



Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg  
*Hamburg University of Applied Sciences*

# Masterthesis

Finn Krüger

## **Statistisches Toleranzdesign mittels ausgewählter Bauteile im Maschinenbau**

*Fakultät Technik und Informatik  
Department Maschinenbau und Produktion*

*Faculty of Engineering and Computer Science  
Department of Mechanical Engineering and  
Production Management*



**Finn Krüger**

**Statistisches Toleranzdesign mittels  
ausgewählter Bauteile im Maschinenbau**

Masterthesis eingereicht im Rahmen der Masterprüfung

im Studiengang Konstruktionstechnik und Produktentwicklung im Maschinenbau  
am Department Maschinenbau und Produktion  
der Fakultät Technik und Informatik  
der Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg

Erstprüfer: Prof. Dr. Andreas Meyer-Eschenbach  
Zweitprüfer: Prof. Dr. Mauricio de Campos Porath

Abgabedatum: 24.02.2024



# **Zusammenfassung**

**Finn Krüger**

## **Thema der Masterthesis**

Statistisches Toleranzdesign mittels ausgewählter Bauteile im Maschinenbau

## **Stichworte**

Toleranzen, Maßketten, Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Faltung, Statistisches Toleranzdesign, Arithmetisches Toleranzdesign, Statistische Tolerierung, Arithmetische Tolerierung, Toleranzdesign, Tolerierung, Toleranzoptimierung, Beitragsleisteranalyse, Prozessfähigkeit, DIN 7186-1

## **Kurzzusammenfassung**

Die Produktionskosten eines Produktes sind in hohem Maße abhängig von der Wahl der Toleranzen. Zu große Toleranzen verursachen hohe Kosten durch Ausschuss und zu kleine Toleranzen verursachen hohe Fertigungskosten. Die Wahl von Einzelmaß-Toleranzen bestimmt sich hauptsächlich durch die erlaubten Schließmaß-Toleranzen eines Produktes. Dieser Zusammenhang wird über Maßketten festgelegt. Zur Berechnung von Maßketten wurde für lange Zeit die arithmetische Tolerierung eingesetzt. In den letzten Jahrzehnten setzte sich zusätzlich zunehmend die statistische Tolerierung durch. Die statistische Tolerierung ist aufwändiger in ihrer Durchführung und daher weniger praxisgerecht. Diese Arbeit hat das Ziel, die Praxisgerechtigkeit dieses Verfahrens zu erhöhen, indem Quellen mit anschaulichen Erklärungen und Beispielen zusammengetragen werden und auf dieser Basis eine beispielorientierte Einführung in die statistische Tolerierung gegeben wird. Es werden die Annahmen und Voraussetzungen der arithmetischen und statistischen Tolerierung untersucht, der Unterschied zwischen beiden Verfahren quantifiziert und Entscheidungshilfen für die Wahl eines geeigneten Tolerierungsverfahren gegeben.

**Finn Krüger**

## **Title of the bachelor thesis**

Statistical Tolerance Design using Selected Components in Mechanical Engineering

## **Keywords**

Tolerances, Dimensional Chains, Probability Distributions, Convolution, Statistical Tolerance Design, Arithmetic Tolerance Design, Statistical Tolerancing, Arithmetic Tolerancing, Tolerance Design, Tolerancing, Tolerance Optimization, Contributor Analysis, Process Capability, DIN 7186-1

## **Abstract**

The production costs of a product are highly dependent on the choice of the tolerances. Tolerances that are too large cause high costs due to rejects and tolerances that are too small cause high manufacturing costs. The choice of tolerances for a dimension is mainly determined by the allowed closing dimension tolerances of a product. This relationship is defined by dimensional chains. For a long time, arithmetic tolerancing was used to calculate dimensional chains. In recent decades, statistical tolerancing has become increasingly popular. Statistical tolerancing is more complex to implement and therefore less practical. The aim of this work is to increase the practical suitability of statistical tolerancing by compiling sources with clear explanations and examples and providing an example-oriented introduction to statistical tolerancing on this basis. The assumptions and prerequisites of arithmetic and statistical tolerancing are examined, the difference between the two methods is quantified and decision-making aids for the selection of the most suitable tolerancing method are provided.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Tabellenverzeichnis</b> .....	<b>VI</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b> .....	<b>VII</b>
<b>1 Einleitung</b> .....	<b>1</b>
1.1 Einordnung .....	1
1.2 Zielsetzung der Thesis.....	3
1.3 Aufbau der Thesis.....	4
<b>2 Literaturrecherche</b> .....	<b>5</b>
2.1 Methodik .....	5
2.2 Bewertung der Literaturquellen.....	5
2.3 Ergebnisse .....	9
<b>3 Grundlagen der Statistik und Tolerierung</b> .....	<b>10</b>
3.1 Grundlagen der Statistik .....	10
3.1.1 Parameter von Stichproben .....	10
3.1.2 Parameter der Normalverteilung .....	11
3.1.3 Linearkombinationen mehrerer Wahrscheinlichkeitsverteilungen: .....	14
3.2 Grundlagen der Tolerierung.....	15
3.2.1 Darstellungsarten von Toleranzen .....	15
3.2.2 Arithmetische Tolerierung .....	19
<b>4 Grundlagen der statistischen Tolerierung an Praxisbeispielen</b> .....	<b>27</b>
4.1 Geschliffene Welle und Nabe mit rechteckverteilten Istmaßen .....	27
4.2 Welle und Nabe mit jeweils rechteckverteilten Istmaßen .....	30
4.3 Welle und Nabe mit jeweils normalverteilten Istmaßen .....	33
4.4 Vergleich zwischen rechteck- und normalverteilten Istmaßen.....	39
<b>5 Erweiterte statistische Tolerierung an Praxisbeispielen</b> .....	<b>44</b>
5.1 Praxisgerechte Verallgemeinerung des Rechenwegs .....	44
5.2 KFZ-Getriebe mit linearer Maßkette .....	47
5.2.1 Statistische Schließmaßberechnung.....	49
5.2.2 Optimierung der Toleranzen durch Angleichung.....	54
5.3 Scharnier mit unstetiger Schließmaßkette .....	58
5.3.1 Arithmetische Schließmaßberechnung .....	60
5.3.2 Statistische Schließmaßbestimmung mittels Monte-Carlo-Simulation .....	62
<b>6 Empfehlungen für die Praxis</b> .....	<b>66</b>
6.1 Faustformeln .....	66
6.2 Einflussfaktoren auf die Produktionskosten .....	70
6.3 Einsatzbereich der statistischen Tolerierung .....	75
6.4 Wahl eines geeigneten Berechnungsverfahrens .....	76
<b>7 Schlussbetrachtungen</b> .....	<b>80</b>
7.1 Arbeitsergebnisse .....	80
7.2 Zusammenfassung .....	82
7.3 Ausblick .....	84
<b>Literaturverzeichnis</b> .....	<b>86</b>
<b>Anhang A: Weitere untersuchte Literatur</b> .....	<b>A</b>

## Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Flächenanteile der Normalverteilung .....	14
Tabelle 2: Begriffe der Tolerierung .....	18
Tabelle 3: Darstellungsarten von Toleranzen, Übersicht .....	19
Tabelle 4: Maßübersicht für Beispiel 3.2.2, Kleinst- und Größtmaß .....	19
Tabelle 5: Maßübersicht für Beispiel 3.2.2, symmetrische Toleranzen .....	25
Tabelle 6: Maßübersicht für Beispiel 4.1.....	27
Tabelle 7: Maßübersicht für Beispiel 4.2.....	31
Tabelle 8: Maßübersicht für Beispiel 4.3.....	33
Tabelle 9: Mittelwerte und Standardabweichungen für Beispiel 4.3 .....	35
Tabelle 10: Vergleich der arithmetischen und statistischen Schließmaßtoleranz .....	40
Tabelle 11: Erweiterte Toleranzen für die Welle-Nabe-Verbindung.....	41
Tabelle 12: Iterative Wahl der neuen Toleranzfelder für Welle und Nabe .....	42
Tabelle 13: Umrechnungsvorschriften für Toleranz und Standardabweichung .....	45
Tabelle 14: Maßübersicht für Beispiel 5.2.....	48
Tabelle 15: Mittelwerte und Standardabweichungen für Beispiel 5.2 .....	50
Tabelle 16: Schließmaße für Beispiel 5.2 .....	51
Tabelle 17: Erweiterte Toleranzen und relative Kosten für Beispiel 5.2 .....	53
Tabelle 18: Optimierte erweiterte Toleranzen für Beispiel 5.2 .....	56
Tabelle 19: Maßübersicht für Beispiel 5.3.....	59
Tabelle 20: Erweiterungsfaktoren bei Wechsel des Tolerierungsverfahrens .....	69
Tabelle 21: Praxisempfehlungen zur Kostenreduktion .....	74
Tabelle 22: Eigenschaften der Berechnungsverfahren .....	77

## Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Histogramm einer Stichprobe des Durchmessers einer h6-Welle .....	10
Abbildung 2: Normalverteilung aus Histogramm .....	12
Abbildung 3: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Standardnormalverteilung .....	13
Abbildung 4: Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung .....	13
Abbildung 5: Maßplan mit Begriffen der Tolerierung, Toleranzfeldbreite rot markiert .....	16
Abbildung 6: Istmaß-Diagramm, schematisch .....	20
Abbildung 7: Istmaß-Diagramm für arithmetische Tolerierung, Schritt 1 .....	21
Abbildung 8: Maßplan für Welle-Nabe-Verbindung .....	22
Abbildung 9: Istmaß-Diagramm für arithmetische Tolerierung, Schritt 2 .....	23
Abbildung 10: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(I)$ bei rechteckverteilten Istmaßen $I$ ..	28
Abbildung 11: Istmaß-Diagramm für Beispiel 4.1, Schritt 1 .....	28
Abbildung 12: Istmaß-Diagramm für Beispiel 4.1, Schritt 2 .....	29
Abbildung 13: Istmaß-Diagramm für Beispiel 4.2 .....	31
Abbildung 14: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(I)$ bei normalverteilten Istmaßen $I$ ...	34
Abbildung 15: Istmaß-Diagramm für Beispiel 4.3 .....	36
Abbildung 16: Vergleich von Abbildung 13 und Abbildung 15 .....	39
Abbildung 17: Der „Pythagoras der Toleranzen“ .....	40
Abbildung 18: Maßkette für Beispiel 5.2 .....	47
Abbildung 19: Maßplan für Beispiel 5.2 .....	48
Abbildung 20: Schließmaßtoleranzen für Beispiel 5.2 .....	51
Abbildung 21: Beitragsleister für Beispiel 5.2, Ausgangssituation .....	54
Abbildung 22: Beitragsleister für Beispiel 5.2, mit optimierten Toleranzen .....	57
Abbildung 23: Maßkette für Beispiel 5.3 .....	58
Abbildung 24: Mögliche Montageszenarien für Beispiel 5.3 .....	59
Abbildung 25: Maßplan für Beispiel 5.3 .....	60
Abbildung 26: Histogramm des Schließmaßes für Beispiel 5.3 .....	63
Abbildung 27: Vergleich der Schließmaßtoleranzen für Beispiel 5.3 .....	65
Abbildung 28: Schließmaßtoleranz über Länge der Maßkette .....	68
Abbildung 29: Flussdiagramm zur Wahl des Berechnungsverfahrens .....	79



# 1 Einleitung

## 1.1 Einordnung

Toleranzen sind heutzutage im Maschinenbau allgegenwärtig und ein unverzichtbarer Bestandteil des Produktentwicklungsprozesses. Vor ihrer Einführung zu Beginn des 20. Jahrhunderts konnten die Einzelteile eines Produktes häufig schon in Serie gefertigt werden. Damit aber ein Produkt montiert werden konnte und seine Funktion korrekt erfüllte, mussten die Einzelteile zumeist in Handarbeit manuell angepasst werden. Dies bedurfte gut geschulten Handwerkern und war ein sehr zeitintensiver Prozess, wodurch eine effektive Serienfertigung verhindert wurde [1].

Mit der Einführung des Prinzips der Tolerierung in den Entwicklungsprozess fand ein wesentlicher Philosophiewechsel in der Industrie statt. Ziel war es nun, dass die Einzelteile eines Produktes derart identisch sein sollten, dass sie stets gegeneinander ausgetauscht werden konnten. Da in der Praxis keine zwei Einzelteile exakt identisch sein konnten, war es notwendig, jedes Einzelmaß mit einem Toleranzbereich zu versehen, welcher den Bereich angab, in dem ein bestimmtes Istmaß des Bauteils liegen durfte. Zwei unterschiedliche Einzelteile, bei denen sämtliche Istmaße innerhalb ihrer Toleranzen lagen, sollten somit als effektiv identisch behandelt werden können. Da jedoch die tatsächlichen Istmaße beider Bauteile immer noch voneinander abweichen konnten, war ein Verfahren zur Toleranzauslegung erforderlich, welches mit dieser durch die Einführung der Toleranzen geschaffenen Unsicherheit umgehen konnte.

Dies war die Geburtsstunde der arithmetischen Tolerierung. Durch sie können die Toleranzen der Einzelmaße derart ausgelegt werden, dass eine erfolgreiche Montage eines Produktes keiner Nacharbeit bedarf und das montierte Produkt stets vollständig seine Funktion erfüllen kann. Durch die vollständige Austauschbarkeit der Einzelteile wird zudem eine sehr gute Reparierbarkeit erzielt, da jedes Einzelteil gegen jedes andere gleich tolerierte Einzelteil austauschbar ist und so auch hier nie Nacharbeit gefordert ist.

Diese erheblichen Vorteile führten dazu, dass sich die Nutzung der arithmetischen Tolerierung im 20. Jahrhundert schnell zum Industriestandard entwickelte. Erkauft werden sich diese Vorteile durch die Notwendigkeit enger Toleranzen. Durch den Grundsatz der unbedingten Austauschbarkeit dürfen auch bei Aufeinandertreffen der ungünstigsten Kombination von in der Toleranz liegenden Istmaßen keine Probleme in Montage beziehungsweise Funktion auftreten. Dies begrenzt die maximale Breite der Toleranzen der Einzelmaße stark und verursacht dadurch einen verhältnismäßig hohen Fertigungsaufwand und damit Kosten.

In den letzten 30 Jahren hat sich darum vermehrt das alternative Verfahren der statistischen Tolerierung<sup>1</sup> durchgesetzt [2, S. 1]. Ziel war eine Verringerung des Fertigungsaufwandes und damit der Fertigungskosten durch eine Aufweitung der Toleranzen bei bestmöglicher Beibehaltung der Anforderungen an das Produkt. Die Lösung dieses scheinbaren Widerspruchs steckt in der Überlegung, dass die Enge der Einzelmaß-Toleranzen bei der arithmetischen Tolerierung im Wesentlichen durch die Vermeidung von Extremfällen verursacht wird. Diese treten in der Praxis allerdings nur sehr selten auf. Erlaubt man einem frei wählbaren kleinen Anteil dieser Extremfälle ein außerhalb der Toleranz liegendes Ergebnis zu produzieren, so können im Gegenzug dazu die Einzelmaß-Toleranzen stark aufgeweitet werden. Es wird somit der Grundsatz der unbedingten Austauschbarkeit entschärft und nur noch eine bedingte Austauschbarkeit gefordert. Hierfür muss jedoch auf statistische Methoden zurückgegriffen werden, was einen erhöhten Berechnungsaufwand mit sich bringt.

Für beide Tolerierungsverfahren gilt bei der Auslegung von Toleranzen der bekannte Merkspruch: „So grob wie möglich, so fein wie nötig.“

Zu grob gewählte Toleranzen führen zu erhöhten Montage- und Ausschusskosten, während zu fein gewählte Toleranzen zu erhöhten Fertigungs- und Qualitätsprüfungskosten führen. Wie die obigen Absätze angedeutet haben, gilt dies mittlerweile nicht nur für die Auslegung der Toleranzen selbst, sondern ebenfalls für die Wahl des Tolerierungsverfahrens. Lässt man einen hohen Anteil außerhalb der Toleranz liegender Produkte zu, so führt dies zu erhöhten Montage- und Ausschusskosten, während ein stark eingeschränkter Anteil zu erhöhten Fertigungs- und Qualitätsprüfungskosten führt. Die Aufgabe des Konstrukteurs ist es, hier jeweils einen akzeptablen Kompromiss zu finden.

Die Analyse der Toleranzen erfolgt heutzutage zumeist rechnergestützt. Hierfür kann universell einsetzbare Berechnungssoftware (Matlab, Microsoft Excel, Python etc.) oder aber spezielle Toleranzberechnungssoftware (3DCS, SimTOL, Valisys, VisVSA etc.) eingesetzt werden. Letztere ist häufig auch als Plugin für CAD-Programme verfügbar und so leicht in bestehende Prozesse einzubinden. Derartige Programme führen die teilweise sehr aufwändigen Berechnungen durch, die Definition des zu lösenden Problems und dessen Randbedingungen obliegt allerdings immer noch dem Konstrukteur. Zur korrekten Bedienung dieser Programme sind in der Praxis somit umfangreiche Kenntnisse der statistischen Tolerierung notwendig. Da in der Konstruktion ein wesentlicher Teil der Produktionskosten eines Produktes festgelegt wird, kommt diesem Wissen eine große Bedeutung zu.

---

<sup>1</sup> Häufig auch „statistisches Toleranzdesign“ genannt.

## 1.2 Zielsetzung der Thesis

Zielsetzung dieser Thesis ist eine praxistaugliche Aufbereitung der statistischen Tolerierung sowie die Erarbeitung von Praxisempfehlungen für die Nutzung dieser. Um eine hohe Anschaulichkeit zu erzielen, sollen hierbei bevorzugt auf konkreten Beispielen beruhende Erklärungen verwendet werden.

Aus der Zielsetzung leiten sich mehrere erforderliche Zwischenziele ab: Zur Ermittlung von anschaulichen Erklärungsansätzen und Beispielen muss die relevante Literatur gesichtet und in ihrer Relevanz bewertet werden. Da es zum Themengebiet der Toleranzberechnung derzeit nur wenig Literatur gibt [2, S. 5], soll eine Übersicht über die im Rahmen der Literaturrecherche gefundenen Ergebnisse gegeben werden. Ziel ist es hierbei, dass weiterführende Arbeiten eine Übersicht über die existente Literatur zum Thema und deren jeweilige Relevanz erhalten können.

Des Weiteren muss im Anschluss aus den mittels der Literaturrecherche gefundenen Beispielen und Erklärungsansätzen eine sinnvolle Auswahl getroffen werden. Da es unter Umständen sinnvoll sein kann, Methoden einer Quelle auf Beispiele einer anderen Quelle anzuwenden, müssen die gefundenen Beispiele bei Bedarf konkretisiert oder gegebenenfalls neu entwickelt werden.

Um innerhalb eines Beispiels die jeweils zweckmäßigen Methoden der statistischen Tolerierung anwenden, auswerten und interpretieren zu können, müssen die dafür notwendigen Grundlagen dargestellt werden. Die statistische Tolerierung bedingt dabei der arithmetischen Tolerierung sowie der Grundlagen der Statistik.

Die behandelte Statistik konzentriert sich dabei auf die direkt mit der statistischen Tolerierung verknüpften Thematiken. Hierdurch sind die statistische Versuchsplanung wie auch statistische Tests kein Bestandteil dieser Thesis. Auch werden im Rahmen dieser Thesis ausschließlich Beispiele mit ebenen Maßtoleranzen betrachtet. Form- und Lagetoleranzen sowie räumlichen und mehrdimensionalen Toleranzen sind deswegen ebenfalls kein Bestandteil dieser Thesis. Für die Praxistauglichkeit wird auf die Nutzung spezieller Software zur Toleranzberechnung verzichtet. Die gezeigten mathematischen Methoden können vollständig manuell oder mit geeigneten Kalkulationswerkzeugen (Matlab, Microsoft Excel, Python etc.) angewendet werden.

### **1.3 Aufbau der Thesis**

Aus den oben genannten Anforderungen ergibt sich der nachfolgende Aufbau der Thesis:

Kapitel 2 behandelt die im Rahmen dieser Thesis verwendete Methodik der Literaturrecherche. Anschließend wird ein kurzer Überblick über die Inhalte und Relevanz der so gefundenen Quellen gegeben.

Kapitel 3 befasst sich mit den für das Verständnis der späteren Kapitel notwendigen Grundlagen. Da die statistische Tolerierung auf der Anwendung von statistischen Methoden auf die Tolerierung basiert, werden die Grundlagen dieser beiden Thematiken kurz dargestellt.

Kapitel 4 führt in die statistische Tolerierung anhand einer zweigliedrigen Maßkette ein. Hierfür wird das Beispiel einer Welle-Nabe-Verbindung genutzt und schrittweise die Annahmen der arithmetischen Tolerierung durch die Annahmen der statistischen Tolerierung ersetzt.

Kapitel 5 betrachtet mehrgliedrige Maßketten und führt hierfür zunächst eine Verallgemeinerung des zuvor betrachteten Rechenwegs ein. Anschließend wird eine mehrgliedrige lineare Maßkette am Beispiel eines KFZ-Getriebes erläutert. Auch werden Möglichkeiten zur Optimierung der Toleranzen aufgezeigt. Das Kapitel schließt mit der Untersuchung einer unstetigen Maßkette an einem Scharnier mittels Monte-Carlo-Simulation.

Kapitel 6 umfasst eine Sammlung von Empfehlungen für die Praxis. Hierfür werden zunächst Faustregeln aus dem Vorgehen der statistischen Tolerierung abgeleitet. Im Anschluss werden die für die statistische Tolerierung relevanten Faktoren auf die Produktionskosten separiert auf ihren Einfluss untersucht. Zuletzt werden Entscheidungshilfen zur Anwendung der statistischen Tolerierung sowie der Wahl eines geeigneten Berechnungsverfahrens entwickelt.

Kapitel 7 schließt mit einer Zusammenfassung der Ergebnisse sowie einem Ausblick auf weiterführende Themen.

## **2 Literaturrecherche**

Ziel der durchgeführten Literaturrecherche war es, einen Überblick über die auffindbare Literatur zur statistischen Tolerierung zu bekommen. Fokus wurde hierbei besonders auf das Vorhandensein von verständlichen Erklärungen, Diagrammen sowie Beispielen gelegt.

### **2.1 Methodik**

Einer der Ausgangspunkte der Literaturrecherche war eine physische Suche in der Fachbibliothek „Technik, Wirtschaft, Informatik“ (TWI) der HAW Hamburg. Hierzu wurde nach Fachbüchern mit Titeln, welche eine Kombination der Wörter „Statistik“, „Toleranz“, „Tolerierung“, „Ingenieur“, „Maschinenbau“ etc. enthielten. Diese Suche erbrachte ein Ergebnis von sechs Fachbüchern. Als weiterer Ausgangspunkt der Recherche kamen fünf weitere Quellen aus der Standardliteratur des Maschinenbaus sowie durch Literaturhinweise der betreuenden Professoren hinzu.

Hiervon ausgehend wurde im elektronischen Bibliothekskatalog der HAW nach in den Erstquellen referenzierten weiteren relevant erscheinenden Quellen und Autoren gesucht. In diesem Katalog sind neben den physischen Fachbüchern auch zahlreiche E-Books verzeichnet und zum Download vorhanden. Durch diese größere Auswahl wurden drei zusätzliche relevant erscheinende Fachbücher gefunden.

Zuletzt wurden bei Bedarf iterativ weitere in diesen Werken referenzierte Quellen über gängige Internetbibliotheken beschafft.

### **2.2 Bewertung der Literaturquellen**

Um zukünftige Arbeiten und Recherchen zu dem Thema der statistischen Tolerierung zu erleichtern, sollen die durch die Literaturrecherche gefundenen Literaturquellen im Folgenden kurz zusammengefasst und bezüglich ihrer Relevanz bewertet werden. Die Quellen sind jeweils nach absteigender Relevanz geordnet. Weitere untersuchte, aber als nicht relevant bewertete Quellen sind in Anhang A zu finden. Die wichtigsten Stichworte sind fettgedruckt.

## Fachbücher

Prozessorientierte Statistische Tolerierung im Maschinen- und Fahrzeugbau: Mathematische Grundlagen – Toleranzverknüpfungen – Prozesskontrolle – Maßkettenrechnung – Praktische Anwendungen		
[1]	Bernd Klein	2017
<p>Dieses Buch kann als die Referenz für alle Praxisfragen zur statistischen Tolerierung angesehen werden und wird auch von einigen anderen Quellen als bevorzugte Erstquelle angegeben. Über die ersten 4 Kapitel werden allgemein verständlich und kompakt die zum Verständnis der <b>statistischen Tolerierung</b> benötigten Grundlagen der klassischen Toleranzlehre und Statistik aufgebaut. In Kapitel 5 wird anhand einer <b>Vielzahl an kleinen Beispielen</b> ein Großteil der in der Praxis auftretenden Situationen erklärt. Nach kurzen Erwähnungen von relevanten benachbarten Themen wie des „Robust Designs“ oder der statistischen Prozesslenkung in Kapitel 6 bis 9 wird in Kapitel 10 ein Praxisbeispiel mittels einer <b>mit Papier und Stift durchführbaren sehr anschaulichen Simulation</b> durchgespielt. Kapitel 11 und 12 zeigen <b>konkrete Beispiele aus der Praxis</b> an linearen respektive nichtlinearen Systemen auf. Nach Kapiteln über Besonderheiten bei der Tolerierung in der Kunststofftechnik und rechnergestützter Toleranzsimulation schließt das Buch mit <b>Glossar, Formelsammlungen, Stichwortverzeichnis</b> sowie <b>Übungsbeispielen</b>.</p> <p>Diese Thesis orientiert sich im Aufbau zum Teil an dieser Quelle. Vor allem Unterkapitel 5.1, 5.4 sowie 5.9 sind hier relevant. Auch das umfassende Beispiel des Kfz-Getriebes ist dieser Quelle entlehnt.</p>		

Statistische Toleranzberechnung – Leitfaden zur systematischen Anwendung		
[2]	Frank Mannewitz	2016
<p>Ein sehr kurzer (50 Seiten) <b>in sich abgeschlossener Leitfaden</b>, fokussiert sich komplett auf das <b>Beispiel eines Schneckengetriebes</b>. Exzellent als <b>erste Lektüre</b> für das Thema „Statistische Tolerierung“ geeignet. Inhaltlich vergleichbar mit [1], durch den Fokus auf ein einziges Beispiel werden jedoch manche Spezialfälle wie auch die Berechnung nichtlinearer Maßketten bewusst nicht betrachtet. <b>Gute und kompakte Darstellung der arithmetischen Tolerierung</b>, auf welcher auch die in dieser Arbeit genutzte Darstellung aufbaut.</p>		

Qualitätssicherung und Toleranzen: Toleranz- und Prozeßanalyse für Entwicklungs- und Fertigungsingenieure		
[3]	Günter Kirschling	1988
<p>Ein sehr stark <b>in der Mathematik begründetes</b> und dadurch etwas schwerer verständliches Buch, welches aber einige <b>sehr informative Abbildungen</b> enthält. Für viele Berechnungen wird eine <b>grafische Art der Bestimmung</b> als Alternative angeboten. Der Inhalt reicht von den Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung über den Zusammenhang zwischen Toleranzen und Fertigungsverteilungen bis hin zur Prozessanalyse und -steuerung. Die <b>statistische Tolerierung</b> wird in den <b>Kapiteln 9 bis 11</b> ausführlich und mit Fokus auf die Mathematik auf 38 Seiten dargestellt, geht dabei aber nicht über die Berechnung linearer Maßketten hinaus.</p> <p>Zugunsten der Praxisnähe dieser Thesis wurden anstelle der Rechnungen aus dieser Quelle die vereinfachten Rechnungen aus [1] verwendet. Die Darstellung des „Pythagoras der Toleranzen“ stammt aus dieser Quelle.</p>		

**Normen**

DIN 7186-1:1974-08 Statistische Tolerierung - Begriffe, Anwendungsrichtlinien und Zeichnungsangaben		
[4]	DIN e.V.	1974
<p>Auf diese <b>ersatzlos zurückgezogene</b> Norm wird von vielen Quellen Bezug genommen. Im Rahmen dieser Thesis war Einsicht in diese Norm leider nicht möglich. Sie enthielt <b>allgemeine Bestimmungen zur statistischen Tolerierung</b>, welche derzeit nicht normativ festgelegt sind.</p>		

DIN ISO 22514-2:2019-07 Statistische Verfahren im Prozessmanagement - Fähigkeit und Leistung - Teil 2: Prozessleistungs- und Prozessfähigkeitskenngrößen von zeitabhängigen Prozessmodellen		
[5]	DIN e.V.	2019
<p>Diese Norm ist <b>aktuell</b> und enthält unter anderem Bestimmungen zur den mit der statistischen Tolerierung verwandten <b>Prozessleistungs- sowie Prozessfähigkeitsindizes</b>.</p>		

DIN ISO 21747:2007-03		
Statistische Verfahren - Prozessleistungs- und Prozessfähigkeitskenngrößen für kontinuierliche Qualitätsmerkmale		
[6]	DIN e.V.	2007
<p>Auch auf diese <b>zurückgezogene</b> Norm wird von vielen Quellen Bezug genommen. Im Rahmen dieser Thesis war Einsicht in diese Norm leider nicht möglich. Sie wurde <b>durch die DIN ISO 22514-2:2019-07 ersetzt</b>.</p>		

### **Sonstige Quellen**

Statistische Tolerierung		
[7]	Robert Bosch GmbH	2022
<p>Dies ist Teil 5 einer 16-teiligen Schriftenreihe zum Qualitätsmanagement, welche von der Robert Bosch GmbH für ihre Geschäftspartner frei verfügbar bereitgestellt wird. Sie stützt sich stark auf die Quellen [1] und [3], erweitert diese aber praxisnah um <b>Flussdiagramme und Tipps für die Berechnung statistischer Toleranzen mit diversen Programmen</b>. Im Gegensatz zu Quelle [2] geht diese Schrift mehr in die Breite als in die Tiefe, ist aber ebenso exzellent als <b>Einstiegslektüre</b> geeignet. Enthält keine guten Beispiele aus dem Maschinenbau.</p>		

Berücksichtigung von Wechselwirkungen zwischen Abweichungen in der statistischen Toleranzanalyse		
[8]	Michael S.J. Walter et al.	2015
<p>Ein Artikel aus der Zeitschrift „Konstruktion“, welcher sich mit neuen Methoden zur <b>Beurteilung des Einflusses von Einzelmaßen auf ein Schließmaß</b> befasst. Der Einsatz der beschriebenen globalen Sensitivitätsanalyse ist nichttrivial (siehe [9]). Enthält ein <b>sehr anschauliches Beispiel einer nichtlinearen sowie nichtstetigen Maßkette</b> (siehe Kapitel 5.3).</p>		

Triangle Distribution: Mathematica Link for Excel		
[10]	Rick Hesse	2000
Ein englischsprachiger Artikel aus der Zeitschrift „Decision Line“, welcher in seiner Einleitung kurz erklärt, <b>wann man welche Wahrscheinlichkeitsverteilung (Rechteck, Dreieck, Normal) nutzt.</b>		

## 2.3 Ergebnisse

Bei Sichtung der Literatur zeigte sich, dass nur wenige Quellen mit für die Konstruktionspraxis im Maschinenbau geeigneten Beispielen existieren. Dies wird so auch in der untersuchten Literatur bemängelt [2, S. 5]. Insgesamt am ergiebigsten bezüglich Beispielen und Erklärungen zeigten sich die aktuellen Werke der Autoren Bernd Klein [1] und Frank Mannewitz [2]. Ergänzende gute Erklärungen finden sich in der Schriftenreihe von Bosch [7] und im Buch von Günter Kirschling [3], wobei sich letzteres stark auf die mathematische Theorie konzentriert. In den restlichen untersuchten Quellen wird die statistische Tolerierung zumeist nur am Rande behandelt.

Zur Auswahl geeigneter Beispiele wurden die in der Literatur vorhandenen Beispiele miteinander verglichen. Die Einführung in die statistische Tolerierung erfolgt bestenfalls an simplen Beispielen und wird erst im Anschluss komplexer. Das Minimalbeispiel der Welle-Nabe-Verbindung wird ausschließlich in [1] dargestellt, weswegen diese Quelle die Basis für Kapitel 4 bildet. Die Betrachtung längerer Maßketten geschieht in [1] wie auch in [2] mit vergleichbarem Umfang. Für Abschnitt 5.2 wird hier das Beispiel aus [1] verwendet, da es weniger Voraussetzungen benötigt und sich so besser in den Lesefluss dieser Arbeit einfügt. Quelle [1] enthält ebenfalls Beispiele zur Linearisierung nichtlinearer Maßketten. Für die Erklärung dieser Beispiele ist die ausgiebige Nutzung der Analysis notwendig, was nicht in das Konzept der Praxistauglichkeit dieser Arbeit passt, weswegen auf diese Art von Beispielen verzichtet wurde. Zur Lösung derartiger Maßketten ist in der Praxis die in [8] dargestellte Monte-Carlo-Simulation wesentlich besser geeignet, weswegen dieses Beispiel in Abschnitt 5.3 dargestellt wird.

