eulersches Knicken (Biegeknicken)

Betrachten wir den einfachen Euler-Stab (2. Eulersche Fall). Dieser ist mit einem Los- und einem Festlager gelagert. Der Stab hat die Länge l und wird mit einer Kraft F in Stablängsachse belastet. Durch die Last kommt es zu einer Auslenkung w und somit zu einem Biegemoment M .

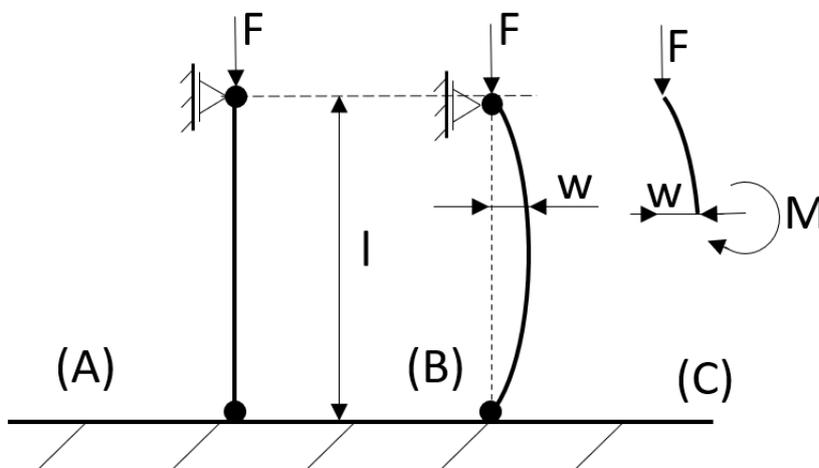


Abbildung 18 Einfache Euler-Stab (A) unverformt, (B) verformt und (C) freigeschnitten

$$M = F \cdot w \tag{3.1}$$

Zusammen mit der Differentialgleichung der Biegelinie

$$M = -E \cdot I_y \cdot w'' \tag{3.2}$$

und dem Eliminieren vom Moment erhalten wir folgende Differentialgleichung:

$$E \cdot I_y \cdot w''(x) + F \cdot w(x) = 0 \quad (3.3)$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für die Durchbiegung entlang der Koordinate x lautet:

$$w = A \cdot \sin(\alpha \cdot x) + B \cdot \cos(\alpha \cdot x) \quad \text{mit} \quad \alpha^2 = \frac{F}{E \cdot I} \quad (3.4)$$

Mit den Randbedingungen (RB)

$$w(x = 0) = 0 \quad \text{und} \quad w(x = l) = 0$$

wird A und $\sin(\alpha \cdot l)$ gleich null. Der Sinus wird bei

$$n \cdot \pi \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

zu null. Mit der Definition von α aus Gleichung (3.4) folgt

$$F = n^2 \cdot F_E \quad \text{mit} \quad F_E = \frac{E \cdot I \cdot \pi^2}{l^2}. \quad (3.5)$$

Zusammengefasst bedeutet es, dass das Gleichgewicht unterhalb der kleinsten Last von

$$F_{krit} = \frac{E \cdot I \cdot \pi^2}{l^2} \quad (3.6)$$

stabil ist. Diese Gleichung wird auch als die *Eulersche Knickformel* bezeichnet. (Flügge, 1967)

Dabei ist die Auslenkung $w(x)$ beim Erreichen der kritischen Last eine Sinus-Halbwellenlänge.

$$w(x) = A \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) \quad (3.7)$$

Im Gegensatz zum starren Körper lässt der Stab nicht nur eine Drehung um das Lager zu, sondern kann dieser sich in verschiedenen Weisen verbiegen. Dazu wird die Biegelinie im Indifferenzfall, die sogenannte Knickfigur, betrachtet. Diese führt zu einer Differentialgleichung, welche eine Funktion der Absenkung $w(x)$ zur Lösung hat. Diese

Lösung ist jedoch nur bedingt hilfreich, da der kleinste Eigenwert F der Gleichung $\sin(\alpha \cdot l) = 0$ ausschlaggebend ist. (Flügge, 1967)

3.1.2 Biegedrillknicken

Das Biegedrillknicken ist eine Kopplung der Verdrehung und Biegung. Die Biegung und Verdrehung treten in gekoppelter Form auf, wenn der SMP und der FSP nicht zusammen liegen.

Dabei unterscheidet ein Teil der Literatur das Biegedrillknicken nach den verschiedenen Profilen. Es wird teilweise nach einfach- und doppelt symmetrische Profil, sowie punktsymmetrische und unsymmetrische Profile unterteilt. Bei

- doppelt symmetrischen Profilen kann reines Biegeknicken oder reines Drillknicken auftreten.

$$e_y = e_z = 0$$

- punktsymmetrischen Profilen kann reines Drillknicken oder Biegedrillknicken auftreten.

$$e_y = e_z = 0$$

- einfach symmetrischen Profilen kann reines Biegeknicken oder Biegedrillknicken auftreten.

$$e_y = 0, e_z \neq 0$$

- unsymmetrischen Profilen tritt Biegedrillknicken auf.

$$e_y \neq 0, e_z \neq 0$$

Im Folgenden werden die verschiedenen Eigenschaften anhand des einfach symmetrischen I-Profils (siehe Abbildung 19) erläutert. Wie in der Abbildung 19 zu sehen ist, ist die z-Achse die einzige Symmetrieachse und der SMP hat eine Differenz e_z zum FSP. Die Druckkraft greift am FSP an.

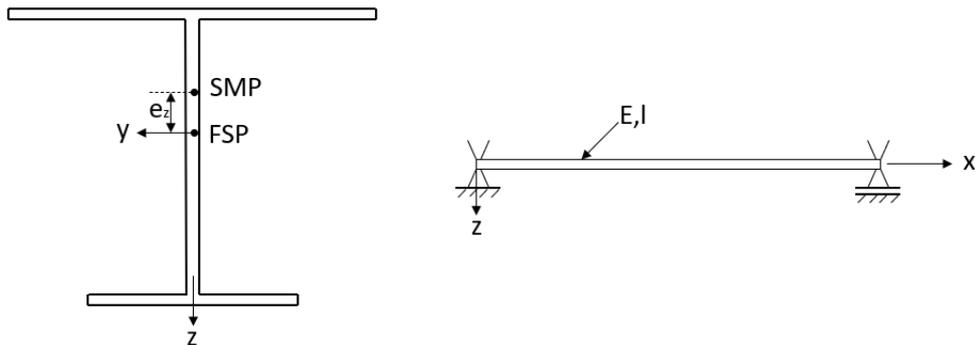


Abbildung 19 Einfach symmetrisches I-Profil

Das Profil wird im FSP mit der Kraft F belastet. Wird die Kraft F langsam gesteigert, so wird der Stab immer weiter gestaucht. Durch den Abstand e_z entsteht auch ein Torsionsmoment $T(x)$ am SMP, welches von der x -Koordinate abhängig ist. Erreicht die Kraft eine kritische Grenze, dann kommt es zum Stabilitätsverlust und das Profil knickt. Um die kritische Grenze zu bestimmen, müssen alle möglichen Auslenkungen betrachtet werden. Dazu zählen

- die Biegung um die z -Achse $v(x)$,
- die Biegung um die y -Achse $w(x)$ und
- die Verdrehung um die x -Achse $\vartheta(x)$.

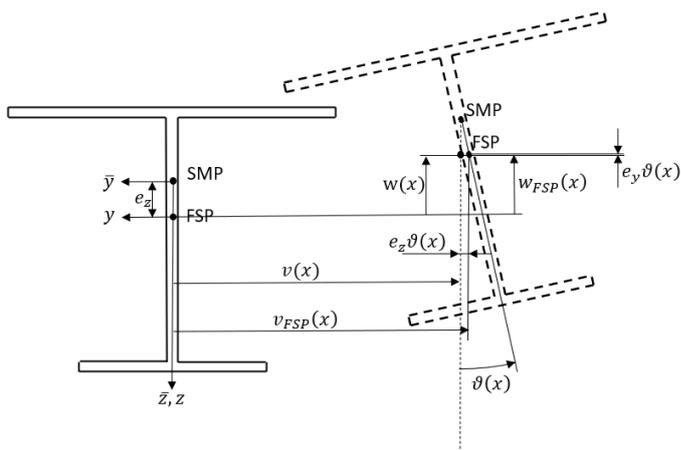


Abbildung 20 Betrachtung des Schubmittelpunktes (SMP) und Flächenschwerpunktes (FSP) eines I-Profiles beim Biegedrillknicken

Dazu werden die Gleichungen für das Biegeknicken um die y-Achse

$$0 = E \cdot I_z \cdot v''(x) + F(v(x) + e_z \cdot \vartheta(x)) \quad (3.8)$$

und z-Achse

$$0 = E \cdot I_y \cdot w''(x) + F(w(x) + e_y \cdot \vartheta(x)) \quad (3.9)$$

betrachtet. Neben den Gleichungen für das Biegeknicken spielt die Gleichung des Drillknickens eine wesentliche Rolle. Dazu betrachten wir die Ableitung der Differentialgleichung der Wölbkrafttorsion Gl. (2.17)

$$T'(x) = GI_T \vartheta'' - EC_T \vartheta'''' \quad (3.10)$$

und ein infinitesimales Element der Stabstruktur mit der Länge dx . Die Änderung des Torsionsmomentes wird mit Erreichen einer kritischen Last erzeugt. Diese Änderung wird durch die äußere Last F ausgelöst. Sie sorgt für eine Auslenkung und somit für eine Krümmung v'' und w'' . Aufgrund der Krümmung werden die Abtriebskräfte dF_y und dF_z erzeugt, welche das verformte System in der Gleichgewichtslage halten.

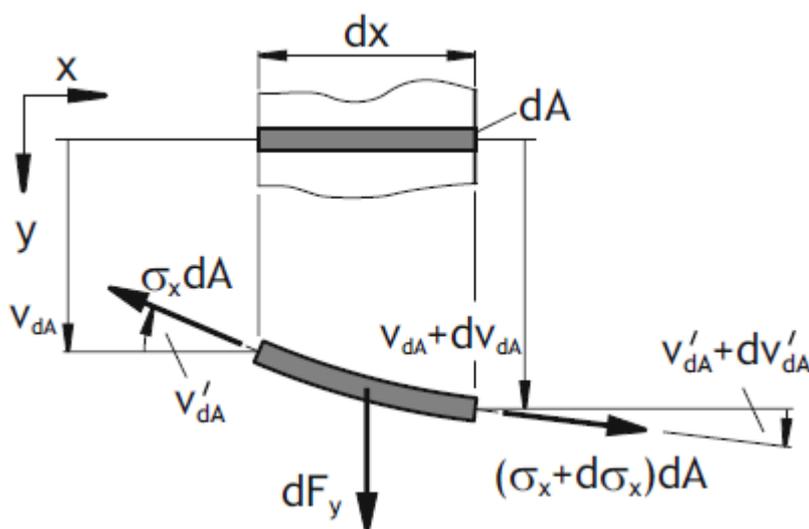


Abbildung 21 Infinitesimales Element zur Darstellung der Abtriebskräfte im Zusammenhang mit den Spannungen (Linke, et al., 2015 S. 292)

Daraus folgt mit dem Vereinfachen die Gl. (3.11).

$$T'(x) = -F(e_z v'' - e_y w'') + I_0 \frac{F}{A} \vartheta'' \quad (3.11)$$

Die Gleichung (3.12) ist eine partielle Differentialgleichung vierter Ordnung. Sie wird durch das Gleichsetzen der Gl. (3.10) und Gl. (3.11) erzeugt und beschreibt das allgemeine Biegedrillknicken.

$$0 = E \cdot C_T \cdot \vartheta^{IV} + \left(I_0 \cdot \frac{F}{A} - G \cdot I_T \right) \vartheta^{II} - F(e_z \cdot v^{II} - e_y \cdot w^{II}) \quad (3.12)$$

Mit sinusförmigen Verformungsfunktionen und den RB (Randbedingungen) für eine Gabellagerung erhalten wir eine kubische Gleichung des Biegedrillknickens infolge einer Druckbelastung F. (Linke, et al., 2015)

$$0 = \left(-\frac{\pi^2 E C_T}{l^2} - G I_T + \frac{F I_0}{A} \right) \left(F - \frac{\pi^2 E I_z}{l^2} \right) \left(F - \frac{\pi^2 E I_y}{l^2} \right) - F^2 e_z^2 \left(F - \frac{\pi^2 E I_y}{l^2} \right) - F^2 e_y^2 \left(F - \frac{\pi^2 E I_z}{l^2} \right) \quad (3.13)$$

Für eine ausführliche Herleitung der Gleichung siehe (Linke, et al., 2015 S. 290ff).

Mit der Gl.(3.13) lassen sich die einzelnen und gekoppelten kritischen Lasten bestimmen.

3.1.3 Drillknicken

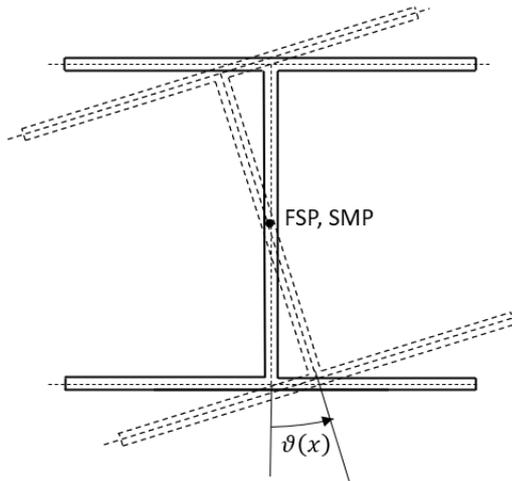


Abbildung 22 Drillknicken eines doppelt symmetrischen I-Profiles

Das Drillknicken ist mit einer Torsionsbelastung vergleichbar. Durch die Druckbelastung des Stabes kommt es nach dem Erreichen der kritischen Kraft zu einer Verdrillung des Querschnittes. Die Knickform des Drillknickens entsteht nur dann, wenn die kritische Last des Drillknickens kleiner ist als die niedrigste kritische Last des Biegeknickens. Es tritt nur auf,

- wenn die Stabkennzahl für Torsion (ε_T) kleiner als $\pi/2$ ist oder
- wenn die Biegeknicklänge des Stabes um die schwache Achse durch eine Stütze verkürzt wird.

Die Gleichung zur Bestimmung der kritischen Last lässt sich aus Gl.(3.12) mit $e_y = e_z = 0$ ermitteln.

$$F_{k,\vartheta} = \frac{A}{I_0} \left(\frac{\pi^2 EC_T}{l^2} + GI_T \right) \rightarrow \sigma_{k,\vartheta} = \frac{1}{I_0} \left(\frac{\pi^2 EC_T}{l^2} + GI_T \right) \quad (3.14)$$

Drillknicken ist eine Sonderform des Biegedrillknickens. Es tritt nur auf, wenn der Schubmittelpunkt (SMP) und Flächenschwerpunkt (FSP) zusammen liegen. Dieses ist z.B. bei einem doppelt symmetrischen I-Profil und Kreuz (+) – Profilen der Fall. Des Weiteren kann es auch bei punktsymmetrischen Profilen, wie einem Z-Profil, auftreten.

Im nächsten Schritt wird die Differenzialgleichung (DGL) des Drillknickens hergeleitet. Es wird mithilfe der Energiemethode veranschaulicht. Die inneren und äußeren Energien müssen am Schnittpunkt im Gleichgewicht sein.

$$0 = M_{x,St.V.}^{(i)} + M_{x,W}^{(i)} - M_x^{(a)} = EC\vartheta''' - GI_T\vartheta' + \sigma I_p\vartheta' \quad (3.15)$$

Durch das Vereinfachen und Umstellen folgt

$$0 = \vartheta''' + \frac{\sigma I_p - GI_T}{EC_T} \vartheta' \text{ mit } I_p = \int_A r^2 dA. \quad (3.16)$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung lautet

$$\vartheta = C_1 \sin(\alpha x) + C_2 \cos(\alpha x) + C_3 \text{ mit } \alpha = \sqrt{\frac{\sigma I_p - GI_T}{EC_T}} \quad (3.17)$$

Mit der nicht trivialen Lösung $\sin(\alpha l) = 0$, $C_2 = C_3 = 0$, folgt für die kleinste kritische Spannung.

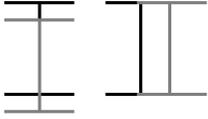
$$\sin(n\pi) = 0 \text{ mit } n = 1 \rightarrow \pi = \alpha l = \sqrt{\frac{\sigma I_p - GI_T}{EC_T}} l \quad (3.18)$$

Mit dem Umformen und der Erweiterung folgt die kritische Last, welche der Gl.(3.14) entspricht. (Bürgermeister, et al., 1966)

$$\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 = \frac{\sigma I_p - GI_T}{EC_T} \rightarrow \sigma_k = \frac{1}{I_p} \left(\frac{\pi^2 EC_T}{l^2} + GI_T \right) \rightarrow F_{k,\vartheta} = A \cdot \sigma_k \quad (3.19)$$

3.1.4 Vergleichsübersicht

Tabelle 2 Vergleich der verschiedenen Verformungen mit den Profileigenschaften (Grote, et al., 2018)

	Schnittansicht	Abstände SMP und FSP /Profile	kritische Knicklast
Biegeknicken		$e_y \vee^3 e_z = 0 \vee$ $e_y \wedge^4 e_z = 0$ I, U, C, T, +	$F_k = \frac{E \cdot I_{min} \cdot \pi^2}{l^2}$
Drillknicken		$e_y \wedge e_z = 0$ I, Z, +	$F_{k,\vartheta} = \frac{A}{I_0} \left(\frac{\pi^2 EC_T}{l^2} + GI_T \right)$
Biegedrillknicken		$e_y \vee e_z \neq 0 \vee$ $e_y \wedge e_z \neq 0$ I, Z, U, C, T, L	$F_{k1} = \frac{E \cdot I_{min} \cdot \pi^2}{l^2}$ <p>Mit der p-q-Formel folgen die beiden kritischen Lasten F_{k2} & F_{k3} der Biege-Drill-Kopplung</p> $\left[\left(\frac{FI_0}{A} - GI_T \right) \left(F - \frac{\pi^2 EI_z}{l^2} \right) - F^2 e_z^2 \right]$ <p>Mit e_y gilt die Gl. (3.13).</p>

³ \vee logische ODER Symbol

⁴ \wedge logische UND Symbol

3.2 Bestimmung der Verformungen

3.2.1 Biegeknicken

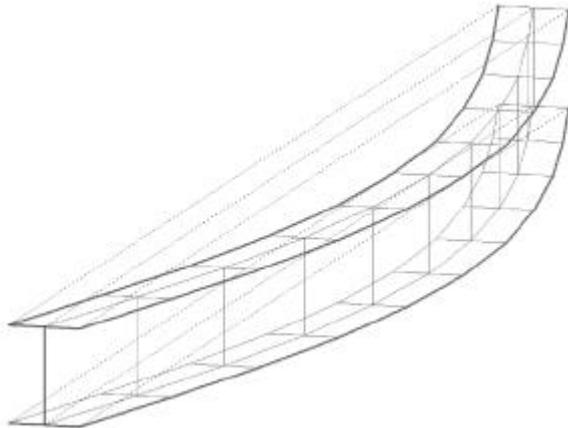


Abbildung 23 Stabilitätsproblem Biegeknicken eines I-Profiles (Lohse, et al. S. 320)

3.2.1.1 Biegelinie nach Theorie II. Ordnung mit Ersatzimperfektionen

Um mithilfe der Theorie II. Ordnung die Biegelinie zu bestimmen, wird ein geometrisches Imperfektionsverfahren verwendet. Bei einem beidseitig gelenkig gelagerten Stab wird eine Vorkrümmung von

$$w_0 = l/1000 \quad (3.20)$$

verwendet.

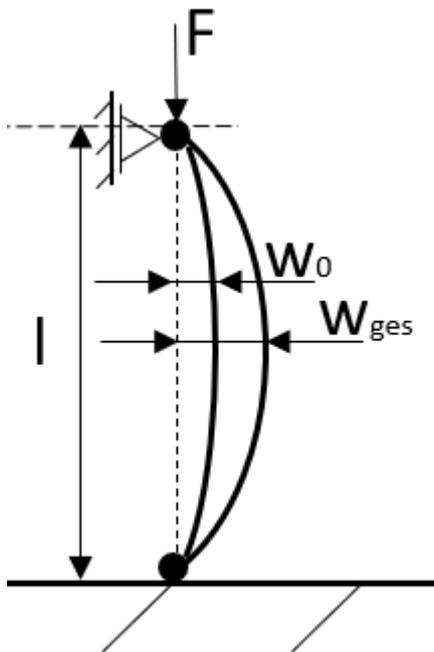


Abbildung 24 Imperfektionsverfahren vorverformter Stab

$$u = \frac{1}{2} \int_0^l w'^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left(w \frac{\pi}{l} \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \right)^2 dx = \frac{\pi^2}{4l} w^2 \quad (3.21)$$

Die geometrische Dehnung ist definiert als.

$$\varepsilon_{geo} = \frac{u - u_0}{l} = \frac{\pi^2 w_{ges}^2 - w_0^2}{4l l^2} \quad (3.22)$$

Mit der Dehnsteifigkeit des Stabes und der Druckkraft folgt die Gesamtstauchung.

$$\varepsilon = \frac{F}{EA} + \frac{\pi^2 w_{ges}^2 - w_0^2}{4l l^2} \quad (3.23)$$

Mit dem Einsetzen der Verformungen

$$w_{ges} = (\bar{w}_{el} + w_0) \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \quad (3.24)$$

und

$$w''_{el} = -\bar{w}_{el} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \quad (3.25)$$

in die DGL der Biegung folgt

$$0 = EIw''_{el} + Fw_{ges} \rightarrow \left(EI \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 - F\right) \bar{w}_{el} = Fw_0. \quad (3.26)$$

Die zusätzliche Auslenkung in der Stabmitte ergibt sich zu:

$$\bar{w}_{el} = \frac{Fw_0}{EI \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 - F} = w_0 \frac{F/F_k}{1 - F/F_k} \quad (3.27)$$

Damit ergibt sich die Gesamtverformung

$$\bar{w}_{ges} = w_0 + w_0 \frac{F/F_k}{1 - F/F_k} = w_0 \frac{1}{1 - F/F_k} \quad (3.28)$$

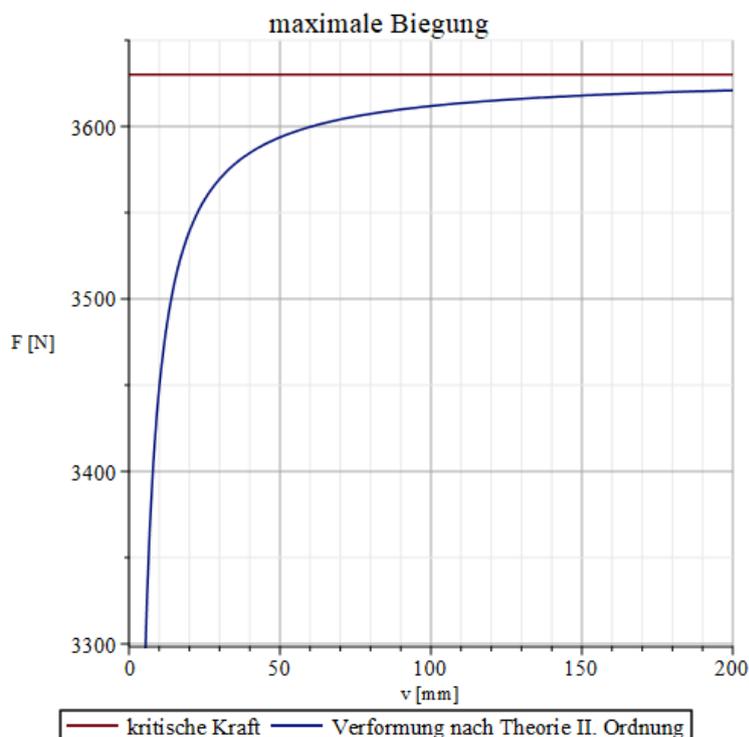


Abbildung 25 Darstellung der maximalen Biegung mit Vorkrümmung nach Theorie II. Ordnung

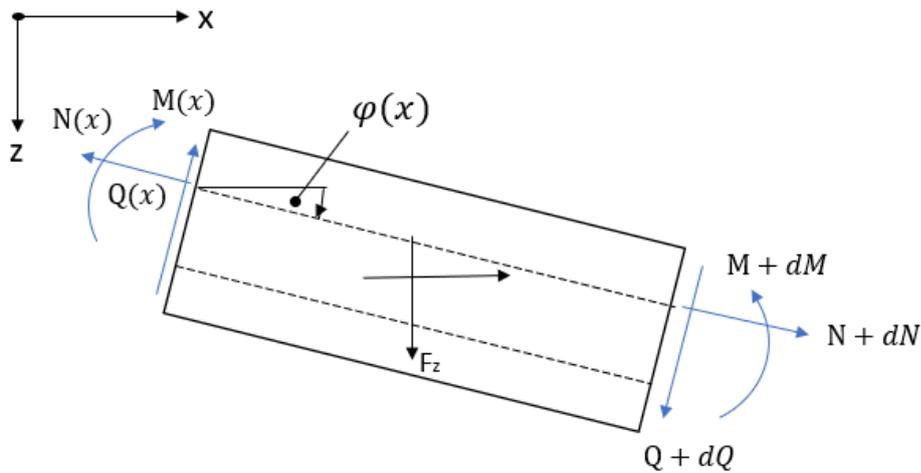


Abbildung 27 Schnittreaktionen am verformten differenzialen Element

Aufstellen der drei Gleichgewichtsbedingungen am verformten differenzialen Element.

$$0 = N' \cdot \cos(\varphi) - N \cdot \sin(\varphi)\varphi' - Q \cdot \sin(\varphi) - Q \cdot \cos(\varphi)\varphi' + F_x \quad (3.30)$$

$$0 = N' \cdot \sin(\varphi) + N \cdot \cos(\varphi)\varphi' + Q \cdot \cos(\varphi) - Q \cdot \sin(\varphi)\varphi' + F_z \quad (3.31)$$

$$0 = M' - Q(1 + \varepsilon) \quad (3.32)$$

Die Schnittkräfte werden mit der eingeschränkten Annahme des Hookeschen Elastizitätsgesetzes ermittelt.

$$N = EF\varepsilon \quad (3.33)$$

$$M = EI \frac{d\varphi}{dz} \quad (3.34)$$

Im nächsten Schritt wird die DGL der Biegelinie für einen beidseitig gelenkig gelagerten Stab hergeleitet.

