

BACHELORARBEIT  
Niklas Klupiec

# Computergrafisches Modell zur physikalisch-basierten Simulation atmosphärischer Streuung in Echtzeit

---

FAKULTÄT DESIGN, MEDIEN UND INFORMATION  
Department Medientechnik

Faculty of Design, Media and Information  
Department of Media Technology

Betreuung durch: Prof. Dr. Eike Langbehn / Prof. Dr.-Ing. Carolin Liedtke  
Eingereicht am: 5. Juli 2024

## **Zusammenfassung**

Die Atmosphäre bestimmt in interaktiven astronomischen Modellen die realistische Darstellung eines Planeten. In dynamischen Umgebungen ist dafür eine effiziente Simulation der atmosphärischen Streuung notwendig. Das Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung eines physikalisch basierten Modells zur Berechnung der Lichtstreuung in einer modularen Atmosphäre. Dafür wird die Modellierung bisheriger Systeme erweitert und durch farbmimetrische Funktionen ergänzt. Zur weiteren Untersuchung wird das Modell in der Unity-Spiele-Engine umgesetzt.

## **Abstract**

In interactive astronomic models the atmosphere determines the realistic representation of a planet. Dynamic environments require an efficient method to simulate atmospheric scattering. The aim of this work is the development of a physically based model for calculating light scattering in a modular atmosphere. For this, the methods of previous systems are extended, taking colorimetry into account. For further investigation, the model is implemented in the Unity game engine.



## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation . . . . .	1
1.2	Aufbau . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Vorherige Arbeiten</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Optische Grundlagen</b>	<b>4</b>
3.1	Wechselwirkung zwischen Licht und Materie . . . . .	4
3.2	Menschliche Wahrnehmung . . . . .	6
3.3	Radiometrische und Photometrische Größen . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Volumetrisches Lichtmodell</b>	<b>9</b>
4.1	Licht . . . . .	9
4.2	Absorptions-, Streu- und Extinktionsquerschnitt . . . . .	9
4.3	Phasenfunktion . . . . .	10
4.4	Licht-Transfer-Gleichung . . . . .	11
4.5	Durchlässigkeit . . . . .	12
4.6	Volumetrische Rendergleichung . . . . .	12
4.7	Validität . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Atmosphärisches Modell</b>	<b>14</b>
5.1	Berechnungsgrenzen . . . . .	14
5.2	Lichtquellen . . . . .	15
5.3	Konzentrationen . . . . .	17
5.4	Rayleigh-Streuung . . . . .	17
5.5	Mie-Streuung . . . . .	18
5.6	Spezifische Wirkungsquerschnitte . . . . .	20
5.7	Atmosphärische Rendergleichung . . . . .	20
5.8	Validität . . . . .	21
<b>6</b>	<b>Computergrafische Simulation</b>	<b>22</b>
6.1	Farbmetrische Übersetzung . . . . .	22
6.2	Numerische Integration . . . . .	24
6.3	Vorbereitung . . . . .	24
6.3.1	Durchlässigkeit . . . . .	25

6.3.2	Oberflächenreflexion . . . . .	26
6.3.3	Einstreuung . . . . .	27
6.3.4	Mehrfache Streuung . . . . .	28
6.4	Validität . . . . .	28
<b>7</b>	<b>Implementation</b>	<b>29</b>
7.1	Struktur . . . . .	29
7.2	Vorbereitung . . . . .	30
7.3	Bildsynthese . . . . .	32
7.4	Umgebung . . . . .	32
<b>8</b>	<b>Evaluation</b>	<b>36</b>
8.1	Konsistenz . . . . .	36
8.2	Farbwirkung . . . . .	36
<b>9</b>	<b>Fazit</b>	<b>39</b>
9.1	Ausblick . . . . .	40
	<b>Danksagung</b>	<b>42</b>
	<b>Literatur</b>	<b>42</b>
	<b>Selbstständigkeitserklärung</b>	<b>49</b>

## 1 Einleitung

Die Atmosphäre ist ausschlaggebend für die optische Charakteristik eines planetaren Körpers. Sie definiert meteorologische Eigenschaften wie Wetter und Klima und beeinflusst damit durch etwa ökologische Faktoren oder Aggregatzustandsänderungen auch die Ausprägung der Körperoberfläche. Wechselwirkungen zwischen atmosphärischer Materie und Sonnenlicht erzeugen zudem zu jeder Tages- und Jahreszeit die Farben des Himmels und der Luft. Um diese Phänomene zu visualisieren, werden bereits seit mehreren Jahrzehnten Umgebungstexturen und tiefenbedingte Überblendungen angewandt. Heutige Echtzeitsysteme nutzen sie insbesondere aufgrund des geringen Rechenaufwands, obwohl sie photometrisch inkorrekt sind und eine signifikante Einschränkung der Umgebungsdynamik bedeuten. Dem entgegen stehen komplexere physikalisch-basierte Methoden, die für Blickpositionen in- und außerhalb einer Atmosphäre die Absorption und die Streuung der Sonnenstrahlung bei einem beliebigen Sonnenstand evaluieren. Die dafür notwendigen Berechnungen sind durch die zunehmend verfügbare Rechenleistung und die Auslagerung aufwendiger Berechnungsschritte mittlerweile in Echtzeit umsetzbar.[31][17] So bieten sowohl die Unreal-Engine als auch die Unity-Spiele-Engine in aktuellen Versionen dazu entsprechende Funktionen.[49][16] Darüber hinaus verwenden diverse Computerspiele und Simulatoren physikalische Darstellungen der Atmosphäre.

### 1.1 Motivation

Die unendlichen Weiten des Weltalls bergen seit jeher eine außergewöhnliche Faszination. Dazu forschende Weltraumorganisationen und Raumfahrtunternehmen haben die Verantwortung und das Interesse, Missionen und deren Ergebnisse zu präsentieren. Neben der Publikation wissenschaftlicher Beiträge ist dabei eine öffentlichkeitswirksame und allgemein verständliche Kommunikation von Inhalten notwendig. Zusätzlich zu klassischen digitalen Medieninhalten werden hierfür auch interaktive dreidimensionale Anwendungen produziert. So visualisiert „Gaia Sky“ mit den Planetensystemen und Sternen der Milchstraße die Forschungsergebnisse zur „Gaia“ Mission der ESA<sup>1</sup>. [5] Die NASA<sup>2</sup> hat hingegen mit ihrem System „Eyes on the Solar System“ eine detaillierte Repräsentation unseres Sonnensystems geschaffen, die sowohl Planeten, Monde, Kometen, Asteroiden, als auch

---

<sup>1</sup>European Space Agency, zu Deutsch: Europäische Weltraumorganisation.

<sup>2</sup>National Aeronautics and Space Administration, zu Deutsch: Nationale Aeronautik- und Raumfahrtbehörde.

Raumfahrzeuge bei ihren korrespondierenden Positionen abbildet und einzelne Missionen in interaktiven Geschichten und Simulationen erläutert.[35] Die Simulation atmosphärischer Lichtstreuung ist hierbei maßgeblich für eine visuell glaubhafte und akkurate Abbildung planetarer Himmelskörper. Sie ermöglicht durch die Messdaten zahlreicher Sonden, Observatorien und Satelliten die realistische Berechnung der Lichtverhältnisse bei dynamischen Sichtpositionen. So werden Orte erlebbar, die kein Mensch und keine Sonde in absehbarer Zeit erreichen wird. Um zu diesem Zweck die Optik unterschiedlicher Atmosphären abzubilden, entsteht im Rahmen dieser Arbeit, anhand empirischen Formulierungen der Lichtausbreitung, sowie der Gas- und Partikelverteilung in Atmosphären, ein Computergrafikmodell zur echtzeitfähigen Simulation atmosphärischer Streuung. Entgegen bisheriger Modellierungen, die mehrheitlich durch die Eigenschaften der Erdatmosphäre definiert und dahingehend in ihrer Anwendung begrenzt sind, ist das folgend beschriebene Modell durch physikalische Messgrößen konfiguriert und dementsprechend anpassungsfähig. Dabei wird insbesondere die Variabilität atmosphärischer Konzentrationen, sowie die farbmimetrische Übersetzung spektraler Eigenschaften erweitert. Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung, Umsetzung und anschließende Evaluation eines entsprechenden Modells zur atmosphärischen Streuung. Aufgrund der direkten Modifizierbarkeit der Renderpipeline, sowie der plattformübergreifenden Grafikprogrammierung via „Shader-Lab“ und HLSL,<sup>3</sup> dient als Ausgang dazu die Unity-Spiele-Engine.

### 1.2 Aufbau

Nach einem Überblick über fachlich relevante Beiträge werden im Verlauf dieser Arbeit zunächst die relevanten physikalischen Grundlagen zur Optik erläutert. Im Anschluss dazu folgt die Beschreibung des Modells zur Lichtausbreitung in durchlässigen Substanzen, aus der daraufhin die konkreten Modellierungen der Eigenschaften und Wechselwirkungen einer Atmosphäre entstehen. Zur Darstellung dieser werden demnach die notwendigen computergrafischen Methoden erarbeitet. Hiernach entsteht die demonstrative Konfiguration und Implementation des beschriebenen Modells mit anschließender Präsentation und Bewertung der produzierten Ergebnisse. Abschließend werden mögliche Erweiterungen und ein Ausblick auf weitere Forschung diskutiert.

---

<sup>3</sup>High-level shader language, zu Deutsch: High-Level-Shaderprogrammiersprache.

## 2 Vorherige Arbeiten

Erste Methoden zur physikalisch-basierten Bildsynthese atmosphärischer Streuung entstehen in den 1980- und 1990er-Jahren. Die Beiträge von R. Victor Klassen (1987)[30] und Tomoyuki Nishita et al. (1993)[48] sind dazu bis heute prägend. Um die Wechselwirkungen von Licht in einer Atmosphäre darstellen zu können, erläutern sie rationalisierende Grenzen und Approximationen. Das daraus resultierende Modell evaluiert die einmalige Rayleigh- und Mie-Streuung paralleler Sonnenstrahlen in einer radialsymmetrischen Atmosphäre. Die dazugehörigen Berechnungen sind dennoch so komplex, dass bereits Nishita et al. (1993)[48] für Perspektiven außerhalb einer Atmosphäre Vorberechnungen der optischen Dichte, sowie der oberflächlich reflektierten Beleuchtungsstärke skizziert. Sean O’Neil (2005)[44] ergänzt dazu Methoden für alle Sichtpositionen und realisiert anhand der Verwendung von Grafikprozessoren eines der ersten echtzeitfähigen Modelle. Die dabei notwendigen Rechenzeiten begrenzen jedoch die Präzision der aufwendig zu berechnenden Lichteinstreuung. Basierend auf der Arbeit von Tobias Schafhitzel et al. (2007)[47] entwickeln Eric Bruneton und Fabrice Neyret (2008)[17] infolgedessen eine gezielt parametrisierte Vorberechnung der Lichteinstreuung in einer vierdimensionalen Lookup-Tabelle. Sie reduziert den Rechenaufwand zur Laufzeit und ermöglicht erstmals eine praktische Evaluation der mehrfachen Streuung in Echtzeit. Die so erzielte Effizienz und optische Qualität begründen in der Wissenschaft, wie auch der Industrie bis heute die Anwendung und Entwicklung physikalisch-basierter Methoden zur Simulation atmosphärischer Streuung in Echtzeit.

## 3 Optische Grundlagen

### 3.1 Wechselwirkung zwischen Licht und Materie

Licht ist elektromagnetische Strahlung und bezeichnet im allgemeinen den sichtbaren Teil des elektromagnetischen Spektrums mit Wellenlängen zwischen 390nm und 770nm.[38]

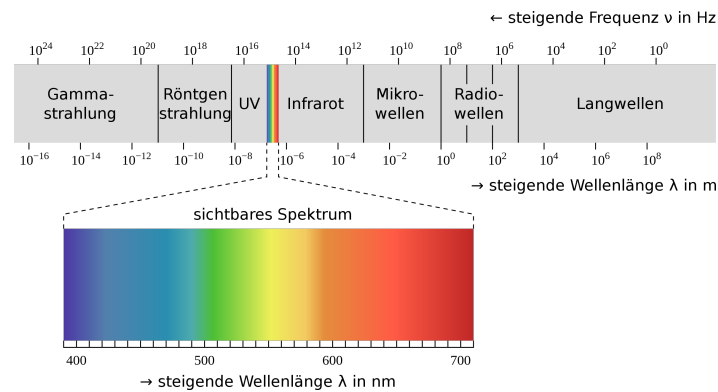


Abbildung 1: Das elektromagnetische Spektrum[32]

Das Erscheinungsbild einer Atmosphäre entsteht, indem Lichtstrahlung mit fester, flüssiger und gasförmiger Materie interagiert. Gasmoleküle sind dabei bedeutend kleiner als die Wellenlängen des sichtbaren Spektrums und streuen deshalb einen signifikanten Anteil des Lichts. Diese als Rayleigh-Streuung bezeichnete Wechselwirkung entsteht überwiegend in Gasen, tritt vereinzelt aber auch in festen und flüssigen Stoffen, sowie durch feine Aerosolpartikel auf. Sonnenlicht das durch die Gasmoleküle der Erdatmosphäre gestreut wird, erzeugt so die Farben des Erdhimmels. Höherfrequente Strahlung wird dabei allgemein stärker gestreut, sodass dieser Anteil des Sonnenlichts die Himmelsfläche tagsüber blau erscheinen lässt und der verbleibende Anteil den Horizont zum Sonnenaufgang und Sonnenuntergang rot-orange färbt.

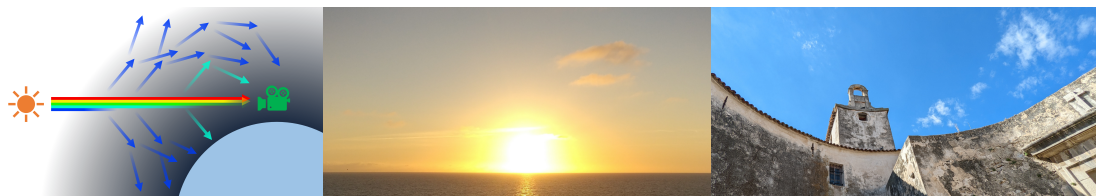


Abbildung 2: Schematische Darstellung der Rayleigh-Streuung und Fotografien eines gelb-orangen Sonnenuntergangs und eines blauen Himmels

Die absorbierenden Eigenschaften atmosphärischer Gase sind häufig nicht offensichtlich, da sie wie bei der Absorption von Ultraviolettstrahlung durch Ozon oder der Absorption von Infrarotstrahlung durch Treibhausgase überwiegend nicht den sichtbaren Spektralbereich betreffen. Dabei absorbieren zahlreiche gasförmige Stoffe wie Stickstoffdioxid oder Ozon auch signifikante Mengen sichtbarer Strahlung. So entsteht unter anderem die blaue Färbung des Erdschattens zur Dämmerung durch die Lichtabsorption von Ozon bei Wellenlängen um 600nm.

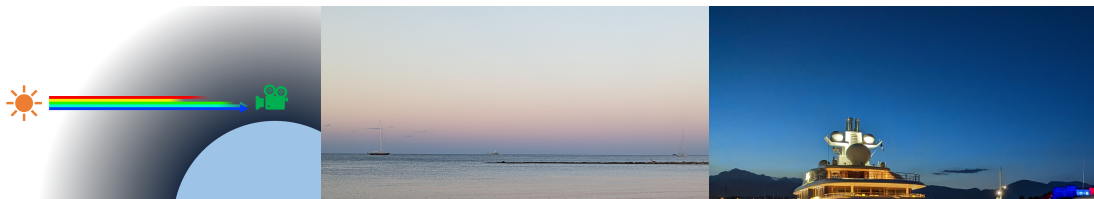


Abbildung 3: Schematische Darstellung der Ozon-Absorption und Fotografien eines blauen Horizonts beim Sonnenuntergang und eines blauen Horizonts nach dem Sonnenuntergang

Eine Atmosphäre umfasst neben gasförmiger Materie auch diverse flüssige und feste Aerosolpartikel. Diese Schwebeteilchen variieren in ihrer Zusammensetzung, Form und Größe und produzieren demnach unterschiedliche Wechselwirkungen. Mit einem Durchmesser ab etwa 0,7nm sind die kleinsten Partikel dazu bedeutend kleiner als die Wellenlängen des sichtbaren Spektrums und erzeugen daher ebenfalls die sogenannte Rayleigh-Streuung.[11] Die stärkere Streuung höherfrequenter Wellenlängen entwickelt sich dabei mit zunehmender Partikelgröße zu einer weitgehend gleichwertigen Intensität, sodass diese Wechselwirkung für Aerosolteilchen der Größenordnung sichtbarer Wellenlängen als Mie-Streuung bezeichnet wird. Darüber hinaus konvergiert die Interaktion von Lichtstrahlung mit größeren Schwebeteilchen zu einem geometrischen Streuverhalten, wie es für ausgeprägte Körper gilt. Die meisten Aerosolpartikel absorbieren zudem auch relevante Mengen der sichtbaren Strahlung. Ausgehend von den optischen Eigenschaften der Materie erzeugen dabei vor Allem größere Partikel eine starke Lichtabsorption. In der Erdatmosphäre ist die Intensität dieser Wechselwirkungen für alle Wellenlängen des sichtbaren Spektrums mehrheitlich äquivalent, sodass Phänomene wie Dunst, Nebel, Wolken, Rauch und Smog keinen prägnanten Farbton produzieren.

