



Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg  
*Hamburg University of Applied Sciences*

# **Bachelorarbeit**

Abdellatif Baouddi

## **Ermittlung von Transversalspannungen bei Laminaten mittels CLT**

*Fakultät Technik und Informatik  
Department Fahrzeugtechnik und Flugzeugbau*

*Faculty of Engineering and Computer Science  
Department of Automotive and  
Aeronautical Engineering*

**Abdellatif Baouddi**

**Ermittlung von Transversalspannungen  
bei Laminaten mittels CLT**

Bachelorarbeit eingereicht im Rahmen der Bachelorprüfung

im Studiengang Flugzeugbau  
am Department Fahrzeugtechnik und Flugzeugbau  
der Fakultät Technik und Informatik  
der Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg

Erstprüfer: Prof. Dr.-Ing. Eckart Nast  
Zweitprüfer: Prof. Dr.-Ing. Dipl.-Kfm. Markus Linke

Abgabedatum: 12.03.2024

# Zusammenfassung

## Name des Studierenden

Abdellatif Baouddi

## Thema der Bachelorthesis

Ermittlung von Transversalspannungen bei Laminaten mittels CLT

## Stichworte

Transversale Spannungen, interlaminare Spannungen, klassische Laminattheorie, lokales 3D-Gleichgewicht, Naviersche Platte, doppelt sinusförmige Belastung, Biegung, Kreuzverbund, Winkelverbund...

## Kurzzusammenfassung

Die Annahmen der klassischen Laminattheorie bezwingen, dass die interlaminaren Spannungen für dünne Laminat verschwinden. Für dicke Laminat jedoch können diese nicht vernachlässigt werden. Um sie zu bestimmen, widmet sich diese Arbeit einer Methode basierend auf die durch CLT berechneten Schichtspannungen sowie die Integration über die Laminatdicke von lokalen 3D-Gleichgewichtsgleichungen. Hierfür werden die Navierschen Lösungen vorgestellt, die die Auswahl des Laminataufbaus, der Randbedingungen und der Lasten beschränken. Ferner wird mittels des Computeralgebrasystems MAPLE ein Tool entwickelt, welches die Berechnungen automatisiert und die Ergebnisse veranschaulicht. Für die Auswertung der vorliegenden Methode werden Werte aus der Literatur herangezogen. Diese stellen die Vergleichsreferenz für die zu durchführende Parameterstudie hinsichtlich des Laminataufbaus und der Laminatdicke dar. Abschließend wird auf die Praxistauglichkeit der Methode eingegangen.

## Name des Studierenden

Abdellatif Baouddi

## Title of the paper

Determination of transverse stresses in laminates using CLT

## Keywords

Transverse stresses, interlaminar stresses, classical laminate theory, local 3D equilibrium, Navier plate, double sinusoidal loading, bending, cross-ply, angle-ply...

## Abstract

The assumptions of classical laminate theory imply that the interlaminar stresses disappear for thin laminates. However, for thick laminates, they cannot be neglected. To determine them, a method based on the layered stresses calculated by CLT and the integration over the laminate thickness of 3D equilibrium equations is investigated in this thesis. Navier solutions are presented, which restrict the choice of lamination scheme, boundary conditions and loads. In addition, a tool is developed using the software MAPLE, which automates the calculations and visualizes the results. To evaluate the presented method, values from the literature are used. These represent the comparative reference for the parameter study, which is to be carried out regarding the lamination scheme and laminate thickness. Finally, the practicality of the method is discussed.

# Inhaltsverzeichnis

<b>I. Abkürzungsverzeichnis .....</b>	<b>III</b>
<b>II. Symbolverzeichnis .....</b>	<b>IV</b>
<b>1 Einleitung .....</b>	<b>1</b>
1.1 Allgemeines .....	1
1.2 Aufgabestellung .....	1
1.3 Aufbau der Arbeit .....	2
<b>2 Theoretische Grundlagen .....</b>	<b>4</b>
2.1 Lineare Elastizitätstheorie .....	4
2.1.1 Spannungszustand und Gleichgewichtsbeziehungen .....	4
2.1.2 Verzerrungszustand .....	6
2.1.3 Konstitutive Gleichungen und Materialgesetz .....	6
2.2 Klassische Laminattheorie .....	8
2.2.1 Einführung .....	8
2.2.2 Kinematische Voraussetzungen .....	9
2.2.3 Verzerrungen und Spannungen .....	12
2.2.4 Schnittgrößen .....	15
2.2.5 Koppeleffekte .....	17
2.2.6 Spezielle Lamine .....	18
2.3 Interlaminare Spannungen und CLT .....	21
2.3.1 Statisches Gleichgewicht und Differentialgleichungen der Verschiebungen .....	21
2.3.2 Naviersche Lösungen .....	25
<b>3 MAPLE-Tool zur Bestimmung der interlaminaren Spannungen anhand der CLT .....</b>	<b>40</b>
3.1 Validierung der Ergebnisse des Tools .....	40
3.2 Dokumentation des Tools anhand des unsymmetrischen Kreuzverbunds [0°,90°] .....	45
3.3 Vergleich mit der Literatur .....	54
3.3.1 Empfehlungen zur Erstellung eines FE-Modells zur Analyse von Navierscher Platte mit doppelt sinusförmiger Belastung .....	55

3.3.2 Vergleich von Ergebnissen des berechneten Beispiels [0°, 90°] mit der Literatur .....	59
3.4 Parameterstudie .....	63
3.4.1 Laminataufbau.....	63
3.4.2 Laminatdicke .....	76
3.5 Praxistauglichkeit.....	78
<b>4 Zusammenfassung und Ausblick .....</b>	<b>80</b>
4.1 Zusammenfassung .....	80
4.2 Ausblick .....	82
<b>5 Abbildungsverzeichnis .....</b>	<b>85</b>
<b>6 Tabellenverzeichnis .....</b>	<b>89</b>
<b>7 Literaturverzeichnis .....</b>	<b>90</b>
<b>8 Eigenständigkeitserklärung .....</b>	<b>92</b>

## I. Abkürzungsverzeichnis

Abkürzung	Bedeutung
3D	Dreidimensional
ACP	ANSYS Composite Pre Post
APDL	ANSYS Parametric Design Language
CLT	Classical Laminat Theory (Klassische Laminattheorie)
CLPT	Classical Laminated Plate Theory (Klassische Laminattheorie)
UD	Unidirektionale Schicht
F+F	Fahrzeugtechnik und Flugzeugbau
FEM	Finite-Elemente-Methode
FSDT	Schubdeformationstheorie erster Ordnung (First-order Shear Deformation Theory)
KOS	Koordinatensystem
SS	Allseitig gelenkig gelagert (Simply Supported)
Sym.	Symmetrisch

## II. Symbolverzeichnis

Symbol	Bezeichnung	Einheit
$a$	Länge der Platte	mm
$\underline{\underline{A}}$	Dehnsteifigkeitsmatrix	N/mm
$A_{ij}$	Einträge der Dehnsteifigkeitsmatrix mit $i = 1,2,6$ bzw. $j = 1,2,6$	N/mm
$b$	Breite der Platte	mm
$\underline{\underline{B}}$	Koppelmatrix	N
$B_{ij}$	Einträge der Koppelmatrix mit $i = 1,2,6$ bzw. $j = 1,2,6$	N
$\underline{\underline{C}}$	Steifigkeitsmatrix	MPa
$C_{ij}$	Einträge der Steifigkeitsmatrix mit $i = 1 \dots 6$ bzw. $j =$ $1 \dots 6$	MPa
$C_{xz}, C_{yz}, C_{zz}$	Integalkonstanten	MPa
$\bar{C}_{44}, \bar{C}_{55}$	Schubsteifigkeiten	MPa
$\bar{C}_{45}$	Schubkopplungssteifigkeit	MPa
$C_{ij}$	Einträge der Steifigkeitsmatrix mit $i = 1 \dots 6$ bzw. $j =$ $1 \dots 6$	MPa

$\underline{\underline{D}}$	Biegesteifigkeitsmatrix	Nmm
$D_{ij}$	Einträge der Biegesteifigkeitsmatrix mit $i = 1 \dots 6$ bzw. $j = 1 \dots 6$	Nmm
$E_i$	Elastizitätsmodule mit $i = 1,2$	Mpa
$f_i$	Volumenkräfte mit $i = x, y, z$	N/mm <sup>3</sup>
<i>Abweichung</i>	Abweichung bezüglich des Referenzwerts	%
$G_{ij}$	Schubmodule mit $i = 1,2$ bzw. $j = 2,3$	MPa
$h$	Höhe der Platte	mm
$M_i^0$	Schnittmomente des Laminats mit $i = x, y$	N
$n$	Anzahl der Einzelschichten	–
$N_i^0$	Schnittkräfte des Laminats mit $i = x, y$	N/mm
$\underline{\underline{Q}}$	Reduzierte Steifigkeitsmatrix	MPa
$\underline{\underline{\bar{Q}}}$	Transformiert reduzierte Steifigkeitsmatrix	MPa
$\bar{Q}_{ij}$	Einträge der reduzierten Steifigkeitsmatrix mit $i = 1,2,6$ bzw. $j = 1,2,6$	MPa
$Q_x, Q_y$	Querkräfte in $x$ - bzw. $y$ -Richtung	N/mm

$p_i$	Tangentialbelastung in $i$ -Richtung mit $i = x, y$	MPa
$p$	Querlast in $z$ -Richtung	MPa
$P_{mn}$	Koeffizienten der doppelt sinusförmigen Belastung der Fourier-Reihe für jede $m = 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots$	MPa
$S$	Länge-zu-Höhe-Verhältnis	–
$\underline{\underline{S}}$	Nachgiebigkeitsmatrix	MPa <sup>-1</sup>
$t$	Einzelsschichtdicke	mm
$\underline{\underline{T}}$	Transformationsmatrix	–
$u$	Verschiebung eines Punkts in $x$ -Richtung	mm
$u_B$	Verschiebung des Punkts $B$ in $x$ -Richtung	mm
$U_{mn}$	Koeffizienten der Verschiebung $u_0$ der Fourier-Reihe für jede $m = 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots$	mm
$v$	Verschiebung eines Punkts in $y$ -Richtung	mm
$V_{mn}$	Koeffizienten der Verschiebung $v_0$ der Fourier-Reihe für jede $m = 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots$	mm
$w$	Verschiebung eines Punkts in $z$ -Richtung	mm
$W_{mn}$	Koeffizienten der Verschiebung $w_0$ der Fourier-Reihe für jede $m = 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots$	mm

$x, y, z$	Koordinaten des kartesischen Koordinatensystems	–
$z_k, z_{k+1}$	$z$ -Koordinaten zur Beschreibung der Lage einer Schicht $k$	mm
Griechische Symbole		
$\gamma_{ij}$	Gleitung mit $i = x, y$ bzw. $j = y, z$	–
$\underline{\varepsilon}$	Verzerrungsvektor	–
$\underline{\underline{\varepsilon}}$	Verzerrungstensor	–
$\varepsilon_i$	Dehnung mit $i = x, y, z$	–
$\theta_k$	Faserwinkel der Schicht $k$	°
$\underline{\kappa}^0$	Vektor der Krümmungen	$\text{mm}^{-1}$
$\kappa_{ij}^0$	Krümmung der Laminebene mit $i = x, y$ bzw. $j = x, y$	$\text{mm}^{-1}$
$\nu_{ij}$	Querkontraktionszahl mit $i = 1, 2, 3$ bzw. $j = 1, 2, 3$	–
$\underline{\sigma}$	Spannungsvektor	MPa
$\underline{\underline{\sigma}}$	Spannungstensor	MPa
$\sigma_{ij}$	Normalspannung mit $i = x, y, z$ bzw. $j = x, y, z$	MPa
$\tau_{ij}$	Schubspannung mit $i = x, y, z$ bzw. $j = x, y, z$	MPa

$\psi_i$	Biegewinkel mit $i = x, y$	°
Operatoren und Indices		
$\partial$	Partielle Differentiation	—
$\underline{\dots}$	Vektor	—
$\underline{\underline{\dots}}$	Matrix	—
$[\dots]_s$	Symmetrischer Laminataufbau	—
$(\dots)_{k, \dots(k)}$	Größe der Laminatschicht $k$	—
$\dots_0, \dots^0$	Größe bezüglich der Laminatmittelebene	—
$(\dots)^{-T}$	Inverse von transponierter Matrix	—
$\hat{\dots}$	Dimensionslose normierte Größe	—
$\theta_i$	Dehnung mit $i = x, y, z$	—
$d$	Differentiation	—
$i, j$	Inkrement	—

# 1 Einleitung

## 1.1 Allgemeines

Faserverbunde sind aufgrund ihres Potenzials im Leichtbau äußerst begehrt. Ihr Einsatz erstreckt sich über verschiedene Bereiche, darunter die Luftfahrtindustrie. Hierfür lässt sich die AIRBUS A350 als Beispiel heranziehen, denn sie ist das erste AIRBUS-Flugzeug mit Rumpf und Flügelschale aus Faserverbundwerkstoffen [1, S. 8]. Die zunehmende Nachfrage nach solchen Werkstoffen lässt sich mit ihren Vorteilen begründen. Die hohe Festigkeit sowie Steifigkeit bei geringer Dichte und die Möglichkeit, gewünschte Eigenschaften je nach Verwendungszweck zu erzielen, sind ihre Charakteristika.

Bei Faser-Kunststoff-Verbunden lässt sich oft die sogenannte unidirektionale Schicht (UD-Schicht) verwenden, dabei sind die Faser gerade und parallel zueinander zu legen. Werden mehrere Einzelschichten gestapelt, wird der Mehrschichtverbund als Laminat bezeichnet. Dies ermöglicht die Steifigkeit und Festigkeit durch die Anpassung der Faserorientierung und des Lageraufbaus gezielt zu beeinflussen. Allerdings besteht die Gefahr von Ablösung der Einzelschichten aufgrund der interlaminaeren Spannungen. Diese Art des Versagens wird Delamination genannt und muss in der Auslegung in Betracht gezogen werden.

## 1.2 Aufgabestellung

Die klassische Laminattheorie (CLT) ermöglicht die Bestimmung von Spannungen, welche ausschließlich in den Ebenen der Einzelschichten des Laminats herrschen. Spannungen in Dickenrichtung (transversale Schub- und Normalspannungen) werden hierbei nicht berücksichtigt. Deswegen beschränkt sich die Anwendung von CLT auf dünne Lamine.

Es besteht allerdings die Möglichkeit unter Nutzung der durch CLT ermittelten Schichtspannungen, transversale Spannungen zu bestimmen. Dies gelingt mit der Integration über die Laminatdicke von lokalen 3D-Gleichgewichtsgleichungen.

Mithilfe des Computeralgebrasystems MAPLE der Firma Maplesoft soll diese Methode untersucht und veranschaulicht werden. Dabei wird ein MAPLE-Tool erstellt, welches zukünftig in der Lehre am Department F+F eingesetzt werden kann. Demzufolge ist besonderes Augenmerk auf die Benutzerfreundlichkeit des Tools zu legen. Zur Auswertung der Ergebnisse sollen geeignete Referenzdaten aus der Literatur oder FEM-Lösungen verwendet werden.

Im Rahmen dieser Bachelorarbeit soll zusätzlich untersucht werden, welche Beschränkungen hinsichtlich des Laminataufbaus, der Laminatdicke, der Lasten und/oder Randbedingungen bei diesem Vorgehen existieren. Daraus werden Aussagen für die Praxistauglichkeit abgeleitet.

### **1.3 Aufbau der Arbeit**

Der Gesamtaufbau dieser Bachelorarbeit lässt sich in drei große Kapitel unterteilen: Im ersten Kapitel erfolgen Erläuterungen theoretischer Grundlagen, welche den Einstieg zum Verständnis dieser Arbeit ermöglichen. Dabei werden der Spannungs- und Verzerrungszustand sowie die Gleichgewichtsbedingungen unter Betrachtung der linearen Elastizitätstheorie präsentiert. Zudem wird das Materialgesetz vorgestellt.

Als Nächstes folgt das Unterkapitel der klassischen Laminattheorie. Hier werden alle Formeln für die Bestimmung sowohl von Verzerrungen und Spannungen als auch von Schnittgrößen hergeleitet. Danach werden spezielle Lamine präsentiert, unter denen solche, die zur Auswertung der Methode mittels des MAPLE-Tools geeignet sind, verwendet werden. Nachfolgend wird die Methode nach CLT zur Bestimmung der interlaminaren Spannungen erläutert. Hierbei sind Naviersche Lösungen darzulegen, die für die Biegung Navierscher Platten als symmetrischer und unsymmetrischer Kreuzverbund sowie unsymmetrischer Winkelverbund geeignet sind.

Die im ersten Kapitel vorgestellten Formeln werden genutzt, um das MAPLE-Tool zu erstellen. Dieses soll zuerst anhand eines isotropen Laminats sowie verfügbarer Literaturwerte, die nach gleicher Methode der vorliegenden Arbeit berechnet wurden, validiert werden. Danach erfolgt die Dokumentation des Tools anhand eines Beispiels. Vor dem Vergleich mit den Referenzwerten werden einige Empfehlungen für die Erstellung vom FE-Modell mittels ANSYS vorgeschlagen, die für die Analyse von Navierscher Platten unter einer doppelt sinusförmigen Belastung zu beachten sind. Im

nächsten Schritt wird eine Parameterstudie durchgeführt. Dabei sind Beispiele mit vier unterschiedlichen Laminataufbauten und ein Beispiel mit fünf verschiedenen Laminatdicken zu untersuchen. Auf die Navierschen Lösungen beschränkt werden nur symmetrische und unsymmetrische Kreuzverbunde sowie unsymmetrische Winkelverbunde verwendet. Die Variation der Laminatdicke gibt einen Aufschluss über die vorliegende Methode bei sehr dicken bis dünnen Platten. Um das Kapitel abzuschließen, wird die Praxistauglichkeit diskutiert.

Im dritten Kapitel werden die gesammelten Erkenntnisse dieser Arbeit zusammengefasst und Ansätze zur Erweiterung der Methode erbracht.

## 2 Theoretische Grundlagen

Dieses Kapitel soll dem Leser einen Einstieg in die Thematik ermöglichen. Eine ausführliche Erläuterung kann in den Literaturquellen [2–8] gefunden werden.

### 2.1 Lineare Elastizitätstheorie

Das elastische Materialverhalten verlangt, dass der Be- und Entlastungszyklus eines Materials ohne bleibende Verformung erfolgt. Nach der Entlastung erreicht das Material seinen ursprünglichen Zustand. Ideal elastisch setzt überdies voraus, dass die gespeicherte Energie vollständig zurückgewonnen wird und schließt damit den Verlust durch innere Dämpfung aus. Wird ein Materialverhalten als linear elastisch bezeichnet, stehen der Spannungs- und der Verzerrungszustand proportional zueinander. [2, S. 177]

Im Rahmen dieser Arbeit wird nur das ideal elastische Materialverhalten berücksichtigt.

#### 2.1.1 Spannungszustand und Gleichgewichtsbeziehungen

In einem kartesischen  $x$ - $y$ - $z$ -Koordinatensystem hat ein Volumenelement neun Spannungskomponenten; drei Normalspannungen  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  und sechs Schubspannungen  $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}$  (Abbildung 2.1).

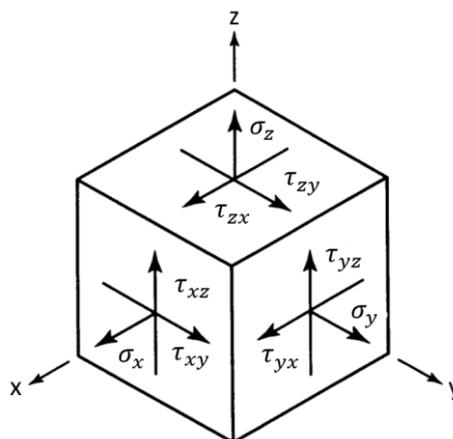


Abbildung 2.1: Spannungen am infinitesimalen Volumenelement

Die Betrachtung des Momentengleichgewichts um alle drei Raumachsen bezüglich des Schwerpunkts bedingt, dass die Schubspannungen mit vertauschten Indizes gleich sein müssen, es gilt:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (1-1)$$

Damit verringert sich die Anzahl der Spannungskomponenten von neun auf sechs.

Um den Spannungszustand zu beschreiben, ist es üblich, die Spannungskomponenten in einer symmetrischen Matrix  $\underline{\underline{\sigma}}$  zusammenzufassen. Diese wird auch als Spannungstensor bezeichnet und ist wie folgt aufgebaut:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \text{sym.} & & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1-2)$$

[3, S. 19–20]

Das Aufstellen von Kräftegleichgewichtsgleichungen in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung an einem infinitesimal kleinen Volumenelement ergibt die folgenden Beziehungen:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -f_x \quad (1-3)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = -f_y \quad (1-4)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = -f_z \quad (1-5)$$

Dabei repräsentieren  $f_x$ ,  $f_y$  und  $f_z$  allgemeine Volumenkräfte wie z.B. Trägheits- oder Gravitationskräfte. [4, S. 18–20]

In dieser Bachelorarbeit werden aber keine Volumenkräfte berücksichtigt, sie werden auf null gesetzt. Somit resultieren die folgenden lokalen Gleichgewichtsbedingungen:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (1-6)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (1-7)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (1-8)$$

## 2.1.2 Verzerrungszustand

Unter dem Begriff Verzerrungen werden Dehnungen und Gleitungen aufgefasst. Sie dienen zur Beschreibung der gesamten Gestaltänderung eines Bauteils. Dehnungen führen zu Längenänderungen, während Gleitungen Winkeländerungen bewirken.

In der linearen Theorie gilt die Annahme, dass alle drei Verschiebungen  $u, v$  und  $w$  in jeweils  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung kleiner als die Dimensionen des Bauteils sind. [4, S. 25]

Die Beziehungen zwischen den Verzerrungen und den Verschiebungen lassen sich mittels folgender Formel darstellen:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1-9)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1-10)$$

Der Verzerrungstensor  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  ist eine symmetrische Matrix und wird wie folgt definiert:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \text{sym.} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ & & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \text{sym.} & & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (1-11)$$

[3, S. 21]

## 2.1.3 Konstitutive Gleichungen und Materialgesetz

Das Materialgesetz und die daraus resultierenden sogenannten konstitutiven Gleichungen liefern den Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen, es gilt die folgende Vektor-Matrix-Schreibweise:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (1-12)$$

Dabei wird  $\underline{\underline{C}}$  als Steifigkeitsmatrix bezeichnet. Im Fall der Anisotropie, ist das Werkstoffverhalten richtungsunabhängig, somit verfügt die Steifigkeitsmatrix über 81

voneinander unabhängige Konstanten. Da sowohl der Spannungstensor als auch der Verzerrungstensor symmetrisch sind, reduziert sich die Anzahl der Konstanten auf 36. Wird noch die Symmetrie der Steifigkeitsmatrix in Betracht gezogen, sinkt die Anzahl der Konstanten auf 21.

Die Vektor-Matrix-Schreibweise lautet:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ \text{sym.} & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (1-13)$$

Die Inverse der Steifigkeitsmatrix  $\underline{\underline{C}}$  wird Nachgiebigkeitsmatrix  $\underline{\underline{S}}$  genannt. Diese kann verwendet werden, um Verzerrungen aus den Spannungen zu ermitteln. Es gilt:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{\sigma}} \quad (1-14)$$

[3, S. 25–27]

Für den Fall der Orthotropie liegen drei orthogonal zueinanderstehende Symmetrieebenen vor. Dabei reduziert sich die Anzahl der unabhängigen Einträge der Steifigkeitsmatrix auf neun. Das führt dazu, dass Normalspannungen nur Dehnungen verursachen, während Schubspannungen nur Gleitungen erzeugen.

Die Steifigkeitsmatrix sieht in diesem Fall Folgendes vor:

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ \text{sym.} & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (1-15)$$

[5, S. 110]

## 2.2 Klassische Laminattheorie

### 2.2.1 Einführung

Der Begriff Laminat deutet einen Verbund mehrerer Einzelschichten an. Diese sind mit den drei Eigenschaften: Material, Schichtdicke und Faserorientierung gekennzeichnet. Die Einstellung der Steifigkeit und Festigkeit des gesamten Laminats erfolgt mit der Einstellung der Eigenschaften der Einzelschichten. Es wird aber stillschweigend angenommen, dass alle Einzelschichten des Laminats über die gleiche Dicke und dieselben Materialeigenschaften verfügen. Sollte dies nicht der Fall sein, muss es noch extra erwähnt werden.

In dieser Arbeit werden nur Laminats, die durch unidirektionale Faser verstärkt sind, betrachtet. Die Faserorientierung einer Schicht  $k$  wird mit  $\theta_k$  notiert. Der Lageaufbau des Laminats lässt sich mit dem sogenannten Laminat-Code definieren. Dazu werden Faserorientierungen von der untersten Schicht in die positive  $z$ -Richtung gezählt. Ein Beispiel dafür wird mittels der Formel (1-16) und der Abbildung 2.2 nähergebracht.

$$[0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, -45^\circ, 0^\circ] \quad (1-16)$$

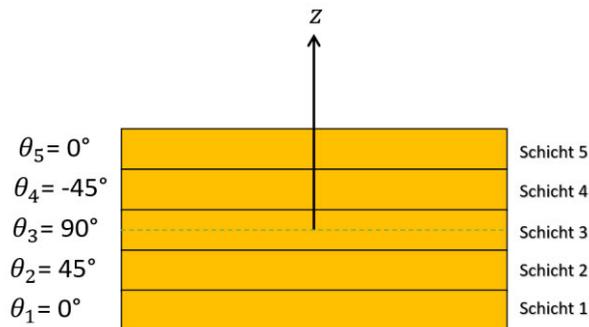


Abbildung 2.2: Laminat-einzelschichten und Nomenklatur

Der Laminat-Code ermöglicht einige Abkürzungen, die bei manchen Laminattypen nützlich sein können. Im Fall eines symmetrischen Laminats reicht es aus, nur die Hälfte der Schichten anzugeben und die eckigen Klammern mit dem Index S zu beenden. Das Laminat sieht dann wie folgt aus:

$$[0^\circ, 90^\circ]_S = [0^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 0^\circ] \quad (1-17)$$

Laminats, deren Schichten nebeneinander über die gleiche Faserorientierung verfügen, können analog zum symmetrischen Laminat mit der gleichen Weise gekürzt werden. Der Index in diesem Fall ist die Anzahl der wiederholenden Schichten. Es gilt:

$$[0^\circ, 90^\circ]_2 = [0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, 90^\circ] \quad (1-18)$$

Liegen direkt aufeinanderfolgende Schichten vor, die betragsmäßig die gleiche Faserorientierung haben, aber über verschiedene Vorzeichen verfügen, werden die Faserorientierungen mittels des Symbols "±" zusammengefasst:

$$[\pm 45^\circ] = [+45^\circ, -45^\circ] \quad (1-19)$$

Des Weiteren wird für ein untersuchtes Laminat der Ursprung des  $x$ - $y$ - $z$ -Koordinatensystems in der Laminatmittelebene positioniert, somit wird das Laminat in zwei Hälften gleicher Dicke  $h/2$  geteilt. Dies wird mithilfe der Abbildung 2.3 verdeutlicht. Eine Schicht  $k$  ist mit den zwei  $z$ -Koordinaten  $z_k$  und  $z_{k+1}$  charakterisiert. Die beiden Koordinaten zeichnen die untere bzw. obere Grenzfläche der  $k$ -Schicht aus.

[3, S. 501–502]

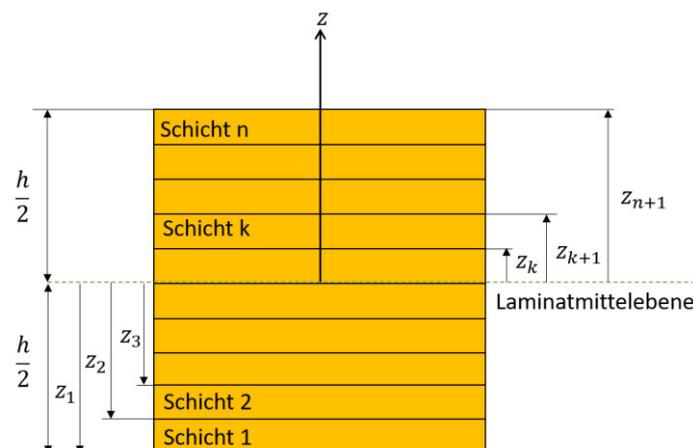


Abbildung 2.3: Schnitt durch ein Laminat

## 2.2.2 Kinematische Voraussetzungen

Das Ziel der klassischen Laminattheorie besteht darin, die Eigenschaften des gesamten Laminats aus den Eigenschaften der Einzelschichten herzuleiten. Sie wird oft mit CLT oder CPLT abgekürzt. Ihre Gültigkeit hängt von der Gültigkeit der folgenden Annahmen ab:

- Das Laminat soll dünn sein, sodass die Dicke sehr klein im Vergleich zu anderen Abmessungen ist. Diese Annahme hat als Folge, dass ein ebener Spannungszustand vorliegt, somit können die Normalspannungen und Schubspannungen in Dickenrichtung vernachlässigt werden ( $\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0$ ).
- Die Dicke des Laminats ändert sich während des gesamten Verformungsvorgangs nicht. Dies führt zum Verschwinden der Dehnung in  $z$ -Richtung ( $\varepsilon_z = 0$ ).
- Es gilt die Kinematik der Kirchhoffschen Plattentheorie. Diese besagt, dass eine Gerade, die vor der Verformung normal zur Mittelebene des Laminats steht, nach der Verformung weiterhin eine Gerade bleibt (Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte). Zusätzlich steht diese Gerade normal zur Laminatmittelebene (Normalenhypothese). Infolgedessen verschwinden die Querschubverzerrungen ( $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ ).
- Das Verhalten der Einzelschichten ist homogen. Risse, Faserwelligkeit oder allgemeine Schädigungen sind ausgeschlossen, weil dort ein komplizierter Spannungszustand herrscht.
- Einzelschichten sind ideal miteinander verklebt.