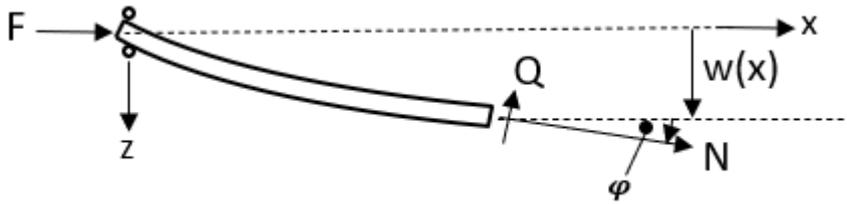


Abbildung 28 positives Schnittufer eines verformten Stabes

$$N = -F \cos(\varphi) \text{ und } Q = F \sin(\varphi) \quad (3.35)$$

Mit den Gleichungen (2.34) bis (2.36) folgt.

$$0 = EF\varepsilon + F \cos(\varphi) \quad (3.36)$$

$$0 = (EI\varphi')' + F(1 + \varepsilon)\sin(\varphi) \quad (3.37)$$

Die Dehnung (ε) wird mit den Gl. (2.37) und (2.39) ersetzt.

$$0 = (EI\varphi')' + F \left(1 - \frac{F}{EF} \cos(\varphi) \right) \sin(\varphi) \quad (3.38)$$

Die Differentialgleichung führt durch Integration auf elliptische Integralausdrücke. Mit der Vereinfachung des konstanten Trägheitsmomentes, Vernachlässigung der axialen Dehnung, sowie der Substitution

$$dw = ds \cdot \sin(\varphi) \quad (3.39)$$

und der Krümmung

$$\kappa_y = \frac{w''}{\sqrt{1 - w'^2}} \text{ mit } w' = \frac{dw}{ds} \quad (3.40)$$

führt es zur DGL der Biegelinie.

$$\frac{w''}{\sqrt{1 - w'^2}} + \frac{F}{EI} w = 0 \quad (3.41)$$

Zur besseren Übersicht wird der Ausdruck $\frac{F}{EI}$ mit α^2 ersetzt. (Bürgermeister, et al., 1966)

Um die Gleichung zu vereinfachen, wird der Wurzelausdruck ($\sqrt{1 - w^{*2}}$) mit einer Reihenentwicklung ersetzt.

Wenn die Ausbiegungen gering sind, kann die Reihenentwicklung nach dem 2. Glied abgebrochen werden.

Für die Berechnung nach Theorie III. Ordnung mit großen Verformungen, wird die Reihenentwicklung nach dem 5. Glied abgebrochen.

Die Reihentwicklung führt zu folgendem Ausdruck.

$$\sqrt{1 - w^{*2}} = 1 - \frac{1}{2} w^{*2} - \frac{1}{8} w^{*4} \quad (3.42)$$

Das dritte und fünfte Glied ist gleich null.

$$\frac{w^{**}}{1 - \frac{1}{2} w^{*2} - \frac{1}{8} w^{*4}} + \alpha^2 w = w^{**} + \alpha^2 w \cdot \left[1 - \frac{1}{2} w^{*2} - \frac{1}{8} w^{*4} \right] = 0 \quad (3.43)$$

Durch das Ausmultiplizieren, dem Vereinfachen der deutlich kleineren Terme mit w^* , welche mit der Verformung der Umfangskoordinate s ersetzt werden,

$$w(s) = w_m \sin \frac{\pi s}{l}, \quad w'(s) = w_m \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi s}{l} \quad (3.44)$$

folgt

$$w^{**} + \alpha^2 w - \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{l^2} \alpha^2 w_m^3 \sin \frac{\pi s}{l} \cos^2 \frac{\pi s}{l} - \frac{1}{8} \frac{\pi^4}{l^4} \alpha^2 w_m^5 \sin \frac{\pi s}{l} \cos^4 \frac{\pi s}{l} = 0 \quad (3.45)$$

Das Einbeziehen der trigonometrischen Beziehungen

$$\sin(x) \cos^2(x) = \frac{1}{4} \sin(x) + \frac{1}{4} \sin(3x) \quad (3.46)$$

ergibt die folgende Gleichung.

$$w'' + \alpha^2 w - \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{l^2} \alpha^2 w_m^3 \underbrace{\sin \frac{\pi s}{l} \cos^2 \frac{\pi s}{l}}_{=\frac{1}{4} \sin \frac{\pi s}{l} + \frac{1}{4} \sin \frac{3\pi s}{l}} - \frac{1}{8} \frac{\pi^4}{l^4} \alpha^2 w_m^5 \sin \frac{\pi s}{l} \cos^4 \frac{\pi s}{l} = 0 \quad (3.47)$$

Mit der Vereinfachung, dass die vierfache Potenz der Ableitung (Krümmung) sehr klein ist.

$$w'' + \alpha^2 w = - \frac{\pi^2}{l^2} \alpha^2 w_m^3 \frac{1}{8} \left(\sin \frac{\pi s}{l} + \sin \frac{3\pi s}{l} \right) \quad (3.48)$$

Für die Gleichung wird ein Ansatz mit zwei Gliedern verwendet.

$$w(s) = w_1 \sin \frac{\pi s}{l} + w_2 \sin \frac{3\pi s}{l} \quad (3.49)$$

Der Koeffizientenvergleich der beiden Glieder führt zu

$$w_1 = \frac{1}{\pi} \sqrt{8} \sqrt{1 - \frac{\pi^2 E I_y}{F l^2}}, \quad w_2 = \frac{\alpha^2 \pi^2}{8 l^2} \frac{w_1^3}{\alpha^2 - \left(\frac{3\pi}{l}\right)^2}. \quad (3.50)$$

Der Koeffizient w_1 ist klein und durch die dritte Potenz ist der zweite Term von w_2 vernachlässigbar.

$$w_m = \frac{l\sqrt{8}}{\pi} \sqrt{1 - \frac{F_{ki}}{F}} \text{ mit } F_{ki} = \frac{\pi^2 E I_y}{l^2} \quad (3.51)$$

Die Gleichung der Biegelinie ergibt sich somit zu

$$w(s) = \frac{l\sqrt{8}}{\pi} \sqrt{1 - \frac{F_{ki}}{F}} \sin \left(\frac{\pi s}{l} \right) \text{ mit } F_{ki} = \frac{\pi^2 E I_y}{l^2}. \quad (3.52)$$

Mit dem gleichen Prinzip wird die Biegelinie $v(x)$ hergeleitet.

$$v(s) = \frac{l\sqrt{8}}{\pi} \sqrt{1 - \frac{F_{ki}}{F}} \sin \left(\frac{\pi s}{l} \right) \text{ mit } F_{ki} = \frac{\pi^2 E I_z}{l^2}$$

Wichtig: Die Gleichung (3.52) gilt nur solange die Randspannungen unterhalb der Fließgrenze sind.

Eine weitere gängige Näherungslösung nach Domke liefert

$$w_{Domke} = \frac{l}{\pi} \sqrt{8 \frac{F_{ki}}{F} \left(1 - \frac{F_{ki}}{F}\right)} \text{ mit } F_{ki} = \frac{\pi^2 EI_y}{l^2}.^5 \quad (3.53)$$

Diese gilt auch für größere Verformungen. Bei der Entwicklung dieser Gleichung wird die Gl. (3.41) am Anfang mit dw multipliziert und exakt integriert.

$$\frac{w''}{\sqrt{1-w'^2}} dw + \frac{F}{EI} w dw = 0 \rightarrow \frac{w'^2 - 1}{\sqrt{1-w'^2}} + \frac{F}{EI} w^2 = C \quad (3.54)$$

Eine weitere Näherungsgleichung (Gl. (3.55)), auf die nicht weiter eingegangen wird, verwendet elliptische Integralausdrücke. Sie liefert genauere Ergebnisse bei sehr großen Verformungen, jedoch auch einen größeren Rechenaufwand. Für eine exakte Herleitung und Beschreibung siehe (Bürgermeister, et al., 1966 S. 52ff).

$$\frac{l}{2} = \frac{v_m}{2\varphi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-\varphi^2 \sin^2(t)}} dt \quad (3.55)$$

Beschränkung der Verformung

Mit der Knicklast errechnet sich der Vergleichsschlankheitsgrad λ_V .

$$\sigma_{ki} = \frac{F_{ki}}{A} = \frac{\pi^2 EI_y}{Al^2} \rightarrow \lambda_V^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{ki}} \quad (3.56)$$

Dieser wird mit der Einschränkung der Proportionalitätsgrenze $\sigma_{Rp0,2} = \sigma_p$ für elastisches Materialverhalten, sodass die Eulerhyperbel verwendet werden kann, eingeschränkt. Daraus errechnet sich auch der zugehörige Grenzschlankheitsgrad. (Bürgermeister, et al., 1966)

⁵ Für eine ausführliche Herleitung siehe (Bürgermeister, et al., 1966 S. 50ff)

$$\sigma_p(\text{ALMgSi0,5}) = 150 \text{ MPa} \rightarrow \lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 70000}{150}} = 67,866 \quad (3.57)$$

Beschränkt wird die Biegung durch die zulässige Spannung ($\sigma_{Rp0,2}$) oder der maximalen Dehnung der Struktur. Die Dehnung in axialer Richtung setzt sich aus dem Krümmungsradius κ und der Querschnittshöhen-Koordinate z zusammen. (Linke, et al., 2015)

$$\varepsilon_x = \frac{z}{\rho} = z \cdot \kappa_y \rightarrow \varepsilon_{x,max} = \frac{h}{2} \kappa_y \quad (3.58)$$

3.2.2 Reines Drillknicken

Die innere Energie des Torsionsmomentes setzt sich aus dem Wölbtorsionsmoment und dem Moment nach St. Venant zusammen.

$$M_x^{(i)} = EC_T \vartheta''' - GI_T \vartheta' \quad (3.59)$$

Die äußere Energie des Torsionsmomentes setzt sich aus den Faserlängskräften, integriert über den Querschnitt, zusammen.

$$M_x^{(a)} = \int_A z dT = \int_A z \cdot (\sigma \cdot \vartheta' \cdot z) dA = \sigma \cdot \vartheta' \cdot I_p \quad (3.60)$$

Mit dem Gleichgewicht der inneren und äußeren Energie folgt die DGL der Torsion.

$$EC_T \vartheta''' - GI_T \vartheta' = \sigma \cdot \vartheta' \cdot I_p \Leftrightarrow 0 = \vartheta''' - \left(\frac{GI_T}{EC_T} + \frac{\sigma I_p}{EC_T} \right) \vartheta' \quad (3.61)$$

Mit dem Einführen von α verkürzt sich die Gleichung.

$$\alpha^2 = \frac{GI_T + \sigma I_p}{EC_T} \Leftrightarrow 0 = \vartheta''' - \alpha^2 \vartheta' \quad (3.62)$$

Als Ansatzfunktion für die Torsion mit einer Gabellagerung wird wieder eine sin- Funktion verwendet.

$$\vartheta(x) = A \sin \alpha l \quad (3.63)$$

Der Sinus wird bei $n\pi$ mit $n=1, 2, 3, \dots$ zu Null. Damit folgt:

$$\alpha l = n\pi \rightarrow \sigma_{k,\vartheta} = \frac{1}{I_p} \left(GI_T + \frac{\pi^2 EC_T}{l^2} \right) \rightarrow P_{k,\vartheta} = \sigma_{k,\vartheta} \cdot A \quad (3.64)$$

Dieses lässt sich auf den Vergleichsschlankheitsgrad überführen.

$$\lambda_V^2 = \pi^2 \frac{E}{\sigma_{k,\vartheta}} \rightarrow \lambda_V = \sqrt{\frac{\pi^2 EI_p}{GI_T + \frac{\pi^2 EC_T}{l^2}}} \quad (3.65)$$

Mit diesem Zusammenhang wird der Drehradius des Querschnittes c eingeführt.

$$c^2 = \frac{C_T}{I_y} + \frac{l^2 GI_T}{\pi^2 EI_y} \quad (3.66)$$

Eine doppelt symmetrische stabartige Struktur ist Drillknick gefährdet, wenn

$$\lambda_v > \lambda_y \text{ also } \frac{\sqrt{I_p}}{c} > 1 \text{ mit } c = \sqrt{\frac{C_T}{I_y} + \frac{GI_T l^2}{EI_y \pi^2}} \quad (3.67)$$

gilt. (Bürgermeister, et al., 1966)

Nach „Lumpe, G. und Gensichen, V.“ (Lumpe, et al.) erweitert sich die innere Momentengleichung bei großer Torsionsverformung um den Term der Helixtorison

$$M_{xH}^{(i)} = \frac{1}{2} EK_r \vartheta'^3 \text{ mit } K_r = \int_z \int_y (y^2 + z^2)^2 dy dz - i_p^2 I_p. \quad (3.68)$$

Die DGL (3.61), auch mit Erweiterung der Gl.(3.68), ist mathematisch nicht zu lösen und kann daher nur mit Näherungsgleichungen, nummerisch oder mit FE-Programmen berechnet werden.

Für eine Näherungslösung wird der Druckstab gedanklich in zwei Stäbe zerteilt und mittig ein Gelenk und eine Drehfeder angebracht. Die beiden Stäbe seien starr und lediglich die Federsteifigkeit verhindert die Auslenkung. Die Näherungsgleichung zur Lösung des Problems ergibt sich aus dem Gleichgewicht, dabei ist ϑ_0 die Vorauslenkung.

$$\sum M_x = 0 = F \sin(\vartheta + \vartheta_0)l - K\vartheta \quad (3.69)$$

Die Gleichung gilt sowohl mit als auch ohne Vorkrümmung (ϑ_0). Dabei ist K die Torsionssteifigkeit der Struktur. Die Sinus-Funktion kann mit der Reihenentwicklung

$$\sin(\vartheta + \vartheta_0) = \vartheta_0 - \frac{\vartheta_0^3}{3!} + \vartheta \left(1 - \frac{\vartheta_0^2}{2!}\right) - \frac{\vartheta^2}{2!} \left(\vartheta_0 - \frac{\vartheta_0^3}{3!}\right) - \frac{\vartheta^3}{3!} \left(1 - \frac{\vartheta_0^2}{2!}\right) + \dots \quad (3.70)$$

dargestellt werden.

Nach der **Theorie II. Ordnung** ergibt sich durch Umstellen und Einsetzen.

$$\vartheta = \frac{\alpha}{1 - \alpha + \alpha \frac{\vartheta_0^2}{2}} \left(\vartheta_0 + \frac{\vartheta_0^3}{6} \right) \text{ mit } \alpha = \frac{F}{F_k}. \quad (3.71)$$

Für den Fall $\vartheta_0 = 0$ ergibt sich die kritische Kraft für $\alpha = 1$, da die Gleichung für den Wert nicht lösbar ist.

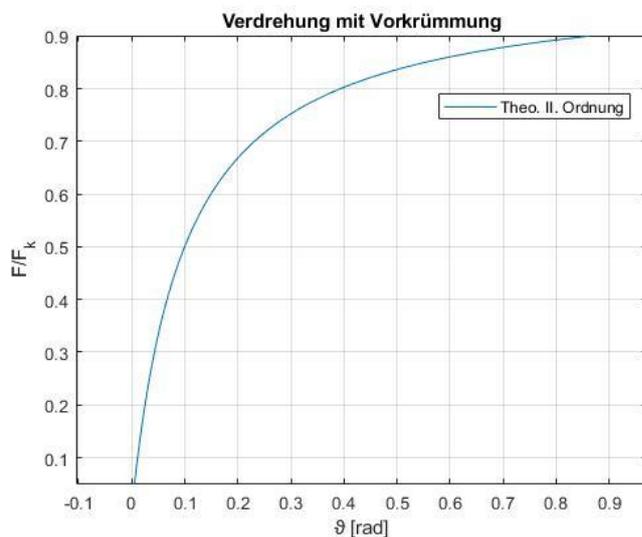


Abbildung 29 maximale Verdrehung in Abhängigkeit der Druckkraft nach Theo. II. Ordnung mit Imperfektion

Für die **Theorie III. Ordnung** werden die Terme oberhalb der 3. Potenz vernachlässigt und es ergibt sich

$$0 = \vartheta \left(\alpha - \alpha \frac{\vartheta^2}{6} - 1 - \alpha \frac{\vartheta_0^2}{2} - \alpha \frac{\vartheta \vartheta_0}{2} \right) + \vartheta_0 \left(\alpha - \alpha \frac{\vartheta_0^2}{6} \right) \text{ mit } \alpha = \frac{F}{F_k}. \quad (3.72)$$

Mit der Vernachlässigung der Terme höherer Potenzen ist die Gleichung oberhalb einer Verdrehung von $\vartheta \approx 30^\circ$ ungenau. (Mertinaschk, 2002)

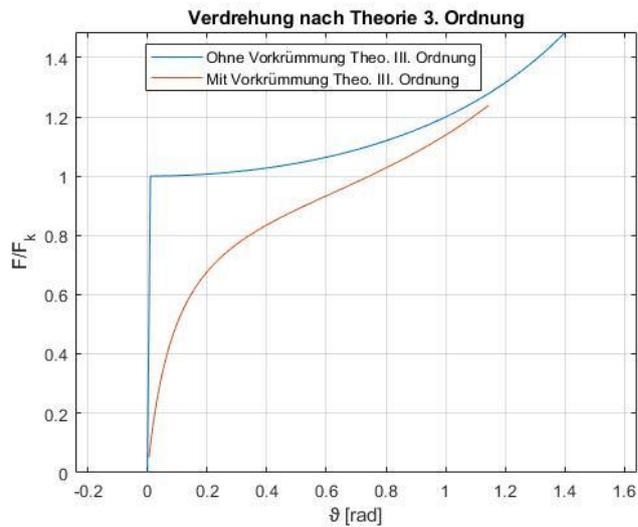


Abbildung 30 Maximale Verdrehung in Abhängigkeit der Druckkraft nach Theo. III. Ordnung mit und ohne Imperfektion

3.2.3 Biegedrillknicken

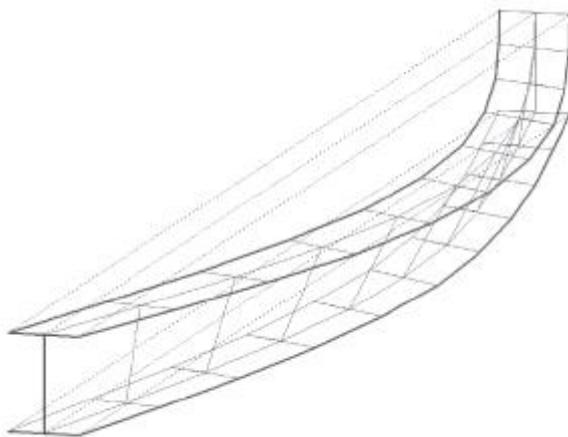


Abbildung 31 Stabilitätsproblem Biegedrillknicken eines I-Profiles (Lohse, et al. S. 320)

Die Verformungen des Biegedrillknickens können mit der Überlagerung aus Biegung und Verdrehung dargestellt werden. Wie schon in Abbildung 20 lässt sich die Verformung über den SMP und FSP darstellen und berechnen. Genauer gesagt, lässt sich die Verformung über die Abstände vom FSP zur verformten Lage des FSP ($w(x), v(x)$) und der Winkeländerung der Verbindungslinie vom SMP zum FSP beschreiben. Dabei stellt

$$\mathbf{w}_{FSP}(x) = \mathbf{w}(x) + e_y \vartheta(x) \quad (3.73)$$

die Verformung in z-Richtung und

$$\mathbf{v}_{FSP}(x) = \mathbf{v}(x) + e_z \vartheta(x) \quad (3.74)$$

die Verformung in y-Richtung dar.

