



Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Hamburg University of Applied Sciences

Bachelorarbeit

Caroline Sophia Stauske

Numerische Simulation in der Bruchmechanik

*Fakultät Technik und Informatik
Department Maschinenbau und Produktion*

*Faculty of Engineering and Computer Science
Department of Mechanical Engineering and
Production Management*

Caroline Sophia Stauske
Numerische Simulation in der
Bruchmechanik

Bachelorarbeit eingereicht im Rahmen der Bachelorprüfung

im Studiengang Maschinenbau und Produktion
am Department Maschinenbau und Produktion
der Fakultät Technik und Informatik
der Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg

in Zusammenarbeit mit:
KONSCHA Simulation GmbH
Abteilung Berechnung
Lerchenstraße 28a
22767 Hamburg

Erstprüfer/in: Prof. Dr. Georgi Kolarov
Zweitprüfer/in : Dipl.-Ing. Alexander Haas

Abgabedatum: 21.02.2024

Zusammenfassung

Caroline Sophia Stauske

Thema der Bachelorthesis

Numerische Simulation in der Bruchmechanik

Stichworte

FEM, APDL, ANSYS, linear elastische Bruchmechanik, elasto-plastische Bruchmechanik, Bruchmechanischer Festigkeitsnachweis nach FKM, Spannungsintensitätsfaktor, J-Integral, Rissspitzenelemente, Risslängenkorrektur nach Irwin

Kurzzusammenfassung

Zunächst wird eine Einführung in die Bruchmechanik gegeben, darauffolgend werden linear elastische und elasto-plastische Bruchkriterien und deren analytische und numerische Berechnung vorgestellt. Anschließend wird ein CT-Proben-Modell in der ANSYS-Workbench und in ANSYS-Classic (APDL) erstellt. Dieses Modell wird nach verschiedenen analytischen, semi-empirischen und numerischen Methoden berechnet und die Berechnungsergebnisse mit einem Versuch verglichen.

Anhand des CT-Proben-Modells in APDL wird die Wegabhängigkeit des J-Integrals, der Einfluss der Plastifizierung auf das J-Integral und Form und Größe der plastischen Zone untersucht.

Im Anschluss wird ein zweites Modell (Scheibe mit mittigem Riss) in ANSYS-Classic und in der ANSYS-Workbench erstellt. Dieses wird dann ebenfalls nach verschiedenen analytischen, semi-empirischen und numerischen Methoden berechnet.

Als letztes werden die Ergebnisse und Unterschiede der beiden Modelle verglichen.

Caroline Sophia Stauske

Title of the paper

Numerical simulation in fracture mechanics

Keywords

FEM, APDL, ANSYS, linear elastic fracture mechanics, elasto-plastic fracture mechanics, fracture mechanical strength verification according to FKM, stress intensity factor, J-integral, crack tip elements, crack length correction according to Irwin

Abstract

Firstly, an introduction to fracture mechanics is given, followed by a presentation of linear elastic and elasto-plastic fracture criteria and their analytical and numerical calculation. Subsequently, a CT specimen model is created in the ANSYS-Workbench and in ANSYS-Classic (APDL). This model is calculated using various analytical, semi-empirical and numerical methods and the calculation results are compared with a test.

Using the CT specimen model in APDL, the path dependence of the J-integral, the influence of plasticisation on the J-integral and the shape and size of the plastic zone are investigated.

A second model (disc with central crack) is then created in ANSYS-Classic and in the ANSYS-Workbench. This is then also calculated using various analytical, semi-empirical and numerical methods.

Finally, the results and differences between the two models are compared.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Stand der Technik	2
2.1	Grundlagen	2
2.1.1	Rissarten und Werkstoffaufbau	2
2.1.2	Bruchmodi	3
2.1.3	Spannungszustände	4
2.1.4	Versagenshypothesen	5
2.1.5	Materialverhalten und Verfestigung	6
2.2	Lineare Bruchmechanik	7
2.2.1	Spannungs- und Verschiebungsfeld um die Rissspitze	7
2.2.2	Spannungsintensitätsfaktor K_I	10
2.3	Elasto-plastische Bruchmechanik	10
2.3.1	Kleine plastische Zonen	11
2.3.2	Irwinsche Risslängenkorrektur	12
2.4	Bruchkriterien in der EPBM	14
2.4.1	Rissspitzenöffnungsverschiebung CTOD	14
2.4.2	J-Integral	15
2.4.3	FAD-Konzept	17
2.5	Finite-Element-Methode	19
2.5.1	Scheibenelemente	20
2.5.2	Isoparametrische Elemente	25
2.5.3	Nicht lineares Materialverhalten in der FEM	26
2.5.4	Rissspitzenelemente	28
2.5.5	Numerische Berechnung des J-Integrals	30
2.5.6	Numerische Bestimmung des Spannungsintensitätsfaktors	31
3	Modelle: Aufbau und Untersuchung	33
3.1	Modellierung der CT-Probe in APDL	33
3.1.1	Beschreibung des CT-Proben-Modells in APDL	33
3.1.2	Konvergenz des CT-Proben-Modells in APDL	34
3.2	Modellierung der CT-Probe in der Workbench	35
3.2.1	Beschreibung des CT-Proben-Modells in der Workbench	36
3.2.2	Konvergenz des CT-Proben-Modells in der Workbench	36
3.3	Untersuchung des CT-Proben-Modells in APDL	37
3.3.1	Wegabhängigkeit des J-Integrals	37
3.3.2	Einfluss der plastischen Zone auf das J-Integral	39
3.3.3	Form und Größe der plastischen Zone	41
3.4	Berechnung des CT-Proben-Modells	43
3.4.1	Linear elastische Betrachtung	44
3.4.2	Elasto plastische Betrachtung	46
3.4.3	Gegenüberstellung der Ergebnisse	47
3.5	Modellierung der Scheibe mit mittigem Riss	49

3.5.1	Beschreibung des Modells der Scheibe mit mittigem Riss in APDL	50
3.5.2	Konvergenz des Modells der Scheibe mit mittigem Riss in APDL	50
3.5.3	Beschreibung des Modells der Scheibe mit mittigem Riss in der Workbench	52
3.5.4	Konvergenz des Modells der Scheibe mit mittigem Riss in der Workbench	52
3.6	Berechnung der Scheibe mit mittigem Riss	53
3.6.1	Linear elastische Betrachtung	54
3.6.2	Elasto-plastische Betrachtung	55
3.6.3	Gegenüberstellung der Ergebnisse	56
3.7	Vergleich der beiden Modelle	57
4	Fazit	59
5	Quellen	61
A	APDL-Code des CT-Proben-Modells	A1
B	APDL-Code des Modells der Scheibe mit mittigem Riss	A7

Abbildungsverzeichnis

1	Bruchvorgänge auf unterschiedlichen Skalen und Betrachtungsebenen [1, S.6] . . .	2
2	Bruchmodi [2, S.66]	3
3	Fließbedingung nach Tresca und von Mises [1, S.401]	6
4	Spannungsdehnungs-Diagramme für verschiedene Materialverhalten (a) reales Verhalten (b) linear elastisch - linear plastisch , (c) linear elastisch - ideal plastisch, (d) starr, ideal plastisch	6
5	plastifizierungsgrade eines Körpers mit Riss [1, S.83]	11
6	Plastische Zonen des EVZ und ESZ [1, S.85] [2, S.120]	12
7	Plastische Risslängenkorrektur nach Irwin [1, S.87]	13
8	FAD-Diagramm [1, S.93]	18
9	FAD-Diagramm Vergleich Analytik und FKM	19
10	Darstellung der Dreieckskoordinaten im kartesischen Koordinatensystem [3, S. 40]	21
11	Formfunktionen im Dreieckselemente [3, S.215]	22
12	Isoparametrisches Dreieckselement mit quadratischen Formfunktionen [1, S. 168]	25
13	Newton-Raphson-Verfahren [1, S.177]	26
14	links: Element in natürlichen Koordinaten; rechts: Element in lokalen kartesischen Koordinaten [1, S.192]	28
15	Kollabiertes isoparametrisches Viereckelement [1, S.195]	29
16	Konturen um die Rissspitze in ANSYS [4]	31
17	Modell der CT-Probe	33
18	Netz des CT-Proben-Modells in der Workbench	36
19	Abhängigkeit des J-Integrals von der Kontur	38
20	Abhängigkeit der Änderung von J über die Kontur	38
21	Plastifizierte Zone an der Rissspitze bei $F = 400N$ im ESZ	39
22	Einfluss der plastischen Zone auf das J-Integral	40
23	Einfluss der plastischen Zone auf das J-Integral	41
24	Vergleichsspannung nach von Mises an der Rissspitze	42
25	Vergleich der plastischen Zonen vom Kleinbereichsfließen analytisch und FEM . .	42
26	K_J -Verlauf über den Pfad des CT-Proben-Modells in der Workbench	45
27	Einordnung der Arbeitspunkte in das FAD-Diagramm	47
28	Modell der Scheibe mit mittigem Riss in APDL	50
29	Netz der Scheibe mit mittigem Riss als Volumenmodell in der Workbench	52
30	K_J -Verlauf über den Pfand des Scheibenmodells mit mittigem Riss in der Workbench	55
31	Vergleich der plastischen Zonen des Scheibenmodells	58
32	Spannungsfeld um die Rissspitze (von Mises Vergleichsspannung) für das Scheibenmodell	58

Tabellenverzeichnis

1	Modellversionen für die Konvergenzstudie des CT-Proben-Modells	34
2	Konvergenzstudie CT-Proben-Modell in APDL, absolute Größen	35
3	Konvergenzstudie CT-Proben-Modell in APDL, relative Abweichung	35
4	Konvergenz des CT-Proben-Modells in der Workbench	37

5	Gegenüberstellung der Ergebnisse der verschiedenen Berechnungsmethoden . . .	48
6	Modellversionen für die Konvergenzstudie des Scheiben-Modells mit mittigem Riss	51
7	Konvergenzstudie des Modells der Scheibe mit mittigem Riss in APDL, absolute Größen	51
8	Konvergenzstudie des Modells der Scheibe mit mittigem Riss in APDL, relative Abweichung	51
9	Konvergenz des Scheibenmodells mit mittigem Riss in der Workbench	53
10	Gegenüberstellung der Ergebnisse des Modells der Scheibe mit mittigem Riss . .	57

Symbolverzeichnis

σ	Spannung
E	E-Modul
G	Schubmodul
ν	Querkontraktionszahl
σ_{ij}	Spannungstensor
σ_x	Normalspannung in x-Richtung
σ_y	Normalspannung in y-Richtung
σ_z	Normalspannung in z-Richtung
τ_{xy}	Schubspannung in der x-Ebene in y-Richtung
τ_{xz}	Schubspannung in der x-Ebene in z-Richtung
τ_{yx}	Schubspannung in der y-Ebene in x-Richtung
τ_{yz}	Schubspannung in der y-Ebene in z-Richtung
τ_{zx}	Schubspannung in der z-Ebene in x-Richtung
τ_{zy}	Schubspannung in der z-Ebene in y-Richtung
ε_{ij}	Dehnungstensor
ε_x	Dehnung in x-Richtung
ε_y	Dehnung in y-Richtung
ε_z	Dehnung in z-Richtung
γ_{xy}	Schiebung in der x-Ebene in y-Richtung
γ_{xz}	Schiebung in der x-Ebene in z-Richtung
γ_{yx}	Schiebung in der y-Ebene in x-Richtung
γ_{yz}	Schiebung in der y-Ebene in z-Richtung
γ_{zx}	Schiebung in der z-Ebene in x-Richtung
γ_{zy}	Schiebung in der z-Ebene in y-Richtung
$\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$	Hauptspannungen
τ_{\max}	Maximale Schubspannung
σ_v	Vergleichsspannung
σ_F	Fließgrenze
$\Phi(z)$	Ansatzfunktion nach Kolosov
$\overline{\Phi(z)}$	Ansatzfunktion nach Kolosov
$\Psi(z)$	Ansatzfunktion nach Kolosov
$\overline{\Psi(z)}$	Ansatzfunktion nach Kolosov
λ	Exponent der Ansatzfunktion von Kolosov
σ_φ	Normalspannung in Polarkoordinaten in Umfangsrichtung
σ_r	Normalspannung in Polarkoordinaten in radialer Richtung
$\tau_{r\varphi}$	Schubspannung in Polarkoordinaten
u	Verschiebung in x-Richtung
v	Verschiebung in y-Richtung
u_i	Verschiebung in i-Richtung und in Kapitel 2.5.1 Verschiebung (lokal) des i-ten Knotens in x-Richtung
u_{i0}	Starrkörperverschiebung in i-Richtung
r	Radialer Abstand zur Risspitze
$\widehat{u}_i^{(i)}$	Eigenfunktion der Verschiebung