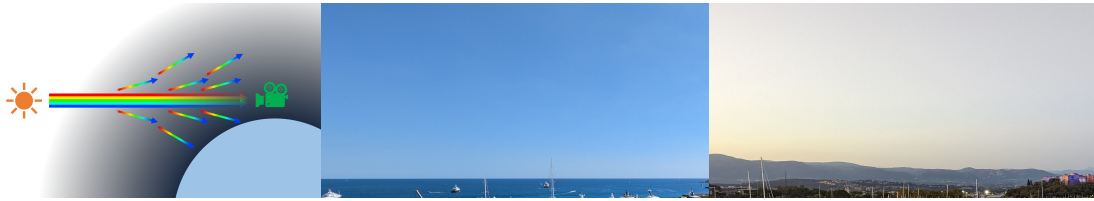


Abbildung 4: Schematische Darstellung der Mie-Streuung und Fotografien eines Horizonts zur Mittagssonne und eines Horizonts zur durch Dunst gestreuten Abendsonne mit der dadurch entstehenden Luftperspektive

## 3.2 Menschliche Wahrnehmung

Um die menschliche Wahrnehmung des optischen Spektrums zu beschreiben, hat die CIE<sup>4</sup> abgeleitet von den drei verschiedenen Farb-Rezeptoren des menschlichen Auges das Normfarbsystem definiert. Dieses parametrisierte Farbsystem wird verwendet, um aufgenommene oder berechnete Farbwahrnehmung zu reproduzieren. Bildschirme die ihre Farben üblicherweise aus der Mischung roter, grüner und blauer Lichtquellen erzeugen, repräsentieren so einen spezifischen Subraum im Normfarbsystem. Die spektralen Eigenschaften dieser drei Komponenten definieren dabei die Grenzen eines RGB-Farbraums, in dem durch Mischung jede enthaltene Farbe reproduziert werden kann. Auch in der Computergrafik ist daher etabliert, Licht mit einem RGB-Wert zu beschreiben. Um Farben kohärent abzubilden, geschieht dessen Angabe und Berechnung somit stets im Kontext eines parametrisierten Farbraums. Trotz seines kleinen Gamut ist der sRGB-Farbraum hierbei bis heute ein weit verbreiteter Standard und wird in den meisten computergrafischen Programmen, wie auch der Unity-Engine verwendet.[50] Eine besondere Eigenschaft des normalen sRGB-Farbraums ist das Gamma, das die nichtlineare Abbildung der Farbhelligkeit beschreibt. Bei der etablierten digitalen Speicherung von RGB-Werten mit je 8 Bit pro Kanal sorgt dies für eine höhere Auflösung der dunkleren Farbtöne. Da das menschliche Auge Lichtintensität ebenfalls nicht linear wahr nimmt, wird so die Auflösung der Farbwahrnehmung annähernd an die menschliche Hellempfindlichkeit angepasst. Um in Grafikprogrammen Lichtberechnungen physikalisch korrekt durchzuführen, muss die Lichtintensität jedoch linear beschrieben werden. Moderne Shader verwenden daher zur Lichtberechnung eine lineare Abbildung der 8-Bit-sRGB-Werte im 32-Bit-Gleitkommazahlenformat.

---

<sup>4</sup>Commission Internationale de l'Éclairage, zu deutsch: Internationale Beleuchtungskommission.



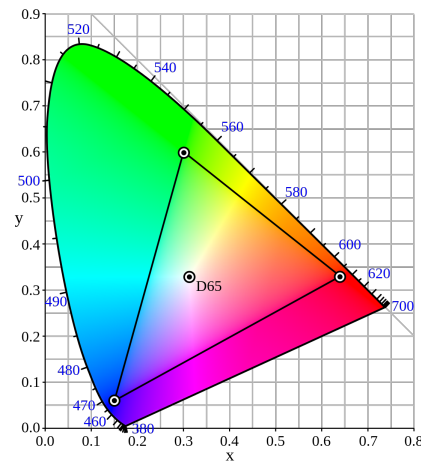


Abbildung 5: Eine Schicht des CIE-XYZ-Farbraums zur Darstellung der Farbsättigung und des darin liegenden sRGB-Farbraum<sup>5</sup> [34]

### 3.3 Radiometrische und Photometrische Größen

Um Eigenschaften jedweder elektromagnetischer Strahlung zu beschreiben, sind radiometrische Größen definiert. Für das sichtbare Spektrum existieren zudem jeweils korrespondierende photometrische Größen, die durch die von der CIE genormten Hellempfindlichkeit des menschlichen Auges gewichtet sind.

Radiometrische Größe		Photometrische Größe		Zeichen
Bezeichnung	Einheit	Bezeichnung	Einheit	
Strahlungsfluss	W	Lichtstrom	lm	$\Phi$
Bestrahlungsstärke	$\text{W m}^{-2}$	Beleuchtungsstärke	$\text{lx} = \text{lm m}^{-2}$	$E$
Strahlstärke	$\text{W sr}^{-1}$	Lichtstärke	$\text{cd} = \text{lm sr}^{-1}$	$I$
Strahldichte	$\text{W m}^{-2} \text{sr}^{-1}$	Leuchtdichte	$\text{cd m}^{-2}$	$L$

Tabelle 1: Einheiten und Formelzeichen zu radiometrischen und photometrischen Größen

Der **Strahlungsfluss** beschreibt die Strahlungsenergie pro Zeit. Er wird in der Einheit Watt (W) und unter dem Formelzeichen  $\Phi$  angegeben. Der **Lichtstrom** ist die dazu an die menschliche Wahrnehmung angepasste Größe. Unter gleichbleibendem Formelzeichen wird diese in Lumen (lm) angegeben.

<sup>5</sup>Die farbliche Wahrnehmung einer Abbildung des CIE-XZY-Farbraums kann durch die Limitierungen von Druckverfahren und Bildschirmtechnologien von ihrer Definition abweichen.

Die **Bestrahlungsstärke** ist der Strahlungsfluss pro Fläche und wird daher unter dem Kurzzeichen  $E$  in Watt pro Quadratmeter ( $\text{W m}^{-2}$ ) angegeben. In der Photometrie entspricht diese Größe der **Beleuchtungsstärke**. Sie ergibt sich demnach aus Lumen pro Quadratmeter ( $\text{lm m}^{-2}$ ) und wird in einer eigenen Einheit Lux (lx) angegeben.

Die **Strahldichte**  $L$  definiert die Bestrahlungsstärke pro Raumwinkel in Watt pro Quadratmeter pro Steradian ( $\text{W m}^{-2} \text{sr}^{-1}$ ). Die Angabe pro Raumwinkel bedeutet dabei einen distanz-unabhängigen Wert, da Sensoren bei einer größeren Entfernung zu der gleichen Quelle eine geringere Bestrahlungsstärke messen. Für den Lichtstrom pro Raumwinkel ( $\text{lm sr}^{-1}$ ) ist in der Photometrie bereits die **Lichtstärke** in Candela (cd) definiert. Pro Fläche ergibt sich daraus die **Leuchtdichte** in Candela pro Quadratmeter ( $\text{cd m}^{-2}$ ). Sie beschreibt effektiv die Helligkeit, da sie die wahrgenommene Energie nach Zeit, Fläche und Raumwinkel normalisiert.

## 4 Volumetrisches Lichtmodell

### 4.1 Licht

Um die Eigenschaften der Lichtstrahlung und deren Wechselwirkungen mit Materie physikalisch konsistent abzubilden, wird in der Computergrafik das Modell der geometrischen Optik angewandt. Es beschreibt Licht als einen gradlinigen Strahl und modelliert die Einflüsse einer Substanz durch korrespondierende Funktionen zu einem Raumpunkt. In dieser Arbeit bezeichnet  $L$  dabei die Strahlungsdichte zur Lichtstrahlung einer bestimmten Wellenlänge  $\lambda$  bei einem Raumpunkt  $x$  entlang der stets normalisierten Richtung  $\vec{\omega}$ . Der Winkel  $\theta$  zwischen zwei Lichtrichtungen  $\vec{\omega}$  und  $\vec{\omega}_i$  definiert sich entsprechend aus:

$$\theta = \arccos(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}_i) \quad (1)$$

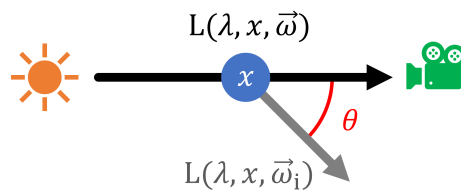


Abbildung 6: Schematische Darstellung der Konventionen dieser Arbeit zur Beschreibung der Strahlungsdichte  $L$  und des Winkels  $\theta$  zwischen zwei Lichtrichtungen

### 4.2 Absorptions-, Streu- und Extinktionsquerschnitt

Innerhalb einer lichtdurchlässigen Substanz kann ein einzelner Lichtstrahl alle Teilchen eines Volumens verfehlen oder mit beliebig vielen davon interagieren. Ein solcher Raum definiert sich dabei durch die Ansammlung zufällig verteilter Teilchen, sodass bei dem Durchschreiten eines Lichtstrahls Wechselwirkungen mit einer bestimmbareren Wahrscheinlichkeit auftreten. Das Potenzial eines Teilchens Licht der Wellenlänge  $\lambda$  zu streuen oder zu absorbieren ist dazu durch den Absorptionsquerschnitt  $\sigma_a$  und den Streuquerschnitt  $\sigma_s$  gegeben. In Summe bestimmen diese Wirkungsquerschnitte mit den Extinktionsquerschnitt  $\sigma_t$  das gesamte Potenzial zur Abschwächung eines Lichtstrahls.

$$\sigma_t(\lambda) = \sigma_a(\lambda) + \sigma_s(\lambda) \quad (2)$$

### 4.3 Phasenfunktion

Bei der Lichtstreuung in einer Substanz streut Licht in mehrere Raumrichtungen. Eine Phasenfunktion  $p$  beschreibt dazu die richtungsabhängige Streuintensität eines Teilchens. In der Computergrafik gilt dabei die Helmholtz-Reziprozität, sodass Strahlung aus der Richtung  $\vec{\omega}$  nach  $\vec{\omega}_i$  mit der selben Intensität gestreut wird, wie von  $\vec{\omega}_i$  nach  $\vec{\omega}$ .

$$p(\vec{\omega}, \vec{\omega}_i) = p(\vec{\omega}_i, \vec{\omega}) \quad (3)$$

Für allgemeine Teilchen verhält sich die richtungsabhängige Streuintensität zudem zylindersymmetrisch zur Achse entlang der Lichtrichtung  $\vec{\omega}_i$ . So gilt  $p$  als Funktion des Streuwinkels zwischen der Lichtrichtung  $\vec{\omega}_i$  und der Streurichtung  $\vec{\omega}$ .

$$p(\vec{\omega}, \vec{\omega}_i) = p(\arccos(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}_i)) \quad (4)$$

Um der Energieerhaltung zu entsprechen, sind Phasenfunktionen stets normalisiert. Für das Integral über den gesamten Raumwinkel  $4\pi\text{sr}$  gilt somit folgend der Wert 1. Für  $p$  zum Streuwinkel  $\theta$  wird dabei die Y-Komponente der Polarkoordinate  $[p(\theta), \theta]$  über den Halbkreis  $\pi\text{rad}$  integriert und das Ergebnis mit  $2\pi\text{rad}$  vollständig um die Achse entlang der einfallenden Lichtstrahlung rotiert.

$$\int_{4\pi\text{sr}} p(\arccos(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}_i)) d\vec{\omega}_i = \int_0^{2\pi\text{rad}} \int_0^{\pi\text{rad}} p(\theta) \sin \theta d\theta d\phi = 1 \quad (5)$$

Die normalisierte isotropische Phasenfunktion  $p^I$  ist demnach:

$$p^I(\theta) = \frac{1}{\int_0^{2\pi\text{rad}} \int_0^{\pi\text{rad}} \sin \theta d\theta d\phi} = \frac{1}{4\pi} \quad (6)$$

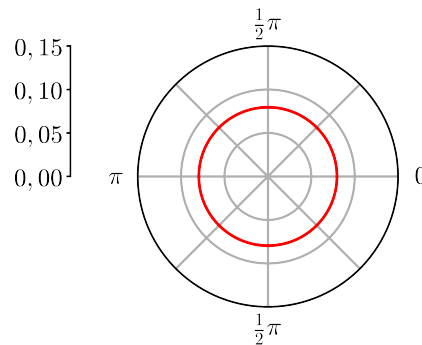


Abbildung 7: Die normalisierte Phasenfunktion vollständig isotropischer Streuung

#### 4.4 Licht-Transfer-Gleichung

Die Strahlungs-Transport-Gleichung nach Chandrasekhar (1960)[46] beschreibt die Ausbreitung von Licht im Kontext des Strahlenmodells und bildet in verschiedenen Ausführungen und Schreibweisen den Kern aller physikalisch basierten Algorithmen zur Bildsynthese. In einer lichtdurchlässigen Substanz verändern so unterschiedliche Ereignisse die Strahlungsdichte eines Lichtstrahls. Absorbiert ein Teilchen einen Anteil der eingehenden Lichtstrahlung, nimmt die Strahldichte entlang dieser Richtung ab. Dies gilt auch, wenn Teile des einfallenden Lichts in eine andere Richtung hin gestreut werden. In Summe entsteht so die Abschwächung des Lichtstrahls. Wird dagegen an einem Teilchen Licht in dessen Richtung emittiert oder aus einer anderen Richtung hin gestreut, steigt dadurch die Strahlungsdichte. Die Differenz zwischen Zunahme und Abschwächung bestimmt demnach die Richtungsableitung zur Strahlungsdichte  $L$  der Wellenlänge  $\lambda$  bei  $x$  in Richtung  $\vec{\omega}$ . Dabei ergibt sich zunächst die Extinktion von  $L$  mit dem Extinktionsquerschnitt  $\sigma_t$  zu  $\lambda$  (Gl. 2) und der Teilchenkonzentration  $C$  bei  $x$ . Weiterhin resultiert die Emission aus dem Absorptionsquerschnitt  $\sigma_a$  zu  $\lambda$ ,  $C$  bei  $x$  und der emittierenden Strahlungsdichte pro Teilchen  $L_e$  zu  $\lambda$ . Zusätzlich wird die Einstreuung mit dem Streuquerschnitt  $\sigma_s$  zu  $\lambda$ ,  $C$  bei  $x$  und der aus allen Richtungen  $4\pi sr$  durch  $x$  nach  $\vec{\omega}$  eingestreuerten Strahlungsdichte berechnet. Dafür bestimmt die Phasenfunktion  $p$  zu jeder Richtung  $\vec{\omega}_i$  den Anteil des Lichts  $L$  zu  $\lambda$  bei  $x$  in  $\vec{\omega}_i$  der nach  $\vec{\omega}$  streut.[46][53][43]

$$\begin{aligned} \frac{L(\lambda, x, \vec{\omega})}{d\vec{\omega}} = & - \underbrace{\sigma_t(\lambda) C(x) L(\lambda, x, \vec{\omega})}_{\text{Extinktion}} + \underbrace{\sigma_a(\lambda) C(x) L_e(\lambda)}_{\text{Emission}} \\ & + \underbrace{\sigma_s(\lambda) C(x) \int_{4\pi sr} p(\arccos(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}_i)) L(\lambda, x, \vec{\omega}_i) d\vec{\omega}_i}_{\text{Einstreuung}} \end{aligned} \quad (7)$$

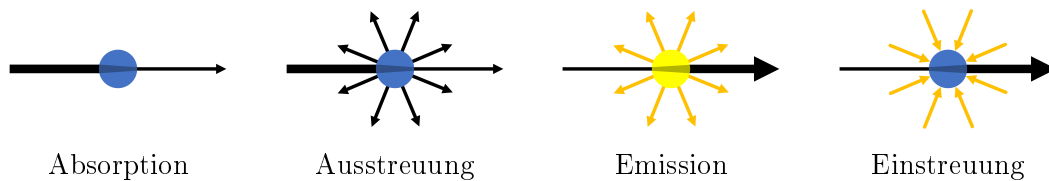


Abbildung 8: Schematische Darstellung von Absorption, Ausstreuung, Emission und Einstreuung[53]