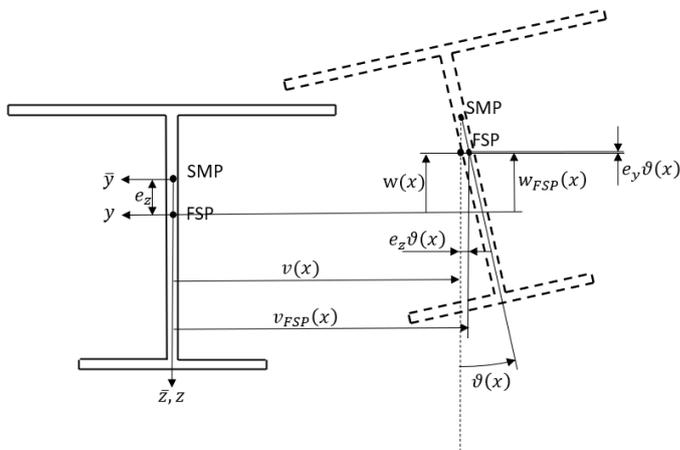


Abbildung 32 Verschiebungen beim Biegedrillknicken eines einfach symmetrischen I-Profiles

Um die Verformungsgleichungen zu erhalten, wird mit dem Verhältnis von äußerer Kraft zur kritischen Kraft die maximale Verformung (w_{max}, ϑ_{max}) berechnet und die jeweilige Verformungsgleichung

$$w(x) = w_{max} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \quad (3.75)$$

eingesetzt. Daraus folgt dann die überlagerte Verformungsgleichung

$$w_{FSP}(x) = w_{max} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + e_y \vartheta_{max} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \quad (3.76)$$

und

$$v_{FSP}(x) = v_{max} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + e_z \vartheta_{max} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right). \quad (3.77)$$

Die Dehnung infolge Biegung (Gl. (3.58)) muss beim Biegedrillknicken noch mit der Dehnung aus der Verdrehung überlagert werden. (Linke, et al., 2015)

Auch beim Imperfektionsansatz wird die Vorverformung aus Biegung und Torsion überlagert. Dabei ist z_m der Abstand vom SMP zur entfernteren Profilkante (beim symmetrischen I-Profil zum Beispiel $h/2$). (Ebel, 2014)

$$v_{0,ges}(x) = v_o(x) + z_m \cdot \sin(\vartheta_0(x)). \quad (3.78)$$

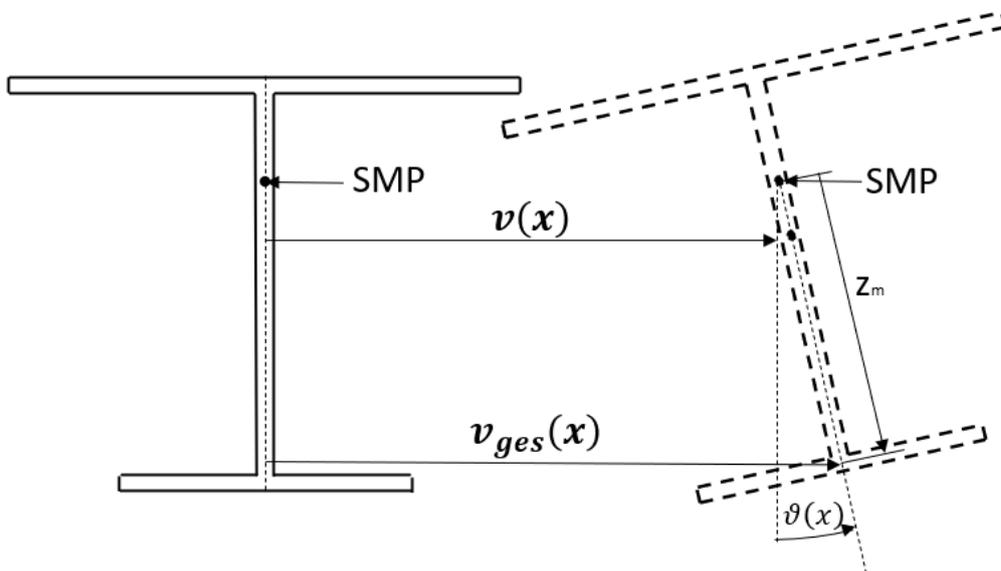


Abbildung 33 Gesamte Vorverformung beim Biegedrillknicken

3.2.4 Vergleich der Theorie II. und III. Ordnung

Im Folgenden werden die Theorie II. und III. Ordnung direkt miteinander verglichen.

Tabelle 3 Vergleich Theorie II. und III. Ordnung

	Theorie II. Ordnung	Theorie III. Ordnung
Vereinfachungen	<ul style="list-style-type: none"> • kleine Verformungen $\sin \alpha \approx \alpha, \tan \alpha \approx \alpha, \cos \alpha \approx 1$ • Elastisches Materialverhalten 	<ul style="list-style-type: none"> • Elastisches Materialverhalten
Möglichkeiten	<ul style="list-style-type: none"> • F_k berechenbar • Handschriftlich berechenbar 	<ul style="list-style-type: none"> • F_k berechenbar • Aussage über das Verhalten oberhalb von F_k • Größe der Verformung berechenbar
Schwächen	<ul style="list-style-type: none"> • Nur Berechnung kleiner Verformungen • nur unterhalb von F_k anwendbar • keine Aussage über die Verformungsgröße (Amplitude) 	<ul style="list-style-type: none"> • Finite-Elemente (FE) oder andere Programme erforderlich
Berechnung ^{*1} $(\underline{K} + \underline{G}(s)) \cdot \underline{v} = \underline{p}$	<ul style="list-style-type: none"> • Mit FE werden die Verformungen in Abhängigkeit der Lasten bestimmt. 	<ul style="list-style-type: none"> • Mit FE und nur einem inkrementell-iteratives Berechnungsverfahren bestimmbar.

*1: Die Gleichung der FE-Methode berechnet die Verformungen (\underline{v}) in Abhängigkeit der Kräfte (\underline{p}). Dabei werden die Verformungen mit der Steifigkeitsmatrix (\underline{K}) und der geometrischen Steifigkeitsmatrix ($\underline{G}(s)$), welche von der Schnittgröße (s) abhängig ist, verrechnet. Damit lautet die Gesamtsteifigkeitsbeziehung

$$(\underline{K} + \underline{G}(s)) \cdot \underline{v} = \underline{p}. \quad (3.79)$$

Für die Theorie II. Ordnung können in die geometrische Steifigkeitsmatrix die Schnittgrößen nach der Theorie I. Ordnung eingesetzt werden. Mit der Verrechnung der

Elementsteifigkeitsmatrix ergibt es die Gleichgewichtsschnittgrößen nach Theorie II. Ordnung.

Für die Theorie III. Ordnung werden die Spannungen in der verformten Lage mit in die Steifigkeitsmatrix einbezogen, sodass die geometrische Nichtlinearität zu nichtlinearen Verformungsgleichungen führt. Dieses Gleichungssystem ist nur noch mit einem inkrementell-iterativen Berechnungsverfahren lösbar.

(Wolf) (Krätzig, et al.) (Zienkiewicz, et al.)

4 Berechnung

Da das Ziel dieser Ausarbeitung ein Laborversuch für Studenten/-innen ist, welche diese auch selbst handschriftlich berechnen können, und die Theorie III. Ordnung ein iteratives Berechnungsverfahren benötigt, wird nur mit der Näherung gerechnet. Das Maple-Tool zeigt den Studierenden einen "handschriftlichen" Lösungsweg mit Gleichungen, eingesetzten Größen, Ergebnissen, der Wahl eines Koordinatensystems und berechneten Näherungswerten nach der Theorie III. Ordnung.

4.1 Doppelt symmetrisches I-Profil

Die Profile bestehen alle aus Aluminium (AlMgSi0,5)⁶. Daher gelten für alle Profile:

$$E_{Alu} = 70.000 \text{ MPa}$$

$$G = \frac{E_{Alu}}{2(1 + \nu)} = \frac{70000}{2(1 + 0,35)} \approx 25.925 \text{ Mpa}$$

$$\sigma_{Rp\ 0,2} = \sigma_p = 150 \text{ MPa}$$

$$\sigma_f = 215 \text{ MPa}$$

$$\tau_{zul} = 0,7 \cdot \sigma_{Rp\ 0,2} = 105 \text{ MPa}$$

Der kritischen Werte für die Spannung σ_k und der Kraft F_k gilt nur im Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes ($\sigma_k \leq \sigma_p$). Damit kann ein minimaler Wert für den Schlankheitsgrad formuliert werden. (Assmann, et al.) (Bürgermeister, et al., 1966)

$$\lambda_{min} = \lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E_{Alu}}{\sigma_{p,Alu}}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 70000}{150}} = 67,86$$

⁶ Materialdatenblatt im Anhang A

4.1.1 Biegeknicken

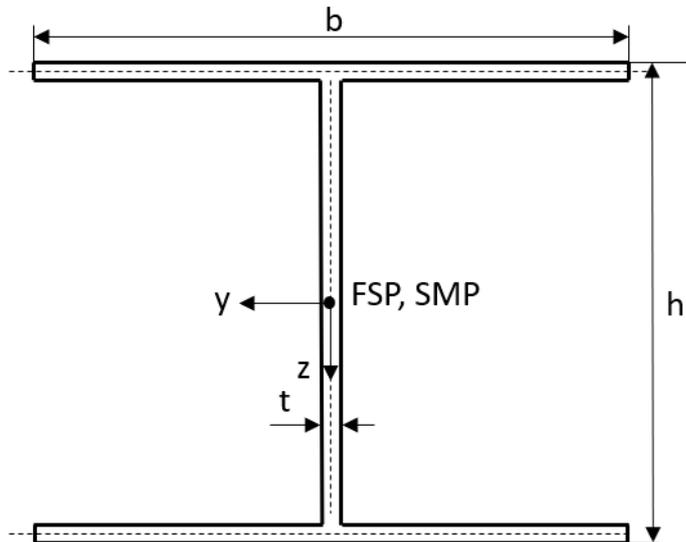


Abbildung 34 Querschnitt doppelt symmetrisches I-Profil

$$t = 3 \text{ mm}$$

$$b = h = 50 \text{ mm}$$

$$l = 1000 \text{ mm}$$

$$A = (2b + h) \cdot t = (2 \cdot 50 + 50) \cdot 3 = 450 \text{ mm}^2$$

$$I_y = \sum \frac{b_i \cdot h_i^3}{12} + \sum z_i^2 \cdot A_i \approx 2bt \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{th^3}{12} = 2 \cdot 50 \cdot 3 \left(\frac{50}{2}\right)^2 + \frac{3 \cdot 50^3}{12} = 26.765 \text{ mm}^4$$

$$I_z \approx 2 \frac{tb^3}{12} = 2 \frac{3 \cdot 50^3}{12} = 62.500 \text{ mm}^4$$

$$I_0 = I_y + I_z = 2 \cdot 1345,3 = 89.365 \text{ mm}^4$$

$$F_{k,v} = \frac{E \cdot I_z \cdot \pi^2}{l^2} = \frac{70000 \cdot 62.500 \cdot \pi^2}{1000^2} = 43.180 \text{ N}$$

$$F_{k,w} = \frac{E \cdot I_y \cdot \pi^2}{l^2} = \frac{70000 \cdot 26.765 \cdot \pi^2}{1000^2} = 151.130 \text{ N}$$

Mit der kleinsten kritischen Knicklast ($F_{k,v} = 43.180 \text{ N}$) wird die kritische Spannung und der Schlankheitsgrad bestimmt.

Theoretische Spannung kurz vor dem Auslenken.

$$\sigma_{kv} = \frac{F_{k,v}}{A} = \frac{43180}{450} = 95,96 \text{ MPa}$$

$$\lambda_{kv} = \sqrt{\frac{E\pi^2}{\sigma_{ki}}} = \sqrt{\frac{70000 \cdot \pi^2}{95,96}} = 84,85 > \lambda_{min} = 67,86$$

Um die stabartige Struktur mit der Theorie II. Ordnung betrachten zu können, wird mit einer Imperfektion, in Form einer Vorauslenkung, gerechnet. Dabei gibt $v_{l/2}$ die maximale Verformung in Stabmitte an.

$$v_{l/2} = v_0 \frac{1}{1 - F/F_k} = \frac{l}{1000} \frac{1}{1 - F/F_k} = \frac{500}{1000} \frac{1}{1 - F/43.180}$$

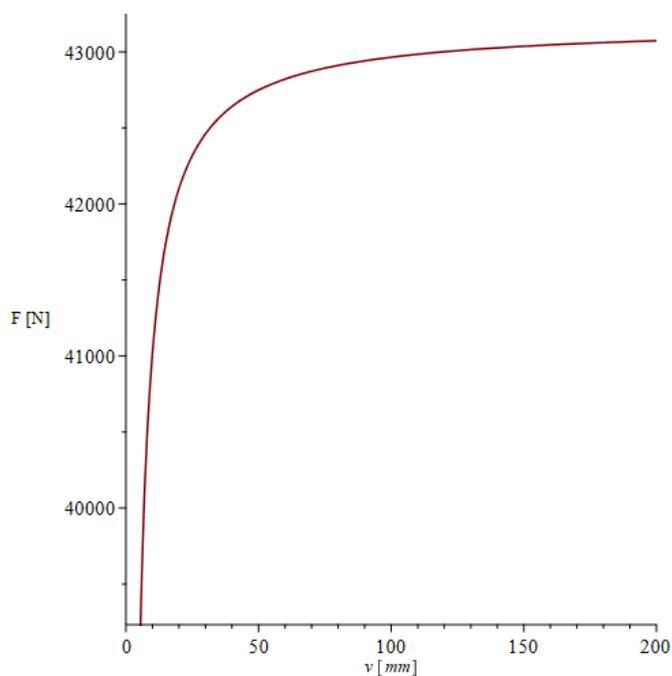


Abbildung 35 Biegeknicken mit Imperfektion nach Theo. 2 Ordnung eines doppelt symmetrischen I-Profiles

Begrenzt wird die Verformung durch das Erreichen der maximal zulässigen Spannung.

$$\sigma_x = \frac{F}{A} + \frac{M_z}{I_z} y = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot v}{I_z} y \rightarrow v_{max} = \left(\sigma_{Rp0,2} - \frac{F}{A} \right) \frac{2I_z}{bF}$$

Die Gleichung wurde iterativ gelöst und die maximale Kraft beträgt $F = 38.134 \text{ N}$.

$$v_{max} = \left(\sigma_{Rp0,2} - \frac{F}{A} \right) \frac{2I_z}{bF} = \left(150 - \frac{38.134}{450} \right) \frac{2 \cdot 62.500}{50 \cdot 38.134} = 4,28 \text{ mm}$$

In den nächsten Schritten wird nach der Theorie III. Ordnung gerechnet. Dazu werden die Näherungsgleichungen oberhalb der kritischen Last bestimmt.

$$v_{(x)} = \frac{l\sqrt{8}}{\pi} \sqrt{1 - \frac{F_{k,v}}{F}} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) = \frac{1000\sqrt{8}}{\pi} \sqrt{1 - \frac{43.180}{F}} \sin\left(\frac{\pi x}{1000}\right)$$

Die zweite Näherungsgleichung nach „Domke“ mit exakter Integration am Anfang.

$$v_{Domke(x)} = \frac{1000\sqrt{8}}{\pi} \sqrt{\frac{43.180}{F} \left(1 - \frac{43.180}{F}\right)} \sin\left(\frac{\pi x}{1000}\right)$$

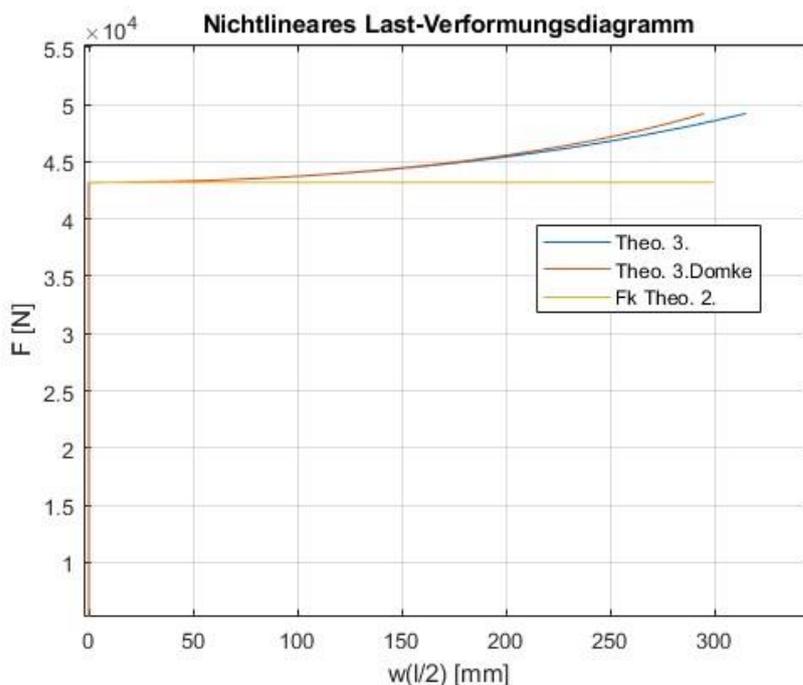


Abbildung 36 Knicklast nach Theorie III. Ordnung für das I-Profil

4.1.2 Berechnung Drillknicken

Für die Berechnung des Drillknickens wird das gleiche Profil wie im vorherigen Abschnitt verwendet. Es wird zusätzlich mit dem Torsionsflächenmoment und dem Wölbwiderstand die kritische Last des Drillknickens berechnet.

$$I_T = \frac{(2b + h) \cdot t^3}{3} = \frac{(2 \cdot 50 + 50) \cdot 3^3}{3} = 1350 \text{ mm}^4$$

$$C_T = \frac{t \cdot b^3}{24} \cdot h^2 = \frac{3 \cdot 50^3}{24} \cdot 50^2 = 39.062.500 \text{ mm}^6$$

$$F_{k,T} = \frac{A}{I_0} \left(\frac{\pi^2 E C_T}{l^2} + G I_T \right) = \frac{450}{89365} \left(\frac{\pi^2 \cdot 70000 \cdot 39062500}{1000^2} + 25925 \cdot 1350 \right)$$

$$F_{k,T} = 99.178 \text{ N}$$

Oft ist die Biegung um die schwache Achse anfälliger als das reine Drillknicken. Da diese Problematik bekannt ist, wird der Stab um die schwache Achse mittig gestützt.

$$F_{k,v} = \frac{E \cdot I_z \cdot \pi^2}{l^2} = \frac{70000 \cdot 62.500 \cdot \pi^2}{500^2} = 172.718 \text{ N}$$

Die Stütze verhindert lediglich die Biegung. Eine Torsion/Verdrillung wird nicht eingeschränkt. Dadurch ist die kleinste kritische Last, die zum Stabilitätsverlust führt, die des Drillknickens $F_{k,T} = 99.178 \text{ N}$.

Das Drillknicken unterhalb der kritischen Knicklast kann näherungsweise mit einer Imperfektion auch nach der Theorie II. Ordnung beschrieben werden.

$$F_{k,T} = \frac{K}{l} \rightarrow K = F_{k,T} \cdot l = 99.178 \cdot 1000 = 99.178.000 \text{ Nm}^2$$

Alpha und die Vorkrümmung von 0,1 werden in die Gleichung eingesetzt.

$$\alpha = \frac{F}{F_k} = \frac{F \cdot l}{K} = \frac{F}{99.178}$$

$$\vartheta = \frac{\alpha}{1 - \alpha + \alpha \frac{\vartheta_0^2}{2}} \left(\vartheta_0 + \frac{\vartheta_0^3}{6} \right) = \frac{\alpha}{1 - \alpha + \alpha \frac{0,1^2}{2}} \left(0,1 + \frac{0,1^3}{6} \right)$$

Wird der Stab mit der nicht-linearen Theorie

$$0 = \vartheta \left(\alpha - \alpha \frac{\vartheta^2}{6} - 1 - \alpha \frac{\vartheta_0^2}{2} - \alpha \frac{\vartheta \vartheta_0}{2} \right) + \vartheta_0 \left(\alpha - \alpha \frac{\vartheta_0^2}{6} \right) \text{ mit } \alpha = \frac{Fl}{K}$$

berechnet, so entstehen die folgenden Verläufe.

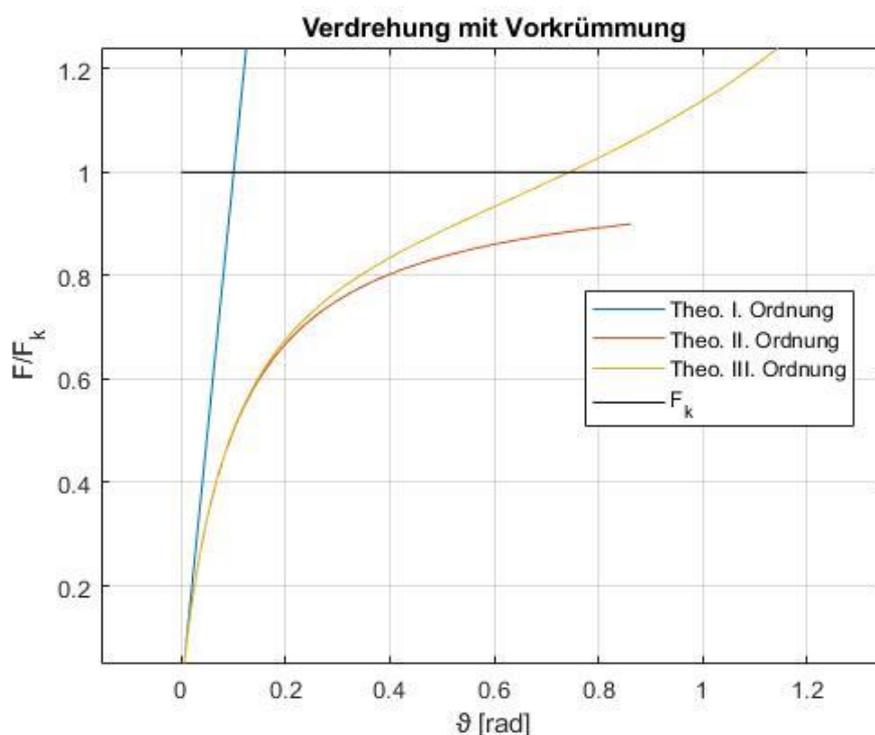


Abbildung 37 Torsion/ Verdrehung des I-Profiles bei reinem Drillknicken

Zum Lösen der Gleichung nach der Theorie II. und III. Ordnung wurde ein Rechenprogramm (Maple und Matlab) verwendet. Die maximale Verdrehung wird mit der zulässigen Schubspannung bestimmt.

$$\tau = Gt_{max}\vartheta' \leq \tau_{zul} \rightarrow \vartheta' = \frac{\tau_{zul}}{Gt_{max}} = \frac{0,7 \cdot 150}{25925 \cdot 3} = 0,0014 \rightarrow \vartheta_{max} = \frac{l}{\pi} \cdot \vartheta' = 0,4456[\text{rad}]$$

4.2 Berechnung Biegedrillknicken

Die Berechnung wird anhand eines T-Profiles ($C_T = 0$ und e_z), eines L-Profiles ($C_T = 0$, e_y und e_z) und eines einfach symmetrischen I-Profiles ($C_T \neq 0$ und e_z) exemplarisch dargestellt.