### 3 Grundlagen der Statistik und Tolerierung

Für das Verständnis der statistischen Tolerierung werden grundlegende Kenntnisse der Statistik wie auch der Tolerierung benötigt. In diesem Kapitel sollen zunächst die Grundlagen der Statistik und anschließend die Grundlagen der Tolerierung kurz dargestellt werden.

#### 3.1 Grundlagen der Statistik

Im Folgenden werden die Grundlagen der Statistik beginnend mit allgemeingültigen Prinzipien dargestellt. Darauf folgen kurze Erklärungen des für die statistische Tolerierung wichtigen Abweichungsfortpflanzungsgesetzes sowie des zentralen Grenzwertsatzes.

##### 3.1.1 Parameter von Stichproben

Im Maschinenbau sind die für die Tolerierung relevanten Merkmale zumeist stetig. So kann beispielsweise ein Wellendurchmesser eine unendliche Anzahl verschiedener Werte annehmen. Eine Messung dieses Wellendurchmessers ist nur mit einer endlichen Auflösung möglich und daher diskret. Misst man den Durchmesser von  $n$  Wellen, so erhält man eine Stichprobe. In Abbildung 1 ist eine Stichprobe einer h6-Welle beispielhaft für  $n = 100$  mit einer Auflösung von  $0,001\text{mm}$  gemessenen Werten dargestellt.

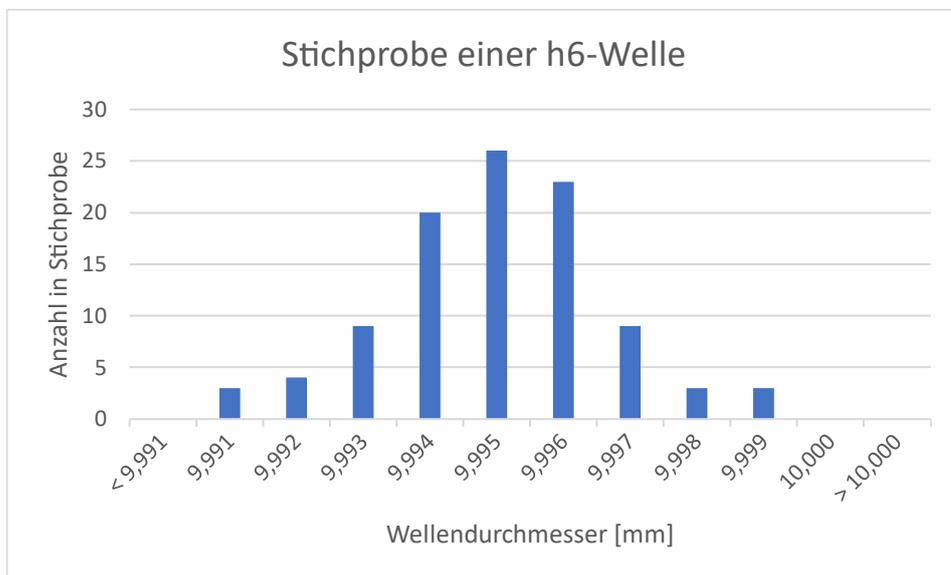


Abbildung 1: Histogramm einer Stichprobe des Durchmessers einer h6-Welle

Zur Beschreibung einer solchen Stichprobe können Mittelwert und Standardabweichung berechnet werden. Der Mittelwert  $\bar{x}$  einer Stichprobe berechnet sich aus sämtlichen Istmaßen  $I_i$  der Stichprobe:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_i \quad (1)$$

Im obigen Beispiel der h6-Welle ergibt er sich zu

$$\bar{x} = \frac{1}{100} \cdot (3 \cdot 9,991mm + 4 \cdot 9,992mm + \dots + 3 \cdot 9,999mm) = 9,9950mm \quad (2)$$

Er kennzeichnet das Zentrum der Wahrscheinlichkeitsverteilung. Die Standardabweichung  $s$  ist ein Maß für die Streuung der Stichprobe um diesen Mittelwert. Sie berechnet sich aus dem Differenzenquadrat sämtlicher Istmaße  $I_i$  der Stichprobe zu dem soeben berechneten Mittelwert  $\bar{x}$ .

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (I_i - \bar{x})^2} \quad (3)$$

In dem betrachteten Beispiel bestimmt sich  $s$  zu

$$s = \sqrt{\frac{3 \cdot (9,991mm - 9,995mm)^2 + \dots + 3 \cdot (9,999mm - 9,995mm)^2}{100 - 1}} \quad (4)$$

$$= 0,0015mm$$

Standardabweichung und Mittelwert haben die gleiche Einheit wie das untersuchte Merkmal der Stichprobe. Das Quadrat der Standardabweichung wird als Varianz bezeichnet:

$$s^2 = (0,0015mm)^2 = 2,25 \cdot 10^6 mm^2 \quad (5)$$

### 3.1.2 Parameter der Normalverteilung

Der Stichprobe liegen stetig verteilte Wellendurchmesser zugrunde, welche einer unbekanntem Wahrscheinlichkeitsverteilung unterliegen. Für die Art dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung kann eine Annahme durch Erfahrungswerte getroffen werden. Eine bei gehäuftem Stichproben häufig genutzte Verteilung ist die Normalverteilung, welche durch die beiden Parameter Mittelwert  $\mu$  und Standardabweichung  $\sigma$  charakterisiert ist. Nimmt man an, dass die Stichprobe des obigen Beispiels einer Normalverteilung genügt, so kann man die Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  durch  $\bar{x}$  und  $s$  schätzen:

$$\mu = \bar{x} = 9,9950mm \quad (6)$$

$$\sigma = s = 0,0015mm \quad (7)$$

Stellt man ein Histogramm der relativen Wahrscheinlichkeiten der Wellendurchmesser-Kategorien der Stichprobe und die Normalverteilung mit den obigen Parametern zusammen dar, kann optisch überprüft werden, ob die Annahme korrekt war.

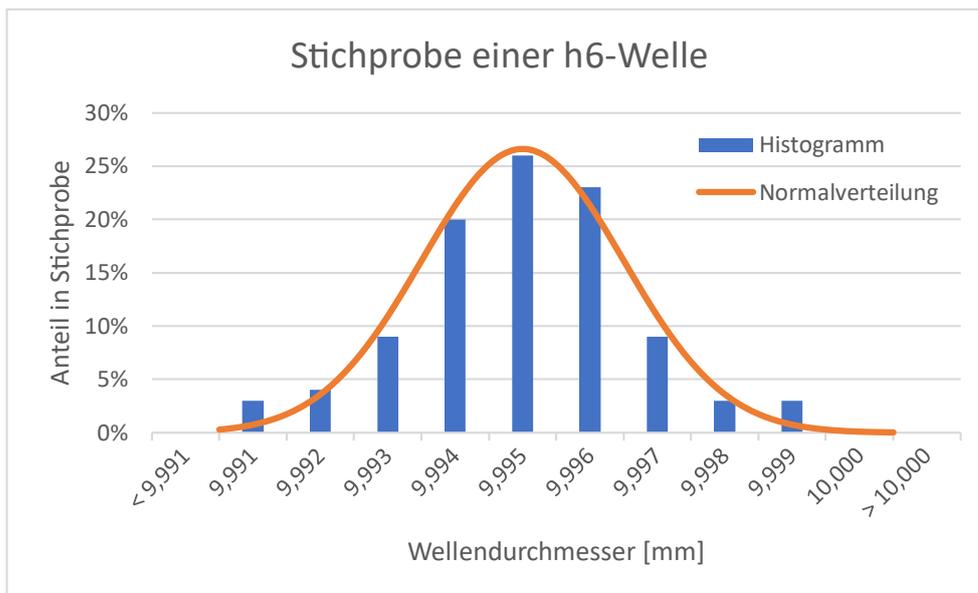


Abbildung 2: Normalverteilung aus Histogramm des Durchmessers einer h6-Welle

Im gezeigten Fall scheint die Normalverteilung eine zur Beschreibung der Stichprobe geeignete<sup>2</sup> Wahrscheinlichkeitsverteilung zu sein (siehe Abbildung 2). Im Gegensatz zum diskreten Histogramm ist die gezeigte Normalverteilung stetig. Ein bestimmter Wellendurchmesser (mit unendlich hoher Auflösung gemessen) hat in ihr eine verschwindend geringe Wahrscheinlichkeit. Die abgebildete Funktion beschreibt daher eine Wahrscheinlichkeitsdichte. Für die allgemeine Normalverteilung ist sie durch die Funktion  $f(x)$  beschrieben:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (8)$$

Mit  $\mu = 0$  und  $\sigma = 1$  erhält man die in Abbildung 3 dargestellte Standardnormalverteilung.

Das Integral einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist die Verteilungsfunktion  $F(x)$ . Sie gibt an, wie wahrscheinlich ein Wert auftritt, der kleiner oder gleich  $x$  ist (siehe Abbildung 4).

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx \quad (9)$$

---

<sup>2</sup> Möchte man diese Ähnlichkeit mathematisch zeigen, so kann ein Anpassungs- bzw. Verteilungstest durchgeführt werden. Für den gezeigten Fall kann die Nullhypothese, dass die Stichprobe einer Normalverteilung mit den genannten Parametern entspricht bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% beibehalten werden.

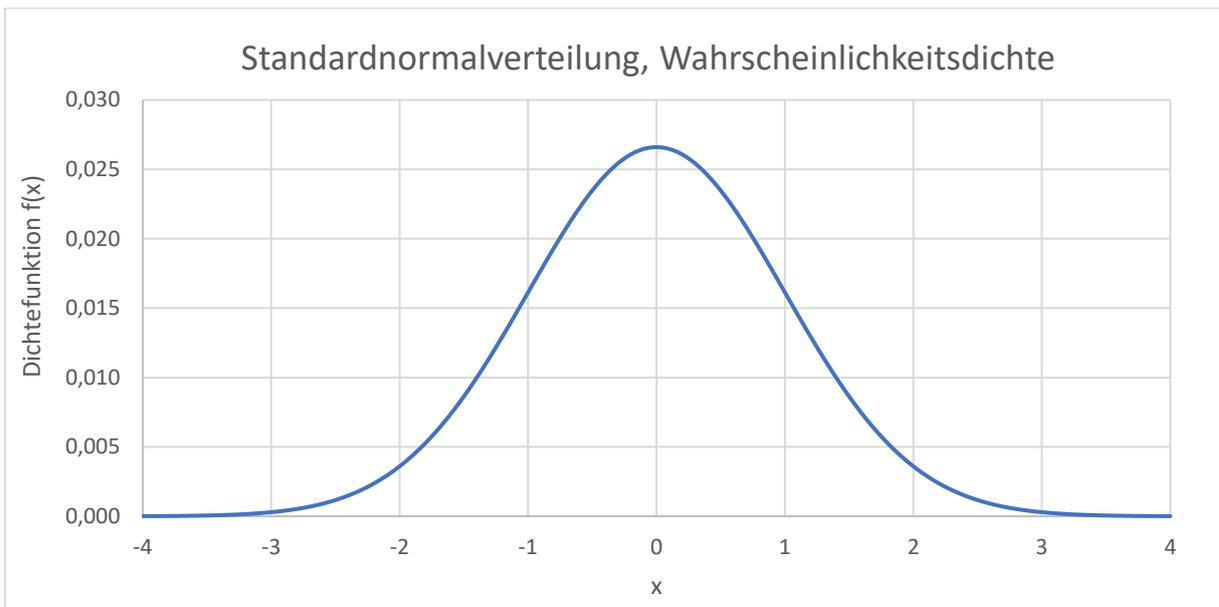


Abbildung 3: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Standardnormalverteilung

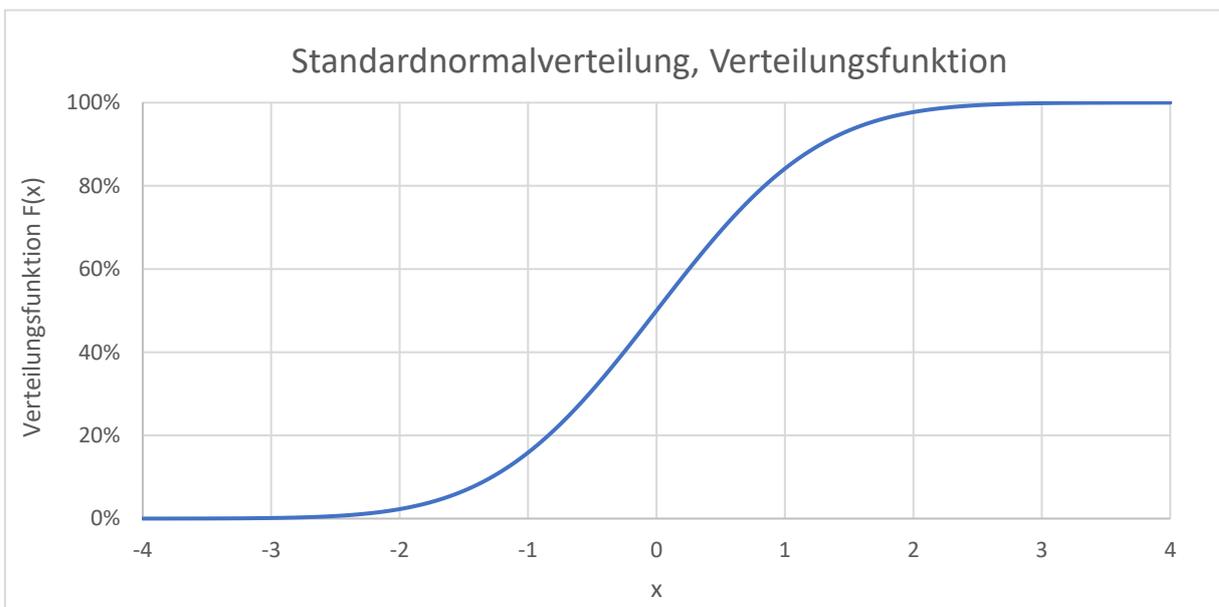


Abbildung 4: Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

Geht  $x$  gegen unendlich, so strebt  $F(x)$  gegen 100%. Es gilt im Umkehrschluss, dass der gesamte Flächenanteil unter der Kurve der Wahrscheinlichkeitsdichte  $f(x)$  einer Wahrscheinlichkeit von 100% entspricht:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (F(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 100\% \quad (10)$$

Im Bereich zwischen  $\pm u$  Standardabweichungen liegt stets ein von den Parametern  $\mu$  und  $\sigma$  unabhängiger fester Flächenanteil der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion.

Für ganzzahlige Standardabweichungen ist dieser Anteil in Tabelle 1 aufgelistet.

$\pm u\sigma$	Anteil unterhalb $F(-u)$ = Anteil oberhalb $1 - F(u)$	Anteil innerhalb $F(u) - F(-u)$	Anteil außerhalb $1 - [F(u) - F(-u)]$
$\pm 1\sigma$	15,87%	68,27%	31,73%
$\pm 2\sigma$	2,275%	95,45%	4,55%
$\pm 3\sigma$	0,135%	99,73%	0,27%
$\pm 4\sigma$	0,0032%	99,9937%	0,0063%
$\pm 5\sigma$	0,000029%	99,99994%	0,000057%
$\pm 6\sigma$	0,0000001%	99,9999998%	0,0000002%

Tabelle 1: Flächenanteile der Normalverteilung

### 3.1.3 Linearkombinationen mehrerer Wahrscheinlichkeitsverteilungen:

Wahrscheinlichkeitsverteilungen können miteinander kombiniert werden. Für diese Thesis ist im Wesentlichen die Linearkombination  $f_0(x)$  von  $n$  Wahrscheinlichkeitsverteilungen  $f_i(x)$  mit den jeweiligen Linearfaktoren  $\alpha_i$  relevant:

$$f_0(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x_i) \quad (11)$$

Für den Mittelwert  $\mu_0$  der Linearkombination gilt dann der Mittelwertsatz (siehe [1, S. 25] und [11, S. 44]):

$$\mu_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i \quad (12)$$

Für die Ermittlung der Standardabweichung der Linearkombination  $\sigma_0(f_0)$  kann das allgemeine Abweichungsfortpflanzungsgesetz herangezogen werden [12]:

$$\sigma_0(f_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\delta f_0}{\delta f_i} \sigma_i \right)^2} \quad (13)$$

Mit der partiellen Ableitung der Linearkombination kann dieses vereinfacht werden:

$$\frac{\delta f_0}{\delta f_i} = \frac{\delta}{\delta f_i} \left[ \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i \right] = \alpha_i \quad (14)$$

$$\Rightarrow \sigma_0(f_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha_i \sigma_i)^2} \quad (15)$$

Die Bestimmung der Form der Wahrscheinlichkeitsverteilung des Ergebnisses der Linearkombination führt auf das Problem der Faltung von Funktionen hin. Diese ist für praxisrelevante Probleme nur mit Rechnerunterstützung durchführbar und soll daher nicht weiter betrachtet werden. Eine Approximation kann aber dennoch durch die Aussagen des zentralen Grenzwertsatzes gemacht werden. Dieser sagt aus (nach [1, S. 31] und [11, S. 62]):

Die Summe von  $n$  stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen mit jeweils beliebiger Wahrscheinlichkeitsverteilung ist näherungsweise normalverteilt.

Ab  $n = 3$  tritt der Effekt dieses Satzes schwach ein, ab  $n = 4$  tritt er nahezu sicher ein. Bei ausreichend großem  $n$  kann das Ergebnis einer Linearkombination beliebiger Wahrscheinlichkeitsverteilungen somit als normalverteilt angenommen werden.

## 3.2 Grundlagen der Tolerierung

Im Folgenden sollen kurz die verschiedenen Darstellungsarten von Toleranzen und anschließend die arithmetische Tolerierung dargestellt werden.

### 3.2.1 Darstellungsarten von Toleranzen

Zur Verdeutlichung der Begriffe der Toleranzen soll der Durchmesser einer h6-Welle mit einem Durchmesser von  $10\text{mm}$  genutzt werden. Auf einer Zeichnung würde dies typischerweise als „10h6“ angegeben werden.

#### ***Darstellung im ISO-System***

Diese Bezeichnung entstammt dem ISO-System nach DIN EN ISO 286-1 [13]. Sie setzt sich zusammen aus Nennmaß „10“, und Toleranzklasse „h6“. Letztere setzt sich wiederum zusammen aus Grundabmaß „h“ und Grundtoleranzgrad „6“. Das Nennmaß  $N$  gibt den nominellen Wert des Wellendurchmessers an und wird beispielsweise in der CAD-Modellierung verwendet. Das Grundabmaß „h“ bestimmt das obere Grenzabmaß  $e_s$  oder das untere Grenzabmaß  $e_i$  und variiert je nach Nennmaß  $N$ . Die Werte für die Grenzabmaße sind in der Norm tabelliert. Für das gegebene Nennmaß legt „h“ das obere Grenzabmaß  $e_s = 0,000\text{mm}$  fest. Der Grundtoleranzgrad „6“ legt in Abhängigkeit des Nennmaßes  $N$  die Toleranzfeldbreite  $T = 0,009\text{mm}$  fest.

## Darstellung durch Grenzabmaße & Einführung in Maßpläne

Damit die Toleranzangabe mit konkreten Grenzabmaßen dargestellt werden kann, müssen Nennmaß  $N$ , unteres Grenzabmaß  $e_i$  sowie oberes Grenzabmaß  $e_s$  bekannt sein. Zur Bestimmung des fehlenden unteren Grenzabmaßes  $e_i$  kann Abbildung 5 genutzt werden. Diese gibt eine Übersicht der Zusammenhänge in Form eines Maßplans. Ein solcher ist besonders bei der Bestimmung des Schließmaßes in komplexen Bauteilen sehr hilfreich. Aus einem Maßplan können mathematische Zusammenhänge entnommen werden, indem entlang der gegebenen Pfeile eine geschlossene Schleife gebildet wird. Die Maße  $M_i$  der Schleife werden anschließend entsprechend der durch die Pfeilrichtung bestimmten Vorzeichen  $\alpha_i$  summiert. Die Einzelmaße selbst werden stets als positiv angenommen. Es muss gelten:

$$\alpha_i \in \{-1; 1\} \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i M_i = 0 \quad (17)$$

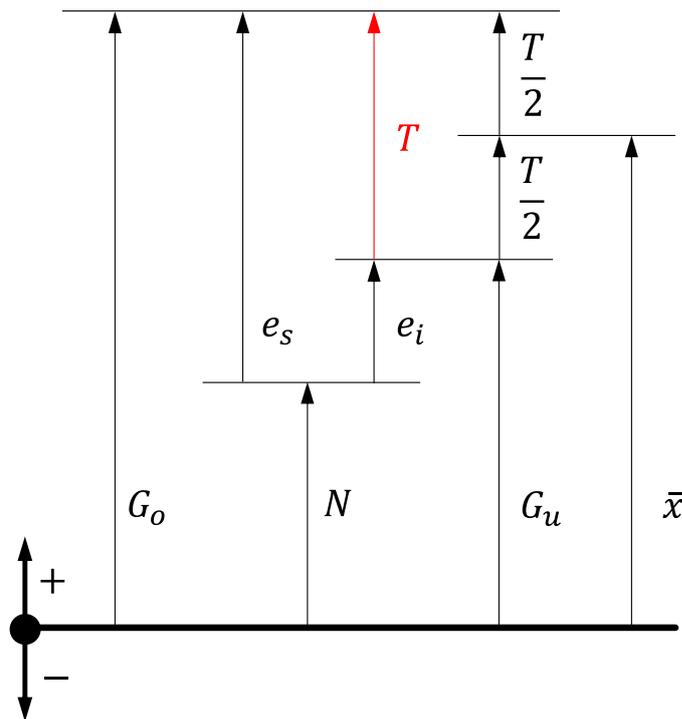


Abbildung 5: Maßplan mit Begriffen der Tolerierung, Toleranzfeldbreite rot markiert

Zur Bestimmung des gesuchten  $e_i$  kann man so beispielsweise auf der obersten Linie starten, über  $T$  und  $e_i$  nach unten steigen und anschließend über  $e_s$  wieder zur obersten horizontalen Linie zurückkehren. Damit ist die Schleife mit  $n = 3$  Elementen geschlossen.

Sie ergibt:

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i M_i = 0 = \alpha_1 \cdot T + \alpha_2 \cdot e_i + \alpha_3 \cdot e_s \quad (18)$$

Da die zu  $T$  und  $e_i$  gehörigen Pfeile in negative Pfeilrichtung durchlaufen wurden, gilt  $\alpha_1 = \alpha_2 = -1$ . Der zu  $e_s$  zugehörige Pfeil wurde in positive Pfeilrichtung durchlaufen, es gilt  $\alpha_3 = +1$ . Hieraus kann der Zusammenhang für  $e_i$  bestimmt werden:

$$0 = (-1) \cdot T + (-1) \cdot e_i + (+1) \cdot e_s = e_s - e_i - T \quad (19)$$

$$\Leftrightarrow e_i = e_s - T = 0,000mm - 0,009mm = -0,009mm \quad (20)$$

Jetzt kann die Toleranz mit konkreten Maßen angegeben werden:

$$M_W = N_{e_i}^{e_s} = 10_{-0,009}^{+0,000}mm \quad (21)$$

Diese Art der Darstellung ersetzt häufig betriebsintern die ISO-Toleranz auf Zeichnungen, da so kein weiteres Nachschlagen in Tabellenwerken notwendig ist.

### **Darstellung durch Kleinst- und Größtmaß**

Eine weitere Art der Darstellung von Toleranzen ist die Angabe von Kleinstmaß  $G_u$  und Größtmaß  $G_o$ . Die Zusammenhänge hierfür können wiederum dem Maßplan entnommen werden oder in Tabelle 2 nachgeschlagen werden. Diese fasst die wichtigsten dem Maßplan entnehmbaren Zusammenhänge zwischen den Begrifflichkeiten der Tolerierung zusammen.

Für das Beispiel gilt somit:

$$G_o = N + e_s = 10,000mm + 0,000mm = 10,000mm \quad (22)$$

$$G_u = N + e_i = 10,000mm + (-0,009mm) = 9,991mm \quad (23)$$

$$M_W = \frac{G_o}{G_u} = \frac{10,000}{9,991}mm \quad (24)$$

Diese Art der Darstellung hat einen hohen Nutzen in der Qualitätssicherung, da z.B. die Prüfung mittels Grenzlehren dem unteren und oberen Grenzmaß bedarf.

Zeichen	Begriff	Zusammenhänge	
$N$	Nennmaß	$= G_o - e_s$	$= G_u - e_i$
$G_o$	Größtmaß	$= N + e_s$	$= \bar{x} + \frac{T}{2}$
$G_u$	Kleinstmaß	$= N + e_i$	$= \bar{x} - \frac{T}{2}$
$e_s$ bzw. $E_s$	Oberes Grenzabmaß	$= G_o - N$	$= e_i + T$
$e_i$ bzw. $E_i$	Unteres Grenzabmaß	$= G_u - N$	$= e_s - T$
$T$	Toleranzfeldbreite <sup>3</sup>	$= G_o - G_u$	$= e_s - e_i$
$\bar{x}$	Mittelwert	$= G_o - \frac{T}{2}$	$= G_u + \frac{T}{2}$
$M_i$	Einzelmaß	$1 \leq i \leq n$	
$M_0$	Schließmaß	$M_0 = f(M_1, M_2, \dots, M_n)$	
$I$	Istmaß	Toleranz eingehalten, wenn $G_u \leq I \leq G_o$	

Tabelle 2: Begriffe der Tolerierung

### Symmetrische Darstellung

Zuletzt kann eine Toleranz auch mit symmetrischen Abmaßen angegeben werden. Hierzu muss der Mittelwert des Toleranzfeldes bestimmt werden. Praktisch ist hierzu die nicht direkt dem Maßplan entnehmbare Ermittlung des Mittelwertes aus dem unteren und oberen Grenzabmaß:

$$\bar{x} = \frac{G_u + G_o}{2} = \frac{9,991mm + 10,000mm}{2} = 9,9955mm \quad (25)$$

Das obere, wie auch das untere Grenzabmaß entsprechen vom Mittelwert aus gemessen der halben Toleranzfeldbreite:

$$M_w = \bar{x} \pm \frac{T}{2} = 9,9955mm \pm \frac{0,009mm}{2} = (9,9955 \pm 0,0045)mm \quad (26)$$

---

<sup>3</sup> Je nach Quelle auch als „Toleranzfeldgröße“ oder „Toleranz“ bezeichnet. Um Verwechslungen durch den ambivalenten Begriff „Toleranz“ zu vermeiden, wird in dieser Arbeit der Begriff „Toleranzfeldbreite“ verwendet.

Diese Art der Darstellung ist sehr nützlich zur Einstellung des Sollmaßes an Maschinen. Auch für die später vorgestellte statistische Tolerierung ist diese Darstellung vonnöten. Nachteilig ist im Vergleich zu den anderen Darstellungsarten, dass durch die Division durch 2 eine Nachkommastelle mehr angegeben werden muss, da andernfalls Rundungsfehler entstehen.

### Zusammenfassung

Tabelle 3 gibt eine Übersicht über die verschiedenen Darstellungsarten von Toleranzen.

Darstellungsart	Allgemein	Beispiel	Anwendung
ISO-System	$N[\text{Toleranzklasse}]$	10h6	Genormte Maße
Grenzabmaße	$N_{e_i}^{e_s}$	$10_{-0,009}^{+0,000}$	Einfachere Nutzung
Größt- & Kleinstmaß	$G_o$ $G_u$	10,000 9,991	Qualitätssicherung, arithmetische Tolerierung
Symmetrisch	$\bar{x} \pm \frac{T}{2}$	$9,9955 \pm 0,0045$	Sollmaß-Einstellung, statistische Tolerierung

Tabelle 3: Darstellungsarten von Toleranzen, Übersicht, alle Angaben in mm

### 3.2.2 Arithmetische Tolerierung

Eine häufig vorkommende Problemstellung ist die Bestimmung eines toleranzbehafteten Schließmaßes  $M_0$  aus mehreren anderen miteinander verketteten toleranzbehafteten Einzelmaßen  $M_i$ . Ein Ansatz hierfür ist die arithmetische Tolerierung, welche im Folgenden am Beispiel einer H7/h6-Welle-Nabe-Verbindung untersucht werden soll. Die gegebenen Toleranzen von Welle und Nabe sind in Tabelle 4 aufgelistet.

Bauteil	Einzelmaß	Kleinstmaß	Größtmaß
Welle, h6	$M_W = 10_{-0,009}^{+0,000}$	$G_{u,W} = 9,991$	$G_{o,W} = N_W = 10,000$
Nabe, H7	$M_N = 10_{-0,000}^{+0,015}$	$G_{u,N} = N_N = 10,000$	$G_{o,N} = 10,015$

Tabelle 4: Maßübersicht für Beispiel 3.2.2, Kleinst- und Größtmaß,  
alle Angaben in mm

## Einführung in Istmaß-Diagramme & Maßketten

Zur Veranschaulichung der Toleranzen kann ein Istmaß-Diagramm verwendet werden (siehe Abbildung 6). Auf der Abszisse ist dabei das Istmaß der Welle  $I_W$  und auf der Ordinate das Istmaß der Nabe  $I_N$  eingetragen. In der Abbildung werden je drei unterschiedliche Wellen- und Naben-Durchmesser miteinander kombiniert. In diesen neun Kombinationen sind die Veränderungen des Passungsspiels der Welle-Nabe-Verbindung bei variierendem Wellen- beziehungsweise Nabendurchmesser zu erkennen. Auf der Winkelhalbierenden des Diagramms sind Wellendurchmesser und Nabendurchmesser identisch. Das Spiel ist hier Null. Links oberhalb der Winkelhalbierenden entstehen Spielpassungen, da hier entweder der Wellendurchmesser abnimmt oder aber der Nabendurchmesser zunimmt. Rechts unterhalb der Winkelhalbierenden entstehen Übermaßpassungen, da hier das Gegenteil gilt.

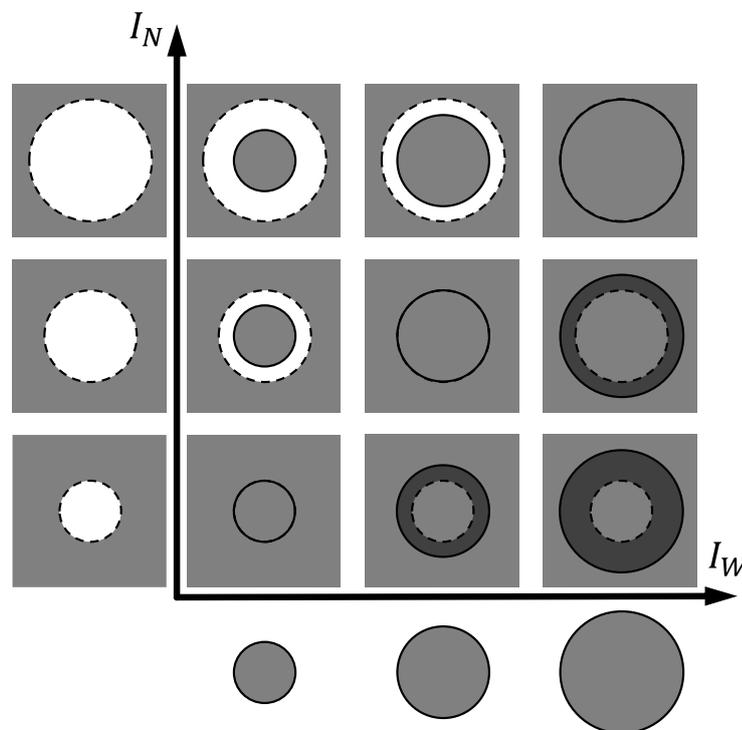


Abbildung 6: Istmaß-Diagramm, schematisch

Für den konkreten Fall der H7/h6-Welle-Nabe-Verbindung können die gegebenen Größt- und Kleinstmaße für Welle und Nabe in ein solches Diagramm eingetragen werden (siehe Abbildung 7). Es ergeben sich vier mögliche Kombinationen dieser Extremwerte, dies sind die Schnittpunkte A bis D. Da im Schnittpunkt A Größtmaß der Welle und Kleinstmaß der Nabe aufeinandertreffen, welche beide dem Nennmaß  $N_W = N_N = 10,000mm$  entsprechen, liegt dieser Punkt auf der Winkelhalbierenden.