### 4.5 Durchlässigkeit

Anhand des Lambert-Beer'schen Gesetzes[37] bestimmen der Extinktionsquerschnitt  $\sigma_t$  zur Wellenlänge  $\lambda$  (Gl. 2), sowie die Teilchenkonzentration  $C$  bei  $x_j$  entlang der Strecke von  $x_0$  bis  $x_1$  die Durchlässigkeit  $T$  zu  $\lambda$ ,  $x_0$  und  $x_1$ . Der Exponent wird dazu auch als die optische Dichte  $\tau$  bezeichnet.

$$T(\lambda, x_0, x_1) = \exp\left(-\sigma_t(\lambda) \int_{x_0}^{x_1} C(x_j) dx_j\right) \quad (8)$$

Diese Durchlässigkeit  $T \in [0; 1]$  beschreibt die Reduktion einer Strahlungsdichte  $L$  zur Wellenlänge  $\lambda$  durch Absorption und Ausstreuung beim Durchgang durch eine Substanz entlang der Richtung  $\vec{\omega}$  von  $x_0$  nach  $x_1$ :

$$L(\lambda, x_1, \vec{\omega}) = T(\lambda, x_0, x_1) L(\lambda, x_0, \vec{\omega}) \quad (9)$$

### 4.6 Volumetrische Rendergleichung

In einer Substanz ergibt sich zur Wellenlänge  $\lambda$  entlang einer Strecke von  $x_0$  nach  $x_1$  in Richtung  $\vec{\omega}$  die vollständige Strahlungsdichte  $L$  bei  $x_1$  aus der abgeschwächten Strahlungsdichte  $L$  bei  $x_0$  (Gl. 8, 9), sowie der zwischen  $x_0$  und  $x_1$  nach  $\vec{\omega}$  emittierten und eingestreuerten Strahlungsdichte. Dieser kumulative Zuwachs der Strahlungsdichte wird dabei zu jeder Position  $x_j$  zwischen  $x_0$  und  $x_1$  entsprechend der Richtungsableitung (Gl. 7) bestimmt und anhand der Durchlässigkeit  $T$  zwischen  $x_j$  und  $x_1$  reduziert, da jede bei  $x_j$  gewonnenen Strahlungsdichte bis  $x_1$  durch Absorption und Ausstreuung abgeschwächt wird.[53][43]

$$\begin{aligned} L(\lambda, x_1, \vec{\omega}) = & \underbrace{T(\lambda, x_0, x_1)}_{\text{Extinktion (initial)}} L(\lambda, x_0, \vec{\omega}) + \int_{x_0}^{x_1} \underbrace{T(\lambda, x_j, x_1)}_{\text{Extinktion (kumulativ)}} \left( \underbrace{\sigma_a(\lambda) C(x_j) L_e(\lambda)}_{\text{Emission}} \right. \\ & \left. + \underbrace{\sigma_s(\lambda) C(x_j) \int_{4\pi sr} p(\arccos(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}_i)) L(\lambda, x_j, \vec{\omega}_i) d\vec{\omega}_i}_{\text{Einstreuung}} \right) dx_j \end{aligned} \quad (10)$$

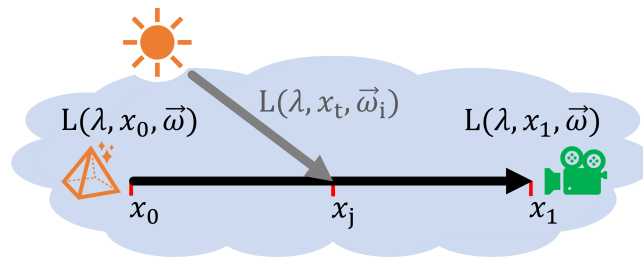


Abbildung 9: Darstellung der Variablen zur volumetrischen Rendergleichung

Die volumetrische Rendergleichung (Gl. 10) ist potenziell rekursiv. So ist die initiale Strahlungsdichte innerhalb einer Substanz durch eine weitere Instanz der volumetrischen Rendergleichung definiert, wogegen sie außerhalb zu einem Großteil anderweitig bestimmt wird. Beim Verlauf durch eine streuende Substanz erfordert zudem die Evaluation der mehrfachen Lichtstreuung eine rekursive Berechnung der volumetrischen Rendergleichung. Bei Substanzen die dem entgegen kein Licht streuen ist der Streuquerschnitt und damit der gesamte Term zur Einstreuung stets null.

#### 4.7 Validität

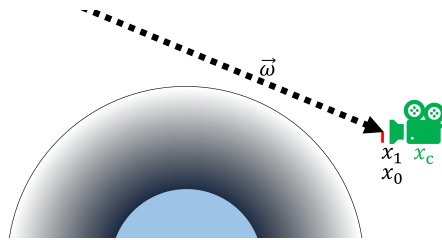
Das beschriebene Lichtmodell wird in ähnlicher Weise in der gesamten Computergrafik verwendet und basiert auf diversen physikalischen Voraussetzungen und Approximationen. Es umfasst dabei ausschließlich die Absorption, sowie die elastische Streuung von Licht. So sind Wechselwirkungen wie inelastische Streuungen oder Lichtbrechungen nicht abgebildet. Zu dieser Modellierung werden Wellenlängen und Teilchen separat betrachtet und entsprechend unabhängige Wechselwirkungen vorausgesetzt. Für repräsentative Ergebnisse müssen daher reale Interferenzen zwischen Wechselwirkungen unbedeutend sein. In Substanzen gilt dazu eine zufällige Anordnung der Teilchen mit ungefähren Abständen von wenigstens drei Teilchenradien.[19]

## 5 Atmosphärisches Modell

### 5.1 Berechnungsgrenzen

Die atmosphärischen Wechselwirkungen mit Licht werden zu einem Körper mit Zentrum  $x_B$ , Radius  $r_B$  und der Atmosphärenschichthöhe  $h_A$  entlang der signifikanten Strecke zwischen  $x_0$  und  $x_1$  (Gl. 10) berechnet. Von der Blickposition  $x_C$  in Blickrichtung  $-\vec{\omega}$  definiert  $x_1$  dabei die erste und  $x_0$  die letzte Überschneidung mit der Atmosphäre. Innerhalb dieser gilt dazu  $x_1 = x_C$ , wogegen für alle  $x_C$  außerhalb der Atmosphäre  $x_1$  mit der Entfernung  $D(x_C, -\vec{\omega}, x_B, r_B + h_A)$  an der Atmosphärengrenze entlang  $-\vec{\omega}$  liegt. Ausgehend von  $x_1$  befindet sich  $x_0$  in Richtung  $-\vec{\omega}$  entweder mit der Distanz  $D(x_1, -\vec{\omega}, x_B, r_B)$  bei der Körperoberfläche oder mit  $D(x_1, -\vec{\omega}, x_B, r_B + h_A)$  ebenfalls an der Grenze zum Weltraum. Für einen Sichtstrahl der dem entgegen die Atmosphäre komplett verfehlt gilt  $x_1 = x_0 = x_C$ , sodass jedes Integral  $\int_{x_0}^{x_1}$  null und die Strahlungsdichte bei  $x_C$  ausschließlich durch die initiale Lichtquelle bestimmt ist (Gl. 10).

$$\begin{aligned}
 x_1 = x_1(x_C, \vec{\omega}) &= \begin{cases} x_C - \vec{\omega} D(x_C, -\vec{\omega}, x_B, r_B + h_A) & |\overrightarrow{x_B x_C}| > r_B + h_A \\ & \wedge D(x_C, -\vec{\omega}, x_B, r_B + h_A) < \infty \\ x_C & |\overrightarrow{x_B x_C}| \leq r_B + h_A \\ & \vee D(x_C, -\vec{\omega}, x_B, r_B + h_A) = \infty \end{cases} \\
 x_0 = x_0(x_1, \vec{\omega}) &= \begin{cases} x_1 - \vec{\omega} D(x_1, -\vec{\omega}, x_B, r_B) & D(x_1, -\vec{\omega}, x_B, r_B) < \infty \\ x_1 - \vec{\omega} D(x_1, -\vec{\omega}, x_B, r_B + h_A) & D(x_1, -\vec{\omega}, x_B, r_B) = \infty \\ & \wedge D(x_1, -\vec{\omega}, x_B, r_B + h_A) < \infty \\ x_1 & D(x_1, -\vec{\omega}, x_B, r_B) = \infty \\ & \wedge D(x_1, -\vec{\omega}, x_B, r_B + h_A) = \infty \end{cases} \quad (11)
 \end{aligned}$$





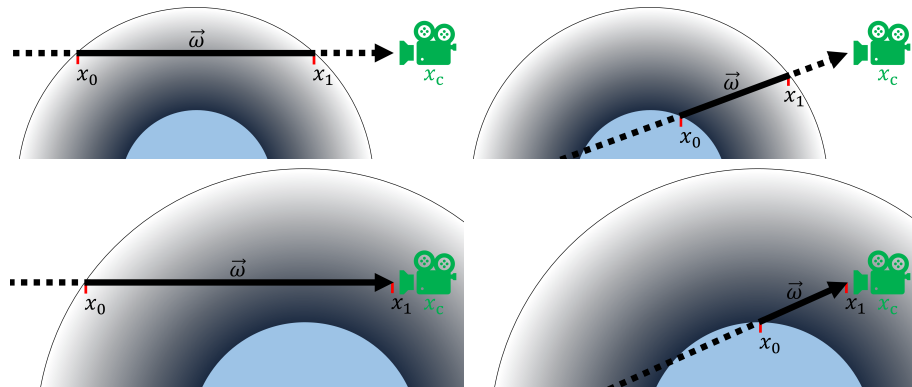


Abbildung 10: Darstellung möglicher Grenzvariablen zu Blickpositionen in und außerhalb der Atmosphäre

## 5.2 Lichtquellen

Licht das mit der Materie einer Atmosphäre interagiert entstammt überwiegend den Sternen des zugrunde liegenden Planetensystems. Die sichtbare Strahlung eines Sterns entsteht dabei in dessen Photosphäre und resultiert vorwiegend aus der effektiven Sterntemperatur. Das idealisierte Emissionsspektrum ist dazu als Schwarzkörperspektrum durch das plancksche Strahlungsgesetz beschrieben. Demnach ergibt sich die spektrale Strahlungsdichte  $L_S$  ( $\text{W m}^{-2} \text{sr}^{-1} \text{m}^{-1}$ ) zur Wellenlänge  $\lambda$  (m) aus der effektiven Temperatur  $T$  (K).[40]

$$L_S(\lambda) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \left( \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1} \right) \quad (12)$$

Parameter	Wert	Beschreibung
$h$	$6,62607015 \cdot 10^{-34} \text{J s}$	Planck-Konstante[36]
$c$	$2,99792458 \cdot 10^8 \text{m s}^{-1}$	Lichtgeschwindigkeit[36]
$k$	$1,380649 \cdot 10^{-23} \text{J K}^{-1}$	Boltzmann-Konstante[36]

Tabelle 2: Physikalische Konstanten zum planckschen Strahlungsgesetz (Gl. 12)

Zusätzlich zur direkten Einstrahlung wird dieses Licht bei Oberflächen planetarer Körper reflektiert, die dazu mit der bidirektionalen Reflexionsfunktion  $b_I$  zur Lichtrichtung  $\vec{\omega}_i$  und Oberflächenrichtung  $\vec{\omega}_n$  als lambert'sche Flächen modelliert sind. Indem ergibt

sich die reflektierte Strahlungsdichte  $L_B$  zur Wellenlänge  $\lambda$  bei einem Punkt  $x$  für eine Oberfläche mit dem Albedo  $\alpha$  zu  $\lambda$  und dem Körperzentrum  $x_B$  aus der über die Hemisphäre  $2\pi sr$  einfallenden Lichtstrahlung. Die Strahldichte  $L$  der Richtungen  $\vec{\omega}_i$  bestimmt sich dazu auch durch die atmosphärische Streuung und zeigt damit die zugrunde liegende Rekursivität, da  $L_B$  wiederum eben diese beeinflusst.

$$b_I(\vec{\omega}_i, \vec{\omega}_n) = \begin{cases} \frac{-\vec{\omega}_i \cdot \vec{\omega}_n}{\pi} & -\vec{\omega}_i \cdot \vec{\omega}_n > 0 \\ 0 & -\vec{\omega}_i \cdot \vec{\omega}_n \leq 0 \end{cases} \quad (13)$$

$$L_B(\lambda, x) = \alpha(\lambda) \int_{2\pi sr} b_I\left(\vec{\omega}_i, \frac{\vec{x}_B \vec{x}}{|\vec{x}_B \vec{x}|}\right) L(\lambda, x, \vec{\omega}_i) d\vec{\omega}_i$$

Für die atmosphärische Modellierung ist eine initiale Strahlungsdichte  $L$  (Gl. 10) so zur Wellenlänge  $\lambda$  bei  $x_0$  (Gl. 11) in Richtung  $\vec{\omega}$  entweder durch die direkte Sternstrahlung (Gl. 12), die Körperreflexion (Gl. 13), die Lichtstreuung einer anderen Atmosphäre oder die Dunkelheit des Weltraums bestimmt. Dies folgt mit den Sternpositionen  $x_S$ , Sternradien  $r_S$ , Körperpositionen  $x_B$ , Körperradien  $r_B$ , sowie Atmosphärenschichthöhen  $h_A$  aus den Distanzen  $D$  zu  $n$  modellierten Sternen, Körpern und Atmosphären.

$$D = \{D(x_0, -\vec{\omega}, x_{S,1}, r_{S,1}), \dots, D(x_0, -\vec{\omega}, x_{S,n}, r_{S,n}), \\ D(x_0, -\vec{\omega}, x_{B,1}, r_{B,1}), \dots, D(x_0, -\vec{\omega}, x_{B,n}, r_{B,n}), \\ D(x_0, -\vec{\omega}, x_{B,1}, r_{B,1} + h_{A,1}), \dots, D(x_0, -\vec{\omega}, x_{B,n}, r_{B,n} + h_{A,n})\}$$

$$L(\lambda, x_0, \vec{\omega}) = \begin{cases} L_{S,1}(\lambda) & \forall d \in D : d \geq D(x_0, -\vec{\omega}, x_{S,1}, r_{S,1}) \\ \vdots & \vdots \\ L_{S,n}(\lambda) & \forall d \in D : d \geq D(x_0, -\vec{\omega}, x_{S,n}, r_{S,n}) \\ L_{B,1}(\lambda, x_{0,1}) & \forall d \in D : d \geq D(x_0, -\vec{\omega}, x_{B,1}, r_{B,1}) \\ \vdots & \vdots \\ L_{B,n}(\lambda, x_{0,n}) & \forall d \in D : d \geq D(x_0, -\vec{\omega}, x_{B,n}, r_{B,n}) \\ L_1(\lambda, x_{1,1}, \vec{\omega}) & \forall d \in D : d \geq D(x_0, -\vec{\omega}, x_{B,1}, r_{B,1} + h_{A,1}) \\ \vdots & \vdots \\ L_n(\lambda, x_{1,n}, \vec{\omega}) & \forall d \in D : d \geq D(x_0, -\vec{\omega}, x_{B,n}, r_{B,n} + h_{A,n}) \\ 0 & \forall d \in D : d = \infty \end{cases} \quad (14)$$

### 5.3 Konzentrationen

Anhand des durch Schwerkraft entstehenden Druckgradienten approximiert eine exponentielle Funktion  $C$  ( $\text{cm}^{-3}$ ) der Höhe  $h_x$  (km) zur Referenzkonzentration  $C_{00}$  ( $\text{cm}^{-3}$ ) und Skalenhöhe  $h_s$  (km) allgemein die grundlegende Verteilung spezifischer Teilchen in einer Atmosphäre. Die Skalenhöhe  $h_s$  beschreibt dabei die Differenz von  $h_x$ , zu dem  $C$  um den Faktor  $e \approx 2,7$  abnimmt, sowie die theoretische Höhe der Teilchenschicht bei einer einheitlichen Kompression auf  $C_{00}$ , da mathematisch  $\int_0^\infty C_{00} \exp\left(-\frac{h_x}{h_s}\right) dh_x = C_{00} h_s$  gilt. Darüber hinaus wirken zu verschiedenen Stoffen auch diverse Mischungs-, Transport- und Emissionsvorgänge auf den vertikalen Konzentrationsverlauf. Sie werden additiv durch die Summe parametrisierter Normalverteilungen modelliert. Dazu ist zu jeder Modalität  $i$  die Höhe  $h_i$  (km), dessen Konzentration  $C_i$  ( $\text{cm}^{-3}$ ), sowie die Standardabweichung  $S_i$  (1) definiert. Damit dabei zur Höhe  $h_x = h_i$  die Gesamtkonzentration  $C \simeq C_i$  gilt, wird jede Modalität um die grundlegende Charakteristik korrigiert und eine marginale Überschneidung der Modalitäten vorausgesetzt.