4.2.1 T-Profil

Bei einem T-Profil kann es zum reinen Biegeknicken und zum Biegedrillknicken kommen. Reines Drillknicken kann nicht entstehen, da der SMP und der FSP nicht zusammen liegen. Der SMP liegt, wie in Abbildung 38 dargestellt, im Schnittpunkt vom Steg und Flansch (Gurt).

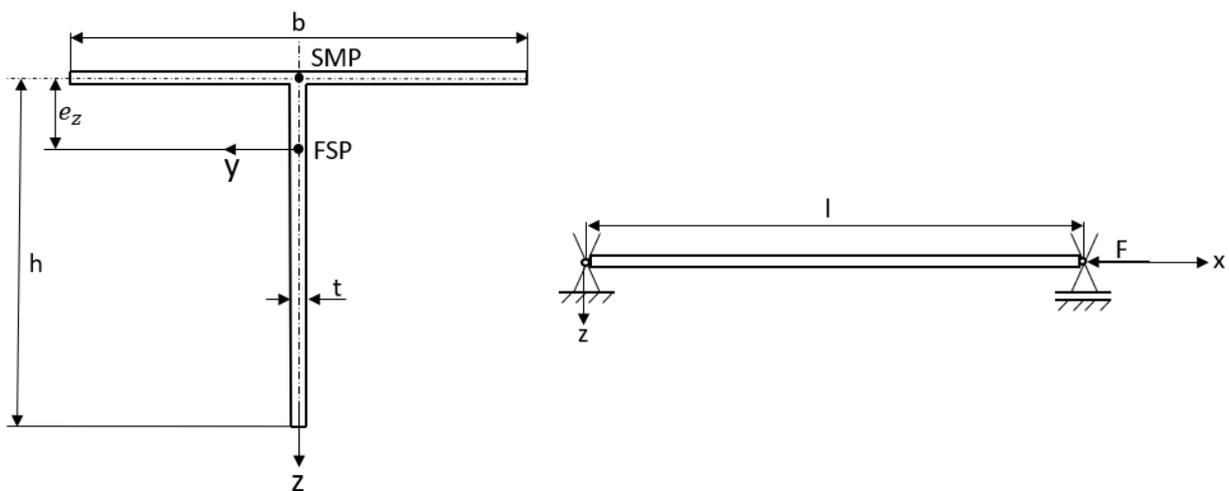


Abbildung 38 T-Profil Querschnitt und beidseitiger Gabellagerung und Belastung

$$b = 20 \text{ mm}$$

$$h = 19 \text{ mm}$$

$$t = 2 \text{ mm}$$

$$l = 500 \text{ mm}$$

$$A = b \cdot t + (h - t/2) \cdot t = 20 \cdot 2 + (19 - 1) \cdot 2 = 76 \text{ mm}^2$$

Zur Bestimmung des Abstandes vom FSP zum SMP liegt der Koordinatenursprung an der oberen Kante und mittig vom Profil. Dabei ist $e_y = 0$, da es sich um ein einfach symmetrisches Profil handelt.

$$e_z = \frac{\sum A_i \cdot z_i}{\sum A} - \frac{t}{2} = \frac{\sum 20 \cdot 2 \cdot 1 + 18 \cdot 2 \cdot 11}{2 \cdot 20 + 2 \cdot 18} - 1 \left[\frac{\text{mm}^2}{\text{mm}} \right] = 4,74 \text{ mm}$$

Bestimmung der Flächenmomente.

$$I_y = \sum \frac{b_i \cdot h_i^3}{12} + \sum z_i^2 \cdot A_i$$

$$I_y = \frac{20 \cdot 2^3 + 2 \cdot 18^3}{12} + (4,74^2 \cdot 20 \cdot 2 + 4,77^2 \cdot 18 \cdot 2) = 2537,1 \text{ mm}^4$$

$$I_z = \sum \frac{h_i \cdot b_i^3}{12} + \sum y_i^2 \cdot A_i = \frac{2 \cdot 20^3 + 18 \cdot 2^3}{12} = 1345,3 \text{ mm}^4$$

$$I_0 = I_y + I_z + A e_z^2 = 2880 + 1345,3 + 76 \cdot 4,74^2 = 5587,72 \text{ mm}^4$$

$$I_T = 1,12 \frac{(b + h) \cdot t^3}{3} = 1,12 \frac{(20 + 19) \cdot 2^3}{3} [\text{mm}^4] = 113,5 \text{ mm}^4$$

Durch die beidseitige Gabellagerung des Stabes, dass für ein einfach symmetrisches Profil $e_y = 0$ gilt und dass ein T-Profil wölbfrei ist, vereinfacht sich die Gleichung für die kritische Last zu

$$0 = \left(F - \frac{\pi^2 E I_y}{l^2} \right) \cdot \left[\left(\frac{F I_0}{A} - G I_T \right) \left(F - \frac{\pi^2 E I_z}{l^2} \right) - F^2 e_z^2 \right].$$

Betrachten wir die Gleichung genauer, so ist zu erkennen, dass die eckige Klammer eine Kopplung des Verdrillens und des Biegeknickens um die z-Achse darstellt. Damit ergibt sich zum einen das Biegedrillknicken und zum anderen das reine Biegeknicken um die y-Achse als kritische Lasten. Der Term vor der eckigen Klammer stellt das Biegeknicken dar. Setzen wir beide Teile gleich Null, so erhalten wir beide kritische Lasten.

Berechnung der kritischen Biegeknicklast.

$$F_{k,y} - \frac{\pi^2 EI_y}{l^2} = 0 \Leftrightarrow F_{k,y} = \frac{\pi^2 EI_y}{l^2} = \frac{\pi^2 \cdot 70000 \cdot 2537,1}{500^2} = 7011,25 \text{ N}$$

Für die zweite kritische Last muss die eckige Klammer ausmultipliziert und nach F aufgelöst werden.

$$\frac{I_0}{A} \left(F - \frac{AGI_T}{I_0} \right) \left(F - \frac{\pi^2 EI_z}{l^2} \right) - F^2 e_z^2 = 0$$

$$\left(\frac{I_0}{A} - e_z^2 \right) F^2 - \left(\frac{I_0 \pi^2 EI_z}{Al^2} + GI_T \right) F + \frac{GI_T \pi^2 EI_z}{l^2} = 0 \text{ mit } pq\text{-Formel}$$

$$F_{k,v\vartheta 1} = 3608,66 \text{ N und } F_{k,v\vartheta 2} = 59.338,6 \text{ N}$$

Nach dem Erreichen der kleinsten kritischsten Last $F_{k,B1} = 3608,66 \text{ N}$ kommt es zum Stabilitätsverlust und es kommt zum Biegedrillknicken des Stabes.

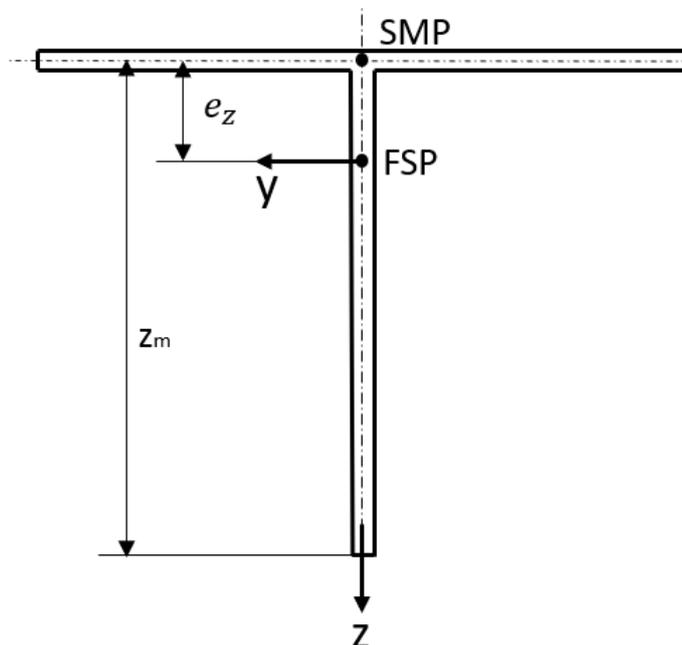


Abbildung 39 T-Profil Querschnitt

Die Vorverformungen sind nach der Literatur konservativ gewählt und weisen geringere kritische Werte, wie die Versuche und FEM – Berechnungen, auf.

$$z_m = h - \frac{t}{2} = 19 \text{ mm}, \quad e_o = \frac{l}{1000}$$

$$\vartheta_0 = e_o \frac{\pi^2 EI_z}{F_k l^2 + z_m \pi^2 EI_z} = 0,025 \text{ [rad]}, \quad v_0 = \frac{\vartheta_0 F_k l^2}{\pi^2 EI_z} = 0,024 \text{ mm}$$

$$\vartheta = \frac{\alpha}{1 - \alpha + \alpha \frac{\vartheta_0^2}{2}} \left(\vartheta_0 + \frac{\vartheta_0^3}{6} \right) \text{ und } \alpha = \frac{F}{F_k}$$

$$v = \frac{v_0}{1 - F/F_k}$$

$$v_{ges} = \frac{v_0}{1 - F/F_k} + z_m \cdot \sin(\vartheta)$$

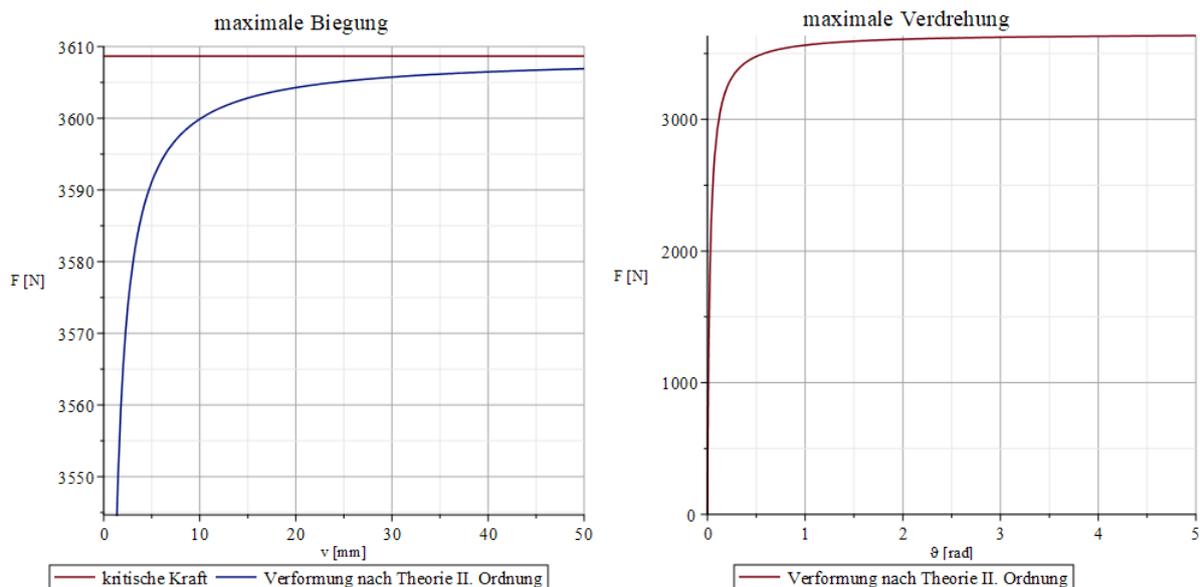


Abbildung 40 maximale Verformung des T- Profils infolge Biegedrillknicken

$$v_{Domke} = \frac{l}{\pi} \sqrt{8 \frac{F_{ki}}{F} \left(1 - \frac{F_{ki}}{F}\right)}, \quad 0 = \vartheta \left(\alpha - \alpha \frac{\vartheta^2}{6} - 1 - \alpha \frac{\vartheta_0^2}{2} - \alpha \frac{\vartheta \vartheta_0}{2} \right) + \vartheta_0 \left(\alpha - \alpha \frac{\vartheta_0^2}{6} \right)$$

$$v_{max} = v_{Domke} + z_m \cdot \sin(\vartheta) \text{ mit } z_m = 19 \text{ mm}$$

$$v_{max} = \frac{l}{\pi} \sqrt{8 \frac{F_{ki}}{F} \left(1 - \frac{F_{ki}}{F}\right)} + 19 \cdot \sin(\vartheta(\vartheta_0 = 0,1))$$

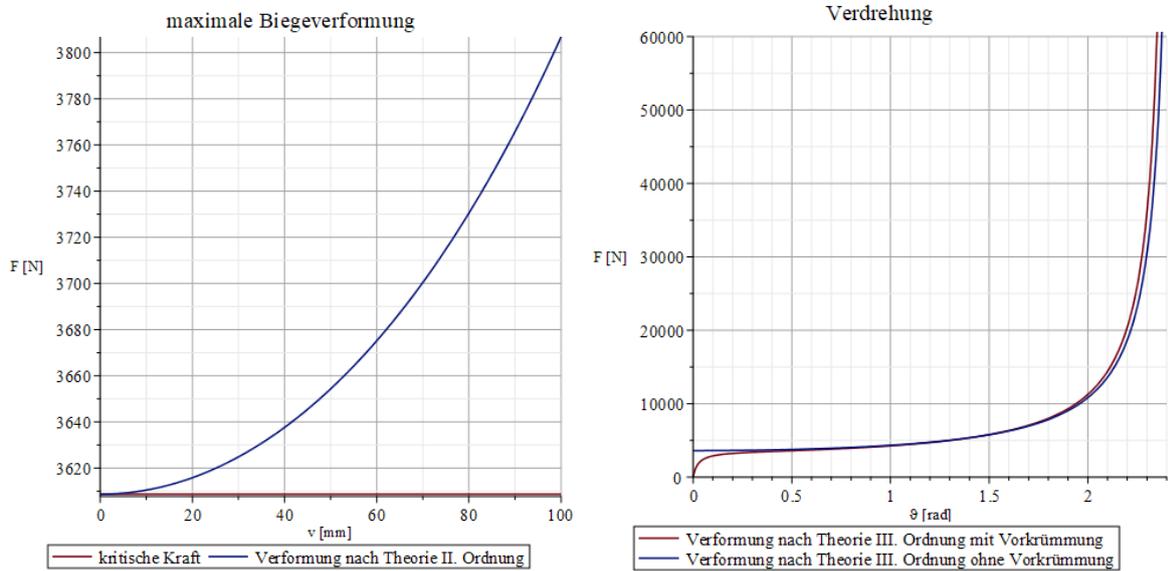


Abbildung 41 maximale Verformung des T- Profils infolge Biegedrillknicken mit Theorie III. Ordnung

4.2.2 L-Profil

Bei einem unsymmetrischen L-Profil kommt es immer zum Biegedrillknicken, da der SMP und der FSP jeweils einen Abstand in z-Richtung (e_z) und y-Richtung (e_y) haben. Der SMP liegt, wie in Abbildung 42 dargestellt, im Schnittpunkt der beiden Schenkel.

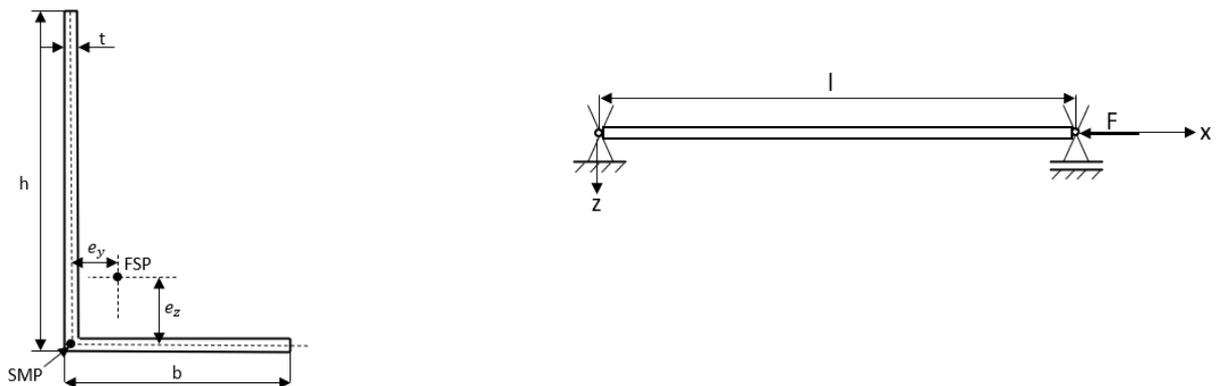


Abbildung 42 links: Dünnwandiges L-Profil mit Flächenschwerpunkt FSP und Schubmittelpunkt SMP
rechts: Stab mit beidseitiger Gabellagerung und Druckkraft

$$b = 10 \text{ mm}$$

$$h = 20 \text{ mm}$$

$$t = 2 \text{ mm}$$

$$l = 500 \text{ mm}$$

$$A = b \cdot t + (h - t) \cdot t = 10 \cdot 2 + (20 - 2) \cdot 2 = 56 \text{ mm}^2$$

Zur Bestimmung des Abstandes vom FSP zum SMP liegt der Koordinatenursprung in der linken unteren Ecke.

$$e_y = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{\sum A} - \frac{t}{2} = \frac{9 \cdot 2 \cdot 9/2}{2 \cdot 19 + 2 \cdot 9} \left[\frac{\text{mm}^2}{\text{mm}} \right] = 1,45 \text{ mm}$$

$$e_z = \frac{\sum A_i \cdot z_i}{\sum A} - \frac{t}{2} = \frac{19 \cdot 2 \cdot 19/2}{2 \cdot 19 + 2 \cdot 9} \left[\frac{\text{mm}^2}{\text{mm}} \right] = 6,44 \text{ mm}$$

Bestimmung der Flächenmomente.

$$I_y = \sum \frac{b_i \cdot h_i^3}{12} + \sum z_i^2 \cdot A_i$$

$$I_y = \frac{9 \cdot 2^3 + 2 \cdot 19^3}{12} + \left(\left(\frac{19}{2} - 3,06 \right)^2 \cdot 19 \cdot 2 + 6,44^2 \cdot 9 \cdot 2 \right) = 2251,5 \text{ mm}^4$$

$$I_z = \sum \frac{h_i \cdot b_i^3}{12} + \sum y_i^2 \cdot A_i$$

$$I_z = \frac{19 \cdot 2^3 + 2 \cdot 9^3}{12} + \left(1,45^2 \cdot 19 \cdot 2 + \left(\frac{9}{2} - 1,45 \right)^2 \cdot 9 \cdot 2 \right) = 381,5 \text{ mm}^4$$

$$I_0 = I_y + I_z + A e_z^2 = 2251,5 + 381,5 + 56 \cdot (1,45^2 + 6,44^2) = 5077,33 \text{ mm}^4$$

$$I_T = \frac{(b + h) \cdot t^3}{3} = \frac{(19 + 9) \cdot 2^3}{3} [\text{mm}^4] = 74,67 \text{ mm}^4$$

Mit der Wölbfreiheit eines L-Profil vereinfacht sich die Gleichung zur Bestimmung der kritischen Lasten zu:

$$0 = \left(-GI_T + \frac{FI_0}{A} \right) \left(F - \frac{\pi^2 EI_z}{l^2} \right) \left(F - \frac{\pi^2 EI_y}{l^2} \right) - F^2 e_z^2 \left(F - \frac{\pi^2 EI_y}{l^2} \right) - F^2 e_y^2 \left(F - \frac{\pi^2 EI_z}{l^2} \right)$$

Die Lösung der kubischen Gleichung erfolgt mit Hilfe eines mathematischen Programms.

Die drei kritischen Lasten für das L - Profil lauten:

$$[[F = 1.030,33], [F = 6.174,68], [F = 42.449,95]]$$

Damit ist die bestimmende kritische Last $F_{k,v\vartheta} = 1030,33 \text{ N}$.

$$v_o = \frac{l}{1000}, \quad \vartheta = \frac{\alpha}{1 - \alpha + \alpha \frac{\vartheta_0^2}{2}} \left(\vartheta_0 + \frac{\vartheta_0^3}{6} \right) \text{ und } \alpha = \frac{Fl}{K}$$

$$v_{max} = \frac{v_o}{1 - F/F_k} + z_m \cdot \vartheta \text{ mit } z_m = h = 19 \text{ mm}$$

$$v_{max} = \frac{l/1000}{1 - F/F_k} + 19 \cdot \sin(\vartheta)$$

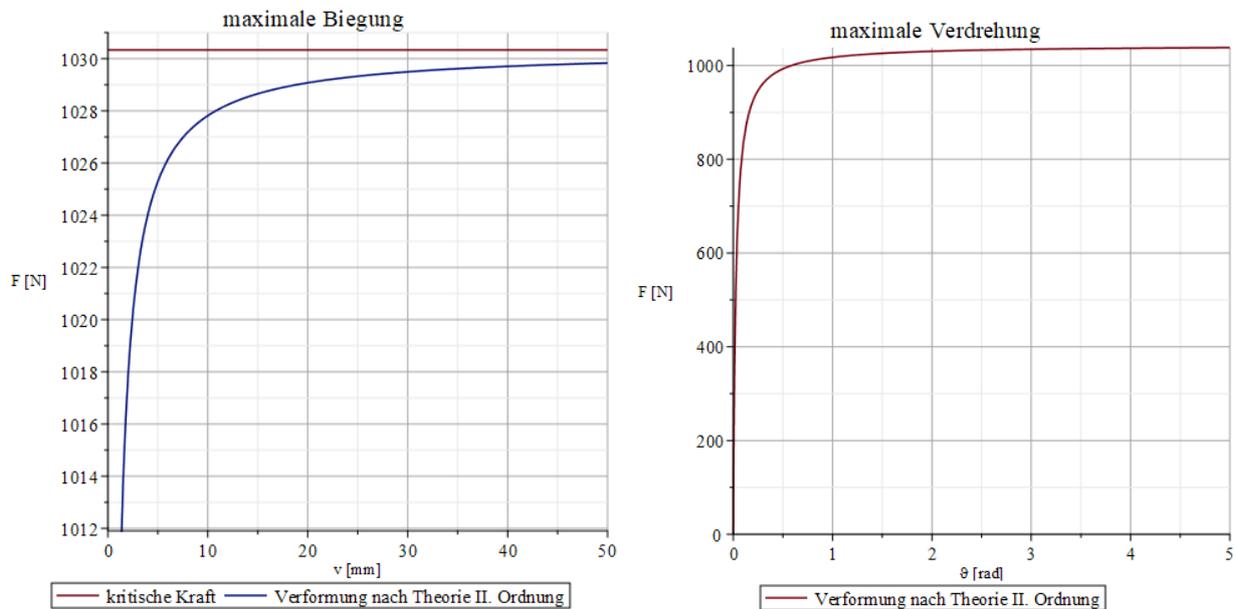


Abbildung 43 Verformung infolge Biegedrillknicken in der Stabmitte nach Theorie II. Ordnung

Mit der Theorie III. Ordnung folgt:

$$v_{Domke} = \frac{l}{\pi} \sqrt{8 \frac{F_{ki}}{F} \left(1 - \frac{F_{ki}}{F}\right)}, \quad 0 = \vartheta \left(\alpha - \alpha \frac{\vartheta^2}{6} - 1 - \alpha \frac{\vartheta_0^2}{2} - \alpha \frac{\vartheta \vartheta_0}{2} \right) + \vartheta_0 \left(\alpha - \alpha \frac{\vartheta_0^2}{6} \right)$$

$$v_{max} = v_{Domke} + z_m \cdot \sin(\vartheta) \text{ mit } z_m = 19 \text{ mm}$$