[2, S. 220–221], [5, S. 105], [3, S. 502–503], [2, S. 206]

Die folgende Abbildung veranschaulicht die Kinematik der Kirchhoff-Platte unter Berücksichtigung der konstanten Dicke während der Verformung:

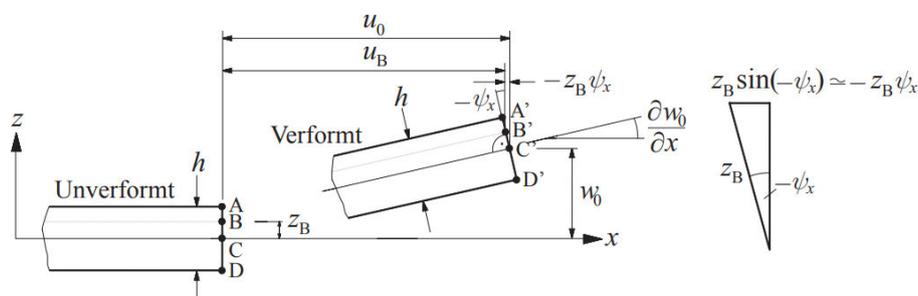


Abbildung 2.4: Kinematik eines Laminats nach CLT [7, S. 147]

Dabei wird zwischen dem verformten und unverformten Zustand unterschieden. Alle Verschiebungen der Laminatmittelebene sind mit dem Index 0 vermerkt, und hängen

nur von den Koordinaten  $x$  und  $y$  ab. Es gilt  $u_0(x, y)$  in  $x$ -Richtung,  $v_0(x, y)$  in  $y$ -Richtung und  $w_0(x, y)$  in  $z$ -Richtung. Ein Punkt, der auf der Laminatmittelebene liegt, hat die Verschiebungen  $u_0$ ,  $v_0$  und  $w_0$ . Die Neigung des Plattenelements ist durch  $\delta w_0(x, y)/\delta x$  beschrieben. Des Weiteren sind  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$ ,  $w(x, y, z)$  Verschiebungen an einem beliebigen Punkt im Laminat.

Es ergeben sich zwei Biegewinkel  $\psi_x(x, y)$  und  $\psi_y(x, y)$ , die die Rotation des Querschnitts um die  $x$ - bzw.  $y$ -Achse beschreiben.

Die Verschiebung  $u_B$  des Punkts B lässt sich mithilfe der Abbildung 2.4 wie folgt definieren:

$$u_B = u_0 + z_B \sin(\psi_x) \quad (1-20)$$

Für kleine Winkel gilt die Vereinfachung  $\psi_x \approx \sin(\psi_x)$

Die Formel (1-20) sieht dann wie folgt aus:

$$u_B = u_0 + z_B \psi_x \quad (1-21)$$

Dieser Zusammenhang lässt sich für einen beliebigen Punkt im Laminat erweitern, es gelten:

$$u = u_0 + z_B \psi_x \quad (1-22)$$

$$v = v_0 + z_B \psi_y \quad (1-23)$$

Für die Durchbiegung muss noch die Annahme der konstanten Dicke während der Verformung in Betracht gezogen werden. Dies führt dazu, dass die Durchbiegung eines beliebigen Punkts im Laminat mit der Durchbiegung der Laminatmittelebene identisch ist. Es gilt:

$$w = w_0 \quad (1-24)$$

Anschließend wird die Normalenhypothese berücksichtigt, wonach eine Gerade vor und nach der Verformung normal zur Mittelebene bleibt. Daraus resultieren beide Formel hinsichtlich der Biegewinkel:

$$-\psi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (1-25)$$

$$-\psi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (1-26)$$

Zusammenfassend lassen sich die Verschiebungen eines beliebigen Punkts unter Betrachtung der Annahmen der CLT wie folgt formulieren:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z \psi_x(x, y) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (1-27)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z \psi_y(x, y) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (1-28)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (1-29)$$

[7, S. 146–148]

### 2.2.3 Verzerrungen und Spannungen

Die Verzerrungen lassen sich aus den Verschiebungen folgendermaßen bestimmen:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (1-30)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad (1-31)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1-32)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \quad (1-33)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (1-34)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (1-35)$$

Es ist üblich, die übrigen drei Komponenten der Verzerrungen in eine vektorielle Schreibweise umzuformulieren:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^0 + z \underline{\kappa}^0 \rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_x(x, y, z) \\ \varepsilon_y(x, y, z) \\ \gamma_{xy}(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0(x, y) \\ \varepsilon_y^0(x, y) \\ \gamma_{xy}^0(x, y) \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \kappa_x^0(x, y) \\ \kappa_y^0(x, y) \\ \kappa_{xy}^0(x, y) \end{pmatrix} \quad (1-36)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{pmatrix}, \underline{\underline{\kappa}}^0 = - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \quad (1-37)$$

Dabei beinhaltet der Vektor  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  die Dehnungen  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  und die Gleitung  $\gamma_{xy}$  eines beliebigen Punkts im Laminat, während der Vektor  $\underline{\underline{\varepsilon}}^0$  die Dehnungen  $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0$  sowie die Gleitung  $\gamma_{xy}^0$  der Laminatmittelebene enthält. Der Vektor  $\underline{\underline{\kappa}}^0$  setzt sich aus den Krümmungen  $\kappa_x^0, \kappa_y^0$  und der Verdrillung  $\kappa_{xy}^0$  der Laminatmittelebene zusammen. Die Verzerrungen aus den Vektoren  $\underline{\underline{\varepsilon}}^0$  und  $\underline{\underline{\kappa}}^0$  lassen sich mithilfe der folgenden Abbildung illustrieren:

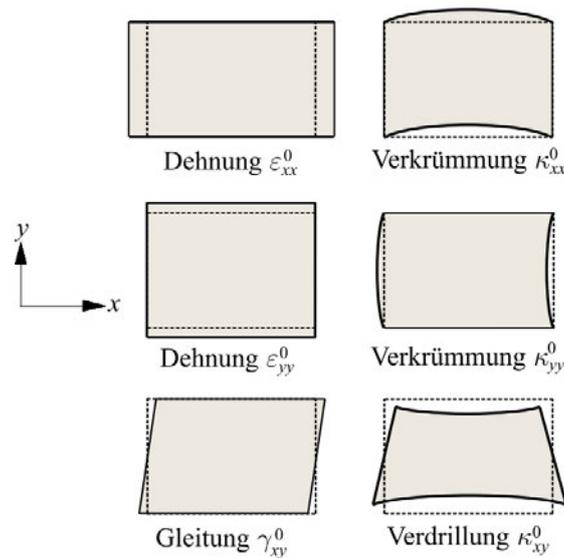


Abbildung 2.5: Verformungszustände eines Laminats bezogen auf die Laminatmittelebene [3, S. 506]

Die schichtweise Spannungen des Laminats können nun mithilfe des Hookeschen Gesetzes bestimmt werden. Es gilt für jede Schicht  $k$ :

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (1-38)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left[ \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix} \right] \quad (1-39)$$

$\bar{Q}_{ij}$  sind Einträge der transformiert reduzierten Steifigkeitsmatrix  $\underline{\underline{\bar{Q}}}$ , die sich auf das globale  $x$ - $y$ -Koordinatensystem bezieht. Sie lässt sich aus der Transformationsmatrix  $\underline{\underline{T}}$  und der reduzierten Steifigkeitsmatrix  $\underline{\underline{Q}}$ , bezogen auf das lokale 1-2-Koordinatensystem, gemäß der Formel (1-40) bestimmen. Das lokale 1-2-Koordinatensystem wird durch das Hauptachsensystem der Schicht beschrieben. Die beiden Koordinatensysteme sind in der Abbildung 2.6 illustriert. Dabei ist  $\theta$  die Faserorientierung der Schicht.

$$\underline{\underline{\bar{Q}}} = \underline{\underline{T}}^{-1} \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{T}}^{-T} \quad (1-40)$$

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) & 2 \sin(\theta) \cos(\theta) \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) & -2 \sin(\theta) \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \cos(\theta) & \sin(\theta) \cos(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \quad (1-41)$$

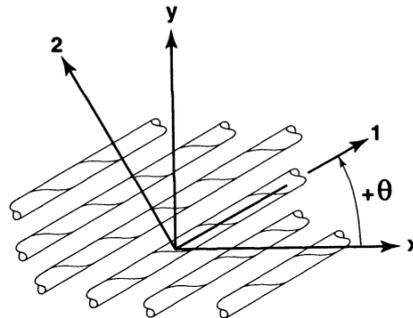


Abbildung 2.6: Faserorientierungswinkel bezogen auf das lokale 123- und globale  $x$ - $y$ - $z$ -KOS [6, S. 75]

Die reduzierte Steifigkeitsmatrix  $\underline{\underline{Q}}$  kann aus den Werkstoffkennwerten; Elastizitätsmodul in Faserrichtung  $E_1$ , quer zur Faserrichtung  $E_2$ , Schubmodul  $G_{12}$  sowie die Querkontraktionszahlen  $\nu_{12}, \nu_{21}$  wie folgt ermittelt werden:

$$\underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ \text{sym.} & Q_{22} & Q_{26} \\ & & Q_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} & \frac{\nu_{21} E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} & 0 \\ & \frac{E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} & 0 \\ \text{sym.} & & G_{12} \end{bmatrix} \quad (1-42)$$

Zur Bestimmung der Querkontraktionszahl  $\nu_{21}$  wird die folgende Formel verwendet:

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \quad (1-43)$$

[7, S. 148–149], [5, S. 112–114]

## 2.2.4 Schnittgrößen

Die Formeln für Schnittgrößen pro Längeneinheit können aus den konstitutiven Gleichungen abgeleitet werden. Sie lassen sich in Schnittkräften mit der Einheit [Kraft/Längeneinheit] und Schnittmomente mit der Einheit [Kraft] unterteilen. Die Schnittkräfte fassen Normalkraftflüsse  $N_x^0, N_y^0$  und Schubkraftfluss  $N_{xy}^0$  zusammen, während die Biegemomente  $M_x^0, M_y^0$  und das Drillmoment  $M_{xy}^0$  zu Schnittmomenten gehören. All diese Schnittgrößen sind in der folgenden Abbildung dargestellt:

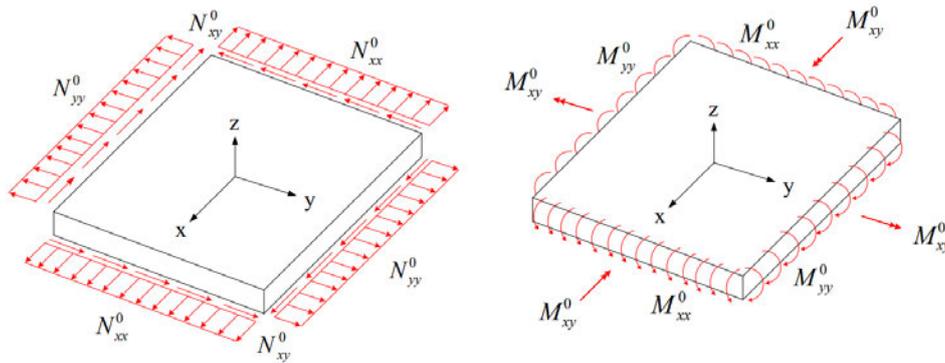


Abbildung 2.7: Schnittkräfte und Schnittmomente eines Laminats [7, S. 151]

Zuerst werden durch die Integration über die Dicke  $h$  die Formel der Schnittkräfte und der Schnittmomente vorgestellt. Es gelten:

$$\begin{pmatrix} N_x^0 \\ N_y^0 \\ N_{xy}^0 \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} dz \quad (1-44)$$

$$\begin{pmatrix} M_x^0 \\ M_y^0 \\ M_{xy}^0 \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} z dz \quad (1-45)$$

Da aber die elastischen Eigenschaften schichtweise verschieden sein können, ist der Spannungsverlauf unstetig; es erfolgt ein Zerfallen des Integrals in  $n$ -Integrale:

$$\begin{pmatrix} N_x^0 \\ N_y^0 \\ N_{xy}^0 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} dz \quad (1-46)$$

$$\begin{pmatrix} M_x^0 \\ M_y^0 \\ M_{xy}^0 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} z dz \quad (1-47)$$

Unter Verwendung der Formel (1-39) ergeben sich die folgenden Beziehungen:

$$\begin{pmatrix} N_x^0 \\ N_y^0 \\ N_{xy}^0 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left[ \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix} \right] dz \quad (1-48)$$

$$\begin{pmatrix} M_x^0 \\ M_y^0 \\ M_{xy}^0 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{36} \end{bmatrix}_k \left[ \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix} \right] z dz \quad (1-49)$$

Nach der Durchführung der Integration und das Zusammenfassen der Schnittgrößen sowie der Verzerrungen in Vektoren, resultiert:

$$\begin{pmatrix} N_x^0 \\ N_y^0 \\ N_{xy}^0 \\ M_x^0 \\ M_y^0 \\ M_{xy}^0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix} \quad (1-50)$$

Wobei für  $i, j = 1, 2, 6$  die Einträge  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $D_{ij}$  folgendermaßen berechnet werden können:

$$A_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} dz = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij,k} (z_{k+1} - z_k) \quad (1-51)$$

$$B_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} z dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij,k} (z_{k+1}^2 - z_k^2) \quad (1-52)$$

$$D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} z^2 dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij,k} (z_{k+1}^3 - z_k^3) \quad (1-53)$$

Die Einträge  $A_{ij}$  bilden die Dehnsteifigkeitsmatrix  $\underline{\underline{A}}$  und beschreiben den Zusammenhang zwischen den Schnittkräften  $N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0$  und den Verzerrungen  $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$ . Andererseits bilden die Einträge  $D_{ij}$  die Biegesteifigkeitsmatrix  $\underline{\underline{D}}$  und verbinden die Schnittmomente  $M_x^0, M_y^0, M_{xy}^0$  mit den Verkrümmungen  $\kappa_x^0, \kappa_y^0$  und der Verdrillung  $\kappa_{xy}^0$ .

Anschließend dienen die Größen  $B_{ij}$  zur Bildung der Koppelmatrix  $\underline{\underline{B}}$ . Sie verkoppeln die Schnittkräfte  $N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0$  mit  $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$  und Schnittmomente  $M_x^0, M_y^0, M_{xy}^0$  mit  $\kappa_x^0, \kappa_y^0, \kappa_{xy}^0$ .

Die zusammengefasste Schreibweise der Formel (1-50) lautet:

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{N}}^0 \\ \underline{\underline{M}}^0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{D}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\underline{\varepsilon}}^0 \\ \underline{\underline{\kappa}}^0 \end{pmatrix} \quad (1-54)$$

Die entstandene  $ABD$ -Matrix beschreibt das mechanische Verhalten des Laminats. Sie hängt von dem Laminataufbau und den elastischen Eigenschaften aller Einzelschichten ab.

[7, S. 150–153], [5, S. 115–118]

## 2.2.5 Koppelwirkungen

Aus der  $ABD$ -Matrix wird festgestellt, dass der Scheiben- und Plattenzustand miteinander gekoppelt sind. Des Weiteren kann ein Schnittkraftfluss  $N_x^0$  die Dehnungen  $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0$ , die Gleitung  $\gamma_{xy}^0$ , Krümmungen  $\kappa_x^0, \kappa_y^0$  und die Drillung  $\kappa_{xy}^0$  hervorrufen.

Es gelten die folgenden Koppelwirkungen:

- $A_{16}, A_{26}$  verursachen eine Schubkopplung
- $D_{16}, D_{26}$  sorgen für eine Biege-Drill-Kopplung

- $B_{ij}$  bewirken eine Biege-Dehn-Kopplung

Die Entstehung von Schubkopplung durch die Einträge  $A_{16}, A_{26}$  kommt so zustande, dass die Schnittschubkraft  $N_{xy}^0$  die Dehnungen  $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0$  hervorruft. Andererseits ist die Gleitung  $\gamma_{xy}^0$  mit den Schnittkräften  $N_x^0, N_y^0$  verbunden. Sind die Einträge  $A_{16}, A_{26}$  null, verschwindet die Schubkopplung. Es liegt ein „ausgeglichenes“ Laminat vor.

Ein Laminat zeigt eine Biege-Drill-Kopplung, wenn die Größen  $D_{16}, D_{26}$  ungleich null sind. Diese koppeln die Schnittmomente  $M_x^0, M_y^0$  mit der Drillung  $\kappa_{xy}^0$  und das Drillmoment  $M_{xy}^0$  mit den Krümmungen  $\kappa_x^0, \kappa_y^0$ .

Im Fall eines symmetrischen Laminats sind alle Einträge der  $B$ -Matrix gleich null. Andernfalls tritt eine Biege-Dehn-Kopplung auf. Die Verzerrungen  $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$  beteiligen sich an der Entstehung der Schnittmomente  $M_x^0, M_y^0, M_{xy}^0$ , während die Krümmungen  $\kappa_x^0, \kappa_y^0$  und die Drillung  $\kappa_{xy}^0$  die Schnittkräfte  $N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0$  verursachen.

[7, S. 154–155]

## 2.2.6 Spezielle Laminare

In der Praxis kommt eine vollbesetzte  $ABD$ -Matrix selten vor. Es ist wünschenswert, dass je nach Anwendungsfall einige Einträge verschwinden, zum einen um die Berechnungen zu vereinfachen und zum anderen um die im letzten Unterkapitel erläuterten Koppel Effekte zu vermeiden oder zu erzielen. Beispiele solcher Laminare werden im Folgenden vorgestellt.

### 2.2.6.1 Isotrope Einzelschicht

In diesem Fall stellen alle Schnittebenen und Achsen eine Symmetrieebene dar; damit sind alle elastische Materialkennwerte richtungsunabhängig. Daraus resultieren sich zwei unabhängige Kennwerte. Es gilt die Beziehung zwischen Elastizitätsmodul  $E$ , Schubmodul  $G$  und Querkontraktionszahl  $\nu$ :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (1-55)$$

Die  $ABD$ -Matrix einer isotropen Einzelschicht ist wie folgt aufgebaut:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5(A_{11} - A_{12}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5(D_{11} - D_{12}) \end{bmatrix} \quad (1-56)$$

### 2.2.6.2 Orthotrope Einzelschicht

In diesem Fall lässt sich die Symmetrie der elastischen Eigenschaften mit drei senkrecht aufeinander stehenden Ebenen beschreiben. Dies führt dazu, dass die Normalspannungen Dehnungen bewirken, während Schubspannungen Gleitungen hervorrufen. Das Materialverhalten wird mit den fünf Kennwerten  $E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}, \nu_{21}$  gekennzeichnet.

Es treten weder die Schubkopplung noch die Biege-Drill-Kopplung auf. Damit vereinfacht sich die  $ABD$ -Matrix bei symmetrischen Laminaten wie folgt:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (1-57)$$

### 2.2.6.3 Kreuzverbund (Cross-ply)

Kreuzverbund ist ein Laminat, welches aus den Faserwinkeln  $0^\circ$  und  $90^\circ$  besteht. Es weist ein orthotropes Materialverhalten auf. Neben dem Verschwinden der Schubkopplung ( $A_{16} = A_{26} = 0$ ) und der Biege-Drill-Kopplung ( $D_{16} = D_{26} = 0$ ) sind die folgenden Beiträge gleich:

$$B_{22} = -B_{11} \quad (1-58)$$

Die  $ABD$ -Matrix vereinfacht sich und verbleibt

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & -B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ B_{11} & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & -B_{11} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (1-59)$$

Bei einem symmetrischen Laminat ist der Term  $B_{11}$  gleich null

#### 2.2.6.4 Winkelverbund (Angle-ply)

Ein Winkelverbund ist ein Laminat, dessen Aufbau so charakterisiert ist, dass für jede Schicht mit dem Faserwinkel  $\theta$  eine Schicht mit entgegengesetztem Faserwinkel  $-\theta$  besteht. Dies hat zur Konsequenz, dass diese Art der Lamine immer ausgeglichen sind. Es gilt  $A_{16} = A_{26} = 0$ . Ob das Laminat frei von Biege-Drill-Kopplung oder Biege-Dehn-Kopplung ist, hängt von dem Laminataufbau ab.

Ein unsymmetrischer Winkelverbund hat die folgende  $ABD$ -Matrix:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & B_{26} \\ 0 & 0 & A_{66} & B_{16} & B_{26} & 0 \\ 0 & 0 & B_{16} & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & B_{26} & D_{12} & D_{22} & 0 \\ B_{16} & B_{26} & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (1-60)$$

Im Fall eines symmetrischen Laminats wird die  $B$ -Matrix gleich null, damit verschwinden die Einträge  $B_{16}$  und  $B_{26}$ .

#### 2.2.6.5 Quasi-isotrope Lamine

Ein quasi-isotropes Laminat wird in der Praxis wegen seiner breiten Anwendung Flugzeugbaulaminat genannt. Es ist stets ausgeglichen und wird zudem dadurch charakterisiert, dass die Dehnsteifigkeitsmatrix isotrope Eigenschaften aufweist. Es gilt  $A_{11} = A_{22}$  sowie  $A_{66} = 0.5 (A_{11} - A_{12})$ . Für ein symmetrisches Laminat lässt sich die  $ABD$ -Matrix folgendermaßen ausdrücken:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5(A_{11} - A_{12}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \quad (1-61)$$

Als Beispiel zu Flugzeugbaulaminaten lässt sich das Laminat  $[0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ]_S$  anführen. [7, S. 157–160], [5, S. 121]

## 2.3 Interlaminare Spannungen und CLT

Wie im letzten Kapitel der klassischen Laminattheorie vorgestellt, sind die Spannungen in Dickenrichtung  $\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z$ , auch interlaminare oder transversale Spannungen genannt, wegen der getroffenen Annahmen gleich null. Allerdings können die lokalen Gleichgewichtsbedingungen gemäß der Formeln (1-6), (1-7) und (1-8) verwendet werden, um diese Spannungen zu ermitteln. Dies gelingt mithilfe der Navierschen Lösungen anhand Ansatzfunktionen der Verschiebungen. Dabei ist es zwischen dem Fall des Kreuzverbunds und des unsymmetrischen Winkelverbunds zu unterscheiden.

### 2.3.1 Statisches Gleichgewicht und Differentialgleichungen der Verschiebungen

In diesem Unterkapitel werden die Gleichgewichtsbedingungen eines ebenen Laminats hergeleitet. Wie die im Kapitel 2.1.1 präsentierten dreidimensionalen Gleichgewichtsbedingungen, wird hier auch ein infinitesimales Laminatschnittelement betrachtet. Dieses wird mit den dazugehörigen Schnittkräften und -momenten in der Abbildung 2.8 illustriert. Die Querkräfte  $Q_x$  und  $Q_y$  treten bei der CLT nicht auf, sie dienen hier zum Aufstellen des statischen dreidimensionalen Gleichgewichts. Bezüglich der äußeren Lasten wirken zwei Tangentialbelastungen  $p_x, p_y$  sowie eine Querlast  $p$  in  $z$ -Richtung orthogonal zur Laminebene.

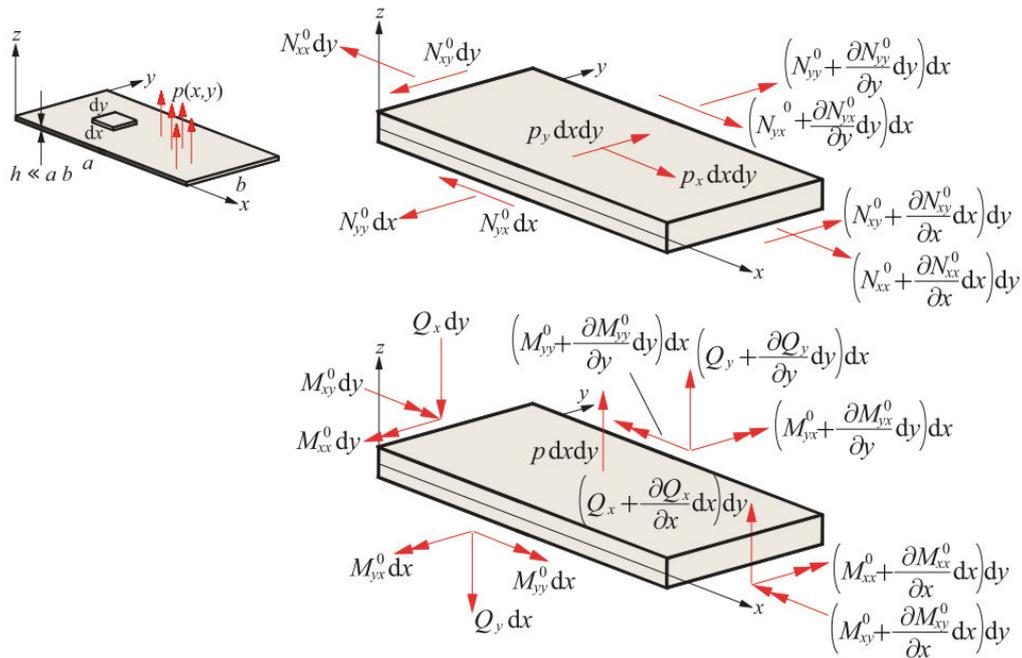


Abbildung 2.8: infinitesimales Schnittelement eines Laminats [3, S. 523]

Das Gleichgewicht der Kräfte in  $x$ -Richtung ergibt:

$$\left(N_x^0 + \frac{\partial N_x^0}{\partial x} dx\right) dy + \left(N_{yx}^0 + \frac{\partial N_{yx}^0}{\partial y} dy\right) dx - N_x^0 dy - N_{yx}^0 dx + p_x dx dy = 0 \quad (1-62)$$

Nach Umformen und Kürzen unter Berücksichtigung von  $N_{yx}^0 = N_{xy}^0$  resultiert:

$$\frac{\partial N_x^0}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^0}{\partial y} + p_x = 0 \quad (1-63)$$

Analog dazu gilt für die Kraftbilanz in  $y$ -Richtung Folgendes:

$$\left(N_y^0 + \frac{\partial N_y^0}{\partial y} dy\right) dx + \left(N_{xy}^0 + \frac{\partial N_{xy}^0}{\partial x} dx\right) dy - N_y^0 dx - N_{xy}^0 dy + p_y dx dy = 0 \quad (1-64)$$

Nach Umformen und Kürzen resultiert:

$$\frac{\partial N_y^0}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}^0}{\partial x} + p_y = 0 \quad (1-65)$$

Die beiden Gleichungen (1-63) und (1-65) stellen das sogenannte Scheibengleichgewicht her.

Des Weiteren lässt sich aus dem Gleichgewicht in  $z$ -Richtung die folgende Gleichung feststellen:

$$\left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx\right) dy + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy\right) dx - Q_x dy - Q_y dx + p dx dy = 0 \quad (1-66)$$

Bzw.

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0 \quad (1-67)$$

Das Momentengleichgewicht um die  $y$ -Achse bezüglich des Schwerpunkts ist wie folgt formuliert:

$$\begin{aligned} \left(M_x^0 + \frac{\partial M_x^0}{\partial x} dx\right) dy + \left(M_{yx}^0 + \frac{\partial M_{yx}^0}{\partial y} dy\right) dx - M_x^0 dy - M_{yx}^0 dx \\ - \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx\right) dy \frac{dx}{2} - Q_x dy \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned} \quad (1-68)$$

Nach Umformen und Kürzen unter Betrachtung von  $M_{yx}^0 = M_{xy}^0$  sieht die Formel folgendermaßen aus:

$$\frac{\partial M_x^0}{\partial x} dx dy + \frac{\partial M_{xy}^0}{\partial y} dx dy - Q_x dx dy - \frac{\partial Q_x}{\partial x} \frac{dx^2 dy}{2} = 0 \quad (1-69)$$

Der Term  $dx^2 dy/2$  kann als klein von höherer Ordnung im Vergleich zu anderen Termen betrachtet werden, die Gleichung (1-69) wird wie folgt:

$$\frac{\partial M_x^0}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^0}{\partial y} = Q_x \quad (1-70)$$

Analog dazu ergibt das Momentengleichgewicht um die  $x$ -Achse:

$$\frac{\partial M_y^0}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}^0}{\partial x} = Q_y \quad (1-71)$$

Die Gleichungen (1-67), (1-70) sowie (1-71) bilden das sogenannte Plattengleichgewicht.

Werden die Gleichung (1-70) nach  $x$  und die Gleichung (1-71) nach  $y$  abgeleitet und die Ergebnisse unter Berücksichtigung der Formel (1-67) summiert, führt dies zur folgenden Formel:

$$\frac{\partial^2 M_x^0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y^0}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^0}{\partial x \partial y} + p = 0 \quad (1-72)$$

Die resultierende Gleichung wird kondensiertes Plattengleichgewicht genannt.