$$C(h_x) = \underbrace{C_{00} \exp\left(-\frac{h_x}{h_s}\right)}_{\text{Grundlage}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \left( C_i - C_{00} \exp\left(-\frac{h_x}{h_s}\right) \right) \exp\left(-\frac{1}{2} \left( \frac{h_x - h_i}{S_i} \right)^2\right)}_{\text{Modalität Korrektur}} \quad (15)$$

### 5.4 Rayleigh-Streuung

Zur Modellierung der Rayleigh-Streuung durch Gasmoleküle und kleine Aerosolpartikel gelten diese mit einer relativen magnetischen Leitfähigkeit  $\mu_r \approx 1$  als magnetisch neutral, sodass der Brechungsindex mit  $m \approx \sqrt{\epsilon_r}$  allein durch die relative dielektrische Leitfähigkeit bestimmt ist. Aus einem Brechungsindex  $m$  (1) zur Teilchenkonzentration  $C$  ( $\text{cm}^{-3}$ ) ergibt sich infolgedessen die Polarisierbarkeit  $\alpha$  ( $\text{cm}^3$ ) eines Teilchens nach der Lorentz-Lorenz-Gleichung.[19] Sie beschreibt wie leicht elektromagnetische Strahlung in einem Teilchen einen Dipol erzeugt, dessen Oszillation die Wechselwirkung mit dieser bestimmt.

$$\alpha = \frac{3}{4\pi C} \frac{(m^2 - 1)}{(m^2 + 2)} \quad (16)$$

Dazu gilt  $m$  als nicht-komplex, sodass  $\alpha$  ebenfalls reell ist und für den Absorptionsquerschnitt  $\sigma_a^R = \frac{8\pi^2}{\lambda} \text{Re}(i\alpha) = 0 \text{cm}^2$  resultiert.[19] Entsprechend der Rayleigh-Streuung

nach Strutt (1899)[27] ergibt sich dagegen aus  $\alpha$  der Streuquerschnitt  $\sigma_s^R$  ( $\text{cm}^2$ ) zur Wellenlänge  $\lambda$  ( $\text{cm}$ ) proportional zu  $\lambda^{-4}$  und streut damit vermehrt Licht mit geringeren Wellenlängen.[46]

$$\sigma_s^R(\lambda) = \frac{128}{3} \pi^5 \lambda^{-4} \alpha^2 \quad (17)$$

Die richtungsabhängige Streuintensität zu  $\sigma_s^R$  entsteht durch einen oszillierenden Dipol. So ist diese für unpolarisiertes Licht unter dem Winkel  $\theta$  proportional zu  $1 + \cos(\theta)^2$  und bildet normalisiert (Gl. 5) die Phasenfunktion  $p^R$ . [26]

$$p^R(\theta) = \frac{1}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi (1 + \cos(\theta)^2) \sin \theta \, d\theta \, d\phi} (1 + \cos(\theta)^2) = \frac{3}{16\pi} (1 + \cos(\theta)^2) \quad (18)$$

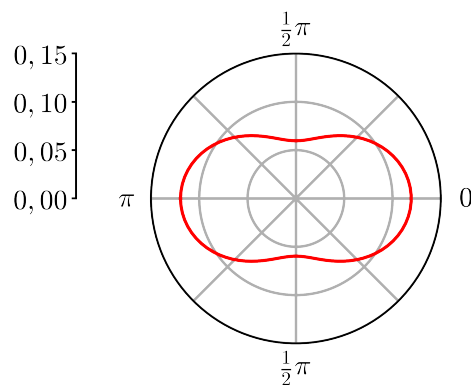


Abbildung 11: Die modellierte winkelabhängige Streuintensität der Rayleigh-Streuung (Gl. 18)

## 5.5 Mie-Streuung

Anders als bei der Rayleigh-Streuung ist für die hinreichende Modellierung der Mie-Streuung durch Aerosolpartikel die Berücksichtigung der Partikelgrößen erforderlich. Typische Größenverteilungen lassen sich hierzu durch die Summe logarithmischer Normalverteilungen abbilden, sodass eine Anzahlverteilung  $N$  ( $\text{cm}^{-3} \mu\text{m}^{-1}$ ) der Partikelradien  $r$  ( $\mu\text{m}$ ) pro Modalität  $s$  durch das geometrische Mittel  $\bar{r}_g$  ( $\mu\text{m}$ ), die geometrische Standardabweichung  $S_g$  ( $\mu\text{m}$ ) und die Partikelkonzentration  $n$  ( $\text{cm}^{-3}$ ) bestimmt ist.[29]

$$N(r) = \frac{dn(r)}{dr} = \sum_{s=1}^{n_s} \frac{n_s}{S_{g,s} r \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{\ln r - \ln \bar{r}_{g,s}}{S_{g,s}} \right)^2 \right) \quad (19)$$

Zu einem Partikelradius  $r$  (cm) sind die korrespondierenden Wirkungsquerschnitte durch die Anwendung der Lorenz-Mie-Theorie definiert. Da dessen Berechnungen eine hohe Komplexität aufweisen, ist der Extinktionsquerschnitt  $\sigma_t^{\text{M,R}}$  (cm<sup>2</sup>) zu  $r$  und der Wellenlänge  $\lambda$  (cm) für sphärische Partikel der Größe  $2\pi r \ll \lambda$  mit dem Brechungsindex  $m$  (1) hinreichend durch eine kürzere Berechnung bestimmt.[19]

$$\sigma_t^{\text{M,R}}(\lambda, r) = \frac{128\pi^5 r^6}{3\lambda^4} \operatorname{Re} \left( \left( \frac{m^2 - 1}{m^2 + 2} \right)^2 \right) - \frac{8\pi^2 r^3}{\lambda} \operatorname{Im} \left( \frac{m^2 - 1}{m^2 + 2} \right) \quad (20)$$

Auch zu größeren Partikeln bei  $2\pi r \gg \lambda$  existiert mit  $\sigma_t^{\text{M,G}}$  (cm<sup>2</sup>) eine praktische Beschreibung.[20][2]

$$\sigma_t^{\text{M,G}}(\lambda, r) = 2\pi r^2 \left( 1 + \left( \frac{2\pi r}{\lambda} \right)^{-\frac{2}{3}} \right) \quad (21)$$

Daraufhin ist der Mie-Extinktionsquerschnitt  $\sigma_t^{\text{M}}$  (cm<sup>2</sup>) für alle Partikelgrößen der Anzahlverteilung  $N$  (cm<sup>-3</sup> μm<sup>-1</sup>) von  $2\pi r \ll \lambda$  bis  $2\pi r \gg \lambda$  annähernd durch die Hälfte des harmonischen Mittels von  $\sigma_t^{\text{M,R}}$  und  $\sigma_t^{\text{M,G}}$  bestimmt, sodass schließlich  $\sigma_t^{\text{M}}$  zu  $\lambda$  für ein durchschnittliches Partikel resultiert.[6]

$$\sigma_t^{\text{M}}(\lambda) = \frac{1}{\int N(r) dr} \int \frac{\sigma_t^{\text{M,R}}(\lambda, r) \sigma_t^{\text{M,G}}(\lambda, r)}{\sigma_t^{\text{M,R}}(\lambda, r) + \sigma_t^{\text{M,G}}(\lambda, r)} N(r) dr \quad (22)$$

Partikel dieser Größen absorbieren dabei einen signifikanten Anteil sichtbarer Lichtstrahlung. Entsprechend der Grundsätze zur Extinktion (Gl. 2) beschreibt dazu das Streualbedo  $a_s$  (1) das Verhältnis von  $\sigma_t^{\text{M}}$  zum Streuquerschnitt  $\sigma_s^{\text{M}}$  (cm<sup>2</sup>), sowie den Absorptionsquerschnitt  $\sigma_a^{\text{M}}$  (cm<sup>2</sup>) zu  $\lambda$ .

$$\begin{aligned} \sigma_s^{\text{M}}(\lambda) &= a_s \sigma_t^{\text{M}}(\lambda) \\ \sigma_a^{\text{M}}(\lambda) &= (1 - a_s) \sigma_t^{\text{M}}(\lambda) \end{aligned} \quad (23)$$

Die richtungsabhängige Streuintensität zu  $\sigma_s^{\text{M}}$  wird näherungsweise von Cornette und Shanks (1992, 1995)[51][52] als Erweiterung der Henyey-Greenstein-Phasenfunktion beschrieben. Sie ergibt sich normalisiert (Gl. 5) als  $p^{\text{M}}$  (1) zum Winkel  $\theta$  (rad) mit dem Parameter  $g \in (-1; 1)$ , der die von der Partikel-Größen-Verteilung (Gl. 19) abhängige

Anisotropie der Mie-Streuung modelliert, sodass bei  $g = 0 \rightarrow p^M(\theta) = p^R(\theta)$  gilt.

$$\begin{aligned}
 p^M(\theta) &= \frac{1}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( \frac{(1-g^2)}{(2+g^2)} \frac{(1+\cos(\theta)^2)}{(1+g^2-2g\cos(\theta))^{\frac{3}{2}}} \right) \sin \theta \, d\theta \, d\phi} \frac{(1-g^2)}{(2+g^2)} \frac{(1+\cos(\theta)^2)}{(1+g^2-2g\cos(\theta))^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \frac{3}{8\pi} \frac{(1-g^2)}{(2+g^2)} \frac{(1+\cos(\theta)^2)}{(1+g^2-2g\cos(\theta))^{\frac{3}{2}}}
 \end{aligned} \tag{24}$$

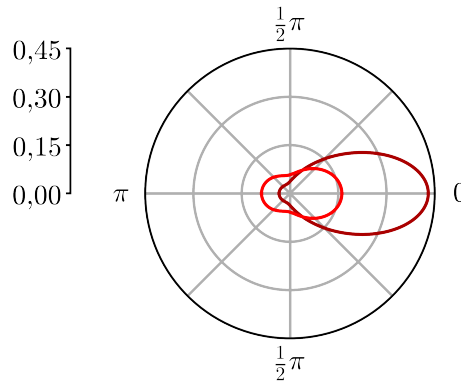


Abbildung 12: Die modellierte winkelabhängige Streuintensität der Mie-Streuung (Gl. 24) zu  $g = 0.1$  und  $g = 0.4$

## 5.6 Spezifische Wirkungsquerschnitte

Neben der Rayleigh- und Mie-Streuung die durch diverse Teilchen entstehen, sind Wirkungsquerschnitte zu spezifischen Stoffen direkt durch korrespondierende Messwerte modelliert. So ergibt sich ein Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  zur Wellenlänge  $\lambda$  durch die lineare Interpolation der Messwerte bei  $\lambda_0$  und  $\lambda_1$  mit  $\lambda_0 \leq \lambda$  und  $\lambda_1 > \lambda$ .

$$\sigma(\lambda) = \sigma_{\lambda_0} + (\lambda - \lambda_0) \frac{\sigma_{\lambda_1} - \sigma_{\lambda_0}}{\lambda_1 - \lambda_0} \tag{25}$$

## 5.7 Atmosphärische Rendergleichung

Die modellierte Atmosphäre besteht innerhalb ihrer Grenzen (Gl. 11) aus mehreren Konzentrationsprofilen (Gl. 15) mit je einheitlichen Wechselwirkungen (Gl. 17, 18, 23, 24, 25) und bestimmt damit ausgehend von der volumetrischen Rendergleichung (Gl. 10) die

Strahlungsdichte  $L$  zur Wellenlänge  $\lambda$  bei der Blickposition  $x_C$ . Dazu ergibt sich die gesamte Durchlässigkeit  $T$  zu  $\lambda$  zwischen  $x_0$  und  $x_1$  bei  $n_k$  Komponenten aus dem Produkt der einzelnen Durchlässigkeiten (Gl. 8). Die zu  $\lambda$  bei  $x_j$  aus allen Raumrichtungen  $4\pi sr$  in Richtung  $\vec{\omega}$  eingestreuete Strahlungsdichte entsteht dem entgegen aus der Summe der jeweils eingestreuerten Strahlung (Gl. 7).<sup>6</sup>

$$L(\lambda, x_C, \vec{\omega}) = \left( \prod_{k=1}^{n_k} T_k(\lambda, x_0, x_1) \right) L(\lambda, x_0, \vec{\omega}) + \int_{x_0}^{x_1} \left( \prod_{k=1}^{n_k} T_k(\lambda, x_j, x_1) \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^{n_k} \sigma_{s,k}(\lambda) C_k(h_{x_j}) \int_{4\pi sr} p_k(\arccos(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}_i)) L(\lambda, x_j, \vec{\omega}_i) d\vec{\omega}_i \right) dx_j \quad (26)$$

## 5.8 Validität

Die Gültigkeit des beschriebenen atmosphärischen Lichtmodells entsteht aus den Annahmen zum volumetrischen Lichtmodell (Kap. 4.7), sowie weiteren Vereinfachungen zur reduzierten physischen und physikalischen Modellierung. Mit jeweils konstanten Radien sind Sterne, planetare Körper und Atmosphären hierbei radialsymmetrisch abgebildet. Dazu sind die Konzentrationen innerhalb einer Atmosphäre durch die additive Erweiterung in dieser Arbeit vertikal ausführlich einstellbar, berücksichtigen jedoch keine Temperaturgradienten und sind einzig zur Höhe bestimmt. Demnach exkludiert das resultierende Modell nicht-sphärische astronomische Objekte, die Wirkung von Kräften auf das hydrostatische Gleichgewicht, wie auch meteorologische Phänomene zu denen die Teilchenanzahl horizontal variiert. Weiterhin werden Sterne näherungsweise als Schwarzkörperstrahler betrachtet, sodass modellierte Emissionsspektren keine distinkten Spektrallinien wiedergeben. Die modellierte Lichtreflexion bei Oberflächen setzt zudem eine absolut diffuse Reflexion voraus, wodurch spiegelnde Eigenschaften wie etwa die einer Wasseroberfläche nicht dargestellt werden. Des Weiteren sind die Berechnungen zu Wechselwirkungen von Licht inhärent approximativ, da sie andererseits eine vollständige Lösung der Maxwell Gleichung durch die Lorenz-Mie-Theorie erfordern.[19] Die expliziten Formulierungen dieses Modells beschränken sich dabei auf die Streuung und Absorption von unpolarisiertem Licht zur Rayleigh- und Mie-Streuung durch sphärische amagnetische Teilchen. Damit einher geht jeweils auch die näherungsweise Beschreibung der richtungsabhängigen Streuintensität.

---

<sup>6</sup>Der Emissions-Term der volumetrischen Rendergleichung (Gl. 10) entfällt, da keine der modellierten Wechselwirkung Licht emittiert.