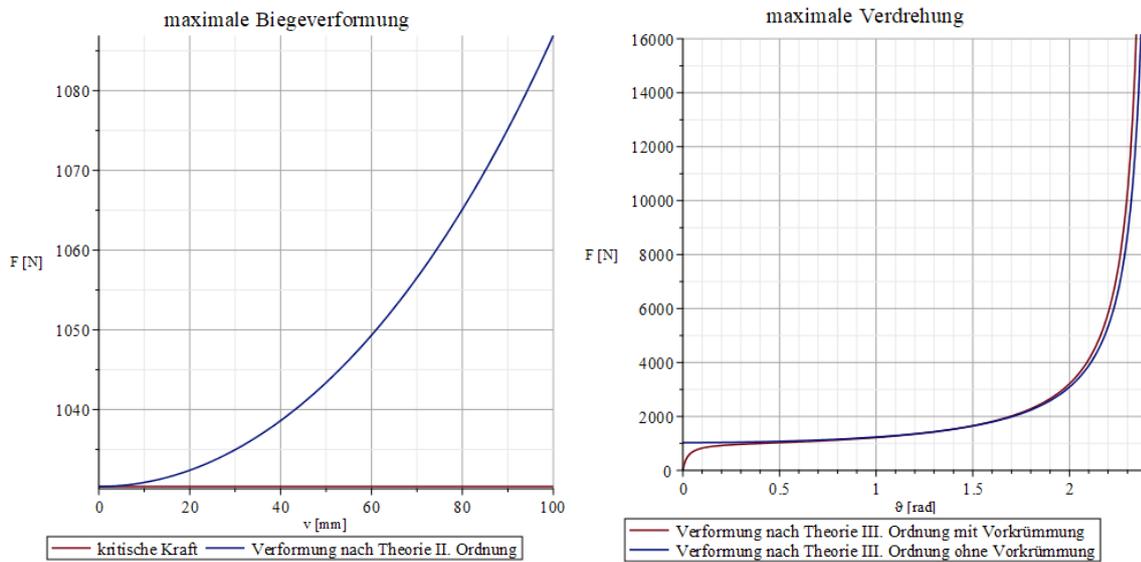


Abbildung 44 Verformung infolge Biegedrillknicken in der Stabmitte nach Theorie III. Ordnung

4.2.3 I-Profil

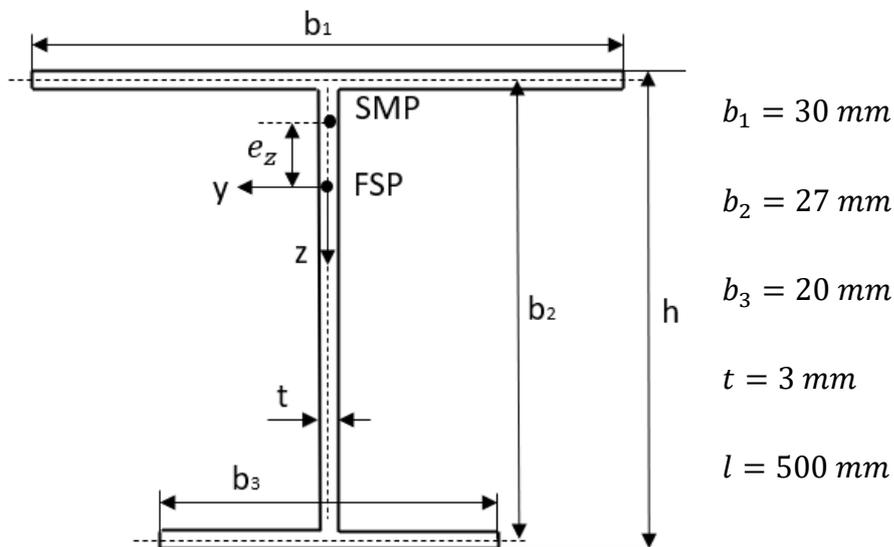


Abbildung 45 I-Profil mit Abmaßen

Berechnung

$$A = [b_1 + b_3 + (b_2 - t)] \cdot t = [30 + 20 + 27] \cdot 3 = 231 \text{ mm}^2$$

Für die Berechnung des Flächenschwerpunktes wird das Koordinatensystem mittig an den oberen Holm gelegt.

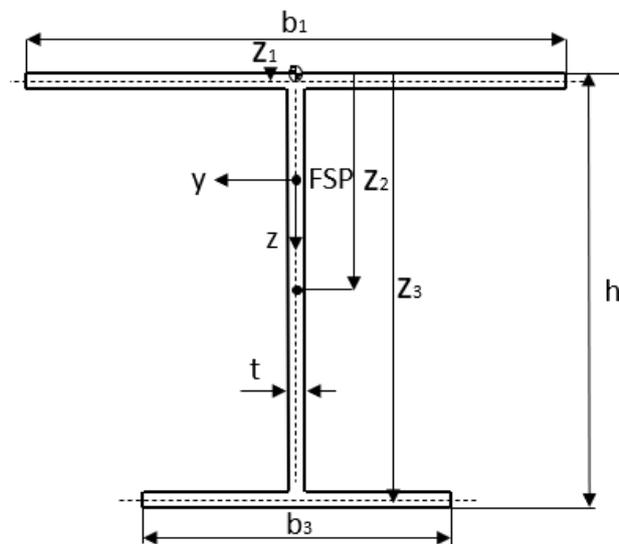


Abbildung 46 I-Profil mit Koordinatensystem zur Bestimmung des Flächenschwerpunktes

Mit der Tabelle werden die jeweiligen Abschnitte berechnet.

Tabelle 4 Berechnung des Flächenschwerpunktes

i	1	2	3
z_{si}	$t/2$	$h/2$	$t/2 + b_2$
A_i	$t \cdot b_1$	$t \cdot (b_2 - t)$	$b_3 \cdot t$
$A_i \cdot z_{si}$	135	1080	1710

$$z_s = \frac{\sum A_i \cdot z_i}{\sum A} = \frac{135 + 1215 + 1710}{231} \left[\frac{\text{mm}^3}{\text{mm}^2} \right] = 13,25 \text{ mm}$$

Beim einfach symmetrischen I-Profil muss im Gegensatz zu den anderen Profilen die Lage des SMP bestimmt werden.

Tabelle 5 Berechnung des Flächenträgheitsmoment

i	1	2	3
y_i	0	0	0
z_i	$t/2 - z_s$	$h/2 - z_s$	$h - t/2 - z_s$
A_i	$t \cdot b_1$	$t \cdot b_2$	$t \cdot (b_3 - t)$
$I_{y,si}$	$\frac{1}{12} \cdot b_1 \cdot t^3$	$\frac{1}{12} \cdot (b_2 - t)^3 \cdot t$	$\frac{1}{12} \cdot b_3 \cdot t^3$
$I_{z,si}$	$\frac{1}{12} \cdot t \cdot b_1^3$	$\frac{1}{12} \cdot (b_2 - t) \cdot t^3$	$\frac{1}{12} \cdot t \cdot b_3^3$
$y_i^2 A_i$	0	0	0
$z_i^2 A_i$	$(t/2 - z_s)^2 \cdot t \cdot b_1$	$(h/2 - z_s)^2 \cdot t \cdot b_2$	$(h - t/2 - z_s)^2 \cdot t \cdot (b_3 - t)$

$$I_y = \sum_i I_{y,si} + \sum_i z_i^2 \cdot A_i = 72.195,75 \text{ mm}^4$$

$$I_z = \sum_i I_{z,si} + \sum_i y_i^2 \cdot A_i = 8810,75 \text{ mm}^4$$

Im nächsten Schritt werden die Abschnittskordinaten (“Laufkordinaten“) der jeweiligen Abschnitte definiert.

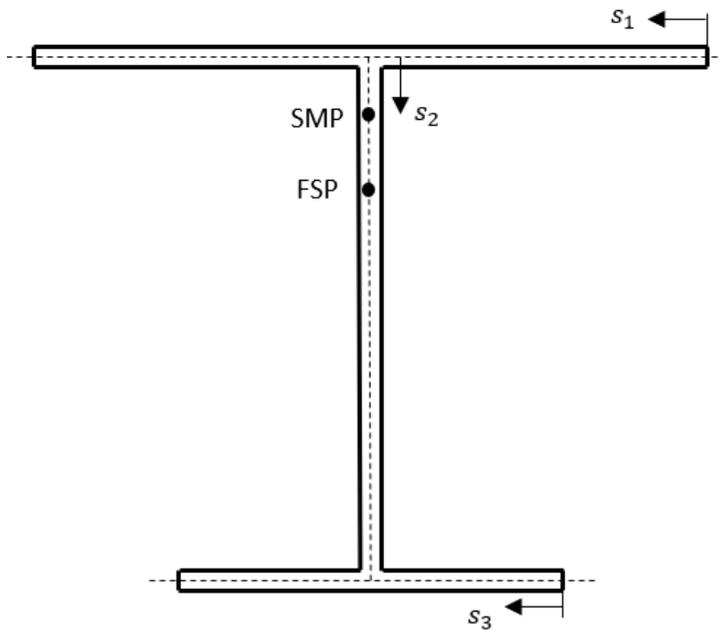


Abbildung 47 Darstellung der Abschnittskoordianten "s"

Tabelle 6 Berechnung des Flächenmomentes erster Ordnung

$S_z = \int_A y \, dA$	$q_i(s_i) = \frac{Q_y}{I_z} \cdot S_{zi}(s_i)$	$F_i = \int q_i \cdot ds_i$	F_i
$S_{z3} = \frac{ts_3}{2}(s_3 - b_3)$	$q_3(s_3) = \frac{Q_y t}{2I_z} \cdot (s_3^2 - s_3 b_3)$	$F_3(s_3) = \frac{Q_y t}{2I_z} \int_0^{b_3} (s_3^2 - s_3 b_3) \, ds$	$F_3 = -0,227Q_y$

Es wird nur der Abschnitt der Koordinate von s_3 betrachtet, da die Hebelarme der Anteile von s_1 und s_2 durch die Wahl des Ursprungs zu Null werden.

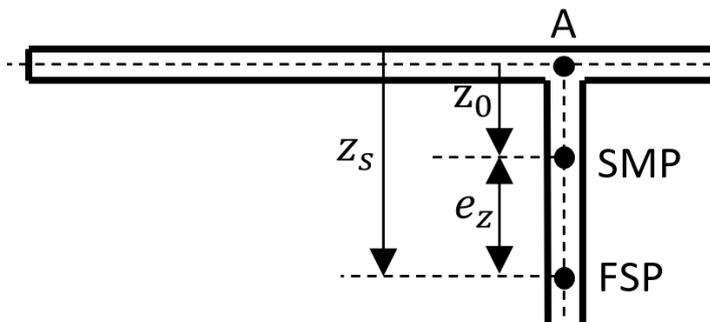


Abbildung 48 Detailansicht der Lage vom Schubmittelpunkt und Flächenschwerpunkt

Mit dem Hebelarm ergibt sich die Lage des SMP.

$$z_0 = \frac{\sum^{(A)} F_i \cdot r_{\perp}}{Q_y} = \frac{-0,227 Q_y \cdot b_2}{Q_y} = 6,129 \text{ mm}$$

$$y_0 = \frac{\sum^{(A)} F_i \cdot r_{\perp}}{Q_z} = 0 \text{ mm}$$

Mit der Lage des SMP kann der Abstand zum FSP bestimmt werden.

$$e_z = (z_s - t/2) - z_0 = 13,24 - 1,5 - 6,129 = 5,618 \text{ mm}, e_y = 0$$

$$I_0 = I_y + I_z + A e_z^2 = 72.195,75 + 8810 + 231 \cdot 5,62^2 = 88.296,98 \text{ mm}^4$$

$$I_T = \frac{\eta}{3} \sum_i b_i t_i^3 = \frac{1,3}{3} (30 \cdot 3^3 + 27 \cdot 3^3 + 20 \cdot 3^3) = 900,9 \text{ mm}^4$$

$$C_T = h^2 \frac{I_{Fo} \cdot I_{Fu}}{I_{Fo} + I_{Fu}} = 30^2 \frac{\frac{30^3 \cdot 3}{12} \cdot \frac{20^3 \cdot 3}{12}}{\frac{30^3 \cdot 3}{12} + \frac{20^3 \cdot 3}{12}} = 1.388.571,43 \text{ mm}^6$$

$$0 = \left(F - \frac{\pi^2 E I_y}{l^2} \right) \cdot \left[\left(-\frac{\pi^2 E C_T}{l^2} - G I_T + \frac{F I_0}{A} \right) \left(F - \frac{\pi^2 E I_z}{l^2} \right) - F^2 e_z^2 \right]$$

$$F_{k,w} = \frac{\pi^2 E I_y}{l^2} = \frac{\pi^2 \cdot 70000 \cdot 72195,75}{500^2} = \mathbf{199.512,2 \text{ N}}$$

$$\left[\left(-\frac{\pi^2 E C_T}{l^2} - G I_T + \frac{F I_0}{A} \right) \left(F - \frac{\pi^2 E I_z}{l^2} \right) - F^2 e_z^2 \right] = 0$$

$$\left(-\frac{\pi^2 E C_T}{l^2} F - G I_T F + \frac{F^2 I_0}{A} + \frac{\pi^2 E C_T \pi^2 E I_z}{l^2} + \frac{\pi^2 E I_z G I_T}{l^2} - \frac{F I_0 \pi^2 E I_z}{A l^2} \right) - F^2 e_z^2 = 0$$

mit der pq – Formel

$$F_{k,v\theta 1} = \mathbf{23.401,3 \text{ N}}$$

$$F_{k,v\theta 2} = \mathbf{80.683 \text{ N}}$$

Die kleinste kritische Last ($F_{k,v\vartheta 1} = 23.401,3 \text{ N}$) bei der die Stabstruktur auslenkt und es zum Stabilitätsverlust kommt, ist die Kopplung aus Verdrillung und Biegung um die z-Achse.

Verformungsberechnung nach Theorie II. Ordnung mit Imperfektion.

$$e_0 = \frac{l}{1000}, \quad \vartheta_0 = e_0 \frac{\pi^2 EI_z}{F_k l^2 + z_m \pi^2 EI_z} = 0,01477 \text{ [rad]}, \quad v_0 = \frac{\vartheta_0 F_k l^2}{\pi^2 EI_z} = 0,01077 \text{ mm}$$

$$v = \frac{v_0}{1 - F/F_k}, \quad \vartheta = \frac{\alpha}{1 - \alpha + \alpha \frac{\vartheta_0^2}{2}} \left(\vartheta_0 + \frac{\vartheta_0^3}{6} \right) \text{ und } \alpha = \frac{F}{F_k}$$

$$v_{max} = \frac{v_0}{1 - F/F_k} + z_m \cdot \sin(\vartheta)$$

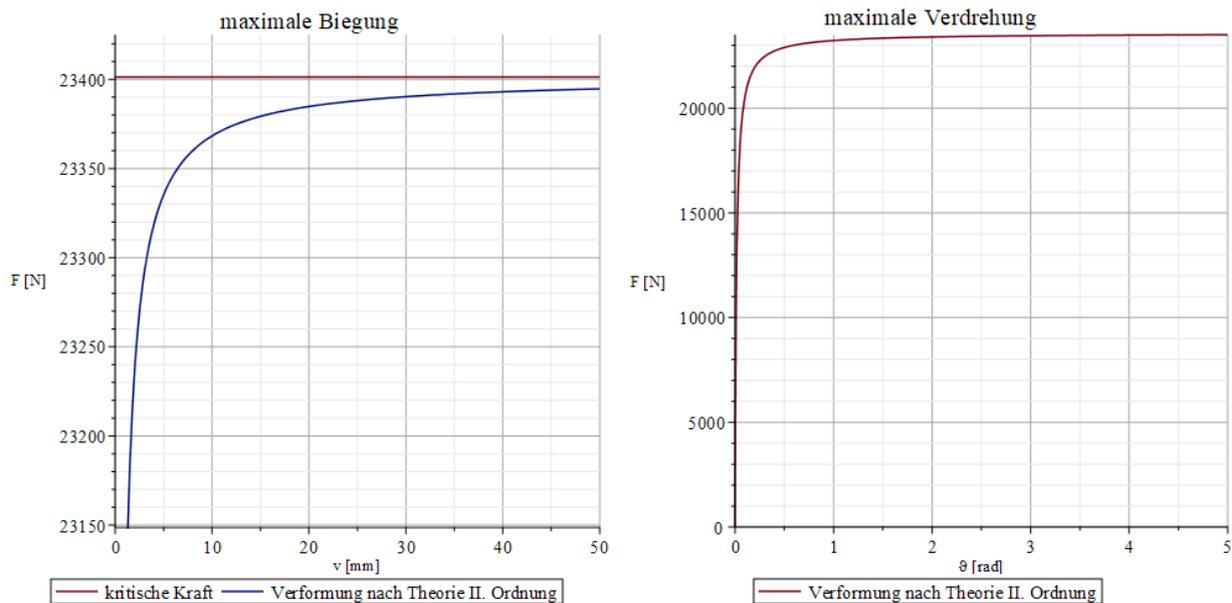


Abbildung 49 maximale Verschiebung infolge Biegedrillknicken mit Theorie II. Ordnung

$$v_{Domke} = \frac{l}{\pi} \sqrt{8 \frac{F_{ki}}{F} \left(1 - \frac{F_{ki}}{F}\right)}, \quad 0 = \vartheta \left(\alpha - \alpha \frac{\vartheta^2}{6} - 1 - \alpha \frac{\vartheta_0^2}{2} - \alpha \frac{\vartheta \vartheta_0}{2} \right) + \vartheta_0 \left(\alpha - \alpha \frac{\vartheta_0^2}{6} \right)$$

$$v_{max} = v_{Domke} + z_m \cdot \sin(\vartheta) \text{ mit } z_m = b_2 - z_0 = 27 - 6,13 = 20,87 \text{ mm}$$

$$v_{max} = \frac{l}{\pi} \sqrt{8 \frac{F_{ki}}{F} \left(1 - \frac{F_{ki}}{F}\right)} + 20,87 \cdot \sin(\vartheta(\vartheta_0 = 0,1))$$

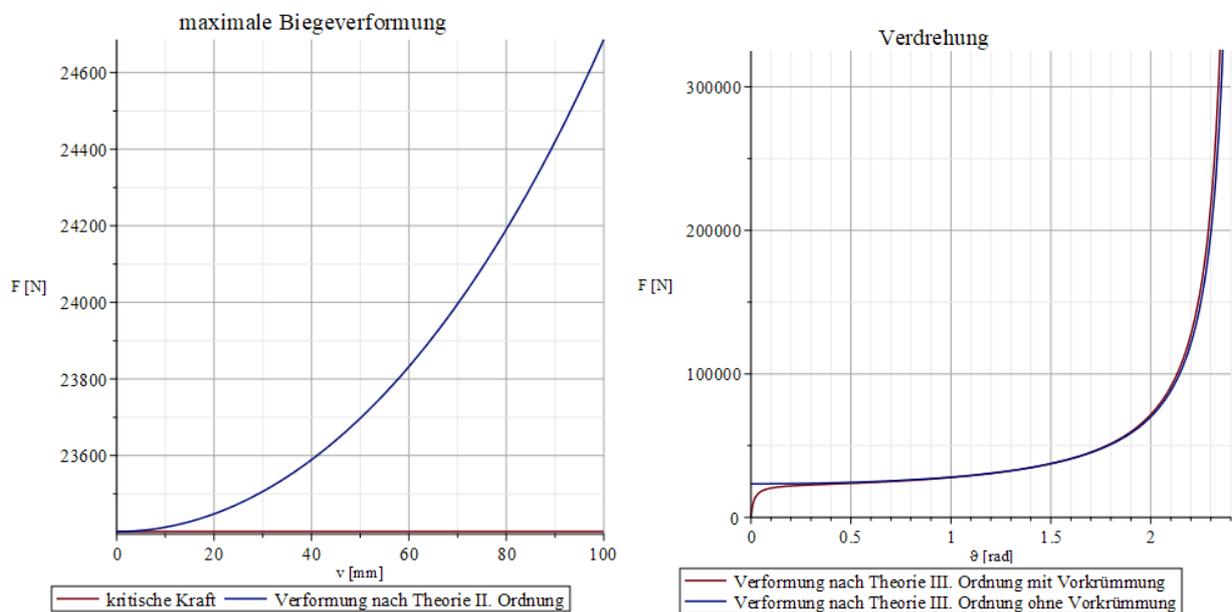


Abbildung 50 maximale Verformung des I-Profiles infolge Biegedrillknicken nach Theorie III. Ordnung

Um eine Verformung beim Biegedrillknicken mit der Theorie III. Ordnung zu erhalten, ist die Analyse mit einem FE-Programm erforderlich und gängig.

5 Umsetzung mit Maple

In der Abbildung 51 ist die Startoberfläche des Maple-Tools dargestellt.

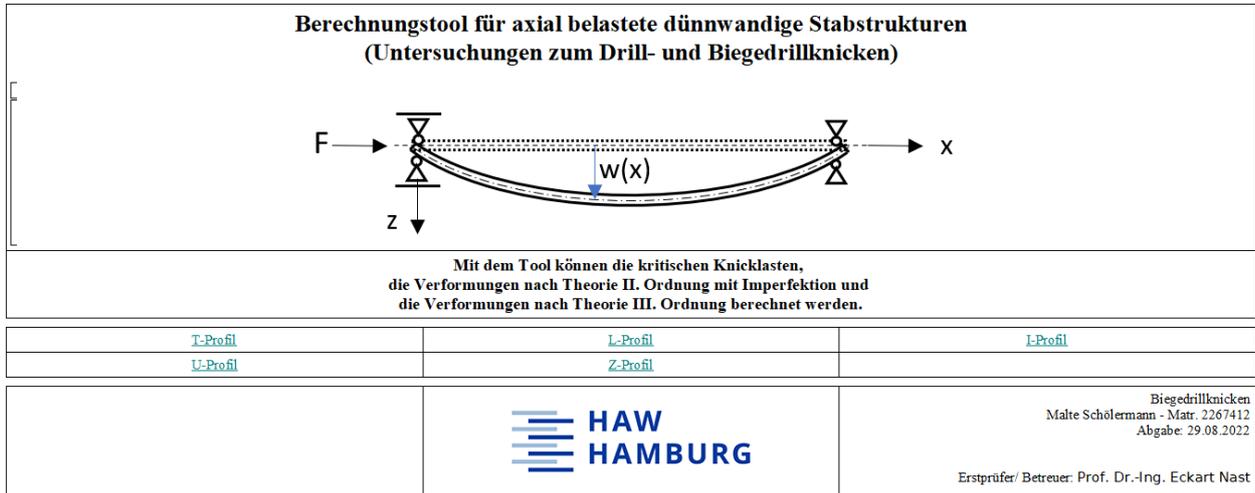


Abbildung 51 Startseite des Maple- Tools

Mit einem „Klick“ auf das jeweilige Profil öffnet sich ein neues Worksheet. Im Laufe der Beschreibung wird das I-Profil als Beispiel dienen. Die Bedienung, Darstellung und Ausgabe sind mit den anderen Profilen identisch.