z	Komplexe Zahl
\bar{z}	Komplexkonjugierte Zahl
κ	Faktor, der zwischen ESZ und EVZ unterscheidet
K_I	SIF für Modus I
G_I	Geometriefaktor für Modus I
a	Länge des Risses
b	Breite der Scheibe
r_P	Radius der plastischen Zone
d_P	Durchmesser der plastischen Zone
a_{eff}	Effektive Länge des Risses
δ_t	Risspitzenöffnung
δ_{tc}	Kritische Risspitzenöffnung
J	J-Integral
b_{kj}	Energie-Impuls-Tensor
n_j	Normalenvektor der Oberfläche
δ_{ij}	Kronecker-Delta
U	Formänderungsenergiedichte
f_i	Volumenkräfte
Γ	Integrationspfad des J-Integrals
\check{U}^{ep}	Elasto-plastische Formänderungsenergiedichte
$\overline{\varepsilon}_{mn}$	Verzerrungstensor mit Verfestigung
ε_{kl}^e	Elastischer Anteil des Verzerrungstensors
ε_{kl}^p	Plastischer Anteil des Verzerrungstensors
\check{U}^p	Plastischer Anteil der Formänderungsenergiedichte
\check{U}^e	Elastischer Anteil der Formänderungsenergiedichte
J_e	Elastischer Anteil des J-Integrals
J_p	Plastischer Anteil des J-Integrals
η	Empirisch bestimmte Korrekturgröße
\bar{q}_p, q_p	Verschiebung der Risspitze im Versuch
J_{Ic}	Kritische Größe des J-Integrals für Rissinitiierung im Modus I
d	Größe der Plastischen Zone im Dugdale-Modell
σ_c^{LEBM}	Kritische Spannung, bei der die Rissinitiierung in der LEBM auftritt
K_r	Ordinate des FAD-Diagramms
S_r, L_r	Abzisse des FAD-Diagramms
L_r^{max}	plastischer Kollaps
μ	Variable zur Bestimmung von L_r in der FKM-Richtlinie
N	Variable zur Bestimmung von L_r in der FKM-Richtlinie
R_m	Zugfestigkeit
$R_{p0,2}, R_p$	0,2%-Dehngrenze, Dehngrenze
R_e	Streckgrenze
Π	Potential
$\vec{\varepsilon}$	Dehnungen
$\vec{\sigma}$	Spannungen
\vec{u}	Verschiebungen innerhalb eines Elementes

\vec{b}	Volumenlasten in der FEM
\vec{q}	Streckenlasten in der FEM
\vec{F}	Einzellasten in der FEM
\underline{L}	Differentialoperator-Matrix
\underline{D}	Stoffmatrix in der FEM
N_1, N_2, N_3	Elemente der Ansatzfunktionsmatrix \underline{N} in der FEM
\underline{N}	Ansatzfunktion in der FEM
\underline{L}_Δ	Differentialoperator-Matrix in Baryzentrischen Koordinaten
\underline{B}	Produkt aus \underline{L}_Δ und \underline{N}
L_1, L_2, L_3	Baryzentrische Koordinaten
A_{ges}	Gesamtfläche des Dreiecks
\vec{a}, a_1, a_2, a_3	Koeffizienten der Ansatzfunktion in der FEM
$\vec{\phi}, \phi_1, \phi_2, \phi_3$	Ansatzfunktion der FEM
\vec{u}	Knotenverschiebungen in der FEM
v_i	Knotenverschiebungen (lokal) des i -ten Knotens in der FEM in y -Richtung
b_x, b_y	Komponenten von \vec{b}
\vec{g}	Gravitationsvektor
g_x, g_y	Komponenten von \vec{g}
ρ	Dichte
b_{x1}, b_{x2}, b_{x3}	Komponenten der diskretisierten Volumenlast in x -Richtung
b_{y1}, b_{y2}, b_{y3}	Komponenten der diskretisierten Volumenlast in y -Richtung
\vec{G}	Diskretisiertes Potential der Volumenlasten in der FEM
\vec{Q}	Diskretisiertes Potential der Streckenlasten in der FEM
\vec{b}	Diskretisierte Volumenlasten in der FEM
\vec{q}	Diskretisierte Streckenlasten in der FEM
\underline{K}	Steifigkeitsmatrix in der FEM
$\delta\vec{u}$	Infinitesimale Verschiebung
\underline{J}	Jacobi-Matrix
$\vec{\xi}$	Lokale Koordinate der isoparametrischen Scheibenelemente
\vec{x}	Globale Koordinate der isoparametrischen Scheibenelemente
F_n^{ext}	Extern aufgebrauchte Kraft in der nicht linearen FEM-Berechnung im n -ten Lastschritt
F_{n+1}^{ext}	Extern aufgebrauchte Kraft in der nicht linearen FEM-Berechnung im $(n + 1)$ -ten Lastschritt
$\Delta F_{n+1}^{\text{ext}}$	Inkrement der extern aufgebrauchten Kraft in der nicht linearen FEM-Berechnung im $(n + 1)$ -ten Lastschritt
$\cdot F^{\text{int}}$	Summe aller Knotenkräfte der nicht linearen FEM-Berechnung
V_{n+1}^i	Knotenverschiebung der nicht linearen FEM-Berechnung im $(n + 1)$ -ten Lastschritt der i -ten Iteration
K_{n+1}^i	Tangentialsteifigkeitsmatrix im $(n + 1)$ -ten Lastschritt der i -ten Iteration
R_{n+1}^i	Residuum der Kraft im $(n + 1)$ -ten Lastschritt der i -ten Iteration
C	Elastizitätsmatrix
h	Verfestigungsmatrix
$\varepsilon_{(n+1)}^p$	plastische Dehnungen im $(n + 1)$ -ten Lastschritt

Λ	plastischer Multiplikator
$\Phi(\sigma, h)$	Fließbedingung
$\sigma_{(n+1)}^{tr}$	Versuchsspannung im $(n + 1)$ -ten Lastschritt
$\sigma_{(n+1)}^{corr}$	Korrekturspannung im $(n + 1)$ -ten Lastschritt
$u^{(i)}$	Lokale Verschiebung des i -ten Knotens
\varkappa	Position der Mittelknoten
N_a	Ansatzfunktion des Knotens a
ξ_1, ξ_2	natürliche Koordinaten des Elementes
ξ_i^a	Position des a -ten Knotens in i -Richtung
u_j	Verschiebungsvektor
q	Risserweiterungsvektor in der numerischen Berechnung des J-Integrals
w	Dehnungsenergiegedichte
x_i	entspricht der lokalen Koordinatenachse
α	Wärmeausdehnungskoeffizient
ε_{ij}^0	Initialdehnungstensor
t_j	Belastung der Rissflanken
A	Integrationsbereich
C	Strecke der belasteten Rissflanken

Abkürzungsverzeichnis

ANSYS	Analyse System (FInite-ELEment-Software)
APDL	ANSYS Parametric Design Language
CT	Compact Tension
CTOD	Crack Tip Opening Displacement
E-Modul	Elastizitätsmodul
EKL1	Elementkantenlänge der ersten Elementreihe um die Rissspitze
EKL2	Elementkantenlänge der zweiten Elementreihe um die Rissspitze
EP	Elasto-plastisch
EPBM	Elasto-plastische Bruchmechanik
ESZ	Ebener Spannungszustand
EVZ	Ebener Verzerrungszustand (Ebener Dehnungszustand)
FAD	Failure Assesment Diagram
FEM	Finite-Element-Methode
FKM	Rechnerischer Festigkeitsnachweis von Maschinenbauteilen
KP	Keypoint
KS	Koordinatensystem
LE	Linear elastische
LEBM	Linear elastische Bruchmechanik
LSY	Large scale yielding
SIF	Stress Intensity Factor
SSY	Small scale yielding

1 Einleitung

Risse und Defekte kommen auf natürliche Weise immer in Werkstoffen und Bauteilen vor. Doch ab wann sind diese versagensrelevant und ab wann muss das Bauteil ausgetauscht oder repariert werden? Und welche bruchmechanischen Methoden müssen verwendet werden, um die Schädlichkeit des Risses adäquat zu beurteilen? Mit diesen Fragen beschäftigt sich diese Bachelorarbeit. Bei der Beantwortung dieser Fragen werden die Einschränkungen getroffen, dass es sich um homogene isotrope metallische Werkstoffe handelt, welche einer monotonen statischen Kraft als Last ausgesetzt sind. Die Kraft greift nur im Modus 1 an (reine Zugbelastung senkrecht zum Riss). Temperaturänderungen und dynamische Belastungen werden nicht weiter berücksichtigt. Zunächst werden die theoretischen Grundlagen vorgestellt. Hierbei werden Rissarten, Bruchmodi, Versagenhypothesen und Materialansätze näher erläutert. Darauf folgend wird das Spannung- und Verschiebungsfeld um die Risspitze und der daraus folgende Spannungsintensitätsfaktor als Bruchkriterium für die linear elastische Bruchmechanik vorgestellt. Im Übergang von der linear elastischen zur elasto-plastischen Bruchmechanik werden kleine plastische Zonen und die Risslängenkorrektur nach Irwin erklärt und hergeleitet. Als Bruchkriterien in der elasto-plastischen Bruchmechanik werden anschließend die Risspitzenöffnungsverschiebung, das J-Integral und das FAD-Konzept vorgestellt. Das FAD-Konzept wird zuerst analytisch hergeleitet und anschließend wird gezeigt, wie das FAD-Konzept in der FKM-Richtlinie umgesetzt wird.

Anschließend wird in den Grundlagen die Finite-Element-Methode exemplarisch an einem isoparametrischen Scheibenelement vorgestellt. Mit einer Modifikation dieser Elemente lassen sich Risspitzenelemente erzeugen, welche das Spannungsfeld richtig abbilden. Danach wird kurz die Methodik der nicht linearen FEM erläutert. Als letztes wird in dem Theorieteil auf die numerisch Berechnung des J-Integrals und des Spannungsintensitätsfaktors eingegangen.

Um die Theorie anzuwenden werden im nächsten Teil zwei Modelle in der Workbench von ANSYS und in APDL aufgebaut und berechnet. Das erste Modell stellt eine CT-Probe dar und das zweite eine Scheibe mit mittigem Riss.

An dem CT-Proben Modell wird der Einfluss der plastischen Zone auf das J-Integral näher untersucht und die Größe und Form der plastischen Zone mit der Analytischen Größe und Form verglichen.

Das Ziel der Arbeit ist die Gegenüberstellung der Ergebnisse der unterschiedlichen Berechnungsmethoden und eine Bewertung, welche der Methoden unter Berücksichtigung des Aufwandes am Besten das Problem beschreibt. Alle Aussagen, die getroffen werden, beziehen sich nur auf das konkrete Modell. Vermutlich wären allgemeingültige Aussagen aus den Ergebnissen ableitbar, allerdings sind diese nicht verifiziert.

2 Stand der Technik

2.1 Grundlagen

2.1.1 Rissarten und Werkstoffaufbau

Bruchvorgänge lassen sich in verschiedenen Größenordnungen und Ebenen betrachten. In Abbildung 1 sind diese dargestellt.

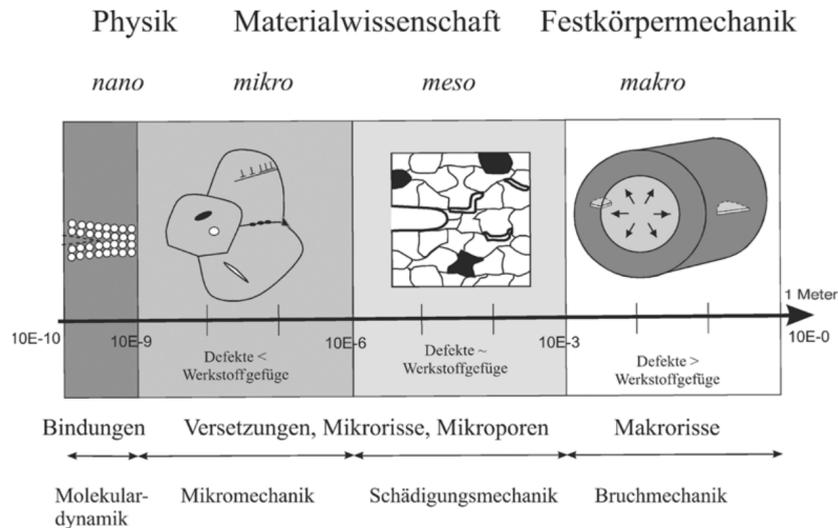


Abbildung 1: Bruchvorgänge auf unterschiedlichen Skalen und Betrachtungsebenen [1, S.6]

Die Atome von Metallen sind in regelmäßigen Gittern angeordnet. Die Gitterstruktur ist von Störstellen durchzogen, welche die Materialeigenschaften verändern. Die Störstellen liegen in der nano- bis mikroskopischen Größenordnung und können als Punktimperfectionen (Leerstellen, Zwischengitteratome, Fremdatome), Linienimperfectionen (Stufen- und Schraubenversetzungen) und Flächenimperfectionen (Korngrenzen) auftreten. Auf mikroskopischer Ebene sind Metalle auf Grund der Körner und Korngrenzen anisotrop. Die Körner entstehen, da der Phasenwechsel von flüssig zu fest an Grenzflächen entsteht. Diese Grenzflächen können Verunreinigungen in der Schmelze sein. Die Voraussetzungen, dass Risse entstehen können, ist also in jedem metallischen Werkstoff vorhanden.