## 6 Computergrafische Simulation

### 6.1 Farbmimetrische Übersetzung

Anstatt die farbmimetrische Wahrnehmung des sichtbaren Spektrums nach der Evaluation spektraler Wechselwirkungen (Gl. 8, 13, 26) zu berechnen, ist es sinnvoll, spektrale Parameter direkt durch farbmimetrische Positionen zu beschreiben. Entsprechend der Vorgehensweise von Ward und Eydberg-Vileshin (2002)[18] wird dabei aus der durch die modellierten Sterne jeweils emittierten spektralen Strahlungsdichte  $L_S$  ( $\text{W m}^{-2} \text{sr}^{-1} \text{nm}^{-1}$ ) zur Wellenlänge  $\lambda$  (Gl. 12) zunächst mit den Spektralwertfunktionen  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  und  $\bar{z}$  des 2-Grad-Betrachters nach CIE 11664-1:2019[23] die korrespondierende XYZ-Koordinate im CIE-Normfarbsystem bestimmt und diese daraufhin mit  $M_{\text{Sharp}}$  als  $L_{S,\text{SharpRGB}}$  in den Sharp- $\text{RGB}$ -Farbraum [42] transformiert.

$$M_{\text{Sharp}} = \begin{bmatrix} 1,2694 & -0,0988 & -0,1706 \\ -0,8364 & 1,8006 & 0,0357 \\ 0,0297 & -0,0315 & 1,0018 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$L_{S,\text{SharpRGB}} = \begin{bmatrix} L_{S,\text{SharpR}} \\ L_{S,\text{SharpG}} \\ L_{S,\text{SharpB}} \end{bmatrix} = M_{\text{Sharp}} \begin{bmatrix} \int_{\lambda} L_S(\lambda) \bar{x}(\lambda) d\lambda \\ \int_{\lambda} L_S(\lambda) \bar{y}(\lambda) d\lambda \\ \int_{\lambda} L_S(\lambda) \bar{z}(\lambda) d\lambda \end{bmatrix}$$

Die so bestimmten Koordinaten werden daraufhin als  $L'_{S,\text{SharpRGB}}$  im Verhältnis zu ihrer dominanten<sup>7</sup> Lichtquelle  $L_{S,\text{SharpRGB}}^{\text{ref}}$  beschrieben.

$$L'_{S,\text{SharpRGB}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_{S,\text{SharpR}}^{\text{ref}}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{S,\text{SharpG}}^{\text{ref}}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_{S,\text{SharpB}}^{\text{ref}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{S,\text{SharpR}} \\ L_{S,\text{SharpG}} \\ L_{S,\text{SharpB}} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Für Flächenalbedos  $\alpha$  und Wirkungsquerschnitte  $\sigma$  zu  $\lambda$  entstehen daraufhin mit  $L_{S,\text{SharpRGB}}^{\text{ref}}$  und dem dazu dazugehörigen Spektrum  $L_S^{\text{ref}}$  zu  $\lambda$ , sowie  $M_{\text{Sharp}}$  die jeweils korrespondie-

<sup>7</sup>Die Relevanz eines Sterns ist hierbei sowohl durch dessen Größe, Distanz und Emissionsspektrum bestimmt.



renden chromatisch normalisierten Positionen  $\alpha'_{\text{SharpRGB}}$  und  $\sigma'_{\text{SharpRGB}}$ . [18][42]

$$\begin{aligned} \alpha'_{\text{SharpRGB}} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{L_{\text{S,SharpR}}^{\text{ref}}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{\text{S,SharpG}}^{\text{ref}}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_{\text{S,SharpB}}^{\text{ref}}} \end{bmatrix} M_{\text{Sharp}} \begin{bmatrix} \int_{\lambda} L_{\text{S}}^{\text{ref}}(\lambda) \alpha(\lambda) \bar{x}(\lambda) d\lambda \\ \int_{\lambda} L_{\text{S}}^{\text{ref}}(\lambda) \alpha(\lambda) \bar{y}(\lambda) d\lambda \\ \int_{\lambda} L_{\text{S}}^{\text{ref}}(\lambda) \alpha(\lambda) \bar{z}(\lambda) d\lambda \end{bmatrix} \\ \sigma'_{\text{SharpRGB}} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{L_{\text{S,SharpR}}^{\text{ref}}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{\text{S,SharpG}}^{\text{ref}}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_{\text{S,SharpB}}^{\text{ref}}} \end{bmatrix} M_{\text{Sharp}} \begin{bmatrix} \int_{\lambda} L_{\text{S}}^{\text{ref}}(\lambda) \sigma(\lambda) \bar{x}(\lambda) d\lambda \\ \int_{\lambda} L_{\text{S}}^{\text{ref}}(\lambda) \sigma(\lambda) \bar{y}(\lambda) d\lambda \\ \int_{\lambda} L_{\text{S}}^{\text{ref}}(\lambda) \sigma(\lambda) \bar{z}(\lambda) d\lambda \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

Die Farbwahrnehmung  $L'_{\text{SharpRGB}}$  der atmosphärischen Strahlungsdichte  $L$  (Gl. 26) ist infolgedessen durch die Substitution der spektralen Operatoren (Gl. 13, 26) mit  $L'_{\text{S,SharpRGB}}$ ,  $\alpha'_{\text{SharpRGB}}$  und  $\sigma'_{\text{SharpRGB}}$  hinreichend beschrieben. Um  $L'_{\text{SharpRGB}}$  anschließend auf einem Bildschirm zu reproduzieren, wird zunächst anhand der CIE-Normbeleuchtung D65 nach CIE 11664-2:2022[24] der normalisierte Weißpunkt des sRGB-Farbraums  $\text{D65}_{\text{SharpRGB}}$  im Sharp-RGB-Farbraum gebildet.

$$\begin{aligned} \text{D65}_{\text{XYZ}} &= \begin{bmatrix} \int_{\lambda} \text{D65}(\lambda) \bar{x}(\lambda) d\lambda \\ \int_{\lambda} \text{D65}(\lambda) \bar{y}(\lambda) d\lambda \\ \int_{\lambda} \text{D65}(\lambda) \bar{z}(\lambda) d\lambda \end{bmatrix} \\ \text{D65}_{\text{SharpRGB}} &= M_{\text{Sharp}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\text{D65}_Y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\text{D65}_Y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\text{D65}_Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{D65}_X \\ \text{D65}_Y \\ \text{D65}_Z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (30)$$

$L'_{\text{SharpRGB}}$  adaptiert daraufhin  $\text{D65}_{\text{SharpRGB}}$  als neuen Weißpunkt und wird mit  $M_{\text{sRGB}}$  nach CIE 61966-2-1:1999[22] als  $L'_{\text{sRGB}}$  in den linearen sRGB-Farbraum transformiert.

$$\begin{aligned} M_{\text{sRGB}} &= \begin{bmatrix} 3,2406255 & -1,5372080 & -0,4986286 \\ -0,9689307 & 1,8757561 & 0,0415175 \\ 0,0557101 & -0,2040211 & 1,0569959 \end{bmatrix} \\ L'_{\text{sRGB}} &= M_{\text{sRGB}} M_{\text{Sharp}}^{-1} \begin{bmatrix} \text{D65}_{\text{SharpR}} & 0 & 0 \\ 0 & \text{D65}_{\text{SharpG}} & 0 \\ 0 & 0 & \text{D65}_{\text{SharpB}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L'_{\text{SharpR}} \\ L'_{\text{SharpG}} \\ L'_{\text{SharpB}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (31)$$

Zur finalen Transformation von  $L'_{\text{sRGB}}$  in den normalen sRGB-Farbraum wird zuletzt eine Gamma Korrektur nach CIE 61966-2-1:1999[22] angewendet.

## 6.2 Numerische Integration

Die näherungsweise Berechnung von Integralen über eine Strecke (Gl. 8, 10, 26) wird in der Computergrafik als Ray-Marching bezeichnet. Dabei werden zu einer beliebigen Funktion  $f$  zwischen  $x_0$  und  $x_1$  mit der Verteilung  $x_P$   $n_j$  Probepositionen gebildet zu denen mit dem Funktionswert und der Segmentbreite jeweils die riemannsche Zwischen-summe bestimmt wird.

$$\begin{aligned} x_j(x_0, x_1, n_j, j) &= \left( x_P(x_0, x_1, n_j, j-1) + x_P(x_0, x_1, n_j, j) \right) \frac{1}{2} \\ x_{|j|}(x_0, x_1, n_j, j) &= \left| \overrightarrow{x_P(x_0, x_1, n_j, j-1) x_P(x_0, x_1, n_j, j)} \right| \\ \int_{x_0}^{x_1} f(x_j) dx_j &= \lim_{n_j \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n_j} f(x_j(x_0, x_1, n_j, j)) x_{|j|}(x_0, x_1, n_j, j) \end{aligned} \quad (32)$$

In ähnlicher Weise sind auch Integrale über einen Raumwinkel  $\Omega$  (Gl. 7, 10, 26) zu  $n_i$  Richtungen numerisch integriert.

$$\int_{\Omega} f(\vec{\omega}_i) d\vec{\omega}_i = \lim_{n_i \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n_i} f(\vec{\omega}_i(\Omega, n_i, i)) \tilde{\omega}_{|i|}(\Omega, n_i, i) \quad (33)$$

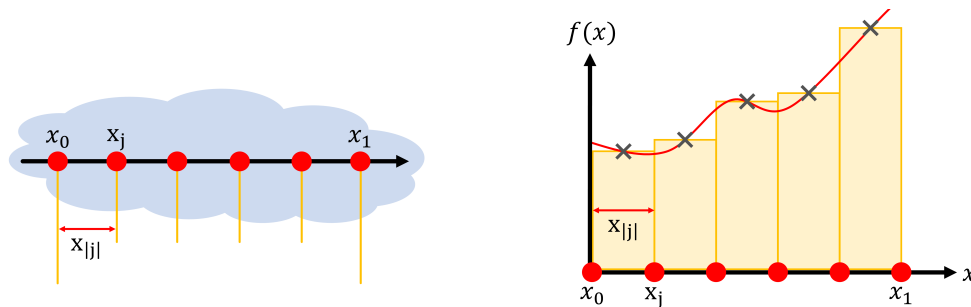


Abbildung 13: Riemann-Summen zur Annäherung eines Integrals entlang einer Strecke über  $f(x)$  mit Ray-Marching

## 6.3 Vorberechnung

Da eine hinreichende Evaluation der atmosphärischen Rendergleichung (Gl. 26) durch numerische Integration (32, 33) auch bei vorausgehender Übersetzung spektraler Eigenschaften (Gl. 27, 28, 29) zur Laufzeit nicht echtzeitfähig ist, sind Vorberechnungen notwendig. Eine direkte multidimensionale Diskretisierung würde dabei Unmengen an

Rechenaufwand und Speicherplatz benötigen. Stattdessen werden einzelne Subterme im Hinblick auf die Radialsymmetrie des zugrunde liegenden atmosphärischen Modells (Gl. 11, 15) in ihren Dimensionen reduziert und entsprechend für die Vorberechnung optimiert.

### 6.3.1 Durchlässigkeit

Die Durchlässigkeit einer Atmosphäre  $T$  berechnet sich innerhalb dieser zwischen den Positionen  $x_0$  und  $x_1$  zur Wellenlänge  $\lambda$  bei  $n_k$  Komponenten aus dessen Extinktionsquerschnitten  $\sigma_t$  zu  $\lambda$  und Konzentrationen  $C$  zur Höhe  $h_x$ .

$$T(\lambda, x_0, x_1) = \prod_{k=1}^{n_k} \exp\left(-\sigma_{t,k}(\lambda) \int_{x_0}^{x_1} C_k(h_{x_j}) dx_j\right) \quad (34)$$

Gilt dabei  $x_0 = x_0$  (Gl. 11), so liegt  $x_0$  bei der Körperoberfläche oder der äußeren Atmosphärengrenze. Die dazu korrespondierende Durchlässigkeit  $T'$  ist in einem radialsymmetrischen Modell mit dem Körperzentrum  $x_B$  und dem Körperradius  $r_B$  zu der Höhe  $h \in [0; h_A]$  und dem Lichtwinkel  $\beta \in [0; \pi]$  bestimmt und berechnet sich entsprechend bei den Positionen  $x_h$  aus den Lichtrichtungen  $\omega_{\vec{\beta}h}$ . [44]

$$\begin{aligned} x_h &\in \{x : |\overrightarrow{x_B x}| - r_B = h\} \\ \omega_{\vec{\beta}h} &\in \left\{ \vec{\omega} : \arccos\left(\frac{\overrightarrow{x_B x_h} \cdot \vec{\omega}}{|\overrightarrow{x_B x_h}|}\right) = \beta \right\} \end{aligned} \quad (35)$$

$$T'(\lambda, h, \beta) = T\left(\lambda, x_0(x_h, \omega_{\vec{\beta}h}), x_h\right)$$

Mit der Division des nicht relevanten Teilabschnitts entsteht dabei wieder die vollständige Abbildung  $T$  zu  $x_0$  und  $x_1$ . [17]

$$T(\lambda, x_0, x_1) = \frac{T'\left(\lambda, |\overrightarrow{x_B x_0}| - r_B, \arccos\left(\frac{\overrightarrow{x_B x_0} \cdot \overrightarrow{x_0 x_1}}{|\overrightarrow{x_B x_0}| \cdot |\overrightarrow{x_0 x_1}|}\right)\right)}{T'\left(\lambda, |\overrightarrow{x_B x_1}| - r_B, \arccos\left(\frac{\overrightarrow{x_B x_1} \cdot \overrightarrow{x_0 x_1}}{|\overrightarrow{x_B x_1}| \cdot |\overrightarrow{x_0 x_1}|}\right)\right)} \quad (36)$$

### 6.3.2 Oberflächenreflexion

Die reflektierte Strahlungsdichte  $L_B$  ergibt sich zur Wellenlänge  $\lambda$  bei einer Positionen  $x$  auf einer vollständig diffusen Körperoberfläche mit dem Albedo  $\alpha$  zu  $\lambda$  und dem Zentrum  $x_B$  aus der aus den Richtungen  $\vec{\omega}_i$  der Hemisphäre  $2\pi sr$  jeweils einfallenden Lichtstrahlung  $L$ .

$$L_B(\lambda, x) = \alpha(\lambda) \int_{2\pi sr} b_I \left( \vec{\omega}_i, \frac{\overrightarrow{x_B x}}{|\overrightarrow{x_B x}|} \right) L(\lambda, x, \vec{\omega}_i) d\vec{\omega}_i \quad (37)$$

In einem radialsymmetrischen Modell beschreibt  $L'_B$  dazu die normalisierte reflektierte Strahlungsdichte zu  $\lambda$  unter dem Lichtquellenwinkel  $\beta \in [0; \pi]$  und berechnet sich entsprechend bei jeder Oberflächenposition  $x_1$  aus den Lichtquellenrichtungen  $\vec{\omega}_{\beta 1}$ . [17]

$$x_1 \in \{x : |\overrightarrow{x_B x}| - r_B = 0\}$$

$$\vec{\omega}_{\beta 1} \in \left\{ \vec{\omega} : \arccos \left( \frac{\overrightarrow{x_B x_1}}{|\overrightarrow{x_B x_1}|} \cdot \vec{\omega} \right) = \beta \right\}$$

$$\begin{aligned} L'_B(\lambda, \beta) &= \alpha(\lambda) b_I \left( \vec{\omega}_{\beta 1}, \frac{\overrightarrow{x_B x_1}}{|\overrightarrow{x_B x_1}|} \right) T'(\lambda, 0, \beta) \\ &+ \alpha(\lambda) \int_{2\pi sr} b_I \left( \vec{\omega}_i, \frac{\overrightarrow{x_B x_1}}{|\overrightarrow{x_B x_1}|} \right) \int_{x_0(x_1, \vec{\omega}_i)}^{x_1} T(\lambda, x_j, x_1) \\ &\cdot L'_s \left( \lambda, |\overrightarrow{x_B x_j}| - r_B, \arccos \left( \frac{\overrightarrow{x_B x_j} \cdot \vec{\omega}_{\beta 1}}{|\overrightarrow{x_B x_j}|} \right), \arccos \left( \frac{\overrightarrow{x_B x_j} \cdot \vec{\omega}_i}{|\overrightarrow{x_B x_j}|} \right), \arccos(\vec{\omega}_{\beta 1} \cdot \vec{\omega}_i) \right) \\ &\cdot dx_j d\vec{\omega}_i \end{aligned} \quad (38)$$

Um mit  $L'_B$  die komplette Abbildung  $L_B$  zu  $\lambda$  bei  $x$  zu beschreiben, wird die bei der äußeren Atmosphärenengrenze  $x_0$  initiale Lichtstrahlung  $L$  (Gl. 14) aller Richtungen  $4\pi sr$  multipliziert.

$$L_B(\lambda, x) = \int_{4\pi sr} L'_B \left( \lambda, \arccos \left( \frac{\overrightarrow{x_B x}}{|\overrightarrow{x_B x}|} \cdot \vec{\omega}_i \right) \right) L(\lambda, x_0, \vec{\omega}_i) d\vec{\omega}_i \quad (39)$$

### 6.3.3 Einstreuung

Die bei einer Position  $x$  zur Wellenlänge  $\lambda$  in Richtung  $\vec{\omega}$  eingestreurte Lichtstrahlung  $L_s$  berechnet sich innerhalb einer Atmosphäre mit  $n_k$  Komponenten zu dessen Streuquerschnitten  $\sigma_s$  zu  $\lambda$ , Konzentrationen  $C$  zur Höhe  $h_x$  und Phasenfunktionen  $p$  zum Winkel  $\theta$ , sowie der aus allen Richtungen  $4\pi sr$  jeweils einfallenden Lichtstrahlung  $L$ .

$$L_s(\lambda, x, \vec{\omega}) = \sum_{k=1}^{n_k} \sigma_{s,k}(\lambda) C_k(h_x) \int_{4\pi sr} p_k(\arccos(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}_i)) L(\lambda, x, \vec{\omega}_i) d\vec{\omega}_i \quad (40)$$

Dazu beschreibt  $L'_s$  in einem radialsymmetrischen Modell mit dem Körperzentrum  $x_B$  und dem Körperradius  $r_B$  die normalisierte eingestreurte Strahlungsdichte zu  $\lambda$ , der Höhe  $h \in [0; h_A]$ , dem Lichtquellenwinkel  $\beta \in [0; \pi]$ , dem Lichtwinkel  $\gamma \in [0; \pi]$ , sowie dem Streuwinkel  $\delta \in [0; \pi]$  und berechnet sich infolgedessen bei allen Positionen  $x_h$  zu den Lichtquellenrichtungen  $\vec{\omega}_{\beta h}$  und Lichtrichtungen  $\vec{\omega}_{\gamma h}$ .