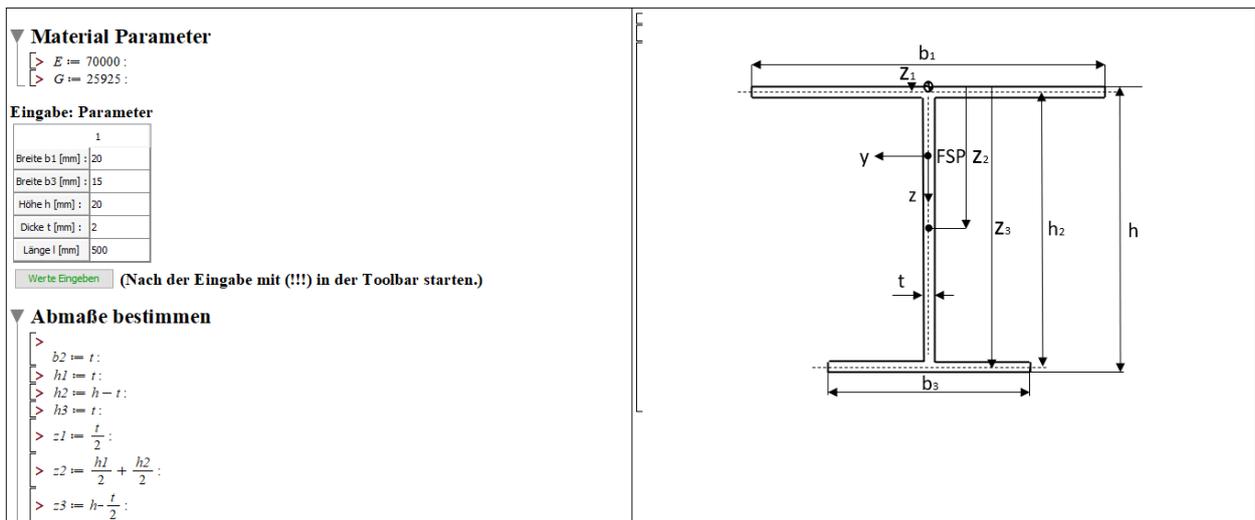


Abbildung 52 Startansicht des I-Profiles

Auf der rechten Seite ist das Profil mit den verschiedenen Abmessungen dargestellt. Darüber ist der zurück Button. Mit einem „Klick“ darauf, gelangt man wieder zur Startseite und zur Profilauswahl. Auf der linken Seite sind oben die Material-Parameter, in der Mitte

eine Tabelle zur Eingabe der Abmessungen und unten eine Berechnung für die restlichen Abmessungen zu sehen. Die Werte in der Tabelle können je nach Profilgrößen verändert werden. Die Werte müssen mit dem „Werte eingeben“ Button bestätigt werden. Im Anschluss wird die Berechnung mit dem „Klick“ auf den „(!!)“ - Button gestartet.

Im ersten Abschnitt wird der FSP bestimmt. Die Lage und Wahl des Koordinatensystems sind rechts abgebildet.

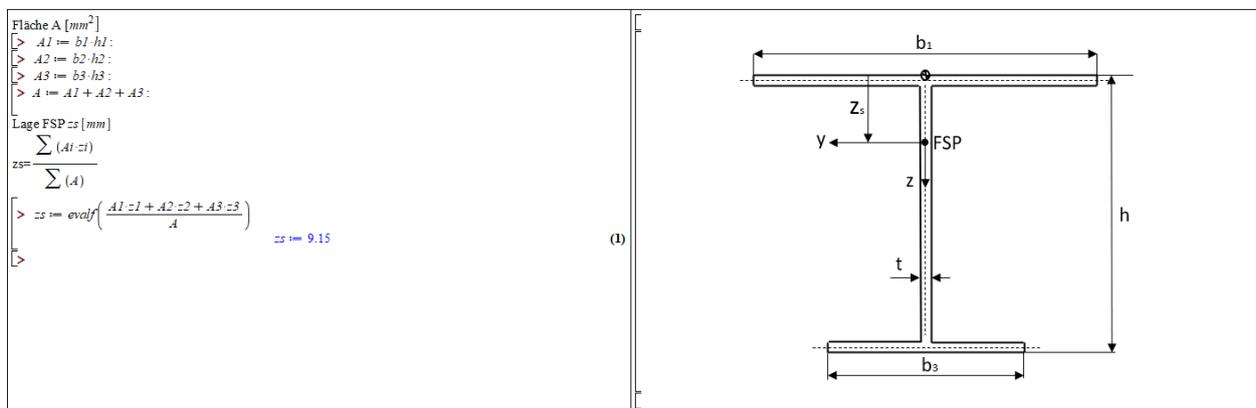


Abbildung 53 Berechnung des Flächenschwerpunktes

Im zweiten Abschnitt wird die Berechnung des SMP dargestellt. Dazu werden die Kräfte der jeweiligen Abschnitte mittels der Krafftflüsse bestimmt und das Momentengleichgewicht um den Punkt A aufgestellt. Dabei ist z_0 der Abstand vom Punkt A zum SMP und e_z der Abstand vom FSP zum SMP.

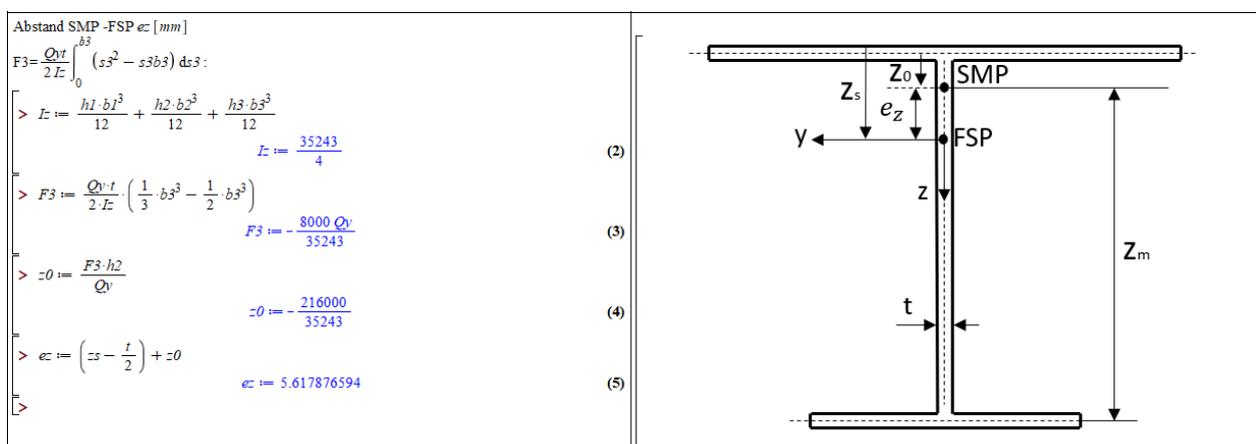


Abbildung 54 Berechnung vom Schubmittelpunkt

Im dritten Abschnitt werden auf der linken Seite die Trägheitsmomente und auf der rechten Seite die kritischen Knickwerte berechnet. Im rechten Feld wird oben die Gleichung zur Bestimmung der kritischen Lasten dargestellt. Darunter werden dann die einzelnen Lasten bestimmt. Als erstes wird die kritische Biegeknicklast um die starke Achse bestimmt. Diese ist im Fall $b_1 \neq b_3$ vom Biegedrillknicken entkoppelt. Beim Drillknicken wird geprüft, ob die beiden Flansche gleich lang sind und somit ein Drillknicken auftreten kann. Wenn $b_1 = b_3$ ist, muss neben dem Drillknicken auch das Biegeknicken um die schwache Achse bestimmt werden. Dann ist $e_z = 0$ und alle Verformungen sind voneinander entkoppelt.

Bei $e_z \neq 0$, werden die beiden kritischen Biegedrillknicklasten mit der p-q Formel berechnet. Anschließend wird die kleinste kritische Knicklast bestimmt.

<p>Flächenträgheitsmomente I_y und I_z</p> <p>> $I_y := \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} + \frac{b_2 \cdot h_2^3}{12} + \frac{b_3 \cdot h_3^3}{12} + z_1^2 \cdot A_1 + z_2^2 \cdot A_2 + z_3^2 \cdot A_3$</p> <p style="text-align: right;">$I_y := \frac{46396}{3}$</p> <p>> $I_z := \frac{h_1 \cdot b_1^3}{12} + \frac{h_2 \cdot b_2^3}{12} + \frac{h_3 \cdot b_3^3}{12}$</p> <p style="text-align: right;">$I_z := \frac{11447}{6}$</p> <p>polare Flächenträgheitsmoment 2. Grades I_0</p> <p>> $I_0 := I_y + I_z + A \cdot e_z^2$</p> <p style="text-align: right;">$I_0 := 25471.39655$</p> <p>Torsionsflächenmoment IT</p> <p>> $IT := \frac{(b_1 + h_2 + b_3) \cdot t^3}{3}$</p> <p style="text-align: right;">$IT := \frac{424}{3}$</p> <p>> $IFo := \frac{b_1^3 \cdot t}{12}$</p> <p>> $IFu := \frac{b_3^3 \cdot t}{12}$</p> <p>Wölbwiderstand CT</p> <p>> $CT := \text{evalf}\left(\frac{I_y^2 \cdot IFo \cdot IFu}{IFo + IFu}\right)$</p> <p style="text-align: right;">$CT := 158241.7582$</p>	<p>#0 = $\left(F - \frac{\pi^2 E I_y}{l^2}\right) \cdot \left(\frac{F I_0}{A} - G I_T - \frac{\pi^2 E C T}{l^2}\right) \left(F - \frac{\pi^2 E I_z}{l^2}\right) - F^2 e_z^2$</p> <p>(6) > $F_{ky} := \text{evalf}\left(\frac{\pi^2 E I_y}{l^2}\right)$</p> <p style="text-align: right;">$F_{ky} := 42738.28215$ (11)</p> <p>(7) > if $b_1 = b_3$ then</p> <p>$F_{kz} := \text{evalf}\left(\frac{\pi^2 E I_z}{l^2}\right)$;</p> <p>(8) $F_{kb} := \text{evalf}\left(\frac{A}{I_0} \cdot \left(\frac{\pi^2 E C T}{l^2} + G I_T\right)\right)$;</p> <p>else</p> <p>(9) $p := \frac{-I_0 \pi^2 E I_z - G I_T}{A l^2 - e_z^2}$;</p> <p>$q := \frac{G I_T \pi^2 E I_z}{I_0^2 - e_z^2}$;</p> <p>(10) $F_{kb1} := \text{evalf}\left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)$;</p> <p>$F_{kb2} := \text{evalf}\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)$;</p> <p>end if;</p> <p style="text-align: right;">$p := -30085.66783$ $q := 1.178659756 \cdot 10^8$ $F_{kb1} := 25455.36852$ $F_{kb2} := 4630.29932$ (12)</p> <p>> #Der kleinste kritische Wert F_k ist:</p> <p style="text-align: right;">4630.29932 (13)</p>
--	--

Abbildung 55 Berechnung der kritischen Lasten

Im vierten Abschnitt wird anhand der Theorie II. Ordnung mit Imperfektion berechnet und graphisch dargestellt. Auf der linken Seite sind die Gleichungen, die Vorverformungen und unten die Verformungsgleichungen mit Werten dargestellt.

Theorie 2. Ordnung

$$\rho > z_m := h_2 - z_0 : \# \text{Abstand SMP zum Rand}$$

$$\rho > e_0 := \frac{l}{1000} :$$

$$\rho > \vartheta_0 := \frac{e_0 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_z}{F_k \cdot l^2 + \pi^2 \cdot z_m^2 \cdot E \cdot I_z}$$

$$\vartheta_0 := 0.01466706715 \quad (13)$$

$$\rho > v_0 := \frac{\vartheta_0 \cdot F_k \cdot l^2}{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}$$

$$v_0 := 0.01409654142 \quad (14)$$

$$\rho > \alpha := \frac{F}{F_k} :$$

$$\rho > \sigma_{zul} := 150 :$$

$$\rho > \tau_{zul} := 0.7 \cdot \sigma_{zul} :$$

$\rho >$

$$\# \text{Anteil Biegeknicke: } v = \frac{v_0}{1 - F/F_k}$$

$$\# \text{Anteil Drillknicke: } \vartheta_2 = \frac{\alpha}{1 - \alpha + \alpha \cdot \frac{\vartheta_0}{2}} \cdot \left(\vartheta_0 + \frac{\vartheta_0^3}{6} \right) :$$

$$BKT_2 := 23401.29798 - \frac{329.8773663}{x}$$

$$DKT_2 := \frac{140407.7879x}{5.955998799x + 0.08800555812}$$

$$\sigma_x := \frac{F}{A} + \frac{F \cdot v_0}{I_z \cdot (1 - F/F_k)} \cdot \frac{b_{\max}}{2} :$$

$$\tau_t := \frac{\pi \cdot G \cdot t}{l} \cdot \frac{\alpha}{1 - \alpha + \alpha \cdot \frac{\vartheta_0}{2}} \cdot \left(\vartheta_0 + \frac{\vartheta_0^3}{6} \right) :$$

$\rho >$

$$b_{\max} := 30$$

$$\sigma_x := \frac{F}{231} + \frac{0.00002399887880 F}{1 - 0.00004273267239 F}$$

$$\tau_t := \frac{0.0003062942138 F}{1 - 0.00004241929090 F}$$

Abbildung 56 Bestimmung der Verformungsgleichung nach Theorie II. Ordnung

Auf der rechten Seite wird oben die bestimmende Verformung angezeigt und darunter werden die Biege- und Drillverformung abgebildet.

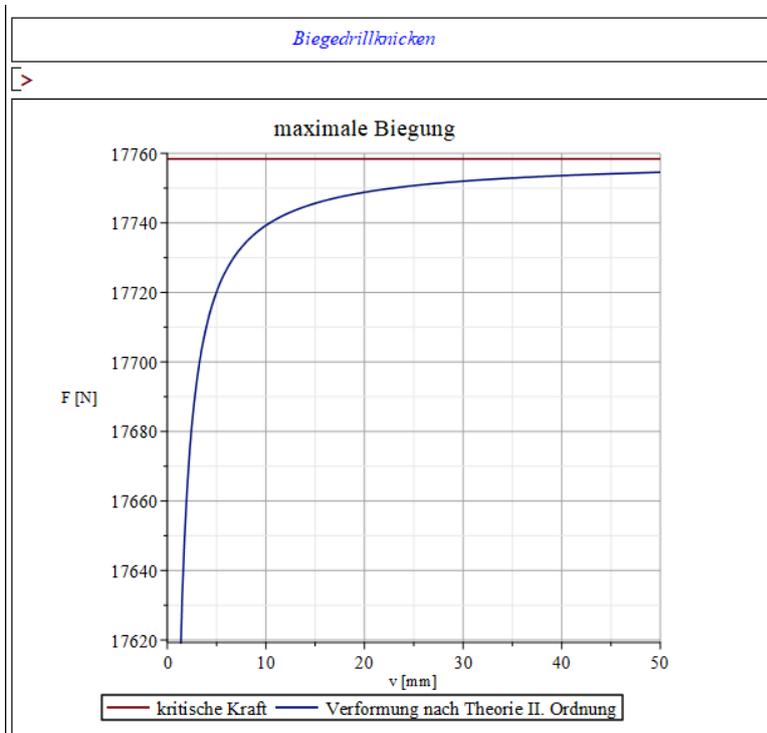


Abbildung 57 Anzeige der Verformungsart und der Biegeanteil

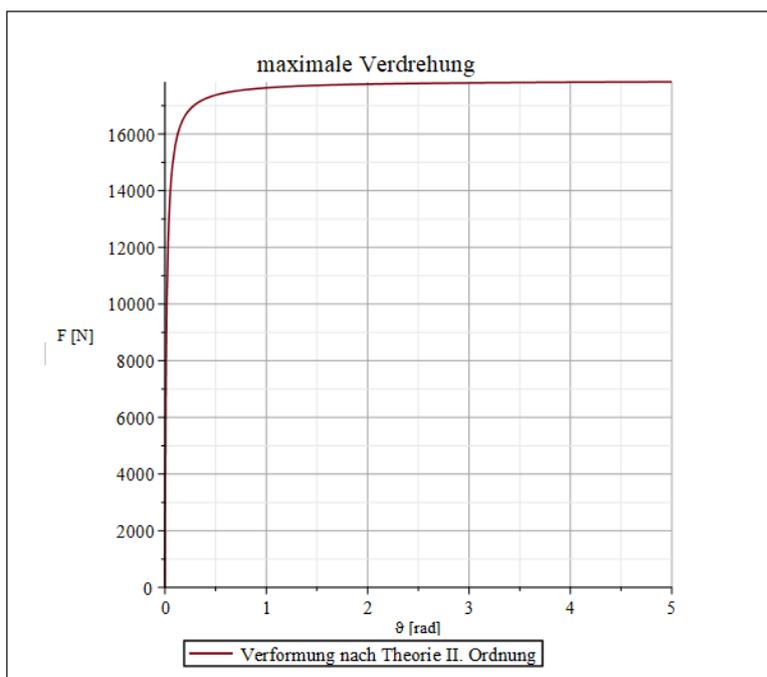


Abbildung 58 Darstellung des Torsionanteils

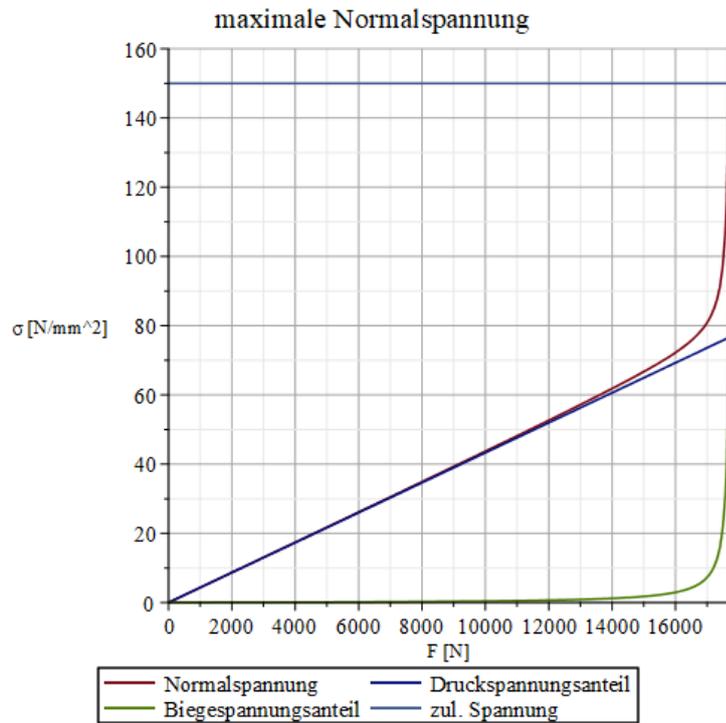


Abbildung 59 Darstellung der Normalspannungen in der Stabmitte

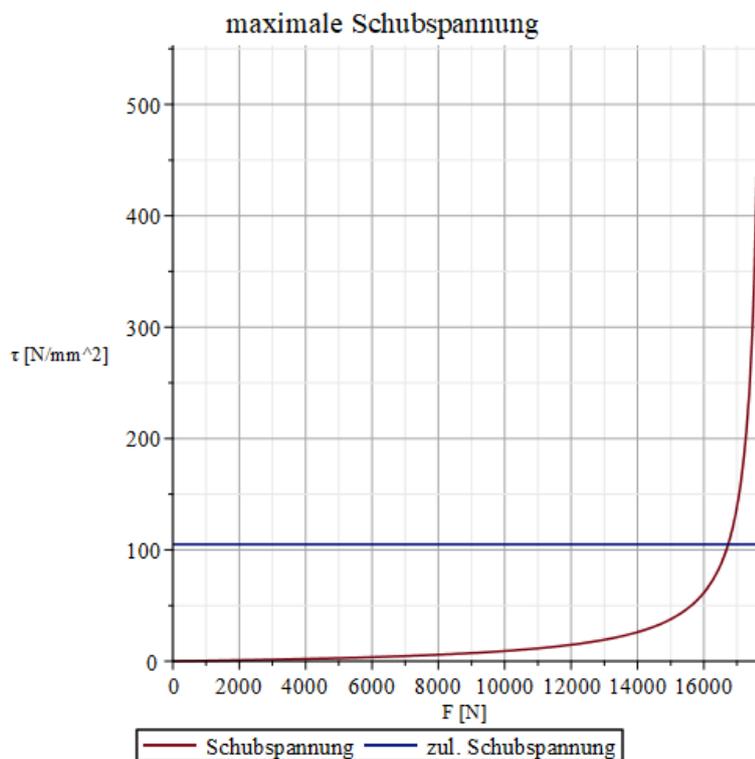


Abbildung 60 Darstellung der Schubspannungen in der Stabmitte

Im fünften Abschnitt wird die stabartige Struktur mittels Theorie III. Ordnung berechnet und graphisch dargestellt.