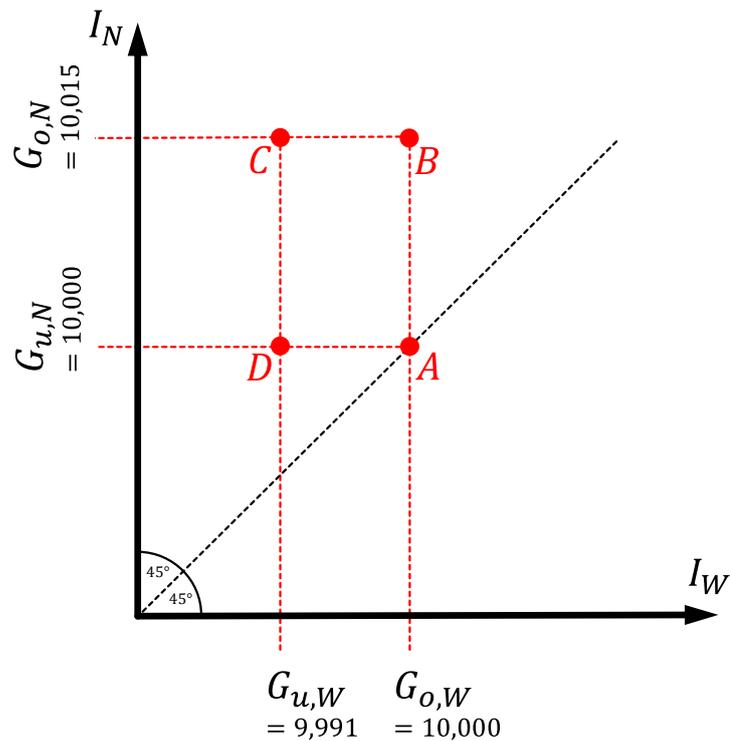


Abbildung 7: Istmaß-Diagramm für arithmetische Tolerierung, Schritt 1,  
nicht maßstäblich, alle Angaben in mm

Zur formellen Bestimmung des Schließmaßes  $M_0$  muss nun eine Berechnungsvorschrift für dieses gefunden werden. Die die Einzelmaße  $M_i$  verknüpfende Maßkette  $f$  kann in der Theorie eine beliebige Form annehmen<sup>4</sup>:

$$M_0 = N_0 \frac{e_{s,0}}{e_{i,0}} = f(M_1, M_2, \dots, M_n) \quad (27)$$

Ein Großteil der in der Praxis vorkommenden Probleme lässt sich allerdings auf linear verknüpfte Maßketten zurückführen<sup>5</sup>:

$$M_0 = f(M_1, M_2, \dots, M_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i M_i \quad (28)$$

<sup>4</sup> Diese allgemeine Form wird beispielsweise bei der Berechnung von Flächeninhalten, Volumen oder bei einer aus Maß- und Winkeltoleranzen bestehenden Maßkette erforderlich.

<sup>5</sup> Neben den häufig vorkommenden linearen Maßketten können auch viele Maßketten an winkligen Bauteilen in diese Form gebracht werden, indem sie in zum Schließmaß parallele Komponenten zerlegt werden [14, S. 160]. In diesem Fall bestimmt sich der Linearfaktor  $\alpha_i$  trigonometrisch aus den vorliegenden Winkeln und im Gegensatz zu dem hier gezeigten Beispiel gilt  $|\alpha_i| \neq 1$ .

In dem betrachteten Beispiel ist das Schließmaß  $M_0$  das Spiel der Welle-Nabe-Verbindung. Ist das Schließmaß  $M_0$  größer als Null, so liegt eine Spielpassung vor, ist es kleiner als Null, so liegt ein Übermaßpassung vor. Nach dem Maßplan in Abbildung 8 ergibt sich aus den beiden Einzelmaßen der Welle  $M_W$  und Nabe  $M_N$  eine einfache linear verknüpfte Maßkette:

$$M_0 = (-1) \cdot M_W + (+1) \cdot M_N = M_N - M_W \quad (29)$$

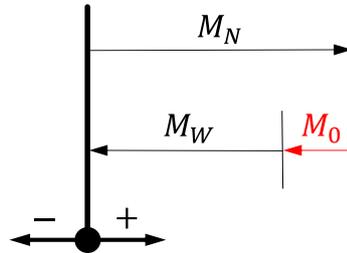


Abbildung 8: Maßplan für Welle-Nabe-Verbindung, nicht maßstäblich

### Grundsätze der arithmetischen Tolerierung

Die arithmetische Tolerierung hat eine vollständige Austauschbarkeit der Einzelteile eines Produktes zum Ziel (siehe Abschnitt 1.1). Daraus folgt, dass die arithmetische Tolerierung auf zwei wesentlichen Grundsätzen basiert:

- 1) Alle Ist-Schließmaße (100%) sollen innerhalb ihrer Toleranzfelder liegen.
- 2) Jedes Istmaß innerhalb eines Toleranzfeldes ist gleich wahrscheinlich.

Grundsatz 1 sagt aus, dass, wenn alle Ist-Einzelmaße innerhalb ihrer Toleranz liegen, auch das Ist-Schließmaß innerhalb seiner Toleranz liegen soll. Schließmaße bestimmen, ob ein Produkt aus seinen Bauteilen montierbar ist und ob es seine Funktion erfüllt. Unabhängig davon, wie die Ist-Einzelmaße ausfallen, soll eine einwandfreie Montage und Funktion stets gegeben sein. Grundsatz 1 entspricht somit der Anforderung der vollständigen Austauschbarkeit.

Grundsatz 2 folgt aus dem Mangel an Informationen über ein Toleranzfeld. Wie in Abschnitt 3.2.1 dargestellt ist ein Toleranzfeld stets durch nur zwei Parameter definiert. Es findet keine genaue Differenzierung innerhalb eines Toleranzfeldes statt. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung wird somit am besten modelliert, wenn alle Istmaße innerhalb eines Toleranzfeldes als gleich wahrscheinlich angenommen werden [10]. Dieser Grundsatz wird in Abschnitt 4.1 genauer betrachtet.

Für diesen Abschnitt ist zunächst nur Grundsatz 1 relevant. Aus ihm folgt, dass sich die Schließmaßtoleranz  $T_0$  aus dem Größt-Schließmaß  $G_{o,0}$  und dem Kleinst-Schließmaßes  $G_{u,0}$  bestimmt. Dies soll zunächst grafisch am Istmaß-Diagramm gezeigt werden.

## Grafische Bestimmung des Schließmaßes

Zur grafischen Darstellung des Ist-Schließmaßes  $I_0$  kann die folgende Überlegung getroffen werden: Ist die Skalierung von Abszisse und Ordinate gleich, so sind auf der Winkelhalbierenden Wellen- und Nabendurchmesser identisch. Das Spiel beträgt hier somit Null. Bewegt man sich im Diagramm parallel zur Winkelhalbierenden, bedeutet dies eine gleichzeitige und gleichstarke Zunahme des Wellen- wie auch des Nabendurchmessers. Das Schließmaß zwischen beiden Bauteilen bleibt dann gleich. Dies ist auch bei Betrachtung von Abbildung 6 ersichtlich: Auf der Hauptdiagonalen weisen dort alle Passungen ein Nullspiel auf. Bei einer zur Winkelhalbierenden senkrechten Bewegung verändern sich Wellen- und Nabendurchmesser dagegen gegenläufig und das Schließmaß verändert sich. Auch in Abbildung 6 sieht man, dass das Schließmaß umso größer bzw. kleiner wird, je mehr man sich von der Hauptdiagonalen entfernt. Auf einer derartig ausgerichteten Achse kann somit das Schließmaß gemessen werden (siehe Abbildung 9).

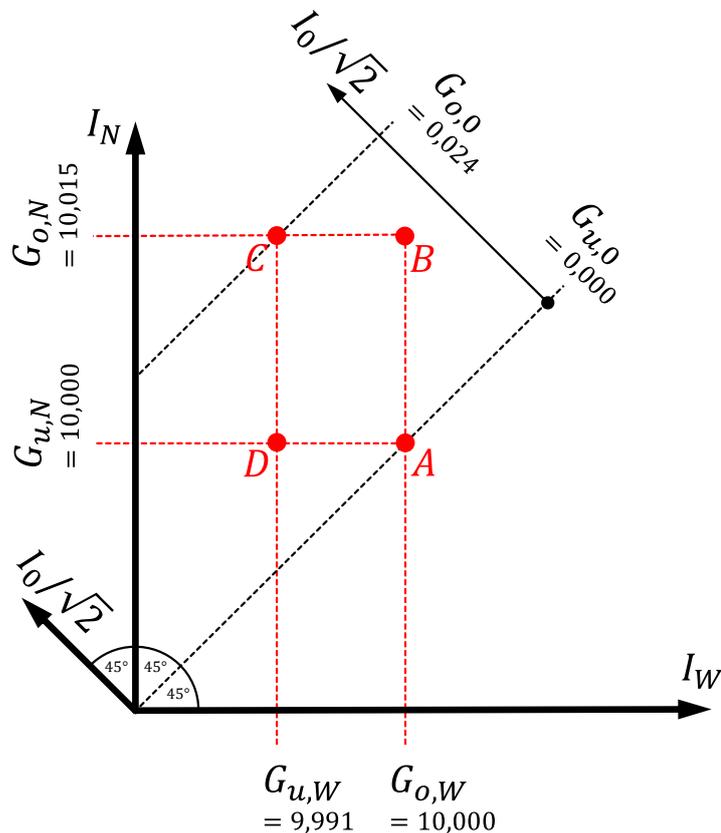


Abbildung 9: Istmaß-Diagramm für arithmetische Tolerierung, Schritt 2, nicht maßstäblich, alle Angaben in mm

Aufgrund der Rotation der Achse um  $45^\circ$  besitzt die Achse in Bezug auf Abszisse und Ordinate eine gestauchte Skala:

$$\sin(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (30)$$

Der lotrechte Abstand der beiden durch die Punkte A und C laufenden schwarz gepunkteten Linien beträgt somit mit den Skalen von Abszisse und Ordinate gemessen circa  $0,017mm$ . Mit der gestauchten Skala der rotierten Achse gemessen ergibt sich der korrekte Wert:

$$0,017mm \cdot \sqrt{2} = 0,024mm \quad (31)$$

Auf dieser neuen Achse für das Ist-Schließmaß  $I_0$  können nun grafisch das Größt- und Kleinst-Schließmaß dargestellt werden. Das Kleinst-Schließmaß bestimmt sich durch Schnittpunkt A, in dem das Größtmaß der Welle auf das Kleinstmaß der Nabe trifft. Das Größt-Schließmaß bestimmt sich durch Schnittpunkt C, in dem das Kleinstmaß der Welle auf das Größtmaß der Nabe trifft.

### **Analytische Bestimmung des Schließmaßes**

Für die analytische Berechnung des Schließmaßes  $M_0$ , welche besonders bei den später betrachteten Maßketten mit mehr als zwei Elementen vonnöten ist, gibt es mehrere verschiedene Ansätze. Im Folgenden wird zunächst ein modifizierter Ansatz nach [2] verwendet. Es wird hierfür zunächst das Nenn-Schließmaß  $N_0$  bestimmt. Die Berechnung folgt direkt nach der Maßkette, da Toleranzen die Verkettung der Nennmaße nicht beeinflussen:

$$N_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i N_i \quad (32)$$

Für die betrachtete Welle-Nabe-Verbindung gilt somit:

$$N_0 = (-1) \cdot N_W + (+1) \cdot N_N = -10,000mm + 10,000mm = 0,000mm \quad (33)$$

Anschließend werden Größt-Schließmaß  $G_{o,0}$  und Kleinst-Schließmaß  $G_{u,0}$  separat aus den Größt- und Kleinstmaßen der Einzelmaßen ermittelt. Der Linearfaktor  $\alpha_i$  bestimmt dabei jeweils, ob das Größt- oder das Kleinst-Einzelmaß berücksichtigt werden muss. Ist  $\alpha_i \geq 0$ , so bewirkt eine Vergrößerung des Einzelmaßes  $M_i$  ebenfalls eine Vergrößerung des Schließmaßes. Das Größt-Schließmaß  $G_{o,0}$  wird also mit dem Größt-Einzelmaß  $G_{o,i}$  erreicht. Ist  $\alpha_i < 0$ , so gilt das Gegenteil und das Kleinst-Einzelmaß  $G_{u,i}$  muss verwendet werden. Für das Kleinst-Schließmaß  $G_{u,0}$  gilt analoges:

$$G_{o,0} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \begin{cases} G_{o,i} & \text{wenn } \alpha_i \geq 0 \\ G_{u,i} & \text{wenn } \alpha_i < 0 \end{cases} \quad (34)$$

$$G_{u,0} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \begin{cases} G_{u,i} & \text{wenn } \alpha_i \geq 0 \\ G_{o,i} & \text{wenn } \alpha_i < 0 \end{cases} \quad (35)$$

Im betrachteten Beispiel ergibt sich somit:

$$G_{o,0} = (-1) \cdot G_{u,W} + (+1) \cdot G_{o,N} = -9,991mm + 10,015mm = 0,024mm \quad (36)$$

$$G_{u,0} = (-1) \cdot G_{o,W} + (+1) \cdot G_{u,N} = -10,000\text{mm} + 10,000\text{mm} = 0,000\text{mm} \quad (37)$$

Aus dem Nenn-Schließmaß, dem Größt-Schließmaß sowie dem Kleinst-Schließmaß kann nun die Darstellung des Schließmaßes durch Grenzabmaße ermittelt werden:

$$M_0 = N_0 \overset{e_s}{e_i} = N_0 \overset{G_{o,0}-N_0}{G_{u,0}-N_0} = 0,000\text{mm} \overset{0,024\text{mm}-0,000\text{mm}}{0,000\text{mm}-0,000\text{mm}} = 0 \overset{+0,024}{-0,000}\text{mm} \quad (38)$$

Das Schließmaß ist somit stets positiv und im Minimum gleich Null, wie es von einer H/h-Passung gefordert ist.

### **Analytische Bestimmung des Schließmaßes bei symmetrischen Toleranzen**

Liegen symmetrische Toleranzen vor oder wurden die Toleranzen in symmetrische Toleranzen umgerechnet (siehe Tabelle 5), so kann eine einfachere alternative Berechnung des Schließmaßes verwendet werden.

Bauteil	Einzelmaß	Mittelwert	Toleranzfeldbreite
Welle, h6	$M_W = 10 \overset{+0,000}{-0,009}$	$\bar{x}_W = 9,9955$	$T_W = 0,0090$
Nabe, H7	$M_N = 10 \overset{+0,015}{-0,000}$	$\bar{x}_N = 10,0075$	$T_N = 0,0015$

*Tabelle 5: Maßübersicht für Beispiel 3.2.2, symmetrische Toleranzen, alle Angaben in mm*

Es gilt hierbei, dass sich die Mittelwerte der Einzelmaße analog zu den Nennmaßen addieren:

$$\bar{x}_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{x}_i \quad (39)$$

Dies ergibt hier:

$$\bar{x}_0 = (-1) \cdot \bar{x}_W + (+1) \cdot \bar{x}_N = -9,9955\text{mm} + 10,0075\text{mm} = 0,0120\text{mm} \quad (40)$$

Bei der Berechnung der Schließmaß-Toleranzfeldbreite addieren sich die Einzelmaß-Toleranzfeldbreiten vorzeichenunabhängig. Die Schließmaß-Toleranzfeldbreite ist somit stets größer als jede Einzelmaß-Toleranzfeldbreite:

$$T_0 = \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \cdot T_i \quad (41)$$

Für das Beispiel ergibt sich somit:

$$T_0 = |-1| \cdot T_W + |+1| \cdot T_N = 0,009\text{mm} + 0,015\text{mm} = 0,024\text{mm} \quad (42)$$

Das jetzt symmetrisch vorliegende Schließmaß ergibt sich somit zu:

$$M_0 = \bar{x}_0 \pm \frac{T_0}{2} = 0,012mm \pm \frac{0,024mm}{2} = (0,012 \pm 0,012)mm \quad (43)$$

Dies ist identisch zum Ergebnis aus Gleichung (38). Diese zweite Art der Berechnung ist sinnvoll zu verwenden, wenn die Toleranzen bereits in symmetrischer Form vorliegen, da hierdurch keine Fallunterscheidung wie in den Formeln (34) und (35) durchgeführt werden muss. Liegen die Toleranzen nicht symmetrisch vor, so ist die Umrechnung in symmetrische Toleranzen aufwändiger sowie wie oben beschrieben unter Umständen mit Rundungsfehlern behaftet und daher zu vermeiden. In den nachfolgenden Kapiteln wird die Toleranzrechnung mit symmetrischen Toleranzen noch für die statistische Tolerierung wichtig werden.

Beide Arten der arithmetischen Schließmaßberechnung werden im Weiteren der Übersichtlichkeit wegen zusammenfassend dargestellt:

$$M_0 = M_N - M_W = 10_{-0,000}^{+0,015}mm - 10_{-0,009}^{+0,000}mm = 0_{-0,000}^{+0,024}mm \quad (44)$$

## 4 Grundlagen der statistischen Tolerierung an Praxisbeispielen

Wird ein Bauteil mit toleranzbehafteten Maßen konstruiert, gefertigt und vermessen, so können die konkreten Istmaße durch Fertigungsabweichungen theoretisch beliebige Werte annehmen. Ein Bauteil ist in Ordnung, wenn sämtliche Maße innerhalb ihrer zugehörigen Toleranzfelder liegen. In der bisher betrachteten arithmetischen Tolerierung wurden die Grenzen dieser Toleranzfelder für die Berechnung von Schließmaßtoleranzen verwendet.

Um die Grundlagen der statistischen Tolerierung zu erklären, sollen im Folgenden die Grundsätze der arithmetischen Tolerierung genauer untersucht und schrittweise durch die alternativen Grundsätze der statistischen Tolerierung ersetzt werden. Hierzu wird das bereits bekannte Beispiel einer seriengefertigten Welle-Nabe-Verbindung untersucht. Dieses umfasst die Kombination zweier Einzelmaße zu einem Schließmaß und ist damit leicht überschaubar.

### 4.1 Geschliffene Welle und Nabe mit rechteckverteilten Istmaßen

Zur Einfachheit soll zunächst davon ausgegangen werden, dass die Welle keine Toleranz aufweist und ihr Durchmesser exakt auf Nennmaß geschliffen wurde. Zur Anschaulichkeit soll der Nenndurchmesser von Welle und Nabe das glatte Maß von  $10\text{mm}$  aufweisen. Bei einer Auflösung von  $0.001\text{mm}$  beträgt die Toleranz der Welle entsprechend  $10_{-0,000}^{+0,000}\text{mm}$ . Die Nabe soll eine H7 Toleranz erhalten, was  $10_{-0,000}^{+0,015}\text{mm}$  entspricht. Die unteren und oberen Toleranzgrenzen ergeben sich daraus wie in Tabelle 6 dargestellt.

Bauteil	Einzelmaß	Kleinstmaß	Größtmaß
Welle, geschliffen	$M_W = 10_{-0,000}^{+0,000}$	$G_{u,W} = N_W = 10,000$	$G_{o,W} = N_W = 10,000$
Nabe, H7, rechteckverteilt	$M_N = 10_{-0,000}^{+0,015}$	$G_{u,N} = N_N = 10,000$	$G_{o,N} = 10,015$

Tabelle 6: Maßübersicht für Beispiel 4.1, alle Angaben in mm

Vermisst man die Istmaße einer Vielzahl an Bauteilen, so kann man Beobachtungen über die Verteilung der Istmaße anstellen. Bei der bisher betrachteten arithmetischen Tolerierung wurde angenommen, dass die Maße innerhalb ihrer Toleranzfelder gleichmäßig verteilt sind (Grundsatz 2). Man nimmt also an, dass bei dem H7-Maß der Nabe von  $10_{-0,000}^{+0,015}\text{mm}$  die beispielhaften Ist-Maße  $10,000\text{mm}$ ,  $10,004\text{mm}$  und  $10,015\text{mm}$  mit identischen Wahrscheinlichkeiten auftreten. Dies entspricht statistisch einer Rechteckverteilung (siehe Abbildung 10).

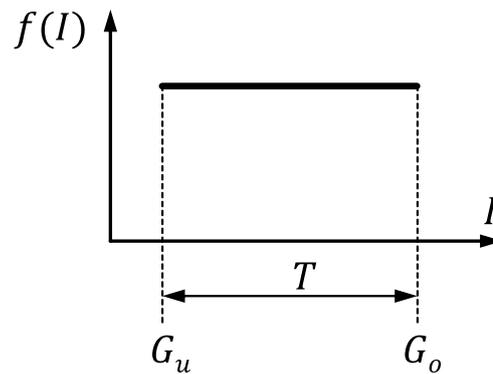


Abbildung 10: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f(I)$  bei rechteckverteilten Istmaßen  $I$

Die Welle weist stets ein Maß von  $10,000\text{mm}$  auf. Um sich die daraus resultierenden Folgen für das Schließmaß grafisch anschaulich zu erschließen, kann man die bereits im vorherigen Kapitel verwendete Darstellung der Ist-Maße nutzen darstellen (siehe Abbildung 11).

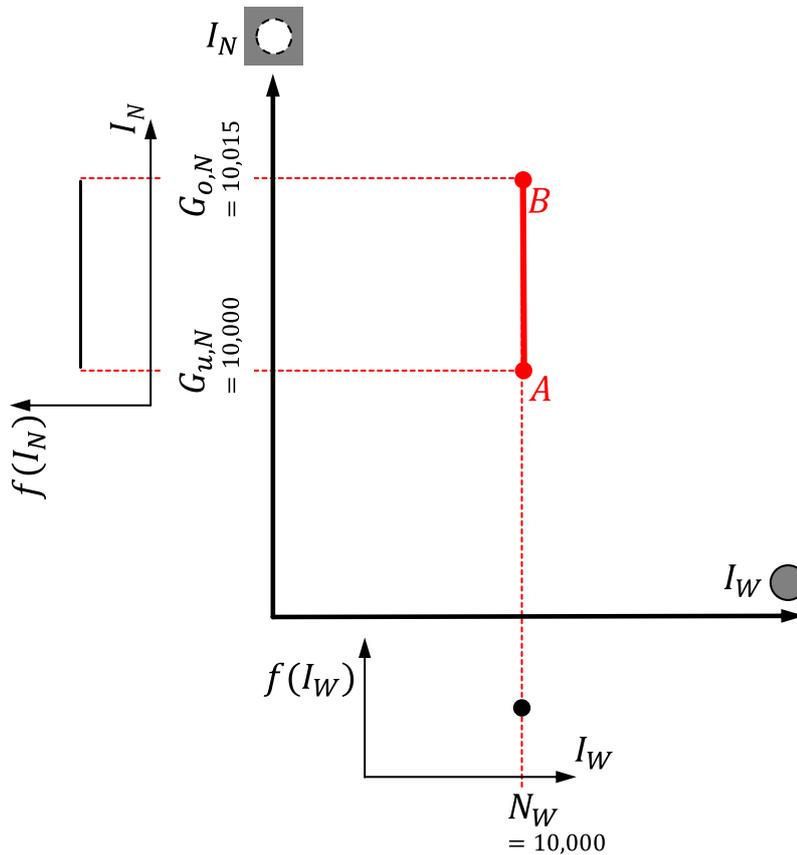


Abbildung 11: Istmaß-Diagramm für Beispiel 4.1, Schritt 1: Geschliffene Welle und Nabe mit rechteckverteilten Istmaßen, nicht maßstäblich, alle Angaben in mm

Da das Maß der Welle keine Toleranz aufweist, ist dieses durch einen einzigen schwarzen Punkt repräsentiert. Wird dieser Punkt in die Diagrammfläche hinein verlängert, ergibt sich die vertikale gestrichelt rote Linie. Das Maß der Nabe ist rechteckverteilt und ergibt somit einen



sich auch bei einer Betrachtung entlang der Schließmaßachse eine konstante Wahrscheinlichkeitsdichte. Dadurch ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Schließmaßes eine Rechteckverteilung<sup>6</sup> mit einer zur Toleranzbreite der Nabe identischen Toleranzbreite. Die Toleranz des Schließmaßes ergibt sich somit analog zur arithmetischen Tolerierung (siehe Abschnitt 3.2.2):

$$M_0 = M_N - M_W = 10_{-0,000}^{+0,015} mm - 10_{-0,000}^{+0,000} mm = 0_{-0,000}^{+0,015} mm \quad (45)$$

Dieses Ergebnis deckt sich mit der intuitiven Anschauung: Ist der Durchmesser der Welle fixiert und der Durchmesser der Nabe variiert, so variiert das Spiel der Welle-Nabe-Verbindung in exakt dem gleichen Maße. Daraus folgt allgemein, dass sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Einzelmaßes direkt im Schließmaß widerspiegelt, wenn alle anderen Einzelmaße konstant sind bzw. keine Toleranz aufweisen und die Schließmaßkette linear ist.

## 4.2 Welle und Nabe mit jeweils rechteckverteilten Istmaßen

In der Praxis kommen exakt auf Maß geschliffene Bauteile nur äußerst selten vor. Typischerweise sind alle Maße einer Maßkette mit Toleranzen behaftet. Darum soll nun die Betrachtung der vorherigen Welle-Nabe-Verbindung erweitert werden und die Welle wieder eine Toleranz von h6 bekommen. Diese H7/h6-Passung ergibt eine sehr geringes Passungsspiel und wird beispielsweise für Zentrierungen von Lagerdeckeln verwendet [15]. Die unteren und oberen Toleranzgrenzen ergeben sich daraus wie in Tabelle 7 dargestellt.

Nimmt man an, dass die Istmaße für Welle und Nabe beide rechteckverteilt sind, kann man diese wiederum in ein Schließmaßdiagramm eintragen (siehe Abbildung 13). Die Menge aller möglichen Passungen ist nun keine Linie mehr, sondern beschreibt das rot schraffierte Rechteck ABCD im Diagramm. Alle Istmaß-Kombinationen, welche innerhalb dieses Bereiches liegen, liefern eine gültige H7/h6-Passung. Bei allen Istmaß-Kombinationen außerhalb des Bereiches entspricht die vorliegende Passung nicht der Spezifikation. Um die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Schließmaßes zu erhalten, muss man nun wieder die Menge aller möglichen Passungen parallel zur Winkelhalbierenden in kleine Streifen zerteilen und die Länge dieser Streifen als Wahrscheinlichkeitsdichte des Schließmaßes auftragen.

---

<sup>6</sup> Mathematisch wurde die Faltung einer Rechteckfunktion mit einem Dirac-Impuls durchgeführt. Da der Dirac-Impuls das neutrale Element der Faltung ist, ergibt sich wiederum die Rechteckfunktion. Die Faltung  $f_1(I) * f_2(I)$  zweier Originalfunktionen  $f_1(I)$  und  $f_2(I)$  bestimmt sich wie folgt [12]:

$$f_1(I) * f_2(I) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(v) \cdot f_2(I - v) dv$$

Bauteil	Einzelmaß	Kleinstmaß	Größtmaß
Welle, h6, rechteckverteilt	$M_W = 10^{+0,000}_{-0,009}$	$G_{u,W} = 9,991$	$G_{o,W} = 10,000$
Nabe, H7, rechteckverteilt	$M_N = 10^{+0,015}_{-0,000}$	$G_{u,N} = 10,000$	$G_{o,N} = 10,015$

Tabelle 7: Maßübersicht für Beispiel 4.2, Änderungen fettgedruckt, alle Angaben in mm

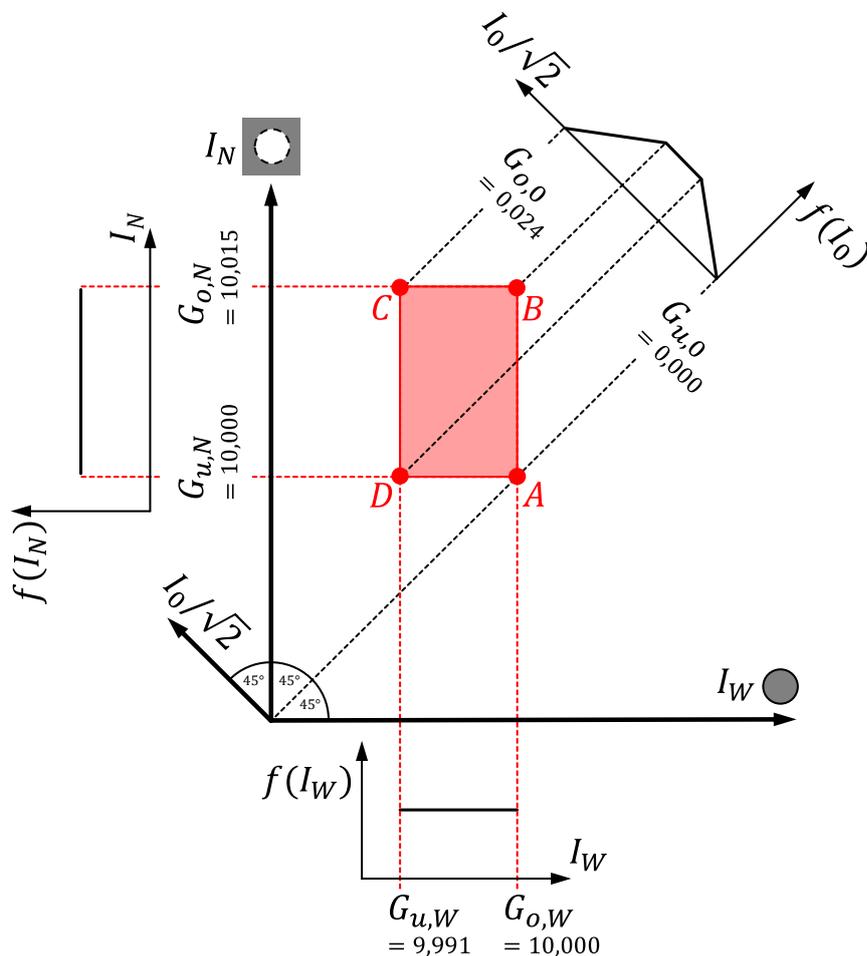


Abbildung 13: Istmaß-Diagramm für Beispiel 4.2: Welle und Nabe mit jeweils rechteckverteilten Istmaßen, nicht maßstäblich, alle Angaben in mm

In Punkt A treffen die größtmögliche Welle und die kleinstmögliche Nabe zusammen. Da beide mit dem Grundabmaß H bzw. h toleriert sind, ergibt sich ein Schließmaß von  $0\text{mm}$ . Dieser Fall ist sehr unwahrscheinlich, entsprechend ist die dieser Kombination zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte gleich Null. In Richtung des Punktes B bzw. D nimmt die Länge der

Streifen und damit auch die aufsummierte Wahrscheinlichkeitsdichte linear zu. In Punkt D trifft die kleinste Welle auf die kleinste Nabe. Diese Kombination ist für sich genommen sehr unwahrscheinlich. Betrachtet man jedoch das erzielte Schließmaß, so kann dieses ebenfalls erzielt werden, wenn Welle und Nabe beide ein klein wenig größer sind. Diese Möglichkeiten ergeben den von Punkt D nach rechts oben ausgehenden Strich der Schraffur. Diese Vielzahl an möglichen Passungen ergibt die hohe Wahrscheinlichkeitsdichte dieses speziellen Schließmaßes. Analoges gilt für Punkt B. Alle Streifen zwischen den Punkten D und B sind gleich lang, entsprechend ändert sich die Wahrscheinlichkeitsdichte des Schließmaßes nicht und bleibt auf ihrem Maximum. Zu Punkt C hin nimmt die Länge der Streifen wieder linear ab, bis an Punkt C die Wahrscheinlichkeitsdichte wieder Null erreicht hat. Hier treffen die kleinstmögliche Welle auf die größtmögliche Nabe und das Schließmaß wird maximal. Auch diese Kombination ist sehr unwahrscheinlich. Es ergibt sich für das Schließmaß eine trapezförmige Wahrscheinlichkeitsverteilung<sup>7</sup>. Hier wird der erste Unterschied zwischen arithmetischer und statistischer Tolerierung erkennbar: Bei der arithmetischen Tolerierung wird für das Schließmaß anstelle einer Trapezverteilung eine Rechteckverteilung angenommen. Dies ermöglicht zunächst<sup>8</sup> noch keinen praktischen Vorteil, zeigt aber, dass die arithmetische Tolerierung die tatsächlichen Verhältnisse bei genauer Betrachtung nur stark vereinfacht modelliert.

Das konkrete Schließmaß dieser H7/h6-Passung kann durch Betrachtung der Ränder der Trapezverteilung, welche sich aus den Punkten A und C ergeben, abgelesen werden. Der Rechenweg ist identisch zur arithmetischen Tolerierung (siehe Kapitel 3):

$$M_0 = M_N - M_W = 10_{-0,000}^{+0,015} mm - 10_{-0,009}^{+0,000} mm = 0_{-0,000}^{+0,024} mm \quad (46)$$

---

<sup>7</sup> Mathematisch wurde die Faltung zweier Rechteckfunktionen durchgeführt. Dies ergibt eine Trapezfunktion (oder bei zwei Rechteckfunktionen gleicher Breite eine Dreiecksfunktion, da dann das mittlere Plateau der Trapezfunktion verschwindet).

<sup>8</sup> Es ist tatsächlich möglich, aus dieser Erkenntnis einen kleinen Gewinn zu ziehen: Nimmt man an, dass in der Trapezfunktion nur 99,73% (entsprechend  $\pm 3\sigma$ ) aller Passungen den Anforderungen genügen müssen, so ergibt sich eine minimal kleinere Schließmaßtoleranz, da die Trapezfunktion an ihren beiden Enden abgeschnitten werden kann. Die Schließmaßtoleranz wird dadurch symmetrisch um 0,0012 kleiner. Auf den nächsten Tausendstel gerundet ergibt dies eine Schließmaßtoleranz von  $M_0 = 0_{-0,000}^{+0,023}$ . Dies soll im Weiteren jedoch vernachlässigt werden. Vergleiche dazu auch [1, S. 38].