$$\begin{aligned} x_h &\in \{x : |\vec{x}_B \vec{x}| - r_B = h\} \\ \vec{\omega}_{\beta h} &\in \left\{ \vec{\omega} : \arccos\left(\frac{\vec{x}_B \vec{x}_h}{|\vec{x}_B \vec{x}_h|} \cdot \vec{\omega}\right) = \beta \wedge \arccos(\vec{\omega}_{\gamma h} \cdot \vec{\omega}) = \delta \right\} \\ \vec{\omega}_{\gamma h} &\in \left\{ \vec{\omega} : \arccos\left(\frac{\vec{x}_B \vec{x}_h}{|\vec{x}_B \vec{x}_h|} \cdot \vec{\omega}\right) = \gamma \wedge \arccos(\vec{\omega}_{\beta h} \cdot \vec{\omega}) = \delta \right\} \end{aligned}$$

$$L'_i(\lambda, x, \vec{\omega}) = \begin{cases} L'_B\left(\lambda, \arccos\left(\frac{\vec{x}_B \vec{x}}{|\vec{x}_B \vec{x}|} \cdot \vec{\omega}\right)\right) & |\vec{x}_B \vec{x}| - r_B \leq 0 \\ 1 & |\vec{x}_B \vec{x}| - r_B > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L'_s(\lambda, h, \beta, \gamma, \delta) &= \sum_{k=1}^{n_k} \sigma_{s,k}(\lambda) C_k(h) p_k(\delta) T'(\lambda, h, \beta) L'_i\left(\lambda, x_0(x_h, \vec{\omega}_{\beta h}), \vec{\omega}_{\beta h}\right) \\ &+ \sigma_{s,k}(\lambda) C_k(h) \int_{4\pi sr} p_k\left(\arccos(\vec{\omega}_{\gamma h} \cdot \vec{\omega}_i)\right) \int_{x_0(x_h, \vec{\omega}_i)}^{x_h} T(\lambda, x_j, x_h) \\ &\cdot L'_s\left(\lambda, |\vec{x}_B \vec{x}_j| - r_B, \arccos\left(\frac{\vec{x}_B \vec{x}_j}{|\vec{x}_B \vec{x}_j|} \cdot \vec{\omega}_{\beta h}\right), \arccos\left(\frac{\vec{x}_B \vec{x}_j}{|\vec{x}_B \vec{x}_j|} \cdot \vec{\omega}_i\right), \arccos(\vec{\omega}_{\beta h} \cdot \vec{\omega}_i)\right) \\ &\cdot dx_j d\vec{\omega}_i \end{aligned} \quad (41)$$

Um mit  $L'_s$  die komplette Abbildung  $L_s$  zu  $\lambda$  bei  $x$  in Richtung  $\vec{\omega}$  zu beschreiben, wird die bei der äußeren Atmosphärenengrenze  $x_0$  initiale Lichtstrahlung  $L$  (Gl. 14) aller Richtungen

$4\pi sr$  multipliziert.

$$\begin{aligned}
L_s(\lambda, x, \vec{\omega}) &= \int_{4\pi sr} L(\lambda, x_0, \vec{\omega}_i) \\
&\cdot L'_s \left( \lambda, |\vec{x}_B \vec{x}| - r_B, \arccos \left( \frac{\vec{x}_B \vec{x} \cdot \vec{\omega}_i}{|\vec{x}_B \vec{x}|} \right), \arccos \left( \frac{\vec{x}_B \vec{x} \cdot \vec{\omega}}{|\vec{x}_B \vec{x}|} \right), \arccos(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}_i) \right) \\
&\cdot d\vec{\omega}_i
\end{aligned} \tag{42}$$

### 6.3.4 Mehrfache Streuung

Anders als die Durchlässigkeit sind die Einstreuung und dadurch auch die Oberflächenreflexion rekursiv zu berechnen. Sie repräsentieren dadurch die Mehrfachstreuung von Licht und können ausgehend von  $L'_B = 0$  und  $L'_s = 0$  iterativ bis zu einer erforderlichen Ordnung bestimmt werden. Die Bedeutung dieser ergibt sich dabei aus den modellierten Eigenschaften einer Atmosphäre. So sind in einer erdähnlichen Modellierung die visuellen Unterschiede ab vier Ordnungen mit dem bloßen Auge nicht mehr zu quantifizieren, wogegen dichtere Atmosphären wie die des Neptun oder des Saturn auch von höheren Streuordnungen profitieren.

## 6.4 Validität

Gegenüber anderen dreidimensionalen Farbräumen, wie dem XYZ- oder dem linearen sRGB-Farbraum optimiert die verwendete farbmétrische Beschreibung spektraler Eigenschaften im Sharp-Farbraum nach Ward und Eydelberg-Vileshin (2002)[18] die photométrische Präzision zur Bildsynthese. Dennoch induziert diese Reduktion im Vergleich zu multispektralen Berechnungen einen messbaren Fehler, der jedoch im Kontext der digitalen Farbproduktion mehrheitlich unbedeutend ist.[18] Die Präzision der numerischen Integration ist dagegen von der Anzahl der Probestellen und der gegebenenfalls an die Abbildung angepassten Verteilungsfunktionen Abhängig. Sowohl sie als auch die farbmétrische Übersetzung prägen die Qualität der Vorberechnungen, die in ihren Grundsätzen parallele Lichtquellenstrahlen modellieren und voraussetzen. Die dazu entstehenden Ergebnisse sind in ihrer gesamten Genauigkeit insbesondere durch die jeweilige Auflösung, sowie die berechnete Streuordnung bestimmt und weiterhin durch Interpolationsverfahren und speziell skalierten Dimensionen optimierbar.[17]

## 7 Implementation

### 7.1 Struktur

Zur Umsetzung des beschriebenen computergrafischen Modells ergibt sich für eine Atmosphäre die Schritte der Konfiguration, der Vorberechnung, die Anordnung in einer Szene, sowie die Bildsynthese. Bei der Konfiguration wird zu jeder Atmosphäre die maximal dargestellte Höhe und eine Referenz zur dominanten Lichtquelle angegeben. Die wesentlichen Eigenschaften ergeben sich dazu jedoch aus den Komponenten. Sie repräsentieren alle Eigenschaften eines modellierten Teilchentyps. Da die Eingabe dabei variiert werden zur Vorbereitung auf die Vorberechnung benötigte Werte berechnet. So ist etwa die Angabe der Teilchenkonzentration beim Nullniveau entweder direkt oder durch Gasdruck und Temperatur anhand dem Gesetz zu idealen Gasen beschrieben. Das Gleiche gilt zur Berechnung der Skalenhöhe nach der barometrischen Höhenformel, zu der die isotherme Atmosphärentemperatur, die Partikelmasse und die Gravitation gegeben sind.[40] Neben diesen simplen Umrechnungen wird hierbei, sofern nicht direkt bestimmt (Gl. 25, 29), auch der Streu- und Extinktionquerschnitt evaluiert. Die Berechnung ergibt sich dazu nach der Rayleigh-Streuung mit dem reellen Brechungsindex (Gl. 16, 17) oder nach der Mie-Streuung mit der Partikelgrößenverteilung (Gl. 19), dem komplexe Brechungsindex und dem Streualbedo (Gl. 23). Aus den resultierenden Wirkungsquerschnitten zur Wellenlänge werden mit dem Emissionsspektrum der dominanten Lichtquelle zuletzt die korrespondierenden Koordinaten im Sharp-RGB-Farbraum bestimmt (Gl. 27, 29). Die so verarbeiteten Komponenten werden mit dem Radius und dem Oberflächenalbedo des korrespondierenden planetaren Körpers zur Vorberechnung verwendet (Gl. 35, 38, 41). Weitere Angaben zur Berechnungstiefe, Anzahl der Probepositionen und Proberichtungen (Gl. 32, 33), sowie zur Auflösung der zu berechnenden Texturen bestimmen dazu die Präzision und den Detailgrad. Die tatsächliche Berechnung wird hierbei von einem Grafikprogramm ausgeführt, zu dem entsprechend kommuniziert und Daten übertragen werden. Die so erstellten Texturen werden zusammen mit einem planetaren Körper während der Bildsynthese zur Darstellung atmosphärischer Wechselwirkungen verwendet. In einer Szene sind zur räumlichen Modellierung dabei sowohl Sterne, als auch planetare Körper angeordnet. Die jeweiligen Positionen sind dazu wahlweise durch direkte Koordinaten oder entsprechend einer Umlaufbahn mit Referenzposition, Distanz, sowie Höhen- und Azimutwinkel beschrieben.

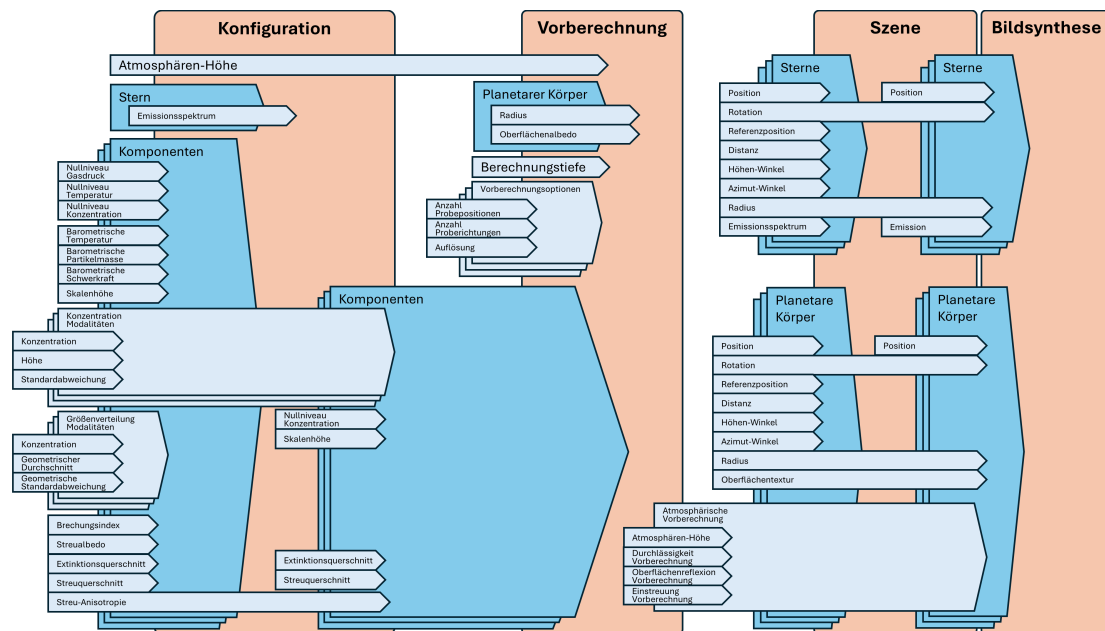


Abbildung 14: Diagramm zur Übersicht der Verarbeitung der Systemeingaben

## 7.2 Vorberechnung

Die Vorberechnung einer konfigurierten Atmosphäre wird asynchron durch eine Benutzerinteraktion ausgelöst und erfolgt in einzelnen Schritten. Nach dem Start werden dazu die Daten der Komponenten der Atmosphäre an das Grafikprogramm übermittelt. Die Berechnungsoptionen zur Durchlässigkeit werden gesetzt, worauf diese zuerst berechnet wird, da sie sich nicht durch andere Vorberechnung ergibt (Gl. 35). Nach der Rückgabe aus dem Grafikprogramm wird die Durchlässigkeit lokal gespeichert und für die weitere Vorberechnung wieder an das Grafikprogramm gesendet. Ab hier beginnt je nach Berechnungstiefe die iterative Berechnung der Oberflächenreflexion und der Einstreuerung (Gl. 38, 41). Im Grafikprogramm werden zunächst die Berechnungen der vorherigen Ordnung gesetzt. Im Fall der ersten Iteration zur Berechnungstiefe Eins, bestehen diese jeweils aus Nullwertdaten. Hintereinander folgt nun jeweils nach der Einstellung der Berechnungsoptionen die Vorberechnung der Oberflächenreflexion und der Einstreuerung. Sie werden bei Rückgabe jeweils sofort gespeichert, jedoch erst nach Abschluss beider Berechnungen erneut an das Grafikprogramm kommuniziert. Mit dieser Aktion startet dabei die nächste Iteration der Berechnung bis zur gewünschten Berechnungstiefe. Ist diese erreicht beendet der Vorgang mit einer entsprechenden Rückmeldung an die Benutzeroberfläche.





### 7.3 Bildsynthese

Im Gegensatz zu den Rasterverfahren der Darstellung konventioneller Geometrie basiert die Bildsynthese zur atmosphärischen Streuung auf Raycasting. So entsteht zu Beginn für jeden Bildpunkt der virtuellen Kamera ein Methodenaufwurf im Grafikprogramm. Mit der Projektionstransformation und den UV-Koordinaten ist dabei der Ursprung und die Richtung eines korrespondierenden Sichtstrahls konstruiert. Zu diesem wird die nächste Überschneidung mit einem Stern oder planetaren Körper evaluiert. Entlang der so begrenzten Strecke berechnen sich die signifikanten Schnittpunkte bei den modellierten Atmosphären. Die initiale Lichtquelle eines Sichtstrahls resultiert dabei aus der Emission eines Sterns oder der Reflexion einer Körperoberfläche. Durch die vorberechnete Durchlässigkeit der geschnittenen Atmosphäre berechnet sich demnach die verbleibende initiale Lichteinstrahlung. Zuletzt ist auch die Abschwächung der durch Atmosphären eingestreu-ten Lichtmenge bestimmt. Die so berechnete Koordinate im Sharp-*RGB*-Farbraum wird zuletzt an die benutzergesteuerte Lichtempfindlichkeit angepasst und entsprechend der farbmetrischen Übersetzung (Gl. 30, 31) in den *sRGB*-Farbraum transformiert.

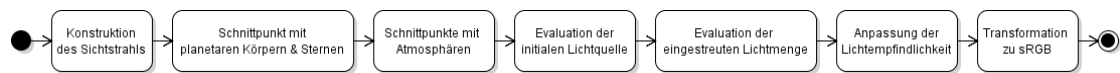


Abbildung 17: Diagramm zum Ablauf der Bildsynthese

### 7.4 Umgebung

Das System zur Simulation atmosphärischer Streuung ist in der Unity-Engine zur Version 2022.3.11f1 umgesetzt. Die Positionierung und Ausrichtung der dazu modellierten astronomischen Körper basiert in den Szenen der Unity-Engine auf den Instanzen der `GameObject` Klasse. Sterne und planetare Körper sind infolgedessen, mit der zu `MonoBehaviour` vererbten Klasse `CelestialBody` als Basis, durch die Klassen `Star` und `PlanetaryBody` abgebildet. Die jeweils korrespondierenden Benutzeroberflächen im Editor der Unity-Engine ermöglichen dabei die weitere Konfiguration. So sind zu jedem Objekt der Radius, die Masse und die Positionsmethode angegeben. Mit der absoluten Positionierung gilt somit die Position der Transformation des `GameObject`, wogegen die orbitale Positionierung anhand einer Distanz, sowie einem Höhen- und Azimutwinkel eine zu einem anderen astronomischen Körper relative Position berechnet. Für die vereinfachte Darstellung weit entfernter Körper sind diese hierzu als äquidistant markiert. Die so berechneten Positionen können ebenfalls nach der Kameraposition ausgerichtet oder

um den körpereigenen Radius versetzt werden. Die Rotation eines Körpers ist hingegen stets direkt durch die Transformation angegeben. Für Sterne folgt darauf die Definition der Emission durch die effektive Temperatur (Gl. 12, 27) oder eine direkte Koordinate im Sharp-RGB-Farbraum. Bei planetaren Körpern sind anschließend die Referenzen zu vorberechneten Atmosphären festgelegt, zu denen ein entsprechender Index die aktuelle Instanz bestimmt. Daraufhin ist das Oberflächenalbedo zunächst zur Vorbereitung als Sharp-RGB-Farbwert und zur finalen Darstellung anschließend als Textur gegeben.

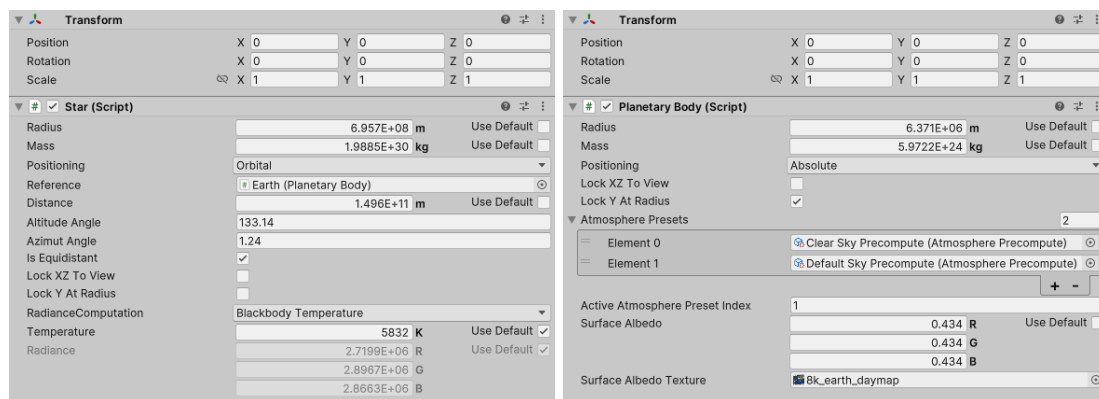


Abbildung 18: UI Celestial Body

Die Eigenschaften einer modellierten Atmosphäre werden mit der Unity-Engine auf Basis der `ScriptableObject` Klasse in `AtmosphereAsset` abgebildet. Durch die Benutzereingabe ist so zunächst die dominante Lichtquelle (Gl. 28, 29) und die maximal simulierte Höhe einstellbar. Darauf folgen zu jeder atmosphärischen Komponente die Beschreibungen der Konzentration und der Wechselwirkung. So ist die Referenzkonzentration direkt oder durch Gasdruck und Temperatur angegeben und auch die Skalenhöhe ist entweder direkt oder auf Grundlage der isothermen barometrischen Höhenformel definiert. Hinzu sind die additiven Konzentrationsmodalitäten zu je ihrer Konzentration, Höhe und Standardabweichung konfiguriert (Gl. 15). Die Licht Wechselwirkung einer Komponente ist entweder direkt durch einen Streu- und Extinktionsquerschnitt (Gl. 25, 29) oder anhand der Rayleigh-Streuung (Gl. 16, 17, 18) oder mit der Mie-Streuung (Gl. 22) beschrieben. Jeweils nicht genutzte Eingaben werden dazu ausgeblendet.