Damit sich das Material trennen kann und ein Riss entsteht, müssen sich die atomaren Bindungen lösen und es muss neue Oberfläche geschaffen werden. Damit eine neue Oberfläche entstehen kann, muss Arbeit geleistet werden und das Gitter der Atome ordnet sich neu an. Die Trennung der atomaren Bindungen und die damit einhergehende Bewegung von Versetzungen wird durch Imperfectionen behindert.

Risse können sich innerhalb von Metallen transkristallin oder interkristallin ausbreiten. Bei der transkristallinen Ausbreitung verläuft der Riss durch die Körner und ändert auf Grund der Orientierung der Gitterstruktur der einzelnen Körner sein Richtung. Bei interkristalliner Rissausbreitung breiten sich die Risse entlang der Korngrenzen aus. Ein Riss entsteht durch die Ansammlung von Versetzungen an einem Punkt, was zu lokalen Spannungsüberhöhungen und Mikroplastifizierungen führt.

Bei Risslängen, welche deutlich größer als das Gefüge sind, spricht man von makroskopischen Rissen. Erst diese Risslängen werden von der Bruchmechanik beschrieben.

Um die Rissausbreitung und Risschädlichkeit bewerten zu können, berücksichtigt die Kontinuumsmechanik keine Risse auf mikroskopischer Ebene und auch nicht den Entstehungsprozess. Dies bedeutet, dass in den zu untersuchenden Strukturen die Risse schon a priori auf makroskopischer Ebene vorliegen.

In der Bruchmechanik wird zwischen folgenden Begrifflichkeiten unterschieden. Ein stationärer Riss wächst nicht und ändert seine Größe bei der vorhandenen Belastung nicht. Bei der Rissinitiierung beginnt das Wachstum des Risses. Und beim stabilen Risswachstum wächst der Riss um ein gewisses Maß und kommt dann zum Erliegen. Beim instabilen Risswachstum kommt es zum unkontrollierten Risswachstum und das Bauteil versagt. Ein Bruch liegt dann vor, wenn ein ganzer Körper in zwei oder mehr getrennte Teile zerbrochen ist.

2.1.2 Bruchmodi

In der Bruchmechanik wird zwischen drei Bruchmodi unterschieden. Der erste Bruchmodus (Öffnungsmodus) beschreibt eine Belastung der Rissflanken senkrecht zur Fläche, die Rissflanken sind auf Zug belastet. Diese Belastung ist meist die schädlichste und soll in dieser Arbeit ausschließlich betrachtet werden. In Modus II, dem ebenen Schermodus werden die Rissflanken in der Ebene der Rissflanken in x-Richtung belastet. In Modus III, dem nichtebenen Schermodus, werden die Rissflanken in der Ebene der Rissflanken in z-Richtung belastet. In Abbildung 2 sind die Verschiedenen Modi dargestellt.

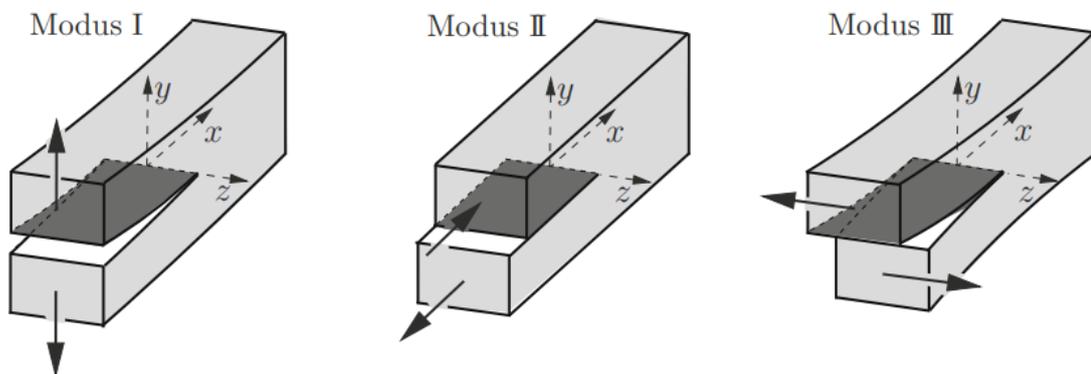


Abbildung 2: Bruchmodi [2, S.66]

2.1.3 Spannungszustände

Auf ein infinitesimales Flächenelement in einem belasteten Bauteil wirkt eine Spannung. Die Größe und Richtung dieser Spannung ist von der Schnittrichtung und der Kraft abhängig. Um die Spannung in einem Punkt des Bauteils hinreichend charakterisieren zu können, muss demnach ein Spannungstensor eingeführt werden. [5, S.43]

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Da das Momentengleichgewicht für jedes infinitesimale Volumenelement erfüllt sein muss, sind die Schubspannungen, die in zwei senkrecht zueinander stehenden Flächen liegen, immer gleich groß und der Spannungstensor ist symmetrisch.

Für jeden Punkt eines Körpers existiert nicht nur ein Spannungs- sondern auch ein Dehnungstensor, welcher ebenfalls symmetrisch ist.

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

In Bauteilen können verschiedene Spannungszustände vorliegen. An unbelasteten Oberflächen liegt ein ebener Spannungszustand (ESZ) vor, da hier die Verschiebung in z-Richtung nicht behindert wird, liegt dort keine Spannung vor. Diese Punkte lassen sich mit den folgenden Tensoren

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

beschreiben.

Im Inneren von Scheiben ist durch das umgebende Material die Verschiebung senkrecht zur Belastungsebene nicht möglich. Hier liegt ein ebener Verzerrungszustand (EVZ) vor.

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix} \quad \varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Die Spannungen und Dehnungen lassen sich für homogene, linear elastische, isotrope Werk-

stoffe ohne Temperaturänderung nach

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2G} \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

ineinander umrechnen. Dabei entspricht G dem Schubmodul und hängt nach Gleichung (2.6) mit dem E-Modul E zusammen.

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.6)$$

Das infinitesimale Volumenelement lässt sich drehen und unter einem anderen Schnitt betrachten. Für jedes Volumenelement existiert eine Drehung, in der die Schubspannungen verschwinden. Die Normalspannungen auf der Hauptdiagonalen entsprechen dann den Eigenwerten des Spannungstensors. Die nun vorliegenden Spannungen nennen sich Hauptspannungen. Wenn in einer Ebene keine Schubspannung vorliegt, lassen sich die Hauptspannungen wie folgt berechnen

$$\sigma_{I,II} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.7)$$

Die letzte Hauptspannung entspricht dann der Normalspannung, welche auf die Fläche wirkt, in der keine Schubspannung vorliegt. Die Hauptspannungen werden in absteigender Reihenfolge sortiert. $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$

2.1.4 Versagenshypothesen

Es gibt verschiedene Ansätze nach denen Materialien Versagen können. Im linear elastischen Bereich versagen Materialien beim Erreichen der Streckgrenze. Da die Spannung keine skalare Größe ist, sondern einem Tensor zweiter Stufe entspricht, muss der Tensor in eine skalare Größe umgerechnet werden, um diesen mit der Streckgrenze aus dem einachsigen Zugversuch in Beziehung zu setzen. Mögliche Ansätze hierfür werden im Folgenden gezeigt.

Normalspannungshypothese:

Nach der Normalspannungshypothese tritt das Versagen ein, sobald die erste Hauptspannung größer als die Streckgrenze ist. Diese Vergleichsspannung wird meist für spröde Materialien verwendet.

$$\sigma_v = \sigma_I \quad (2.8)$$

Schubspannungshypothese (Tresca):

Nach der Schubspannungshypothese ist die größte Schubspannung für das Versagen maßgeblich.

$$\sigma_v = 2\tau_{\max} = (\sigma_I - \sigma_{III}) \quad (2.9)$$

Gestaltänderungsenergiehypothese (von Mises):

Nach der Gestaltänderungsenergiehypothese versagen Bauteile durch die Änderung der Form.

Die Spannungs- und Verzerrungstensoren lassen sich in ihren hydrostatischen und deviatorischen Anteil zerlegen. Der hydrostatische Anteil trägt nicht zum Versagen bei. Nach [6, S.370] lautet die Vergleichsspannung

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2]} \quad (2.10)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (2.11)$$

Der Bereich in dem kein Versagen durch das Erreichen der Fließgrenze auftritt, lässt sich durch ein Prisma entlang der hydrostatischen Geraden e^H darstellen (siehe Abbildung 3). Die Vergleichsspannung nach von Mises hat eine kreisförmige Grundfläche mit dem Radius $R_F = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_F$. Die Vergleichsspannung nach Tresca hat eine sechseckige Grundfläche.

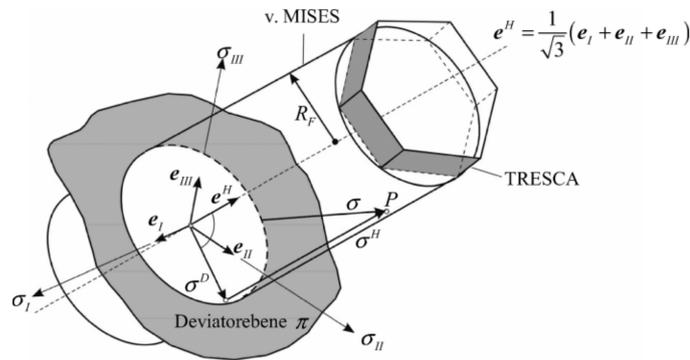


Abbildung 3: Fließbedingung nach Tresca und von Mises [1, S.401]

Auf der hydrostatischen Gerade sind die Hauptspannungen alle gleich groß $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$.

2.1.5 Materialverhalten und Verfestigung

Für einen einachsigen Zug-Druck-Stab, unter der Voraussetzung konstanter Temperatur, lässt sich für isotrope, homogene Metalle ein Spannungs-Dehnungs-Diagramm experimentell ermitteln. Es zeigt sich, dass Materialien anfangs dem Hook'schen Gesetz $\sigma = \varepsilon E$ folgen. Beim Erreichen der Fließgrenze (R_p) fängt das Material an zu plastifizieren und die Steigung im Spannungs-Dehnungs-Diagramm ist nicht mehr konstant. In Abbildung 4(a) ist dies gezeigt. Wie genau die Kurve der Plastifizierung und damit einhergehende Verfestigung aussieht ist materialabhängig.

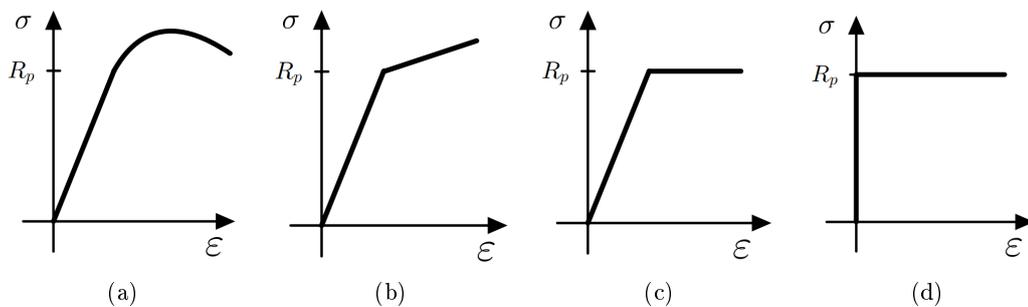


Abbildung 4: Spannungsdehnungs-Diagramme für verschiedene Materialverhalten

(a) reales Verhalten (b) linear elastisch - linear plastisch , (c) linear elastisch - ideal plastisch, (d) starr, ideal plastisch

Um die Verfestigung und Plastifizierung in der Berechnung abzubilden, gibt es verschiedene Ansätze. In Abbildung 4(b) bis (d) sind diese dargestellt. Beim bilinearen Materialverhalten (linear elastisch - linear plastisch) wird angenommen, dass das Material bis zur Streckgrenze dem Hook'schen Gesetz folgt. Sobald das Material zu fließen beginnt, wird angenommen, dass es sich verfestigt und die Steigung im Diagramm somit flacher wird.