Die Beziehung zwischen Schnittgrößen und Verschiebungen lässt sich aus den Formeln (1-37), (1-51) und (1-50) wie folgt zusammenfassen:

$$\begin{pmatrix} N_x^0 \\ N_y^0 \\ N_{xy}^0 \\ M_x^0 \\ M_y^0 \\ M_{xy}^0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \quad (1-73)$$

Das Einsetzen der Schnittgrößen in den Gleichgewichtsgleichungen (1-63), (1-65) und (1-72) ergibt die folgenden Verschiebungsdifferentialgleichungen:

$$\begin{aligned} A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\ - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \\ + p_x = 0 \end{aligned} \quad (1-74)$$

$$\begin{aligned} A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\ - B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \\ + p_y = 0 \end{aligned} \quad (1-75)$$

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \\ - B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} \\ - B_{16} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - p \\ = 0 \end{aligned} \quad (1-76)$$

Es zu erkennen, dass das Gleichgewicht durch die Verschiebungen der Laminatmittelebene  $u_0, v_0$  und  $w_0$  beschrieben werden kann. Darüber hinaus sind diese miteinander gekoppelt, es erfolgt also eine Kopplung des Scheiben- und Plattenzustands.

[7, S. 172–175]

### 2.3.2 Naviersche Lösungen

Um die Verschiebungsdifferentialgleichungen zu lösen, werden Ansatzfunktionen aller Verschiebungen benötigt. Es lassen sich für einige Lastfälle mit definierten Randbedingungen exakt-analytische Lösungen für statische Plattenbiegeprobleme herleiten.

Im Rahmen dieser Arbeit wird auf solche Ansätze eingegangen. Hierbei werden die Navierschen Lösungen vorgestellt.

Eine Naviersche Platte wird als rechteckige Platte definiert, die allseitig gelenkig gelagert ist. Wie in der Abbildung 2.9 dargestellt, hat die Platte die Länge  $a$ , die Breite  $b$ , die Höhe  $h$  und steht unter einer beliebig verteilten Flächenlast  $p = p(x, y)$ . Diese wird oft in einer doppelt trigonometrischen Form einer Fourier-Reihe entwickelt. Es gilt:

$$p(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} P_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (1-77)$$

Die Koeffizienten  $P_{mn}$  lassen sich mittel der folgenden Formel wie folgt bestimmen:

$$P_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a p(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy \quad (1-78)$$

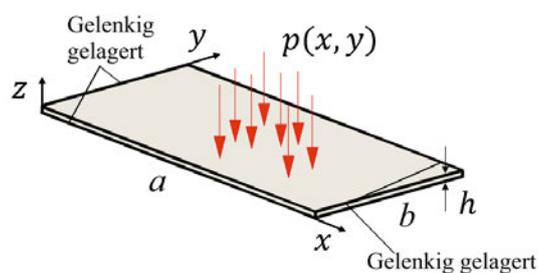


Abbildung 2.9: Allseitig gelenkig gelagerte Platte unter der Flächenlast  $p(x, y)$  [3, S. 310]

Bei den Navierschen Lösungen ist zu erwarten, dass sich die Verschiebungen auch in Form einer doppelt trigonometrischen Fourier-Reihe darstellen lassen. Die Auswahl der Funktionen in der Fourier-Reihe hängt von den Randbedingungen des Plattenproblems ab. Im Allgemeinen ist zwischen zwei Arten der gelenkigen Lagerung SS1 und SS2 zu unterscheiden. Wobei SS auf den englischen Begriff *simply supported* hinweist. Die folgende Abbildung dient zur Veranschaulichung der beiden Randbedingungen.

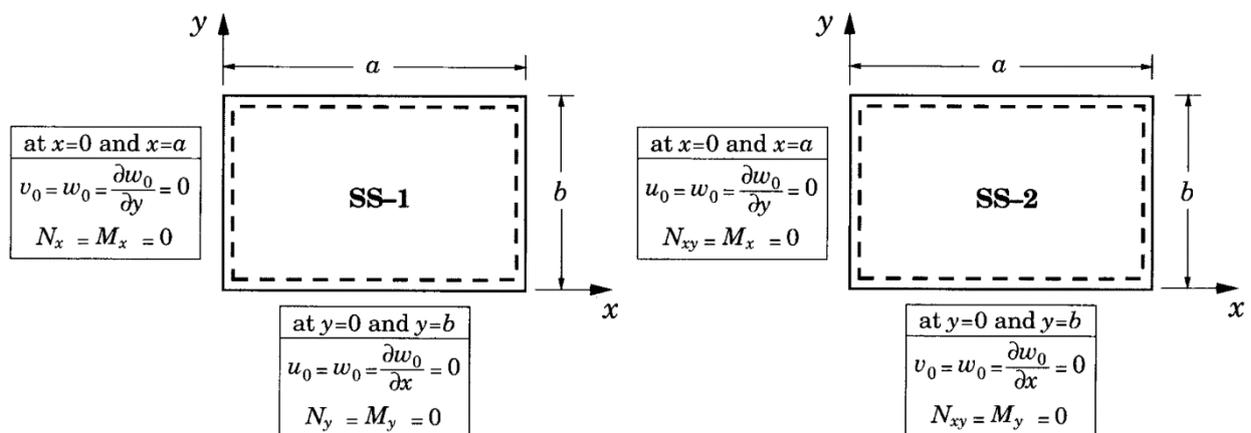


Abbildung 2.10: zwei Typen der gelenkigen Lagerung SS1 und SS2 einer Navierschen Platte [8, S. 300]

Selbst für diese Randbedingungen sind die Naviersche Lösungen nicht für alle Laminare geeignet. Die Erfüllung von SS1-Randbedingungen ist nur für Laminare möglich, deren Einträge  $A_{16}, A_{26}, B_{16}, B_{26}, D_{16}$  und  $D_{26}$  null sind. Unter solchen Laminaten fallen orthotrope Einzelschichten, symmetrische und unsymmetrische Kreuzverbunde. Andererseits setzen die SS2-Randbedingungen die Verwendung von Laminaten voraus, dass die Größen  $A_{16}, A_{26}, B_{11}, B_{12}, B_{22}, B_{66}, D_{16}$  und  $D_{26}$  verschwinden. Hierbei lassen sich orthotrope Einzelschichten, symmetrische Kreuzverbunde und unsymmetrische Winkelverbunde erwähnen.

Im Rahmen dieser Arbeit wird die folgende Unterteilung adaptiert. Untersucht werden symmetrische sowie unsymmetrische Kreuzverbunde mit den SS1-Randbedingungen und unsymmetrische Winkelverbunde mit den SS2-Randbedingungen.

[8, S. 247], [8, S. 299–301]

### 2.3.2.1 Biegung eines symmetrischen und unsymmetrischen Kreuzverbunds

In diesem Fall sieht die  $ABD$ -Matrix nach Formel (1-59) wie folgt aus:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & -B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ B_{11} & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & -B_{11} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (1-79)$$

Sobald ein symmetrischer Kreuzverbund vorliegt, wird der Term  $B_{11}$  zu null.

Für beide Fälle der Kreuzverbunde gelten die SS1-Randbedingungen, die in der Abbildung 2.10 dargestellt sind. Sie verlangen Folgendes:

$$\begin{aligned} v_0(0, y) &= v_0(a, y) = 0 \\ w_0(0, y) &= w_0(a, y) = 0 \\ u_0(x, 0) &= u_0(x, b) = 0 \\ w_0(x, 0) &= w_0(x, b) = 0 \\ M_x^0(0, y) &= M_x^0(a, y) = 0 \\ N_x^0(0, y) &= N_x^0(a, y) = 0 \\ M_y^0(x, 0) &= M_y^0(x, b) = 0 \\ N_y^0(x, 0) &= N_y^0(x, b) = 0 \end{aligned} \quad (1-80)$$

Die Randbedingungen hinsichtlich der Verschiebungen können mit den folgenden Ansatzfunktionen der Verschiebungen erfüllt werden:

$$u_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (1-81)$$

$$v_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (1-82)$$

$$w_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (1-83)$$

Dabei sind  $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}$  Koeffizienten, die für jede  $m, n = 1, 2, \dots$  zu bestimmen sind.

Um zu überprüfen, ob die Randbedingungen hinsichtlich der Schnittgrößen  $N_x^0$ ,  $N_y^0$ ,  $M_x^0$  und  $M_y^0$  auch gültig bleiben, werden die Ansatzfunktionen der Verschiebungen in den Formeln der Schnittgrößen (1-73) eingesetzt. Es resultiert:

$$\begin{aligned}
N_x^0 &= A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{16} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - B_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - B_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\
&\quad - 2B_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ -\frac{m\pi}{a} A_{11} U_{mn} - \frac{n\pi}{b} A_{12} V_{mn} + \left( B_{11} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + B_{12} \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right) W_{mn} \right] f(x, y) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ A_{16} \left( \frac{n\pi}{b} U_{mn} + \frac{m\pi}{a} V_{mn} \right) - 2 \frac{nm\pi^2}{ab} B_{16} W_{mn} \right] g(x, y) \tag{1-84}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_y^0 &= A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{26} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - B_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - B_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\
&\quad - 2B_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ -\frac{m\pi}{a} A_{12} U_{mn} - \frac{n\pi}{b} A_{22} V_{mn} + \left( B_{12} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + B_{22} \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right) W_{mn} \right] f(x, y) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ A_{26} \left( \frac{n\pi}{b} U_{mn} + \frac{m\pi}{a} V_{mn} \right) - 2 \frac{nm\pi^2}{ab} B_{26} W_{mn} \right] g(x, y) \tag{1-85}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_x^0 &= B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} + B_{16} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\
&\quad - 2D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ -\frac{m\pi}{a} B_{11} U_{mn} - \frac{n\pi}{b} B_{12} V_{mn} + (D_{11} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + D_{12} \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right) W_{mn} \right] f(x, y) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ B_{16} \left( \frac{n\pi}{b} U_{mn} + \frac{m\pi}{a} V_{mn} \right) - 2 \frac{nm\pi^2}{ab} D_{16} W_{mn} \right] g(x, y) \tag{1-86}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_y^0 &= B_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} + B_{26} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\
&\quad - 2D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ -\frac{m\pi}{a} B_{12} U_{mn} - \frac{n\pi}{b} B_{22} V_{mn} + (D_{12} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + D_{22} \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right) W_{mn} \right] f(x, y) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ B_{26} \left( \frac{n\pi}{b} U_{mn} + \frac{m\pi}{a} V_{mn} \right) - 2 \frac{nm\pi^2}{ab} D_{26} W_{mn} \right] g(x, y) \tag{1-87}
\end{aligned}$$

Die Funktionen  $f(x, y)$  und  $g(x, y)$  dienen nur zur Abkürzung der Formeln und lauten wie folgt:

$$f(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), g(x, y) = \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{1-88}$$

Es wird ersichtlich, dass die SS1-Randbedingungen nach Formel (1-80) nur erfüllt werden können, wenn die folgenden Einträge der ABD-Matrix  $A_{16}, A_{26}, B_{16}, B_{26}, D_{16}, D_{26}$  gleich null sind; denn die Funktion  $g(x, y)$  ist ungleich null für die Fälle  $x = a, 0$  und  $y = 0, b$ .

Somit existieren die Navierschen Lösungen für rechteckige, laminierte Platten mit SS1-Randbedingungen nur, wenn die Bedingung  $A_{16} = A_{26} = B_{16} = B_{26} = D_{16} = D_{26} = 0$

erfüllt werden kann. Dies trifft auf den Fall des symmetrischen und unsymmetrischen Kreuzverbunds zu.

Des Weiteren sollen die Koeffizienten der Verschiebungen  $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}$  ermittelt werden. Diese ermöglichen die Berechnung der Verschiebungen und somit die Bestimmung aller unbekanntem Verzerrungen und Spannungen.

Zuerst werden die Verschiebungsdifferentialgleichungen gemäß der Formeln (1-74), (1-75) und (1-76) verwendet. Dabei sind die folgenden Aspekte zu berücksichtigen:

- Der untersuchte Lastfall bedingt  $p = p(x, y)$ ,  $p_x = p_y = 0$
- Wie bereits erwähnt sind die folgenden Einträge der ABD-Matrix gleich null

$$A_{16} = A_{26} = B_{16} = B_{26} = D_{16} = D_{26} = 0 \text{ und } B_{12} = B_{66} = 0$$

Es resultieren die Formeln:

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} = 0 \quad (1-89)$$

$$(A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} = 0 \quad (1-90)$$

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - p = 0 \quad (1-91)$$

Das Einsetzen von Ansatzfunktionen der Verschiebungen gemäß der Formeln (1-81), (1-82) und (1-83) in den Differentialgleichungen (1-89), (1-90) sowie (1-91) und Umformen ergibt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ - \left( A_{11} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + A_{66} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) U_{mn} - (A_{12} + A_{66}) \frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b} V_{mn} + B_{11} \frac{m^3 \pi^3}{a^3} W_{mn} \right] \cos \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left( \frac{n\pi y}{b} \right) = 0 \quad (1-92)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ - (A_{12} + A_{66}) \frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b} U_{mn} - \left( A_{66} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + A_{22} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) V_{mn} + B_{22} \frac{n^3 \pi^3}{b^3} W_{mn} \right] \sin \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left( \frac{n\pi y}{b} \right) = 0 \quad (1-93)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ B_{11} \frac{m^3 \pi^3}{a^3} U_{mn} + B_{22} \frac{n^3 \pi^3}{b^3} V_{mn} - (D_{11} \frac{m^4 \pi^4}{a^4} \right. \\
+ 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} + D_{22} \frac{n^4 \pi^4}{b^4} \left. \right) W_{mn} \\
+ P_{mn} \left. \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = 0
\end{aligned} \tag{1-94}$$

Damit die Gleichungen erfüllt werden, müssen die zwischen den eckigen Klammern eingesetzten Termen verschwinden. Es gilt:

$$-\left( A_{11} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + A_{66} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) U_{mn} - (A_{12} + A_{66}) \frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b} V_{mn} + B_{11} \frac{m^3 \pi^3}{a^3} W_{mn} = 0 \tag{1-95}$$

$$-(A_{12} + A_{66}) \frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b} U_{mn} - \left( A_{66} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + A_{22} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) V_{mn} + B_{22} \frac{n^3 \pi^3}{b^3} W_{mn} = 0 \tag{1-96}$$

$$\begin{aligned}
B_{11} \frac{m^3 \pi^3}{a^3} U_{mn} + B_{22} \frac{n^3 \pi^3}{b^3} V_{mn} - (D_{11} \frac{m^4 \pi^4}{a^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \\
+ D_{22} \frac{n^4 \pi^4}{b^4} \left. \right) W_{mn} + P_{mn} = 0
\end{aligned} \tag{1-97}$$

In Matrixform geschrieben:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P_{mn} \end{pmatrix} \tag{1-98}$$

Dabei sind die Abkürzungen  $c_{ij}$  wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
c_{11} &= \left( A_{11} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + A_{66} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right), c_{12} = (A_{12} + A_{66}) \frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b}, \\
c_{13} &= -B_{11} \frac{m^3 \pi^3}{a^3}, c_{22} = \left( A_{66} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + A_{22} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right), c_{23} = -B_{22} \frac{n^3 \pi^3}{b^3}, \\
c_{33} &= (D_{11} \frac{m^4 \pi^4}{a^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} + D_{22} \frac{n^4 \pi^4}{b^4})
\end{aligned} \tag{1-99}$$

Die Lösung von Gleichungen der Formel (1-98) nach  $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}$  für jede  $m, n = 1, 2 \dots$  führt zu Folgendem:

$$W_{mn} = \frac{P_{mn}}{a_{mn}}, U_{mn} = \frac{a_1 P_{mn}}{a_0 a_{mn}}, V_{mn} = \frac{a_2 P_{mn}}{a_0 a_{mn}} \tag{1-100}$$

$$a_{mn} = c_{33} + c_{13} \frac{a_1}{a_0} + c_{23} \frac{a_2}{a_0}, \quad (1-101)$$

$$a_0 = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{12}, a_1 = c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22}, a_2 = c_{13}c_{12} - c_{11}c_{23}$$

Im Fall eines symmetrischen Kreuzverbunds sind die Größen  $a_1$  und  $a_2$  gleich null, da alle Einträge der  $B$ -Matrix gleich null sind. Dies führt dazu, dass die Koeffizienten  $U_{mn}, V_{mn}$  und somit deren dazugehörigen Verschiebungen  $u_0(x, y), v_0(x, y)$  ebenfalls verschwinden. Es bleibt nur die Verschiebung  $w_0(x, y)$ . Im Fall eines unsymmetrischen Kreuzverbunds hingegen sind alle drei Verschiebungen ungleich null, weil die Einträge  $B_{11}$  und  $B_{22}$  ungleich null sind.

Im Rahmen dieser Arbeit wird der Sonderfall der Reihenentwicklung, wenn  $m = n = 1$ , betrachtet. Als Folge wird die doppelt sinusförmige Last nach Formel (1-77) zu:

$$p(x, y) = P_{11} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (1-102)$$

Mithilfe der Formeln (1-81), (1-82) und (1-83) sehen die Verschiebungsansätze wie folgt aus:

$$u_0(x, y) = U_{11} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (1-103)$$

$$v_0(x, y) = V_{11} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (1-104)$$

$$w_0(x, y) = W_{11} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (1-105)$$

Die Bestimmung der drei Koeffizienten  $U_{11}, V_{11}, W_{11}$  beruht auf den Gleichungen der Formel (1-89). Es gilt:

$$W_{11} = \frac{P_{11}}{a_{11}}, U_{11} = \frac{a_1 P_{11}}{a_0 a_{11}}, V_{11} = \frac{a_2 P_{11}}{a_0 a_{11}} \quad (1-106)$$

Da jetzt die Verschiebungen  $u_0, v_0, w_0$  bekannt sind. Können diese verwendet werden, um die Verzerrungen  $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$ , Krümmungen  $\kappa_x^0, \kappa_y^0$ , die Verdrillung  $\kappa_{xy}^0$  und somit die schichtweise intralaminaren Spannungen  $\sigma_{x(k)}, \sigma_{y(k)}, \tau_{xy(k)}$  gemäß der Formeln (1-37) und (1-39) zu bestimmen:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \left( -\frac{\pi}{a} U_{11} + z \frac{\pi^2}{a^2} W_{11} \right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \\ \left( -\frac{\pi}{b} V_{11} + z \frac{\pi^2}{b^2} W_{11} \right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \\ \left( \left( \frac{\pi}{b} U_{11} + \frac{\pi}{a} V_{11} \right) - 2z \frac{\pi}{a} \frac{\pi}{b} W_{11} \right) \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \end{bmatrix} \quad (1-107)$$

Die schichtweise interlaminaren Spannungen  $\sigma_{z(k)}$ ,  $\tau_{xz(k)}$ ,  $\tau_{yz(k)}$  lassen sich mittels der Integration des lokalen 3D-Gleichgewichts, das in Gleichungen (1-6), (1-7) und (1-8) präsentiert wurde, ermitteln. Es gilt:

$$\tau_{xz(k)} = - \int_{z_k}^z \left( \frac{\partial \sigma_{x(k)}}{\partial x} + \frac{\delta \tau_{xy(k)}}{\delta y} \right) dz + C_{xz(k)}(x, y) \quad (1-108)$$

$$\tau_{yz(k)} = - \int_{z_k}^z \left( \frac{\partial \sigma_{y(k)}}{\partial y} + \frac{\delta \tau_{xy(k)}}{\delta x} \right) dz + C_{yz(k)}(x, y) \quad (1-109)$$

$$\sigma_{z(k)} = - \int_{z_k}^z \left( \frac{\partial \tau_{xz(k)}}{\partial x} + \frac{\delta \tau_{yz(k)}}{\delta y} \right) dz + C_{zz(k)}(x, y) \quad (1-110)$$

$C_{xz(k)}$ ,  $C_{yz(k)}$ ,  $C_{zz(k)}$  sind Funktionen, die durch die Bedingung der spannungsfreien Oberflächen (wenn  $z = 0.5h$  und  $z = -0.5h$ ) nach Formel (1-111) und Kontinuität der interlaminaren Spannungen in den Schichtinterfaces gemäß (1-112), (1-113) und (1-114) ermittelt werden sollen.

$$\sigma_{z(1)} \left( x, y, \frac{-h}{2} \right) = \tau_{xz(1)} \left( x, y, \frac{-h}{2} \right) = \tau_{yz(1)} \left( x, y, \frac{-h}{2} \right) = 0 \quad (1-111)$$

$$\tau_{xz(k)}(x, y, z_k) = \tau_{xz(k-1)}(x, y, z_k) \quad (1-112)$$

$$\tau_{yz(k)}(x, y, z_k) = \tau_{yz(k-1)}(x, y, z_k) \quad (1-113)$$

$$\sigma_{z(k)}(x, y, z_k) = \sigma_{z(k-1)}(x, y, z_k) \quad (1-114)$$

Als Beispiel wird die Kontinuität der Spannungen  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$  an den Grenzflächen der Schichten  $k - 1$  und  $k$  in der folgenden Abbildung veranschaulicht:

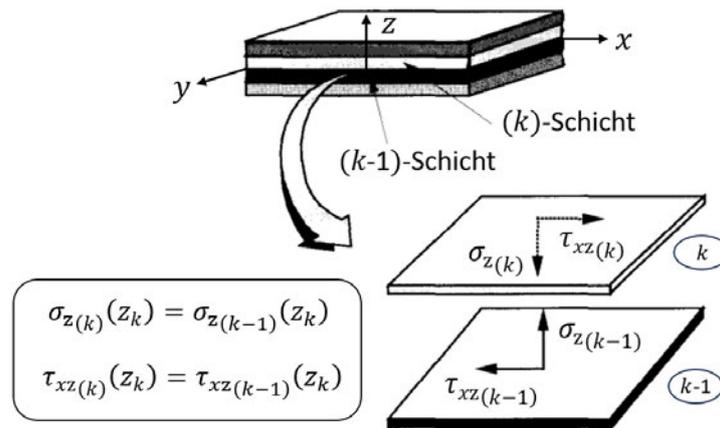


Abbildung 2.11: Kontinuität der interlaminaren Spannungen in den Interfaces zwischen den Einzelschichten im Laminatschnitt [8, S. 171]

Zur Überprüfung der Berechnungen können die folgenden Gleichungen als Kontrollpunkte verwendet werden:

$$\tau_{xz(n)}\left(x, y, \frac{h}{2}\right) = \tau_{yz(n)}\left(x, y, \frac{h}{2}\right) = 0 \quad (1-115)$$

$$\sigma_{z(n)}\left(x, y, \frac{h}{2}\right) = p(x, y) \quad (1-116)$$

[8, S. 301–312]

### 2.3.2.2 Biegung eines unsymmetrischen Winkelverbunds

Gemäß der Formel (1-60) lautet die  $ABD$ -Matrix:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & B_{26} \\ 0 & 0 & A_{66} & B_{16} & B_{26} & 0 \\ 0 & 0 & B_{16} & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & B_{26} & D_{12} & D_{22} & 0 \\ B_{16} & B_{26} & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (1-117)$$

Wie bereits erwähnt, werden für diesen Fall die SS2-Randbedingungen nach der Abbildung 2.10 gefordert. Es gelten die folgenden Voraussetzungen:

$$\begin{aligned}
u_0(0, y) &= u_0(a, y) = 0 \\
w_0(0, y) &= w_0(a, y) = 0 \\
v_0(x, 0) &= v_0(x, b) = 0 \\
w_0(x, 0) &= w_0(x, b) = 0 \\
M_x^0(0, y) &= M_x^0(a, y) = 0 \\
N_{xy}^0(0, y) &= N_{xy}^0(a, y) = 0 \\
M_y^0(x, 0) &= M_y^0(x, b) = 0 \\
N_{xy}^0(x, 0) &= N_{xy}^0(x, b) = 0
\end{aligned} \tag{1-118}$$

Diese können mit den folgenden Lösungsansätzen der Verschiebungen erfüllt werden:

$$u_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{1-119}$$

$$v_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{1-120}$$

$$w_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{1-121}$$

Auch hier wird die Erfüllung der SS2-Randbedingungen bezüglich der Schnittgrößen  $N_{xy}^0$ ,  $M_x^0$  und  $M_y^0$  kontrolliert. Dazu werden die Ansatzfunktionen der Verschiebungen in den Formeln der Schnittgrößen nach der Formel (1-73) eingesetzt:

$$\begin{aligned}
N_{xy}^0 &= A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - B_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - B_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\
&\quad - 2B_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{m\pi}{a} A_{16} U_{mn} + \frac{n\pi}{b} A_{26} V_{mn} - 2 \frac{nm\pi^2}{ab} B_{66} W_{mn} \right] g(x, y) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ -A_{66} \left( \frac{n\pi}{b} U_{mn} + \frac{m\pi}{a} V_{mn} \right) + \left( B_{16} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + B_{26} \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right) W_{mn} \right] f(x, y)
\end{aligned} \tag{1-122}$$

$$\begin{aligned}
M_x^0 &= B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} + B_{16} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\
&\quad - 2D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{m\pi}{a} B_{11} U_{mn} + \frac{n\pi}{b} B_{12} V_{mn} - 2 \frac{nm\pi^2}{ab} D_{16} W_{mn} \right] g(x, y) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ -B_{16} \left( \frac{n\pi}{b} U_{mn} + \frac{m\pi}{a} V_{mn} \right) + (D_{11} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + D_{12} \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right) W_{mn} \right] f(x, y) \tag{1-123}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_y^0 &= B_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} + B_{26} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\
&\quad - 2D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{m\pi}{a} B_{12} U_{mn} + \frac{n\pi}{b} B_{22} V_{mn} - 2 \frac{nm\pi^2}{ab} D_{26} W_{mn} \right] g(x, y) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ -B_{26} \left( \frac{n\pi}{b} U_{mn} + \frac{m\pi}{a} V_{mn} \right) + (D_{12} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + D_{22} \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right) W_{mn} \right] f(x, y) \tag{1-124}
\end{aligned}$$

Dabei sind die Funktionen  $f(x, y)$  und  $g(x, y)$  wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\
g(x, y) &= \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{1-125}
\end{aligned}$$

In diesem Fall ist die Erfüllung der SS2-Randbedingungen bezüglich der Schnittgrößen gemäß der Formel (1-118) nur möglich, wenn die folgenden Einträge der ABD-Matrix  $A_{16}, A_{26}, B_{11}, B_{12}, B_{22}, B_{66}, D_{16}, D_{26}$  gleich null sind ( $g(x, y) \neq 0$  für die Fälle  $x = a, 0$  und  $y = 0, b$ ).

Damit existieren die Navierschen Lösungen für rechteckige, laminierte Platten mit SS2-Randbedingungen nur für solche, die die Voraussetzung  $A_{16} = A_{26} = B_{11} =$

$B_{12} = B_{22} = B_{66} = D_{16} = D_{26} = 0$  erfüllen. Dies trifft auf den Fall des unsymmetrischen Winkelverbunds zu.

Analog zum Fall des Kreuzverbunds sollen auch hier die Koeffizienten  $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}$  für jede  $m, n = 1, 2 \dots$  mithilfe der Verschiebungsdifferentialgleichungen (1-74), (1-75) sowie (1-76) bestimmt werden. Dazu werden die folgenden Punkte betrachtet:

- Untersucht ist der Lastfall  $p = p(x, y), p_x = p_y = 0$
- Wie schon erwähnt, sind die folgenden Terme der ABD-Matrix gleich null  $A_{16} = A_{26} = B_{11} = B_{12} = B_{22} = B_{66} = D_{16} = D_{26} = 0$

Es gelten:

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - 3B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} = 0 \quad (1-126)$$

$$(A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - 3B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad (1-127)$$

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - B_{16} \left( 3 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} \right) - B_{26} \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} + 3 \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} \right) - p = 0 \quad (1-128)$$

Analog zum Fall des Kreuzverbunds ergibt sich nach dem Einsetzen von Ansatzfunktionen der Verschiebungen der Formeln (1-119), (1-120) und (1-121) in den Differentialgleichungen (1-126), (1-127) sowie (1-128) Folgendes:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P_{mn} \end{pmatrix} \quad (1-129)$$

Die Abkürzungen  $c_{ij}$  sind folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned}
c_{11} &= \left( A_{11} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + A_{66} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right), c_{12} = (A_{12} + A_{66}) \frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b}, \\
c_{13} &= - \left( 3B_{16} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + B_{26} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) \frac{n\pi}{b}, c_{22} = \left( A_{66} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + A_{22} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right), \\
c_{23} &= - \left( B_{16} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + 3B_{26} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) \frac{m\pi}{a}, \\
c_{33} &= \left( D_{11} \frac{m^4 \pi^4}{a^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} + D_{22} \frac{n^4 \pi^4}{b^4} \right)
\end{aligned} \tag{1-130}$$

Werden die Gleichungen der Formel (1-129) nach  $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}$  für jede  $m, n = 1, 2 \dots$  gelöst, so ergeben sich die folgenden Beziehungen:

$$W_{mn} = \frac{P_{mn}}{a_{mn}}, U_{mn} = \frac{a_1 P_{mn}}{a_0 a_{mn}}, V_{mn} = \frac{a_2 P_{mn}}{a_0 a_{mn}} \tag{1-131}$$

$$a_{mn} = c_{33} + c_{13} \frac{a_1}{a_0} + c_{23} \frac{a_2}{a_0}, a_0 = c_{11} c_{22} - c_{12} c_{12},$$

$$a_1 = c_{12} c_{23} - c_{13} c_{22}, a_2 = c_{13} c_{12} - c_{11} c_{23} \tag{1-132}$$

Wie zuvor erläutert, wird in dieser Arbeit der Spezialfall  $m = n = 1$  untersucht. Hieraus ergeben sich die Verschiebungen gemäß der Formeln (1-119), (1-120) und (1-121) wie folgt:

$$u_0(x, y) = U_{11} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \tag{1-133}$$

$$v_0(x, y) = V_{11} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \tag{1-134}$$

$$w_0(x, y) = W_{11} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \tag{1-135}$$

Es resultieren die drei Koeffizienten  $U_{11}, V_{11}, W_{11}$  nach Formel (1-131):

$$W_{11} = \frac{P_{11}}{a_{11}}, U_{11} = \frac{a_1 P_{11}}{a_0 a_{11}}, V_{11} = \frac{a_2 P_{11}}{a_0 a_{11}} \tag{1-136}$$

Damit lassen sich die schichtweise intralaminaren Spannungen  $\sigma_{x(k)}, \sigma_{y(k)}, \tau_{xy(k)}$  gemäß der Formeln (1-37) und (1-38) ermitteln. Es gilt:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \left( \frac{\pi}{a} U_{11} g_{11} + z \frac{\pi^2}{a^2} W_{11} f_{11} \right) \\ \left( \frac{\pi}{b} V_{11} g_{11} + z \frac{\pi^2}{b^2} W_{11} f_{11} \right) \\ \left( - \left( \frac{\pi}{b} U_{11} + \frac{\pi}{a} V_{11} \right) f_{11} - 2z \frac{\pi}{a} \frac{\pi}{b} W_{11} g_{11} \right) \end{bmatrix} \quad (1-137)$$

$$f_{11} = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right), g_{11} = \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (1-138)$$

Daraus lassen sich die schichtweise interlaminaren Spannungen  $\sigma_{z(k)}, \tau_{xz(k)}, \tau_{yz(k)}$  nach gleicher Methode im Fall eines Kreuzverbunds ermitteln. Hierbei sind Gleichungen des lokalen 3D-Gleichgewichtes (1-108), (1-109) sowie (1-110) unter Betrachtung der Formeln der Randbedingungen von (1-111) bis (1-114) zu verwenden.