Theorie 3. Ordnung

$$\begin{aligned}
 &> \text{\#Anteil Biegeknicke: } v = \frac{l}{\pi} \sqrt{8 \frac{F_k}{F} \left(1 - \frac{F_k}{F}\right)} \\
 &> \text{\#Anteil Drillknicke: } \theta = \vartheta_3 \cdot \left(\alpha - \frac{\alpha \cdot \vartheta_3^2}{6} - 1 - \alpha \cdot \frac{\vartheta_0^2}{2} - \alpha \cdot \frac{\vartheta_3 \cdot \vartheta_0}{2} \right) + \vartheta_0 \cdot \left(\alpha - \alpha \cdot \frac{\vartheta_0^2}{6} \right) : \\
 &>
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 BK &:= - \frac{1.971924880 \cdot 10^6 \left(-1000 + \sqrt{-2x^2\pi^2 + 1000000} \right)}{x^2} \\
 DK1 &:= - \frac{116772.7109x}{x^3 + 0.05266797708x^2 - 5.999075361x - 0.1053305432} \\
 DK2 &:= \frac{1}{0.00005138186786 - 8.563644644 \cdot 10^{-6}x^2}
 \end{aligned}$$

Abbildung 61 Darstellung der Gleichungen und der eingesetzten Verformungsgleichungen

Biegedrillnicken

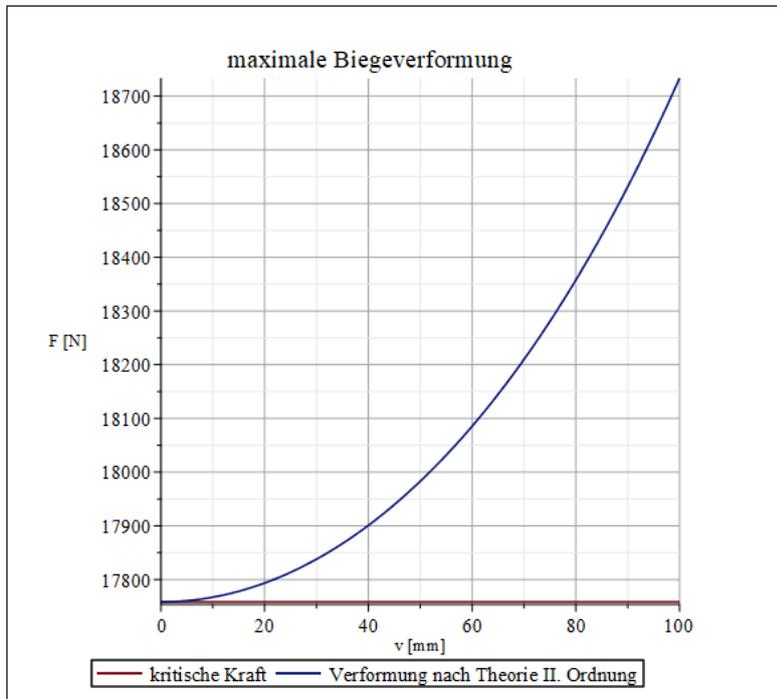


Abbildung 62 Darstellung der bestimmenden Verformung und des Biegeanteils

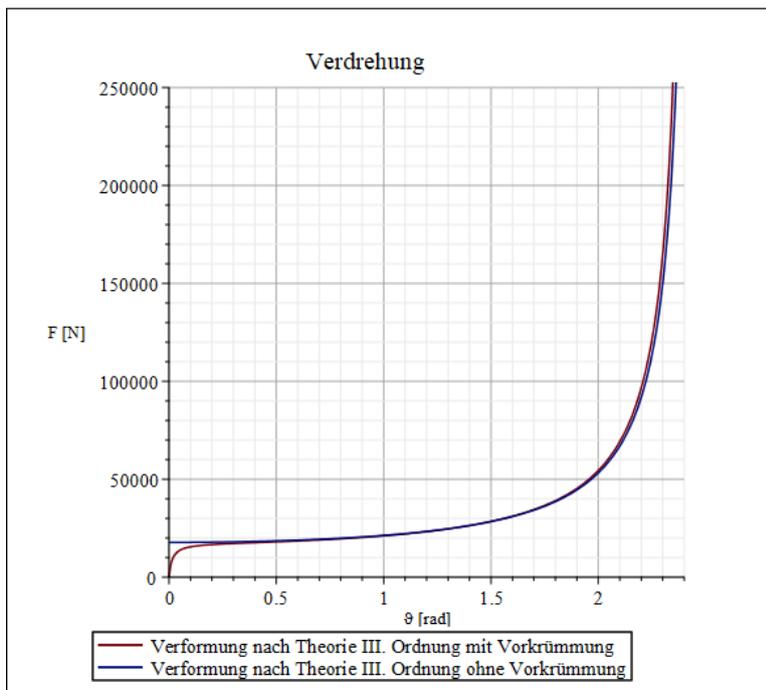


Abbildung 63 Darstellung des Torsionanteils mit und ohne Imperfektion nach Theorie III. Ordnung

6 Experimentelle Untersuchung

6.1 Versuchsbeschreibung

Mit dem Versuch wird die kritische Knickkraft der Struktur ermittelt. Die zu untersuchende Struktur wird unter reiner axialer Druckkraft beansprucht. In der folgenden Abbildung 64 ist die Beanspruchung und Lagerung schematisch dargestellt. In der Abbildung 65 ist der Versuchsstand im aufgebauten Zustand dargestellt.

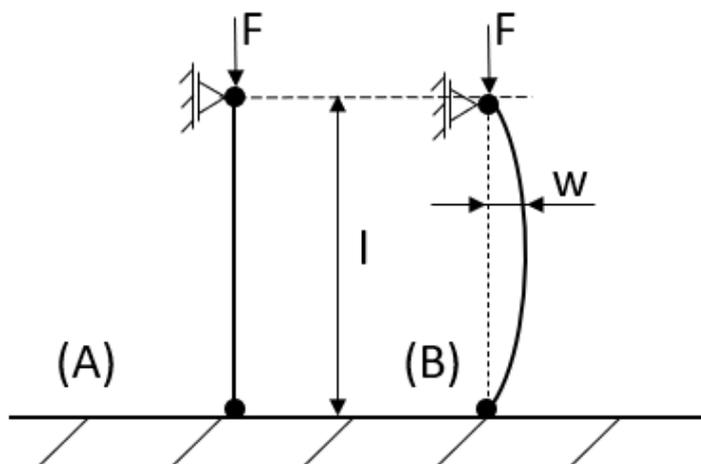


Abbildung 64 Schematische Darstellung des Knickversuches, Zustand (A) vor der Auslenkung und Zustand (B) nach dem Ausknicken



Abbildung 65 Darstellung vom Knickversuch

Die stabartige Struktur wird oben und unten in die jeweilige Halterung eingesteckt. Die Messuhr wird in der Stabmitte angebracht. Dabei wird die Messuhr im 90° Winkel zur Struktur ausgerichtet. Es ist darauf zu achten, dass die Federkraft des Messstiftes nicht zu hoch vorgespannt wird (im unbelasteten Zustand schon -4 mm).



Abbildung 66 Nahaufnahme der Messuhr

Anschließend wird die Kraft bis zum Ausknicken der Struktur gesteigert. Das Knicken wird mithilfe der Messuhren (Ausschlag) festgestellt. Nach dem Ausknicken wird die jeweilige Kraft von der Kraftmessdose abgelesen. Wenn die Kraft und Verformung langsam steigen, werden je nach Profil in regelmäßigen Abständen die Werte notiert.

6.2 Aufbau

In der folgenden Abbildung 67 ist noch einmal der Versuchsaufbau in groß abgebildet.

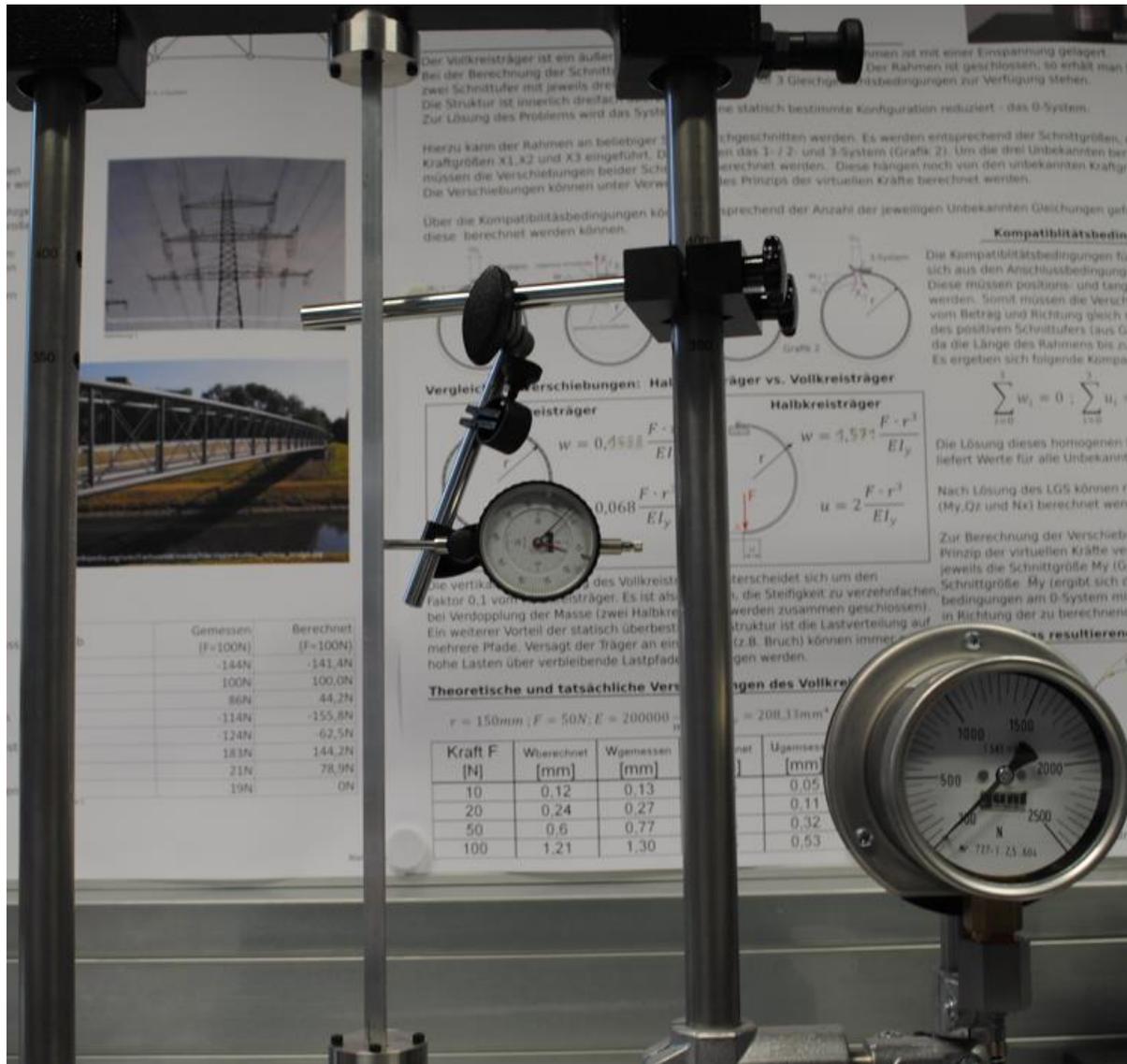


Abbildung 67 Versuchsaufbau

Die obere Brücke wird bei 500 mm mit beiden Stiften fixiert. Die Aufnahmen der Profile sind mit einer geringen Toleranz gefertigt, sodass eine möglichst optimale flächige Krafteinleitung erreicht wird.

Oberhalb der Brücke ist eine Drehvorrichtung, um die Kraft langsam von Hand zu steigern. Die Presse drückt auf einen Bolzen, welcher durch die Brücke und Passung eine möglichst axiale Kraft auf das Profil aufbringt.



Abbildung 68 Drehvorrichtung zu Kraftaufbringung, Brücke und obere Aufnahme

In der Abbildung 69 ist die untere Aufnahme zu sehen. Diese wird mit einer Madenschraube in der Kraftmessdose fixiert. Unter der unteren Aufnahme befindet sich eine Kraftmessdose, welche hydraulisch mit der Anzeige verbunden ist. Für die Messung wird eine Messuhr mit einer Anzeigegenauigkeit von 0,01 mm verwendet.

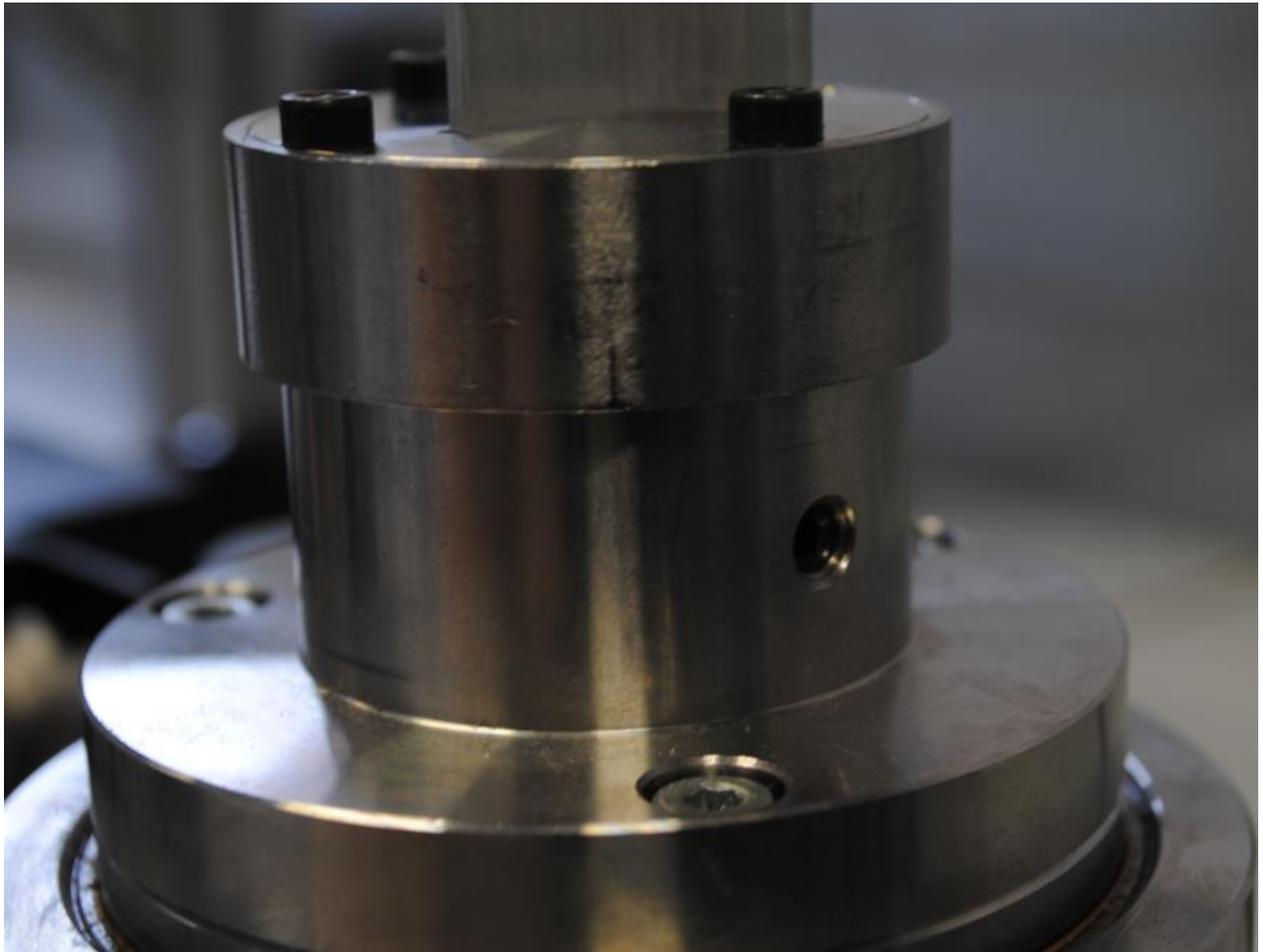


Abbildung 69 untere Aufnahme und Kraftmessdose

Im Folgenden ist die Aufnahme mit den jeweiligen Profileinlegescheiben dargestellt. Die Scheiben sind mit geringem Spiel gefertigt und werden mit den Schrauben nur leicht fixiert.



Abbildung 70 Aufnahme mit Einlegescheiben

Die Zeichnungen der einzelnen Komponenten sind im Anhang C.

6.3 Datenerhebung

6.3.1 Versuch L-Profil

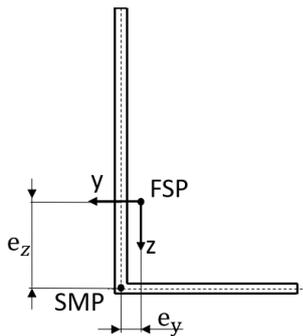


Abbildung 71 L-Profil Querschnitt

Der Versuch für das L-Profil wurde nach der ersten Messreihe verändert. Die Messuhr wurde von der anderen Seite angebracht. Das sorgt dafür, dass die Verformung von der Federkraft der Messuhr gehemmt und nicht verstärkt wird. Bei allen drei Versuchen ist zu erkennen, dass das Profil sich leicht verdreht und biegt. Durch die Position der Messuhr wird der maximale Wert der Verformung gemessen.

Tabelle 7 Datenerhebung L-Profil

	1.Versuch	2.Versuch	3.Versuch
F [N]	v [mm]	v [mm]	v [mm]
200	-0,02	/	/
300	-0,04	-0,01	-0,01
400	-0,05	-0,02	-0,03
500	-0,07	-0,04	-0,04
600	-0,09	-0,06	-0,06
700	-0,12	-0,08	-0,08
800	-0,15	-0,11	-0,09
900	-0,18	-0,14	-0,11
1000	-0,23	-0,18	-0,14
1100	-0,27	-0,22	-0,16
1200	-0,34	-0,25	-0,2
1300	-0,39	-0,29	-0,22
1400	-0,45	-0,34	-0,29
1500	-0,53	-0,41	-0,33
1600	-0,61	-0,48	-0,42
1700	-0,77	-0,59	-0,49
1800	-0,86	-0,63	-0,55
1900	-1,11	-0,91	-0,79
2000	/	-1,15	-0,95
2100	/	/	-1,08
2200	/	/	-1,44
2300	/	/	-2,3
0	+0,06	+0,08	+0,05

6.3.2 Versuch T- Profil

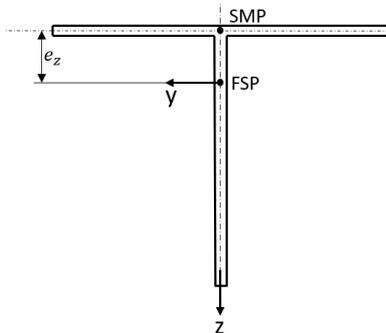


Abbildung 72 T-Profil Querschnitt

Beim T-Profil gab es bei allen Versuchen nur minimale Änderungen bei der Verformung. Die Kraftmessdose hat eine maximale Belastung von 2500 N ermöglicht. Beim Erreichen der maximal zulässigen Kraft war die Verformung zu gering, um eine Aussage über die kritische Knickkraft zu treffen.

Tabelle 8 Datenerhebung T-Profil

	1.Versuch	2.Versuch	3.Versuch
F [N]	v [mm]	v [mm]	v [mm]
250	+0,04	-0,06	-0,09
500	+0,07	-0,01	-0,16
750	+0,07	-0,01	-0,17
1000	-0,01	-0,01	-0,17
1250	-0,01	-0,01	-0,17
1500	-0,1	-0,01	-0,17
1750	-0,16	-0,01	-0,17
2000	-0,2	-0,01	-0,19
2500	-0,25	-0,01	-0,19
0	+0,03	-0,05	-0,07

6.4 Auswertung

Bei den drei Versuchen des L-Profiles wurden die Werte ab dem ersten Ausschlag und anschließend in Abständen von 100 N erhoben. Die rechnerisch kritische Last des L-Profiles beträgt $F_k = 1569 \text{ N}$. Die Verläufe gleichen dem Biegedrillknicken mit Imperfektion. Der asymptotische Verlauf ist bei allen Versuchen so zu erkennen. Jedoch ist dieser nicht zu kritischen Kraft asymptotisch. Eine weitere Erkenntnis lässt sich aus dem Wert der Entlastung ableiten. Trotz der Verformung ist im dritten Versuch der Wert wieder auf den Ursprung zurück gegangen. Das spricht für eine elastische Verformung.

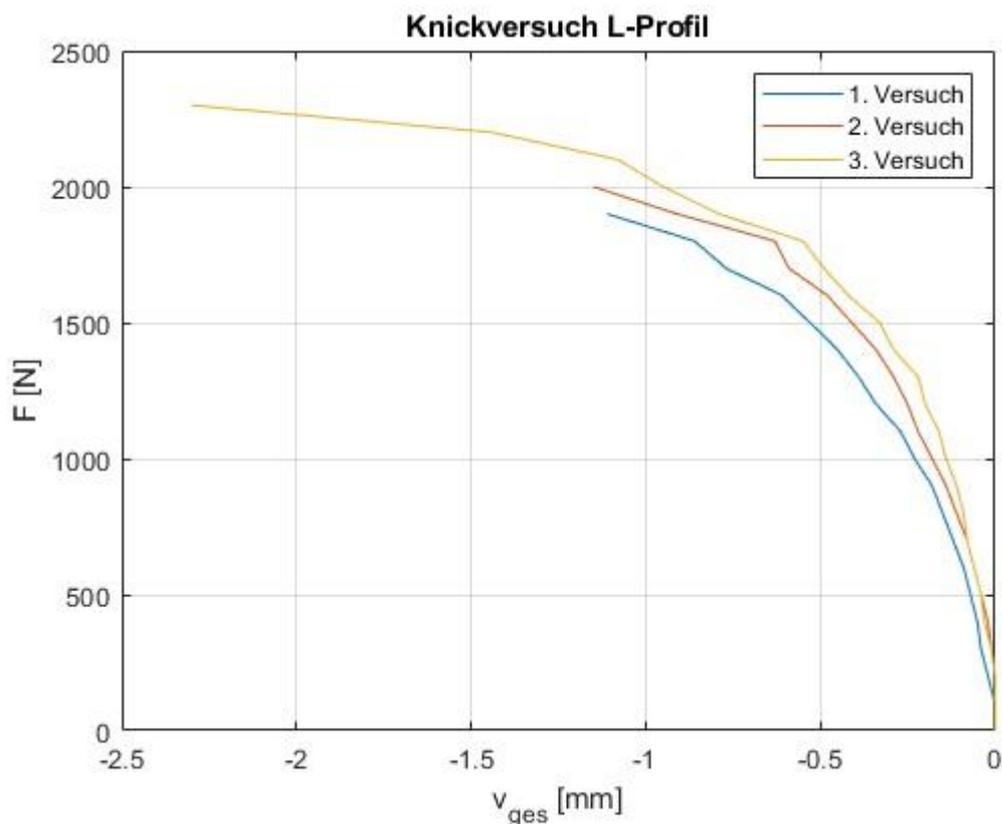


Abbildung 73 Versuch L-Profil

Die geringere Verformung des L-Profiles im Vergleich zu den theoretischen Werten kann mit der Lagerung/ Einspannung zusammenhängen. Die Lagerung im Versuch ist eine Mischung aus einem Loslager und einer festen Einspannung.

Beim T-Profil konnte keine kritische Knicklast bestimmt werden. Bei allen Versuchen hat sich bei geringer Belastung eine schlagartige Verformung eingestellt. Der Grund dafür kann in der Messtechnik, in der Lagerung oder dem Prüfstand liegen oder das Profil hat sich durch das geringe Spiel bewegt und stabilisiert. Die minimale Veränderung der folgenden Messwerte deutet darauf hin. Alternativ würden sich diese wie beim L-Profil weiter erhöhen. Lediglich in der ersten Versuchsreihe oberhalb von 1500 N hat sich eine leichte Verformung angedeutet. Die kritische Knicklast des T-Profiles beträgt rechnerisch $F_k = 4208 \text{ N}$ und wird mit dem Prüfstand nicht erreicht. Mit einer Vorkrümmung des Stabes von $v_0 = 1/1000$ beträgt die zusätzliche theoretische Verformung $\sim 0,7 \text{ mm}$. Damit hat sich gezeigt, dass der Stab sich im stabilen Bereich befindet.

7 Zusammenfassung

In der Ausarbeitung wurde dargestellt, dass eine stabartige Struktur unter verschiedenen Aspekten betrachtet werden kann und auch sollte. Ein besonderes Augenmerk liegt auf der Stabilitätsbetrachtung. Die Möglichkeiten der verschiedenen Theorien sind:

- Theo. II. Ordnung \rightarrow kritische Knicklast
- Theo. II. Ordnung mit Imperfektion \rightarrow geo. nichtlineare Verformungsbeziehung $< F_k$
- Theo. II. Ordnung Ersatzverfahren \rightarrow geo. nichtlineare Verformungsbeziehung $< F_k$
- Theo. II. Ordnung Abminderungsverfahren \rightarrow geo. nichtlineare Verformungsbeziehung $< F_k$
- Theo. III. Ordnung \rightarrow theoretische geo. nichtlineare Verformungsbeziehung $\geq F_k$
- Theo. III. Ordnung mit Imperfektion \rightarrow geo. nichtlineare Verformungsbeziehung

Bei der Festigkeitsbetrachtung wird in erster Linie die maximale Verformung in Stabmitte betrachtet. Mit dieser kann die maximale Dehnung und Spannung bestimmt werden.