Beim linear elastischen, ideal plastischen Materialverhalten steigt die Spannung bis zur Fließgrenze linear an und bleibt dann konstant.

Beim ideal plastischen Werkstoffverhalten wird davon ausgegangen, dass das Material sobald es belastet wird sofort die Streckgrenze erreicht und dann konstant bleibt.

Das Material erfährt eine Verfestigung, wenn es über die Streckgrenze hinaus belastet wird. Da bei der Entlastung der plastische Anteil der Dehnung erhalten bleibt, bleiben Eigenspannungen im Material zurück. Bei einem erneuten Aufbringen der Kraft würde sich die Kurve des Spannungs-Dehnungsdiagramms verschieben, da auch im unbelasteten Zustand Dehnungen vorhanden sind und sich durch die Verfestigung die Streckgrenze ändern kann.

2.2 Lineare Bruchmechanik

Die lineare Bruchmechanik setzt ein linear elastisches Materialverhalten voraus. Dies bedeutet, dass das Material sofort versagt, sobald die Fließgrenze überschritten wird. Dies trifft in erster Näherung auf spröde Materialien, wie Keramiken und Glas zu. Die linear-elastische Bruchmechanik bildet die Grundlage für die elasto-plastische Bruchmechanik.

2.2.1 Spannungs- und Verschiebungsfeld um die Risspitze

Im Folgenden wird eine unendlich große Scheibe betrachtet, welche einen Riss in der Mitte aufweist. Durch die Kolosovschen Formeln lassen sich Spannungen in komplexe Funktionen umrechnen. Die Kolosovschen Formeln lauten nach [2, S.35] in kartesischen Koordinaten

$$\sigma_x + \sigma_y = 2[\Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)}] \quad (2.12)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\Phi''(z) + \Psi'(z)] \quad (2.13)$$

$$2G(u + iv) = \kappa\Phi(z) - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi'(z)} \quad (2.14)$$

und in Polarkoordinaten

$$\sigma_r + \sigma_\varphi = 2[\Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)}] \quad (2.15)$$

$$\sigma_\varphi - \sigma_r + 2i\tau_{r\varphi} = 2[z\Phi''(z) + \Psi'(z)\frac{z}{\bar{z}}] \quad (2.16)$$

$$2G(u_r + iv_\varphi) = [\kappa\Phi(z) - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi'(z)}]e^{-i\varphi} \quad (2.17)$$

mit

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{EVZ} \\ (3 - \nu)(1 + \nu) & \text{ESZ} \end{cases} \quad (2.18)$$

Die Variable z entspricht hier der komplexen Zahl $z = x + iy = re^{-i\varphi}$. Addiert man Gleichung (2.15) und (2.16) so erhält man

$$\sigma_\varphi + i\tau_{r\varphi} = \Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)} + z\Phi''(z) + \Psi'(z)\frac{z}{\bar{z}} \quad (2.19)$$

Die Ansatzfunktionen für die Differentialgleichung lauten

$$\Phi(z) = Az^\lambda, \quad \Psi(z) = Bz^\lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}^+; A, B \in \mathbb{C} \quad (2.20)$$

Die Ableitungen der Φ Ansatzfunktionen ergeben sich dann zu

$$\Phi'(z) = A\lambda z^{\lambda-1} = A\lambda r^{\lambda-1} e^{i\varphi(\lambda-1)} \quad (2.21)$$

$$\Phi''(z) = A\lambda(\lambda-1)z^{\lambda-2} = A\lambda(\lambda-1)r^{\lambda-2} e^{i\varphi(\lambda-2)} \quad (2.22)$$

Nach dem gleichen Schema werden auch die Ansatzfunktionen von Ψ gebildet. Anschließend werden die Ansatzfunktionen und ihre Ableitungen in die Differentialgleichung eingesetzt. Die Differentialgleichung lautet nun

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi + i\tau_{r\varphi} &= A\lambda r^{\lambda-1} e^{i\varphi(\lambda-1)} + \overline{A}\lambda r^{\lambda-1} e^{i\varphi(\lambda-1)} \\ &+ zA\lambda(\lambda-1)r^{\lambda-2} e^{i\varphi(\lambda-2)} + B\lambda r^{\lambda-1} e^{i\varphi(\lambda-1)} \frac{z}{\bar{z}} \end{aligned} \quad (2.23)$$

In diese Gleichung werden noch die Zusammenhänge $z = re^{i\varphi}$ und $\bar{z} = re^{-i\varphi}$ eingesetzt und vereinfacht.

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi + i\tau_{r\varphi} &= A\lambda r^{\lambda-1} e^{i\varphi(\lambda-1)} + \overline{A}\lambda r^{\lambda-1} e^{-i\varphi(\lambda-1)} \\ &+ A\lambda(\lambda-1)r^{\lambda-1} e^{i\varphi(\lambda-1)} + B\lambda r^{\lambda-1} e^{i\varphi(\lambda+1)} \end{aligned} \quad (2.24)$$

An den Rissufern liegen keine Spannungen vor, deshalb muss die Differentialgleichung für $\varphi = \pm\pi$ gleich Null ergeben. Wird diese Bedingung und der Zusammenhang $e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1$ in die Differentialgleichung eingesetzt, ergibt sich das homogene Gleichungssystem

$$A\lambda e^{-i\lambda\pi} + \overline{A}e^{i\lambda\pi} + B\lambda e^{-i\lambda\pi} = 0 \quad (2.25)$$

$$A\lambda e^{i\lambda\pi} + \overline{A}e^{-i\lambda\pi} + B\lambda e^{i\lambda\pi} = 0 \quad (2.26)$$

$$Ae^{-i\lambda\pi} + \overline{A}e^{i\lambda\pi} + \overline{B}e^{i\lambda\pi} = 0 \quad (2.27)$$

$$Ae^{i\lambda\pi} + \overline{A}e^{-i\lambda\pi} + \overline{B}e^{-i\lambda\pi} = 0 \quad (2.28)$$

Durch Lösen des Eigenwertproblems erhält man die Eigenwerte

$$\cos(4\lambda\pi) = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{n}{2} \text{ mit } n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.29)$$

Die Spannungen und Verschiebungen bilden sich dann aus der Summe der Eigenwerte multipliziert mit den Eigenfunktionen

$$\sigma_{ij} = r^{-1/2}\sigma_{ij}^{(1)}(\varphi) + \sigma_{ij}^{(2)}(\varphi) + r^{1/2}\sigma_{ij}^{(3)}(\varphi) + \dots \quad (2.30)$$

$$u_i - u_{i0} = r^{1/2}\hat{u}_i^{(1)}(\varphi) + r^1\hat{u}_i^{(2)}(\varphi) + r^{3/2}\hat{u}_i^{(3)}(\varphi) + \dots \quad (2.31)$$

u_{i0} entspricht hierbei einer Starrkörperverschiebung. Für Lösungen der Spannung dicht an der Risspitze dominiert der erste Term und die Spannung wächst ins Unendliche. Hieraus folgt das Spannungsfeld als Nahfeldlösung für den Modus I und lautet wie folgt

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\varphi/2) [1 - \sin(\varphi/2) \sin(3\varphi/2)] \quad (2.32)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\varphi/2) [1 + \sin(\varphi/2) \sin(3\varphi/2)] \quad (2.33)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\varphi/2) [\sin(\varphi/2) \cos(3\varphi/2)] \quad (2.34)$$

Und das Verschiebungsfeld für Modus I

$$u = \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [\kappa - \cos(\varphi)] \cos(\varphi/2) \quad (2.35)$$

$$v = \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [\kappa - \cos(\varphi)] \sin(\varphi/2) \quad (2.36)$$

Wobei κ aus Gleichung (2.18) zu entnehmen ist.

Für größere Entfernungen von der Risspitze dürfen die Terme, die zu dem Eigenwert $\lambda = 1$ gehören nicht vernachlässigt werden, wenn K_I sehr klein ist. Dieser Fall soll hier nicht näher betrachtet werden.

Schaut man sich das Verschiebungsfeld für die Risspitze an, erkennt man dass sich die Rissflanken ($\varphi = \pm\pi$) parabelförmig öffnen.

2.2.2 Spannungsintensitätsfaktor K_I

Die Größe K_I wird als Spannungsintensitätsfaktor bezeichnet und ist ein Maß für die Belastung der Risspitze. Die Spannungsintensität K_I wird durch das Superpositionsprinzip hergeleitet. Als 1-System wird die Rissfreie Scheibe betrachtet und als 2-System der Riss. Da im 1-System kein Defekt vorliegt, wird K_I nur durch das 2-System bestimmt. Die Spannungen werden in komplexer Form mit den Ansatzfunktionen Φ und Ψ dargestellt. Mit den Kolosovschen Formeln, der Lösung für das Spannungsnahfeld und den Randbedingungen lassen sich die Spannungsintensitäten herleiten. Exemplarisch würde für eine unendliche Scheibe, mit einem zentralen Riss der Länge $2a$ und unter der Belastung σ senkrecht zu dem Riss, eine Spannungsintensität von

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \quad (2.37)$$

entstehen.

Für eine unendliche Scheibe, mit einem einseitigen Anriss der Länge a und einer Belastung von σ senkrecht zum Riss würde der Spannungsintensitätsfaktor von

$$K_I = 1,1215\sigma\sqrt{\pi a} \quad (2.38)$$

errechnet werden. Wenn die Geometrie der Scheibe endlich dimensioniert ist, so berechnet sich die Spannungsintensität für die angerissene Scheibe der Breite B mit der Risslänge a und einer konstanten Zugspannung senkrecht zum Riss nach [7, S.86] zu

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \sqrt{\frac{2b}{\pi a} \tan\left(\frac{\pi a}{2b}\right)} G_I\left(\frac{a}{b}\right) \quad (2.39)$$

wobei $G_I\left(\frac{a}{b}\right)$ der Geometriefaktor ist und sich nach

$$G_I = \frac{0,752 + 2,02\frac{a}{b} + 0,37\left(1 - \sin\left(\frac{\pi a}{2b}\right)\right)^3}{\cos\left(\frac{\pi a}{2b}\right)} \quad (2.40)$$

berechnet. Für die gleiche Scheibe unter Biegespannung lautet

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \sqrt{\frac{2b}{\pi a} \tan\left(\frac{\pi a}{2b}\right)} G_I\left(\frac{a}{b}\right) \quad (2.41)$$

mit dem Geometriefaktor

$$G_I = \frac{0,923 + 0,199\left(1 - \sin\left(\frac{\pi a}{2b}\right)\right)^4}{\cos\left(\frac{\pi a}{2b}\right)} \quad (2.42)$$

Die Gleichungen (2.39) bis (2.42) werden in Kapitel 3.4.1 zur Berechnung verwendet.