## 7 Implementation

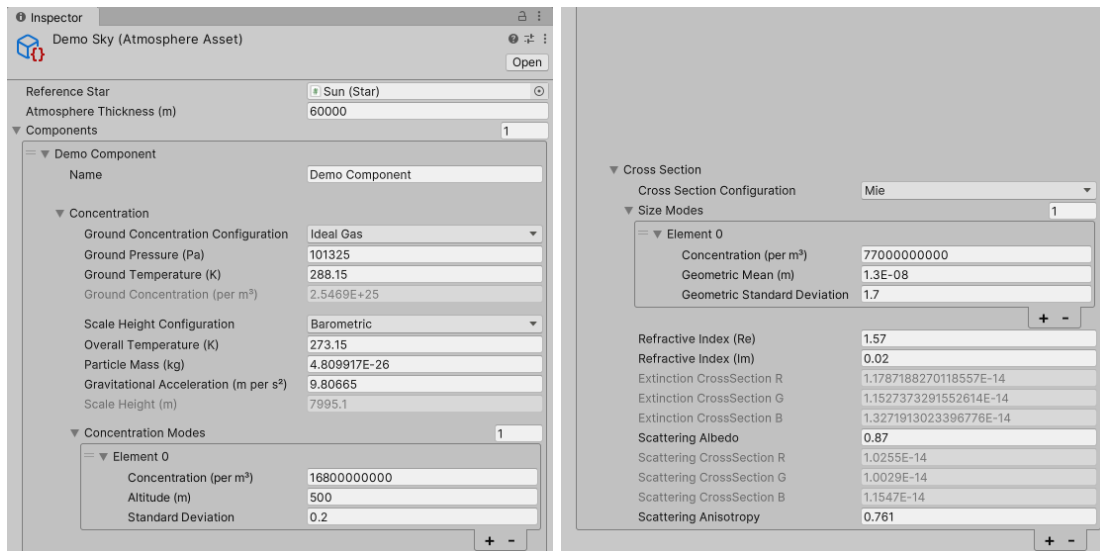
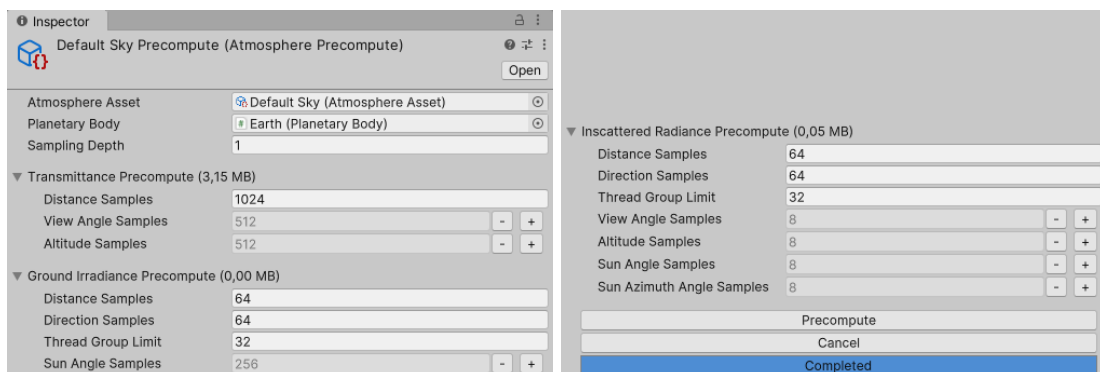


Abbildung 19: UI Atmosphäre

Zur Umsetzung der zuvor erläuterten Vorberechnungen (Gl. 35, 38, 41) ist `AtmospherePrecompute` zur Basisklasse `ScriptableObject` implementiert. Über die entsprechende Benutzeroberfläche ist zunächst das zu berechnende `AtmosphereAsset`, sowie der dazugehörige `PlanetaryBody` angegeben. Zu den drei unterschiedlichen Vorberechnungen folgt danach jeweils die Einstellung zur Auflösung, sowie zur Anzahl der Probepositionen und Proberichtungen (Gl. 32, 33). Mit jeder Änderung wird dabei der benötigte Speicherplatz angezeigt. Um des Weiteren die Systemstabilität während dem Berechnungsprozess zu erhalten, ist zur Vorberechnung der Oberflächenreflexion und der Einstrahlung jeweils die Größe der gleichzeitig ausgeführten Threadgruppen eingeschränkt. Am Ende der Benutzereingabe befindet sich die Kontrolle zum Start und Abbruch der Berechnungen, durch die `AtmospherePrecompute` mit dem Grafikprogramm kommuniziert und anschließend den aktuellen Fortschritt anzeigt.



### Abbildung 20: UI Atmosphäre

Um in der Unity-Engine eine modifizierte Grafikpipeline umzusetzen, die die modellierten astronomischen Körper darstellt und die atmosphärische Streuung simuliert, ist in den Einstellungen des Projektes das `CustomRenderPipelineAsset` zur Basis des `RenderPipelineAsset` konfiguriert. Durch die `Render()` Methode der `RenderPipeline` beschreibt die erbenende Klasse `CustomRenderPipeline` so den Prozess zur Bildsynthese und bestimmt die weitere Kommunikation mit dem Grafikprogramm.

## 8 Evaluation

### 8.1 Konsistenz

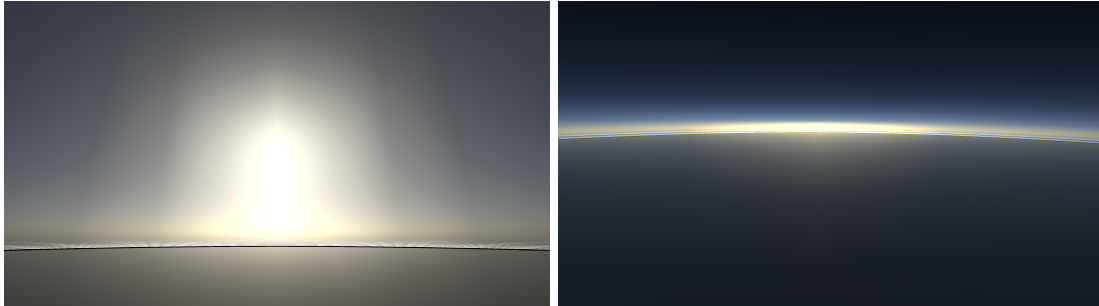


Abbildung 21: Artefakte der Bildsynthese bei hoher Konzentration

Das zu den beschriebenen Methoden implementierte System produziert zu diversen Konfigurationen visuelle Artefakte. Bei Simulationen atmosphärischer Streuung ist dies vor allem für horizontale Blickrichtungen ein prävalentes Problem.[17] Sie entstehen in diesem Fall dadurch, dass vorberechnete Durchlässigkeiten die Grenzen ihrer einfachen Genauigkeit erreichen. Mögliche Lösungen ergeben sich durch Berechnungen in doppelter Genauigkeit, sowie einer spezifischen Parametrisierung, ähnlich zu Eric Bruneton und Fabrice Neyret (2008)[17]. Die Verwendung einer linearer Abbildung zur Vorbereitung zeigt sich ebenso durch linienförmige, teils sichtbaren Übergänge, der vorberechneten Textur zur Einstreuung.

### 8.2 Farbwirkung

Zur Reproduktion der optischen Eigenschaften der Erdatmosphäre ist diese ausführlich anhand empirischer Messgrößen modelliert.

Parameter	Wert	Beschreibung
$D_S$ (Gl. 14)	$1,496 \cdot 10^8 \text{km}$	Mittlere Distanz zwischen Erde und Sonne[14]
$r_S$ (Gl. 14)	$6,957 \cdot 10^5 \text{km}$	Sonnenradius zum volumetrischen Mittel[14]
$T$ (Gl. 12)	5772K	Effektive Sonnentemperatur[14]
$r_B$ (Gl. 14)	6371km	Erdradius zum volumetrischen Mittel[15]
$\alpha$ (Gl. 13)	0,434	Geometrisches Erdalbedo[15]

$C_{00}$ (Gl. 15)	$2,5469 \cdot 10^{19} \text{cm}^{-3}$	Normteilchendichte Luft Meereshöhe[10]
$h_s$ (Gl. 15)	7,9951km	Barometrische Skalenhöhe[36][12]
$C_{00}$ (Gl. 15, 17)	$1,53 \cdot 10^4 \text{cm}^{-3}$	Aerosolprofil Referenzkonzentration[4][8][33]
$h_s$ (Gl. 15)	1,23km	Aerosolprofil Skalenhöhe[4][41]
$h_1$ (Gl. 15)	0,5km	Mischungsschicht Höhe[28][9]
$S_1$ (Gl. 15)	0,2km	Mischungsschicht Standardabweichung[28][9]
$C_1$ (Gl. 15)	$1,68 \cdot 10^4 \text{cm}^{-3}$	Mischungsschicht Konzentration[28][9]
$h_2$ (Gl. 15)	20km	Junge-Schicht Höhe[7]
$S_2$ (Gl. 15)	2,5km	Junge-Schicht Standardabweichung[7]
$C_2$ (Gl. 15)	$3 \text{cm}^{-3}$	Junge-Schicht Konzentration[7]
$C_{00}$ (Gl. 15)	$1,19 \cdot 10^{12} \text{cm}^{-3}$	Teilchendichte Ozon Meereshöhe[3][13][25]
$h_s$ (Gl. 15)	14,6km	Skalenhöhe zur Ozon-Konzentration[3][13][25]
$C_1$ (Gl. 15)	$4,393 \cdot 10^{12} \text{cm}^{-3}$	Ozonschicht-Maxima[3][13][25]
$h_1$ (Gl. 15)	24,2km	Höhe Ozonschicht-Maxima[3][13][25]
$S_1$ (Gl. 15)	6,8km	Ozonschicht Standardabweichung[3][13][25]
$m$ (Gl.17)	1,00028	Brechungsindex für Normluft[39]
$\bar{r}_{g,i}$ (Gl.19)	0,013 $\mu\text{m}$	Aerosol Nukleation geom. Mittel[29]
$S_{g,i}$ (Gl.19)	1,7 $\mu\text{m}$	Aerosol Nukleation geom. Standardabw.[29]
$n_i$ (Gl.19)	$7,7 \cdot 10^4 \text{cm}^{-3}$	Aerosol Nukleation Konzentration[29]
$\bar{r}_{g,i}$ (Gl.19)	0,069 $\mu\text{m}$	Aerosol Akkumulation geom. Mittel[29]
$S_{g,i}$ (Gl.19)	2,03 $\mu\text{m}$	Aerosol Akkumulation geom. Standardabw.[29]
$n_i$ (Gl.19)	$1,3 \cdot 10^4 \text{cm}^{-3}$	Aerosol Akkumulation Konzentration[29]
$\bar{r}_{g,i}$ (Gl.19)	0,97 $\mu\text{m}$	Aerosol Grob geom. Mittel[29]
$S_{g,i}$ (Gl.19)	2,15 $\mu\text{m}$	Aerosol Grob geom. Standardabw.[29]
$n_i$ (Gl.19)	4,2 $\text{cm}^{-3}$	Aerosol Grob Konzentration[29]
$m$ (Gl.20)	(1,57 – 0,02i)	Brechungsindex terrestrischer Aerosole[45]
$a_s$ (Gl.23)	0,87	Mie-Streu-Albedo der Erdatmosphäre[21]
$g$ (Gl.24)	0,761	Aerosol Anisotropie[51]
$\sigma$ (Gl.25)	[1]	Ozon Absorptionsspektrum

Tabelle 3: Parametrisierung zur Modellierung des Erdkörpers und der Erdatmosphäre

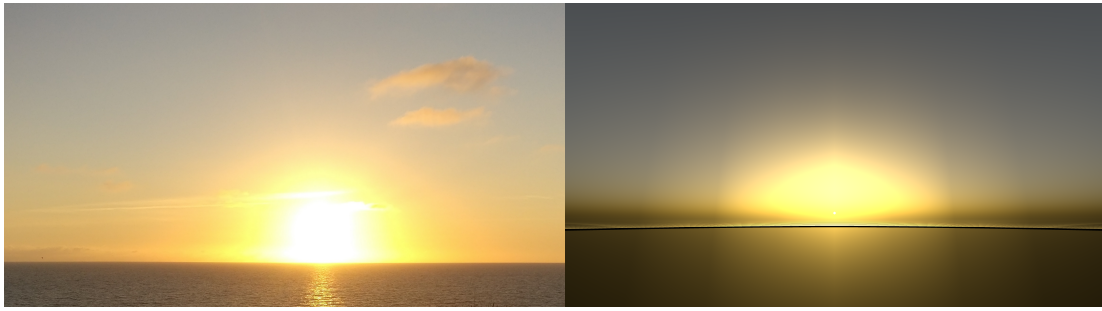


Abbildung 22: Vergleich einer Fotografie(links) mit der Systemausgabe(rechts) zum Sonnenuntergang)

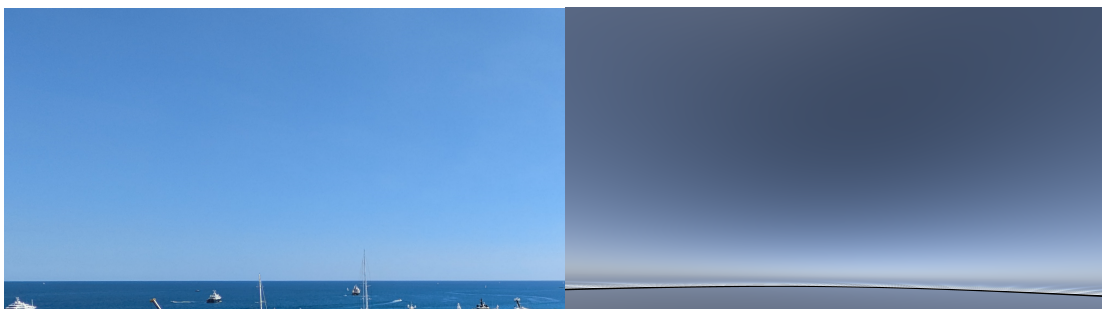


Abbildung 23: Vergleich einer Fotografie(links) mit der Systemausgabe(rechts) zum Tageshorizont

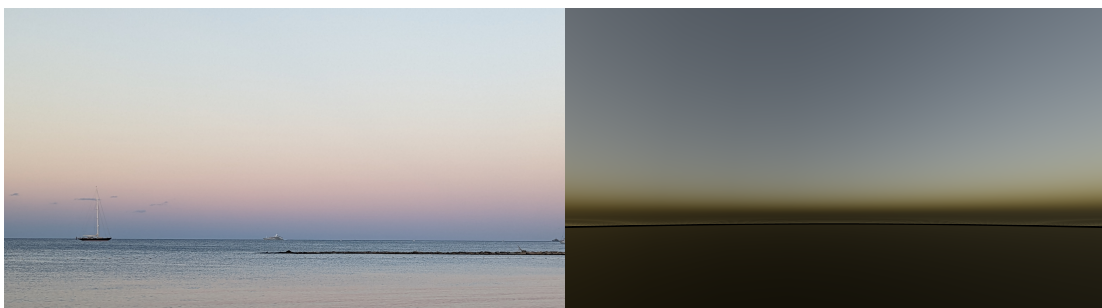


Abbildung 24: Vergleich einer Fotografie(links) mit der Systemausgabe(rechts) zum Erdschatten

Im Vergleich zu Fotografien ist trotz detaillierter Modellierung ein deutlicher Unterschied zur Bildsynthese des Systems erkennbar, der die erklärbaren Farbkorrekturen eines Kamerasystems übersteigt. Die geringe Chromatizität der Ausgabe, sowie die Form der untergehenden Sonne deuten dabei auf eine signifikante Differenz zur Konzentration der Aerosolpartikel.