In vielen Bereichen ist die Bestimmung des Stabilitätsproblems, mit Bestimmung der kritischen Knicklast, ausreichend. Bei der Betrachtung der Struktur mit Imperfektion wird

ersichtlich, dass es zum Überschreiten der zulässigen Spannung und der Euler-Hyperbel führen kann, bevor es zum Stabilitätsproblem wird (siehe Abbildung 74).

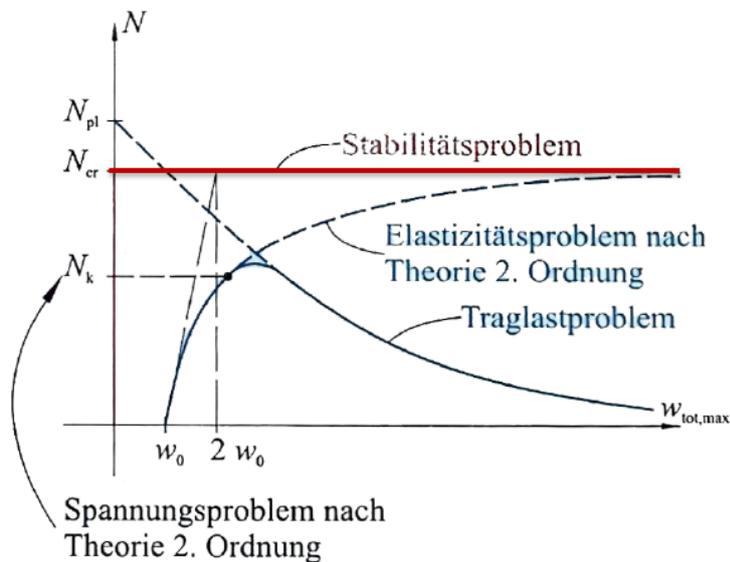


Abbildung 74 Last-Verformungs-Diagramm (Zweidler, 2020)

Mit dem Knickversuch konnte der untere Bereich des Biegedrillknickens mit Imperfektion dargestellt werden. Um eine genauere Untersuchung des L-Profiles durchzuführen, kann die Belastung schrittweise bis zum Eintreten der plastischen Verformungen erhöht werden. Für das T-Profil kann ein längeres Probestück ein Versuchsergebnis erzeugen, da die Erhöhung der Länge eine quadratische Verringerung der kritischen Kraft hervorruft.

Ist eine genauere Betrachtung in Form eines optimalen Gewichtes (kleinstmöglicher Querschnitt) oder einer Betrachtung nach dem Knicken erforderlich, so wird in der Praxis mit FE-Programmen oder mit mathematisch iterativen Berechnungen mit großen Verformungen gerechnet. Um eine erste Abschätzung zu machen, reichen die verwendeten Methoden und Berechnungen des Maple-Tools. Mit diesem Tool können die U-, Z-, T-, Doppel-T- und L-Profile untersucht werden. Es wird die Berechnung Schritt für Schritt mit den jeweiligen Formeln, Gleichungen und Bildern der Koordinaten Systeme dargestellt und die Verformung ausgegeben.

Die Gleichungen in der Ausarbeitung gelten nur im Bereich des elastischen Knickens. Eine mögliche Erweiterung wäre die Betrachtung im elastisch-plastischen Bereich. Mit besonderem Augenmerk auf die Luftfahrt und die „neueren“ Bauweisen mit Verbundträgern, kann die Berechnung auch auf Faserverbundmaterialien erweitert werden. In einigen FE-Programmen wird die Helix-Torsion für große Verformungen mit einbezogen. Eine Erweiterung mit dem inneren Helix-Moment erhöht die Genauigkeit bei großen Verformungen, sorgt jedoch auch für einen größeren Rechenaufwand.

Noch andere Erweiterungen wären die Betrachtung lokaler Instabilitäten (Beulen), Betrachtung/ Einbeziehen der Eigenspannungen, zusätzliche Lasten (Flächenlast oder punktuelle Seitenlast und noch andere Lagerungen/ Einspannungen der Stabwerke.

8 Literaturverzeichnis

Assmann, Bruno und Selke, Peter. *Technische Mechanik 2.* s.l. : Oldenbourg Verlag München. eISBN 978-3-486-71999-4.

Bauingenieurwesen, Fakultät für Architektur und. Bergische Universität Wuppertal. [Online] [Zitat vom: 25. November 2019.] <https://www.stahlbau.uni-wuppertal.de/de/download/lehrunterlagen-stahl-verbundbau/>.

Bürgermeister, Gustav, Steup, Herbert und Kretzschmar, Horst. 1966. *Stabilitätstheorie - mit Erläuterungen zu den Knick- und Beulvorschriften.* s.l. : Akademie - Verlag Berlin, 1966.

Ebel, Rebekka. 2014. *Systemabhängiges Tragverhalten und Tragfähigkeiten stabilitätsgefährdeter Stahlträger unter einachsiger Biegebeanspruchung.* s.l. : Ruhr-Universität Bochum, 2014.

Fischer, U., et al. 2008. *Tabellenbuch Metall.* s.l. : Verlag Europa Lehrmittel, 2008. ISBN 978-3-8085-1724-6.

Flügge, Wilhelm. 1967. *Festigkeitslehre.* s.l. : Springer-Verlag, 1967.

GmbH, AMCO Metall-Service. *Technisches Datenblatt EN AW-6060 (AlMgSi0,5).*

Göttsche, Jens J. und Petersen, Maritta. *Festigkeitslehre- klipp und klar.* E-Book-ISBN 978-3-446-46356-1.

Gross, Dietmar, et al. 2004. *Technische Mechanik 1.* s.l. : Springer Verlag, 2004.

Gross, Dietmar, et al. 2017. *Technische Mechanik 2.* s.l. : Springer Verlag, 2017.

Grote, Karl-Heinrich, Bender, Beate und Göhlich, Dietmar. 2018. *Dubbel-Taschenbuch für den Maschinenbau.* s.l. : Springer Vieweg, 2018. ISBN 978-3-662-54804-2.

Kala, Z., Vales, J. und Martinásek, J. 2017. Inelastic finite element analysis of lateral buckling for beam structures. *Procedia Engineering* . 172 (481 - 488), 2017.

Kala, Zdenek. 2013. Elastic Lateral-Torsional Buckling of Simply Supported Hot-Rolled Steel I-Beams with Random Imperfections. *Procedia Engineering*. 57 (504 - 514), 2013.

Krätzig, W. und Basar, Y. *Tragwerke 3, Theorie und Anwendung der Methode der Finiten Elemente*. ISBN: 9783642638824.

Kuhlmann, Ulrike. 2012. *Stahlbau-Kalender 2012: Eurocode 3 Grundnormen, Brücken-Stahlbaunormen- DIN EN 1993-1-1*. s.l. : Wilhelm Ernst & Sohn, 2012. 978-3-433-60203-4.

Linke, Markus. 2018. *Aufgaben zur Festigkeitslehre für den Leichtbau*. s.l. : Springer Vieweg, 2018. ISBN 978-3-662-56148-5.

Linke, Markus und Nast, Eckart. 2015. *Festigkeitslehre für den Leichtbau*. s.l. : Springer Vieweg, 2015. ISBN 978-3-642-53864-3.

Lohse, Günther. 1994. *Einführung in das Knicken und Kippen*. s.l. : Werner-Verlag, 1994. ISBN 3-8041-4089-0.

Lohse, Wolfram, Laumann, Jörg und Wolf, Christian. *Stahlbau 1*. ISBN 978-3-8348-2058-7.

Lumpe, G. und Gensichen, V. *Evaluierung der linearen und nichtlinearen Stabstatik in Theorie und Software*. ISBN 978-3-433-03053-0.

Mahnken, Rolf. 2015. *Lehrbuch der Technischen Mechanik - Elastostatik*. s.l. : Springer Vieweg, 2015. 978-3-662-44797-0.

Mang, Herbert und Hofstetter, Günter. *Festigkeitslehre*. ISBN 978-3-662-57563-5.

Mertinaschk, André. 2002. *Geometrisch nichtlineare Berechnungen von räumlichen Stabwerken mit Imperfektionen*. s.l. : Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig, 2002.

Wittenburg, Jens, et al. 2014. *Das Ingenieurwissen Technische Mechanik*. s.l. : Springer Vieweg, 2014. 978-3-642-41121-2.

Wolf, Christian. *Tragfähigkeit von Stäben aus Baustahl - Nichtlineares Tragverhalten, Stabilität, Nachweisverfahren.* s.l. : Ruhr-Universität Bochum.

Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. und Fox, D.D. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics.* ISBN: 978-1-85617-634-7.

Zweidler, Prof. Dr. Simon. 2020. ETH zürich. [Online] 2020. [Zitat vom: 7. August 2022.]
<https://chatzi.ibk.ethz.ch/education/baustatik/vorlesungen.html>.

Anhang A: Materialdatenblatt



NE-METALLHANDEL
 GUSSPLATTENPRODUKTION
 CNC-BEARBEITUNG

Technisches Datenblatt EN AW-6060 (AlMgSi0,5)

EN AW-6060 Eigenschaften:

Dekorative Eloxalqualität: Sehr gut
 Hartanodisieren: Sehr gut
 Schweißen: Gut
 Witterungsbeständigkeit: Sehr gut
 Seewasserbeständigkeit: Gut

Anwendungsbereiche:

Fenster, Türen, Metallbau, Innenausstattung, Metallgestelle, Textilindustrie, Haushaltartikel, Dekorationen, Schrauben Fernsehantennen, Stricknadeln

Lieferformen:

Stangen, Profile, Rohre

Farbkennzeichnung:

Legierung		Farbe
EN AW-6060	AlMgSi0,5	Farblos

Chemische Zusammensetzung:

Si	Fe	Cu	Mn	Mg	Cr	Bi	Zn	Ti
0,3 – 0,6	0,1 – 0,3	0,1	0,1	0,35 – 0,6	0,05	-	0,15	0,10

Mechanische Eigenschaften:

Profile:

	Wanddicke	Zugfestigkeit R _m MPa	Streckgrenze R _{p0,2} MPa	Bruchdehnung	
				A%	A _{50mm} %
T66	≤ 3	215	150	8	6
T66	3 < t ≤ 25	195	160	8	6

Geschäftsführer: Maximilian Köhner, Jan Hendrik Schmidt
 Sitz der Gesellschaft: 50858 Köln
 Registergericht: Amtsgericht Köln HRB 6459
 USt-IdNr. DE 123471195

AMCO Metall-Service GmbH
 Pfalzburgerstraße 251
 28207 Bremen
Info@amco-metall.de

Seite 1 von 2

Alle Angaben ohne Gewähr – Zusammenstellung/Abschrift

(GmbH)

Anhang B: Abminderungsverfahren

Für die Berechnung eines zentrisch gedrückten Stabes gilt, dass die äußere Kraft F kleiner gleich der Kraft der plastischen Grenze sein muss.

$$\frac{F}{F_{pl}} \leq 1$$

$$F_{pl} = \frac{\chi A \sigma_{Rp0,2}}{\gamma}$$

χ : Abminderungsbeiwert

A : Fläche des Querschnittes

$\sigma_{Rp0,2}$: Grenzspannung zum Plastischen Bereich

$\gamma = 1,1$: Sicherheitsbeiwert

$$\chi = \frac{1}{\theta + \sqrt{\theta^2 - \bar{\lambda}^2}} \leq 1$$

$$\theta = \frac{1}{2} [1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2]$$

α : Imperfektionsbeiwert

(siehe Abbildung 16 und Abbildung 17)

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A \sigma_{Rp0,2}}{F_k}}$$

Beim Drill- und Biegedrillknicken mit geringem Schlankheitsgrad, gabelgelagerten Einfeldträgern und einfach-symmetrischen Querschnitten ergibt sich λ zu

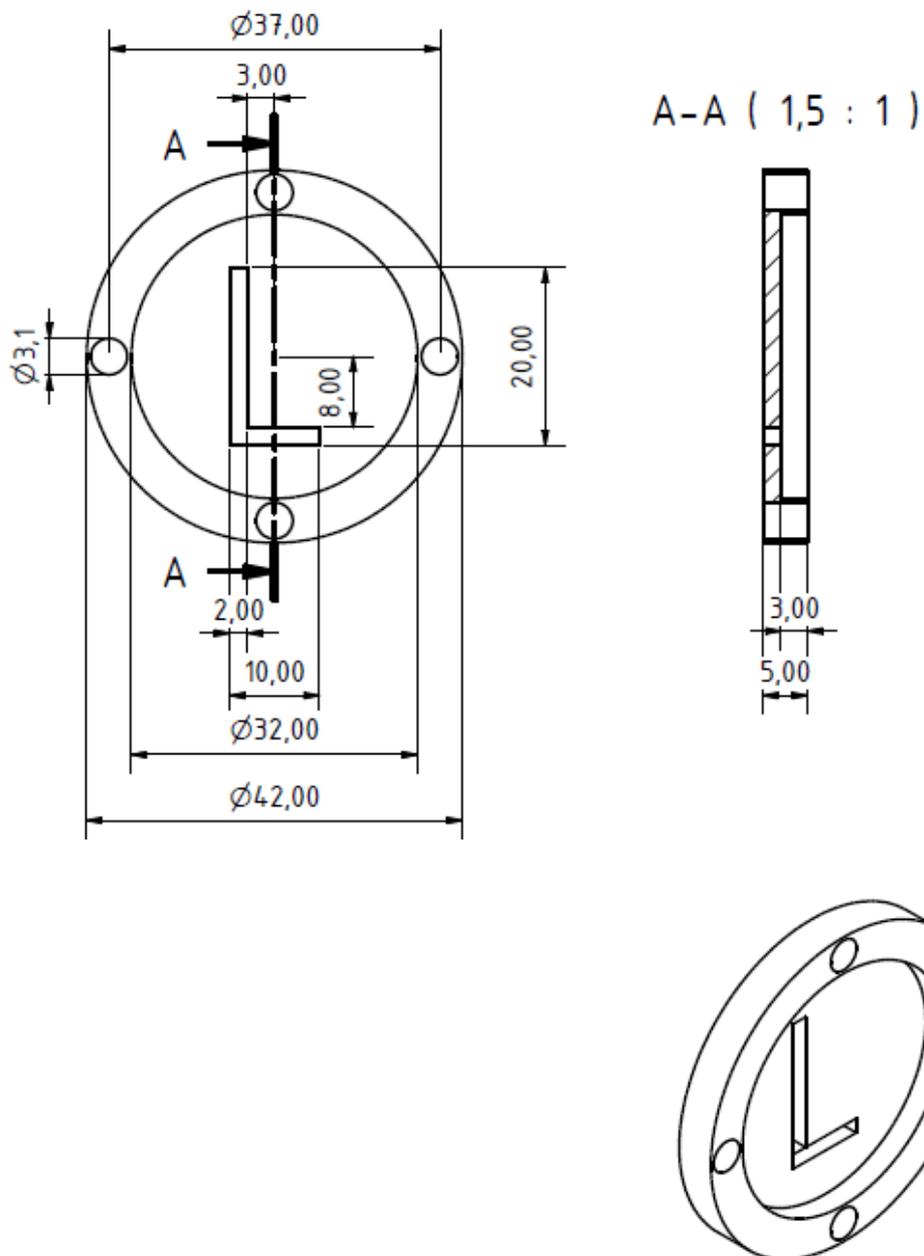
$$\bar{\lambda}_{TF} = \bar{\lambda}_z \sqrt{\frac{c^2 + i_0^2}{2c^2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4c^2 i_p^2}{(c^2 + i_0^2)^2}}\right)}$$

$$\text{mit: } c = \sqrt{\frac{I_\omega}{I_z} + 0,039 \frac{I_t l_T^2}{I_z}}, \quad i_p = \sqrt{i_y^2 + i_z^2}, \quad \bar{\lambda}_z = \sqrt{\frac{l_T}{i_z \bar{\lambda}_1}}, \quad i_0 = \sqrt{e_z^2 + i_p^2}$$

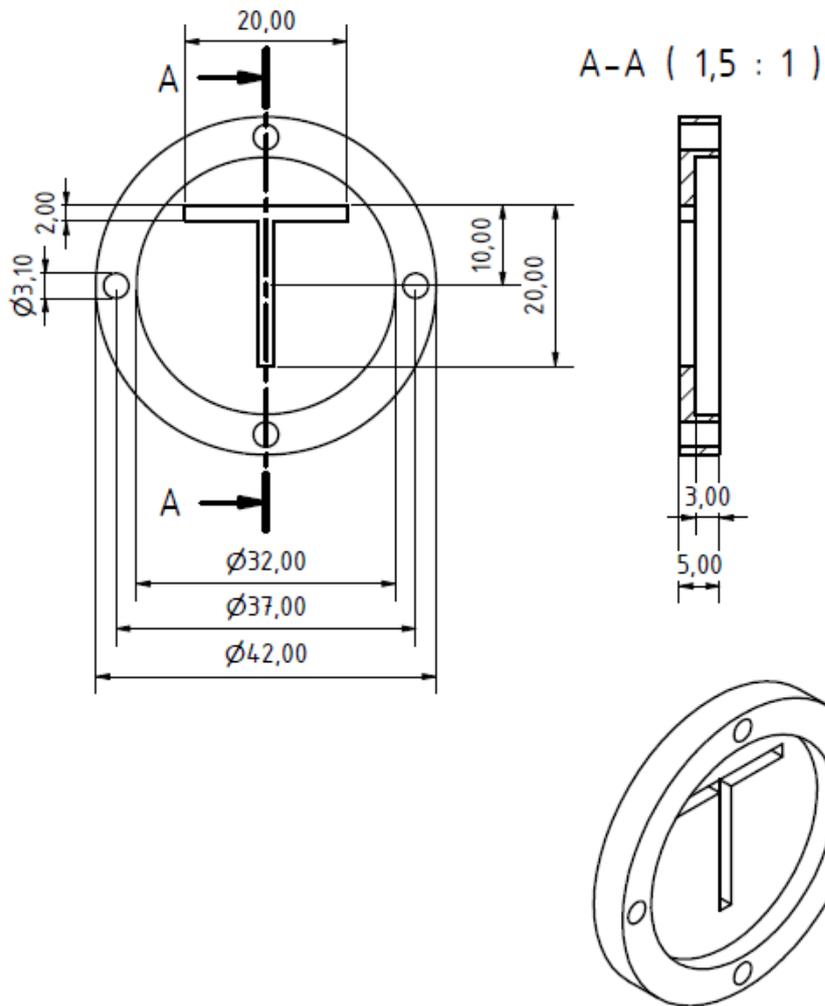
l_T : Knicklänge des Biegedrillknickens (Bürgermeister, et al., 1966) (Lohse, et al.)
(Kuhlmann, 2012)

Anhang C: Zeichnungen

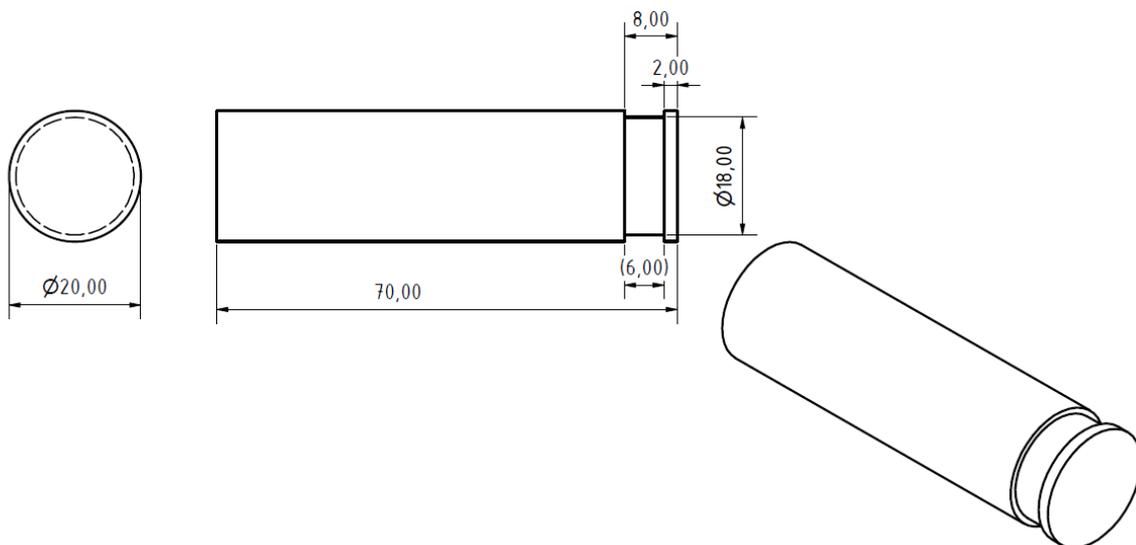
L- Profilaufnahme



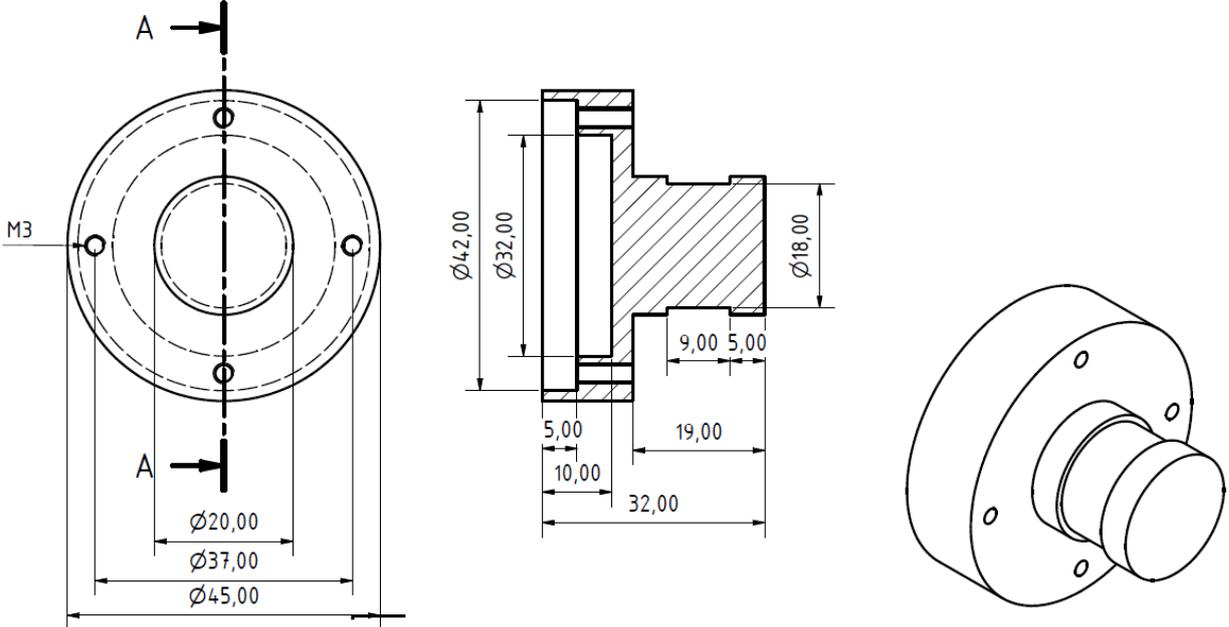
T- Profilaufnahme



Aufnahmedorn



Aufnahme unten (Kraftmessdose)



Aufnahme oben