2.3 Elasto-plastische Bruchmechanik

Im Gegensatz zur linear-elastischen Bruchmechanik sind in der elasto-plastischen Bruchmechanik Plastifizierungen zulässig. In Abbildung 5 sind die unterschiedlichen Plastifizierungsgrade dargestellt. SSY steht für small scale yielding und entspricht dem Kleinbereichsfließen, bei dem minimale plastische Zonen an der Risspitze zulässig sind. LSY steht für large scale yielding und

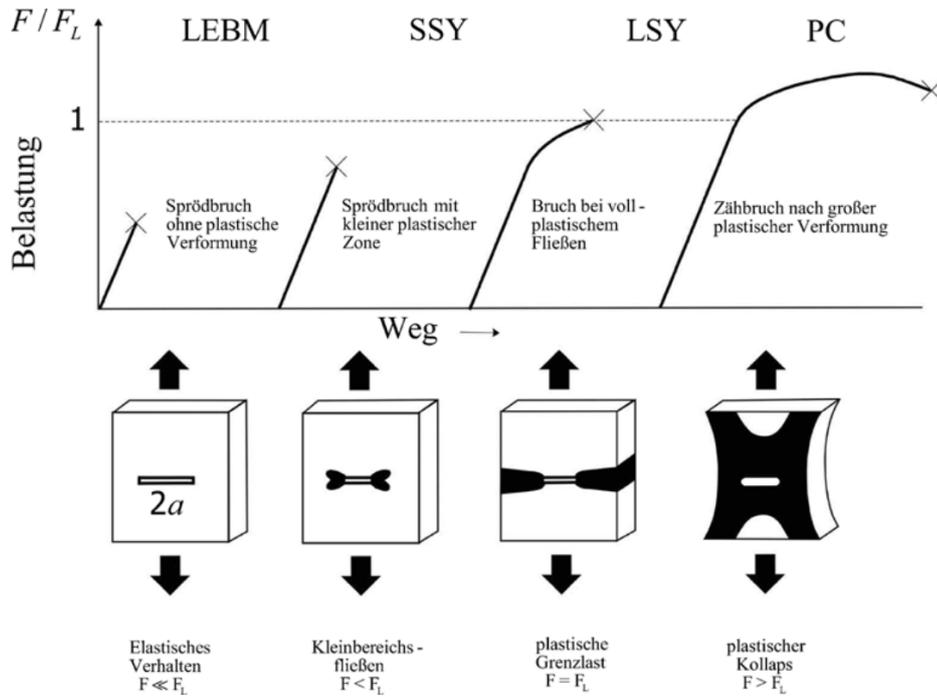


Abbildung 5: plastifizierungsgrade eines Körpers mit Riss [1, S.83]

beschreibt den Zustand großer plastischer Zonen um die Rissspitze. Die Ausweitung der plastischen Zone kann sich auf das gesamte Ligament erstrecken. Wenn dies geschieht entspricht die aufgebrachte Last der plastischen Grenzlast. Wenn das Bauteil noch nicht durch die Rissinitiierung versagt, kann das Bauteil nun bei weiterer Erhöhung der Kraft auch durch den plastischen Kollaps (PC) versagen. Bei rissbehafteten Bauteilen aus duktilen Materialien kann das Versagen also durch zwei verschiedene Arten auftreten: durch die Rissinitiierung und durch den plastischen Kollaps. Im FAD (Failure Assessment Diagram) ist der Zusammenhang zwischen diesen beiden Versagensarten abgebildet.

2.3.1 Kleine plastische Zonen

Das Spannungsfeld um die Rissspitze lässt sich in dem Bereich $r_K \approx 0,02 - 0,10 \cdot a$ durch die Nahfeldlösung beschreiben, wobei a der Risslänge entspricht. Man spricht vom Kleinbereichsfließen, wenn die plastische Zone r_p an der Rissspitze sehr viel kleiner ist als r_K . Das Spannungsfeld nach Gleichung (2.32) wird mit der Hauptachsentransformation nach Gleichung (2.7) in die Hauptachsen überführt. Für den ESZ folgen die Hauptspannungen zu

$$\sigma_I = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \left(1 + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) \quad (2.43)$$

$$\sigma_{II} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \left(1 - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) \quad (2.44)$$

$$\sigma_{III} = 0 \quad (2.45)$$

Die Spannungen werden in die Fließbedingung nach von Mises (Gleichung (2.10)) eingesetzt. Die Gleichung lässt sich dann nach r auflösen. Die Größe der plastischen Zone für den ESZ lässt sich

somit zu

$$r_P(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_F} \right)^2 \cdot \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot (3 \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) + 1) \quad (2.46)$$

abschätzen. Für den EVZ ergeben sich die Hauptspannungen zu

$$\sigma_I = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot (1 + \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right)) \quad (2.47)$$

$$\sigma_{II} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot (1 - \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right)) \quad (2.48)$$

$$\sigma_{III} = \nu(\sigma_I + \sigma_{II}) = 2\nu \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \quad (2.49)$$

Diese werden ebenfalls wieder in Gleichung (2.10) eingesetzt und nach r umgeformt.

$$r_P(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_F} \right)^2 \cdot \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot (3 \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) + (1 - 2\nu)^2) \quad (2.50)$$

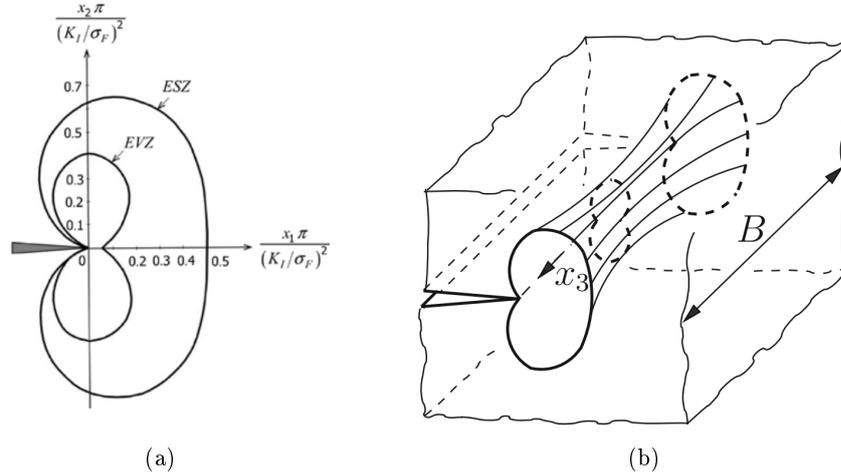


Abbildung 6: Plastische Zonen des EVZ und ESZ [1, S.85] [2, S.120]

In Abbildung 6a sind die Unterschiede in der Ausdehnung der plastischen Zone graphisch dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass der EVZ im inneren der Scheibe zu einer kleineren plastischen Zone um die Risspitze führt als der ESZ an der Oberfläche. Für die Scheibe mit der Dicke B (Abbildung 6b) führt dies zum Hundeknochenmodell (siehe Abbildung 6b).

2.3.2 Irwinsche Risslängenkorrektur

Bei einem vollständig elastischen Material würde die Spannung an der Risspitze bis ins Unendliche anwachsen, da dort eine Singularität vorliegt. Da das Material in der Praxis keine unendlich hohen Spannungen aufnehmen kann, erhöht sich die Spannung nur bis zum Erreichen der Fließgrenze σ_F und bleibt danach konstant.

Für die Ligamentspannung, also die Spannung unter einem Winkel von $\varphi = 0$, erhält man

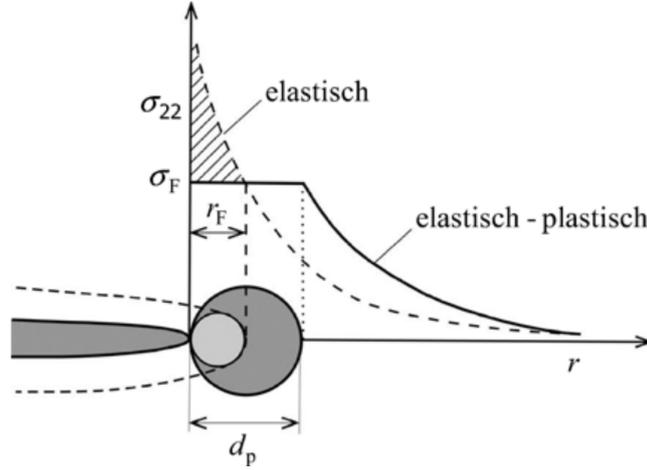


Abbildung 7: Plastische Risslängenkorrektur nach Irwin [1, S.87]

durch Einsetzen in die Gleichung 2.32 die Spannungen

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (2.51)$$

$$\tau_{xy} = 0 \quad (2.52)$$

$$\sigma_z = \begin{cases} 0 & \text{ESZ} \\ 2\nu\sigma_x & \text{EVZ} \end{cases} \quad (2.53)$$

Für die Größe der plastischen Zone kann der Winkel $\varphi = 0$ in die Gleichungen (2.46) und (2.50) und eingesetzt werden. Es folgt der Radius der plastischen Zone.

$$r_F = r_P(\varphi = 0) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_F} \right)^2 \begin{cases} 1 & \text{ESZ} \\ (1 - 2\nu)^2 & \text{EVZ} \end{cases} \quad (2.54)$$

In Abbildung 7 ist zu erkennen, dass beim einfachen Abschneiden des Spannungsverlaufes bei der Fließgrenze die Flächen unter der Kurve nicht mehr gleich groß sind. Dies führt zu einer verfälschten Kraft in y-Richtung, da die integrierten Spannungen über die Fläche eine Kraft ergeben. Um das Kräftegleichgewicht wieder zu erfüllen, wird die plastische Zone erweitert, so dass die Fläche unter der elastischen Kurve der Fläche unter der elastisch-plastischen Kurve entspricht. Es folgt der Zusammenhang

$$\int_0^{r_F} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} dr - \sigma_F r_F = \sigma_F r_F \stackrel{!}{=} \sigma_F (d_P - r_F) \quad (2.55)$$

Nach Irwin [1, S.88] wird das Gleichgewicht wieder erreicht, wenn $d_P = 2r_F$ entspricht. Die plastische Zone hat nach der Irwinschen Risslängen eine Größe von

$$d_P = 2r_P = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_F} \right)^2 \begin{cases} 1 & \text{ESZ} \\ (1 - 2\nu)^2 & \text{EVZ} \end{cases} \quad (2.56)$$

Die Nahfeldlösung der Spannung wird um r_p in x- Richtung verschoben. Damit liegt die elastische und die elastisch-plastische Kurve wieder übereinander und das Nahfeld der elastischen Lösung

beschreibt das Spannungsfeld bis zur Grenze des plastifizierten Bereiches. In der Anwendung folgt hieraus, dass die Risslänge a um die Größe der plastischen Zone erweitert werden muss.

$$a_{\text{eff}} = a + r_p \quad (2.57)$$

Der Vollständigkeit halber sei an dieser Stelle das Dugdale-Modell erwähnt, bei welchem angenommen wird, dass sich die plastische Zone entlang einer Linie bei $\varphi = 0$ erstreckt (siehe Kapitel 2.4.3). Die Risslängenkorrekturen der beiden Modelle unterschieden sich nur im Vorfaktor. Die Risslängenkorrektur nach Irwin enthält den Vorfaktor $\frac{1}{\pi}$ und die Risslängenkorrektur nach dem Dugdale-Modell enthält den Vorfaktor $\frac{\pi}{8}$ [1, S.90].

2.4 Bruchkriterien in der EPBM

Für kleine plastische Zonen lassen sich mit kleinen Korrekturen näherungsweise die Bruchkriterien für die LEBM verwenden. Bei größeren plastischen Zonen um die Risspitze müssen andere Methoden verwendet werden. Wie zum Beispiel die Rissöffnungsverschiebung CTOD (Crack Tip Opening Displacement) oder das J-Integral, welche im Folgenden beschrieben werden.

2.4.1 Risspitzenöffnungsverschiebung CTOD

Bei duktilen Materialien weitet sich der Riss, bevor der Riss fortschreitet. Das Maß der Aufweitung kann als Bruchkriterium für die CTOD-Methode verwendet werden. Der Vorteil dieser Methode liegt in der Anschaulichkeit und der guten Verifizierbarkeit im Labor.

Die Grundlage des Kriteriums basiert auf der Nahfeldlösung für die Spannungen um die Risspitze (siehe Gleichung (2.30)). Mit der Lösung für Verschiebungsfeld an der Risspitze nach Gleichung (2.35) wird die Verschiebung an der Stelle $x = -r_P$ ausgerechnet. Mit der Gleichung (2.6) ergibt sich die Verschiebung der Rissflanken zu

$$v(r = r_P, \varphi = \pi) = \frac{4K_I}{E} \sqrt{\frac{r_P}{2\pi}} \quad (2.58)$$

Da sich die Rissflanken zu beiden Seiten hin öffnen entspricht die Öffnung des Risses

$$\delta_t = 2\nu = \frac{8K_I}{E} \sqrt{\frac{r_P}{2\pi}} \quad (2.59)$$

r_p lässt sich durch die Fließspannung darstellen nach Gleichung (2.56), für den ESZ folgt die Öffnung zu

$$\delta_t = \frac{4}{\pi} \frac{K_I^2}{E\sigma_F} \begin{cases} 1 & \text{für ESZ} \\ (1 - 2\nu) & \text{für EVZ} \end{cases} \quad (2.60)$$

Aus Versuchen geht hervor, dass unter Berücksichtigung von Werkstoffverfestigung und Dehnungsbehinderungen δ_t besser mit folgender empirischer Gleichung beschrieben wird.

$$\delta_t = \frac{K_I^2}{E\sigma_F} \begin{cases} 1 & \text{für ESZ} \\ \frac{1-\nu^2}{2} & \text{für EVZ} \end{cases} \quad (2.61)$$

Das Bauteil versagt, sobald δ_t den kritischen Wert δ_{tc} erreicht hat. δ_{tc} ist ein Materialkennwert.