[8, S. 326–331]

### 3 MAPLE-Tool zur Bestimmung der interlaminaren Spannungen anhand der CLT

Alle im Code verwendeten Formeln beziehen sich auf das Kapitel „theoretische Grundlagen“. Ziel ist es, die interlaminaren Spannungen und deren Verteilung über die Dicke zu bestimmen. Dabei dient das erste Unterkapitel zur Validierung der Berechnungen. Somit kann sichergestellt werden, dass alle untersuchten Fälle sich ohne Fehler berechnen lassen. Das zweite Unterkapitel widmet sich der Architektur und der Bedienung des Tools. Hierfür wird das Tool mittels eines Beispiels dokumentiert. Im dritten Unterkapitel erfolgt der Vergleich der resultierenden Ergebnisse mit Referenzwerten aus der Literatur. Vorher werden aber Empfehlungen für die Erstellung eines FE-Modells zum Vergleich mittels FEM vorgeschlagen. Als Nächstes erfolgt eine Parameterstudie. Es werden Beispiele mit vier unterschiedlichen Laminataufbauten sowie ein Beispiel mit fünf verschiedenen Laminatdicken untersucht. Abschließend erfolgt eine Diskussion über die Praxistauglichkeit.

#### 3.1 Validierung der Ergebnisse des Tools

Nach der Erstellung des Tools erfolgt als erster Schritt die Validierung der resultierenden Ergebnisse. Zunächst wird ein isotropes Laminat betrachtet, da dessen Verhalten für Folgendes bekannt ist; die resultierenden Verläufe der Spannungen sollen stetig sein und keine Sprünge aufweisen, weil die Einzelschichten des Laminats über die gleiche Steifigkeit trotz unterschiedlicher Faserorientierungen verfügen. Die elastischen Materialkennwerte  $E$ ,  $G$  und  $\nu$  sind in diesem Fall richtungsunabhängig. Das untersuchte Laminat ist ein symmetrischer Kreuzverbund der Art  $[0^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$  und hat die folgenden Materialdaten:

$$E = 210000 \text{ MPa}, G = 82031.25 \text{ MPa}, \nu = 0.28 \quad (3-1)$$

Das Laminat hat folgende Dicke  $h$ , Länge  $a$  und Breite  $b$ :

$$h = 10 \text{ mm}, a = 1000 \text{ mm}, b = 1000 \text{ mm} \quad (3-2)$$

Im Rahmen dieser Arbeit wird vorausgesetzt, dass alle Einzelschichten über die gleiche Dicke verfügen. Somit lässt sich je nach Anzahl der Einzelschichten die folgende Formel ableiten:

$$t = \frac{h}{n} = \frac{10 \text{ mm}}{4} = 2.5 \text{ mm} \quad (3-3)$$

Der Koeffizient der doppelt sinusförmigen Belastung  $P_{11}$  beträgt:

$$P_{11} = 10 \text{ MPa} \quad (3-4)$$

Für die Auswertung der Ergebnisse ist es üblich, die Spannungen dimensionslos zu formulieren. Es gilt für alle Laminare Folgendes:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_x(x, y, z) &= \sigma_x(x, y, z) \left( \frac{h^2}{a^2 P_{11}} \right), \hat{\sigma}_y(x, y, z) = \sigma_y(x, y, z) \left( \frac{h^2}{a^2 P_{11}} \right), \\ \hat{\sigma}_z(x, y, z) &= \sigma_z(x, y, z) \left( \frac{1}{P_{11}} \right), \hat{\tau}_{xy}(x, y, z) = \tau_{xy}(x, y, z) \left( \frac{h^2}{a^2 P_{11}} \right), \\ \hat{\tau}_{xz}(x, y, z) &= \tau_{xz}(x, y, z) \left( \frac{h}{a P_{11}} \right), \hat{\tau}_{yz}(x, y, z) = \tau_{yz}(x, y, z) \left( \frac{h}{a P_{11}} \right), \end{aligned} \quad (3-5)$$

Die Diagramme der Spannungsverteilung von interlaminaren und intralaminaren Spannungen, welche anhand des MAPLE-Tools berechnet sind, werden wie folgt dargestellt:

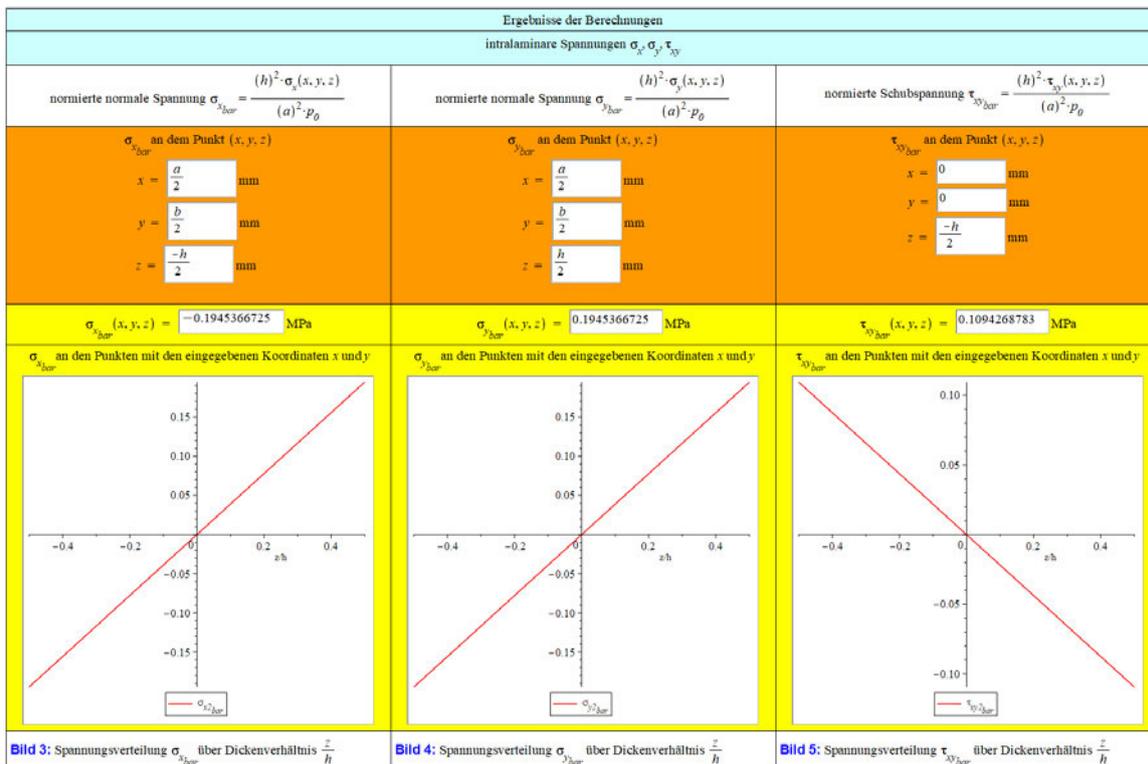


Bild 3: Spannungsverteilung  $\sigma_{x_{bar}}$  über Dickenverhältnis  $\frac{z}{h}$

Bild 4: Spannungsverteilung  $\sigma_{y_{bar}}$  über Dickenverhältnis  $\frac{z}{h}$

Bild 5: Spannungsverteilung  $\tau_{xy_{bar}}$  über Dickenverhältnis  $\frac{z}{h}$

Abbildung 3.1: Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis  $z/h$  von intralaminaren Spannungen für den isotropen symmetrischen Kreuzverbund der Art  $[0^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$

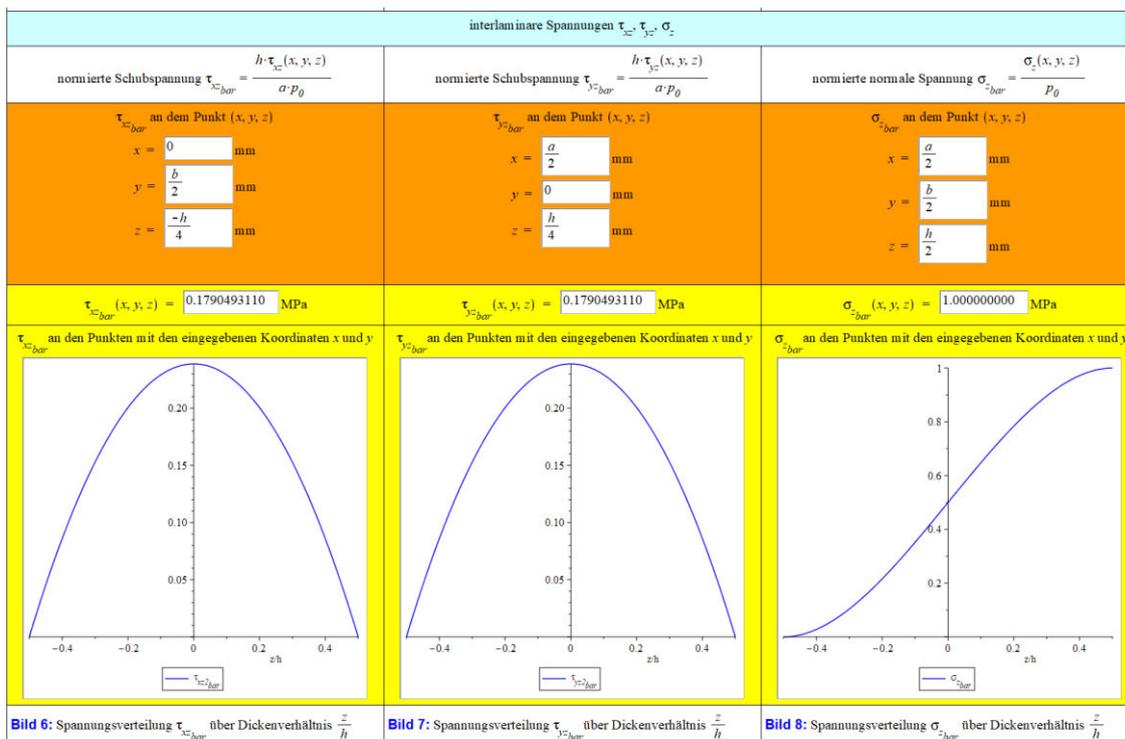


Bild 6: Spannungsverteilung  $\tau_{xz_{bar}}$  über Dickenverhältnis  $\frac{z}{h}$

Bild 7: Spannungsverteilung  $\tau_{yz_{bar}}$  über Dickenverhältnis  $\frac{z}{h}$

Bild 8: Spannungsverteilung  $\sigma_{z_{bar}}$  über Dickenverhältnis  $\frac{z}{h}$

Abbildung 3.2: Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis  $z/h$  von interlaminaren Spannungen für den isotropen symmetrischen Kreuzverbund der Art  $[0^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$

Die Verläufe entsprechen den zuvor genannten Erwartungen.

Als Nächstes wird das Tool anhand der Ergebnisse der Quelle [8] überprüft, da deren Resultate aus den gleichen Formeln stammen, die bereits im letzten Kapitel präsentiert wurden.

Für alle untersuchten Laminats müssen die folgenden Beziehungen zwischen den Materialdaten erfüllt werden:

$$E_1 = 25E_2, G_{12} = G_{13} = 0.5E_2, \nu_{12} = 0.25 \quad (3-6)$$

Die ausgewählten Werte sind tabellarisch folgendermaßen dargestellt:

Materialkennwert	Wert
$E_1$	$173 * 10^3 \text{ MPa}$
$E_2$	$6.92 * 10^3 \text{ MPa}$
$G_{12}$	$3.46 * 10^3 \text{ MPa}$
$\nu_{12}$	0.25

Tabelle 3.1: ausgewählte Materialwerte der untersuchten Laminats

Die Dimensionen der Laminats sowie der Koeffizient der doppelt sinusförmigen Belastung  $P_{11}$  stimmen mit denen des bereits untersuchten isotropen Laminats  $[0^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$  überein.

Die Spannungen der symmetrischen und unsymmetrischen Kreuzverbunde sowie der unsymmetrischen Winkelverbunde werden nach verfügbaren Werten gemäß [8, S. 252, 334, 385-387, 405] in der Tabelle 3.2 kontrolliert. Es wird für jedes untersuchte Laminat eine Zeile reserviert. Besteht ein Widerspruch zwischen den Werten des MAPLE-Tools und der Quelle [8] wird die entsprechende Zelle rot markiert.

Laminat	$\hat{\sigma}_x \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right)$	$\hat{\sigma}_y \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right)$	$\hat{\tau}_{xy} \left( a, b, \frac{-h}{2} \right)$	$\hat{\tau}_{xz} \left( 0, \frac{b}{2}, 0 \right)$	$\hat{\tau}_{yz} \left( \frac{a}{2}, 0, 0 \right)$
[0°]	0.5387	0.0267	0.0213	0.4398	0.0377
Laminat	$\hat{\sigma}_x \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right)$	$\hat{\sigma}_y \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{4} \right)$	$\hat{\tau}_{xy} \left( a, b, \frac{-h}{2} \right)$	$\hat{\tau}_{xz} \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0 \right)$	$\hat{\tau}_{yz} \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0 \right)$
[0°, 90°, 90°, 0°]	0.5387	0.2694	0.0213	0.3393	0.1382
Laminat	$\hat{\sigma}_x \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right)$	$\hat{\sigma}_y \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right)$	$\hat{\tau}_{xy} \left( a, b, \frac{-h}{2} \right)$	$\hat{\tau}_{xz} \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0 \right)$	$\hat{\tau}_{yz} \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0 \right)$
[0°, 90°, 0°]	0.5387	0.0267	0.0213	0.3951	0.0823
Laminat	$\hat{\sigma}_x \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right)$	$\hat{\sigma}_y \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{3h}{10} \right)$	$\hat{\tau}_{xy} \left( a, b, \frac{-h}{2} \right)$	–	–
[0°, 90°, 0°, 90°, 0°]	0.5387	0.3232	0.0213	–	–
Laminat	$\hat{\sigma}_x \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right)$	$\hat{\sigma}_y \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{3} \right)$	$\hat{\tau}_{xy} \left( a, b, \frac{-h}{2} \right)$	–	–
[0°, (90°) <sub>2</sub> , 0°, (90°) <sub>2</sub> , 0°]	0.5387	0.3591	0.0213	–	–
Laminat	$\hat{\sigma}_x \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{-h}{2} \right)$	$\hat{\sigma}_y \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right)$	$\hat{\tau}_{xy} \left( a, b, \frac{-h}{2} \right)$	$\hat{\tau}_{xz} \left( 0, \frac{b}{2}, \frac{-h}{4} \right)$	$\hat{\tau}_{yz} \left( \frac{a}{2}, 0, \frac{h}{4} \right)$
[0°, 90°]	-0.7157	0.7157	0.0525	0.3322	0.3322
Laminat	$\hat{\sigma}_x \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{-h}{2} \right)$	$\hat{\sigma}_y \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right)$	$\hat{\tau}_{xy} \left( a, b, \frac{-h}{2} \right)$	$\hat{\tau}_{xz} \left( 0, \frac{b}{2}, 0 \right)$	$\hat{\tau}_{yz} \left( \frac{a}{2}, 0, 0 \right)$
[0°, 90°] <sub>4</sub>	-0.4950	0.4950	0.0221	0.2479	0.2479

Laminat	$\hat{\sigma}_x \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right)$	$\hat{\sigma}_y \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right)$	$\hat{\tau}_{xy} \left( 0, 0, \frac{-h}{2} \right)$	$\hat{\tau}_{xz} \left( 0, \frac{b}{2}, \frac{h}{4} \right)$	$\hat{\tau}_{xz} \left( 0, \frac{b}{2}, \frac{h}{4} \right)$
$[-45^\circ, 45^\circ]$	0.2498	0.2498	0.2336	0.2143	0.2143
Laminat	$\hat{\sigma}_x \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right)$	$\hat{\sigma}_y \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right)$	$\hat{\tau}_{xy} \left( 0, 0, \frac{-h}{2} \right)$	$\hat{\tau}_{xz} \left( 0, \frac{b}{2}, \frac{h}{4} \right)$	$\hat{\tau}_{xz} \left( 0, \frac{b}{2}, \frac{h}{4} \right)$
$[-45^\circ, 45^\circ]_4$	0.1445	0.1445	0.1384	0.2487	0.2487

Tabelle 3.2: Validierung der Berechnungen mithilfe der Quelle [8]

Da keine Werte für  $\hat{\sigma}_z$  in der Quelle [8] zur Verfügung stehen, wird in jede Berechnung stattdessen die maximale Spannung an der freien Oberfläche am Punkt  $(0.5a, 0.5b, 0.5h)$  überprüft. Gemäß der Formel (1-116) gilt für alle Laminat die folgende Randbedingung:

$$\hat{\sigma}_z \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right) = \frac{p \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right)}{P_{11}} = \frac{P_{11} \sin \left( \frac{\pi}{a} * \frac{a}{2} \right) \sin \left( \frac{\pi}{b} * \frac{b}{2} \right)}{P_{11}} = 1 \quad (3-7)$$

Alle Werte des MAPLE-Tools entsprechen den Werten der Quelle [8]. Als nächster Kontrollpunkt erfolgt ein Vergleich der bereitgestellten Verläufe von Spannungen nach [8, S. 254-255, 319, 334] mit jenen aus dem MAPLE-Tool. All diese Verläufe stimmen miteinander überein, finden jedoch hier keine detaillierte Erwähnung, da die Anzahl der Verläufe den Rahmen sprengen würde.

### 3.2 Dokumentation des Tools anhand des unsymmetrischen Kreuzverbunds $[0^\circ, 90^\circ]$

Das MAPLE-Tool besteht aus drei Dateien. Die erste Datei trägt den Namen „Tool\_Dokument.mw“ und enthält die Benutzeroberfläche des Tools und den dazugehörigen Code. Die zweite Datei wird als „Tool\_Dokumentation\_Dokument.mw“ bezeichnet und gibt alle in diesem Unterkapitel erwähnten Details wieder, um den schnellen Zugriff auf die Dokumentation unabhängig von dieser Arbeit zu ermöglichen.

Die dritte Datei lautet „Tool\_zur\_Ermittlung\_von\_Transversalspannungen\_bei\_Laminaten\_mittels\_CLT.mw“ und verknüpft einerseits beide bereits erwähnte Dateien, damit der Nutzer zwischen dem Tool und der Dokumentation navigieren kann. Andererseits dient diese Datei auch zur Bereitstellung der Eckdaten des Tools.

Die Ausführung des gesamten Tools erfolgt mit dem Öffnen der Datei „Tool\_zur\_Ermittlung\_von\_Transversalspannungen\_bei\_Laminaten\_mittels\_CLT“ anhand der Software MAPLE 2020. Dabei öffnet sich das in der Abbildung 3.3 dargestellte Fenster. Am Ende des Dokuments lassen sich das Tool und die dazugehörige Dokumentation mit einem Klick öffnen.

#### Tool zur Ermittlung von Transversalspannungen bei Laminaten mittels CLT

Bearbeiter	
Vor- und Nachname	Abdellatif Baouddi
Matrikelnummer	██████████
Fachrichtung	Flugzeugbau
Studienschwerpunkt	Entwurf und Leichtbau
Department	Fahrzeugtechnik und Flugzeugbau
Hochschule	Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Prüfer	
Erstprüfer	Prof. Dr.-Ing. Eckart Nast
Zweitprüfer	Prof. Dr.-Ing. Dipl.-Kfm. Markus Linke
Tool	
Beschreibung	
<p>Die Annahmen der klassischen Laminattheorie bedingen, dass die interlaminaeren Spannungen für dünne Laminat verschwinden. Für dicke Laminat jedoch können diese nicht vernachlässigt werden. Um sie zu bestimmen, widmet sich dieses Tool anhand des Computeralgebrasystems MAPLE 2020 einer Methode basierend auf die durch CLT berechneten Schichtspannungen sowie der Integration über die Laminatdicke von lokalen 3D-Gleichgewichtsgleichungen. Hierfür werden die Navierschen Lösungen betrachtet, die die Auswahl des Laminataufbaus, der Randbedingungen sowie der Lasten einschränken. Es werden allseitig gelenkig gelagerte Platten unter einer doppelt sinusförmigen Belastung untersucht. Die zulässigen Laminataufbauten sind orthotrope Einzelschichten, symmetrische und unsymmetrische Kreuzverbunde sowie unsymmetrische Winkelverbunde. Dieses Tool wurde im Rahmen der Bachelorarbeit "Ermittlung von Transversalspannungen bei Laminaten mittels CLT" entwickelt. Dort wird eine detaillierte Erläuterung der verwendeten Formeln präsentiert. Da das Tool hauptsächlich für den Einsatz in der Lehre am Department F+F konzipiert wurde, ist die Dokumentation, unabhängig von der Bachelorarbeit, über den Link "Dokumentation" zugänglich.</p>	
<a href="#">Tool</a>	<a href="#">Dokumentation</a>

**Tabelle 1:** Angaben des Prüflings, Tool und dessen Dokumentation

Abbildung 3.3: erste Tabelle des Tools nach dem Öffnen des gesamten Tools für die Präsentation der Eckdaten sowie um den Zugriff auf das Tool und die Dokumentation zu ermöglichen

Die Architektur des Tools ist so ausgewählt, dass dieses von oben nach unten abgearbeitet werden soll. Das MAPLE-Dokument besteht aus Tabellen, die mit dem Nutzer interagieren können. Das allgemeine Ziel ist die Bestimmung der interlaminaeren Spannungen und deren Verteilung über die Dicke. Es werden aber auch relevante Zwischenergebnisse angezeigt. Des Weiteren wird die Bedienung des Tools anhand eines Beispiels erläutert.

Alle orangefarbenen Zellen der Tabellen repräsentieren bearbeitbare Eingabefelder, die durch den Nutzer je nach untersuchtem Fall angepasst werden müssen. Die gelben Zellen hingegen sind für die Präsentation der relevanten Ergebnisse zuständig.

Das gesamte Tool ist in fünf Tabellen unterteilt. Jede davon wird mit einem anklickbaren Knopf beendet, die zum Speichern der eingetragenen Werte, Durchführung der Berechnungen sowie zum Anzeigen der Ergebnisse führt.

Als Beispiel soll ein Laminat mit dem Schichtenaufbau  $[0^\circ, 90^\circ]$  und folgenden Abmessungen berechnet werden:

$$a = 1000 \text{ mm}, b = 1000 \text{ mm}, h = 10 \text{ mm} \quad (3-8)$$

Die Materialdaten des untersuchten Laminats sind:

$$E_1 = 172368.93 \text{ MPa}, E_2 = 6894.76 \text{ MPa}, G_{12} = 3447.38 \text{ MPa}, \nu_{12} = 0.25 \quad (3-9)$$

Der Koeffizient der doppelt sinusförmigen Belastung beträgt:

$$P_{11} = 10 \text{ Mpa} \quad (3-10)$$

Somit ist die Belastung gemäß der Formel (1-102) wie folgt:

$$p(x, y) = (10 \text{ Mpa}) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (3-11)$$

Der erste Schritt erfolgt mit dem Zurücksetzen aller vorher zugewiesenen Variablen, Funktionen und anderen Einstellungen. MAPLE kehrt zu einem sauberen Zustand zurück. Dieser Schritt kann mit den zwei Methoden der Abbildung 3.4 durchgeführt werden.

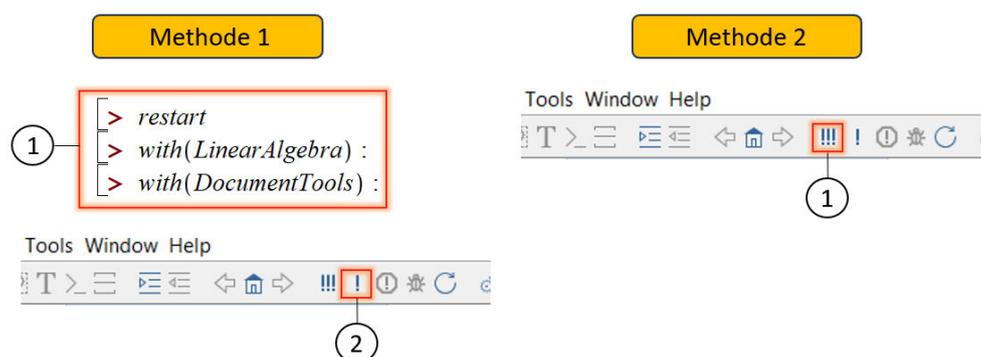


Abbildung 3.4: zwei Methoden zur Zurücksetzung der Parameter des Tools

In der ersten Methode werden zunächst drei Zeilen selektiert. Die erste dient zum Zurücksetzen des MAPLE-Arbeitsbereichs, während die zweite zum Laden des Moduls „LinearAlgebra“ verantwortlich ist. Dies bietet Funktionen und Befehle für lineare Algebra, Matrix- und Vektoroperationen sowie Lösungen von linearen Gleichungssystemen. Die dritte Zeile ist zum Laden des Moduls „DocumentTools“, um die Erstellung, Bearbeitung und das Anzeigen von MAPLE-Dokumenten zu ermöglichen.

Nach dem Selektieren der Zeilen wird oben in der Symbolleiste die Schaltfläche „!“ gedrückt. Dadurch werden die selektierten Befehle ausgeführt.

Die zweite Methode erfolgt direkt mit dem Anklicken der Schaltfläche „!!!“. Dies führt direkt das gesamte MAPLE-Dokument aus und damit die Zeilen der ersten Methode. Der Zurücksetzungsschritt muss nach jedem neuen Rechenvorgang durchgeführt werden, vor allem bei der Anpassung einer vorher bereits bearbeiteten Tabelle. Somit lassen sich überlappende zugewiesene Parameter vermeiden. In der Regel wird MAPLE in solchen Fällen automatisch die Fehlermeldung der folgenden Abbildung anzeigen:

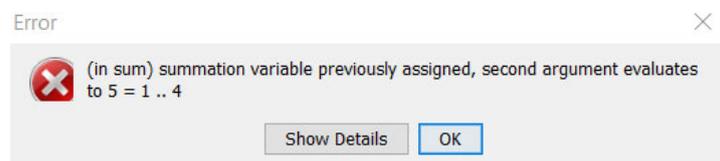


Abbildung 3.5: Fehlermeldung im Fall überlappender zugewiesener Parameter, wenn eine vorher bereits bearbeitete Tabelle angepasst wird, ohne die Zurücksetzung der Parameter durchzuführen

Der nächste Schritt erfolgt mit dem Eintragen der Materialkennwerte des untersuchten Laminats mithilfe der ersten Tabelle des Tools (Abbildung 3.6).

Links wird der Kennwert spezifiziert. Rechts wird der Wert in der entsprechenden orangefarbenen Zelle eingetragen. Anschließend wird der Knopf mit der Bezeichnung „Speichern“ gedrückt, sodass sich alle Werte speichern und die Ergebnisse in den gelben Zellen anzeigen lassen. In diesem Fall die Querkontraktionszahl  $\nu_{21}$ .

Kennwert	Wert
$E_1$	172368.93 MPa
$E_2$	6894.76 MPa
$G_{12}$	3447.38 MPa
$\nu_{12}$	0.25
$\nu_{21}$	0.01000000406
Speichern	
<b>Tabelle 1:</b> Materialwerte des untersuchten Laminats	

Abbildung 3.6: erste Tabelle des Tools zum Eintragen der Materialwerte

Danach werden die Eigenschaften des Laminats mithilfe der zweiten Tabelle des Tools gemäß der Abbildung 3.7 festgelegt. Als Erstes wird der Lageraufbau des Laminats definiert. Hierfür werden die gewünschten Faserorientierungen der Schichten in den orangefarbenen Zellen eingetragen. Zulässig sind nur symmetrische und unsymmetrische Kreuzverbunde, orthotrope Einzelschichten sowie unsymmetrische Winkelverbunde. Das Laminat darf maximal über acht Einzelschichten verfügen. Danach werden die Dimensionen des Laminats hinsichtlich der Länge, Breite und der Gesamtdicke in den zugehörigen Zellen eingetragen. Dabei gilt die Annahme, dass alle Einzelschichten die gleiche Dicke aufweisen.