### 4.3 Welle und Nabe mit jeweils normalverteilten Istmaßen

Wie bereits gezeigt wurde, basiert die arithmetische Tolerierung auf dem Grundsatz, dass die Einzeltoleranzen der Maßkette jeweils eine Rechteckverteilung aufweisen. Dies ist jedoch nur unter bestimmten Umständen der Fall. Hierzu müssen die Fehlereinflüsse im Produktionsprozess betrachtet werden: Sie können nach zufälligen und systematischen Fehlern unterschieden werden. Durch das gleichzeitige Wirken vieler unabhängiger zufälliger Fehlereinflüsse (wie Temperaturschwankungen, Inhomogenitäten im Material, Wiederholgenauigkeiten der Werkzeugmaschine etc.) stellt sich nach dem zentralen Grenzwertsatz zumeist eine Normalverteilung ein. Treten zusätzliche systematische Fehlereinflüsse wie unkorrigierter Werkzeugverschleiß oder die Änderung von Prozessparametern auf, so führt dies zu einer kontinuierlichen Verschiebung des Mittelwertes dieser aus den zufälligen Fehlern entstehenden Normalverteilung. Wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung über einen längeren Zeitraum betrachtet, stellt sich im zeitlichen Mittel durch die Überlagerung dieser sich verschiebenden Normalverteilungen dann näherungsweise die bisher betrachtete Rechteckverteilung ein. Sie ist bei Produkten aus Einzelfertigung (also bspw. dem Prototypenbau) anwendbar, da hier systematische Fehler nicht zuverlässig erkannt und damit behoben werden können [1, S. 19].

Erfahrungen zeigen, dass bei der hier beispielhaft betrachteten Großserienfertigung solche systematischen Fehlerquellen weitgehend erkannt und vermieden werden können. Der Grundsatz 2 der arithmetischen Tolerierung gilt somit nicht mehr. Für die Einführung der statistischen Tolerierung muss dieser Grundsatz somit wie folgt abgeändert werden:

- 2) Jedes Toleranzfeld besitzt eine beliebige Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Im Folgenden soll von daher der Fall betrachtet werden, in dem Welle und Nabe jeweils normalverteilte Istmaße aufweisen. Die gegebenen Einzelmaße sind identisch zur vorherigen Betrachtung (siehe Tabelle 8).

Bauteil	Einzelmaß	Kleinstmaß	Größtmaß
Welle, h6, <b>normalverteilt</b>	$M_W = 10^{+0,000}_{-0,009}$	$G_{u,W} = 9,991$	$G_{o,W} = 10,000$
Nabe, H7, <b>normalverteilt</b>	$M_N = 10^{+0,015}_{-0,000}$	$G_{u,N} = 10,000$	$G_{o,N} = 10,0015$

*Tabelle 8: Maßübersicht für Beispiel 4.3, Änderungen fettgedruckt,  
alle Angaben in mm*

## Zusammenhang zwischen Toleranzfeldbreite und Standardabweichung

Die beiden Einzelmaße müssen nun durch zwei Normalverteilungen modelliert werden. Eine Normalverteilung ist durch die beiden Parameter Mittelwert  $\mu$  und Standardabweichung  $\sigma$  charakterisiert. Wird eine Normalverteilung nach einer Stichprobe modelliert, so gilt:

$$\mu = \bar{x} \quad (47)$$

$$\sigma = s. \quad (48)$$

Der Mittelwert  $\bar{x}$  kann jeweils aus der Toleranzmitte der Einzelmaße berechnet werden:

$$\bar{x}_i = \frac{G_{o,i} + G_{u,i}}{2} \quad (49)$$

Zur Bestimmung der Standardabweichung  $s$  kann man folgende Überlegung treffen: Das Toleranzfeld ist symmetrisch bzgl. der Toleranzmitte wie auch die Standardabweichung symmetrisch bzgl. des Mittelwertes der Normalverteilung ist. Zwischen Standardabweichung  $s$  und Toleranzfeldbreite  $T$  muss somit ein Umrechnungsfaktor  $u$  existieren:

$$T_i = 2 \cdot u \cdot s_i \quad (50)$$

Der Faktor 2 in der Gleichung bewirkt die korrekte Umrechnung zwischen der symmetrisch zum Mittelwert liegenden Toleranzfeldbreite und dem Bereich  $\pm 1\sigma$  (siehe Abbildung 14).

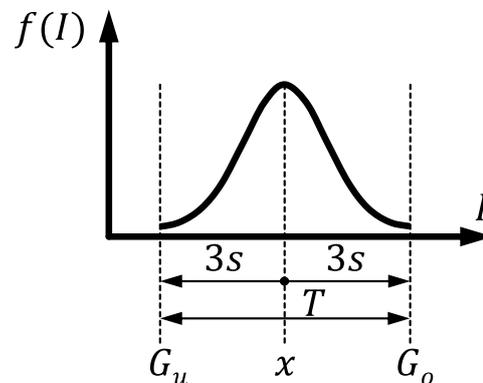


Abbildung 14: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f(I)$  bei normalverteilten Istmaßen  $I$

Der Umrechnungsfaktor  $u$  beschreibt somit, wie viele Standardabweichungen die halbseitige Toleranzfeldbreite umfasst. Die Wahl von  $u$  wird für die Einzelmaße durch die Definition des Prozessfähigkeitsindex in der DIN ISO 22514-2 [5] bestimmt. Der Prozessfähigkeitsindex  $C_p$  ist eine auf ein spezifisches Merkmal bezogene Qualitätskenngröße eines Prozesses. Er wird aus der geforderten Toleranzfeldbreite  $T$  und der tatsächlichen Standardabweichung des Prozesses  $\hat{\sigma}$  berechnet:

$$C_p = \frac{T}{6 \cdot \hat{\sigma}} \quad (51)$$

Ist  $C_p < 1$ , so ist die sechsfache Standardabweichung des Prozesses größer als die geforderte Toleranzfeldbreite und der Prozess gilt als „nicht fähig“. Im Grenzfall ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung der geforderten Toleranz identisch mit der des Prozesses und es gilt  $C_p = 1$ . Für die Bestimmung von  $u$  geht man von diesem Worst-Case aus. Da beide Wahrscheinlichkeitsverteilungen als Normalverteilungen angenommen werden, gilt im Grenzfall  $\hat{\sigma} = s$ . Es gilt dann<sup>9</sup>:

$$C_p = 1 = \frac{T}{6 \cdot \hat{\sigma}} = \frac{2 \cdot u \cdot s}{6 \cdot \hat{\sigma}} \quad (52)$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot u \cdot s = 6 \cdot \hat{\sigma} = 6 \cdot s \quad (53)$$

$$\Leftrightarrow u = 3 \quad (54)$$

Für den Zusammenhang zwischen  $T$  und  $s$  gilt somit:

$$T_i = 6 \cdot s_i \quad (55)$$

Daraus folgt für  $s$ :

$$s_i = \frac{T_i}{6} = \frac{G_{o,i} - G_{u,i}}{6} \quad (56)$$

Mit diesen Zusammenhängen können nun aus  $u$  sowie  $G_{o,i}$  und  $G_{u,i}$  die Parameter  $\bar{x}$  und  $s$  für alle Einzelmaße bestimmt werden (siehe Tabelle 9).

Bauteil	Einzelmaß	Mittelwert	Standardabweichung
Welle, h6	$M_W = 10_{-0,009}^{+0,000}$	$\bar{x}_W = 9,9955$	$s_W = 0,0015$
Nabe, H7	$M_N = 10_{-0,000}^{+0,015}$	$\bar{x}_N = 10,0075$	$s_N = 0,0025$

*Tabelle 9: Mittelwerte und Standardabweichungen für Beispiel 4.3,  
alle Angaben in mm*

---

<sup>9</sup> Zur Vereinfachung wurde hier der Prozessfähigkeitsindex  $C_p$  betrachtet, welcher die Lage des Mittelwertes der Verteilung unberücksichtigt lässt. Der „kleinste Prozessfähigkeitsindex“  $C_{pk}$  berücksichtigt dagegen diese mögliche Abweichung. Die Betrachtung der Grenzfälle führt für beide Indizes auf das gleiche Ergebnis von  $u = 3$ .

## Grafische Bestimmung des Schließmaßes

Jetzt liegen alle Informationen vor, um ein Istmaß-Diagramm zeichnen zu können (siehe Abbildung 15).

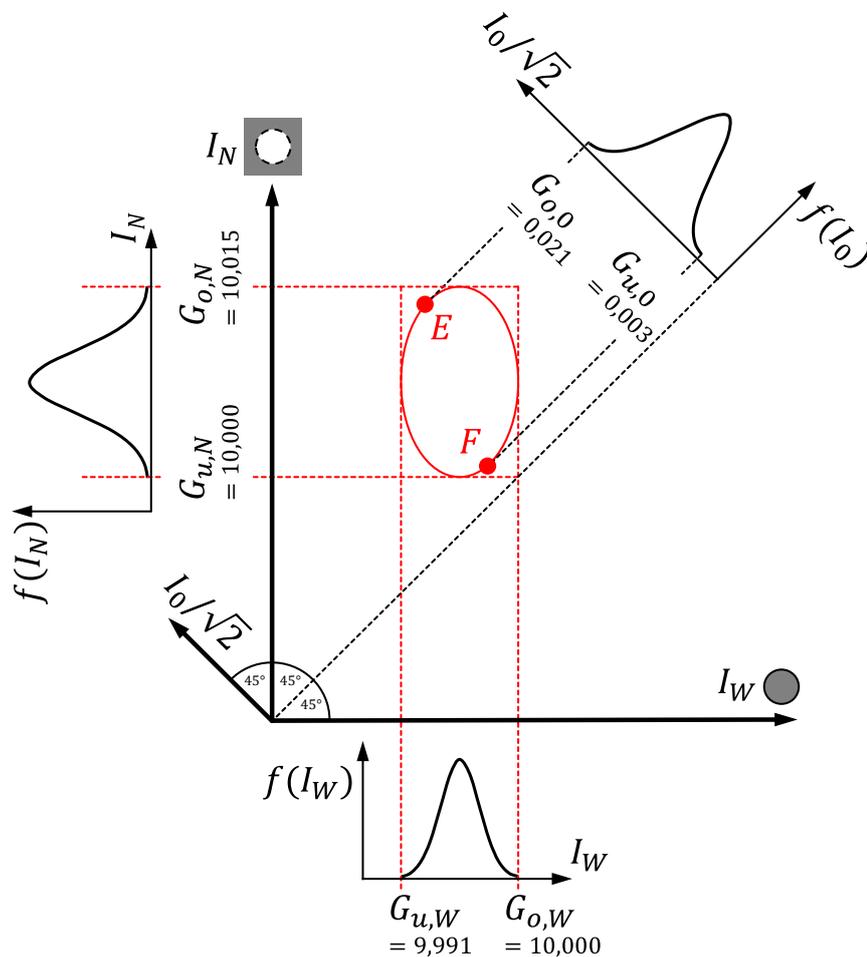


Abbildung 15: Istmaß-Diagramm für Beispiel 4.3: Welle und Nabe mit jeweils normalverteilten Istmaßen, nicht maßstäblich, alle Angaben in mm

Ausgehend von den Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Einzelmaße werden wieder die Toleranzfeldgrenzen, welche jetzt identisch mit den  $\pm 3\sigma$ -Grenzen sind, als rot gestrichelte Linien in den Diagrammbereich gezogen. Im Unterschied zu Abbildung 13 ist die Wahrscheinlichkeitsdichte im Diagrammbereich jedoch nicht mehr konstant, sondern variiert kontinuierlich, da sie sich aus der Überlagerung zweier Normalverteilungen ergibt. Sinnvoll ist hier die Betrachtung von Mengen mit konstanter Wahrscheinlichkeitsdichte im Diagrammbereich. Eine solche Menge ist der Rand der rot eingezeichneten Ellipse<sup>10</sup>. Diese

<sup>10</sup> Der Rand der Ellipse enthält alle Punkte, welche eine Wahrscheinlichkeitsdichte von  $f(0) \cdot f(3) = 0,39894 \cdot 0,00443 = 0,00177$  aufweisen.

Ellipse konstanter Wahrscheinlichkeitsdichte hat die Eigenschaft, dass sie die Verlängerungen sämtlicher  $\pm 3\sigma$ -Grenzen (gestrichelte Linien) tangiert. Es gilt, dass im Bereich zwischen zwei parallelen Tangenten an die Ellipse immer 99,73% (entsprechend  $\pm 3\sigma$ ) aller Paarungen liegen<sup>11</sup>. Man kann erkennen, dass dadurch auch das Schließmaß eine Normalverteilung aufweisen muss<sup>12</sup>.

Während bei der Berechnung der Standardabweichung aus den Einzelmaß-Toleranzfeldbreiten die Festlegung  $u = 3$  immer gilt, kann  $u$  bei der Berechnung der Schließmaß-Toleranzfeldbreite aus der Schließmaß-Standardabweichung frei gewählt werden, da mit dem Schließmaß kein Prozessfähigkeitsindex verknüpft ist. Die Wahl von  $u$  beeinflusst den Anteil der innerhalb der Toleranz liegenden Schließmaße. In diesem und allen folgenden Beispielen wird für sämtliche Schließmaße stets  $u = 3$  angesetzt. Dies vereinfacht die Istmaß-Diagramme sowie die Berechnungen und ist ein in der betrachteten Literatur gebräuchlicher Wert.

Für das Schließmaß können die  $\pm 3\sigma$ -Grenzen somit ebenfalls durch Bildung der Tangenten an die Ellipse an den Punkten E und F eingezeichnet werden. Auf diese Weise kann grafisch die Schließmaßtoleranz bestimmt werden:

$$M_0 = 0_{+0,003}^{+0,021} \quad (57)$$

---

<sup>11</sup> Beweis: Man zeichne das obige Schaubild mit zwei Standardnormalverteilungen. Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist jetzt um den Ursprung rotationssymmetrisch. An die  $\pm 3\sigma$ -Grenzen tangierend ergibt sich ein Kreis konstanter Wahrscheinlichkeitsdichte im Diagramm. Aufgrund der Rotationssymmetrie liegt nun im Bereich zwischen jedem beliebig gedrehten Paar paralleler Tangenten die gleiche Wahrscheinlichkeit. Dieses Schaubild kann in das Diagramm aus Abbildung 15 überführt werden: Dazu müssen zunächst die Mittelwerte der Standardnormalverteilungen verschoben werden. Eine Verschiebung des Mittelwertes bewirkt keine Veränderung an den gezeigten Zusammenhängen. Anschließend können durch Skalierung die Standardabweichungen übereinstimmend gemacht werden. Dadurch wird der Kreis konstanter Wahrscheinlichkeitsdichte zur Ellipse und Abstand sowie Steigung der Tangenten verändern sich. Da sich jedoch auch die Verteilung der Wahrscheinlichkeitsdichte im gleichen Maß skaliert, gilt nach wie vor, dass jedes Tangentenpaar die gleiche Wahrscheinlichkeit einschließt.

<sup>12</sup> Mathematisch wurde die Faltung zweier Normalverteilungen durchgeführt. Dies ergibt wiederum eine Normalverteilung.

Das Beispiel zeigt, dass Grundsatz 1 der arithmetischen Tolerierung nicht mehr zutrifft. Dieser wird deswegen durch Grundsatz 1 der statistischen Tolerierung ersetzt. Die Grundsätze der statistischen Tolerierung sind damit komplett und lauten:

- 1) Ein wählbarer Anteil der Schließmaße (< 100%) muss innerhalb der Toleranz liegen.
- 2) Jedes Toleranzfeld besitzt eine beliebige Wahrscheinlichkeitsverteilung.

### **Analytische Bestimmung des Schließmaßes**

Zur analytischen Berechnung dieses Maßes können der Mittelwertsatz sowie das Abweichungfortpflanzungsgesetz herangezogen werden (siehe Abschnitt 3.1.3). Für die Berechnung von linearen Maßketten gilt, dass diese stets aus der Summe der vorzeichenbehafteten Einzelmaße gebildet werden:

$$M_0 = f(M_1, M_2, \dots, M_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i M_i \quad (58)$$

Im konkreten Beispiel wird die Maßkette wie in Abschnitt 3.2.2 gebildet:

$$M_0 = (-1) \cdot M_W + (+1) \cdot M_N = M_N - M_W \quad (59)$$

Für die Mittelwerte gilt, dass diese vorzeichenbehaftet addiert werden:

$$\bar{x}_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{x}_i \quad (60)$$

Zur Berechnung der Standardabweichung des Schließmaßes kann das Abweichungfortpflanzungsgesetz in seiner vereinfachten Form genutzt werden:

$$s_0^2 = \sum_{i=1}^n (\alpha_i s_i)^2 \quad (61)$$

Diese Form macht deutlich, dass die Varianz des Schließmaßes gleich der Summe der Varianzen der Einzelmaße ist. Da gezeigt wurde, dass das Schließmaß normalverteilt sein muss, kann man nun die Formeln (55) und (61) mehrfach ineinander einsetzen und erhält so eine Berechnungsvorschrift für die Schließmaßtoleranz:

$$\begin{aligned} T_0 &= 6 \cdot s_0 = 6 \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha_i s_i)^2} = 6 \cdot \sqrt{((-1) \cdot s_W)^2 + ((+1) \cdot s_N)^2} \\ &= 6 \cdot \sqrt{\left(\frac{T_W}{6}\right)^2 + \left(\frac{T_N}{6}\right)^2} = \sqrt{T_W^2 + T_N^2} \end{aligned} \quad (62)$$

Damit können nun für das betrachtete Beispiel der H7/h6-Passung (siehe Tabelle 9) Mittelwert und Standardabweichung des Schließmaßes und daraus auch das Schließmaß  $M_0$  selbst berechnet werden:

$$\bar{x}_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{x}_i = (-1) \cdot \bar{x}_W + (+1) \cdot \bar{x}_N = 10,0075\text{mm} - 9,9955\text{mm} = 0,0120\text{mm} \quad (63)$$

$$T_0 = \sqrt{T_W^2 + T_N^2} = \sqrt{(0,009\text{mm})^2 + (0,015\text{mm})^2} = 0,0175\text{mm} \quad (64)$$

$$M_0 = \bar{x}_0 \pm \frac{T_0}{2} = 0,0120\text{mm} \pm \frac{0,0175\text{mm}}{2} = 0_{+0,003}^{+0,021}\text{mm} \quad (65)$$

#### 4.4 Vergleich zwischen rechteck- und normalverteilten Istmaßen

Um eine aussagekräftige Vergleichsmöglichkeit der Ergebnisse mit rechteck- und normalverteilten Istmaßen zu erschaffen, kann man die beiden zugehörigen Istmaß-Diagramme übereinanderlegen (siehe Abbildung 16).

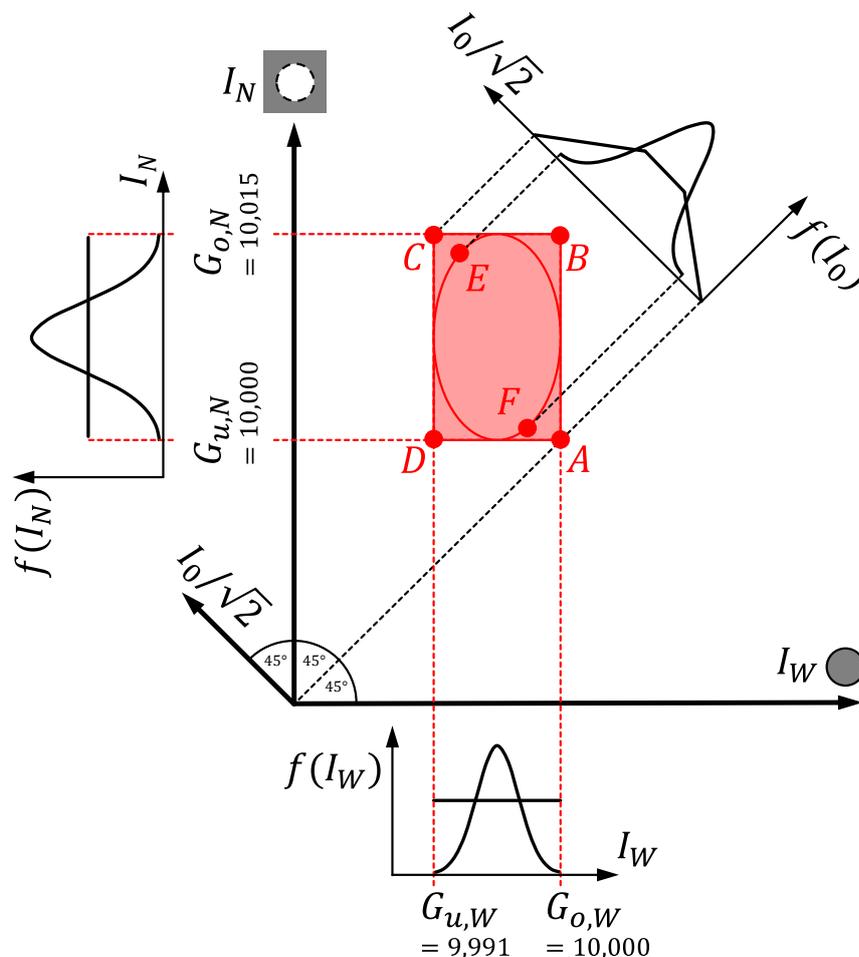


Abbildung 16: Vergleich von Abbildung 13 und Abbildung 15, nicht maßstäblich, alle Angaben in mm

Es ist zu erkennen, dass die Toleranzfeldgrenzen der Einzelmaße bei rechteckig verteilten und bei normalverteilten Istmaßen identisch sind. Die Toleranzfeldgrenzen des daraus bestimmten Schließmaßes unterscheiden sich jedoch erheblich: Bei der Annahme von normalverteilten Istmaßen liegen diese deutlich enger zusammen. Diese Reduzierung geschieht symmetrisch um die Toleranzmitte. Diese Verkleinerung des Toleranzfeldes kann man auch grafisch darstellen (siehe Abbildung 17).

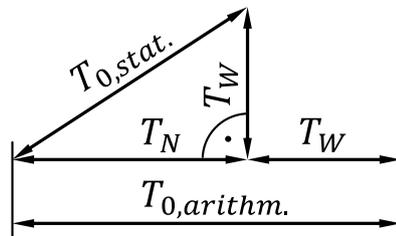


Abbildung 17: Der „Pythagoras der Toleranzen“, nicht maßstäblich, nach [3]

Bei der arithmetischen Tolerierung werden die Toleranzen vorzeichenunabhängig addiert. Dies entspricht geometrisch einer Addition kollinear liegender Vektoren. Bei der statistischen Tolerierung wird dagegen die Wurzel der Quadratsumme der Toleranzen berechnet. Geometrisch entspricht dies dem Abstand zweier Punkte im n-dimensionalen (hier zweidimensionalen) Raum, wobei jede Einzeltoleranz einer Dimension entspricht. Nach der Dreiecksungleichung ist somit die statistisch ermittelte Schließmaßtoleranz immer kleiner oder gleich der arithmetisch ermittelten Schließmaßtoleranz. Auch in dem hier vorgestellten konkreten Fall kann dies beobachtet werden (siehe Tabelle 10).

Arithmetische Schließmaßtoleranz	Statistische Schließmaßtoleranz
$M_{0,arithm.} = 0_{-0,000}^{+0,024}$	$M_{0,stat.} = 0_{+0,003}^{+0,021}$
$x_{0,arithm.} = 0,012$	$x_{0,stat.} = 0,012$
$T_{0,arithm.} = 0,024$	$T_{0,stat.} = 0,0175$

Tabelle 10: Vergleich der arithmetischen und statistischen Schließmaßtoleranz, alle Angaben in mm

### Erweiterung der Toleranzen

Das Maß der Verkleinerung der statistischen Toleranz gegenüber der arithmetischen Toleranz wird durch den Reduktionsfaktor  $r$  ausgedrückt [1, S. 64].

$$\frac{T_{0,stat.}}{T_{0,arithm.}} = r = \frac{0,0175\text{mm}}{0,024\text{mm}} = 72,9\% \quad (66)$$

Dies entspricht nahezu dem nächstkleineren Toleranzgrad. Man erkennt, dass die statistische Tolerierung im Vergleich zur arithmetischen Tolerierung bei identischen Einzelmaßen eine deutlich verkleinerte Schließmaßtoleranz ergibt. Bei gleichem Aufwand in der Serienfertigung der Welle und Nabe tritt somit real eine höhere Qualität als durch arithmetische Tolerierung angenommen auf. Möchte man diesen Vorteil von einem Qualitätsvorteil in einen Kostenvorteil umwandeln, so kann man stattdessen die Einzeltoleranzen aufweiten. Hierzu wird zunächst der Erweiterungsfaktor  $e$  berechnet [1, S. 64]:

$$e = \frac{1}{r} = \frac{1}{72,9\%} = 137,2\% \quad (67)$$

Die Einzeltoleranzen können nun jeweils mit diesem Erweiterungsfaktor aufgeweitet werden. Die Toleranzmitte bleibt dabei unverändert.

$$T_{i,neu} = T_{i,alt} \cdot e \quad (68)$$

Die Toleranzen werden dabei jeweils symmetrisch um ihren Mittelwert erweitert. Das Ergebnis für das Beispiel der Welle-Nabe-Verbindung ist in Tabelle 11 zu sehen.

Bauteil	Einzelmaß, alt	Toleranzfeldbreite alt	Toleranzfeldbreite erweitert	Einzelmaß, erweitert
Welle	$M_W = 10_{-0,009}^{+0,000}$	$T_{W,alt} = 0,0090$	$T_{W,neu} = \mathbf{0,0123}$	$M_W = 10_{-0,011}^{+0,002}$
Nabe	$M_N = 10_{-0,000}^{+0,015}$	$T_{N,alt} = 0,0150$	$T_{N,neu} = \mathbf{0,0206}$	$M_N = 10_{-0,003}^{+0,018}$

*Tabelle 11: Erweiterte Toleranzen für die Welle-Nabe-Verbindung, erweiterte Toleranzen fettgedruckt, alle Angaben in mm*

Um zu prüfen, wie gut diese neuen erweiterten Toleranzfelder das gewünschte Schließmaß erreichen, können aus diesen zur Kontrolle wiederum die Toleranzfelder des Schließmaßes berechnet werden. In Tabelle 12 sind für gegebene Einzelmaße von Welle und Nabe das Schließmaß jeweils arithmetisch und statistisch berechnet worden. In Zeile Nr. 0 sind die beiden oben bestimmten Schließmaße für die H7/h6-Welle-Nabe-Verbindung zu finden. Die nachfolgenden Zeilen berechnen jeweils das arithmetisch und statistische Schließmaß für andere Einzelmaße von Welle und Nabe. In Zeile Nr. 1 ist dies beispielsweise für Welle und Nabe mit erweiterten Toleranzfeldern geschehen.

Nr.	Bauteil	Einzelmaß	Schließmaß, arithmetisch	Schließmaß, statistisch
0	Welle, h6	$M_W = 10_{-0,009}^{+0,000}$	$M_{0,arithm.} = 0_{-0,000}^{+0,024}$	$M_{0,stat.} = 0_{+0,003}^{+0,021}$
	Nabe, H7	$M_N = 10_{-0,000}^{+0,015}$		
1	Welle, erweitert	$M_W = 10_{-0,011}^{+0,002}$	$M_{0,arithm.} = 0_{-0,005}^{+0,029}$	$M_{0,stat.} = 0_{-0,000}^{+0,024}$
	Nabe, erweitert	$M_N = 10_{-0,003}^{+0,018}$		
2	Welle, h7	$M_W = 10_{-0,015}^{+0,000}$	$M_{0,arithm.} = 0_{-0,000}^{+0,037}$	$M_{0,stat.} = 0_{+0,005}^{+0,032}$
	Nabe, H8	$M_N = 10_{-0,000}^{+0,022}$		
3	Welle, h7	$M_W = 10_{-0,015}^{+0,000}$	$M_{0,arithm.} = 0_{-0,000}^{+0,030}$	$M_{0,stat.} = 0_{+0,004}^{+0,026}$
	Nabe, H7	$M_N = 10_{-0,000}^{+0,015}$		
4	Welle, js7	$M_W = 10_{-0,0075}^{+0,0075}$	$M_{0,arithm.} = 0_{-0,003}^{+0,028}$	$M_{0,stat.} = 0_{+0,002}^{+0,023}$
	Nabe, G7	$M_N = 10_{+0,005}^{+0,020}$		

Tabelle 12: Iterative Wahl der neuen Toleranzfelder für Welle und Nabe

Es ist zu erkennen, dass die erweiterten Toleranzfelder bei statistischer Berechnung exakt dasselbe Ergebnis liefern wie die ursprünglichen Toleranzfelder bei arithmetischer Berechnung. Die Erweiterung der Toleranzen bringt also den gewünschten Effekt.

Die erweiterten Toleranzen liegen außerhalb des ISO-Systems und produzieren durch den dadurch erhöhten Prüfaufwand erhöhte Kosten. Deswegen kann man probieren, die erweiterten Toleranzfelder im ISO-System auszudrücken und muss dafür leichte Einbußen bzgl. der Größe der Toleranzerweiterung akzeptieren. Die Vergrößerung der Toleranz kann durch die Wahl eines höheren Grundtoleranzgrades abgebildet werden. Die Verschiebung des oberen Grenzabmaßes der Welle (bzw. des unteren Grenzabmaßes der Nabe) kann zunächst nicht adäquat durch die Wahl eines anderen Grundabmaßes dargestellt werden. Die erweiterte Toleranzklasse der Welle entspricht dann näherungsweise der Toleranzklasse h7 und die Nabe der Toleranzklasse H8 (Iteration 2).

Es zeigt sich, dass die sich daraus ergebende Schließmaßtoleranz etwas zu groß ist. Ein Kompromiss ist die Beibehaltung der ursprünglichen Tolerierung für die Nabe und eine Vergrößerung der kleineren und damit teureren Toleranz der Welle. Es ergibt sich ein H7/h7-Passung, deren Toleranzfeldbreite ein wenig kleiner als die gewünschte Schließmaßtoleranz ist (Iteration 3). Das Größtmaß des Schließmaßes ist jedoch größer als die Vorgabe. Die ungewöhnliche Passung G7/js7 schafft diese Abhilfe (Iteration 4). Sie erreicht bei größeren

Grundtoleranzgraden der Einzelmaße ein Toleranzfeld des Schließmaßes, welches innerhalb der Vorgaben liegt und kleiner ist als bei der arithmetischen Tolerierung. Dies zeigt noch einmal deutlich die Vorteile der statistischen Tolerierung auf.

### **Kosteneinsparungen durch Toleranzerweiterung**

Möchte man diese Vorteile in Kosteneinsparungen ausdrücken, so kann man einen quadratisch reziproken Zusammenhang zwischen Toleranzfeldbreite und Kosten annehmen (siehe [8]). Eine beispielhafte Verdoppelung der Toleranzfeldbreite bewirkt so eine Kostenreduktion auf ein Viertel. Die Kosteneinsparungen bei erweiterten Toleranzen entstehen beispielsweise dadurch, dass die Geschwindigkeit eines Prozesses auf Kosten der Toleranzen erhöht werden kann. Ist dies nicht möglich, so wird alternativ durch die erweiterten Toleranzen die Ausschussrate verringert. Der Vergleich der G7/js7-Passung mit der H7/h6-Passung ergibt:

$$\frac{C_W}{C_{W,0}} = \left( \frac{T_{W,erweitert}}{T_{W,alt}} \right)^{-2} = \left( \frac{0,015mm}{0,009mm} \right)^{-2} = 36,0\% \quad (69)$$

$$\frac{C_N}{C_{N,0}} = \left( \frac{T_{N,erweitert}}{T_{N,alt}} \right)^{-2} = \left( \frac{0,015mm}{0,015mm} \right)^{-2} = 100,0\% \quad (70)$$

Die Kosteneinsparungen durch die Anpassung der H7/h6-Passung in eine G7/js7-Passung unterscheiden sich somit für die Bauteile: Die Kosten für die Geometrie erschaffenden Fertigungsschritte der Welle werden in diesem Beispiel auf knapp ein Drittel reduziert. Die Kosten für die Nabe bleiben dagegen gleich, da sich nur die Lage der Toleranz, nicht aber die Toleranzfeldbreite verändert hat. Würde man stattdessen direkt die erweiterten Nicht-ISO-Toleranzen nutzen, so bestimmen sich die Kosteneinsparungen direkt aus dem Reduktionsbeziehungsweise Erweiterungsfaktor:

$$\frac{C_W}{C_{W,0}} = \frac{C_N}{C_{N,0}} = \left( \frac{T_{erweitert}}{T_{alt}} \right)^{-2} = r^2 = e^{-2} = (72,9\%)^2 = 53,1\% \quad (71)$$

Bei der Nutzung von Nicht-ISO-Toleranzen können somit bei beiden Bauteilen Kosten gespart werden. Hier muss im Einzelfall untersucht werden, welche Variante unter den im Betrieb gegebenen Randbedingungen insgesamt die geringeren Kosten verursacht.