2.4.2 J-Integral

In der elasto plastischen Bruchmechanik kann das J-Integral als Bruchkriterium verwendet werden. Das J-Integral wird wie folgt definiert.

$$J_k = \int_{\partial V} b_{kj} n_j dA = \int_{\partial V} (U \delta_{ij} - \sigma_{ij} u_{i,k}) n_j dA \quad (2.62)$$

∂V ist die geschlossene Oberfläche, über die integriert wird. n_j ist der Normalenvektor der Oberfläche. $U = U(\varepsilon_{ij})$ ist die Formänderungsenergiedichte. b_{kj} wird als Energie-Impuls-Tensor oder Eshelny-Tensor bezeichnet. Mit dem Gaußschen Integralsatz

$$\int_{\partial V} a_{ij} n_j dA = \int_V a_{ij,j} dV \quad (2.63)$$

lässt sich die Gleichung (2.62) zu

$$J_k = \int_V b_{ik,j} dV \quad (2.64)$$

umformen. Mit den Zusammenhängen,

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (2.65)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.66)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (2.67)$$

lässt sich der Integrand zu

$$b_{ik,j} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{mn}} \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial x_j} \delta_{jk} - \sigma_{ij,j} u_{i,k} - \sigma_{ij} u_{i,k,j} = \sigma_{mn} u_{m,nk} - \sigma_{ij} u_{i,kj} = 0 \quad (2.68)$$

umformen.

Gleichung (2.65) beschreibt das Kräftegleichgewicht aus äußeren Lasten, welche durch die Einwirkung auf die Oberfläche eine Spannung erzeugen und die Volumenkräfte im Inneren des Körpers. Die Volumenkräfte werden hier vernachlässigt und zu Null gesetzt $f_i = 0$. Die Gleichung (2.66) beschreibt den linearisierten Verzerrungstensor. Gleichung (2.67) enthält den Zusammenhang zwischen der geleisteten Arbeit und Verzerrung des Materials. Bei ebenen Problemen durchlaufen die Indizes nur die Zahlen 1 und 2, wodurch die Integration der Oberfläche zu einer Integration über eine Linie, bzw. über eine Kontur wird. Das J-Integral für den ebenen Fall lautet somit

$$J_k = \int_{\Gamma} (U \delta_{ij} - \sigma_{ij} u_{i,k}) n_j ds \quad (2.69)$$

Für ein homogenes, elastisches Material ohne Singularitäten ergibt das J-Integral Null. Sobald das Material allerdings Diskontinuitäten, wie zum Beispiel Risse, aufweist, ist das J-Integral von Null verschieden. Im allgemeinen ist das J-Integral wegababhängig. Diese Wegabhängigkeit verschwindet allerdings unter bestimmten Voraussetzungen wie zum Beispiel für linear elastische, homogene und isotrope Materialansätze mit kleinen Verzerrungen und elasto plastische Materialien unter monotoner (konstanter bzw. konstant zunehmender) Belastung.

Das J-Integral ist wegababhängig, wenn zyklische Belastungen vorliegen.

Wenn doch große Verzerrungen, lokale Entlastungen und physikalische Bruchmechanismen vorliegen, sollte die Kontur des Integrals so gewählt werden, dass diese Störungen von der Kontur eingeschlossen sind und die Kontur weit von diesen entfernt ist. Die Kontur darf allerdings auch nicht zu groß gewählt werden, da sonst andere Einflüsse, wie zum Beispiel Körpergrenzen und Randbedingungen das J-Integral dominieren. Das J-Integral stellt nur ein geeignetes Maß zur Bewertung der Rissinitiierung dar und ist kein Parameter zur Beurteilung des Risswachstums. Für elastische Materialien entspricht das J-Integral der Energiefreisetzungsrate. Bei Materialansätzen, die eine Verfestigung aufweisen, geht Energie durch Dissipation bei der Verfestigung verloren. Die Energie für den Rissantrieb ist deshalb bei plastischen Materialien kleiner.

Das J-Integral berechnet sich unter den oben genannten Voraussetzungen (nur monotone Belastungen, isotropes, homogenes Material) für das elasto plastische Materialverhalten genau wie oben beschrieben, nur dass das Formänderungspotential in elastische und plastische Dehnungen unterteilt wird. $U \rightarrow \check{U}^{ep}$. \check{U}^{ep} wird als stress work density bezeichnet.

$$J(\Gamma) = \int_{\Gamma} [\check{U}^{ep} \delta_{1j} - \sigma_{1j} u_{i,1} n_j] ds \quad (2.70)$$

\check{U}^{ep} berechnet sich nach

$$\check{U}^{ep}(\varepsilon_{ij}, x_k) = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{kl}(\bar{\varepsilon}_{mn}) \underbrace{d\bar{\varepsilon}_{kl}}_{d\varepsilon_{kl}^e + d\varepsilon_{kl}^p} = U^e(\varepsilon_{ij}^e) + \check{U}^p(x_k) \quad (2.71)$$

Durch die Verfestigung geht der Potentialcharakter der Formänderungsenergie verloren. Der plastische Anteil ist nicht mehr von der Verzerrung abhängig, sondern von der gesamten Belastungsgeschichte.

Das J-Integral lässt sich modifizieren, so dass es auch für nicht monotone Belastungen wegunabhängig ist. Dieser Ansatz wird zur Berechnung in der FEM verwendet und wird in Kapitel 2.5.5 näher beschrieben.

Um den kritischen Wert für die Rissinitiierung J_c gibt es verschiedene Methoden. Da sich der Punkt der Rissinitiierung eigentlich nicht messbar ist, werden minimale Risserweiterungen zugelassen. Da sich das Potential einer Probe ebenfalls nur schwer bestimmen lässt, hat sich in der Praxis folgende empirische Methode durchgesetzt [1, S.105] .

$$J = J_e + J_p = \frac{K_I^2(F, a)}{E'} + \frac{\eta(\frac{a}{w}, n)}{B(w-a)} \int_0^{q_p} F(\bar{q}_p, a) d\bar{q}_p \quad (2.72)$$

Die Größen B und w beziehen sich auf die Abmaße des Probenkörpers. η ist eine Korrekturgröße, welche empirisch bestimmt wird. E' ist für den ESZ das E-Modul E und für den EVZ gilt $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$. Die Variable q_p bzw. \bar{q}_p bezieht sich auf die Verschiebung der Risspitze im Versuch.

Das gesamte Integral beschreibt die Fläche unter der Kurve, wenn die Last über die Verschiebung der Rissspitze aufgetragen wird und stellt dadurch die verrichtete Arbeit dar.

Die oben aufgeführte Formel ist nur gültig, wenn $B, (w - a) \geq 25 \frac{J_{Ic}}{\sigma_F}$ ist.

2.4.3 FAD-Konzept

Elasto plastische Materialien können durch die Rissinitiierung und den plastischen Kollaps versagen. Um ein Bauteil auf diese beiden Kriterien prüfen zu können, wurde das FAD-Diagramm (Failure Assesment Diagramm) entwickelt. Hierbei wird die Annahme getroffen, dass der Riss im Bauteil im Kleinbereichsfließen liegt. Das Ligament des Bauteils allerdings dennoch durchplastifizieren kann.

Die Basis des Ansatzes bildet das Dugdale-Modell und das CTOD-Versagenskriterium. Ein Bauteil versagt, sobald die Rissöffnung den kritischen Wert δ_{tc} erreicht hat. Unter welcher Belastung dies geschieht, wird durch das Dugdale-Modell berechnet.

Nach [1, S.88] plastifiziert das Material um die Rissspitze nur auf der Linie des Ligamentes. Es wird eine unendliche Scheibe mit einem mittigen Riss der Länge $2a$ unter konstanter Zugbelastung betrachtet. Mittels des Superpositionsprinzips wird das Problem in die Scheibe mit Riss und äußerer Belastung und in die Stützwirkung der Plastifizierung an der Rissspitze unterteilt. Am Ende der Plastifizierung bei $x_1 = a + d$ muss der Spannungsintensitätsfaktor aus der Überlagerung zu Null werden. Hieraus folgt die Größe der plastischen Zone zu

$$d = a \left[\left(\cos \frac{\pi \sigma}{2 \sigma_F} \right)^{-1} - 1 \right] \quad (2.73)$$

Die Verschiebung der Rissöffnung ergibt sich dann nach [1, S.92] zu

$$\delta_{tc} \stackrel{!}{=} 2u_2(a) = a \frac{8\sigma_F}{\pi E} \ln \left(\cos \frac{\pi \sigma}{2 \sigma_F} \right)^{-1} \quad (2.74)$$

Für das Kleinbereichsfließen wird Gleichung (2.73) durch eine Reihenentwicklung angenähert. Die Öffnungsverschiebung an der Rissspitze wird dann durch

$$\delta_{tc} \stackrel{!}{=} 2u_2(a) = \frac{K_I^2}{E \sigma_F} = \frac{(\sigma \sqrt{\pi a})^2}{E \sigma_F} = a \frac{\pi (\sigma_c^{LEBM})^2}{E \sigma_F} \quad (2.75)$$

beschrieben. Durch das Gleichsetzen von Gleichung (2.74) und (2.75) lässt sich eine Grenzkurve erstellen, die sowohl die Belastung des Risses als auch die Belastung des Ligamentes abbildet.

$$\left(\frac{\sigma_c^{LEBM}}{\sigma_F} \right)^2 = \frac{8}{\pi^2} \ln \left(\cos \frac{\pi \sigma}{2 \sigma_F} \right)^{-1} \quad (2.76)$$

Die Achsen des Diagramms werden nach

$$\frac{\sigma}{\sigma_c^{LEBM}} = \frac{K_I}{K_{Ic}} = K_r \quad ; \quad \frac{\sigma}{\sigma_F} = \frac{F}{F_L} = S_r \quad (2.77)$$

normiert. Die Normierung wird in die Gleichung (2.76) eingesetzt und umgeformt. Es folgt die Gleichung für die Beschreibung der Kurve in explizierter Form.

$$K_r = S_r \left[\frac{8}{\pi^2} \ln \left(\cos \frac{\pi}{2} S_r \right)^{-1} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.78)$$

In Abbildung 8 ist diese graphisch dargestellt. Alle Arbeitspunkte, welche innerhalb der Grenzkurve liegen, werden als sicher betrachtet. Sobald die Last die vollplastische Traglast erreicht hat, tritt der plastische Kollaps ein. Im Diagramm entspricht dies dem Steilabfall des Graphen.

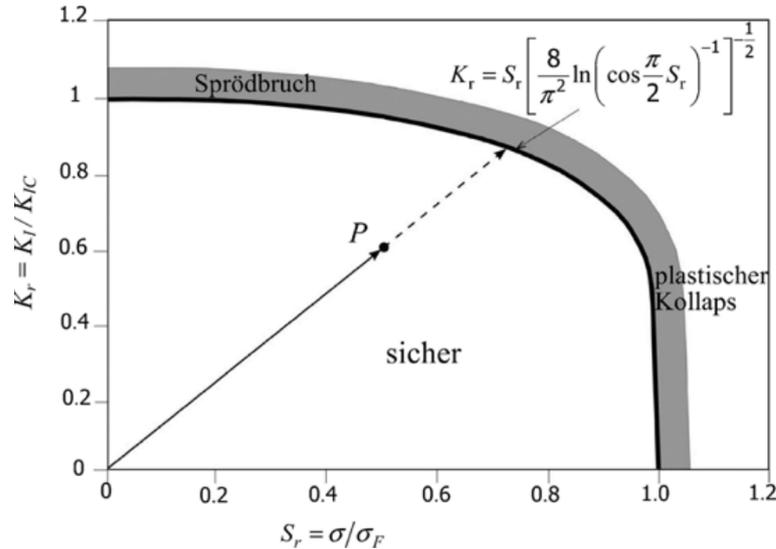


Abbildung 8: FAD-Diagramm [1, S.93]

Das FAD-Diagramm nach der FKM-Richtlinie [7, S.66] betrachtet die Interaktion zwischen der Plastifizierung des Ligamentes und der Rissinitiierung differenzierter und lässt sich auf komplexere Belastungen und Geometrien anwenden. Das FAD-Diagramm kann in zwei Genauigkeitsstufen erstellt werden. Die Basis-Ebene betrachtet nur die Festigkeit (R_e, R_m) und die Erweiterungsebene (die genauere) betrachtet zusätzlich noch die σ - ε -Kurve. Die Genauigkeit der Basisebene soll hier als ausreichend angenommen werden und wird im folgenden beschrieben.