Die Dimensionen der Platte wird im ersten Bild des Tools in der Abbildung 3.7 illustriert:

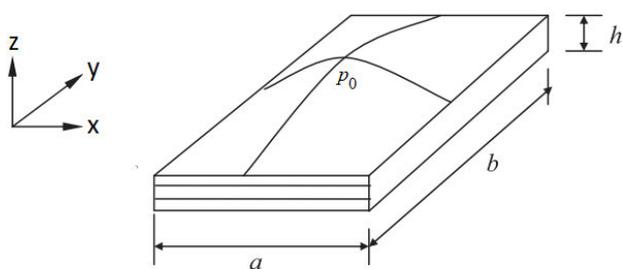
Faserorientierungen der Einzelschichten							
0	90						
Dimensionen des Laminats							
							
<b>Bild 1:</b> Geometrie des Laminats							
Gesamtdicke $h$	10 mm						
Länge $a$	1000 mm						
Breite $b$	1000 mm						
Anzahl der Schichten $n$	2						
untersuchtes Laminat	Kreuzverbund						
Speichern							
<b>Tabelle 2:</b> Zuweisung von Faserorientierungen der Schichten und Eingabe der Dimensionen des Laminats							

Abbildung 3.7: Eintragen der Faserwinkel und Dimensionen des untersuchten Laminats mithilfe der zweiten Tabelle des Tools

Anschließend wird der Knopf mit der Bezeichnung „Speichern“ gedrückt, um die Ergebnisse der berechneten Größen anzuzeigen. In diesem Fall stellen diese die ausgewählte Anzahl der Einzelschichten und den Typ des Laminats (Kreuzverbund oder Winkelverbund) dar.

Im nächsten Schritt muss der Nutzer den Knopf mit der Bezeichnung „Berechnen“ in der dritten Tabelle des Tools nach Abbildung 3.8 drücken. Dies startet die Berechnungen und führt zum Anzeigen der reduzierten Steifigkeits- und  $ABD$ -Matrix in den gelben Zellen. Das bezogene Koordinatensystem ist im zweiten Bild des Tools in der folgenden Abbildung dargestellt:

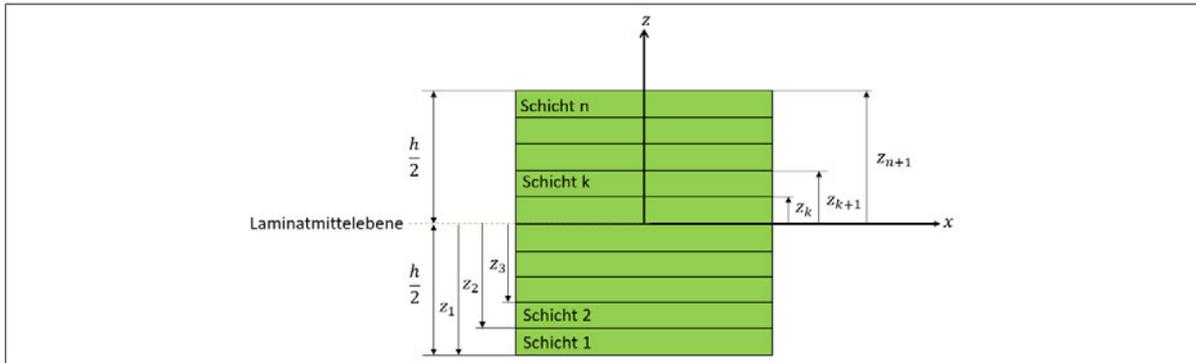


Bild 2: Koordinatensystem und Schichtnummerierung des Laminats

Reduzierte Steifigkeitsmatrix $Q$									
172800.9325	1728.010027	0							
1728.010027	6912.040107	0							
0	0	3447.38							
MPa									
$ABD_{Matrix}$									
898564.8630	17280.10027	0.	$-2.073611155 \cdot 10^6$	0.	0.				
17280.10027	898564.8630	0.	0.	$2.073611155 \cdot 10^6$	0.				
0.	0.	34473.80000	0.	0.	0.				
$-2.073611155 \cdot 10^6$	0.	0.	$7.488040525 \cdot 10^6$	144000.8356	0.				
0.	$2.073611155 \cdot 10^6$	0.	144000.8356	$7.488040525 \cdot 10^6$	0.				
0.	0.	0.	0.	0.	287281.6667				
<table border="1"> <tr> <td><math>\frac{N}{mm}</math></td> <td>N</td> </tr> <tr> <td>N</td> <td>N·mm</td> </tr> </table>						$\frac{N}{mm}$	N	N	N·mm
$\frac{N}{mm}$	N								
N	N·mm								
<input type="button" value="Berechnen"/>									

Tabelle 3: Berechnung der reduzierten Steifigkeitsmatrix, sowie der  $ABD_{Matrix}$

Abbildung 3.8: dritte Tabelle des Tools zur Berechnung der reduzierten Steifigkeits- sowie  $ABD$ -Matrix

Wie in der Abbildung 3.9 zu sehen ist, muss in der vierten Tabelle des Tools der Koeffizient der doppelt sinusförmigen Belastung eingetragen werden, dann wird am Ende der Tabelle der Knopf mit der Bezeichnung „Berechnen“ gedrückt. Die Ergebnisse stellen die Verschiebungen der Laminatmittelebene sowie die daraus resultierenden Verzerrungen, Krümmungen und die Verdrillung dar. Anschließend wird die Tabelle mit der Präsentation von Formeln der intralaminaren sowie interlaminaren Spannungen beendet:

Belastung	
Belastung der Navierplatte $P := p_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{b}\right)$	Koeffizient $p_0 =$ <input type="text" value="10"/> MPa
Verschiebungen	
Verschiebungsansatz der Navierplatte im Fall eines Kreuzverbunds $u_0 := U_0 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{b}\right)$ $v_0 := V_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot y}{b}\right)$ $w_0 := W_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{b}\right)$ Verschiebungsansatz der Navierplatte im Fall eines Wikelverbunds $u_0 := U_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot y}{b}\right) :$ $v_0 := V_0 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{b}\right) :$ $w_0 := W_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{b}\right) :$	untersuchtes Laminat ist ein <input type="text" value="Kreuzverbund"/> in x-Richtung $u_0 =$ <input type="text" value="-114.027815376410402 cos(pi*x/1000) sin(pi*y/1000)"/> mm in y-Richtung $v_0 =$ <input type="text" value="114.027815376410402 sin(pi*x/1000) cos(pi*y/1000)"/> mm in z-Richtung $w_0 =$ <input type="text" value="15425.8772805904264 sin(pi*x/1000) sin(pi*y/1000)"/> mm
Verzerrungen, Krümmungen und Verdrillung	
Verzerrungen der Laminatmittelebene nach der Berechnung von Verschiebungen $\epsilon_{\theta_{xx}} := \begin{bmatrix} \frac{d}{dx}(u_0(x,y,z)) \\ \frac{d}{dy}(v_0(x,y,z)) \\ \frac{d}{dy}(u_0(x,y,z)) + \frac{d}{dx}(v_0(x,y,z)) \end{bmatrix}$ $\kappa_{\theta_{xx}} := \begin{bmatrix} -\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(w_0(x,y,z))\right)\right) \\ -\left(\frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dy}(w_0(x,y,z))\right)\right) \\ -\left(2 \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dy}(w_0(x,y,z))\right)\right) \end{bmatrix}$	$\epsilon_{\theta_{xx}} = \begin{bmatrix} 0.114027815376410407 \pi \sin\left(\frac{\pi x}{1000}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{1000}\right) \\ -0.114027815376410407 \pi \sin\left(\frac{\pi x}{1000}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{1000}\right) \\ 0. \end{bmatrix}$ $\kappa_{\theta_{xx}} = \begin{bmatrix} 0.0154258772805904269 \pi^2 \sin\left(\frac{\pi x}{1000}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{1000}\right) \\ 0.0154258772805904269 \pi^2 \sin\left(\frac{\pi x}{1000}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{1000}\right) \\ -0.0308517545611808539 \pi^2 \cos\left(\frac{\pi x}{1000}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{1000}\right) \end{bmatrix}$
Formeln für Spannungsberechnung	
intralaminare Spannungen einer Schicht $k$ nach der Bestimmung von Verzerrungen	
$\sigma_{x_k} := \begin{bmatrix} Q_{bar_k}(1,1) & Q_{bar_k}(1,2) & Q_{bar_k}(1,3) \end{bmatrix} \cdot (\epsilon_{\theta_{xx}} + z \cdot \kappa_{\theta_{xx}})$ $\sigma_{y_k} := \begin{bmatrix} Q_{bar_k}(2,1) & Q_{bar_k}(2,2) & Q_{bar_k}(2,3) \end{bmatrix} \cdot (\epsilon_{\theta_{xx}} + z \cdot \kappa_{\theta_{xx}})$ $\tau_{xy_k} := \begin{bmatrix} Q_{bar_k}(1,3) & Q_{bar_k}(2,3) & Q_{bar_k}(3,3) \end{bmatrix} \cdot (\epsilon_{\theta_{xx}} + z \cdot \kappa_{\theta_{xx}})$	
interlaminare Spannungen einer Schicht $k$ nach der Bestimmung von intralaminaren Spannungen mithilfe des lokalen 3D-Gleichgewichts	
$\tau_{xz_k} := -\int_{z_k}^{\bar{z}} \left( \frac{d}{dx}(\sigma_{x_k}) + \frac{d}{dy}(\tau_{xy_k}) \right) dz + C_{xz_k}$ $\tau_{yz_k} := -\int_{z_k}^{\bar{z}} \left( \frac{d}{dy}(\sigma_{y_k}) + \frac{d}{dx}(\tau_{xy_k}) \right) dz + C_{yz_k}$ $\sigma_{z_k} := -\int_{z_k}^{\bar{z}} \left( \frac{d}{dx}(\tau_{xz_k}) + \frac{d}{dy}(\tau_{yz_k}) \right) dz + C_{z_k}$	
<input type="button" value="Berechnen"/>	
<b>Tabelle 4:</b> Eingabe der Belastungskoeffizient und Berechnung der Verschiebungen und daraus resultierender Verzerrungen, Krümmungen und Verdrillung der mittleren Ebene des Laminates	

Abbildung 3.9: vierte Tabelle des Tools zum Eintragen des Belastungskoeffizienten sowie zur Bestimmung der Verschiebungen und Verzerrungen, Krümmungen sowie der Verdrillung

Die letzte Tabelle des Tools gemäß der Abbildungen 3.10 und 3.11 kann in zwei Teile je nach Art der Spannungen (intralaminar oder interlaminar) unterteilt werden. Jeder Teil beinhaltet orangefarbige Kästen zum Eintragen der Koordinaten des gewünschten

Punkts. Nach dem Drücken des Knopfs „Berechnen“, welcher am Ende der Tabelle liegt, werden die Ergebnisse der Berechnungen angezeigt. Zu sehen sind sowohl die normierten Spannungen des gewählten Punkts als auch die Darstellungen der dazugehörigen Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis  $z/h$  mittels der eingegebenen Koordinaten  $x$  und  $y$ .

Die Ergebnisse der Berechnungen der intralaminaren bzw. interlaminaren Spannungen sind in Abbildung 3.10 bzw. Abbildung 3.11 dargestellt:

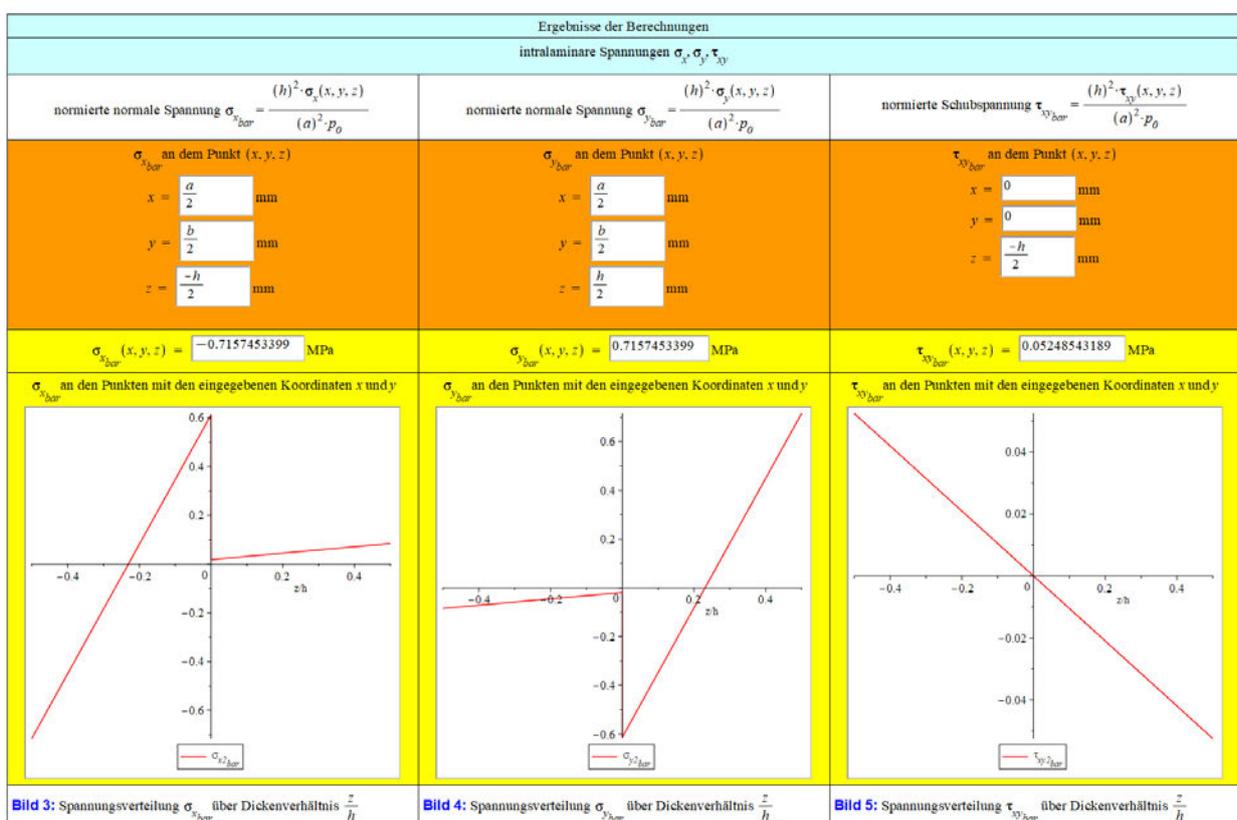


Abbildung 3.10: Ausschnitt aus der fünften Tabelle des Tools zur Eingabe der Koordinaten eines Punkts, der Ermittlung von intralaminaren Spannungen sowie der Darstellung der Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis  $z/h$

interlaminaire Spannungen $\tau_{xz}$ , $\tau_{yz}$ , $\sigma_z$		
normierte Schubspannung $\tau_{xz,bar} = \frac{h \cdot \tau_{xz}(x, y, z)}{\alpha \cdot p_0}$	normierte Schubspannung $\tau_{yz,bar} = \frac{h \cdot \tau_{yz}(x, y, z)}{\alpha \cdot p_0}$	normierte normale Spannung $\sigma_{z,bar} = \frac{\sigma_z(x, y, z)}{p_0}$
$\tau_{xz,bar}$ an dem Punkt $(x, y, z)$ $x = \frac{0}{4}$ mm $y = \frac{b}{2}$ mm $z = \frac{-h}{4}$ mm	$\tau_{yz,bar}$ an dem Punkt $(x, y, z)$ $x = \frac{a}{2}$ mm $y = 0$ mm $z = \frac{h}{4}$ mm	$\sigma_{z,bar}$ an dem Punkt $(x, y, z)$ $x = \frac{a}{2}$ mm $y = \frac{b}{2}$ mm $z = \frac{h}{2}$ mm
$\tau_{xz,bar}(x, y, z) = 0.3321958529$ MPa	$\tau_{yz,bar}(x, y, z) = 0.3321958531$ MPa	$\sigma_{z,bar}(x, y, z) = 0.9999999995$ MPa
$\tau_{xz,bar}$ an den Punkten mit den eingegebenen Koordinaten x und y 	$\tau_{yz,bar}$ an den Punkten mit den eingegebenen Koordinaten x und y 	$\sigma_{z,bar}$ an den Punkten mit den eingegebenen Koordinaten x und y 
<b>Bild 6:</b> Spannungsverteilung $\tau_{xz,bar}$ über Dickenverhältnis $\frac{z}{h}$	<b>Bild 7:</b> Spannungsverteilung $\tau_{yz,bar}$ über Dickenverhältnis $\frac{z}{h}$	<b>Bild 8:</b> Spannungsverteilung $\sigma_{z,bar}$ über Dickenverhältnis $\frac{z}{h}$
<input type="button" value="Berechnen"/>		
<b>Tabelle 5:</b> Ergebnisse der Berechnungen der interlaminaire und intralaminaire Spannungen, sowie die Spannungsverteilung über Dickenverhältnis $\frac{z}{h}$		

Abbildung 3.11: Ausschnitt aus der fünften Tabelle des Tools zur Eingabe der Koordinaten eines Punkts, der Bestimmung der interlaminaire Spannungen sowie der Darstellung der Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis  $z/h$

Damit sind die Berechnungen des Tools abgeschlossen.

### 3.3 Vergleich mit der Literatur

Um die Methode zu bewerten, werden Ergebnisse der Berechnungen mit Referenzwerten der Literatur verglichen. Dabei ist es üblich, einen Vergleich der maximalen Spannungen durchzuführen. Es besteht aber die Möglichkeit ein FE-Modell zu erstellen und eine detaillierte Lösung zu erhalten. Aufgrund der engen Bearbeitungszeit dieser Arbeit bezieht sich der Vergleich nur auf Studienpapiere, die den gleichen Lastfall bereits untersucht haben. Es werden aber im Folgenden einige Empfehlungen für die FE-Herangehensweise vorgeschlagen. Danach werden die Ergebnisse des berechneten Beispiels mit der Literatur verglichen und ausgewertet.

### 3.3.1 Empfehlungen zur Erstellung eines FE-Modells zur Analyse von Navierscher Platte mit doppelt sinusförmiger Belastung

Für die Verwendung der Software ANSYS wird für solche Berechnungen der Faserverbundplatten „ANSYS Workbench“ mit den Komponenten „ACP“ (ANSYS Composite Pre Post) und „Static Structural“ nach Abbildung 3.12 benutzt.

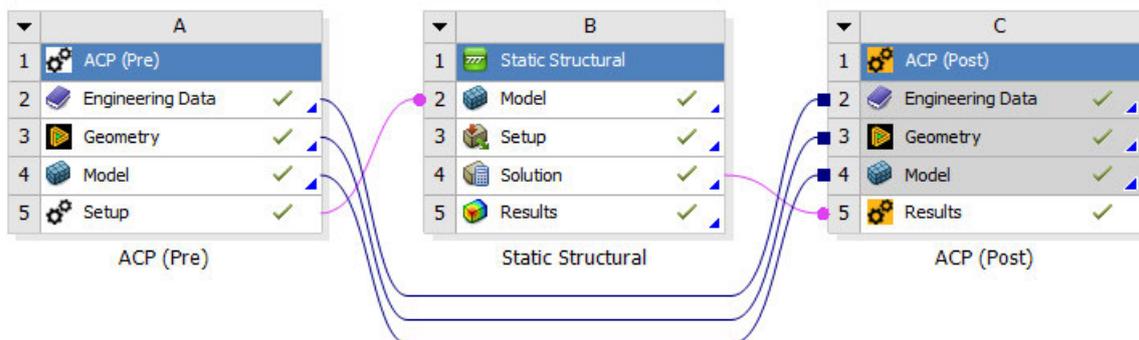


Abbildung 3.12: Schema für die Spannungsanalyse von Faserverbundplatten in „ANSYS Workbench“

Die „ACP (Pre)“ Komponente dient zur Vorbereitung der untersuchten Faserverbundplatte. Hierbei werden die Materialdaten, die Geometrie der Platte, sowie das dazugehörige Netz ausgewählt. Anschließend werden die Lamineigenschaften hinsichtlich der Faserorientierung und der Dicke festgelegt. Das resultierende „Setup“ wird mit dem Modell der nächsten Komponente verbunden [9, S. 3].

Die Komponente „Static Structural“ ist für die statische Festigkeitsanalyse zuständig. Dazu werden die Lasten und die Randbedingungen des Problems spezifiziert.

Obwohl die Resultate der Spannungen und Verformungen in dieser Komponente visualisiert werden können, wird für die Auswertung der Ergebnisse die „ACP (Post)“ Komponente verwendet. Diese verfügt über bessere Funktionalitäten, z.B. zur Erstellung von Diagrammen der Spannungsverteilung über die Dicke. Hierfür benötigt sie alle Unterkomponenten der Komponente „ACP (Pre)“ außer der Unterkomponente „Setup“, diese soll durch die Unterkomponente „Solutions“ aus „Static Structural“ ersetzt werden (Abbildung 3.12).

Die erste Herausforderung dieser Methode mittels „ANSYS Workbench“ liegt in der Erstellung der doppelt sinusförmigen Belastung in „Static Structural“. Wie auf der Abbildung 3.13 zu erkennen ist, besteht nur die Möglichkeit, die Last als Funktion der Zeit einzugeben, während die Belastung des untersuchten Falls von den Koordinaten  $x$  und  $y$  abhängt.

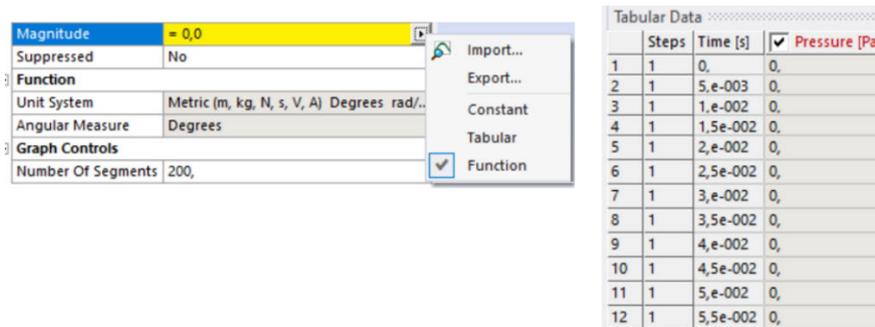


Abbildung 3.13: Möglichkeit der Erstellung einer Last als Funktion in der Komponente „Static Structural“

Alternativ ermöglicht ANSYS die Verwendung der FE-Software Mechanical APDL. Sie wird durch die Skriptsprache APDL (ANSYS Parametric Design Language) gesteuert und kann für viele Aufgaben eingesetzt werden, wie z.B. für die Erstellung der Geometrien bis hin zur Einrichtung anspruchsvoller Solver-Einstellungen für hochkomplexe Analysen. Außerdem ist es möglich, die ganze Modellierung mit Eingabe von Befehlen zu realisieren. [10]

Die Belastungsfunktion lässt sich unter Verwendung von Mechanical APDL sehr einfach erstellen. Hierbei werden in der Benutzeroberfläche der Software die folgenden Schritte nach Abbildung 3.14 durchgeführt: „Parameters“ → „Functions“ → „Define/Edit“. Folglich öffnet sich ein Menü mit dem Namen „Function Editor“, in der die doppelt sinusförmige Belastungsfunktion in Abhängigkeit von den Koordinaten  $x$  und  $y$  eingegeben werden kann. Abschließend wird sie mit „File“ → „Save“ gespeichert:

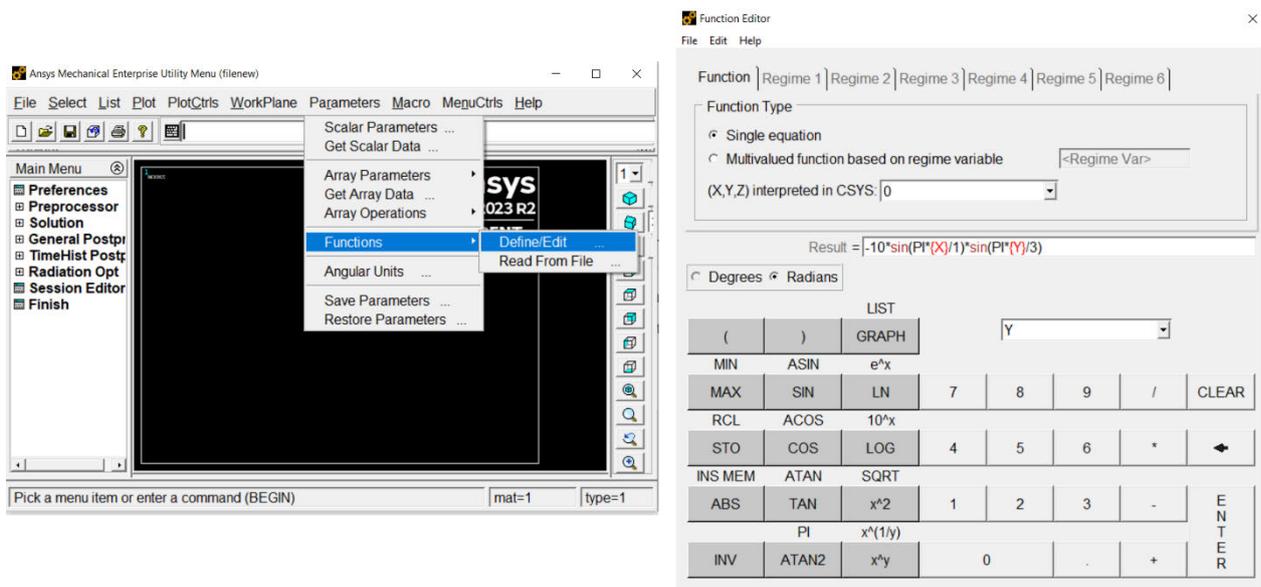


Abbildung 3.14: Schritte zur Erstellung der doppelt sinusförmigen Belastungsfunktion in Mechanical APDL

Als Nächstes muss die gespeicherte Funktion wieder geladen werden, indem die Schritte: „Parameters“ → „Functions“ → „Read From File“ ausgewählt werden. Danach soll für die Definition der Lasten die Auswahl „Existing table“ statt „Constant value“ ausgesucht werden. Dort lässt sich die Belastungsfunktion auswählen (Abbildung 3.15).

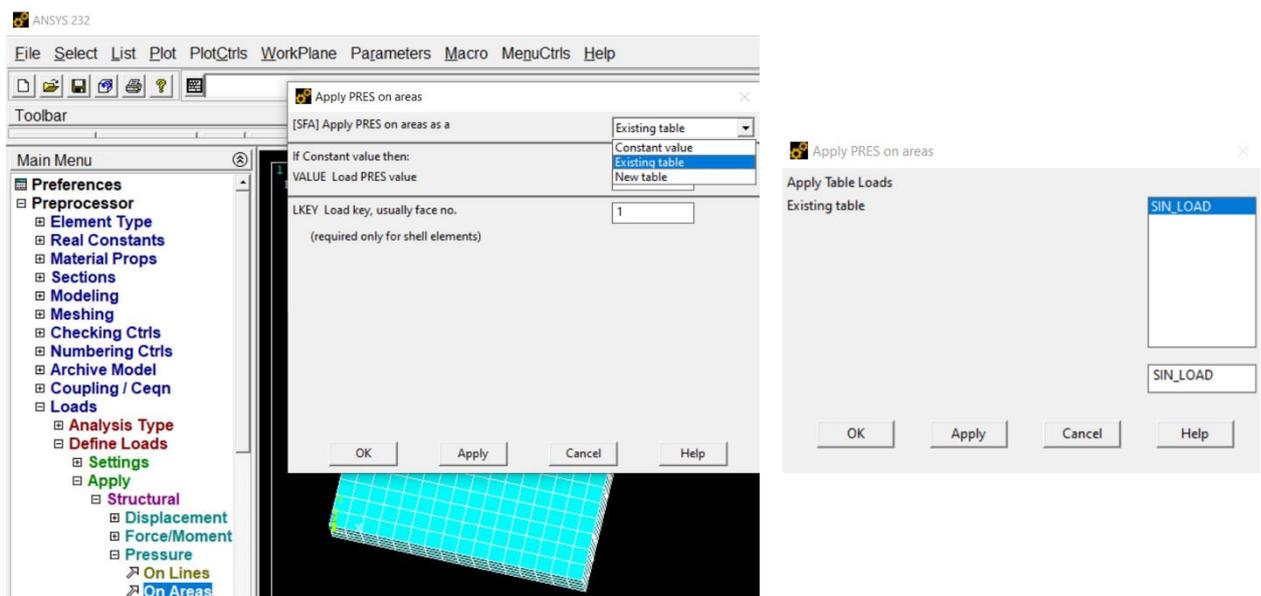


Abbildung 3.15: Auswahl der Belastungsfunktion im Schritt der Definition der Lasten

Der einzige Nachteil dieser Methode liegt in der automatischen Erstellung der Spannungsverteilung über die Dicke. Diese lässt sich in Mechanical APDL mit dem Elementtyp „Shell“ nicht realisieren, sondern nur mit dem Elementtyp „Solid“. Hierfür lässt sich im Hauptmenü „Path Operations“ verwenden. Als Erstes muss der Pfad mit „Define Path“ gemäß der Abbildung 3.16 definiert werden. Es werden Knotenpunkte ausgewählt, an denen Mechanical APDL die Spannungen berechnet und damit die gewünschten Diagramme erstellt. Weil per Definition der Elementtyp „Shell“ keine Knotenpunkte über die Dicke hat, kann keine Spannungsverteilung über die Dicke mit dieser Methode erfolgen.