## 5 Erweiterte statistische Tolerierung an Praxisbeispielen

Der bisher betrachtete Rechenweg galt nur für die Betrachtung von seriengefertigten Bauteilen, da diese typischerweise normalverteilte Istmaße aufweisen. In der Praxis können jedoch viele weitere Fälle auftreten:

- Seriengefertigte Bauteile treffen auf Einzelanfertigungen und somit Normalverteilungen auf Rechteckverteilungen
- Es wird eine Kleinserienfertigung untersucht, hier ergibt sich die bisher noch nicht betrachtete Dreiecksverteilung [1, S. 19]
- Manche Maße besitzen eine sehr große Streuung und können physisch nicht negativ werden, hier entsteht z.B. eine schiefe Normalverteilung
- Bauteile unterschiedlicher Zulieferer werden gemischt, so können Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit mehreren Maxima entstehen
- Die Schließmaßkette besteht aus mehr als zwei Bauteilen
- etc.

Für eine analytische Berechnung dieser Fälle reicht das im vorherigen Kapitel gezeigte Vorgehen nicht aus und muss daher erweitert werden. Dies soll nun schrittweise geschehen und an Beispielen aus der Praxis erläutert werden.

### 5.1 Praxisgerechte Verallgemeinerung des Rechenwegs

Die eben genannten Fälle können mit einem verallgemeinerten Berechnungsansatz abgedeckt werden. Dieser Ansatz besteht darin, die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Einzelmaße auf ihren arithmetischen Mittelwert  $\bar{x}$  sowie ihre Standardabweichung  $s$  zu reduzieren. Ist eine Stichprobe  $I_i$  mit  $n$  Werten gegeben, geschieht diese Berechnung mittels der Standardformeln:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_i \quad (72)$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (I_i - \bar{x})^2} \quad (73)$$

Ist stattdessen die Toleranz und Verteilungsfunktion eines Einzelmaßes bekannt, können Umrechnungsvorschriften<sup>13</sup> zwischen Toleranz und Standardabweichung verwendet werden (siehe Tabelle 13).

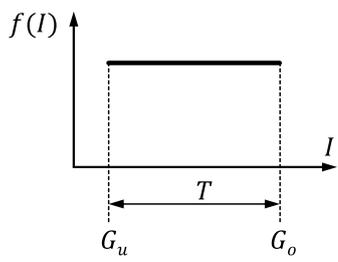
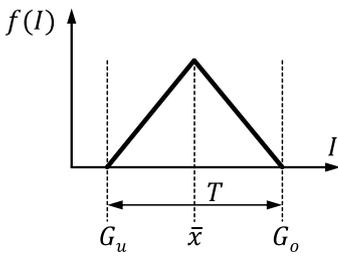
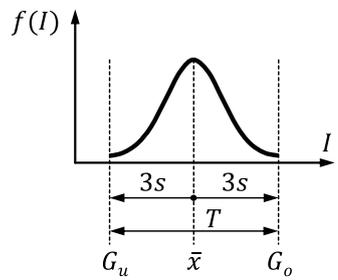
Wahrscheinlichkeitsverteilung	Umrechnungsvorschrift	Produktionsart
<p>Rechteckverteilung</p> 	$\bar{x} = \frac{G_o + G_u}{2}$ $s^2 = \frac{T^2}{12}$ $T = \sqrt{12} \cdot s$	Einzelfertigung
<p>Dreieckverteilung</p> 	$\bar{x} = \frac{G_o + G_u}{2}$ $s^2 = \frac{T^2}{24}$ $T = \sqrt{24} \cdot s$	Kleinserienfertigung
<p>Normalverteilung</p> 	$\bar{x} = \frac{G_o + G_u}{2}$ $s^2 = \frac{T^2}{36}$ $T = 6 \cdot s$	Großserienfertigung

Tabelle 13: Umrechnungsvorschriften für Toleranz und Standardabweichung bei unterschiedlichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen, siehe auch [1, S. 20]

<sup>13</sup> Ist eine Umrechnungsvorschrift nicht bekannt, so kann sie mittels der kontinuierlichen Formulierungen von Mittelwert und Standardabweichung analytisch aus der Wahrscheinlichkeitsdichtenverteilung  $f(I)$  bestimmt werden:

$$\bar{x} = \frac{1}{G_o - G_u} \int_{G_u}^{G_o} f(I) dI$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{G_o - G_u} \int_{G_u}^{G_o} (f(I) - \bar{x})^2 dI}$$

## ***Einfluss der Produktionsart auf den Umrechnungsfaktor***

Die Art der Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Einzelmaßes wird im Wesentlichen durch den zugehörigen Produktionstyp und damit die Losgröße des Produktes festgelegt. In Abschnitt 4.3 wurde gezeigt, dass mit sinkender Losgröße die systematischen Fehlereinflüsse zunehmen und sich so eine Transformation der Wahrscheinlichkeitsverteilung von der Normalverteilung zur Rechteckverteilung ergibt. Es gibt hierfür allerdings auch alternative Begründungen, welche sich auf die im jeweiligen Fall zur Verfügung stehenden Informationen stützen [10]:

Bei der Einzelfertigung ist die genaue Lage des Istmaßes innerhalb des Toleranzfeldes zumeist nicht relevant und damit auch nicht kontrolliert. Die einzigen zur Bestimmung der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung zur Verfügung stehenden Informationen sind somit nur die Toleranzfeldgrenzen aus der Konstruktionszeichnung. Bei dieser Informationslage ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung am besten durch eine Rechteckverteilung zu modellieren. Die Toleranzfeldgrenzen sind dabei identisch mit den Grenzen der Rechteckverteilung.

Bei der Kleinserienfertigung sind neben den gegebenen Toleranzfeldgrenzen zunehmend auch Informationen über das wahrscheinlichste Istmaß vorhanden, da der Einsatz von gleichbleibenden Werkzeugen und Vorrichtungen zunimmt und zunehmend auf ein in der Toleranzmitte liegendes Sollmaß produziert wird. Bei dieser Informationslage wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung am besten durch eine Dreiecksverteilung modelliert. Die Toleranzfeldgrenzen sind auch hier identisch mit den Grenzen der Dreiecksverteilung, der Mittelwert des Toleranzfeldes bestimmt das Maximum der Dreiecksverteilung.

Bei der Großserienfertigung stellt sich wie oben beschrieben häufig eine Normalverteilung ein. Die Toleranzfeldgrenzen entsprechen dann  $\pm 3\sigma$  der Normalverteilung. Da die Normalverteilung selbst keine Grenzen besitzt, unterscheidet sich diese Festlegung von der Rechteck- und Dreiecksverteilung, wo die Toleranzfeldgrenzen die festen Grenzen der jeweiligen Verteilung festlegen.

Wird ein bestimmtes Toleranzfeld jeweils durch Rechteck-, Dreieck- und Normalverteilung nach den beschriebenen Vorgehensweisen modelliert, so ist der Mittelwert jeweils identisch, die Standardabweichungen unterscheiden sich jedoch. Die Rechteckverteilung weist die größte Standardabweichung auf, die Dreiecksverteilung eine mittlere und die Normalverteilung die kleinste. Dies liegt am Beispiel der Rechteckverteilung daran, dass hier die möglichen Istmaße im Schnitt weiter vom Mittelwert der Verteilung entfernt sind als bei den beiden anderen Verteilungen.

Ist so anhand der Produktionsart eine geeignete Wahrscheinlichkeitsverteilung gewählt worden, können sämtliche vorliegenden Einzelmaße durch Mittelwert und Standardabweichung abgebildet werden. Die Bestimmung des Schließmaßes geschieht dann

analog zum Vorgehen in Kapitel 4.3. Es werden also alle Mittelwerte entsprechend der Maßkette vorzeichenrichtig addiert sowie alle Varianzen addiert (siehe Gleichung (60) und (61)). Dadurch erhält man Mittelwert und Standardabweichung des Schließmaßes.

Um Rückschlüsse auf die Toleranz des Schließmaßes zu erhalten, muss bekannt sein, welcher Wahrscheinlichkeitsverteilung diese entspricht. Nach [1, S. 37] kann vereinfacht davon ausgegangen werden, dass mit Ausnahme des in Kapitel 4.2 besprochenen Sonderfalls zweier Rechteckverteilungen das Schließmaß stets normalverteilt ist<sup>14</sup>.

## 5.2 KFZ-Getriebe mit linearer Maßkette

Zur Verdeutlichung des beschriebenen Vorgehens wird hier ein Beispiel in Anlehnung an [1, S. 59] gezeigt und um Fertigungsvarianten sowie eine verbesserte Toleranzoptimierung erweitert werden. Es wird die in Abbildung 18 gezeigte Kfz-Getriebebaugruppe untersucht.

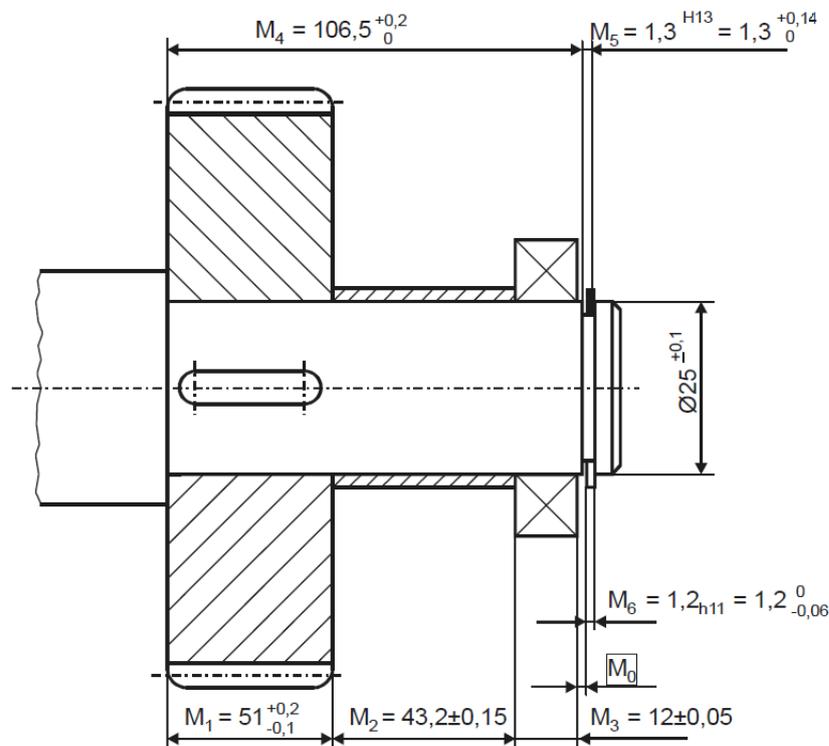


Abbildung 18: Maßkette für Beispiel 5.2: Kfz-Getriebebaugruppe,  
alle Angaben in mm [1, S. 59]

<sup>14</sup> Nach dem zentralen Grenzwertsatz gilt diese Annahme eigentlich erst ab einer Kombination von mindestens vier Einzelmaßen mit jeweils beliebigen Verteilungen oder wenn mindestens eines der Einzelmaße eine Normalverteilung aufweist. Für praktische Anwendungen kann diese Forderung jedoch etwas gelockert werden.

Auf einem Wellenabsatz sind hintereinander ein Zahnrad, eine Distanzhülse und ein Wälzlager montiert. Alle drei Bauteile werden durch einen Sicherungsring gegen axiales Verschieben gesichert<sup>15</sup>. Die Maße und Toleranzen der Bauteile sind in Tabelle 14 aufgelistet.

Bauteil	Einzelmaß	Kleinstdmaß	Größtmaß	Toleranzfeldbreite
Zahnrad	$M_1 = 51^{+0,20}_{-0,10}$	$G_{u,1} = 50,90$	$G_{o,1} = 51,20$	$T_1 = 0,30$
Distanzhülse	$M_2 = 43,2^{+0,15}_{-0,15}$	$G_{u,2} = 43,05$	$G_{o,2} = 43,35$	$T_2 = 0,30$
Wälzlager	$M_3 = 12^{+0,05}_{-0,05}$	$G_{u,3} = 11,95$	$G_{o,2} = 12,05$	$T_3 = 0,10$
Wellenabsatz	$M_4 = 106,5^{+0,20}_{-0,00}$	$G_{u,4} = 106,50$	$G_{o,4} = 106,70$	$T_4 = 0,20$
Sicherungsringnut	$M_5 = 1,3^{+0,14}_{-0,00}$	$G_{u,5} = 1,30$	$G_{o,5} = 1,44$	$T_5 = 0,14$
Sicherungsring	$M_6 = 1,2^{+0,00}_{-0,06}$	$G_{u,6} = 1,14$	$G_{o,6} = 1,20$	$T_6 = 0,06$

Tabelle 14: Maßübersicht für Beispiel 5.2, alle Angaben in mm

Damit die Montage möglich ist, muss an der gezeigten Stelle  $M_0$  ein positives Spiel vorhanden sein. Die dafür zu berechnende Maßkette ist in Abbildung 19 dargestellt und ergibt sich wie folgt:

$$M_0 = -M_1 - M_2 - M_3 + M_4 + M_5 - M_6 \quad (74)$$

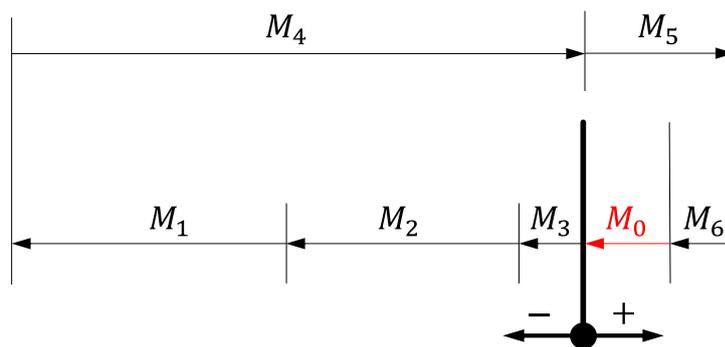


Abbildung 19: Maßplan für Beispiel 5.2, nicht maßstäblich, nach [1, S. 60]

<sup>15</sup> Die Art der gezeigten konstruktiven Ausführung ist für die im Beispiel gezeigten Zusammenhänge ohne Belang.

Die arithmetische Tolerierung ergibt:

$$M_0 = -51_{-0,10}^{+0,20}mm - 43,2_{-0,15}^{+0,15}mm - 12_{-0,05}^{+0,05}mm + 106,5_{-0,00}^{+0,20}mm + 1,3_{-0,00}^{+0,14}mm - 1,2_{-0,06}^{+0,00}mm = 0,4_{-0,40}^{+0,70}mm \quad (75)$$

Man erkennt, dass die Toleranzen so gewählt sind, dass eine Montage immer möglich ist. Nun soll die Schließmaßtoleranz statistisch berechnet werden.

### 5.2.1 Statistische Schließmaßberechnung

Der in Abschnitt 5.1 aufgezeigte Rechenweg erschafft sogar bei Rechteckverteilungen in der Maßkette Kostenvorteile gegenüber der arithmetischen Tolerierung. Um dies zu zeigen, werden drei verschiedene Szenarien betrachtet. Den Szenarien gemein sind die angenommene Normalverteilung bei dem Wälzlager sowie dem Sicherungsring, da dies seriengefertigte Standardbauteile sind. Im ersten Szenario wird angenommen, dass alle Bauteile Einzelanfertigungen für einen Prototyp sind, entsprechend werden sie rechteckverteilt modelliert. Im zweiten Szenario werden alle Bauteile in Kleinserie gefertigt und damit durch Dreiecksverteilungen modelliert. Im letzten Szenario stammen alle Bauteile aus Großserienfertigung und werden daher mittels der Normalverteilung modelliert<sup>16</sup>.

#### ***Berechnung von Mittelwert und Standardabweichung der Einzelmaße***

Es werden für alle drei Szenarien Mittelwert und Standardabweichung nach Tabelle 13 berechnet. Die Berechnung für das Zahnrad (Index 1) sieht somit beispielhaft wie folgt aus:

Mittelwert für Prototyp, Kleinserie und Großserie:

$$\bar{x}_1 = \frac{G_{o,1} + G_{u,1}}{2} = \frac{51,20mm + 50,90mm}{2} = 51,05mm \quad (76)$$

Standardabweichung für Prototyp:

$$s_1 = \frac{T_1}{\sqrt{12}} = \frac{0,30mm}{\sqrt{12}} = 0,0866mm \quad (77)$$

---

<sup>16</sup> In der Praxis kann es auch vorkommen, dass die Nicht-Standard-Bauteile uneinheitliche Verteilungen aufweisen. Dies ist z.B. bei einer Modifikation eines Massenproduktes der Fall. Das Vorgehen ist aber dennoch wie beschrieben. Die erzielbaren Ergebnisse liegen dann zwischen den hier gezeigten Szenarien.

Standardabweichung für Kleinserie:

$$s_1 = \frac{T_1}{\sqrt{24}} = \frac{0,30\text{mm}}{\sqrt{24}} = 0,0612\text{mm} \quad (78)$$

Standardabweichung für Prototyp:

$$s_1 = \frac{T_1}{6} = \frac{0,30\text{mm}}{6} = 0,0500\text{mm} \quad (79)$$

Die verbliebenen Bauteile (Index 2 bis 6) werden analog berechnet. Die Ergebnisse für alle Bauteile sind in Tabelle 15 dargestellt.

Bauteil	Einzelmaß	Mittelwert	Standardabweichungen		
			Prototyp	Kleinserie	Großserie
Zahnrad	$M_1 = 51_{-0,10}^{+0,20}$	$\bar{x}_1 = 51,05$	$s_1 = 0,0866$	$s_1 = 0,0612$	$s_1 = 0,0500$
Distanzhülse	$M_2 = 43,2_{-0,15}^{+0,15}$	$\bar{x}_2 = 43,20$	$s_2 = 0,0866$	$s_2 = 0,0612$	$s_2 = 0,0500$
Wälzlager	$M_3 = 12_{-0,05}^{+0,05}$	$\bar{x}_3 = 12,00$	$s_3 = 0,0167$		
Wellenabsatz	$M_4 = 106,5_{-0,00}^{+0,20}$	$\bar{x}_4 = 106,60$	$s_4 = 0,0577$	$s_4 = 0,0408$	$s_4 = 0,0333$
Sicherungsringnut	$M_5 = 1,3_{-0,00}^{+0,14}$	$\bar{x}_5 = 1,37$	$s_5 = 0,0404$	$s_5 = 0,0286$	$s_5 = 0,0233$
Sicherungsring	$M_6 = 1,2_{-0,06}^{+0,00}$	$\bar{x}_6 = 1,17$	$s_6 = 0,0100$		

Tabelle 15: Mittelwerte und Standardabweichungen für Beispiel 5.2,  
alle Angaben in mm

### Bestimmung des Schließmaßes

Hiermit können nun nach Formel (60) der Mittelwert und nach Formel (61) die Standardabweichungen des Schließmaßes für alle drei Szenarien bestimmt werden. Für den Prototyp wird also beispielhaft gerechnet:

$$\begin{aligned} \bar{x}_0 &= \sum_{i=1}^n \bar{x}_i = -\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \bar{x}_3 + \bar{x}_4 + \bar{x}_5 - \bar{x}_6 \\ &= -51,05\text{mm} - 43,20\text{mm} - 12,00\text{mm} + 106,60\text{mm} + 1,37\text{mm} - 1,17\text{mm} \\ &= 0,55\text{mm} \end{aligned} \quad (80)$$

$$\begin{aligned}
 s_0 &= \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2 + s_5^2 + s_6^2} \\
 &= \sqrt{(0,0866\text{mm})^2 + \dots + (0,0100\text{mm})^2} \\
 &= 0,1426\text{mm}
 \end{aligned}
 \tag{81}$$

Jetzt kann hieraus die Toleranz des normalverteilten Schließmaßes berechnet werden:

$$T_0 = 6 \cdot s_0 = 6 \cdot 0,1426\text{mm} = 0,8558\text{mm} \tag{82}$$

Mit dem Nennschließmaß von  $N_0 = 0,4$  kann hiermit nun das tolerierte Schließmaß berechnet werden:

$$M_0 = N_0 e_s = N_0 \frac{G_{0,o} - N_0}{G_{0,u} - N_0} = N_0 \frac{\bar{x}_0 + \frac{T_0,neu}{2} - N_0}{\bar{x}_0 - \frac{T_0,neu}{2} - N_0} = 0,4 \frac{0,55 + \frac{0,8558}{2} - 0,4}{0,55 - \frac{0,8558}{2} - 0,4} \text{mm} = 0,4^{+0,578}_{-0,278} \text{mm} \tag{83}$$

Für die drei Szenarien ergibt sich Tabelle 16.

	Prototyp	Kleinserie	Großserie
Mittelwert	$\bar{x}_0 = 0,55$		
Standardabweichung	$s_0 = 0,1426$	$s_0 = 0,1018$	$s_0 = 0,0839$
Toleranz	$T_0 = 0,8558$	$T_0 = 0,6107$	$T_0 = 0,5032$
Schließmaß	$M_0 = 0,4^{+0,578}_{-0,278}$	$M_0 = 0,4^{+0,455}_{-0,155}$	$M_0 = 0,4^{+0,402}_{-0,102}$

Tabelle 16: Schließmaße für Beispiel 5.2, alle Angaben in mm

Abbildung 20 vergleicht die Schließmaße der drei Szenarien mit dem Schließmaß der arithmetischen Tolerierung.

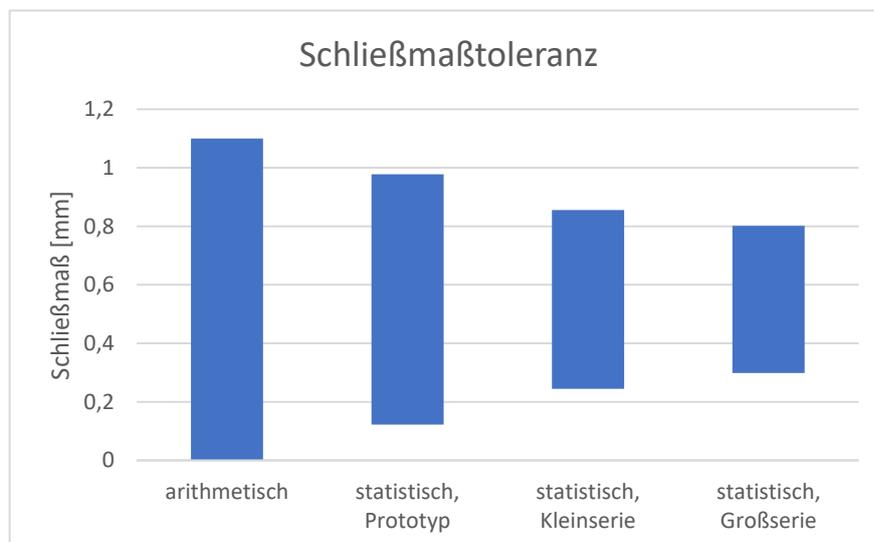


Abbildung 20: Schließmaßtoleranzen für Beispiel 5.2: Vergleich der arithmetischen Berechnung mit 3 Varianten der statistischen Berechnung

Vergleicht man das statistisch bestimmte Ergebnis des Prototyp-Szenarios mit der arithmetischen Tolerierung (siehe Gleichung (75)), so fällt auf, dass das Schließmaß bei statistischer Berechnung deutlich kleiner ausfällt als bei arithmetischer Berechnung. Auch bei einer Vielzahl an rechteckig verteilten Maßen in der Maßkette kann also ein Vorteil aus der statistischen Tolerierung gezogen werden.

Vom Prototyp über die Kleinserie bis hin zur Großserie wird die Toleranz des Schließmaßes stets kleiner. Dies liegt an der unterschiedlichen Modellierung der Istmaße in den Szenarien. Von Rechteck- über Dreiecks- bis zur Normalverteilung hin nimmt die Zentrierung der Istmaße um ihren Mittelwert stets zu. Immer weniger Istmaße liegen somit an den Grenzen des Toleranzfeldes. Dadurch treten Kombinationen von Bauteilen, bei denen sämtliche Istmaße grenzwertig sind, immer seltener auf. Hierdurch wird auch die Streuung des Schließmaßes kleiner und die  $3\sigma$ -Grenzen rücken zusammen.

Je größer die Produktion somit angelegt ist, desto stärker weichen arithmetische und statistische Tolerierung voneinander ab. Da die statistische Tolerierung ein genaueres Modell der Toleranzen gegenüber der arithmetischen Tolerierung darstellt, verschenkt die arithmetische Tolerierung gerade bei hohen Losgrößen viel Potenzial.

### **Erweiterung der Toleranzen**

Dieses Potenzial kann wie in den Formeln (66) bis (68) gezeigt in eine Aufweitung der Toleranzen der Einzelmaße umgerechnet werden. Für die Prototypenfertigung ergibt sich beispielsweise folgende Rechnung:

$$e = \frac{1}{r} = \frac{T_{0,arithm.}}{T_{0,stat.}} = \frac{1,1000mm}{0,8558mm} = 128,5\% \quad (84)$$

Die Toleranz der Zahnradbreite kann damit wie folgt erweitert werden:

$$T_{1,neu} = T_{1,alt} \cdot e = 0,30mm \cdot 128,5\% = 0,386mm \quad (85)$$

Mit Mittelwert  $x_1$  und Nennmaß  $N_1$  kann daraus das nun wie in Gleichung (85) das erweiterte Einzelmaß bestimmt werden:

$$M_{1,neu} = 51_{-0,143}^{+0,243}mm \quad (86)$$

Da das Wälzlager und der Sicherungsring zugekaufte Standardbauteile sind, können deren Toleranzen nicht erweitert werden. Zur Kontrolle der erweiterten Einzelmaße kann mit diesen erneut die zum Szenario zugehörige statistische Schließmaßtoleranz berechnet werden. Auch die Kostenersparnisse der einzelnen Fertigungsschritte können nach dem quadratisch reziproken Ansatz aus Formel (69) und (70) abgeschätzt werden. Um die Kostenersparnisse eines gesamten Szenarios abschätzen zu können, wird im Folgenden stark vereinfacht

angenommen, dass alle Fertigungsschritte dieselben Kosten verursachen. Für das Szenario des Prototyps ergibt sich die Kostenreduktion dann wie folgt:

$$\frac{C}{C_0} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^6 \left( \frac{T_{i,neu}}{T_{i,alt}} \right)^{-2} = \frac{1}{6} \cdot \left[ \left( \frac{0,3856mm}{0,3000mm} \right)^{-2} + \dots + \left( \frac{0,06mm}{0,06mm} \right)^{-2} \right] = 73,7\% \quad (87)$$

Die Ergebnisse für alle Szenarien fasst die Tabelle 17 zusammen.

Bauteil	Einzelmaß, alt	Einzelmaß, erweitert für Prototyp	Einzelmaß, erweitert für Kleinserie	Einzelmaß, erweitert für Großserie
Erweiterungs- faktor	-	$e = 128,5\%$	$e = 180,1\%$	$e = 218,6\%$
Zahnrad	$M_1 = 51^{+0,20}_{-0,10}$	$M_1 = 51^{+0,243}_{-0,143}$	$M_1 = 51^{+0,320}_{-0,220}$	$M_1 = 51^{+0,378}_{-0,278}$
Distanzhülse	$M_2 = 43,2^{+0,15}_{-0,15}$	$M_2 = 43,2^{+0,193}_{-0,193}$	$M_2 = 43,2^{+0,270}_{-0,270}$	$M_2 = 43,2^{+0,328}_{-0,328}$
Wälzlager	$M_3 = 12^{+0,05}_{-0,05}$			
Wellen- absatz	$M_4 = 106,5^{+0,20}_{-0,00}$	$M_4 = 106,5^{+0,229}_{-0,029}$	$M_4 = 106,5^{+0,280}_{-0,080}$	$M_4 = 106,5^{+0,319}_{-0,119}$
Sicherungs- ringnut	$M_5 = 1,3^{+0,10}_{-0,00}$	$M_5 = 1,3^{+0,160}_{-0,020}$	$M_5 = 1,3^{+0,196}_{-0,056}$	$M_5 = 1,3^{+0,223}_{-0,083}$
Sicherungs- ring	$M_6 = 1,2^{+0,00}_{-0,06}$			
Schließmaß Kontrolle	$M_{0,a} = 0,4^{+0,70}_{-0,40}$	$M_0 = 0,4^{+0,698}_{-0,398}$	$M_0 = 0,4^{+0,693}_{-0,393}$	$M_0 = 0,4^{+0,688}_{-0,388}$
Relative Kosten	$\frac{C_0}{C_0} = 100,0\%$	$\frac{C}{C_0} = 73,7\%$	$\frac{C}{C_0} = 53,9\%$	$\frac{C}{C_0} = 47,3\%$

Tabelle 17: Erweiterte Toleranzen und relative Kosten für Beispiel 5.2,  
alle Angaben in mm

In allen drei Szenarien können die Toleranzen der Einzelmaße durch statistische Tolerierung so erweitert werden, dass das für die Funktion notwendige Schließmaß beibehalten oder verkleinert wird. Dies verringert in jedem Fall die Kosten für die maßschaffenden Fertigungsschritte. Im Falle der Großserienfertigung können die Kosten für die relevanten Fertigungsschritte potenziell sogar mehr als halbiert werden. Da die Toleranz des Wälzlagers und des Sicherungsringes nicht erweitert werden können, wird auf einen Teil des

Erweiterungspotenzials verzichtet. Aus diesem Grund sind die zur Kontrolle berechneten Schließmaße allesamt leicht enger toleriert als die Vorgabe. Durch einen Verzicht auf die Erweiterung einzelner Maße ist man somit stets auf der sicheren Seite.

## 5.2.2 Optimierung der Toleranzen durch Angleichung

Die Toleranzen im vorangegangenen Beispiel und damit auch die Fertigungskosten können durch Methoden der statistischen Tolerierung noch weiter optimiert werden. Hierzu kann untersucht werden, welchen Einfluss die Toleranz eines Einzelmaßes auf die Toleranz des Schließmaßes besitzt. Die Verteilung der Varianzen in einer Maßkette ermöglicht direkt eine Aussage über die sog. Beitragsleister dieser Maßkette [1, S. 48].

### Ausgangssituation

Stellt man die prozentualen Anteile der Varianzen der jeweiligen Ausgangssituation der drei betrachteten Szenarien grafisch dar, erhält man Abbildung 21.

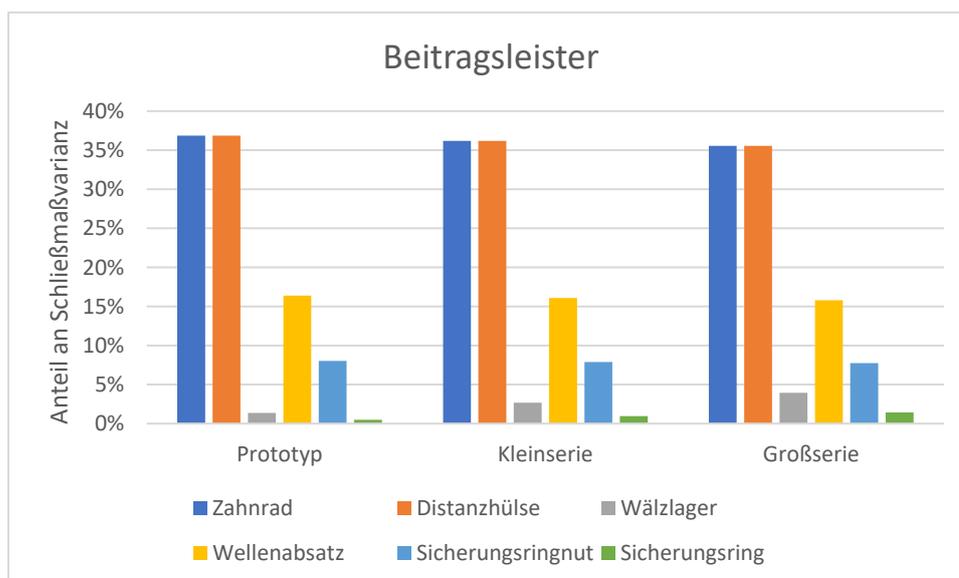


Abbildung 21: Beitragsleister für Beispiel 5.2, Ausgangssituation

Es ist zu erkennen, dass sich die Verhältnisse bei den verschiedenen Fertigungsvarianten nur leicht unterscheiden. Dies liegt am Einfluss der beiden Standardteile, welche in allen drei Fällen als normalverteilt angenommen werden. Bei gleicher Toleranz weist eine Rechteckverteilung eine größere rechnerische Standardabweichung als eine durch  $\pm 3\sigma$ -Grenzen modellierte Normalverteilung auf. Der Anteil der Nicht-Standard-Bauteile wiegt bei der Prototypenfertigung daher mehr als in der Kleinserienfertigung und dort wiederum mehr als in der Großserienfertigung. Das Verhältnis zwischen den Nicht-Standard-Bauteilen ist in allen drei Fällen gleich. Den größten Beitrag auf die Schließmaßvarianz haben die Breite des Zahnrads und der Distanzhülse. Wesentlich geringer ist der Beitrag der Breite des Wellenabsatzes und der Breite der Sicherungsringnut.