In Abbildung 9 sind die Grenzkurven der FKM-Richtlinie (für eine nicht ausgeprägte Streckgrenze) und der Analytik abgebildet. Um die Kurven vergleichen zu können, wurde die Kurve der FKM-Richtlinie auf 1 normiert. In der Analytik tritt der plastische Kollaps bei $\frac{F}{F_L} = 1$ auf, wohingegen bei der FKM-Richtlinie der plastische Kollaps bei $\frac{F}{F_L} > 1$ auftritt.

Die Berechnung der Grenzkurve der FKM-Richtlinie ist in zwei Bereiche unterteilt. Es gilt

$$f(L_r) = \left(1 + \frac{L_r^2}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} [0, 3 + 0, 7e^{(-\mu L_r^6)}] \quad \text{für } 0 \leq L_r \leq 1 \quad (2.79)$$

und

$$f(L_r) = f(1) L_r^{\frac{N-1}{2N}} \quad \text{für } 1 \leq L_r \leq L_r^{max} \quad (2.80)$$

wobei μ , N und L_r^{max} wie folgt bestimmt werden

$$\mu = \min \left[0,001 \frac{E}{R_{p0,2}}, 0,6 \right] \quad (2.81)$$

$$N = 0,3 \left(1 - \frac{R_{p0,2}}{R_m} \right) \quad (2.82)$$

$$L_r^{max} = \frac{1}{2} \frac{R_{p0,2} + R_m}{R_{p0,2}} \quad (2.83)$$

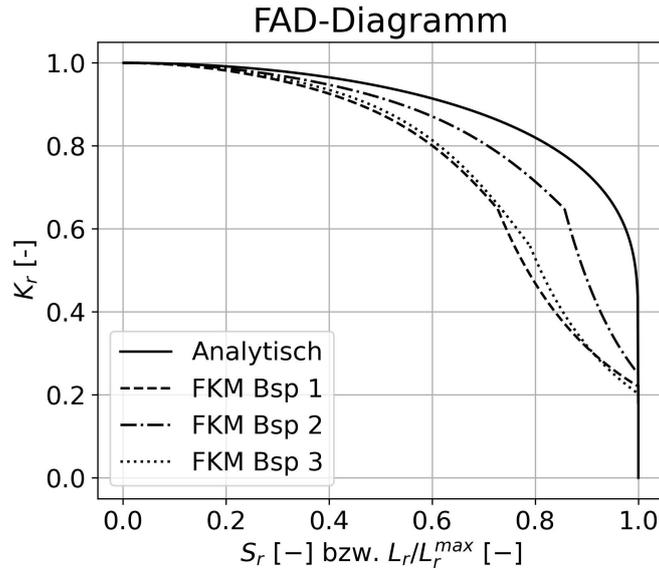


Abbildung 9: FAD-Diagramm Vergleich Analytik und FKM

Für Abbildung 9 wurde für FKM Bsp 1 die Werte $E = 70000$, $R_p = 200$ und $R_m = 350$ gewählt. Für FKM Bsp 2 wurden die Werte $E = 210000$, $R_p = 600$ und $R_m = 800$ und für FKM Bsp 3 wurden die Werte $E = 210000$, $R_p = 235$ und $R_m = 360$ gewählt. Je nach Wahl der Parameter liegen die Kurve der FKM-Lösung über oder unter der Kurve der analytischen Lösung. Auch für die FKM-Kurve gilt, dass alle Arbeitspunkte, die innerhalb der Grenzkurve liegen, als sicher bewertet werden.

2.5 Finite-Element-Methode

Mit Hilfe der Finiten-Element-Methode (kurz FEM) ist es möglich die Spannungen in komplexen Geometrien zu berechnen.

Hierfür wird die Geometrie des Bauteils in Elemente unterteilt und damit diskretisiert. Im Anschluss werden die Verschiebungen für die Knoten (bestimmte Punkte innerhalb eines Elementes, meist Eckpunkte oder Seitenmittenpunkte des Elementes) bestimmt. Hierfür werden Ansatzfunktionen gewählt, welche den Zusammenhang zwischen der Verschiebungen der einzelnen Knoten und den Randbedingungen beschreiben. Es entsteht ein Gleichungssystem für jedes Element, welches durch die Koeffizientenmatrix (Steifigkeitsmatrix) \underline{K} abgebildet wird. Die einzelnen Matrizen für jedes Element werden so überlagert, dass sich die Verschiebungen für die einzelnen Knoten überlagern. Der Knoten i ist mit allen Elementen verbunden, welche an den Knoten angrenzen. Die Verschiebung des Knotens kommt in allen Gleichungssystemen der angrenzenden Elemente vor. Um die Verschiebung des Knotens in eine Richtung zu bestimmen, werden

die Gleichungssysteme der Elemente so überlagert, dass sich alle Verschiebungen eines Knotens aufaddieren. Es entsteht ein großes Gleichungssystem $\underline{K}\vec{u} = \vec{P}$ mit dem Abmaß $n \times n$, wenn das Bauteil n Knoten erhält. Die entstandene Matrix ist für isoparametrische Elemente singulär und kann dadurch gelöst werden, dass für die bekannten Verschiebungen (für die Lagerbedingungen $u = 0$) die Zeilen und Spalten gestrichen werden. Die Matrix kann dann invertiert werden und mit der rechten Seite von links ausmultipliziert werden. Wie die \underline{K} -Matrix bestimmt wird, ist exemplarisch für ein Elementtyp im folgenden Kapitel 2.5.1 beschrieben. Die Steifigkeitsmatrizen sind vom Elementtyp abhängig. Es können verschiedenen Formen (Stab, Dreieck, Viereck usw.), mit verschiedenen Freiheitsgraden an den Knoten gewählt werden und verschiedenen Ordnungen der Ansatzfunktion, wobei ein höherer Grad zu einer genaueren Lösung führt.

Wenn die Verschiebungen aller Knotenpunkte bekannt sind, lassen sich mit dem Hook'schen Gesetz die Spannungen für jeden Knoten bestimmen.

2.5.1 Scheibenelemente

In einer Scheibe liegt der ESZ vor. Um die Spannungen und Dehnungen zu berechnen, wird zunächst das Potential der Scheibe aufgestellt.

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \vec{\varepsilon}^T \vec{\sigma} dV - \int_V \vec{u}^T \vec{b} dV - \int_{\Gamma} \vec{u}^T \vec{q} d\gamma - \vec{u}^T \vec{F} \quad (2.84)$$

Der erste Term entspricht dem elastischen Potential der Formänderungsarbeit, der zweite beschreibt das Potential der Volumenlasten, der dritte das Potential der Streckenlasten und der letzte Term das Potential der Einzellasten. Γ entspricht den Kanten, an denen die Streckenlast angreift. Die Dehnungen $\vec{\varepsilon}$ lassen sich durch die Verschiebungen ausdrücken. Für den ebenen Spannungszustand lautet die Gleichung

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}}_{\underline{L}} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (2.85)$$

\underline{L} wird als Differentialoperator-Matrix bezeichnet. Die Spannungen lassen sich durch die Dehnungen mithilfe der Stoffmatrix \underline{D} darstellen.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}}_{\underline{D}} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

Dieser Zusammenhang gilt für den ESZ nur, wenn das Material isotrop ist.

Da das Verschiebungsfeld nicht bekannt ist, wird die Gleichung diskretisiert und das Bauteil wird in die finiten Elemente unterteilt. Die Ansatzfunktionen müssen die Bedingung erfüllen,

dass deren Funktionswert an einem Knoten 1 und an den anderen Knoten 0 annimmt.

Die Ansatzfunktionen werden in Dreieckskoordinaten (Baryzentrische Koordinaten) dargestellt. Dreieckskoordinaten beschreiben einen Punkt in der Ebene durch die Gewichtung der Eckpunkte des Dreiecks. Die Gewichtung der Punkte lässt sich über das Verhältnis der Teilflächen A_i zur Gesamtfläche ausdrücken. In Abbildung 10 sind die Teilflächen dargestellt.

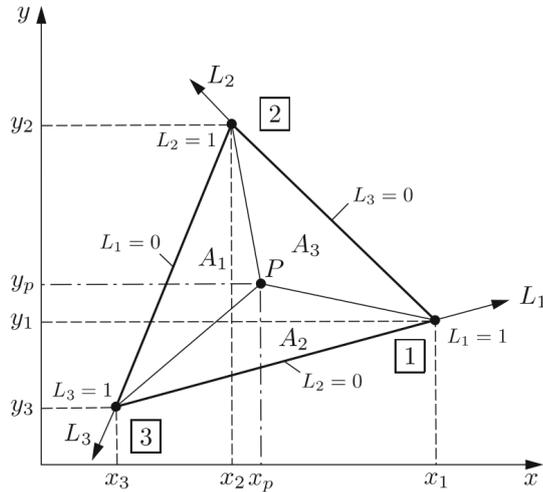


Abbildung 10: Darstellung der Dreieckskoordinaten im kartesischen Koordinatensystem [3, S. 40]

Die Gewichtung der Koordinaten bildet sich also durch

$$L_1 = \frac{A_1}{A_{ges}}; \quad L_2 = \frac{A_2}{A_{ges}}; \quad L_3 = \frac{A_3}{A_{ges}} \quad (2.87)$$

Die gesamt Summe der Gewichtungen muss 1 ergeben, wobei auch negative Gewichtungsfaktoren möglich sind, wenn der Punkt außerhalb des Dreiecks liegt. Ein Punkt in der Ebene ist durch zwei Gewichtungsfaktoren schon vollständig bestimmt, da sich der dritte dann aus der Bedingung, dass die Summe aller Gewichtungsfaktoren 1 ergeben muss, bestimmen lässt. Die Dreieckskoordinaten lassen sich nach folgendem Schema in kartesische Koordinaten umrechnen.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2A_{ges}} \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 & y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad (2.88)$$

x_i und y_i entsprechen hierbei dem Eckpunkt des Dreiecks (dem Knoten P_i).

Die linearen Ansatzfunktionen der Scheibenelemente in Dreieckskoordinaten lauten

$$\phi(x, y) = a_0 + a_1L_1 + a_2L_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & L_1 & L_2 \end{pmatrix}}_{\vec{x}^T} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \vec{x}^T \vec{a} = \vec{a}^T \vec{x} \quad (2.89)$$

In Gleichung (2.89) müssen die Koeffizienten a_i ermittelt werden. Dies geschieht über die Bedingung der Ansatzfunktionen. Diese Bedingung lautet: der Funktionswert an einem Knoten ist gleich 1 und der an den anderen beiden Knoten ist gleich Null.

$$\begin{aligned} \phi(L_1 = 1, L_2 = 0) &= a_0 + a_1 = \phi_1 \\ \phi(L_1 = 0, L_2 = 1) &= a_0 + a_2 = \phi_2 \\ \phi(L_0 = 0, L_2 = 0) &= a_0 = \phi_3 \end{aligned} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (2.90)$$

Es entsteht ein lineares Gleichungssystem, welches sich nach \vec{a} auflösen lässt. \vec{a} wird wieder in Gleichung (2.89) eingesetzt.

$$\phi(x, y) = \vec{x}^T \vec{a} = \underbrace{\vec{x}^T}_N \underline{A}^{-1} \vec{\phi} \quad (2.91)$$

Die Formfunktionen (Ansatzfunktionen) \underline{N}^T ergeben sich somit zu

$$\underline{N}^T = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 & 1 - L_1 - L_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{pmatrix} \quad (2.92)$$

Die Formfunktionen beschreiben die Verschiebungen innerhalb eines Elementes. In Abbildung 11 sind diese Funktionen abgebildet. Die Verschiebungen im Element \hat{u} lassen sich nun durch die

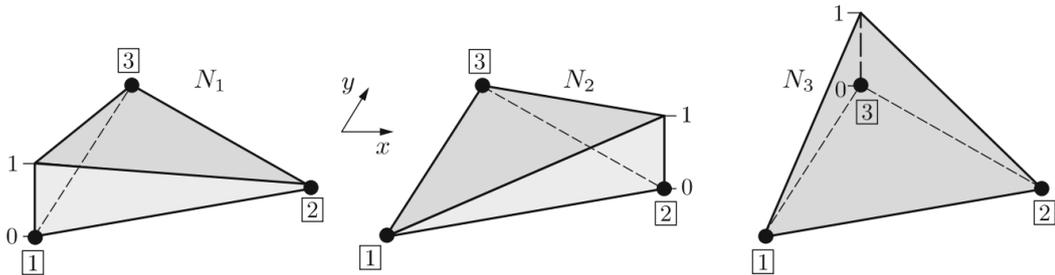


Abbildung 11: Formfunktionen im Dreieckselemente [3, S.215]

Addition der Verschiebungen der Knoten \vec{u} mit der jeweiligen Formfunktion errechnen.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}_{\vec{\hat{u}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{pmatrix}}_N \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{pmatrix}^T}_{\vec{u}^T} \quad (2.93)$$

Die Verschiebungen innerhalb eines Elementes lassen sich nun durch die Verschiebungen der Knoten, also der Eckpunkte des Elementes, ausdrücken. Dieser Zusammenhang kann in Gleichung (2.84) eingesetzt werden.