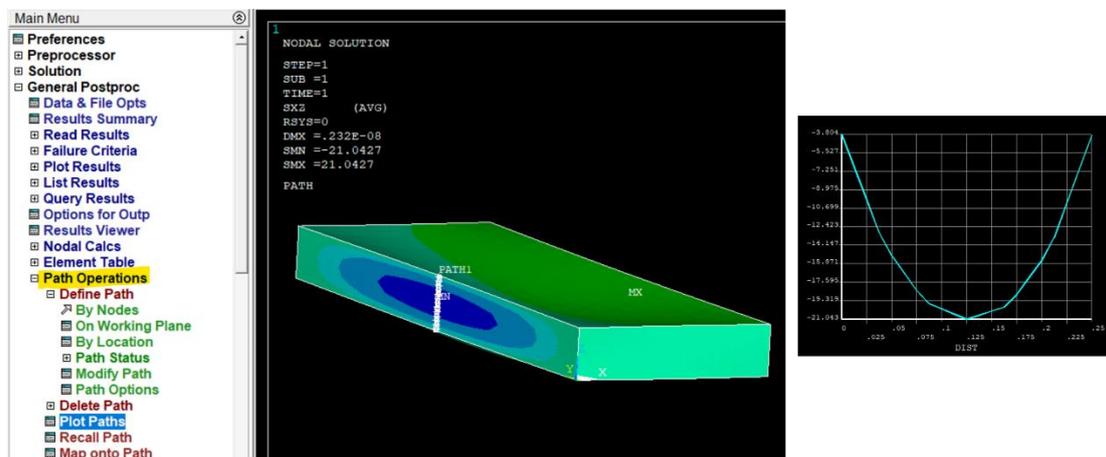


Abbildung 3.16: Beispiel zur Erstellung von Spannungsverteilung über die Dicke in einem Solid-Element mit „Path Operations“

Dieses Problem tritt unter Verwendung von „ACP (Post)“ im „ANSYS Workbench“ nicht auf.

Obwohl es möglich ist, sich das Modell von Mechanical APDL als „External Model“ in „ANSYS Workbench“ zu importieren, kann keine Verknüpfung mit „ACP (Post)“ realisiert werden, da die Komponente ACP „(Post)“ die Verwendung von „ACP (Pre)“ voraussetzt:

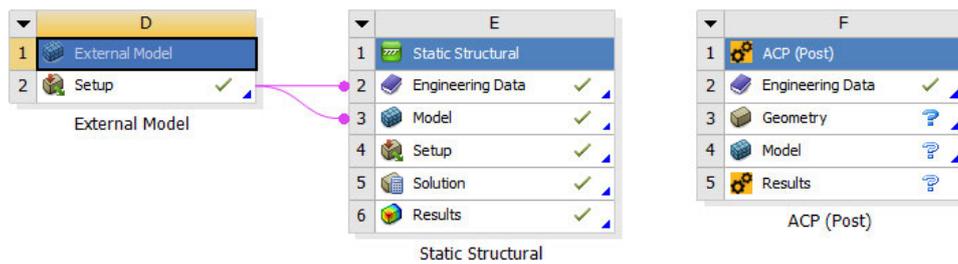


Abbildung 3.17: Import des APDL-Modells in „ANSYS Workbench“ und Fehlschlagen der Verknüpfung mit „ACP (Post)“

Zusammengefasst muss sich für eine der zwei Optionen entschieden werden. Wird die Modellierung mit dem Elementtyp „Solid“ durchgeführt, lässt sich die Spannungsverteilung mit „Path Operations“ erstellen. Andernfalls wird mit dem Elementtyp „Shell“ modelliert. In diesem Fall wird die Spannungsverteilung mithilfe der zur Verfügung stehenden Werte der Schichtspannungen manuell z.B. mit Excel erstellt.

### 3.3.2 Vergleich von Ergebnissen des berechneten Beispiels [0°, 90°] mit der Literatur

Zur Auswertung der berechneten Spannungen von dem unsymmetrischen Kreuzverbund [0°, 90°] werden in diesem Unterkapitel die dreidimensionalen Elastizitätslösungen von Pagano nach [11] verwendet. Diese sind in [12, S. 238] und [13, S. 357] zu finden.

Die Ergebnisse gehören zu einem dick quadratischen Laminat mit dem Länge-zu-Höhe-Verhältnis  $S = a/h = 4$  und sind in Tabelle 3.1 dargestellt. Zum Vergleich der Werte wird die Abweichung mittels der folgenden Formel berechnet:

$$Abweichung = \left| \frac{Referenzwert - berechneter\ Wert}{Referenzwert} \right| * 100 \quad (3-12)$$

Quelle	$\frac{z}{h}$	$\hat{\sigma}_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right)$	$\hat{\sigma}_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right)$	$\hat{\tau}_{xy}(0, 0, z)$	$\hat{\tau}_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, z\right)$	$\hat{\tau}_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, z\right)$	$\hat{\sigma}_z\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right)$
Elastizität	-0.5	-0.7807	-0.0955	0.0591	0	0	0
MAPLE-Tool		-0.7157	-0.0843	0.0525	0	0	0
<i>Abweichung</i>		8.32%	11.73%	11.17%	0%	0%	0%
Elastizität	-0.4	-0.3988	-0.0734	0.0427	0.1976	0.0423	0.0789
MAPLE-Tool		-0.4500	-0.0712	0.0420	0.1979	0.0393	0.0397
<i>Abweichung</i>		12.84%	3%	1.64%	0.15%	7.09%	49.68%
Elastizität	-0.3	-0.1437	-0.0553	0.0307	0.2919	0.0738	0.2500
MAPLE-Tool		-0.1843	-0.0580	0.0315	0.3091	0.0711	0.1392
<i>Abweichung</i>		28.25%	4.88%	2.61%	5.89%	3.66%	44.32%
Elastizität	-0.2	0.0598	-0.0398	0.0209	0.3127	0.0968	0.4605
MAPLE-Tool		0.0814	-0.0449	0.0210	0.3335	0.0955	0.2688
<i>Abweichung</i>		31.12%	12.81%	0.48%	6.65%	1.34%	41.63%
Elastizität	-0.1	0.2792	-0.0258	0.0117	0.2659	0.1122	0.6710
MAPLE-Tool		0.3471	-0.0317	0.0105	0.2712	0.1125	0.3989
<i>Abweichung</i>		24.32%	22.87%	10.26%	1.99%	0.27%	40.55%
Elastizität	0.0	0.5872	-0.0122	0.0012	0.1353	0.1202	0.7895
MAPLE-Tool		0.6128	-0.0186	0	0.1221	0.1221	0.5
<i>Abweichung</i>		4.36%	52.46%	100%	9.76%	1.58%	36.67%

Elastizität	0.0 <sup>+</sup>	0.0247	-0.6307	0.0012	0.1353	0.1202	0.7895
MAPLE-Tool		0.0186	-0.6128	0	0.1221	0.1221	0.5
<i>Abweichung</i>		24.70%	2.84%	100%	9.76%	1.58%	36.67%
Elastizität	0.1	0.0372	-0.3100	-0.0089	0.1244	0.2632	0.8684
MAPLE-Tool		0.0317	-0.3471	-0.0105	0.1125	0.2712	0.6011
<i>Abweichung</i>		14.78%	11.97%	17.98%	9.57%	3.04%	30.78%
Elastizität	0.2	0.0508	-0.0789	-0.0188	0.1063	0.3188	0.9210
MAPLE-Tool		0.0449	-0.0814	-0.0210	0.0955	0.3335	0.7312
<i>Abweichung</i>		11.61%	3.17%	11.70%	10.16%	4.61%	20.61%
Elastizität	0.3	0.0667	0.1387	-0.0282	0.0807	0.3027	0.9605
MAPLE-Tool		0.0580	0.1843	-0.0315	0.0711	0.3091	0.8608
<i>Abweichung</i>		13.04%	32.88%	11.70%	11.90%	2.11%	10.38%
Elastizität	0.4	0.0859	0.4152	-0.0410	0.0461	0.2075	0.9737
MAPLE-Tool		0.0771	0.4500	-0.0420	0.0392	0.1979	0.9603
<i>Abweichung</i>		10.24%	8.38%	0.1%	2.44%	4.64%	1.38%
Elastizität	0.5	0.1098	0.8417	-0.0588	0	0	1
MAPLE-Tool		0.0843	0.7157	-0.0525	0	0	1
<i>Abweichung</i>		23.22%	14.97%	10.71%	0%	0%	0%

Tabelle 3.3: Vergleich der durch das MAPLE-Tool ermittelten Spannungen in einem unsymmetrischen Kreuzverbund der Art  $[0^\circ, 90^\circ]$  mit Referenzwerten der Literatur

Für einen dicken unsymmetrischen Kreuzverbund der Art  $[0^\circ, 90^\circ]$  kann festgestellt werden, dass die interlaminaren Schubspannungen  $\hat{t}_{xz}$  gemäß der vorliegenden Methode mit einer maximalen Ungenauigkeit von 11.90% vorhergesagt werden können. Die Schubspannungen  $\hat{t}_{yz}$  weichen maximal um 7.09% von den Referenzwerten ab. Die Berechnung der transversalen normalen Spannungen  $\hat{\sigma}_z$  hingegen, weisen größere Unterschiede zu den Referenzwerten auf. Hierbei beträgt die maximale Abweichung 49.68%.

In Bezug auf die Spannungsverteilung der interlaminaren Spannungen lässt sich anhand der Abbildung 3.11 feststellen, dass die Verläufe beider Schubspannungen  $\hat{t}_{xz}$  und  $\hat{t}_{yz}$  sowohl parabolisch als auch stetig sind. Dies kommt dadurch zustande, dass beide Spannungen aus der Integration der Spannungen  $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y$  und  $\hat{\tau}_{xy}$  nach den Formeln (1-108) und (1-109) resultieren. Diese Spannungen stehen linear zur z-Koordinate gemäß der Formel (1-107). Deswegen entstehen parabolische Funktionen nach der Integration über die Dicke. Die Stetigkeit der Verläufe lässt sich aus der Kontinuität der transversalen Spannungen in der Berührungsfläche der Einzelschichten herleiten. Auf diesem Prinzip berufend wurden die Integralfunktionen  $C_{xz(k)}$  und  $C_{yz(k)}$  nach den Formeln (1-111) und (1-113) bestimmt. Erwähnenswert ist außerdem, dass die Verläufe ihre Form an den Schichtgrenzen ändern. Dies lässt sich mit den unterschiedlichen Steifigkeiten der Faserwinkel  $0^\circ$  und  $90^\circ$  erklären. Ein solches Verhalten soll bei der Auslegung von Bauteilen mitberücksichtigt werden, um die Gefahr der Ablösung der Einzelschichten zu vermeiden.

Anhand der Verläufe lässt sich ebenfalls herleiten, dass diese mit der Bedingung der spannungsfreien Oberfläche auf Seite 33 übereinstimmen. Die Schubspannungen  $\hat{t}_{xz}$  und  $\hat{t}_{yz}$  verschwinden bei  $z = \pm 0.5h$ .

Des Weiteren zeigt die Abbildung 3.11 auf, dass der Verlauf von transversaler normaler Spannung  $\hat{\sigma}_z$  erwartungsgemäß die Form einer kubischen Funktion übernimmt. Dies entsteht aufgrund der Integration von interlaminaren Schubspannungen  $\hat{t}_{xz}$  und  $\hat{t}_{yz}$ , die wiederum, wie bereits erwähnt, parabolisch sind. Die Stetigkeit des Verlaufs wird wie bei der Stetigkeit der Schubspannungen  $\hat{t}_{xz}$  und  $\hat{t}_{yz}$  gleich begründet. Hierzu wird auf die Formel (1-114) verwiesen.

Der Verlauf entspricht ebenfalls den Randbedingungen. Oben auf der Oberfläche, an der die Belastung angreift, ist der Wert maximal, während an der freien Oberfläche, unter der Platte, der Wert gleich null ist.

### 3.4 Parameterstudie

In diesem Kapitel werden verschiedene Laminataufbauten und Laminatdicken untersucht. Dabei erfolgt die Auswertung von zwei symmetrischen Kreuzverbunden und zwei unsymmetrischen Winkelverbunden. Danach werden für die Untersuchung der Laminatdicke fünf verschiedene Dickenverhältnisse berechnet und die daraus gesammelten Erkenntnisse festgehalten.

#### 3.4.1 Laminataufbau

##### 3.4.1.1.1 Symmetrischer Kreuzverbund $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$

Untersucht wird ein sehr dicker, rechteckiger, symmetrischer Kreuzverbund der Art  $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$  mit dem Länge-zu-Höhe-Verhältnis  $S = a/h = 4$ .

Da alle Einzelschichten über die gleiche Dicke verfügen, beträgt die Schichtdicke:

$$t = \frac{h}{3} = \frac{250 \text{ mm}}{3} = 83.3334 \text{ mm} \quad (3-13)$$

Die Länge und Breite des Laminats sind:

$$a = 1000 \text{ mm}, b = 3a = 3000 \text{ mm} \quad (3-14)$$

Es gelten die folgenden Materialdaten:

$$E_1 = 174.6 \text{ GPa}, E_2 = 7 \text{ GPa}, G_{12} = 3.5 \text{ GPa}, \nu_{12} = 0.25 \quad (3-15)$$

Die durch das MAPLE-Tool berechneten Spannungen werden mit den zur Verfügung gestellten Werten der Quelle [14] in Tabelle 3.4 verglichen. Die Referenzwerte basieren auf den dreidimensionalen Elastizitätslösungen von Pagano nach [11], die in [14, S. 130] präsentiert sind.

Quelle	$\hat{\sigma}_x \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right)$	$\hat{\sigma}_y \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{6} \right)$	$\hat{\tau}_{xy} \left( 0, 0, \frac{h}{2} \right)$	$\hat{\tau}_{xz} \left( 0, \frac{b}{2}, 0 \right)$	$\hat{\tau}_{yz} \left( \frac{a}{2}, 0, 0 \right)$
Elastizität	1.14	0.109	-0.0269	0.351	0.0334
MAPLE-Tool	0.6232	0.02514	-0.0083	0.440	0.0108
Abweichung	45.33%	76.93%	69.14%	25.36%	67.66%

Tabelle 3.4: Vergleich der durch das MAPLE-Tool ermittelten Spannungen in einem symmetrischen Kreuzverbund der Art  $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$  mit Referenzwerten der Literatur

Für jede der interlaminaren und intralaminaren Spannungen lässt sich mittels des MAPLE-Tools die Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis  $z/h$  erstellen. Es resultiert:

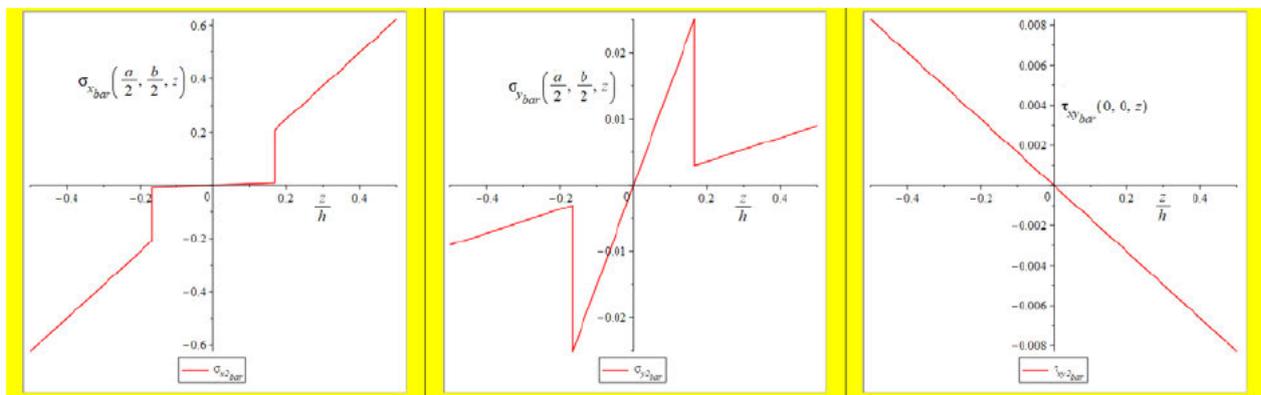
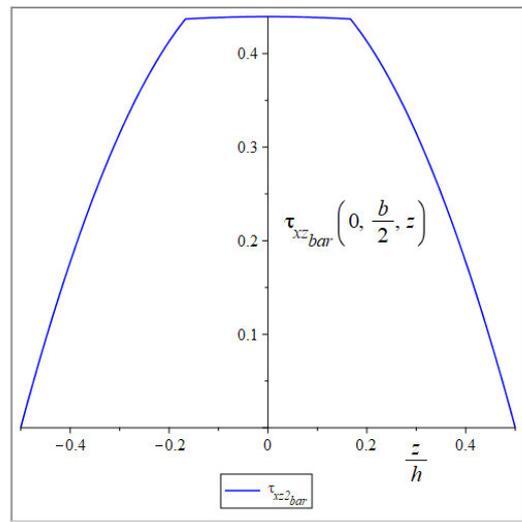


Bild 3: Spannungsverteilung  $\sigma_{x_{bar}}$  über Dickenverhältnis  $\frac{z}{h}$

Bild 4: Spannungsverteilung  $\sigma_{y_{bar}}$  über Dickenverhältnis  $\frac{z}{h}$

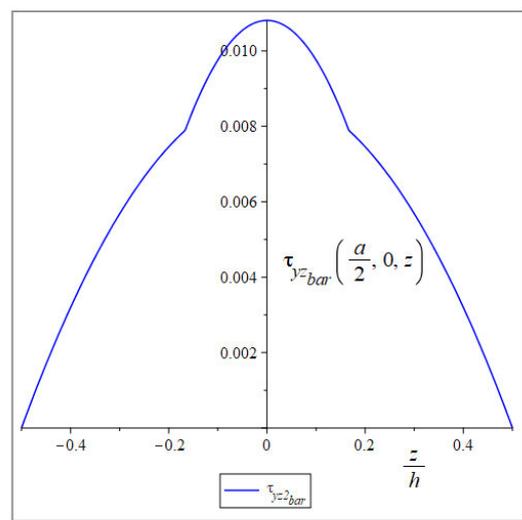
Bild 5: Spannungsverteilung  $\tau_{xy_{bar}}$  über Dickenverhältnis  $\frac{z}{h}$

Abbildung 3.18: Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis  $z/h$  von normierten normalen Spannungen  $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y$  an den Punkten mit den Koordinaten  $x = a/2, y = b/2$  und der Schubspannung  $\hat{\tau}_{xy}$  an den Punkten mit den Koordinaten  $x = 0, y = 0$  für das Laminat  $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$



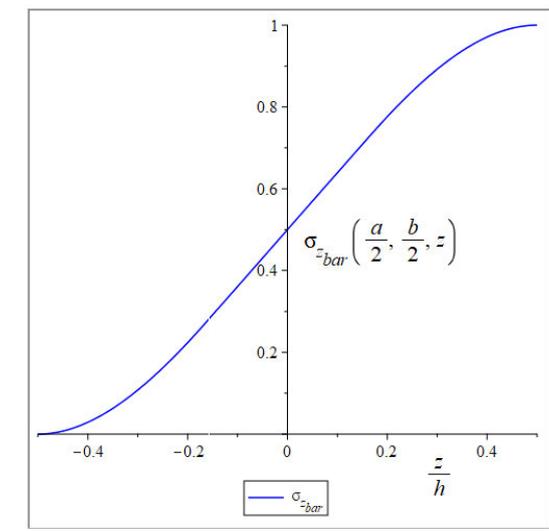
**Bild 6:** Spannungsverteilung  $\tau_{xz}$  über Dickenverhältnis  $\frac{z}{h}$

Abbildung 3.19: Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis  $z/h$  von normierter interlaminarer Schubspannung  $\hat{\tau}_{xz}$  an allen Punkten mit den Koordinaten  $x = 0, y = b/2$  für das Laminat  $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$



**Bild 7:** Spannungsverteilung  $\tau_{yz}$  über Dickenverhältnis  $\frac{z}{h}$

Abbildung 3.20: Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis  $z/h$  von normierter interlaminarer Schubspannung  $\hat{\tau}_{yz}$  an allen Punkten mit den Koordinaten  $x = a/2, y = 0$  für das Laminat  $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$



**Bild 8:** Spannungsverteilung  $\sigma_{z\_bar}$  über Dickenverhältnis  $\frac{z}{h}$

Abbildung 3.21: Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis  $z/h$  von normierter, interlaminarer, normaler Spannung  $\hat{\sigma}_z$  an allen Punkten mit den Koordinaten  $x = a/2, y = b/2$  für das Laminat  $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$

Anhand der Tabelle 3.4 wird festgestellt, dass für den Fall eines dicken symmetrischen Kreuzverbunds des Typs  $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$  ungenauer Ergebnisse im Vergleich zum letzten Unterkapitel erzielt werden können. Bei den interlaminaren Schubspannungen  $\hat{t}_{xz}$  entsteht eine maximale Abweichung von 25.36% bezüglich der Referenzwerte, während die Schubspannungen  $\hat{t}_{yz}$  eine maximale Ungenauigkeit von 67.66% liefern. Die großen Ungenauigkeiten lassen sich mit den fehlerbehafteten Spannungen  $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{t}_{xy}$  begründen, welche eine Abweichung bis zu 76.93% enthalten. Dies ist aber zu erwarten, da CLT nur für dünne Lamine geeignet ist.

Wie in den Abbildungen 3.19 und 3.20 zu erkennen ist, sind die Verläufe der Spannungsverteilung von interlaminaren Schubspannungen  $\hat{t}_{xz}$  und  $\hat{t}_{yz}$  achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse, im Gegensatz zum Fall des unsymmetrischen Kreuzverbunds nach Abbildung 3.11. Dort findet keine Symmetrie statt. Andererseits sind die Verläufe in diesem Fall auch parabolisch, stetig und verschwinden an der Oberfläche der Platte.

Die Abbildung 3.21 zeigt auf, dass der Verlauf der transversalen normalen Spannung  $\hat{\sigma}_z$  in diesem Fall auch stetig und kubisch ist, darüber hinaus stimmt er mit den Randbedingungen überein (siehe Seite 33).

### 3.4.1.1.2 Symmetrischer Kreuzverbund [0°, 90°, 90°, 0°]

In diesem Unterkapitel wird ein dickes, quadratisches, symmetrisches Laminat des Typs  $[0^\circ, 90^\circ]_S$  untersucht, welches ein Länge-zu-Höhe-Verhältnis von  $S = a/h = 10$  hat.

Die Dimensionen der Platte betragen wie folgt:

$$a = b = 1000 \text{ mm}, h = 100 \text{ mm} \quad (3-16)$$

Es gelten die folgenden Materialdaten:

$$E_1 = 175 \text{ GPa}, E_2 = 7 \text{ GPa}, G_{12} = 3.5 \text{ GPa}, \nu_{12} = 0.25 \quad (3-17)$$

Die Referenzwerte stammen aus den Quellen [15, S. 911], [8, S. 689–690], [16, S. 31] und stellen die Basis für den Vergleich der ermittelten Spannungen dar. Die Ergebnisse der Berechnungen sowie die Literaturwerte werden folgendermaßen tabellarisch präsentiert:

Quelle	$\hat{\sigma}_x \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right)$	$\hat{\sigma}_y \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{4} \right)$	$\hat{\tau}_{xy} \left( 0, 0, \frac{h}{2} \right)$	$\hat{\tau}_{xz} \left( 0, \frac{b}{2}, 0 \right)$	$\hat{\tau}_{yz} \left( \frac{a}{2}, 0, 0 \right)$
Elastizität	0.559	0.401	-0.0275	0.301	0.196
MAPLE-Tool	0.5387	0.2693	-0.0213	0.3393	0.1382
Abweichung	3,63%	32,84%	22,54%	12,72%	29,49%

Tabelle 3.5: Vergleich der durch das MAPLE-Tool berechneten Spannungen in einem symmetrischen Kreuzverbund des Typs  $[0^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$  mit den Referenzwerten der Literatur

Die Diagramme der Spannungsverteilung von interlaminaren und intralaminaren Spannungen, welche anhand des MAPLE-Tools berechnet sind, werden wie folgt dargestellt:

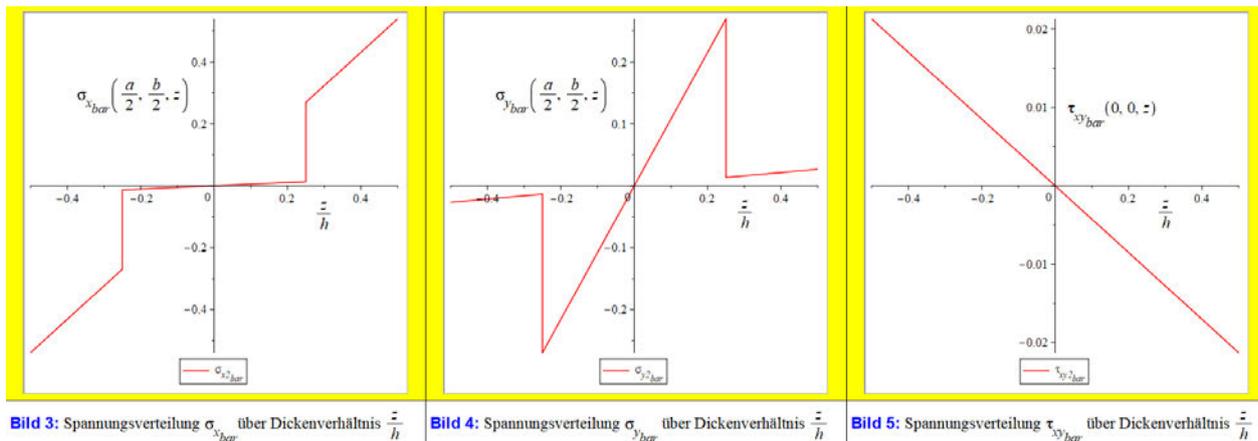


Abbildung 3.22: Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis  $z/h$  von normierten normalen Spannungen  $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y$  an den Punkten mit den Koordinaten  $x = a/2, y = b/2$  und der Schubspannung  $\hat{\tau}_{xy}$  an den Punkten mit den Koordinaten  $x = 0, y = 0$  für das Laminat  $[0^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$

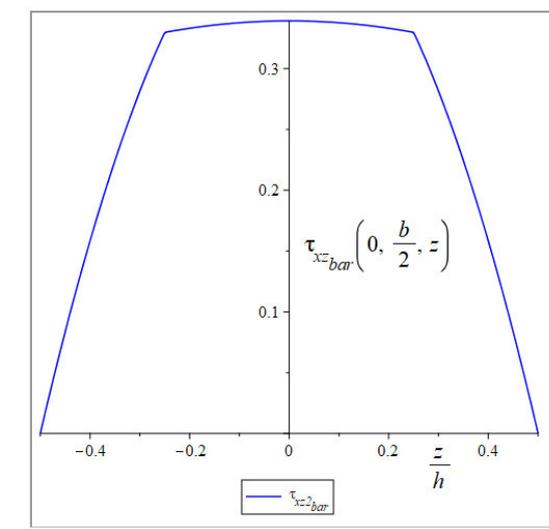
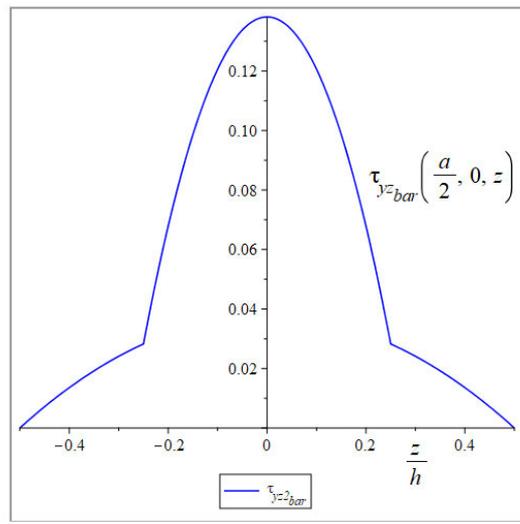
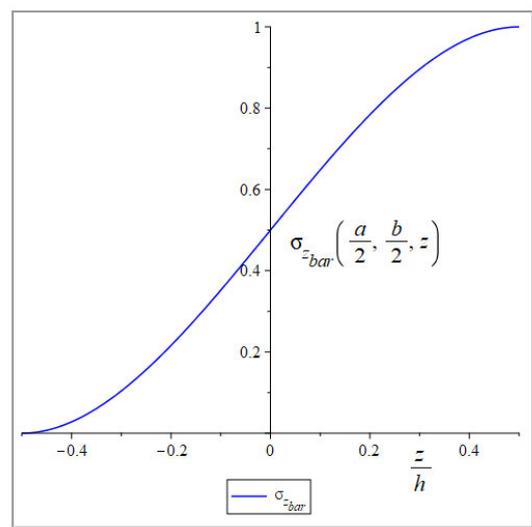


Abbildung 3.23: Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis  $z/h$  von normierter interlaminarer Schubspannung  $\hat{\tau}_{xz}$  an allen Punkten mit den Koordinaten  $x = 0, y = b/2$  für das Laminat  $[0^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$



**Bild 7:** Spannungsverteilung  $\tau_{yz}$  über Dickenverhältnis  $\frac{z}{h}$

Abbildung 3.24: Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis  $z/h$  von normierter interlaminarer Schubspannung  $\hat{\tau}_{yz}$  an allen Punkten mit den Koordinaten  $x = a/2, y = 0$  für das Laminat  $[0^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$



**Bild 8:** Spannungsverteilung  $\sigma_{z}$  über Dickenverhältnis  $\frac{z}{h}$

Abbildung 3.25: Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis  $z/h$  von normierter, interlaminarer, normaler Spannung  $\hat{\sigma}_z$  über das Dickenverhältnis  $z/h$  an allen Punkten mit den Koordinaten  $x = a/2, y = b/2$  für das Laminat  $[0^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$

Laut der Tabelle 3.5 ergibt der symmetrische quadratische Kreuzverbund der Art  $[0^\circ, 90^\circ]_S$  mit dem Länge-zu-Höhe-Verhältnis  $S = 10$  eine bessere Genauigkeit als im letzten Unterkapitel, in welchem ein rechteckiges Laminat mit einem Lageaufbau von

$[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$  und einem Länge-zu-Höhe-Verhältnis von  $S = 4$  untersucht wurde. Die maximale Abweichung, die die vorliegende Theorie liefert, beträgt bei transversalen Schubspannungen 29.49%. Bei intralaminaren Spannungen entsteht eine maximale Abweichung von 32.84%. Die genaue Untersuchung vom Einfluss des Dickenverhältnisses auf die Genauigkeit der Ergebnisse erfolgt in einem separaten Unterkapitel auf Seite 76 dieser Arbeit.