Diese Aufteilung der Varianzen verändert sich auch durch die im vorherigen Unterkapitel gezeigte Toleranzerweiterung nicht wesentlich und ist nicht optimal. Für eine bestmögliche Toleranzerweiterung ist anzustreben, dass alle Einzelmaße einen ähnlich großen Einfluss auf die Schließmaßtoleranz haben. Hierzu sollten folglich auch die Varianzen ähnlich groß sein. Unterscheiden sich die Varianzen stark, so haben die Einzelmaße mit geringen Varianzen kaum Einfluss auf die Varianz des Schließmaßes und werden dementsprechend zu präzise gefertigt, was unnötig erhöhte Kosten mit sich bringt.

### ***Angleichung der Varianzen***

Im vorliegenden Beispiel sollte also probiert werden, die Toleranzen von Wellenabsatz, Sicherungsringnut, Zahnrad und Distanzhülse aneinander anzugleichen. Der Ansatz besteht darin, die Varianz des zu erzielenden Schließmaßes gleichmäßig auf die Einzelmaße aufzuteilen. Hierzu wird zunächst die Varianz des Soll-Schließmaßes berechnet:

$$s_0^2 = \frac{T_0^2}{36} = \frac{(1,1\text{mm})^2}{36} = 0,0336\text{mm}^2 \quad (88)$$

In diese Varianz fließen die Varianzen aller Einzelmaße ein. Da die Toleranzen und damit die Varianzen von Wälzlager  $s_3^2$  und Sicherungsring  $s_6^2$  nicht verändert werden können, steht für die restlichen Einzelmaße 1,2,4 und 5 nur eine verringerte Restvarianz  $s_{1,2,4,5}^2$  zur Verfügung:

$$\begin{aligned} s_{1,2,4,5}^2 &= s_0^2 - s_3^2 - s_6^2 = 0,0336\text{mm}^2 - 0,0167\text{mm}^2 - 0,0100\text{mm}^2 \\ &= 0,0332\text{mm}^2 \end{aligned} \quad (89)$$

Diese Restvarianz kann nun gleichmäßig auf die vier Einzelmaße aufgeteilt werden:

$$s_1^2 = s_2^2 = s_4^2 = s_5^2 = \frac{s_{1,2,4,5}^2}{4} = \frac{0,0332\text{mm}^2}{4} = 0,0083\text{mm}^2 \quad (90)$$

Aus diesen Varianzen für die Einzelmaße können nun auf dem bekannten Weg je nach betrachtetem Szenario die Einzeltoleranzen errechnet werden. Die Ergebnisse inkl. Kontrollrechnung und Kostenreduktion sind in Tabelle 18 zusammengefasst.

Bauteil	Einzelmaß, alt	Einzelmaß, optimiert für Prototyp	Einzelmaß, optimiert für Kleinserie	Einzelmaß, optimiert für Großserie
Zahnrad	$M_1 = 51_{-0,10}^{+0,20}$	$M_1 = 51_{-0,108}^{+0,208}$	$M_1 = 51_{-0,173}^{+0,273}$	$M_1 = 51_{-0,223}^{+0,323}$
Distanzhülse	$M_2 = 43,2_{-0,15}^{+0,15}$	$M_2 = 43,2_{-0,158}^{+0,158}$	$M_2 = 43,2_{-0,223}^{+0,223}$	$M_2 = 43,2_{-0,273}^{+0,273}$
Wälzlager	$M_3 = 12_{-0,05}^{+0,05}$			
Wellen- absatz	$M_4 = 106,5_{-0,00}^{+0,20}$	$M_4 = 106,5_{-0,058}^{+0,258}$	$M_4 = 106,5_{-0,123}^{+0,323}$	$M_4 = 106,5_{-0,173}^{+0,373}$
Sicherungs- ringnut	$M_5 = 1,3_{-0,00}^{+0,10}$	$M_5 = 1,3_{-0,088}^{+0,228}$	$M_5 = 1,3_{-0,153}^{+0,293}$	$M_5 = 1,3_{-0,203}^{+0,343}$
Sicherungs- ring	$M_6 = 1,2_{-0,06}^{+0,00}$			
Schließmaß Kontrolle	$M_{0,a} = 0,4_{-0,40}^{+0,70}$	$M_0 = 0,4_{-0,400}^{+0,700}$	$M_0 = 0,4_{-0,400}^{+0,700}$	$M_0 = 0,4_{-0,400}^{+0,700}$
Relative Kosten	$\frac{C_0}{C_0} = 100,0\%$	$\frac{C}{C_0} = 73,4\%$	$\frac{C}{C_0} = 53,4\%$	$\frac{C}{C_0} = 46,7\%$

*Tabelle 18: Optimierte erweiterte Toleranzen für Beispiel 5.2,  
alle Maße M in mm*

### **Ergebnis der Toleranzoptimierung**

Die veränderbaren Einzelmaße weisen nun in jedem Szenario jeweils eine gleiche Toleranzfeldbreite auf. Dies liegt daran, dass diese jeweils mit der gleichen Wahrscheinlichkeitsverteilung modelliert wurden. Würden die Einzelmaße durch unterschiedliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen modelliert werden, so würden sich ihre Toleranzen gruppenweise unterscheiden, die Varianzen wären jedoch nach wie vor wie gewünscht identisch. Im Beispiel kann diese Gleichheit der Toleranzen wieder durch die Darstellung der Beitragsleister veranschaulicht werden (siehe Abbildung 22).

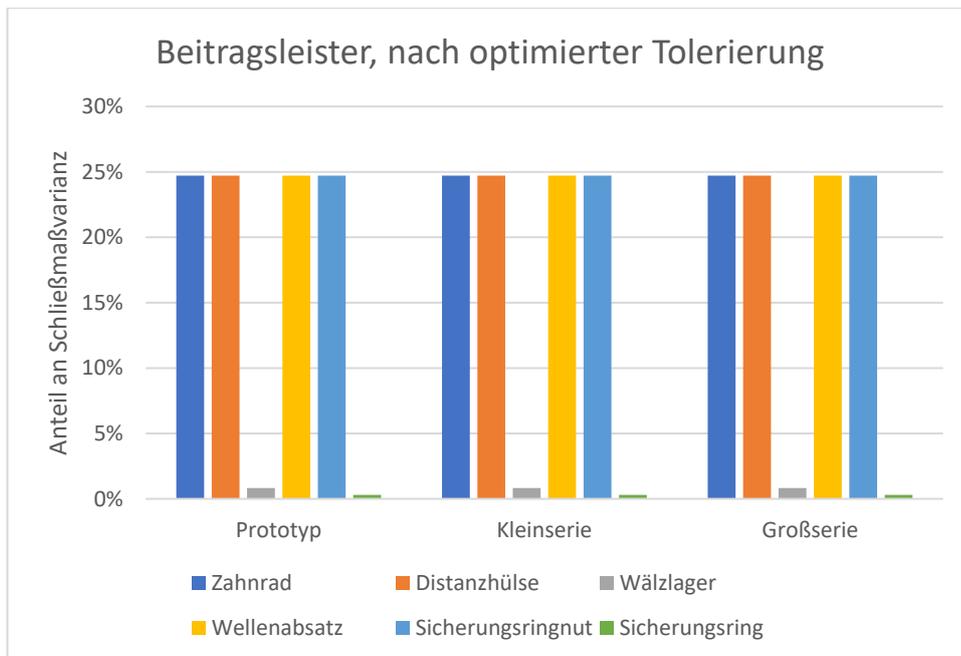


Abbildung 22: Beitragsleister für Beispiel 5.2, mit optimierten Toleranzen

Die Kostenreduktion durch diese Angleichung der Toleranzen ist circa einen halben Prozentpunkt stärker ausgeprägt als zuvor in Tabelle 17 gezeigt. Dieser Vorteil scheint gering, wird jedoch umso ausgeprägter, je stärker sich die Varianzen der veränderbaren Einzelmaße unterscheiden<sup>17</sup>. In der Serienproduktion führen auch solche geringfügigen Kostenreduktionen durch die Massenskalierung zu signifikanten Einsparungen.

---

<sup>17</sup> Für eine weitergehende Kostenoptimierung sind genaue Informationen über die Fertigungskosten eines jeden Bauteils erforderlich. Stehen diese bereit, so kann z.B. nach [16] eine Kostenfunktion aufgestellt und mit den Toleranzen als freien Variablen minimiert werden. Darauf soll an dieser Stelle verzichtet werden.

### 5.3 Scharnier mit un stetiger Schließmaßkette

Unter Umständen ist die Maßkette eines Schließmaßes un stetig definiert. In diesem Fall funktioniert keiner der bisher besprochenen statistischen Lösungswege. Möglichkeiten zur Abhilfe sollen an einem Beispiel gezeigt werden, welches [8] entnommen und erweitert wurde. Gegenstand der Untersuchung ist ein Scharnier, welches eine Abdeckung mit einem Gehäuse verbindet (siehe Abbildung 23). In dieser ist die Breite der Dichtfuge zwischen Abdeckung und Scharnier wichtig, damit der korrekte Sitz einer Dichtung garantiert werden kann. Hierzu ist die vertikale Verschiebung des linken Gewerbes gegenüber dem rechten Gewerbe maßgeblich. Diese ist das untersuchte Schließmaß.

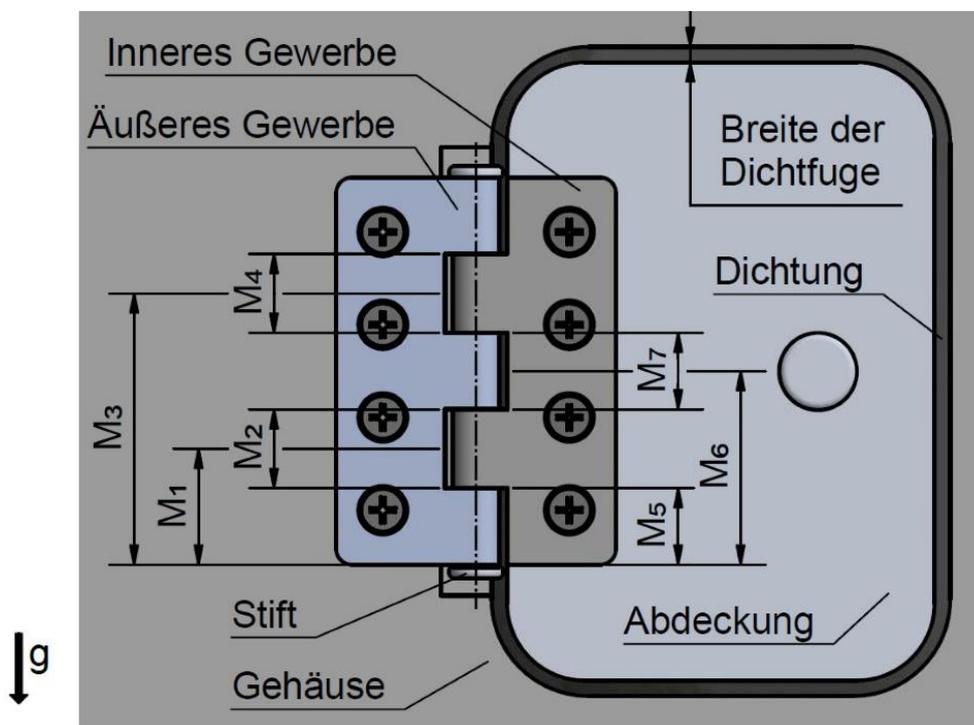


Abbildung 23: Maßkette für Beispiel 5.3 [8]

Die gegebenen Einzelmaße mit ihren Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind in Tabelle 19 aufgelistet. Die Maße  $M_1$ ,  $M_3$  und  $M_6$  geben dabei die Mittelposition der identisch bemaßten Nuten  $M_2$ ,  $M_4$  und  $M_7$  an. Maß  $M_5$  gibt den Abstand der rechten unteren Nut zur Gewerbeunterseite an. Die Maße können so interpretiert werden, dass die Nuten des Scharniers eine Breite von  $5,1mm$  aufweisen. In diese greifen Zapfen mit einer Breite von  $4,9mm$ . Sind alle Istmaße auf ihrer Mitteltoleranz und die Scharniere mit ihrer Unterseite vertikal aneinander ausgerichtet, so haben die Zapfen in den Nuten zu jeder Seite ein Spiel von  $0,1mm$ .

Einzelmaß	Kleinstmaß	Größtmaß	Toleranzfeldbreite	Verteilung
$M_1 = 7,5^{+0,05}_{-0,05}$	$G_{u,1} = 7,45$	$G_{o,1} = 7,55$	$T_1 = 0,1$	Normal
$M_2 = 5,1^{+0,1}_{-0,1}$	$G_{u,2} = 5,00$	$G_{o,2} = 5,20$	$T_2 = 0,2$	Rechteck
$M_3 = 17,5^{+0,05}_{-0,05}$	$G_{u,3} = 17,45$	$G_{o,3} = 17,55$	$T_3 = 0,1$	Normal
$M_4 = 5,1^{+0,1}_{-0,1}$	$G_{u,4} = 5,00$	$G_{o,4} = 5,20$	$T_4 = 0,2$	Rechteck
$M_5 = 5,05^{+0,1}_{-0,1}$	$G_{u,5} = 4,95$	$G_{o,5} = 5,15$	$T_5 = 0,2$	Normal
$M_6 = 12,5^{+0,05}_{-0,05}$	$G_{u,6} = 12,45$	$G_{o,6} = 12,55$	$T_6 = 0,1$	Normal
$M_7 = 5,1^{+0,1}_{-0,1}$	$G_{u,7} = 5,00$	$G_{o,7} = 5,20$	$T_7 = 0,2$	Rechteck

Tabelle 19: Maßübersicht für Beispiel 5.3, alle Angaben in mm

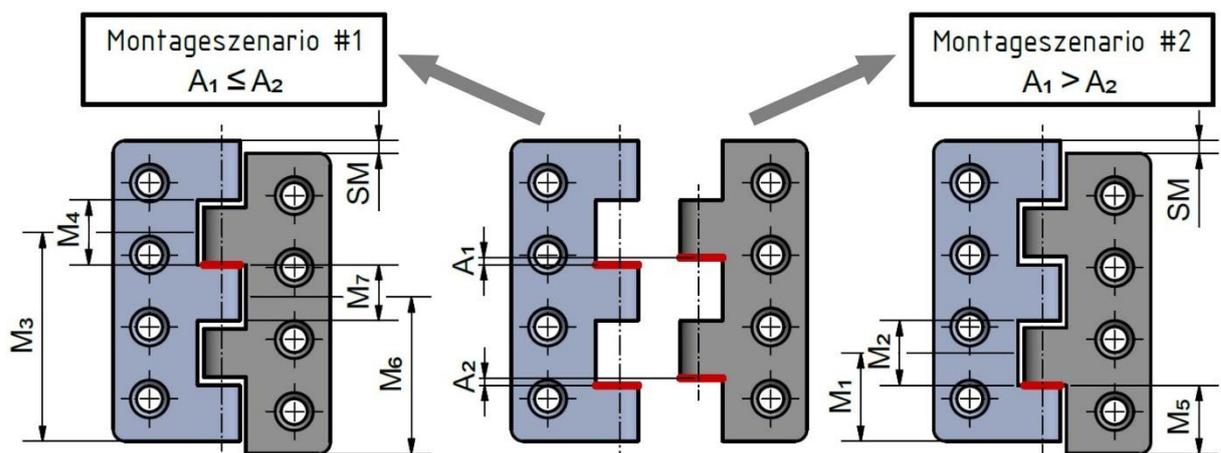


Abbildung 24: Mögliche Montageszenarien für Beispiel 5.3 [8]

Bei der Montage des Scharniers können zwei verschiedene Montageszenarien auftreten. Diese sind in Abbildung 24 aufgezeigt. Je nach Lage der Istmaße berührt das rechte Gewerbe das linke Gewerbe in der oberen oder aber in der unteren Nut.

Ausschlaggebend dafür sind die Abstände  $A_1$  und  $A_2$ . Sie berechnen sich nach dem Maßplan in Abbildung 25 wie folgt:

$$A_1 = M_6 + \frac{M_7}{2} - \left( M_3 - \frac{M_4}{2} \right) \quad (91)$$

$$A_2 = M_5 - \left( M_1 - \frac{M_2}{2} \right) \quad (92)$$

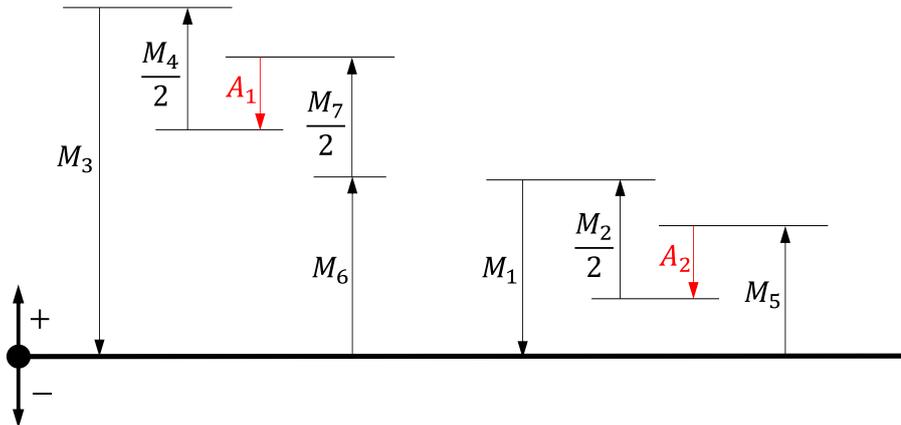


Abbildung 25: Maßplan für Beispiel 5.3, nicht maßstäblich

Ist  $A_1 < A_2$ , so liegt das rechte Gewerbe mit der oberen Nut auf dem linken Gewerbe. Ist stattdessen  $A_1 > A_2$ , so berühren sich beide Gewerbe in der unteren Nut. Gilt  $A_1 = A_2$ , so liegt der Grenzfall vor, in dem sich beide Gewerbe in beiden Nuten berühren. Der kleinere der beiden Abstände bestimmt, wie sehr sich das rechte Gewerbe unter Einfluss der Schwerkraft gegenüber dem linken Gewerbe vertikal verschieben kann. Das Schließmaß berechnet sich somit aus dem Minimum der beiden Abstände:

$$M_0 = \min(A_1, A_2) \quad (93)$$

Dies ist die Unstetigkeit in der Definition der Schließmaßgleichung, welche die Anwendung der vorherigen statistischen Lösungsansätze vereitelt.

### 5.3.1 Arithmetische Schließmaßberechnung

Die arithmetische Tolerierung kann in leicht angepasster Form auf dieses Problem angewandt werden. Hierzu müssen Kleinst- und Größt-Schließmaß separat ermittelt werden:

$$G_{o,0} = \min(A_{1,max} ; A_{2,max}) \quad (94)$$

$$G_{u,0} = \min(A_{1,min} ; A_{2,min}) \quad (95)$$

Die Extremwerte von  $A_1$  und  $A_2$  können nun auf dem gewohnten Weg berechnet werden:

$$\begin{aligned} A_{1,max} &= G_{o,6} + \frac{G_{o,7}}{2} - \left( G_{u,3} - \frac{G_{o,4}}{2} \right) \\ &= 12,55mm + \frac{5,20mm}{2} - \left( 17,45mm - \frac{5,20mm}{2} \right) = 0,3mm \end{aligned} \quad (96)$$

$$\begin{aligned} A_{1,min} &= G_{u,6} + \frac{G_{u,7}}{2} - \left( G_{o,3} - \frac{G_{u,4}}{2} \right) \\ &= 12,45mm + \frac{5,00mm}{2} - \left( 17,55mm - \frac{5,00mm}{2} \right) = -0,1mm \end{aligned} \quad (97)$$

$$\begin{aligned} A_{2,max} &= G_{o,5} - \left( G_{u,1} - \frac{G_{o,2}}{2} \right) \\ &= 5,15mm - \left( 7,45mm - \frac{5,20mm}{2} \right) = 0,3mm \end{aligned} \quad (98)$$

$$\begin{aligned} A_{2,min} &= G_{u,5} - \left( G_{o,1} - \frac{G_{u,2}}{2} \right) \\ &= 4,95mm - \left( 7,55mm - \frac{5,00mm}{2} \right) = -0,1mm \end{aligned} \quad (99)$$

Hieraus können nun Kleinst- und Größt-Schließmaß nach den Formeln (94) und (95) berechnet werden:

$$G_{o,0} = \min(A_{1,max}; A_{2,max}) = \min(0,3mm ; 0,3mm) = 0,3mm \quad (100)$$

$$G_{u,0} = \min(A_{1,min}; A_{2,min}) = \min(-0,1mm ; -0,1mm) = -0,1mm \quad (101)$$

Nun können Nennmaß sowie das arithmetische Schließmaß bestimmt werden:

$$\begin{aligned} N_0 &= \min(A_{1,nenn} ; A_{2,nenn}) = \min \left( N_6 + \frac{N_7}{2} - \left( N_3 - \frac{N_4}{2} \right); N_5 - \left( N_1 - \frac{N_2}{2} \right) \right) \\ &= \min \left( 12,5mm + \frac{5,1mm}{2} - \left( 17,5mm - \frac{5,1mm}{2} \right); 5,05mm - \left( 7,5mm - \frac{5,1mm}{2} \right) \right) \\ &= \min(0,1mm ; 0,1mm) = 0,1mm \end{aligned} \quad (102)$$

$$M_0 = 0,1_{-0,2}^{+0,2}mm \quad (103)$$

Das ermittelte Nennmaß stimmt der Anschauung überein, dass im Zustand mittiger Istmaße die Gewerbe einen Abstand von  $0,1mm$  haben. Unter Einwirkung der Schwerkraft würde sich das rechte Gewerbe so im Mittel um diese  $0,1mm$  gegenüber dem linken Gewerbe absinken. Negative Werte des Schließmaßes können dagegen so interpretiert werden, dass das rechte Gewerbe höher als das linke Gewerbe liegt.

### 5.3.2 Statistische Schließmaßbestimmung mittels Monte-Carlo-Simulation

Da das statistische Schließmaß durch die Unstetigkeit nicht analytisch berechnet werden kann, muss eine numerische Methode verwendet werden. Eine einfach anzuwendende Methode ist die Monte-Carlo-Simulation. Diese soll im Folgenden behandelt werden.

#### **Grundlagen der Monte-Carlo-Simulation**

Die Idee der Monte-Carlo-Simulation ist in diesem Kontext die Rückführung der analytisch schwer zu untersuchenden Schließmaßgleichung auf ein vielfach wiederholtes Zufallsexperiment. Hierzu wird für jedes Einzelmaß ein innerhalb der zugehörigen Toleranz liegendes zufälliges Istmaß generiert. Die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten dieser Istmaße entsprechen den zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Einzelmaße. Mit einem solchen Satz an Istmaßen wird die Schließmaßgleichung ausgewertet. Das Zufallsexperiment wird anschließend wiederholt, in diesem Beispiel werden 10000 Wiederholungen genutzt<sup>18</sup>. Man erhält so eine Stichprobe von 10000 Schließmaßen, deren Verteilung nach dem Gesetz der großen Zahlen recht gut den tatsächlichen Verhältnissen entsprechen sollte. Diese Stichprobe kann dann mit statistischen Methoden ausgewertet werden, es können beispielsweise Mittelwert und Standardabweichung bestimmt werden.

Zur praktischen Durchführung der Monte-Carlo-Simulation benötigt man Vorschriften, welche nach einer gegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung Zufallszahlen generieren können. Als Grundlage hierfür kann eine Funktion  $r \in [0,1]$  dienen, welche eine gleichmäßig verteilte reelle Zufallszahl zwischen 0 und 1 liefert<sup>19</sup>. Hieraus kann durch Multiplikation mit der Toleranzfeldbreite und Addition des Kleinstmaßes eine Rechteckverteilung gebildet werden:

$$f_R = G_u + T \cdot r \quad (104)$$

Eine Dreiecksverteilung könnte durch eine aus zwei linearen Funktionen zusammengesetzte abschnittsweise definierte Funktion modelliert werden. Eleganter ist jedoch die Addition zweier Zufallszahlen  $r + r$ , deren Verteilung dann einer Dreiecksverteilung mit den Grenzen  $[0,2]$  entspricht (siehe [7]). Die Vorschrift ergibt sich dann analog zur Rechteckverteilung:

$$f_D = G_u + T \cdot \frac{r + r}{2} \quad (105)$$

---

<sup>18</sup> Die Anzahl der Wiederholungen wird so gewählt, dass eine ausreichend hohe Aussagesicherheit gegeben ist. Siehe dazu auch [7, S. 27].

<sup>19</sup> Matlab: rand()

Excel: ZUFALLSZAHL()

Für die Modellierung einer Normalverteilung muss auf deren inverse Verteilungsfunktion zurückgegriffen werden. Diese ist in den meisten Softwarepaketen als fertige Funktion vorhanden<sup>20</sup> und muss daher zumeist nicht selbst implementiert werden.

$$f_N = F^{-1}(r | \mu, \sigma) \quad (106)$$

Weitere Wahrscheinlichkeitsverteilungen lassen sich mit vergleichbaren Ansätzen modellieren. In diesem Beispiel werden nur Formeln (104) und (106) benötigt.

### Durchführung der Monte-Carlo-Simulation

Die Auswertung des Schließmaßes erfolgt durch die Formeln (91), (92) und (93). Zur besseren Visualisierung der so entstandenen Stichprobe kann man die erhaltenen Werte für das Schließmaß in Kategorien aufteilen und so ein Histogramm bilden (siehe Abbildung 26).

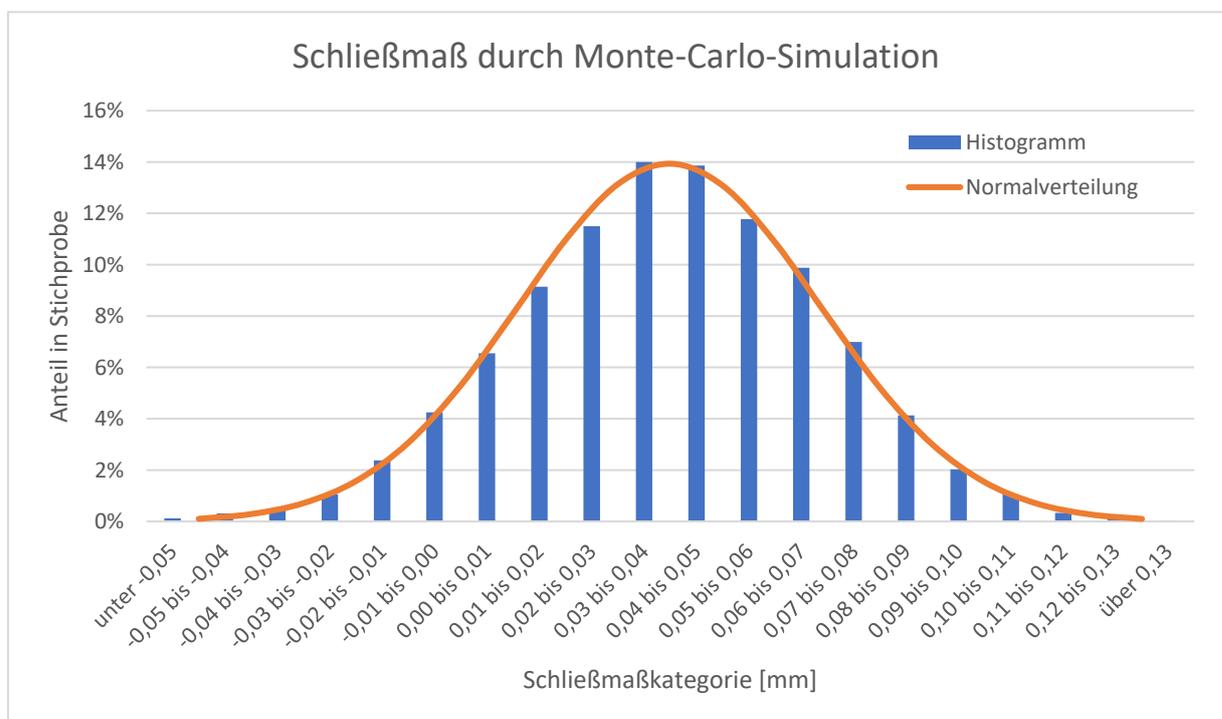


Abbildung 26: Histogramm des Schließmaßes für Beispiel 5.3, aus Monte-Carlo-Simulation

Es ist zu erkennen, dass sich eine Verteilung mit dem Aussehen einer Normalverteilung einstellt. Um dies zu prüfen, kann man Mittelwert und Standardabweichung der Stichprobe ermitteln.

<sup>20</sup> Matlab: norminv( $p, \mu, \sigma$ )

Excel: NORM.INV( $p; \mu; \sigma$ )

Dies geschieht mittels der Auswertung der Formeln (72) und (73):

$$\bar{x} = \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} I_i = 0,0400 \text{ mm} \quad (107)$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{10000 - 1} \sum_{i=1}^{10000} (I_i - \bar{x})^2} = 0,0285 \text{ mm} \quad (108)$$

Die Kurve der dadurch beschriebenen Normalverteilung kann man nun über das Histogramm legen, um sie mit dem Histogramm vergleichbar zu machen<sup>21</sup>, wie in Abbildung 26 geschehen. Es zeigt sich eine annehmbare Übereinstimmung, sodass davon ausgegangen werden kann, dass das Schließmaß annähernd normalverteilt ist. Dadurch kann die Schließmaßtoleranz und damit das Schließmaß nach Tabelle 13 berechnet werden:

$$T = 6 \cdot s = 6 \cdot 0,0285 \text{ mm} = 0,1713 \text{ mm} \quad (109)$$

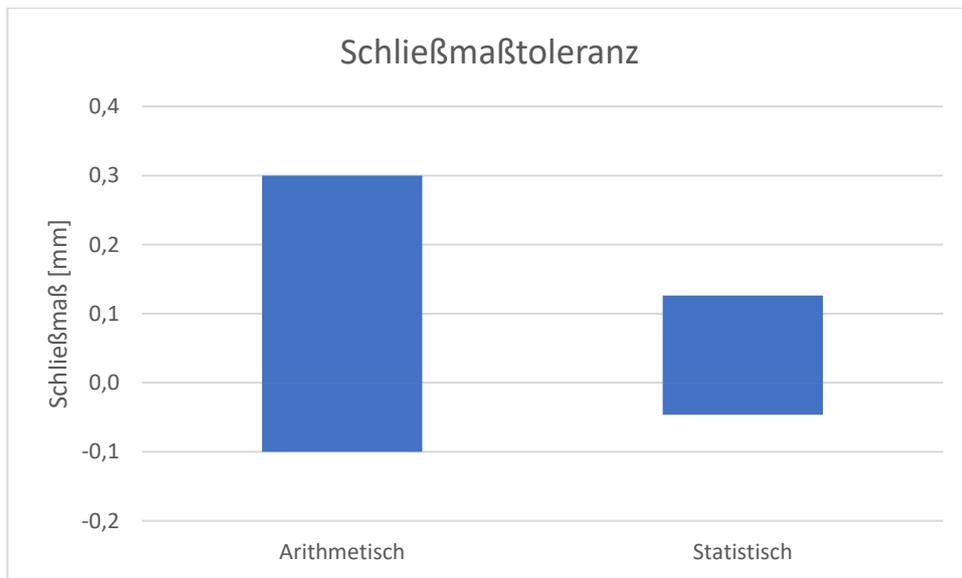
$$M_0 = 0,1_{-0,145}^{+0,026} \text{ mm} \quad (110)$$

### ***Ergebnis der Monte-Carlo-Simulation***

Wie in den Beispielen zuvor weist das statistisch berechnete Schließmaß eine kleinere Toleranz als das arithmetisch berechnete Schließmaß auf (siehe Abbildung 27). Durch die unstetige Schließmaßgleichung weichen zudem die Mitteltoleranzen bei arithmetischer und statistischer Rechnung voneinander ab. Dadurch zeigt sich, dass die Verschiebung der Gewerbe im Mittel deutlich weniger stark ausgeprägt ist ( $0,04 \text{ mm}$  anstatt  $0,10 \text{ mm}$ ), als durch die arithmetische Tolerierung ermittelt.

---

<sup>21</sup> Möchte man diese Ähnlichkeit mathematisch zeigen, so kann auch hier ein Anpassungs- bzw. Verteilungstest durchgeführt werden. Das Ergebnis variiert je nach Stichprobe, für den gezeigten Fall kann die Nullhypothese, dass die Stichprobe einer Normalverteilung mit den genannten Parametern entspricht, bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% beibehalten werden.