## Danksagung

Für die vielseitige und bedingungslose Unterstützung während sämtlicher Bearbeitungsphasen dieser Arbeit gilt mein herzlichster Dank Laura Warkentin.

Für eine ausdauernde und verständnisvolle Motivation danke ich Ramona und Carsten Klupiec.

## Literatur

- [1] A. SERDYUCHENKO, V. GORSHELEV, M. WEBER, W. CHEHADE, JP. BURROWS: High spectral resolution ozone absorption cross-sections – Part 2: Temperature dependence. In: *Atmospheric Measurement Techniques* 7 (2014), February, Nr. 2, S. 625–636. – <https://doi.org/10.5194/amt-7-625-2014>
- [2] A.A. KOKHANOVSKY, E.P. ZEGE: Optical properties of aerosol particles: A review of approximate analytical solutions. In: *Journal of Aerosol Science* 28 (1997), Nr. 1, S. 1–21. – [https://doi.org/10.1016/S0021-8502\(96\)00058-4](https://doi.org/10.1016/S0021-8502(96)00058-4)
- [3] ANDREA ORFANOZ-CHEUQUELAF, ALEXEI ROZANOV, MARK WEBER, CARLO AROSIO, ANNETTE LADSTÄTTER-WEISSENMAYER, JOHN P. BURROWS: Total ozone column from Ozone Mapping and Profiler Suite Nadir Mapper (OMPS-NM) measurements using the broadband weighting function fitting approach (WFFA). In: *Atmospheric Measurement Techniques* 14 (2021), September, Nr. 8, S. 5771–5789. – <https://doi.org/10.5194/amt-14-5771-2021>
- [4] BOON NING CHEW, JAMES R. CAMPBELL, EDWARD J. HYER, SANTO V. SALINAS, JEFFREY S. REID, ELLSWORTH J. WELTON, BRENT N. HOLBEN, SOO CHIN LIEW: Relationship between Aerosol Optical Depth and Particulate Matter over Singapore: Effects of Aerosol Vertical Distributions. In: *Aerosol and Air Quality Research* 16 (2016), October, Nr. 11, S. 2818–2830. – <https://doi.org/10.4209%2Faaqr.2015.07.0457>
- [5] CENTRE FOR ASTRONOMY OF UNIVERSITY OF HEIDELBERG: *Gaia Sky*. <https://zah.uni-heidelberg.de/gaia/outreach/gaiasky>. June 2024. – Aufgerufen am 03.06.2024 um 03:01

- [6] CHANG H. JUNG, YONG P. KIM: Technical Note: Particle Extinction Coefficient for Polydispersed Aerosol Using a Harmonic Mean Type General Approximated Solution. In: *Aerosol Science and Technology* 41 (2007), Nr. 11, S. 994–1001. – <https://doi.org/10.1080/02786820701644285>
- [7] CHRISTIAN E. JUNGE, CHARLES W. CHAGNON, JAMES E. MANSON: STRATOSPHERIC AEROSOLS. In: *Journal of the Atmospheric Sciences* 18 (1961), February, Nr. 1, S. 81–108. – [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1961\)018<0081:SA>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1961)018<0081:SA>2.0.CO;2)
- [8] DEUTSCHER WETTERDIENST: *Particle Number Concentration*. [https://www.dwd.de/EN/research/observing\\_atmosphere/composition\\_atmosphere/aerosol/cont\\_nav/particle\\_number\\_concentration.html](https://www.dwd.de/EN/research/observing_atmosphere/composition_atmosphere/aerosol/cont_nav/particle_number_concentration.html). 2023. – Aufgerufen am 24.05.2024 um 02:27
- [9] DEUTSCHER WETTERDIENST: *Planetary boundary layer depth (mixing height)*. [https://www.dwd.de/EN/research/weatherforecasting/num\\_modelling/03\\_environmental\\_forecasts/mischungsschichthoehen\\_en.html](https://www.dwd.de/EN/research/weatherforecasting/num_modelling/03_environmental_forecasts/mischungsschichthoehen_en.html). 2023. – Aufgerufen am 02.06.2024 um 13:25
- [10] DEUTSCHER WETTERDIENST: *Wetter- und Klimalexikon: Standardatmosphäre*. <https://www.dwd.de/DE/service/lexikon/Functions/glossar.html?lv3=102564>. 2023. – Aufgerufen am 13.05.2024 um 19:32
- [11] DEUTSCHER WETTERDIENST: *Particle Size-Distribution*. [https://www.dwd.de/EN/research/observing\\_atmosphere/composition\\_atmosphere/aerosol/cont\\_nav/particle\\_size\\_distribution.html](https://www.dwd.de/EN/research/observing_atmosphere/composition_atmosphere/aerosol/cont_nav/particle_size_distribution.html). 2024. – Aufgerufen am 19.05.2024 um 00:21
- [12] DONALD P. GATLEY, SEBASTIAN HERRMANN, HANS-JOACHIM KRETZSCHMAR: A Twenty-First Century Molar Mass for Dry Air. In: *HVAC&R Research* 14 (2008), September, Nr. 5, S. 655–662. – <https://doi.org/10.1080/10789669.2008.10391032>
- [13] DOUGLAS DROB, JOHN EMMERT, JIA YUE: *NRLMSIS Version: v2.0*. <https://ccmc.gsfc.nasa.gov/models/NRLMSIS~v2.0>. 2023. – Aufgerufen am 26.04.2024 um 19:18

- [14] DR. DAVID R. WILLIAMS, NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION: *Sun Fact Sheet*. <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/sunfact.html>. 2022. – Aufgerufen am 15.05.2024 um 16:23
- [15] DR. DAVID R. WILLIAMS, NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION: *Earth Fact Sheet*. <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html>. 2023. – Aufgerufen am 28.04.2024 um 23:41
- [16] EPIC GAMES INC.: *Sky Atmosphere Component*. <https://docs.unrealengine.com/5.1/en-US/sky-atmosphere-component-in-unreal-engine/>. 2022. – Aufgerufen am 28.04.2024 um 14:07
- [17] ERIC BRUNETON, FABRICE NEYRET: Precomputed Atmospheric Scattering. In: *Proceedings of the 19th Eurographics Symposium on Rendering 2008*. Oxford, UK : Blackwell Publishing Ltd., 2008 (Computer Graphics Forum), S. 1079–1086
- [18] GREG WARD, ELENA EYDELBERG-VILESHIN: Picture perfect RGB rendering using spectral prefiltering and sharp color primaries. In: *Proceedings of the 13th Eurographics Workshop on Rendering* Bd. 4300. Goslar, Germany : Eurographics Association, 2002, S. 117–124. – <https://dl.acm.org/doi/10.5555/581896.581913>. – ISBN 1581135343
- [19] H. C. VAN DE HULST: *Light scattering by small particles*. Dover edition. New York, NY, USA : Dover Publications Inc., 1981 (1957). – ISBN 0-486-64228-3
- [20] H. M. NUSSENZVEIG, W. J. WISCOMBE: Efficiency Factors in Mie Scattering. In: *Physical Review Letters* 45 (1980), November, Nr. 18, S. 1490–1494. – <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.45.1490>
- [21] H.-W. GEORGII, R. JAENICKE, C. JUNGE, G. HÄNEL, S. BEILKE, K. BULLRICH: Die chemische Zusammensetzung der unteren Atmosphäre - Teil 2: Aerosole. In: *promet - Meteorologische Fortbildung* 5 (1975), Nr. 3. – <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:101:1-201701243135>
- [22] IEC 61966-2-1:1999/AMD 1:2003: Amendment 1 – Multimedia systems and equipment – Colour measurement and management – Part 2-1: Colour management – Default RGB colour space - sRGB / International Electrotechnical Commission. 2003. – Standard. <https://webstore.iec.ch/publication/6168>

- [23] INTERNATIONAL COMMISSION ON ILLUMINATION (CIE): *CIE 1931 colour-matching functions , 2 degree observer (data table)*. <https://doi.org/10.25039/CIE.DS.xvudnb9b>. 2018. – Aufgerufen am 09.05.2024 um 22:14
- [24] INTERNATIONAL COMMISSION ON ILLUMINATION (CIE): *CIE STANDARD ILLUMINANT D65*. <https://doi.org/10.25039/CIE.DS.hjffjmt59>. 2022. – Aufgerufen am 16.05.2024 um 00:09
- [25] J. T. EMMERT, D. P. DROB, J. M. PICONE, D. E. SISKIND, M. JONES JR., M. G. MLYNCZAK, P. F. BERNATH, X. CHU, E. DOORNBOS, B. FUNKE, L. P. GONCHARENKO, M. E. HERVIG, M. J. SCHWARTZ, P. E. SHEESE, F. VARGAS, B. P. WILLIAMS, T. YUAN: NRLMSIS 2.0: A Whole-Atmosphere Empirical Model of Temperature and Neutral Species Densities. In: *Earth and Space Science* 8 (2021), March, Nr. 3. – <https://doi.org/10.1029/2020EA001321>
- [26] JOHN WILLIAM STRUTT: XV. On the light from the sky, its polarization and colour. In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 41 (1871), Nr. 271, S. 107–120. – <https://doi.org/10.1080/14786447108640452>
- [27] JOHN WILLIAM STRUTT: XXXIV. On the transmission of light through an atmosphere containing small particles in suspension, and on the origin of the blue of the sky. In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 47 (1899), Nr. 287, S. 375–384. – <https://doi.org/10.1080/14786449908621276>
- [28] J.R. GARRATT: Review: the atmospheric boundary layer. In: *Earth-Science Reviews* 37 (1994), October, Nr. 1, S. 89–134. – [https://doi.org/10.1016/0012-8252\(94\)90026-4](https://doi.org/10.1016/0012-8252(94)90026-4)
- [29] KENNETH T. WHITBY: The physical characteristics of sulfur aerosols. In: *Atmospheric Environment* 12 (1978), Nr. 1, S. 135–159. – [https://doi.org/10.1016/0004-6981\(78\)90196-8](https://doi.org/10.1016/0004-6981(78)90196-8)
- [30] KLASSEN, R. VICTOR: Modeling the effect of the atmosphere on light. In: *ACM Trans. Graph.* 6 (1987), July, Nr. 3, S. 215–237. – <https://doi.org/10.1145/35068.35071>

- [31] MARIUS HOBBAHN, TAMAY BESIROGLU: *Trends in GPU price-performance*. <https://epochai.org/blog/trends-in-gpu-price-performance>. 2022. – Aufgerufen am 20.04.2024 um 18:41
- [32] MATTHIAS M.: *Elektromagnetisches Spektrum*. <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=7174039>. April 2009. – Aufgerufen am 30.04.2024 um 05:33
- [33] MICHAEL HESS, PETER KOEPKE, INGRID SCHULT: Optical Properties of Aerosols and Clouds: The Software Package OPAC. In: *Bulletin of the American Meteorological Society* 79 (1998), May, Nr. 5, S. 831–844. – [https://doi.org/10.1175/1520-0477\(1998\)079%3C0831:OPOAAC%3E2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0477(1998)079%3C0831:OPOAAC%3E2.0.CO;2)
- [34] MYSID, PAR: *CIE 1931 xy chromaticity diagram showing the sRGB gamut and the D65 white point*. [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:CIExy1931\\_sRGB.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:CIExy1931_sRGB.svg). May 2005. – Aufgerufen am 28.05.2024 um 21:30
- [35] NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION: *Eyes on the Solar System*. <https://eyes.nasa.gov/apps/solar-system/#/home>. June 2024. – Aufgerufen am 03.06.2024 um 03:05
- [36] NATIONAL INSTITUTE OF STANDARDS AND TECHNOLOGY: *NIST Standard Reference Database 121*. <https://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html>. 2019. – Aufgerufen am 14.05.2024 um 16:10
- [37] OXFORD REFERENCE: *Beer-Lambert law*. <https://www.oxfordreference.com/view/10.1093/oi/authority.20110803095455747>. 2023. – Aufgerufen am 22.05.2024 um 14:55
- [38] OXFORD REFERENCE: *light*. <https://www.oxfordreference.com/view/10.1093/oi/authority.20110803100105282>. 2023. – Aufgerufen am 26.04.2024 um 18:32
- [39] PHILIP E. CIDDOR: Refractive index of air: new equations for the visible and near infrared. In: *Applied Optics* 35 (1996), March, Nr. 9, S. 1566–1573. – <https://doi.org/10.1364/AO.35.001566>
- [40] PROF. DR. WALTER ROEDEL: *Physik unserer Umwelt: Die Atmosphäre*. Heidelberg, Deutschland : Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992. – ISBN 978-3-540-54285-8

- [41] R. PENNDORF: The Vertical Distribution of Mie Particles in the Troposphere. In: *Journal of the Atmospheric Sciences* 11 (1954), June, Nr. 3, S. 245–247. – [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1954\)011<0245:TVDOMP>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1954)011<0245:TVDOMP>2.0.CO;2)
- [42] SABINE SÜSTRUNK, JACK M. HOLM, GRAHAM D. FINLAYSON: Chromatic Adaptation Performance of Different RGB Sensors. In: *IS&T/SPIE Electronic Imaging* Bd. 4300, 2001. –
- [43] SCRATCHAPIXEL: *Volume Rendering for Developers: Foundations*. <https://www.scratchapixel.com/lessons/3d-basic-rendering/volume-rendering-for-developers/intro-volume-rendering.html>. – Aufgerufen am 26.04.2024 um 17:32
- [44] SEAN O’NEIL: *Accurate Atmospheric Scattering*. Kap. Accurate Atmospheric Scattering. In: *GPU Gems 2: Programming Techniques for High-Performance Graphics and General-Purpose Computation*. Boston, MA, USA : Addison-Wesley Professional, March 2005. – <https://developer.nvidia.com/gpugems/gpugems2/part-ii-shading-lighting-and-shadows/chapter-16-accurate-atmospheric-scattering>. – ISBN 978-0-321-33559-3
- [45] SILVANA MICO, ANTONETA DEDA, ELENI TSAOUSI, MIRELA ALUSHLLARI, PHILIPPOS POMONIS: Complex Refractive Index of Aerosol Samples. In: *AIP Conference Proceedings* 2109 (2019), June, Nr. 1, S. 060002. – <https://doi.org/10.1063/1.5110120>
- [46] SUBRAHMANYAN CHANDRASEKHAR: *The Equation of Transfer*. Kap. The Equation of Transfer, S. 1–53. In: *Radiative Transfer*. New York, NY, USA : Dover Publications Inc., 1960. – ISBN 978-0-486-60590-6
- [47] TOBIAS SCHAFHITZEL, MARTIN FALK, THOMAS ERTL: Real-Time Rendering of Planets with Atmospheres. In: SKALA, Václav (Hrsg.): *15-th International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision*, 2007, S. 91–98. – ISBN 978-80-86943-00-8
- [48] TOMOYUKI NISHITA, TAKAO SIRAI, KATSUMI TADAMURA, EIHAICHIRO NAKAMAE: Display of The Earth Taking into Account Atmospheric Scattering. In: *SIGGRAPH ’93: Proceedings of the 20th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*. New York, NY, USA : Association for Computing Machinery, September 1993 (International Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques), S. 175–182. – <https://doi.org/10.1145/166117.166140>

- [49] UNITY SOFTWARE INC.: *Physically Based Sky*. <https://docs.unity3d.com/Packages/com.unity.render-pipelines.high-definition@15.0/manual/Override-Physically-Based-Sky.html>. 2022. – Aufgerufen am 22.04.2024 um 13:51
- [50] UNITY TECHNOLOGIES: *Color space*. <https://docs.unity3d.com/Manual/LinearLighting.html>. May 2023. – Aufgerufen am 01.05.2024 um 21:47
- [51] WILLIAM M. CORNETTE, JOSEPH G. SHANKS: Physically reasonable analytic expression for the single-scattering phase function. In: *Applied Optics* 31 (1992), June, Nr. 16, S. 3152–3160. – <https://doi.org/10.1364/AO.31.003152>
- [52] WILLIAM M. CORNETTE, JOSEPH G. SHANKS: Physically reasonable analytic expression for the single-scattering phase function: errata. In: *Applied Optics* 34 (1995), February, Nr. 4, S. 641–641. – <https://doi.org/10.1364/AO.34.000641>
- [53] WOJCIECH JAROSZ: *Efficient Monte Carlo Methods for Light Transport in Scattering Media*. San Diego, CA, USA, University of California, San Diego, Doctor of Philosophy in Computer Science, 2008

## **Erklärung zur selbstständigen Bearbeitung**

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit ohne fremde Hilfe selbständig verfasst und nur die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Wörtlich oder dem Sinn nach aus anderen Werken entnommene Stellen sind unter Angabe der Quellen kenntlich gemacht.

---

Ort

Datum

Unterschrift im Original