Die von Abbildung 3.22 bis Abbildung 3.25 dargestellten Diagramme, welche die Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis beschreiben, haben die gleichen Charakteristika von den Diagrammen des letzten Unterkapitels. Es lässt sich aber noch erwähnen, dass die mittleren Parabeln der transversalen Spannungsverteilung breiter sind, da das Laminat im Vergleich zum letztem Unterkapitel noch eine zusätzliche Einzelschicht von  $90^\circ$  hat.

#### **3.4.1.1.3 Unsymmetrischer Winkelverbund $[-30^\circ, 30^\circ]$**

In diesem Unterkapitel erfolgt der Vergleich mit den bereitgestellten Werten der Studie von Savoia and Reddy nach [17, S. 170]. Diese bezieht sich auf die Rayleigh-Ritz-Lösungen der dreidimensionalen Elastizitätstheorie und bieten Referenzwerte für dieses Unterkapitel. Die gleichen Werte sind auch in der Quelle [18, S. 442] zu finden. Das untersuchte Laminat ist ein dicker unsymmetrischer Winkelverbund der Art  $[-30^\circ, 30^\circ]$ . Dieser verfügt über ein Länge-zu-Höhe-Verhältnis von  $S = 10$ .

Die Platte soll quadratisch sein und hat die folgenden Dimensionen:

$$a = b = 1000 \text{ mm}, h = 100 \text{ mm} \quad (3-18)$$

Die Materialdaten werden wie folgt ausgewählt:

$$\begin{aligned} E_1 = 25 * 10^6 \text{ psi} = 172368,93 \text{ MPa}, E_2 = 10^6 \text{ psi} = 6894,76 \text{ MPa}, \\ G_{12} = 0.5 * 10^6 \text{ psi} = 34447,38 \text{ MPa}, \nu_{12} = 0.25 \end{aligned} \quad (3-19)$$

Die Ergebnisse der Berechnungen sowie die Literaturwerte sind tabellarisch folgendermaßen dargestellt:

Quelle	$\hat{\sigma}_x \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right)$	$\hat{\sigma}_y \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right)$	$\hat{\tau}_{xy} \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right)$	$\hat{\tau}_{xz} \left( 0, \frac{b}{2}, \frac{h}{5} \right)$	$\hat{\tau}_{yz} \left( \frac{a}{2}, 0, \frac{h}{5} \right)$
[18, S. 442]	0.4204	0.1696	0.2018	0.2699	0.1570
MAPLE-Tool	0.4063	0.1614	0.1962	0.2735	0.1575
Abweichung	3.35%	4,83%	2,77%	1.33%	0.32%

Tabelle 3.6: Vergleich der durch das MAPLE-Tool berechneten Spannungen in einem unsymmetrischen Winkelverbund des Typs  $[-30^\circ, 30^\circ]$  mit den Referenzwerten der Literatur

Die durch das MAPLE-Tool erstellten Diagramme, welche die Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis beschreiben, sind wie folgt:

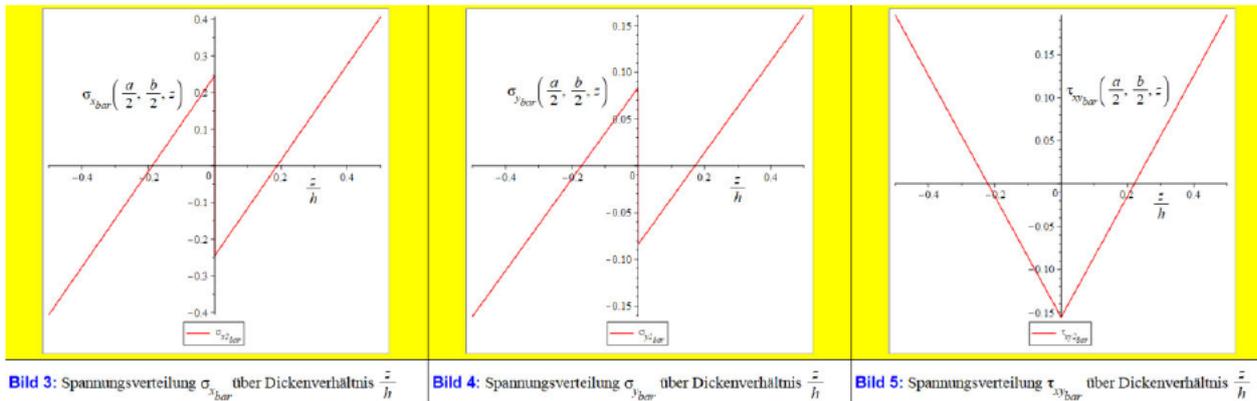
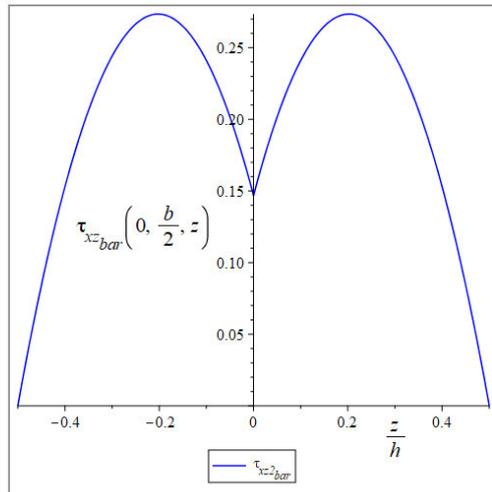
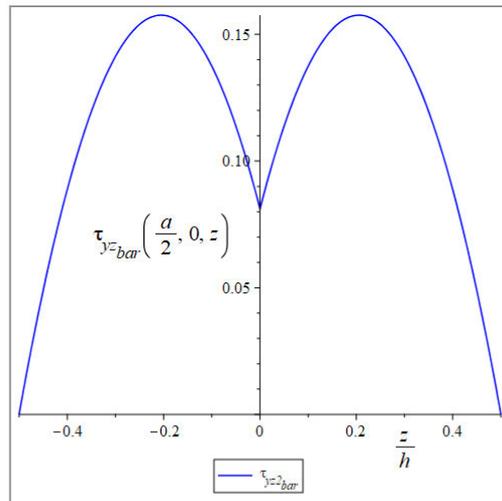


Abbildung 3.26: Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis  $z/h$  von normierten normalen Spannungen  $\hat{\sigma}_x$ ,  $\hat{\sigma}_y$  und der Schubspannung  $\hat{\tau}_{xy}$  an den Punkten mit den Koordinaten  $x = a/2$ ,  $y = b/2$  für das Laminat  $[-30^\circ, 30^\circ]$



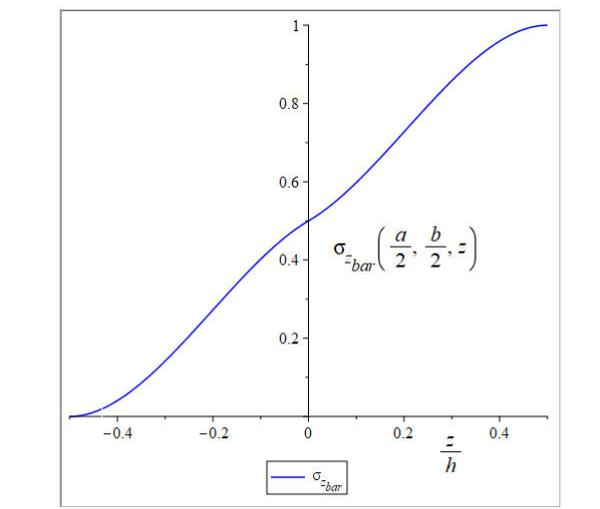
**Bild 6:** Spannungsverteilung  $\tau_{xz}$  über Dickenverhältnis  $\frac{z}{h}$

Abbildung 3.27: Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis  $z/h$  von normierter interlaminarer Schubspannung  $\hat{\tau}_{xz}$  an allen Punkten mit den Koordinaten  $x = 0, y = b/2$  für das Laminat  $[-30^\circ, 30^\circ]$



**Bild 7:** Spannungsverteilung  $\tau_{yz}$  über Dickenverhältnis  $\frac{z}{h}$

Abbildung 3.28: Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis  $z/h$  von normierter interlaminarer Schubspannung  $\hat{\tau}_{yz}$  an allen Punkten mit den Koordinaten  $x = a/2, y = 0$  für das Laminat  $[-30^\circ, 30^\circ]$



**Bild 8:** Spannungsverteilung  $\sigma_{z_{bar}}$  über Dickenverhältnis  $\frac{z}{h}$

Abbildung 3.29: Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis  $z/h$  von normierter, interlaminarer, normaler Spannung  $\hat{\sigma}_z$  über das Dickenverhältnis  $z/h$  an allen Punkten mit den Koordinaten  $x = a/2, y = b/2$  für das Laminat  $[-30^\circ, 30^\circ]$

Die Untersuchung eines dicken, quadratischen, unsymmetrischen Winkelverbunds des Typs  $[-30^\circ, 30^\circ]$  mit dem Verhältnis  $S = 10$  zeigt, dass die Ergebnisse vom MAPLE-Tool eine gute Genauigkeit aufweisen. Die maximale Abweichung beträgt bei interlaminaren Schubspannungen 1.33%.

Wie in den Abbildungen 3.27 und 3.28 zu beobachten ist, sind beide Verläufe der Schubspannungen  $\hat{t}_{xz}$  und  $\hat{t}_{yz}$  parabolisch und haben die gleiche Form. Außerdem weisen beide eine Symmetrie zur  $y$ -Achse auf, obwohl das Laminat unsymmetrisch ist. Gemäß dieser Abbildungen lässt sich ebenfalls feststellen, dass beide Schubspannungen  $\hat{t}_{xz}$  und  $\hat{t}_{yz}$  bei  $z = \pm 0.25h$  maximal sind.

Der Verlauf von der interlaminaren normalen Spannung  $\hat{\sigma}_z$  nach Abbildung 3.29 ist wie in anderen Fällen kubisch und zeichnet sich durch die gleichen Eigenschaften aus.

#### 3.4.1.1.4 Unsymmetrischer Winkelverbund $[-45^\circ, 45^\circ, -45^\circ, 45^\circ]$

In diesem Unterkapitel wird sowohl die Faserorientierung als auch die Anzahl der Einzelschichten geändert. Ausgewählt ist ein dicker unsymmetrischer Winkelverbund des Typs  $[-45^\circ, 45^\circ, -45^\circ, 45^\circ]$ . Der Vergleich in diesem Fall basiert auf den Referenzwerten der Quelle [19, S. 781]. Diese befasst sich mit der Herleitung von

dreidimensionalen exakten Lösungen für die statische Analyse von rechteckigen unsymmetrischen Winkelverbundplatten.

Das untersuchte quadratische Laminat hat ein Länge-zu-Höhe-Verhältnis von  $S = 10$  und besitzt die folgenden Dimensionen:

$$a = b = 1000 \text{ mm}, h = 100 \text{ mm} \quad (3-20)$$

Die Materialdaten sind:

$$E_1 = 173000 \text{ MPa}, E_2 = 6920 \text{ MPa}, G_{12} = 3462 \text{ MPa}, \nu_{12} = 0.25 \quad (3-21)$$

Die mittels des MAPLE-Tools ermittelten Ergebnisse sowie Literaturwerte werden tabellarisch folgendermaßen präsentiert:

Quelle	$\hat{\sigma}_x \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right)$	$\hat{\sigma}_y \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right)$	$\hat{\tau}_{xz} \left( 0, \frac{b}{2}, 0 \right)$	$\hat{\tau}_{yz} \left( \frac{a}{2}, 0, 0 \right)$
[19, S. 781]	0.1762	0.1762	0.2683	0.2683
MAPLE-Tool	0.1458	0.1458	0.2841	0.2841
Abweichung	17,25%	17,25%	5,89%	5,89%

Tabelle 3.7: Vergleich der durch das MAPLE-Tool berechneten Spannungen in einem unsymmetrischen Winkelverbund des Typs  $[\mp 45^\circ, \mp 45^\circ]$  mit den Referenzwerten der Literatur

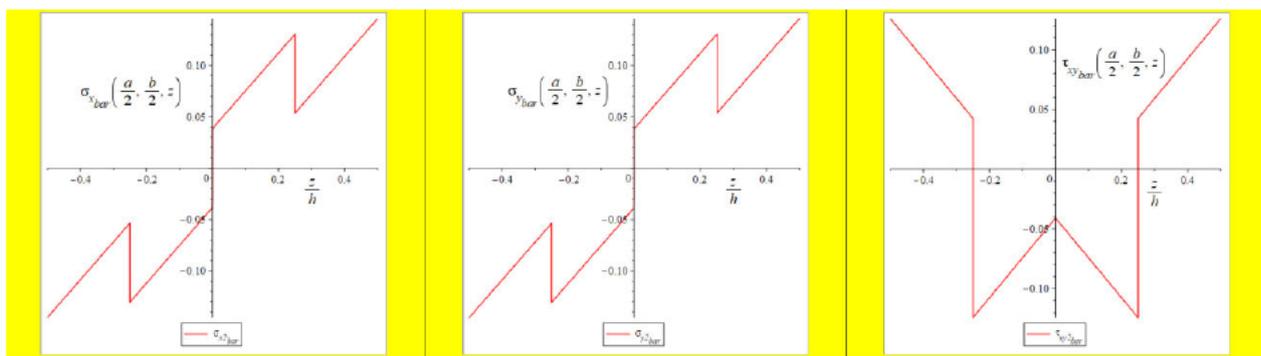
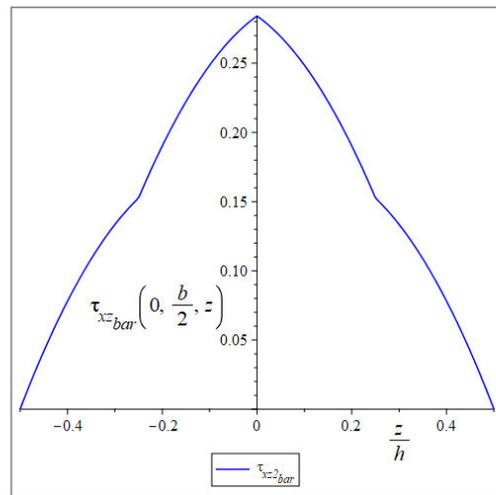


Bild 3: Spannungsverteilung  $\sigma_{x_{bar}}$  über Dickenverhältnis  $\frac{z}{h}$

Bild 4: Spannungsverteilung  $\sigma_{y_{bar}}$  über Dickenverhältnis  $\frac{z}{h}$

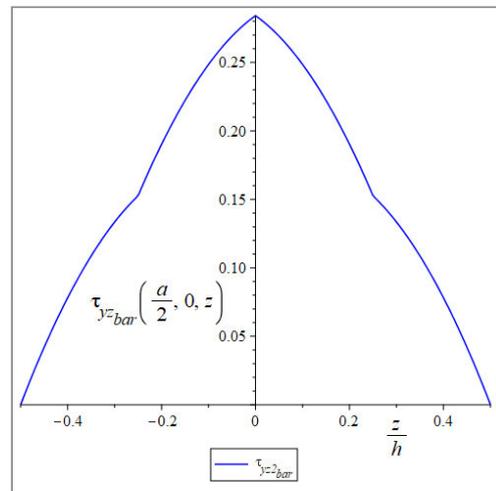
Bild 5: Spannungsverteilung  $\tau_{xy_{bar}}$  über Dickenverhältnis  $\frac{z}{h}$

Abbildung 3.30: Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis  $z/h$  von normierten normalen Spannungen  $\hat{\sigma}_x$ ,  $\hat{\sigma}_y$  und der Schubspannung  $\hat{\tau}_{xy}$  an den Punkten mit den Koordinaten  $x = a/2$ ,  $y = b/2$  für das Laminat  $[\mp 45^\circ, \mp 45^\circ]$



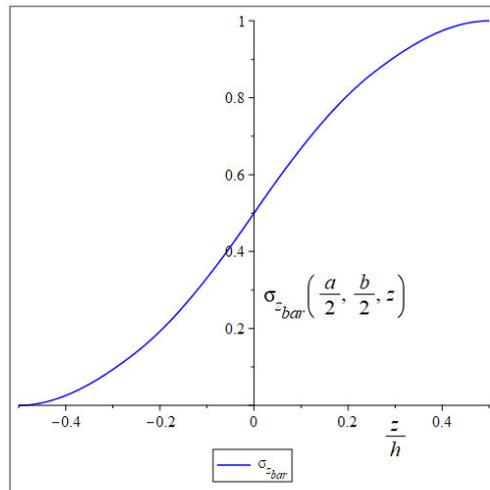
**Bild 6:** Spannungsverteilung  $\tau_{xz_{bar_{bar}}}$  über Dickenverhältnis  $\frac{z}{h}$

Abbildung 3.31: Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis  $z/h$  von normierter interlaminarer Schubspannung  $\hat{t}_{xz}$  an allen Punkten mit den Koordinaten  $x = 0, y = b/2$  für das Laminat  $[\mp 45^\circ, \mp 45^\circ]$



**Bild 7:** Spannungsverteilung  $\tau_{yz_{bar_{bar}}}$  über Dickenverhältnis  $\frac{z}{h}$

Abbildung 3.32: Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis  $z/h$  von normierter interlaminarer Schubspannung  $\hat{t}_{yz}$  an allen Punkten mit den Koordinaten  $x = a/2, y = 0$  für das Laminat  $[\mp 45^\circ, \mp 45^\circ]$



**Bild 8:** Spannungsverteilung  $\sigma_{z_{bar}}$  über Dickenverhältnis  $\frac{z}{h}$

Abbildung 3.33: Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis  $z/h$  von normierter, interlaminarer, normaler Spannung  $\hat{\sigma}_z$  an allen Punkten mit den Koordinaten  $x = a/2, y = b/2$  für das Laminat  $[\mp 45^\circ, \mp 45^\circ]$ .

Im Vergleich zum zweischichtigen Laminat  $[-30^\circ, 30^\circ]$  hat sich die Genauigkeit der Berechnungen in diesem Fall verschlechtert, ist allerdings für interlaminare Spannungen akzeptable. Die Abweichung zu den Referenzwerten beträgt 5,89%, während die intralaminaren Spannungen eine maximale Ungenauigkeit von 17,25% aufweisen.

Die dargestellten Diagramme der interlaminaren Schubspannungen der Abbildungen 3.31 und 3.32 sind in diesem Fall auch parabolisch und stetig. Die Maximalwerte beider Schubspannungen  $\hat{t}_{xz}$  und  $\hat{t}_{yz}$  liegen bei  $z = 0$ . Darüber hinaus lässt sich noch darauf hinweisen, dass die Verläufe symmetrisch zur  $y$ -Achse sind, obwohl der Winkelverbund unsymmetrisch ist. Im Gegensatz zum Kreuzverbund, bei dem die Symmetrie der Verläufe auf die Symmetrie des Laminats beruht.

Der Verlauf der transversalen normalen Spannung  $\hat{\sigma}_z$  nach Abbildung 3.33 ist, wie in anderen Fällen, kubisch, stetig und weist die gleichen Charakteristika auf.

### 3.4.2 Laminatdicke

In diesem Unterkapitel wird der Einfluss von Laminatdicke auf die Genauigkeit der Ergebnisse untersucht. Dabei wird ein symmetrischer Kreuzverbund der Art  $[0^\circ, 90^\circ]_S$  mit fünf verschiedenen Dickenverhältnissen betrachtet.

Das Laminat soll quadratisch sein und folgende Dimensionen haben:

$$a = b = 1000 \text{ mm} \quad (3-22)$$

Die Materialwerte sind als Folgendes auszuwählen:

$$E_1 = 175 \text{ GPa}, E_2 = 7 \text{ GPa}, G_{12} = 3.5 \text{ GPa}, \nu_{12} = 0.25 \quad (3-23)$$

Der Vergleich erfolgt hier auch mit den dreidimensionalen exakten Lösungen, die bereits im Unterkapitel 3.4.1.1.2 verwendet wurden.

Die mittels des MAPLE-Tools berechneten Spannungen für jede der fünf verschiedenen Länge-zu-Höhe-Verhältnisse  $S = 4, 10, 20, 50, 100$  sowie Literaturwerte sind tabellarisch wie folgt dargestellt:

Quelle	$S$	$\hat{\sigma}_x \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right)$	$\hat{\sigma}_y \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{4} \right)$	$\hat{\tau}_{xy} \left( 0, 0, \frac{h}{2} \right)$	$\hat{\tau}_{xz} \left( 0, \frac{b}{2}, 0 \right)$	$\hat{\tau}_{yz} \left( \frac{a}{2}, 0, 0 \right)$
Elastizität	4	0.720	0.663	-0.0467	0.219	0.292
MAPLE-Tool		0.5387	0.2693	-0.0213	0.3393	0.1382
Abweichung		25,18%	59,38%	54,39%	54,93%	52,67%
Elastizität	10	0.559	0.401	-0.0275	0.301	0.196
MAPLE-Tool		0.5387	0.2693	-0.0213	0.3393	0.1382
Abweichung		3,63%	32,84%	22,54%	12,72%	29,49%
Elastizität	20	0.543	0.308	-0.0230	0.328	0.156
MAPLE-Tool		0.5387	0.2693	-0.0213	0.3393	0.1382
Abweichung		0,79%	12,56%	7,39%	3,44%	11,41%
Elastizität	50	0.539	0.276	-0.0216	0.337	0.141
MAPLE-Tool		0.5387	0.2693	-0.0213	0.3393	0.1382
Abweichung		0,05%	2,43%	1,39%	0,68%	1,98%

Elastizität	100	0.539	0.271	-0.0214	0.339	0.139
MAPLE-Tool		0.5387	0.2693	-0.0213	0.3393	0.1382
<i>Abweichung</i>		0.05%	0.63%	0,47%	0.88%	0,57%

Tabelle 3.8: Vergleich der durch das MAPLE-Tool berechneten Spannungen in einem symmetrischen Kreuzverbund des Typs  $[0^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$  mit den Referenzwerten der Literatur für fünf verschiedene Länge-zu-Höhe-Verhältnisse

Anhand der Tabelle 3.8 lässt sich erkennen, dass je kleiner das Länge-zu-Höhe-Verhältnis ist, desto genauer die Ergebnisse werden. Die maximale Abweichung der interlaminaren Schubspannungen reduzieren sich von 54,93% bei  $S = 4$  auf 0,88% bei  $S = 100$ . Bei intralaminaren Spannungen sinkt der Abweichung von 59,38% auf 0,63%. Dies lässt sich damit begründen, dass bei der CLT ein dünnes Laminat vorausgesetzt wird. Nur so kann sichergestellt werden, dass die Ermittlung der Spannungen  $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y$  und  $\hat{\tau}_{xy}$  mit präziser Genauigkeit erfolgt.

Andererseits ist noch zu erkennen, dass die berechneten dimensionslosen intra- und interlaminaren Spannungen unabhängig vom Länge-zu-Höhe-Verhältnis sind. Sie behalten die gleichen Werte bei verschiedenen Länge-zu-Höhe-Verhältnissen bei. Dies ist zu erwarten wegen der getroffenen Annahmen der CLT, die ihre Gültigkeit auf dünne Lamine beschränken. Dabei liegt ein ebener Spannungszustand in jeder Einzelschicht des gesamten Laminats vor. Die Schubverzerrungen  $\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  und die Dehnung  $\varepsilon_z$  verschwinden aufgrund der Kinematik der Kirchhoffschen Plattentheorie und der konstanten Dicke während der Verformung. Deshalb hat die Zunahme der Dicke bei CLT keinen Einfluss auf die Schichtspannungen  $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y$  und  $\hat{\tau}_{xy}$ . Folglich erstreckt sich diese Eigenschaft auf die interlaminaren Spannungen  $\hat{\tau}_{xz}, \hat{\tau}_{yz}$  und  $\hat{\sigma}_z$ , da diese aus den Spannungen  $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y$  und  $\hat{\tau}_{xy}$  nach der Integration über die Dicke der lokalen Gleichgewichtsgleichungen berechnet sind.

### 3.5 Praxistauglichkeit

In dieser Arbeit wurde eine Naviersche Platte mit doppelt sinusförmiger Belastung betrachtet. Diese hat den Vorteil, dass die Ansätze der Verschiebungen auch die Form

einer doppelt trigonometrischen Funktion einnehmen. Somit lassen sich die Verschiebungsdifferentialgleichungen mithilfe der Randbedingungen leicht lösen. Ein Beispiel dafür ist eine Dachplatte unter einer Schneestreckenlast. In der Praxis kommen aber solche Belastungen selten vor, insbesondere bei statischen Plattenbiegeproblemen. Laut der Theorie der Navierschen Platten besteht auch die Möglichkeit andere Arten der Belastungen zu verwenden, dazu gehören konstante Flächenlasten, Linienlasten und Punktlasten. Diese unterscheiden sich bei den Ansätzen der Verschiebungen und müssen daher angepasst werden. Darauf wird im nächsten Kapitel eingegangen.

Wie bereits in Kapitel 2.3.2 erläutert wurde, sind nur Lamine deren  $ABD$ -Matrizeinträge entweder  $A_{16} = A_{26} = B_{16} = B_{26} = D_{16} = D_{26} = 0$  oder  $A_{16} = A_{26} = B_{11} = B_{12} = B_{22} = B_{66} = D_{16} = D_{26} = 0$  betragen für die vorliegende Methode einsetzbar. Somit beschränkt sich die Auswahl des Laminataufbaus auf symmetrische und unsymmetrische Kreuzverbunde, orthotrope Einzelschichten sowie unsymmetrische Winkelverbunde. Quasi-isotrope Lamine wie  $[0^\circ, 45^\circ, -45^\circ, 90^\circ]$ , die oft im Flugzeugbau verwendet werden, sind hier ausgeschlossen, da diese keine dieser Voraussetzungen erfüllen können (siehe Seite 20).

Der Vergleich mit den Literaturwerten des vorherigen Unterkapitels zeigt, dass die Genauigkeit der Berechnungen von interlaminaren Spannungen mit dem Zuwachs von der Laminatdicke abnimmt. Es kann kein klar definiertes Länge-zu-Höhe-Verhältnis festgelegt werden, ab dem sich die Ergebnisse verschlechtern, da die Grenze von der gewünschten Genauigkeit abhängt. Es lässt sich aber grob geschätzt sagen, dass ab einem Länge-zu-Höhe-Verhältnis von  $S = a/h = 20$  die Ergebnisse akzeptable sind. Die maximale Abweichung liegt bei einem quadratischen symmetrischen Kreuzverbund der Art  $[0^\circ, 90^\circ]_s$  ungefähr bei 11%. Somit kann die vorliegende Methode in der Praxis hilfreich sein, weil die Vorhersage der interlaminaren Spannungen mit reduziertem Zeit- und Rechenaufwand erfolgt. Vor allem bei dünnen Laminaten erzielt die Methode sehr gute Ergebnisse.

## 4 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Abschnitt werden die gesammelten Erkenntnisse der vorliegenden Arbeit zusammengefasst. Abschließend folgen einige Vorschläge für die Erweiterung der Methode zur Verbesserung der Genauigkeit.