*Abbildung 27: Vergleich der Schließmaßtoleranzen für Beispiel 5.3*

Möchte man nun die Toleranzen aufweiten, so ist die Rechnung mittels Erweiterungsfaktor risikobehaftet, da kein linearer Zusammenhang zwischen Einzelmaßvarianzen und Schließmaßvarianzen besteht. Da sich zudem die Mitteltoleranzen unterscheiden, kann die Erweiterung nicht symmetrisch erfolgen. Eine wenig komplexe, aber aufwendige Vorgehensweise wäre die iterative Anpassung der Einzelmaße. Möchte man die Toleranzen mathematisch fundiert erweitern, sei an dieser Stelle auf die High-Low-Median-Analyse (HLM-Analyse) [17] sowie die globalen Sensitivitätsanalyse nach EFAST [8] verwiesen.

## 6 Empfehlungen für die Praxis

Nachdem in den letzten Kapiteln die statistische Tolerierung anhand verschiedener Beispiele dargestellt wurde, sollen nun sich daraus ergebende Empfehlungen für den Praxisgebrauch abgeleitet werden. Hierzu werden zunächst die vorgestellten mathematischen Zusammenhänge zu Faustformeln reduziert. Davon ausgehend werden anschließend die verschiedenen Einflussgrößen auf ein Schließmaß separiert untersucht. Abschließend werden die Einsatzbereiche der statistischen Tolerierung aufgezeigt und Empfehlungen für die Wahl eines geeigneten Tolerierungsverfahrens gegeben.

### 6.1 Faustformeln

Um Faustregeln zur Quantifizierung des Unterschieds zwischen arithmetischer und statistischer Tolerierung ermitteln zu können, ist es hilfreich, vier vereinfachte Annahmen aufzustellen, welche gleichzeitig erfüllt sein müssen:

- 1) Es liegt eine lineare Maßkette vor.
- 2) Die Toleranzen der Einzelmaße  $T_i$  sind gleich groß.
- 3) Die Einzelmaße besitzen dieselbe Wahrscheinlichkeitsverteilung.
- 4) Das Toleranzfeld des Schließmaßes ist normalverteilt.

#### *Herleitung der Faustformeln*

Annahme 1 ermöglicht die Nutzung des in Kapitel 5.1 beschriebenen Rechenwegs. Annahme 2 entspricht einer bereits optimierten Toleranzauslegung. Es gilt also:

$$T := T_1 = T_2 = \dots = T_n \quad (111)$$

Durch Annahme 3 gilt für alle Standardabweichungen der Einzelwerte  $s_i$ :

$$s_i = \frac{T}{u} \quad (112)$$

Woraus folgt:

$$\Rightarrow s := s_1 = s_2 = \dots = s_n \quad (113)$$

Daraus folgt für Standardabweichung des Schließmaßes  $s_0$ :

$$\Rightarrow s_0 = \sqrt{\sum_{i=1}^n s^2} = \sqrt{n \cdot s^2} = \sqrt{n} \cdot s \quad (114)$$

Annahme 4 stammt aus der zunehmenden Vereinfachung des zentralen Grenzwertsatzes. Dadurch gilt für die Toleranzfeldbreite des Schließmaßes  $T_0$ :

$$T_0 = 6 \cdot s_0 \quad (115)$$

Mit diesen Annahmen können die Auswirkungen der drei Fälle von rechteckverteilten, dreieckverteilten und normalverteilten Toleranzfeldern der Einzelmaße auf die Toleranzfeldbreite des Schließmaßes  $T_0$  untersucht werden. Für  $n$  rechteckverteilte Einzelmaße gilt nach Tabelle 13:

$$T = \sqrt{12} \cdot s \quad (116)$$

Daraus folgt:

$$T_0 = 6 \cdot s_0 = 6 \cdot \sqrt{n} \cdot s = \frac{6}{\sqrt{12}} \cdot \sqrt{n} \cdot T = 1,732 \cdot \sqrt{n} \cdot T \quad (117)$$

$$\Leftrightarrow \frac{T_0}{T} = 1,732 \cdot \sqrt{n} \quad (118)$$

Analog gilt für  $n$  dreiecksverteilte Einzelmaße:

$$\frac{T_0}{T} = 1,225 \cdot \sqrt{n} \quad (119)$$

Und für  $n$  normalverteilte Einzelmaße gilt:

$$\frac{T_0}{T} = \sqrt{n} \quad (120)$$

Für die arithmetische Schließmaßrechnung gilt bei Annahme identischer Toleranzfeldbreiten  $T$  aller Einzelmaße:

$$\frac{T_0}{T} = n \quad (121)$$

Die Länge der Maßkette  $n$  bestimmt somit den Zusammenhang zwischen Toleranzfeldbreite der Einzelmaße  $T$  und der Toleranzfeldbreite des Schließmaßes  $T_0$ . Die Toleranzfeldbreite des Schließmaßes ist hier somit näherungsweise proportional zu den Toleranzfeldbreiten der Einzelmaße.

## Vergleich der Faustformeln

Die Zusammenhänge sind für alle vier betrachteten Fälle in Abbildung 28 grafisch dargestellt. Im unteren Grenzfall enthält die Maßkette nur ein einziges toleranzbehaftetes Einzelmaß. Hier müssen Einzelmaß und Schließmaß zwangsläufig eine identische Varianz aufweisen. Da bei einer gegebenen Toleranzfeldbreite diese bei Rechteck- bzw. Dreieckverteilung allerdings größer als bei einer Normalverteilung ist, ist die Toleranzfeldbreite des normalverteilten Schließmaßes entsprechend größer.

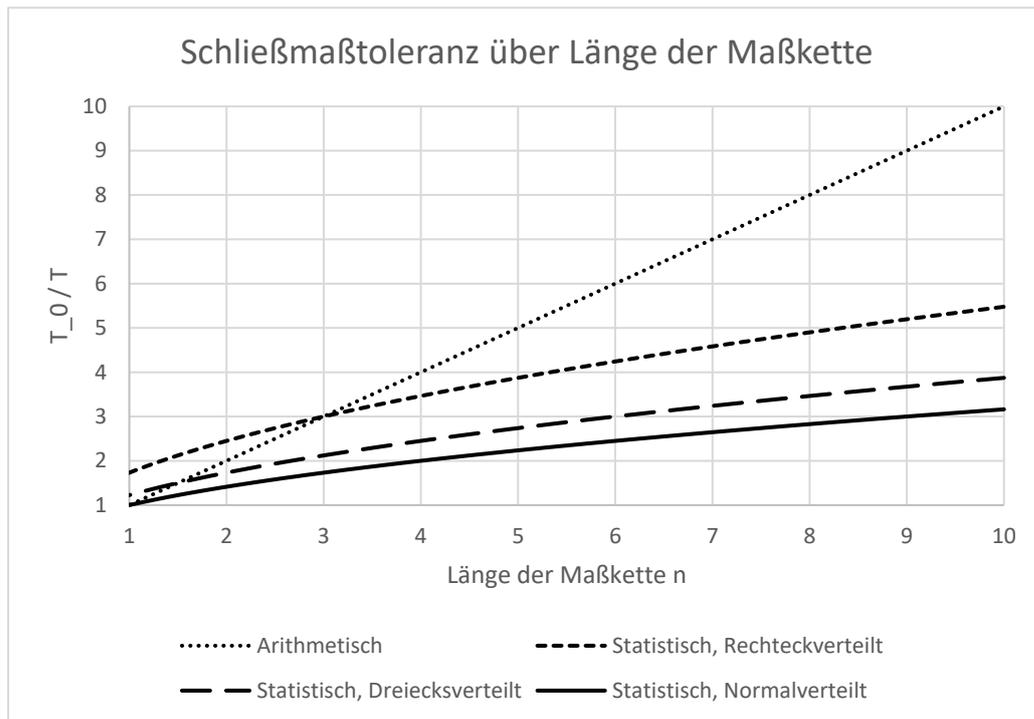


Abbildung 28: Schließmaßtoleranz über Länge der Maßkette, Vergleich der arithmetischen Berechnung mit 3 Varianten der statistischen Berechnung

Bei 2 Einzelmaßen in der Maßkette scheint es so, als wenn zwei rechteckverteilte Einzelmaße eine größere Toleranzfeldbreite des Schließmaßes ergeben als die arithmetische Tolerierung. Dies ist allerdings der Annahme 4 geschuldet. Wie in Kapitel 4.2 gezeigt wurde, erzeugen zwei rechteckverteilte Einzelmaße eine Trapez- oder wie hier im Falle identischer Einzelmaße eine Dreiecksverteilung. Berücksichtigt man dies manuell, so entsprechen die Ergebnisse wie in Kapitel 4.2 gezeigt der arithmetischen Tolerierung.

Ab 3 Einzelmaßen in der Maßkette gilt, dass die statistische Tolerierung bei den genannten Annahmen stets eine kleinere Toleranzfeldbreite des Schließmaßes errechnet als die arithmetische Tolerierung. Der Unterschied ist dabei umso größer, je mehr Maße in der Maßkette enthalten sind und je schwächer die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Einzelmaße streut.

## Erweiterungsfaktoren aus Faustformeln

Quantitativ lässt sich dieser Unterschied als Erweiterungsfaktor  $e$  bestimmen. Für das Beispiel des Wechsels von arithmetischer Tolerierung zu statistischer Tolerierung mit jeweils rechteckverteilten Einzelmaßen bestimmt sich  $e$  wie folgt:

$$e = \frac{T_{0,arithm.}}{T_{0,stat.}} = \frac{n \cdot T}{1,73 \cdot \sqrt{n} \cdot T} = 0,577 \cdot \sqrt{n} \quad (122)$$

Die Berechnungen für andere Wechsel des Tolerierungsverfahrens erfolgen analog. Tabelle 20 gibt eine Übersicht über die Erweiterungsfaktoren für alle möglichen Wechsel.

Erweiterungsfaktor $e$		Wechsel zu				
		Arithmetischer Tolerierung	Statistischer Tolerierung			
			Rechteck	Dreieck	Normal	
Wechsel von	Arithmetischer Tolerierung	-	$0,577 \cdot \sqrt{n}$	$0,816 \cdot \sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	
	Statistischer Tolerierung	Rechteck	$1,732/\sqrt{n}$	-	1,414	1,732
		Dreieck	$1,225/\sqrt{n}$	0,707	-	1,225
		Normal	$1/\sqrt{n}$	0,577	0,816	-

Tabelle 20: Erweiterungsfaktoren bei Wechsel des Tolerierungsverfahrens

Mit dieser Tabelle kann die Größenordnung abgeschätzt werden, mit der sich die Toleranzfeldbreiten bei einem Wechsel des Tolerierungsverfahrens ändern. Betrachtet man exemplarisch das Beispiel aus Abschnitt 5.2, so sind vier Bauteile veränderbar, es gilt also näherungsweise  $n = 4$ . Möchte man nun überschlagen, wie sehr die Toleranzen erweitert werden können, wenn alle Bauteile dreiecksverteilte Istmaße aufweisen, wie es z.B. bei der Kleinserienfertigung vorkommt, so kann man der Tabelle 20 für diese Situation folgendes entnehmen:

$$e = 0,816 \cdot \sqrt{n} = 0,816 \cdot \sqrt{4} = 163,2\% \quad (123)$$

Als Näherung für das Potenzial der Umstellung des Tolerierungsverfahrens kann somit angegeben werden, dass die Toleranzfelder hier um circa zwei Drittel erweitert werden können.

## 6.2 Einflussfaktoren auf die Produktionskosten

Es gibt eine Vielzahl von Einflussfaktoren auf die Produktionskosten eines Bauteils. Im Folgenden soll die Wirkung der im Rahmen der Tolerierung beeinflussbaren Faktoren auf die Produktionskosten untersucht werden. Hierzu wird jeweils auf die arithmetische Tolerierung, die statistische Tolerierung sowie die Tolerierung im Allgemeinen eingegangen und sofern möglich Folgerungen für die Konstruktionspraxis gezogen.

### ***Nennmaß eines Einzelmaßes***

Sowohl bei der arithmetischen als auch bei der statistischen Tolerierung hat die Wahl der Nenn-Einzelmaße keinen Einfluss auf die Schließmaßtoleranz und damit auf die Fertigungskosten. Die Nenn-Einzelmaße beeinflussen lediglich das Nenn-Schließmaß. Der genaue Wert des Nenn-Schließmaßes steht in keinem direkten Zusammenhang mit den Fertigungskosten, da dieses lediglich ein Bezeichner ist.

### ***Mittelwert eines Einzelmaßes***

Bei der arithmetischen wie auch bei der statistischen Tolerierung haben die Mittelwerte der Einzelmaße in den meisten Fällen keinen Einfluss auf die Schließmaßtoleranz. Die Mittelwerte der Einzelmaße beeinflussen bei den zumeist auftretenden linearen Maßketten lediglich die Lage des Mittelwerts des Schließmaßes. Die Lage des Mittelwertes des Schließmaßes kann somit über die Steuerung der Lage der Mittelwerte der Einzelmaße beeinflusst werden. Dies erfordert lediglich die Einstellung des Fertigungsverfahrens (z.B. die Zustellung eines Werkzeuges) und ist damit ebenfalls kostenneutral.

Bei nichtlinearen Maßketten haben die Mittelwerte der Einzelmaße dagegen einen Einfluss auf die Lage wie auch die Toleranzfeldbreite des Schließmaßes. Der Einfluss bestimmt sich über das allgemeine Abweichungsfortpflanzungsgesetz aus der konkreten Maßkette und kann daher nicht verallgemeinert werden. Es muss daher im Einzelfall untersucht werden, welche Anpassung der Mittelwerte der Einzelmaße die Toleranzfeldbreite des Schließmaßes positiv beeinflusst.

### ***Toleranzfeldbreite & Varianz eines Einzelmaßes***

Betrachtet man die arithmetische Tolerierung, so geht die Toleranzfeldbreite eines Einzelmaßes direkt additiv und unabhängig von den anderen Einzelmaßen in die Toleranzfeldbreite des Schließmaßes ein. Steht das Schließmaß fest, so ergeben sich daraus automatisch Randbedingungen für die steuerbaren Toleranzen der Einzelmaße der zugehörigen Maßkette. Diese sollten ungefähr gleichgroße Toleranzfelder aufweisen, da z.B.

eine einzelne deutlich kleinere Toleranz eines Einzelmaßes keine große Auswirkung auf die Schließmaßtoleranz hat, dafür aber erhöhte Fertigungskosten verursacht.

Bei der statistischen Tolerierung werden nicht die Toleranzfeldbreiten, sondern die Varianzen der Einzelmaße addiert. Da sich diese über die Standardabweichung und die genaue Art der Wahrscheinlichkeitsverteilung aus der Toleranzfeldbreite eines Einzelmaßes berechnen, ist der Einfluss der Toleranzfeldbreiten der Einzelmaße auf die Toleranzfeldbreite des Schließmaßes hier wesentlich komplexer. So ist der Einfluss eines einzelnen Toleranzfeldes auf die Schließmaßtoleranz abhängig von der Größe der Toleranzfelder der anderen Einzelmaße. Da sich die Varianz quadratisch zur Toleranzfeldbreite eines Einzelmaßes verhält, sind hier Abweichungen der Toleranzfeldbreiten einzelner Einzelmaße vom Ideal nach oben oder unten noch stärker zu vermeiden als bei der arithmetischen Tolerierung. Ist eine einzelne Toleranz wesentlich größer als der Rest, so bestimmt sie nahezu allein die Schließmaßtoleranz, ist sie wesentlich kleiner als der Rest, so nimmt sie nahezu keinen Einfluss. Ausgewogene Verhältnisse sind bei einer Gleichheit der Varianzen erreicht (siehe Kapitel 5.2.2). Dies muss nicht zwangsläufig eine Gleichheit der Toleranzen bedeuten. Weisen die Einzelmaße unterschiedliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf, so können sich die optimalen Toleranzen bei gleichen Varianzen voneinander unterscheiden.

Bei beiden Arten der Tolerierung besteht das Grundproblem, dass die optimalen Toleranzen zumeist nicht exakt durch das ISO-System [13] abbildbar sind. Hier muss im Einzelfall untersucht werden, ob die durch ISO-Toleranzen erzielten Kostenersparnisse einer einfacheren Qualitätskontrolle mittels Standardprüfmitteln die erhöhten Fertigungs- bzw. Montagekosten durch nichtoptimale Toleranzen aufwiegen kann.

Für kleinstmögliche Kosten sollten Toleranzen weiterhin „so klein wie nötig und so groß wie möglich“ gewählt werden. Es soll dadurch ein Optimum zwischen erhöhten Fertigungskosten durch zu kleine Toleranzen und erhöhten Montage- bzw. Ausschusskosten durch zu große Toleranzen gefunden werden. Dieses Optimum muss durch Erfahrungswerte, Kostenanalysen oder Vergleichbares gefunden werden. Tendenziell ist es hierbei erstrebenswert, auf lange Sicht möglichst große Toleranzen zuzulassen. Die Mittel und Wege dies bei einer Konstruktion ohne Funktionseinbußen zu erreichen sind Inhalt des „Robust Designs“. Weiteres dazu ist in den Quellen [16] sowie [18] zu finden.

### ***Form der Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Einzelmaßes***

Bei der arithmetischen Tolerierung spielt die genaue Art der Wahrscheinlichkeitsverteilung keine wesentliche Rolle, da nur das maximale und minimale Grenzmaß in die Berechnung eingehen.

Bei der statistischen Tolerierung fließt die Wahrscheinlichkeitsverteilung hingegen maßgeblich in die Auslegung der Toleranzen ein, wie in den vorherigen Kapiteln gezeigt wurde. Wichtig ist

die Kenntnis über die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Einzelmaße. Die Verteilungen können entweder entsprechend der Fertigungsart angenommen oder aber durch die Analyse einer Stichprobe des Einzelmaßes bestimmt werden. Je besser die Verteilungen bekannt sind, desto genauer können die Toleranzen der Einzelmaße an die gegebene Situation angepasst werden.

Bei beiden Arten der Tolerierung sind eingipflige und schmale Verteilungen wünschenswert. Eingipflige Verteilungen sind ein Indiz für die Abwesenheit systematischer Änderungen des Mittelwertes des Prozesses. Die Ausschaltung systematischer Fehler kann zum Beispiel erreicht werden durch eine konstante Korrektur des Werkzeugverschleißes, der Vermeidung von Werkzeug- und Maschinenbedienerwechseln, der separaten Behandlung von Chargen unterschiedlicher Maschinen bzw. Zulieferer, der Nutzung von seriengefertigten Standardbauteilen etc. Ein die Toleranzgrenzen einhaltender Prozess, welcher eine schmale Verteilung aufweist, produziert im Fall einer schwankenden Standardabweichung deutlich weniger Ausschuss als ein Prozess mit einer breiteren Verteilung und ist daher diesem vorzuziehen.

### ***Länge der Maßkette***

Grundsätzlich gilt bei der arithmetischen Tolerierung, dass die Toleranzfeldbreite eines Schließmaßes umso größer wird, je mehr Elemente in der Maßkette enthalten sind. Dies liegt daran, dass sich die Toleranzfelder der Einzelmaße im Gegensatz zu deren Mittelwerten stets addieren, unabhängig davon, welches Vorzeichen das Einzelmaß in der Maßkette besitzt.

Bei der statistischen Tolerierung werden die Varianzen addiert, die Toleranzfeldbreiten gehen damit näherungsweise über den Satz des Pythagoras in die Toleranzfeldbreite des Schließmaßes ein. Hierdurch ist der Einfluss der Toleranzfeldbreite eines Einzelmaßes auf die Toleranzfeldbreite des Schließmaßes umso stärker reduziert, je länger die Maßkette ist.

In beiden Fällen sollte die Anzahl der Bauteile in einer Maßkette möglichst niedrig gehalten werden, da jedes zusätzliche Einzelmaß die Toleranzfeldbreite des Schließmaßes vergrößert. Wendet man die statistische Tolerierung an, ist eine längere Maßkette allerdings deutlich besser vertretbar als bei der arithmetischen Tolerierung. Damit geht einher, dass beim Wechsel von arithmetischer auf statistische Tolerierung der größte Unterschied mit den längsten Maßketten erzielbar ist, diese sollten bei begrenzten Ressourcen somit bevorzugt untersucht werden.

## ***Losgröße***

Bei der arithmetischen Tolerierung hat die Losgröße des Bauteils keinen Einfluss auf die Auslegung der Toleranzen. Von der Fertigung eines Prototyps bis hin zu einer Großserienfertigung werden die Toleranzen hier so gewählt, dass eine Montage unter allen Umständen möglich ist.

Bei der statistischen Tolerierung geht die Losgröße dagegen in die Auslegung der Toleranzen ein. Wie in Tabelle 13 gezeigt, kann eine Serienproduktion durch eine Normalverteilung modelliert werden. Kleinserien sowie Einzelteilproduktion werden im Gegensatz dazu durch Dreiecks- respektive Rechteckverteilungen modelliert. Die Normalverteilung weist in der Nähe ihres Mittelwertes eine höhere Wahrscheinlichkeitsdichte als die Dreiecksverteilung auf und letztere weist dort wiederum eine höhere Dichte als die Rechteckverteilung auf. Diese Zentrierung der Werte verursacht eine geringere Standardabweichung. Zusammengefasst wird bei einer gegebenen Toleranzfeldbreite die Standardabweichung eines Einzelmaßes also umso geringer angenommen, je größer das Los des Bauteils ist. Über die Addition der Varianzen schlägt sich dies direkt in einer geringeren Standardabweichung und damit Toleranzfeldbreite des Schließmaßes nieder. Die Einzeltoleranzen können somit bei einer Serienproduktion stärker aufgeweitet werden. Dies spiegelt sich direkt in Kosteneinsparungen wider. Bei Nutzung der statistischen Tolerierung ist eine möglichst hohe Losgröße somit erstrebenswert.

Dieser Effekt tritt zusätzlich zu den allgemeinen Kostenersparnissen durch eine Serienfertigung auf, welche beispielsweise durch die wirtschaftlichere Ausnutzung von Maschinen und Werkzeugen oder durch Mengenrabatte im Einkauf zustande kommen.

## Zusammenfassung

Die Auswirkungen der Einflussgrößen und Folgerungen für die Praxis sind in Tabelle 21 zusammengefasst. In der linken Spalte sind die Einflussgrößen zu finden, rechts davon sind die zugehörigen Folgen nach arithmetischer Tolerierung, statistischer Tolerierung und allgemeinen Folgen für die Tolerierung unterschieden. Die Empfehlungen für die Praxis sind jeweils fett dargestellt.

Einflussgrößen auf Schließmaß (SM)	Tolerierung		
	Arithmetisch	Statistisch	Allgemein
Nennmaß	Wirkt auf SM-Nennmaß → <b>Nennmaße der Einzelmaße passend wählen</b>		
Mittelwert	Wirkt auf SM-Mittelwert → <b>Abmaße der Einzelmaße passend wählen</b> (Nichtlineare Maßkette: wirkt zusätzlich auf SM-Toleranz)		
Toleranz & Varianz	Toleranz wirkt auf SM-Toleranz → <b>gleichgroße Toleranzen</b>	Varianz wirkt auf SM-Varianz → <b>gleichgroße Varianzen</b>	„So groß wie möglich, so klein wie nötig“ → <b>Robust Design</b>
Wahrscheinlichkeitsverteilung	Kein Einfluss	Form wirkt auf Tolerierung → <b>Prozess kennen</b>	Gute Form: Eingipflig & schmal → <b>Prozess beherrschen</b>
Länge der Maßkette	Toleranzen wirken linear auf SM-Toleranz → <b>kurze Maßkette</b>	Längere Maßkette: Toleranzen wirken schwächer auf SM-Toleranz → hierauf <b>Fokus bei Wechsel der Tolerierungsart</b>	Wirkt auf SM-Toleranz → <b>kurze Maßkette</b>
Losgröße	Kein Einfluss	Große Toleranz-erweiterung möglich → <b>hohe Losgröße</b>	Serienfertigung preiswerter → <b>hohe Losgröße</b>

Tabelle 21: Praxisempfehlungen zur Kostenreduktion

### 6.3 Einsatzbereich der statistischen Tolerierung

Die arithmetische Tolerierung basiert auf zwei wesentlichen Grundsätzen:

- 1) Sämtliche Schließmaße (100%) müssen innerhalb ihrer Toleranz liegen.
- 2) Jedes Istmaß innerhalb eines Toleranzfeldes ist gleich wahrscheinlich.

Die statistische Tolerierung ändert diese Grundsätze wie in Abschnitt 4.3 gezeigt ab, sodass sie neu formuliert lauten:

- 1) Ein wählbarer Anteil der Schließmaße ( $< 100\%$ ) muss innerhalb der Toleranz liegen.
- 2) Jedes Toleranzfeld besitzt eine beliebige Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Möchte man die statistische Tolerierung nutzen, so muss man diese beiden Grundsätze in ihrer Gänze berücksichtigen.

#### ***Folgen der statistischen Tolerierung***

Der erste Grundsatz bedingt, dass es im Vergleich zur arithmetischen Tolerierung Baugruppen geben wird, bei denen eine ungünstige Kombination von Bauteilen aufeinandertrifft, wodurch Schließmaße außerhalb ihrer Toleranz liegen können. Der Umgang mit diesem Philosophiewechsel kann auf mehrere Arten geschehen: In manchen Fällen ist es möglich, dass ein außerhalb der Toleranz liegendes Schließmaß unkritisch ist. In diesem Fall kann auf eine Prüfung der das Schließmaß erzeugenden Baugruppe verzichtet werden.

Ist dies nicht möglich, können in der Produktion Abläufe geschaffen werden, sodass eine Abweichung der Schließmaße zuverlässig erkannt wird. Wenn ein unpassendes Schließmaß nicht die Montage der Baugruppe verhindert, läuft dies zumeist auf eine Funktionsprüfung der Baugruppe hinaus. Die Besonderheit bei solchen fehlerhaften Baugruppen ist, dass zwar alle Einzelmaße innerhalb ihrer Toleranz liegen, aber trotzdem die Schließmaßtoleranz nicht eingehalten wird. Die Nacharbeit kann in diesem Fall dadurch erfolgen, dass die betroffene Baugruppe demontiert und ein Teil ihrer Bauteile gegen Bauteile aus dem Vorrat ausgetauscht wird. Die aussortierten Bauteile können zusammen mit weiteren Bauteilen aus dem Vorrat ohne weitere Vorkehrungen in einer zweiten Baugruppe verbaut werden, da sie selbst allesamt innerhalb der Toleranz liegen. Dieses Vorgehen sollte bei der Konstruktion der Baugruppe berücksichtigt werden. So sollte die Prüfung aller relevanten Schließmaße wie auch die (De-) Montage der Baugruppe mit wenig Arbeitsaufwand durchführbar sein, da diese Tätigkeiten etwas häufiger als bei einer arithmetisch tolerierten Baugruppe durchgeführt werden müssen.

## ***Voraussetzungen der statistischen Tolerierung***

Voraussetzung für dieses Vorgehen ist das Vorliegen eines fähigen Fertigungsprozesses, da das Vorliegen von systematischen Fehlern in den Toleranzen die beschriebene Vorgehensweise nicht erlaubt. Fähige Prozesse können wiederum nur durch eine gute Kenntnis dieser Prozesse erreicht werden. Auch für eine optimale Nutzung der statistischen Tolerierung sind Kenntnisse über die genaue Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Prozesses und damit eines Einzelmaßes (Grundsatz 2) erforderlich. Ein Betrieb, welcher die statistische Tolerierung nutzen möchte, sollte somit über eine gute Prozessüberwachung durch die Qualitätssicherung verfügen.

Der dadurch entstehende Mehraufwand wird durch die Erweiterung der Toleranzen bei Nutzung der statistischen Tolerierung kompensiert. Durch diese Toleranzerweiterung wird unter Annahme eines ansonsten unveränderten Prozesses die Ausschussrate erheblich gesenkt, da sich mehr Bauteile als zuvor innerhalb der Toleranz befinden. Hierdurch verbessert sich auch direkt die Prozessfähigkeit.

Auch wenn ein Betrieb die Voraussetzungen für die Nutzung statistischer Tolerierung erfüllt, kann es einzelne Anwendungsfälle geben, in denen die arithmetische Tolerierung von Vorteil ist. So ist bei sehr geringen Losgrößen, wie beispielsweise einer Einzelfertigung mit  $n = 1$  die arithmetische Tolerierung der statistischen Tolerierung vorzuziehen. In einem solchen Fall ist die sichere Einhaltung der Schließmaße wichtiger als mögliche Kostenreduktionen. Da bei einer Einzelfertigung ein Großteil der Bauteile häufig ebenfalls einzeln gefertigt wird, ist die Verringerung der Fertigungskosten durch gröbere Toleranzen hier nebensächlich.

Der Einsatz von statistischer Tolerierung kann somit Umstrukturierungen im Betrieb zur Folge haben, wenn die Voraussetzungen zur Einführung nicht vorliegen. Diese einmalige Investition ermöglicht jedoch dauerhaft geringere Produktionskosten als sie mit arithmetischer Tolerierung möglich wären.

## **6.4 Wahl eines geeigneten Berechnungsverfahrens**

Nachdem die Entscheidung zwischen arithmetischer und statistischer Tolerierung getroffen wurde, hängt die Auswahl eines geeigneten Berechnungsverfahrens maßgeblich von der Beschaffenheit der Maßkette ab (siehe Tabelle 22).

Die arithmetische Tolerierung ist universell für beliebige Arten von Maßketten einsetzbar und leicht anzuwenden. Sie nutzt jedoch wie soeben gezeigt andere Annahmen als die statistische Tolerierung und ist damit nur in manchen Fällen die beste Wahl. Die auf diesen Annahmen basierende Lösung ist mathematisch exakt und keine Näherungslösung.

Die Addition der Varianzen ist die am leichtesten anzuwendende Form der statistischen Tolerierung, besitzt gleichzeitig aber auch die größten Einschränkungen gegenüber den anderen Verfahren. Voraussetzung ist das Vorliegen einer stetigen und linearen Maßkette. Dieser Fall tritt in der Praxis sehr häufig auf, wodurch die Addition der Varianzen für viele Bauteile ein funktionierendes Verfahren zur statistischen Tolerierung ist. Zu beachten ist hierbei, dass bei diesem Verfahren jede beliebig geformte Wahrscheinlichkeitsverteilung auf die zwei Parameter Mittelwert und Standardabweichung heruntergebrochen wird. Hierdurch ermittelt dieses Verfahren nur eine gute Näherungslösung.

Berechnungsverfahren		Lösungsqualität	Eignung für Maßkette			Referenz	
			Stetig & linear	Stetig & nicht-linear	Unstetig		
Analytische Verfahren	Arithmetische Tolerierung	Exakt	✓	✓	✓	3.2.2	
	Statistische Tolerierung	Addition der Varianzen	Näherung	✓	✗	✗	4.3 & 5.1
		Linearisierung	Näherung	✓	✓	✗	[1, S. 147]
		Analytische Faltung	Exakt	✓	✓	✗	[3, S. 69]
		Monte-Carlo-Simulation	Näherung	✓	✓	✓	5.3.2
Numerische Verfahren							

*Tabelle 22: Eigenschaften der Berechnungsverfahren*

Beim Vorliegen nichtlinearer Maßketten können diese durch eine Taylorentwicklung 1. Ordnung in ihrem Arbeitspunkt zu linearen Maßketten überführt werden. Die Tolerierung kann anschließend wie zuvor durch Addition der Varianzen geschehen. Durch die zusätzliche Taylorentwicklung ist die Lösung mit einer größeren Ungenauigkeit als bei Vorliegen rein linearer Maßketten behaftet.

Die Ermittlung der exakten Lösung kann bei sehr einfachen Beispielen durch die Anschauung geschehen (siehe Kapitel 4). Bei komplizierteren Beispielen ist dagegen die analytische Faltung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Einzelmaße entsprechend der Maßkette durchzuführen. Dies ist meist nur mit Rechnerunterstützung möglich. Die hierfür gängigen Programme können meist keine unstetigen Maßketten analysieren [7, S. 35 ff].

Ein universell anwendbares numerisches Verfahren ist die in Kapitel 5.3.2 beschriebene Monte-Carlo-Simulation. Sofern eine Vorschrift für die Berechnung eines Ist-Schließmaßes aus den Ist-Einzelmaßen besteht, liefert diese Simulation eine Näherungslösung. Deren Genauigkeit ist von der Anzahl der simulierten Stichproben abhängig. Mittels erhöhten Rechenaufwand durch die Steigerung der Zahl an Stichproben kann die Irrtumswahrscheinlichkeit auf ein beliebig kleines Maß abgesenkt werden.

Für die schnelle Auswahl eines geeigneten Berechnungsverfahrens kann das Flussdiagramm in Abbildung 29 genutzt werden. Dieses gibt anhand von vier Fragen entsprechend der Informationen aus Tabelle 22 eine eindeutige Empfehlung für eine Berechnungsverfahren an.