### 4.1 Zusammenfassung

Zur Herleitung der klassischen Laminattheorie wird aufgrund der getroffenen Annahmen davon ausgegangen, dass in jeder Einzelschicht des Laminats ein ebener Spannungszustand vorliegt. Folglich werden Spannungen in Dickenrichtung, auch interlaminare Spannungen genannt, hierbei nicht erfasst. Um diese zu ermitteln, widmet sich die vorliegende Arbeit einer Methode beruhend auf die berechneten Schichtspannungen sowie die Integration über die Dicke von lokalen 3D-Gleichgewichtsgleichungen. Dazu werden Naviersche Lösungen in Betracht gezogen. Sie bieten Ansatzfunktionen der Verschiebungen für allseitig gelenkig gelagerte Platten unter einer Punktlast, Linienlast oder beliebig verteilten Flächenlast. In dieser Arbeit wird eine doppelt sinusförmige Belastung ausgesucht, da dieser Fall in verschiedenen Werken eingehend untersucht wurde und somit ausreichende Referenzwerte zur Auswertung der Methode bereitgestellt werden. Für Naviersche Platten ist zwischen zwei Typen der gelenkigen Lagerung SS1 und SS2 zu unterscheiden. Die beiden stellen Randbedingungen bezüglich der Verschiebungen und Schnittgrößen zur Verfügung. Deren Erfüllung soll mit Ansatzfunktionen der Verschiebungen anhand der Schnittgrößengleichungen der CLT verifiziert werden. Es erfolgt eine Beschränkung des Laminataufbaus; die Erfüllung von SS1-Randbedingungen setzt voraus, dass die Einträge der  $ABD$ -Matrix  $A_{16}, A_{26}, B_{16}, B_{26}, D_{16}$  und  $D_{26}$  null sind. Somit sind nur orthotrope Einzelschichten, symmetrische und unsymmetrische Kreuzverbunde verwendbar. Demgegenüber werden die SS2-Randbedingungen nur erfüllt, wenn die Größen  $A_{16}, A_{26}, B_{11}, B_{12}, B_{22}, B_{66}, D_{16}$  und  $D_{26}$  verschwinden. Dazu gehören orthotrope Einzelschichten, symmetrische Kreuzverbunde und unsymmetrische Winkelverbunde. In dieser Arbeit werden Kreuzverbunde mit den SS1-Randbedingungen und unsymmetrische Winkelverbunde mit den SS2-Randbedingungen untersucht.

Die bereits vorgestellten Verschiebungsdifferentialgleichungen, die aus Scheibengleichgewicht, kondensierten Plattengleichgewicht und Schnittgrößen-gleichungen der CLT stammen, können mit den Ansatzfunktionen der Verschiebungen gelöst werden. Danach lassen sich die Schichtspannungen bestimmen. Diese werden wiederum zur Ermittlung der transversalen Spannungen anhand der Integration über die Dicke von lokalen 3D-Gleichgewichtsgleichungen verwendet.

Zur Automatisierung der Berechnungen und Visualisierung der Ergebnisse wird im Rahmen dieser Bachelorarbeit ein MAPLE-Tool erstellt. Dabei wird die Benutzerfreundlichkeit und erleichterte Bedienung durch interaktive Tabellen in Betracht gezogen, da das Tool für die Lehre am Department F+F konzipiert ist. Zudem wird der Zugriff auf die Dokumentation des Tools durch einen Klick innerhalb der Benutzeroberfläche erleichtert, sodass das Tool unabhängig von der vorliegenden Arbeit verwendet werden kann.

Nach der Erstellung des Tools wird dieses anhand eines isotropen Laminats sowie verfügbarer Werte und Verläufe der Quelle [8] validiert, dann erfolgt die Untersuchung von Platten mit vier unterschiedlichen Laminataufbauten und ein Beispiel mit fünf verschiedenen Laminatdicken. Der Vergleich beruht auf Referenzwerten aus wissenschaftlichen Arbeiten, die bereits eine Analyse des gleichen Lastfalls durchgeführt haben. Es werden aber einige Empfehlungen für die FE-Herangehensweise mit ANSYS vorgeschlagen, weil die doppelt sinusförmige Belastung als Funktion der Koordinaten  $x$  und  $y$  innerhalb der Komponente „Static Structural“ in „ANSYS Workbench“ nicht erstellt werden kann. Demzufolge wird stattdessen Mechanical APDL verwendet. Ferner wird die automatisierte Erstellung von Spannungsverteilung über die Dicke innerhalb dieser Software diskutiert.

Die Untersuchung der Kreuzverbunde und unsymmetrischer Winkelverbunde enthüllt, dass die Verläufe beider Schubspannungen  $\hat{\tau}_{xz}$  und  $\hat{\tau}_{yz}$  erwartungsgemäß parabolisch und stetig sind, weil parabolische Funktionen nach der Integration über die Dicke von den Spannungen  $\hat{\sigma}_x$ ,  $\hat{\sigma}_y$  und  $\hat{\tau}_{xy}$ , die linear zur  $z$ -Koordinate stehen, entstehen. Die Stetigkeit der Verläufe lässt sich mit der Kontinuität der Spannung in der Berührungsfläche der Einzelschichten erklären. Zudem verschwinden die Schubspannungen  $\hat{\tau}_{xz}$  und  $\hat{\tau}_{yz}$  an der Oberfläche entsprechend der Biegetheorie. Der Verlauf von der interlaminaren normalen Spannung  $\hat{\sigma}_z$  hingegen ist kubisch und stetig, da diese sich aus der Integration über die Dicke von den stetigen parabolischen

Schubspannungen  $\hat{t}_{xz}$  und  $\hat{t}_{yz}$  resultiert. Die normale Spannung  $\hat{\sigma}_z$  erreicht ihr Maximum an der Oberseite der Platte, weil diese von oben belastet ist, und verschwindet an der freien Oberfläche.

Die Untersuchung der verschiedenen Laminat zeigt ebenfalls, dass sich die Genauigkeit der Methode je nach Laminattyp, Laminatdicke, Anzahl der Schichten und Länge-zu-Breite-Verhältnis der Platte unterscheidet. Eine umfassende Untersuchung ist in der vorliegenden Arbeit aufgrund der begrenzten Anzahl der Referenzwerte nicht möglich. Dies kann aber mit der FE-Herangehensweise dank der detaillierten Lösung sowie der Möglichkeit, verschiedene Fälle zu berechnen, besser gelingen.

Die Untersuchung von einem symmetrischen Kreuzverbund mit fünf verschiedenen Laminatdicken offenbart, dass die Variation der Dicke keinen Einfluss auf die durch das MAPLE-Tool berechneten Spannungen hat; die Werte bleiben konstant. Darüber hinaus verbessert sich die Genauigkeit der Ergebnisse bezüglich der Referenzwerte mit der Abnahme der Dicke. Dies lässt sich mit den Annahmen der CLT begründen, welche nur für dünne Laminat gültig ist. Demzufolge eignet sich die Methode für Laminat, bei der das Länge-zu-Höhe-Verhältnis kleiner als 20 ist.

Bei der praktischen Anwendung dieser Methode ist zu berücksichtigen, dass je höher die Dicke des Laminats ist, desto ungenauer die Ergebnisse werden. Zudem kommen doppelt trigonometrische Belastungsfunktionen selten zum Einsatz, weswegen empfohlen wird, die präsentierte Methode für anderen Belastungstypen, wie z.B. konstante Flächenlasten zu erweitern. Dies und die Weiterentwicklung der Methode zur Verbesserung der Genauigkeit erfolgt im nächsten Unterkapitel.

## 4.2 Ausblick

Wie bereits erwähnt, ist es für eine Naviersche Platte möglich, andere Lasten auszuwählen. Dabei müssen die Koeffizienten der Belastung angepasst werden. Weitere Details sind in der Quelle [8, S. 248–249] zu entnehmen.

Die klassische Laminattheorie ist aufgrund der getroffenen Annahmen der Seite 10 auf dünne Laminat beschränkt. Es besteht aber die Möglichkeit diese Annahmen zu lockern, indem die sogenannte Schubdeformationstheorie erster Ordnung (FSDT, First-order Shear Deformation Theory) verwendet wird. Dabei wird im Vergleich zur

CLT auf die Normalenhypothese verzichtet. Eine Gerade, die vor der Verformung normal zur Laminatmittelebene ist, bleibt nach der Verformung ebenfalls eine Gerade, muss aber nicht zwingend normal zur verformten Laminatmittelebene stehen. Folglich erhöht sich die Anzahl der Freiheitsgrade von drei bei CLT auf fünf bei FSDT; gemeint sind die Verschiebungen der Laminatmittelebene  $u_0, v_0, w_0$  und zusätzlich die Biegewinkel  $\psi_x, \psi_y$ . Darüber hinaus verschwinden die transversalen Schubverzerrungen  $\gamma_{xz}$  und  $\gamma_{yz}$  im Gegensatz zur CLT nicht. Es resultiert für jede Schicht  $k$  neben den ebenen Spannungen  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  auch die transversalen Schubspannungen  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$ :

$$\begin{pmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix}_k \begin{pmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} \quad (3-1)$$

$\bar{C}_{44}$  und  $\bar{C}_{55}$  werden als Schubsteifigkeiten und  $\bar{C}_{45}$  als Schubkopplungssteifigkeit bezeichnet, sie lassen sich wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{44} &= C_{44} \cos^2(\theta) + C_{55} \sin^2(\theta) \\ \bar{C}_{45} &= (C_{55} - C_{44}) \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \bar{C}_{55} &= C_{44} \sin^2(\theta) + C_{55} \cos^2(\theta) \end{aligned} \quad (3-2)$$

Die Schubverzerrungen  $\gamma_{xz}$  und  $\gamma_{yz}$  sind folgendermaßen definiert:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x \end{pmatrix} \quad (3-3)$$

Die Integration über die Dicke von Gleichungen der Formel (3-1) ergibt die Querkräfte  $Q_x$  und  $Q_y$ :

$$\begin{pmatrix} Q_y \\ Q_x \end{pmatrix}_k = \sum_{k=1}^{k=n} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix}_k \begin{pmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} dz = \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix}_k \begin{pmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} \quad (3-4)$$

Experimente zeigen allerdings, dass die Einträge  $A_{44}, A_{45}, A_{55}$  größer als in der Realität sind. Deswegen wird oft ein Schubkorrekturfaktor eingeführt, um sie zu reduzieren.

Laut der Formel (3-3) sind die Schubverzerrungen über die Dicke konstant. Folglich sind die beiden transversalen Schubspannungen  $\tau_{xz}$  und  $\tau_{yz}$  innerhalb der Laminatschicht auch konstant und weisen in den Schichtgrenzen wegen

unterschiedlichen Steifigkeiten Sprünge auf. Dies widerspricht der Biegetheorie, welche besagt, dass die transversalen Schubspannungen einen parabolischen Verlauf in Dickenrichtung haben und an den freien Oberflächen verschwinden.

[8, S. 134], [7, S. 239–242]

Dieses Problem wird mit der in dieser Arbeit vorgestellten Methode gelöst. Hierbei erfolgt die Ermittlung von den transversalen Spannungen  $\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z$  wie bei CLT aus den lokalen Gleichgewichtsgleichungen nach Formeln (1-6), (1-7) und (1-8). Die Quelle [8, S. 377–406] bietet einen guten Einstieg dazu. Weitere Details über FSDT sind in den Quellen [7, S. 239–242], [8, S. 132–142] zu finden.

Ein Beispiel für den Vergleich der Methode mit CLT und die Erweiterte mit FSDT lässt sich mit der Abbildung 4.1 illustrieren. Diese zeigt die Spannungsverteilung von der normierten transversalen Schubspannung  $\hat{\tau}_{yz}$  für ein sehr dickes quadratisches Laminat  $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$  mit  $S = 4$  unter einer doppelt sinusförmigen Belastung an:

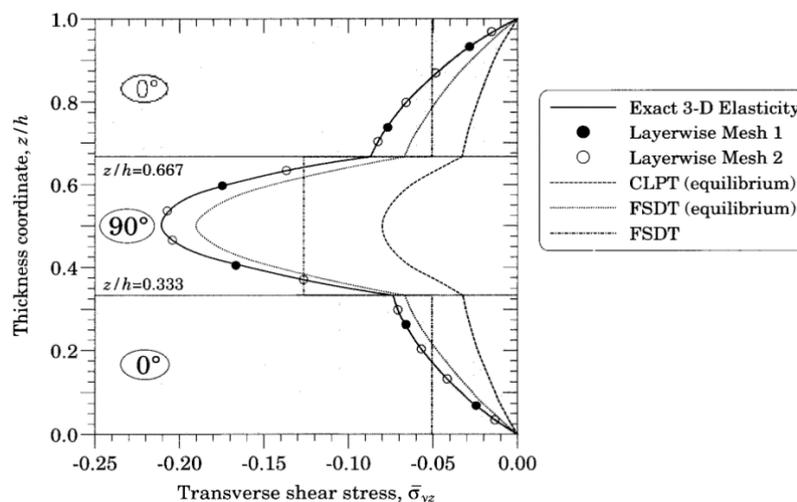


Abbildung 4.1: Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis  $z/h$  von normierter interlaminarer Schubspannung  $\hat{\tau}_{yz}$  an allen Punkten mit den Koordinaten  $x = 1.105662(a/2)$ ,  $y = 1.894338(a/2)$  für das Laminat  $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$  [8, S. 752]

Wie erwartet, liefert die erweiterte Methode nach FSDT genauere Ergebnisse als jene mit CLT.

## 5 Abbildungsverzeichnis

Abbildung 2.1: Spannungen am infinitesimalen Volumenelement .....	4
Abbildung 2.2: Lamineinzelschichten und Nomenklatur .....	8
Abbildung 2.3: Schnitt durch ein Laminat .....	9
Abbildung 2.4: Kinematik eines Laminats nach CLT .....	10
Abbildung 2.5: Verformungszustände eines Laminats bezogen auf die Laminatmittelebene .....	13
Abbildung 2.6: Faserorientierungswinkel bezogen auf das lokale 123- und globale $x$ - $y$ - $z$ -KOS.....	14
Abbildung 2.7: Schnittkräfte und Schnittmomente eines Laminats .....	15
Abbildung 2.8: infinitesimales Schnittelement eines Laminats.....	22
Abbildung 2.9: Allseitig gelenkig gelagerte Platte unter der Flächenlast $p(x, y)$ ...	25
Abbildung 2.10: zwei Typen der gelenkigen Lagerung SS1 und SS2 einer Navierschen Platte .....	26
Abbildung 2.11: Kontinuität der interlaminaren Spannungen in den Interfaces zwischen den Einzelschichten im Laminatschnitt .....	34
Abbildung 3.1: Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis $z/h$ von intralaminaren Spannungen für den isotropen symmetrischen Kreuzverbund der Art $[0^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$ .....	42
Abbildung 3.2: Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis $z/h$ von interlaminaren Spannungen für den isotropen symmetrischen Kreuzverbund der Art $[0^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$ .....	42
Abbildung 3.3: erste Tabelle des Tools nach dem Öffnen des gesamten Tools für die Präsentation der Eckdaten sowie um den Zugriff auf das Tool und die Dokumentation zu ermöglichen.....	46
Abbildung 3.4: zwei Methoden zur Zurücksetzung der Parameter des Tools .....	47
Abbildung 3.5: Fehlermeldung im Fall überlappender zugewiesener Parameter, wenn eine vorher bereits bearbeitete Tabelle angepasst wird, ohne die Zurücksetzung der Parameter durchzuführen.....	48
Abbildung 3.6: erste Tabelle des Tools zum Eintragen der Materialwerte .....	49
Abbildung 3.7: Eintragen der Faserwinkel und Dimensionen des untersuchten Laminats mithilfe der zweiten Tabelle des Tools .....	50

Abbildung 3.8: dritte Tabelle des Tools zur Berechnung der reduzierten Steifigkeits- sowie $ABD$ -Matrix.....	51
Abbildung 3.9: vierte Tabelle des Tools zum Eintragen des Belastungskoeffizienten sowie zur Bestimmung der Verschiebungen und Verzerrungen, Krümmungen sowie der Verdrillung .....	52
Abbildung 3.10: Ausschnitt aus der fünften Tabelle des Tools zur Eingabe der Koordinaten eines Punkts, der Ermittlung von intralaminaren Spannungen sowie der Darstellung der Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis $z/h$ .....	53
Abbildung 3.11: Ausschnitt aus der fünften Tabelle des Tools zur Eingabe der Koordinaten eines Punkts, der Bestimmung der interlaminaren Spannungen sowie der Darstellung der Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis $z/h$ .....	54
Abbildung 3.12: Schema für die Spannungsanalyse von Faserverbundplatten in „ANSYS Workbench“ .....	55
Abbildung 3.13: Möglichkeit der Erstellung einer Last als Funktion in der Komponente „Static Structural“.....	56
Abbildung 3.14: Schritte zur Erstellung der doppelt sinusförmigen Belastungsfunktion in Mechanical APDL .....	57
Abbildung 3.15: Auswahl der Belastungsfunktion im Schritt der Definition der Lasten.....	57
Abbildung 3.16: Beispiel zur Erstellung von Spannungsverteilung über die Dicke in einem Solid-Element mit „Path Operations“ .....	58
Abbildung 3.17: Import des APDL-Modells in „ANSYS Workbench“ und Fehlschlagen der Verknüpfung mit „ACP (Post)“ .....	59
Abbildung 3.18: Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis $z/h$ von normierten normalen Spannungen $\sigma_x, \sigma_y$ an den Punkten mit den Koordinaten $x = a/2, y = b/2$ und der Schubspannung $\tau_{xy}$ an den Punkten mit den Koordinaten $x = 0, y = 0$ für das Laminat $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$	64
Abbildung 3.19: Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis $z/h$ von normierter interlaminarer Schubspannung $\tau_{xz}$ an allen Punkten mit den Koordinaten $x = 0, y = b/2$ für das Laminat $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$ .....	65
Abbildung 3.20: Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis $z/h$ von normierter interlaminarer Schubspannung $\tau_{yz}$ an allen Punkten mit den Koordinaten $x = a/2, y = 0$ für das Laminat $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$ .....	65
Abbildung 3.21: Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis $z/h$ von normierter, interlaminarer, normaler Spannung $\sigma_z$ an allen Punkten mit den Koordinaten $x = a/2, y = b/2$ für das Laminat $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$ .....	66

Abbildung 3.22: Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis $z/h$ von normierten normalen Spannungen $\sigma_x, \sigma_y$ an den Punkten mit den Koordinaten $x = a/2, y = b/2$ und der Schubspannung $\tau_{xy}$ an den Punkten mit den Koordinaten $x = 0, y = 0$ für das Laminat $[0^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$ .....	68
Abbildung 3.23: Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis $z/h$ von normierter interlaminarer Schubspannung $\tau_{xz}$ an allen Punkten mit den Koordinaten $x = 0, y = b/2$ für das Laminat $[0^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$ .....	68
Abbildung 3.24: Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis $z/h$ von normierter interlaminarer Schubspannung $\tau_{yz}$ an allen Punkten mit den Koordinaten $x = a/2, y = 0$ für das Laminat $[0^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$ .....	69
Abbildung 3.25: Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis $z/h$ von normierter, interlaminarer, normaler Spannung $\sigma_z$ über das Dickenverhältnis $z/h$ an allen Punkten mit den Koordinaten $x = a/2, y = b/2$ für das Laminat $[0^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$ .....	69
Abbildung 3.26: Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis $z/h$ von normierten normalen Spannungen $\sigma_x, \sigma_y$ und der Schubspannung $\tau_{xy}$ an den Punkten mit den Koordinaten $x = a/2, y = b/2$ für das Laminat $[-30^\circ, 30^\circ]$ .....	71
Abbildung 3.27: Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis $z/h$ von normierter interlaminarer Schubspannung $\tau_{xz}$ an allen Punkten mit den Koordinaten $x = 0, y = b/2$ für das Laminat $[-30^\circ, 30^\circ]$ .....	72
Abbildung 3.28: Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis $z/h$ von normierter interlaminarer Schubspannung $\tau_{yz}$ an allen Punkten mit den Koordinaten $x = a/2, y = 0$ für das Laminat $[-30^\circ, 30^\circ]$ .....	72
Abbildung 3.29: Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis $z/h$ von normierter, interlaminarer, normaler Spannung $\sigma_z$ über das Dickenverhältnis $z/h$ an allen Punkten mit den Koordinaten $x = a/2, y = b/2$ für das Laminat $[-30^\circ, 30^\circ]$ .....	73
Abbildung 3.30: Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis $z/h$ von normierten normalen Spannungen $\sigma_x, \sigma_y$ und der Schubspannung $\tau_{xy}$ an den Punkten mit den Koordinaten $x = a/2, y = b/2$ für das Laminat $[\mp 45^\circ, \mp 45^\circ]$ .....	74
Abbildung 3.31: Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis $z/h$ von normierter interlaminarer Schubspannung $\tau_{xz}$ an allen Punkten mit den Koordinaten $x = 0, y = b/2$ für das Laminat $[\mp 45^\circ, \mp 45^\circ]$ .....	75
Abbildung 3.32: Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis $z/h$ von normierter interlaminarer Schubspannung $\tau_{yz}$ an allen Punkten mit den Koordinaten $x = a/2, y = 0$ für das Laminat $[\mp 45^\circ, \mp 45^\circ]$ .....	75

Abbildung 3.33: Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis  $z/h$  von normierter, interlaminarer, normaler Spannung  $\sigma_z$  an allen Punkten mit den Koordinaten  $x = a/2, y = b/2$  für das Laminat  $[\mp 45^\circ, \mp 45^\circ]$ ..... 76

Abbildung 4.1: Spannungsverteilung über das Dickenverhältnis  $z/h$  von normierter interlaminarer Schubspannung  $\tau_{yz}$  an allen Punkten mit den Koordinaten  $x = 1.105662(a/2), y = 1.894338(a/2)$  für das Laminat  $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$ ..... 84

## 6 Tabellenverzeichnis

Tabelle 3.1: ausgewählte Materialwerte der untersuchten Laminate .....	43
Tabelle 3.2: Validierung der Berechnungen mithilfe der Quelle [8].....	45
Tabelle 3.3: Vergleich der durch das MAPLE-Tool ermittelten Spannungen in einem unsymmetrischen Kreuzverbund der Art $[0^\circ, 90^\circ]$ mit Referenzwerten der Literatur .....	61
Tabelle 3.4: Vergleich der durch das MAPLE-Tool ermittelten Spannungen in einem symmetrischen Kreuzverbund der Art $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$ mit Referenzwerten der Literatur .....	64
Tabelle 3.5: Vergleich der durch das MAPLE-Tool berechneten Spannungen in einem symmetrischen Kreuzverbund des Typs $[0^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$ mit den Referenzwerten der Literatur .....	67
Tabelle 3.6: Vergleich der durch das MAPLE-Tool berechneten Spannungen in einem unsymmetrischen Winkelverbund des Typs $[-30^\circ, 30^\circ]$ mit den Referenzwerten der Literatur .....	71
Tabelle 3.7: Vergleich der durch das MAPLE-Tool berechneten Spannungen in einem unsymmetrischen Winkelverbund des Typs $[\mp 45^\circ, \mp 45^\circ]$ mit den Referenzwerten der Literatur .....	74
Tabelle 3.8: Vergleich der durch das MAPLE-Tool berechneten Spannungen in einem symmetrischen Kreuzverbund des Typs $[0^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$ mit den Referenzwerten der Literatur für fünf verschiedene Länge-zu-Höhe-Verhältnisse .....	78

## 7 Literaturverzeichnis

- [1] MITTELSTEDT, Christian: *Über einige Aspekte der Berechnung von Bauteilen in Composite-Bauweise* (Seminar des Konstruktiven Ingenieurbaus). Cottbus. URL [https://www-docs.b-tu.de/fg-statik-dynamik/public/foerdereverein/ski/Vortrag\\_Mittelstedt.pdf](https://www-docs.b-tu.de/fg-statik-dynamik/public/foerdereverein/ski/Vortrag_Mittelstedt.pdf) – Überprüfungsdatum 2024-03-01
- [2] SCHÜRMMANN, Helmut: *Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden*. 2., bearbeitete und erweiterte Auflage. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2007 (VDI-Buch)
- [3] MITTELSTEDT, Christian: *Flächentragwerke : Scheiben, Platten, Schalen, geschichtete Strukturen*. Berlin : Springer Vieweg, 2022
- [4] LINKE, Markus ; NAST, Eckart: *Festigkeitslehre für den Leichtbau : Ein Lehrbuch zur Technischen Mechanik*. Berlin, Heidelberg : Springer Vieweg, 2015 (Lehrbuch)
- [5] NAST, Eckart: *Faserverbundtechnologie (FVT) SoSe 2022*. Hamburg, Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg. Skript zur Vorlesung. 2022 – Überprüfungsdatum 2024-03-01
- [6] JONES, Robert M.: *Mechanics of composite materials 11*. 2nd. Philadelphia : Taylor and Francis, 1999
- [7] MITTELSTEDT, Christian ; BECKER, Wilfried: *Strukturmechanik ebener Laminate*. 1. Auflage. Darmstadt : Studienbereich Mechanik, Technische Universität Darmstadt, 2016
- [8] REDDY, Junuthula Narasimha: *Mechanics of laminated composite plates and shells : Theory and analysis*. 2nd ed. Boca Raton, Fla. : CRC Press, 2004
- [9] KOSLOSKI, Jim: *ACP (ANSYS Composite Prep/Post)*. 2016. URL [https://www.researchgate.net/profile/Sagar\\_Pawar4/post/how\\_can\\_i\\_simulate\\_calculate\\_the\\_mechanical\\_properties\\_of\\_new\\_developed\\_composite\\_using\\_ANSYS\\_software/attachment/5b62f21f4cde265cb65364e4/AS%3A655148967788546%401533211094569/download/Seminar\\_ACP\\_Data+SagarPhD.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Sagar_Pawar4/post/how_can_i_simulate_calculate_the_mechanical_properties_of_new_developed_composite_using_ANSYS_software/attachment/5b62f21f4cde265cb65364e4/AS%3A655148967788546%401533211094569/download/Seminar_ACP_Data+SagarPhD.pdf)– Überprüfungsdatum 2024-03-01
- [10] MITCHELL, Richard: *APDL: The Language of Simulation : ANSYS BLOG*. URL <https://www.ansys.com/blog/what-is-apdl> – Überprüfungsdatum 2024-03-01
- [11] PAGANO, N. J.: *Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates*. In: *Journal of Composite Materials* 4 (1970), Nr. 1, S. 20–34 – Überprüfungsdatum 2024-03-01
- [12] REN, J. G.: *A new theory of laminated plate*. In: *Composites Science and Technology* 26 (1986), Nr. 3, S. 225–239

- [13] KANT, T. ; MANJUNATHA, B. S.: *On accurate estimation of transverse stresses in multilayer laminates*. In: *Computers & Structures* 50 (1994), Nr. 3, S. 351–365
- [14] HE, Ji-Fan ; CHOU, Mon ; ZHANG, Xiang: *Bending analysis of laminated plates using a refined shear deformation theory*. In: *Composite Structures* 24 (1993), Nr. 2, S. 125–138
- [15] OWEN, D.R.J. ; LI, Z. H.: *A refined analysis of laminated plates by finite element displacement methods—I. Fundamentals and static analysis*. In: *Computers & Structures* 26 (1987), Nr. 6, S. 907–914
- [16] PHAN, Nam Dinh: *Linear analysis of laminated composite plates using a higher-order shear deformation theory*. Blacksburg, Virginia Polytechnic Institute and State University. Masterarbeit. 1984 – Überprüfungsdatum 2024-01-01
- [17] SAVOIA, M. ; REDDY, J. N.: *A Variational Approach to Three-Dimensional Elasticity Solutions of Laminated Composite Plates*. In: *Journal of Applied Mechanics* 59 (1992), 2S, S166-S175
- [18] HE, Ji-Fan ; ZHANG, Zhi-Zhou: *Bending analysis of antisymmetric angle-ply laminated plates including transverse shear effects*. In: *Composite Structures* 34 (1996), Nr. 4, S. 437–444
- [19] RAY, M. C.: *Three-dimensional exact elasticity solutions for antisymmetric angle-ply laminated composite plates*. In: *International Journal of Mechanics and Materials in Design* 17 (2021), Nr. 4, S. 767–782

## 8 Eigenständigkeitserklärung

### Erklärung zur selbstständigen Bearbeitung einer Abschlussarbeit

Gemäß der Allgemeinen Prüfungs- und Studienordnung ist zusammen mit der Abschlussarbeit eine schriftliche Erklärung abzugeben, in der der Studierende bestätigt, dass die Abschlussarbeit „– bei einer Gruppenarbeit die entsprechend gekennzeichneten Teile der Arbeit [(§ 18 Abs. 1 APSO-TI-BM bzw. § 21 Abs. 1 APSO-INGI)] – ohne fremde Hilfe selbständig verfasst und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt wurden. Wörtlich oder dem Sinn nach aus anderen Werken entnommene Stellen sind unter Angabe der Quellen kenntlich zu machen.“

Quelle: § 16 Abs. 5 APSO-TI-BM bzw. § 15 Abs. 6 APSO-INGI

Dieses Blatt, mit der folgenden Erklärung, ist nach Fertigstellung der Abschlussarbeit durch den Studierenden auszufüllen und jeweils mit Originalunterschrift als letztes Blatt in das Prüfungsexemplar der Abschlussarbeit einzubinden.

Eine unrichtig abgegebene Erklärung kann -auch nachträglich- zur Ungültigkeit des Studienabschlusses führen.

<b><u>Erklärung zur selbstständigen Bearbeitung der Arbeit</u></b>		
Hiermit versichere ich,		
Name:	Baouddi	_____
Vorname:	Abdellatif	_____
dass ich die vorliegende Bachelorarbeit <input checked="" type="checkbox"/> bzw. bei einer Gruppenarbeit die entsprechend gekennzeichneten Teile der Arbeit – mit dem Thema: Ermittlung von Transversalspannungen bei Laminaten mittels CLT		
ohne fremde Hilfe selbständig verfasst und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Wörtlich oder dem Sinn nach aus anderen Werken entnommene Stellen sind unter Angabe der Quellen kenntlich gemacht.		
<i>- die folgende Aussage ist bei Gruppenarbeiten auszufüllen und entfällt bei Einzelarbeiten -</i>		
Die Kennzeichnung der von mir erstellten und verantworteten Teile der -bitte auswählen- <input checked="" type="checkbox"/> ist erfolgt durch:		
Hamburg	12.03.2024	_____
Ort	Datum	Unterschrift im Original