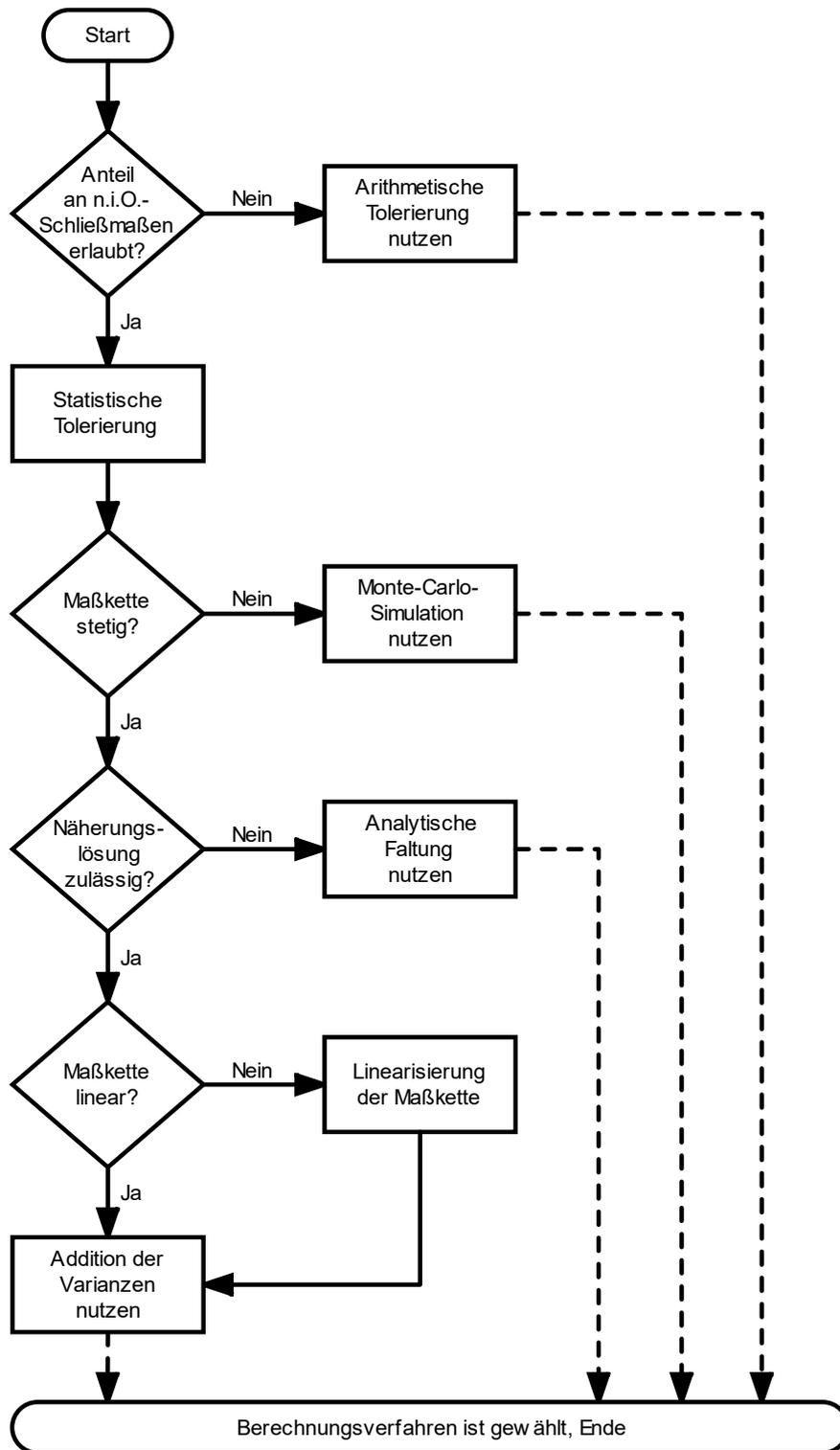


Abbildung 29: Flussdiagramm zur Wahl des Berechnungsverfahrens, in Anlehnung an [7, S. 34]

## 7 Schlussbetrachtungen

Es werden im Folgenden die mit dieser Thesis erzielten Arbeitsergebnisse zusammengestellt, kurz die wesentlichen Inhalte der Thesis zusammengefasst und ein Ausblick auf weiterführende Themen gegeben.

### 7.1 Arbeitsergebnisse

Wesentliches Ziel dieser Thesis war wie in Kapitel 1.2 dargestellt die Erhöhung der Praxistauglichkeit des Verfahrens der statistischen Tolerierung.

#### ***Geleistete Tätigkeiten***

Hierzu wurde in Kapitel 2 nach Literaturquellen mit geeigneten Erklärungen und Beispielen recherchiert. Die wenigen relevanten Hauptquellen wurden analysiert und Beispiele ausgewählt, an denen sich spezielle Teilbereich der statistischen Tolerierung gut darstellen ließen. Diese Beispiele bilden die Basis für Kapitel 3 bis 5 dieser Thesis. Da sich die anschaulichsten Darstellungen häufig erst durch Nutzung von Informationen aus Nebenquellen ergeben, wurden die gezeigten Erklärungen an den entsprechenden Stellen um diese ergänzt. Die deutlichsten Beispiele hierfür sind der Artikel [8], welcher die Basis des Kapitels 5.3 bildet oder die Darstellung des Pythagoras der Toleranzen nach [3].

Für jedes gezeigte Beispiel wurden die Rechnungen von Grund auf in Microsoft Excel neu erstellt und anschließend variiert sowie verifiziert. Hierdurch war die Angabe von in den Originalquellen fehlenden Zwischenergebnissen sowie die Unterstützung der gezeigten Erklärungen mit einer Vielzahl an Diagrammen möglich. Alle Beispiele wurden konkretisiert und in ihrer Form aneinander angepasst, indem die Bezeichnungen von Variablen sowie die Struktur der Berechnungen vereinheitlicht wurde. Zudem wurden sie bei Bedarf um Angaben der vorgegebenen Parameter, Maßpläne, fehlende Rechenwege sowie Istmaß-Diagramme erweitert.

Die eigens für diese Thesis entwickelten Istmaß-Diagramme ziehen sich in Kapitel 3 und Kapitel 4 durch die Einführung der arithmetischen und statistischen Tolerierung und begleiten das Beispiel der 10H7/10h6-Passung. Alle durch sie gezeigten Zusammenhänge sind durch Herleitungen oder Beweise abgesichert. Sie unterstützen die parallel durchgeführten Analysen der jeweiligen Toleranzen und statistischen Parameter durch eine anschauliche grafische Alternative und ermöglichen dadurch eine schnelle gedankliche Kontrolle der Zusammenhänge ohne die Nutzung von Formeln, was der Praxistauglichkeit entgegenkommt.

## **Struktur der Thesis**

Im Allgemeinen orientiert sich der Aufbau der Arbeit an einem stringenten roten Faden. Dies gilt sowohl für die gezeigten Zusammenhänge als auch für die unterstützenden Beispiele und Grafiken. Nach der obligatorischen Einleitung und Literaturrecherche werden in Kapitel 3 zunächst die relevanten Grundlagen der Statistik erläutert. Hier wird das erste Mal Gebrauch von der beispielhaften 10h6-Welle gemacht. Die Einführung in die Toleranzen bedient sich dem identischen Beispiel, welches in der nachfolgenden Erklärung der arithmetischen Tolerierung dann auf eine 10H7/10h6-Passung erweitert wird. Im Kapitel 4 werden diese beiden Grundlagenabschnitte anhand des bereits bekannten 10H7/10h6-Beispiels in die Erklärung der statistischen Tolerierung zusammengeführt und die sich daraus ergebenden Zusammenhänge ausgewertet und interpretiert. Der rote Faden der Abschnitte des Kapitels 4 ist der schrittweise Übergang von den Annahmen der arithmetischen Tolerierung zu den Annahmen der statistischen Tolerierung. Nachdem die statistische Tolerierung so nun eingeführt ist, wird anschließend schrittweise die Komplexität der Maßkette erhöht. Hierzu werden in Abschnitt 5.1 die bis zu diesem Punkt aufgebauten Grundlagen erweitert und Maßketten mit mehr als zwei Elementen eingeführt, welche in Abschnitt 5.2 an einem Praxisbeispiel erläutert werden. Die Auswertung der Varianzen zeigte Optimierungspotenzial auf. Abschnitt 5.3 schließt die Beispiele mit wiederum erhöhter Komplexität durch die Betrachtung einer unstetigen Maßkette.

Durch die Interpretation der in den Kapiteln 3 bis 5 gezeigten Zusammenhänge können diverse Empfehlungen für die Praxis abgeleitet werden, welche bei Erwähnung in diesen Kapiteln allerdings den Lesefluss gestört hätten<sup>22</sup>. Deswegen werden diese in der Literatur bisher größtenteils unerwähnten Empfehlungen in Kapitel 6 gesammelt dargestellt. Der Aufbau startet hierbei mit eher speziellen Zusammenhängen und endet mit allgemeinen Empfehlungen, um dem Leser schrittweise zu einem immer weitergreifenden Verständnis zu führen. So werden in Abschnitt 6.1 die Auswirkungen der Variation der Maßkettenlänge ermittelt, in Abschnitt 6.2 der Einfluss der weiteren Einflussfaktoren untersucht und in Abschnitt 6.3 die arithmetische mit der statistischen Tolerierung in ihrer Gesamtheit verglichen, wodurch in Abschnitt 6.4 abschließende Empfehlungen zur Wahl eines geeigneten Berechnungsverfahrens gegeben werden können.

Es wurden somit in Summe die besten in der Literatur auffindbaren Erklärungen und Beispiele zusammengestellt, kombiniert und durch eigene Elemente vervollständigt. Hierdurch ist eine

---

<sup>22</sup> Gleiches gilt für Fußnoten, weswegen diese an geeigneten Stellen für die Wiedergabe von weiterführenden Informationen verwendet werden.

Arbeit entstanden, welche die Grundlagen der statistischen Tolerierung mit ausgewählten Beispielen sowie Praxisempfehlungen zu einer in sich abgeschlossenen Arbeit vereint und somit einen wesentlichen Nutzen zur praxistauglichen Aufbereitung des Themenfelds der statistischen Tolerierung geleistet hat.

## **7.2 Zusammenfassung**

Die Literaturrecherche zum Thema der statistischen Tolerierung in Kapitel 2 zeigt, dass nur wenige Quellen gute Beispiele aus dem Maschinenbau enthalten. Die größte Anzahl an relevanten Beispielen ist in [1] zu finden. Zusammen mit Quellen [2] und [7] geben diese den besten Überblick über die statistische Tolerierung. Ausführliche mathematische Grundlagen sind in [3] zu finden. Die für die statistische Tolerierung zuständige Norm DIN 7186-1:1974-08 [4] wurde ersatzlos zurückgezogen.

### ***Grundlagenkapitel***

Es werden in Abschnitt 3.1 die Grundlagen der Ermittlung von Mittelwert sowie Standardabweichung, der Eigenschaften bestimmter Wahrscheinlichkeitsverteilungen (insbesondere der Normalverteilung), des Mittelwertsatzes, des Abweichungfortpflanzungsgesetzes sowie des zentralen Grenzwertsatzes gezeigt. Mit diesen Werkzeugen sind nun Aussagen über das Verhalten von Linearkombinationen mehrerer Wahrscheinlichkeitsverteilungen möglich, welche für das Verständnis der statistischen Tolerierung notwendig sind.

In Abschnitt 3.2 werden zunächst anhand einer 10h6-Welle die verschiedenen Darstellungsarten einer Toleranz aufgezeigt. Anschließend wird anhand einer 10H7/10h6-Welle-Nabe-Verbindung die Bestimmung des Schließmaßes durch arithmetische Tolerierung erklärt und das Istmaß-Diagramm eingeführt (siehe Abbildung 9). Es zeigt sich, dass bei der arithmetischen Tolerierung die Toleranzfeldbreite des Schließmaßes des Beispiels  $0,024\text{mm}$  beträgt.

Nachdem so die für das Verständnis der statistischen Tolerierung notwendigen Grundlagen dargestellt wurden, wird in Kapitel 4 die 10H7/10h6-Welle-Nabe-Verbindung weiter untersucht. Hierzu wird zunächst die Paarung einer geschliffenen Welle mit einer Nabe mit rechteckverteilten Istmaßen untersucht, um in die Istmaß-Diagramme bei statistischer Tolerierung einzuführen (siehe Abbildung 12). Anschließend wird der Fall von Welle und Nabe mit jeweils rechteckverteilten Istmaßen untersucht. Es zeigt sich, dass sich eine Trapezverteilung für die Schließ-Istmaße ergibt und die Toleranzfeldbreite im Allgemeinen immer noch  $0,0024\text{mm}$  beträgt (siehe Abbildung 13). Erst bei der nachfolgenden Betrachtung

von Welle und Nabe mit jeweils normalverteilten Istmaßen, wie sie in einer Serienproduktion auftreten können, reduziert sich das Schließmaß auf  $0,0175\text{mm}$  (siehe Abbildung 15).

Eine gegebene Toleranz kann dabei in eine entsprechende Normalverteilung umgewandelt werden, indem die Toleranz mit den  $\pm 3\sigma$ -Grenzen der Normalverteilung gleichgesetzt wird. Bei der statistischen Tolerierung addieren sich im Gegensatz zur arithmetischen Tolerierung nun die Varianzen und nicht die Toleranzfeldbreiten der Einzelmaße. Dadurch ergibt die statistische Tolerierung stets eine schmalere Toleranzfeldbreite des Schließmaßes als arithmetische Tolerierung. Dies kann mithilfe von Reduktionsfaktor  $r$  und Erweiterungsfaktor  $e$  quantifiziert werden, woraus auch die Kostenersparnisse berechnet werden können (siehe Abschnitt 4.4).

### ***Weiterführende Kapitel***

In Kapitel 5 wird der bisher nur für zweigliedrige Maßketten mit normalverteilten Einzelmaßen für mehrgliedrige Maßketten mit beliebigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Einzelmaße verallgemeinert. Anschließend wird dies in Abschnitt 5.2.1 ausführlich am Beispiel eines Kfz-Getriebes erklärt. Abschnitt 5.2.2 zeigt, dass durch Bestimmung der Beitragsleister und Angleichen der Varianzen der Einzelmaße die Toleranzen optimiert werden können.

Das beschriebene Vorgehen funktioniert jedoch nicht bei unstetigen Maßketten, weswegen in Abschnitt 5.3 die Analyse eines Scharniers mittels numerischer Monte-Carlo-Simulation gezeigt wird. Hierbei wird die Maßkette mit zufälligen Einzelmaßen wiederholt ausgewertet und die sich daraus ergebende Verteilung des Schließmaßes untersucht. Es zeigt sich, dass diese Methode leicht und universell anwendbar ist, aber keine einfache qualifizierte Optimierung der Toleranzen zulässt.

In Abschnitt 6.1 wird der Unterschied zwischen arithmetischer und statistischer Schließmaßberechnung unter vereinfachten Annahmen quantifiziert. Es zeigt sich, dass die Länge der Maßkette bei der arithmetischen Tolerierung linear und bei der statistischen Tolerierung nur radiziert Einfluss nimmt. In Abschnitt 6.2 werden die weiteren Einflussfaktoren auf die Produktionskosten untersucht. Die Folgerungen sind, dass gleichgroße Varianzen der Einzelmaße, eine gute Prozesskenntnis, kurze Maßketten sowie hohe Losgrößen für geringe Produktionskosten wünschenswert sind. Abschnitt 6.3 zeigt die Einsatzszenarien der statistischen beziehungsweise arithmetischen Tolerierung auf, da keine dieser Tolerierungsmethoden pauschal besser als die andere geeignet ist. Die Wahl hängt maßgeblich von dem erlaubten Anteil außerhalb der Toleranz liegender Schließmaße ab. Diese Erkenntnis wird zuletzt auch in Abschnitt 6.4 genutzt, in dem ein Flussdiagramm zur Wahl eines geeigneten Tolerierungsverfahrens aufgebaut wird (siehe Abbildung 29).

### **7.3 Ausblick**

Das Gebiet der statistischen Tolerierung ist umfangreich, weswegen diese Thesis aus Platz- und Zeitgründen viele interessante Themen nur am Rande erwähnen konnte.

#### ***Anknüpfungspunkte***

So wurden in sämtlichen Beispielen nur eindimensionale Maßketten betrachtet. In der Praxis treten aber durchaus mehrdimensionale Maßketten auf, welche sich unter Umständen sogar überschneiden können. Die Auslegung der Toleranzen wird dann deutlich komplexer als in den hier aufgezeigten Beispielen. Ähnliches gilt für Form- und Lagetoleranzen, welche nur in manchen Fällen eindimensional in eine Maßkette eingebettet werden können. Ebenfalls nur am Rande erwähnt wurden die Linearisierung einer nichtlinearen Maßkette oder aber die analytische Faltung von Maßketten. Letztere weist insbesondere in Zusammenspiel mit un stetigen Maßketten noch Forschungspotenzial auf.

Ein weiteres großes Themengebiet wurde in Kapitel 5.3.2 angerissen. Dort zeigte sich, dass die Ermittlung der Beitragsleister und damit eine Optimierung der Toleranzen bei der Monte-Carlo-Simulation nicht auf einfachem Wege möglich ist. Dies führt auf das sehr umfangreiche Themengebiet der lokalen beziehungsweise globalen Sensitivitätsanalyse, welches ebenfalls von einer praxistauglichen Aufbereitung profitieren würde.

Ein weiteres interessantes statistisches Problem betrifft die Montage von statistisch ausgelegten Baugruppen. Für den Fall eines aus der Toleranz fallenden Schließmaßes kann es lohnend sein, zu untersuchen, welche und wie viele Bauteile der Maßkette ausgetauscht werden sollten, um den ausschussfreien Einbau aller Bauteile möglichst reibungslos zu gestalten.

#### ***Weiterführende Ideen***

Forschungspotenzial existiert auch bei einer erweiterten Betrachtung der statistischen Tolerierung. So liegen zum Beispiel die Parameter einer Stichprobe stets in einem sich aus einer Irrtumswahrscheinlichkeit ergebenden Konfidenzintervall vor. Sie sind somit selbst mit einer Art von Toleranz behaftet. Dies wurde im Rahmen dieser Thesis ignoriert. Die Untersuchung der Auswirkungen dieser Unsicherheit auf die sich daraus ergebende Tolerierung könnte weiteres Optimierungspotenzial liefern. Gleiches gilt für das Zusammenspiel zwischen dieser Irrtumswahrscheinlichkeit und der Wahl des Umrechnungsfaktors  $u$  des Schließmaßes.

Bei der Bestimmung des Schließmaßes längerer Maßketten müssen viele gleichartige Berechnungen durchgeführt werden. Hier könnte es sinnvoll sein, Methoden der linearen

Algebra auf die arithmetische beziehungsweise statistische Tolerierung anzuwenden, dadurch gleichartige Größen in Vektoren zusammenzufassen und so die Rechnungen zu vereinfachen.

Zuletzt ist die statistische Tolerierung unweigerlich mit der Six-Sigma-Methode (siehe [19]) sowie dem Robust Design (siehe [18]) und dadurch auch mit der Taguchi-Methode (siehe [16]) verknüpft. Das Six-Sigma-Ziel der Erhöhung der Prozessfähigkeit interagiert direkt mit der statistischen Tolerierung, da fähigere Prozesse eine verbesserte statistische Auslegung der Toleranzen ermöglichen. Das Ziel des Robust Designs, Produkte unempfindlicher gegenüber Schwankungen zu machen, wirkt sich direkt auf die Gestaltung von Maßketten und die Auslegung von Schließmaßen aus. All dies führt auf eine genaue holistische Betrachtung aller der Herstellung eines Produktes anhaftenden Kosten hinaus. Hierbei kann die Anwendung der Taguchi-Methode Ansätze zur Optimierung liefern. Die Interaktion der statistischen Tolerierung mit diesen Ansätzen scheint noch weitestgehend unerforscht zu sein. Es eröffnen sich zum Beispiel die Fragen nach dem optimalen Kompromiss zwischen Fertigungs- und Ausschusskosten durch die Wahl des Tolerierungsverfahrens oder aber nach dem genauen Einfluss gemischter Fertigungsverfahren auf die Toleranzoptimierung.

Wie zu sehen ist, gibt es somit noch eine Vielzahl an offenen Forschungsfragen auf dem Gebiet der statistischen Tolerierung. Dieses wird hierdurch auch in den nächsten Jahrzehnten noch einige Neuerungen erfahren, der Weg zur optimalen Toleranz ist somit noch lang.

## Literaturverzeichnis

- [1] B. Klein, Prozessorientierte Statistische Tolerierung im Maschinen- und Fahrzeugbau: Mathematische Grundlagen – Toleranzverknüpfungen – Prozesskontrolle – Maßkettenrechnung – Praktische Anwendungen, 5. Aufl. in Haus der Technik - Fachbuchreihe, no. 73. Renningen: expert Verlag, 2017.
- [2] F. Mannewitz, Statistische Toleranzberechnung: Leitfaden zur systematischen Anwendung, 1. Aufl. in Haus der Technik - Fachbuchreihe, no. 141. Renningen: expert Verlag, 2016.
- [3] G. Kirschling, Qualitätssicherung und Toleranzen: Toleranz- und Prozeßanalyse für Entwicklungs- und Fertigungsingenieure, 1. Aufl. Berlin: Springer Verlag, 1988.
- [4] DIN e.V., „DIN 7186-1:1974-08, Statistische Tolerierung - Begriffe, Anwendungsrichtlinien und Zeichnungsangaben“. Beuth Verlag, 1974.
- [5] DIN e.V., „DIN ISO 22514-2:2019-07, Statistische Verfahren im Prozessmanagement - Fähigkeit und Leistung - Teil 2: Prozessleistungs- und Prozessfähigkeitskenngrößen von zeitabhängigen Prozessmodellen“. Beuth Verlag, 2019.
- [6] DIN e.V., „DIN ISO 21747:2007-03, Statistische Verfahren - Prozessleistungs- und Prozessfähigkeitskenngrößen für kontinuierliche Qualitätsmerkmale“. Beuth Verlag, 2007.
- [7] Robert Bosch GmbH, Statistische Tolerierung, 3. Aufl. in Qualitätsmanagement in der Bosch-Gruppe | Technische Statistik, no. 5. 2022. [Online]. Verfügbar unter: [https://assets.bosch.com/media/global/bosch\\_group/purchasing\\_and\\_logistics/information\\_for\\_business\\_partners/downloads/quality\\_docs/general\\_regulations/bosch\\_publications/booklet-no05-statistische-tolerierung\\_DE.pdf](https://assets.bosch.com/media/global/bosch_group/purchasing_and_logistics/information_for_business_partners/downloads/quality_docs/general_regulations/bosch_publications/booklet-no05-statistische-tolerierung_DE.pdf)
- [8] M. S. J. Walter, T. C. Spruegel, P. Ziegler, und S. Wartzack, „Berücksichtigung von Wechselwirkungen zwischen Abweichungen in der statistischen Toleranzanalyse“, Konstruktion, 2015, [Online]. Verfügbar unter: <https://www.ingenieur.de/fachmedien/konstruktion/produktentwicklung/beruecksichtigung-von-wechselwirkungen-zwischen-abweichungen-in-der-statistischen-toleranzanalyse/>
- [9] A. Saltelli u. a., Global Sensitivity Analysis: The Primer, 1. Aufl. Chichester, West Sussex: John Wiley & Sons Ltd., 2008.
- [10] R. Hesse, „Triangle Distribution: Mathematica Link for Excel“, Decision Line, S. 3, Mai 2000, Zugegriffen: 23. September 2006. [Online]. Verfügbar unter: [https://web.archive.org/web/20060923225843/http://www.decisionsciences.org/DecisionLine/Vol31/31\\_3/31\\_3clas.pdf](https://web.archive.org/web/20060923225843/http://www.decisionsciences.org/DecisionLine/Vol31/31_3/31_3clas.pdf)
- [11] T. Veese, „Vorlesungsskript: Statistische Datenauswertung und Versuchsplanung“. Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg, 2020.
- [12] L. Papula, Mathematische Formelsammlung: für Ingenieure und Naturwissenschaftler; mit ... zahlreichen Rechenbeispielen und einer ausführlichen Integraltafel, 12. Aufl. in Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. Wiesbaden: Springer Verlag, 2017.
- [13] DIN e.V., „DIN EN ISO 286-1:2019-09, Geometrische Produktspezifikation (GPS) - ISO-Toleranzsystem für Längenmaße - Teil 1: Grundlagen für Toleranzen, Abmaße und Passungen“. Beuth Verlag, 2019.
- [14] B. Klein, Toleranzdesign im Maschinen- und Fahrzeugbau: dimensionelle und geometrische Toleranzen (F+L), CAD-Tolerierung, Tolerierungsprinzipien, Maßketten und Oberflächen, 4. Aufl. Berlin: De Gruyter Oldenbourg, 2018.
- [15] R. Gomeringer u. a., Tabellenbuch Metall: mit Formelsammlung, 47. Aufl. in Europa-Fachbuchreihe für Metallberufe. Haan-Gruiten: Verlag Europa-Lehrmittel, 2018.

- [16] G. Taguchi, S. Chowdhury, und Y. Wu, Taguchi's quality engineering handbook, 10. Aufl. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons Ltd., 2005.
- [17] C.-Y. Lin, W.-H. Huang, M.-C. Jeng, und J.-L. Doong, „Study of an assembly tolerance allocation model based on Monte Carlo simulation“, Journal of Materials Processing Technology, Bd. 70, Nr. 1–3, S. 9–16, Okt. 1997, doi: 10.1016/S0924-0136(97)00034-4.
- [18] M. S. Phadke, Quality engineering using robust design, 1. Aufl. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1989.
- [19] H. Toutenburg, P. Knöfel, und I. Kreuzmair, Six Sigma: Methoden und Statistik für die Praxis, 2. Aufl. Berlin: Springer Verlag, 2009.
- [20] G. Henzold, Geometrical dimensioning and tolerancing for design, manufacturing and inspection: a handbook for geometrical product specification using ISO and ASME standards, Third edition. Oxford, United Kingdom: Butterworth-Heinemann, 2021.
- [21] H. Wittel, D. Jannasch, J. Voßiek, und C. Spura, Maschinenelemente - Normung, Berechnung, Gestaltung, 23. Aufl. Heidelberg: Springer Verlag, 2017. doi: 10.1007/978-3-658-17896-3.
- [22] M. Bohn und K. Hetsch, Funktionsorientiertes Toleranzdesign: Angewandte Form- und Lagetolerierung im Maschinen-, Fahrzeug- und Gerätebau, 2. Aufl. München: Hanser Verlag, 2020.
- [23] B. Klein und F. Mannewitz, Statistische Tolerierung: Qualität der konstruktiven Gestaltung, 1. Aufl. Braunschweig: Vieweg Verlag, 1993.
- [24] E. Dietrich und S. Conrad, Statistische Verfahren zur Maschinen- und Prozessqualifikation, 8. Aufl. München: Hanser Verlag, 2022. doi: 10.3139/9783446465046.fm.
- [25] K.-H. Decker und K. Kabus, Maschinenelemente. Funktion, Gestaltung und Berechnung, 20. Aufl. München: Hanser Verlag, 2018.
- [26] M. Kühlmeyer, Statistische Auswertungsmethoden für Ingenieure: mit Praxisbeispielen, 1. Aufl. Berlin Heidelberg: Springer Verlag, 2001.
- [27] A. Birolini, Qualität und Zuverlässigkeit technischer Systeme: Theorie, Praxis, Management, 2. Aufl. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1988.



## Anhang A: Weitere untersuchte Literatur

Toleranzdesign im Maschinen- und Fahrzeugbau: dimensionelle und geometrische Toleranzen (F+L), CAD-Tolerierung, Tolerierungsprinzipien, Maßketten und Oberflächen		
[14]	Bernd Klein	2018
Vom gleichen Autor wie Quelle [1] verfasst, behandelt dieses Buch vornehmlich das <b>Toleranzdesign nach dem ISO-GPS-System</b> . Der Fokus liegt somit auf der sehr detailliert beschriebenen Auslegung von Form- und Lagetoleranzen. <b>Kapitel 11</b> behandelt dabei den Inhalt von [1] in sehr stark gekürzter Form. Fokus bildet dabei das Beispiel 5.9. aus [1].		

Taguchi's Quality Engineering Handbook		
[16]	Genichi Taguchi, Subir Chowdhury, Yuin Wu	2005
Ein äußerst umfassendes englischsprachiges Buch, welches in Kapitel 10 im Rahmen der <b>Taguchi-Methode</b> kurz auf das <b>kostenoptimierte Toleranzdesign</b> eingeht. Dies geschieht jedoch anhand eines elektrotechnischen Beispiels. Enthält Ansätze für über den Umfang dieser Thesis hinausgehende Kostenoptimierungen.		

Quality Engineering using Robust Design		
[18]	Madhav S. Phadke	1989
Dieses englischsprachige Buch geht im Rahmen des <b>Robust Designs</b> in Kapitel 8.7 auf das Toleranzdesign ein. Es bedient sich dabei ausgiebig der Betrachtung von Signal-to-Noise-Ratios und Kostenfunktionen. Das betrachtete Beispiel ist elektrotechnischer Natur.		

Six Sigma - Methoden und Statistik für die Praxis		
[19]	Helge Toutenburg, Philipp Knöfel	2009
Erklärt die mit der statistischen Tolerierung eng verwobene <b>Six-Sigma-Methodik</b> sehr statistikorientiert. Enthält keinen konkreten Verweis auf die statistische Tolerierung.		

Geometrical dimensioning and tolerancing for design, manufacturing and inspection: a handbook for geometrical product specification using ISO and ASME standards		
[20]	Georg Henzold	2021
<p>Englischsprachiges sehr umfassendes Buch, welches sich mit sämtlichen Facetten der geometrischen Produktspezifikation befasst. Die <b>statistische Tolerierung</b> wird in <b>Kapitel 4.7</b> auf knapp 10 Seiten erläutert. Dabei werden die Begrifflichkeiten und Methoden der zurückgezogenen DIN 7186 genutzt, welche etwas von den in [1] genutzten Begrifflichkeiten abweichen.</p>		

Maschinenelemente - Normung, Berechnung, Gestaltung		
[21]	Herbert Wittel et al.	2017
<p>In diesem besser unter seinem Herausgeber als „Roloff/Matek“ bekannten <b>Standardwerk des Maschinenbaus</b> wird in Kapitel 2.2.5 kurz auf die Vorteile der statistischen Tolerierung gegenüber der arithmetischen Tolerierung verwiesen, ohne aber weiter auf diese einzugehen.</p>		

Funktionsorientiertes Toleranzdesign		
[22]	Martin Bohn, Klaus Hetsch	2020
<p>In diesem Buch wird ebenfalls primär das Design von Form- und Lagetoleranzen behandelt. Die <b>statistische Tolerierung</b> wird äußerst kurz in <b>Kapitel 10.1.2</b> angerissen. Im Gegensatz zu Quelle [14] liegt der Fokus mehr auf dem Prozess des Toleranzdesigns als auf den Formalien und Best Practices der Tolerierung.</p>		

Statistische Tolerierung - Qualität der konstruktiven Gestaltung		
[23]	Bernd Klein, Frank Mannewitz	1993
<p>Effektiv der <b>Vorgänger von Quelle [1]</b>, welcher aber deutlich weniger Beispiele benutzt und dem die nützlichen Referenzmaterialien von [1] fehlen. Ansonsten nahezu identischer Inhalt.</p>		

Statistische Verfahren zur Maschinen- und Prozessqualifikation		
[24]	Edgar Dietrich, Conrad Stephan	2022
Geht in <b>Kapitel 4.12.2</b> im Rahmen der Beurteilung von Qualitätsregelkarten auf die <b>optimale Ausnutzung von Toleranzen</b> ein, ohne dabei aber auf die statistische Auslegung von Toleranzen einzugehen.		

Maschinenelemente – Funktion, Gestaltung, Berechnung		
[25]	Karl-Heinz Decker et al.	2018
In diesem <b>Standardwerk des Maschinenbaus</b> wird die statistische Tolerierung nicht erwähnt.		

Statistische Auswertungsmethoden für Ingenieure: mit Praxisbeispielen		
[26]	Manfred Kühlmeyer	2001
Behandelt die <b>Grundlagen der Statistik</b> , ohne dabei ein konkretes Beispiel zur Tolerierung von Bauteilen aufzuzeigen.		

Qualität und Zuverlässigkeit technischer Systeme: Theorie, Praxis, Management		
[27]	Alessandro Birolini	1988
Befasst sich nahezu ausschließlich mit der <b>Zuverlässigkeit elektronischer Bauteile</b> , daher nicht sonderlich relevant für diese Thesis.		



# Eidesstattliche Erklärung

## Erklärung zur selbstständigen Bearbeitung der Arbeit

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit ohne fremde Hilfe selbständig verfasst und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Wörtlich oder dem Sinn nach aus anderen Werken entnommene Stellen sind unter Angabe der Quellen kenntlich gemacht.

Hamburg, den \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
(Unterschrift der/des Studierenden)