Die Dehnungen lassen sich nach Gleichung (2.85) als $\vec{\varepsilon} = \underline{L} \vec{\hat{u}}$ ausdrücken. Für $\vec{\hat{u}}$ lässt sich nach Gleichung (2.93) $\underline{N} \vec{u}^T$ einsetzen. Die Differentialoperator-Matrix \underline{L} beschreibt den Zu-

sammenhang allerdings in kartesischen Koordinaten. Dies muss noch in die Dreieckskoordinaten überführt werden. Nach [3, S.42] lautet die Differentialoperator-Matrix in Dreieckskoordinaten

$$\underline{L}_\Delta = \frac{1}{2A_{ges}} \begin{pmatrix} (y_2 - y_3) \frac{\partial}{\partial L_1} + (y_3 - y_1) \frac{\partial}{\partial L_2} & 0 \\ 0 & (x_3 - x_2) \frac{\partial}{\partial L_1} + (x_1 - x_3) \frac{\partial}{\partial L_2} \\ (x_3 - x_2) \frac{\partial}{\partial L_1} + (x_1 - x_3) \frac{\partial}{\partial L_2} & (y_2 - y_3) \frac{\partial}{\partial L_1} + (y_3 - y_1) \frac{\partial}{\partial L_2} \end{pmatrix} \quad (2.94)$$

Mit dem Einsetzen der Formfunktion und der Differentialoperator-Matrix in Dreieckskoordinaten in die Gleichung für die Dehnung lassen sich die Dehnungen in Abhängigkeit der Knotenverschiebungen darstellen.

$$\vec{\varepsilon} = \underline{L} \vec{u} = \underbrace{\underline{L}_\Delta \underline{N}}_{\underline{B}} \vec{u} \quad (2.95)$$

Die Gleichung (2.95) wird in Gleichung (2.86) eingesetzt. Die Spannungen lassen sich dadurch ebenfalls durch die Verschiebungen der Knoten ausdrücken.

$$\vec{\sigma} = \underline{D} \underline{L}_\Delta \underline{N} \vec{u} = \underline{D} \underline{B} \vec{u} \quad (2.96)$$

In der Gleichung 2.84 können nun alle Verschiebungen im Element \vec{u} durch die Knotenverschiebungen ersetzt werden. Die Gleichung für das Potential der Scheibe folgt dann zu

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V (\underline{B} \vec{u})^T \underline{D} \underline{B} \vec{u} dV - \int_V (\underline{N} \vec{u})^T \vec{b} dV - \int_\Gamma (\underline{N} \vec{u})^T \vec{q} d\gamma - \vec{u}^T \vec{F} \quad (2.97)$$

Mit dem Gesetz der Matrixmultiplikation $(\underline{A} \underline{B})^T = \underline{B}^T \underline{A}^T$ lässt sich das Potential zu

$$\Pi = \frac{1}{2} (\vec{u})^T \underbrace{\int_V \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV}_{\underline{K}} \vec{u} - (\vec{u})^T \underbrace{\int_V (\underline{N})^T \vec{b} dV}_{\vec{G}} - (\vec{u})^T \underbrace{\int_\Gamma (\underline{N})^T \vec{q} d\gamma}_{\vec{Q}} - \vec{u}^T \vec{F} \quad (2.98)$$

umformen. Der Vektor \vec{u} ist nicht von V oder γ abhängig, weshalb dieser aus dem Integral herausgezogen wurde. \underline{K} wird als Steifigkeitsmatrix bezeichnet. Um diese zu berechnen wird zuerst die Matrixmultiplikation ausgeführt und im Anschluss jedes Element über das Volumen integriert. Hierfür können die Dreieckskoordinaten wieder in kartesische Koordinaten umgerechnet werden. Um die Vektoren der Volumenkräfte \vec{G} und der Streckenlasten \vec{Q} berechnen zu können, müssen noch die Vektoren \vec{b} und \vec{q} diskretisiert werden.

Die Volumenlasten werden nach dem gleichen Ansatz wie die Verschiebungen diskretisiert. In beiden Fällen wird ein linearer Verlauf angenommen (siehe Gleichung 2.89). Es folgen die gleichen Formfunktionen für die Diskretisierung der Volumenlasten.

$$\vec{b} = \varrho \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{pmatrix}}_{\underline{N}} \underbrace{\begin{pmatrix} b_{x1} & b_{y1} & b_{x2} & b_{y2} & b_{x3} & b_{y3} \end{pmatrix}^T}_{\vec{b}^T} \quad (2.99)$$

Dieser Ansatz wird dann wieder in Gleichung (2.98) eingesetzt.

$$\vec{G} = \int_V (\underline{N})^T \vec{b} dV = \int_V (\underline{N})^T \underline{N} dV \vec{b} \quad (2.100)$$

Die Streckenlasten werden nach dem gleichen linearen Ansatz für alle Kanten einzeln diskretisiert und anschließend addiert. Für \vec{Q} folgt

$$\vec{Q} = \int_{\Gamma} (\underline{N})^T \vec{q} dV = \int_V (\underline{N})^T \underline{N} dV \vec{q} \quad (2.101)$$

Dieser Zusammenhang wird dann ebenfalls in Gleichung (2.98) eingesetzt.

Die Verschiebungen der Knoten der Scheibe lassen sich aus der Ableitung des Gesamtpotentials bestimmen. Das Vorgehen ist dabei das gleiche, wie bei dem Prinzip der virtuellen Verdrückungen.

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial\vec{u}} \delta\vec{u} = 0 = \frac{\partial}{\partial\vec{u}} \left(\frac{1}{2} \vec{u}^T \underline{K} \vec{u} - \vec{u}^T \vec{G} - \vec{u}^T \vec{Q} - \vec{u}^T \vec{F} \right) \delta\vec{u} \quad (2.102)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial\vec{u}} \vec{u}^T \underline{K} \vec{u} \delta\vec{u} - \frac{\partial}{\partial\vec{u}} \vec{u}^T \vec{G} \delta\vec{u} - \frac{\partial}{\partial\vec{u}} \vec{u}^T \vec{Q} \delta\vec{u} - \frac{\partial}{\partial\vec{u}} \vec{u}^T \vec{F} \delta\vec{u} \quad (2.103)$$

Die Ableitung lässt sich auch nach dem transponierten Vektor bilden $\frac{\partial}{\partial\vec{u}} \delta\vec{u} = \delta\vec{u}^T \frac{\partial}{\partial\vec{u}^T}$.

$$\delta\Pi = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial\vec{u}^T} \vec{u}^T \underline{K} \vec{u} \delta\vec{u} - \delta\vec{u}^T \frac{\partial}{\partial\vec{u}^T} \vec{u}^T \vec{G} - \delta\vec{u}^T \frac{\partial}{\partial\vec{u}^T} \vec{u}^T \vec{Q} - \delta\vec{u}^T \frac{\partial}{\partial\vec{u}^T} \vec{u}^T \vec{F} \quad (2.104)$$

Die Vektoren \vec{G} , \vec{Q} und \vec{F} sind konstant und werden daher vor die Ableitung geschrieben. Die Ableitung eines Vektors nach sich selbst ergibt die Einheitsmatrix \underline{E} . Die Variation des Potentials vereinfacht sich somit zu

$$\delta\Pi = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial\vec{u}^T} \vec{u}^T \underline{K} \vec{u} \delta\vec{u} - \delta\vec{u}^T \vec{G} - \delta\vec{u}^T \vec{Q} - \delta\vec{u}^T \vec{F} \quad (2.105)$$

Die Formänderungsenergie wird über die Produktregel abgeleitet. Im Anschluss wird die vordere Ableitung durch die transponierte Ableitung ersetzt. Die Ableitung eines Vektors nach sich selbst bildet wieder die Einheitsmatrix und muss nicht mehr mit aufgeschrieben werden.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial\vec{u}^T} \vec{u}^T \underline{K} \vec{u} \delta\vec{u} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\vec{u}^T}{\partial\vec{u}^T} \underline{K} \vec{u} + \vec{u}^T \underline{K} \frac{\partial\vec{u}}{\partial\vec{u}^T} \right) \delta\vec{u} = \frac{1}{2} \left(\delta\vec{u}^T \frac{\partial\vec{u}^T}{\partial\vec{u}^T} \underline{K} \vec{u} + \vec{u}^T \underline{K} \delta\vec{u} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\delta\vec{u}^T \underline{K} \vec{u} + \vec{u}^T \underline{K} \delta\vec{u} \right) \end{aligned} \quad (2.106)$$

Unter der Voraussetzung, dass \underline{K} symmetrisch ist, also das $\underline{K} = \underline{K}^T$ gilt, kann der Vektor vor und hinter der K -Matrix vertauscht werden, wenn diese transponiert werden.

$$c = \vec{a} \underline{K} \vec{b} \quad \Rightarrow \quad c^T = c = (\vec{a} \underline{K} \vec{b})^T = (\underline{K} \vec{b})^T \vec{a}^T = \vec{b}^T \underline{K}^T \vec{a}^T = \vec{b}^T \underline{K} \vec{a}^T \quad (2.107)$$

c ist hierbei eine skalare Größe.

Gleichung (2.105) vereinfacht sich dadurch zu

$$\delta\Pi = \delta\vec{u}^T \underline{K} \vec{u} - \delta\vec{u}^T \vec{G} - \delta\vec{u}^T \vec{Q} - \delta\vec{u}^T \vec{F} = \delta\vec{u}^T (\underline{K} \vec{u} - \vec{G} - \vec{Q} - \vec{F}) \quad (2.108)$$

Nach dem Prinzip der virtuellen Verrückung muss der Klammerausdruck zu Null gesetzt werden, damit der gesamte Ausdruck zu Null wird. Es folgt die Gleichgewichtsbeziehung der FEM für ein Dreiecksscheibenelement.

$$\underline{K}\vec{u} = \vec{G} + \vec{Q} + \vec{F} \quad (2.109)$$

\underline{K} , \vec{G} , \vec{Q} und \vec{F} sind bekannte Größen. Diese Gleichung kann nun reduziert werden und nach \vec{u} aufgelöst werden.

2.5.2 Isoparametrische Elemente

Bei isoparametrischen Elementen wird die Ansatzfunktion, mit der die Verschiebungen beschrieben werden, ebenfalls für die Beschreibung der Geometrie verwendet. Die Kontur eines Elementes muss nicht linear sein, sondern kann bei Ansatzfunktionen zweiter Ordnung eine Krümmung aufweisen, siehe Abbildung 12.

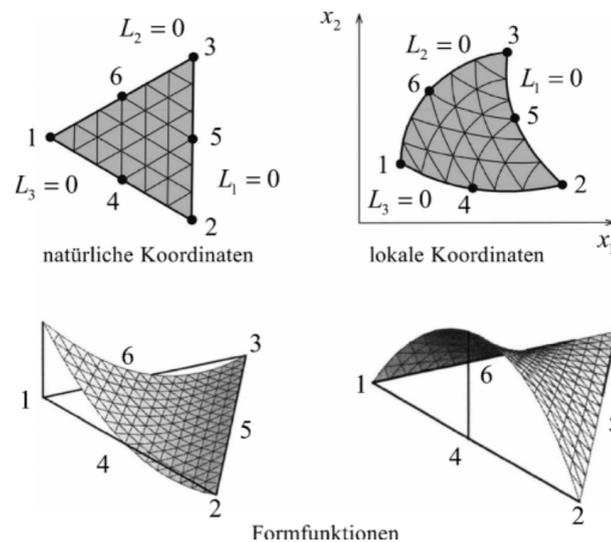


Abbildung 12: Isoparametrisches Dreieckselement mit quadratischen Formfunktionen [1, S. 168]

Durch die Krümmung des Elementes und die weiteren Knoten erhöht sich die Genauigkeit und das Element kann sich der Kontur des Bauteils besser anpassen. Es erhöht sich allerdings auch der Berechnungsaufwand, da die Matrizen für jedes Element größer werden. Damit die K-Matrix nicht für jedes Element neu berechnet werden muss, wird diese in natürlichen Koordinaten berechnet. Um die natürlichen Koordinaten ξ_i (bzw. L_1 und L_2 aus Kapitel 2.5.1) in lokale Koordinaten x_i umzurechnen wird die Jacobi-Matrix \underline{J} verwendet. Diese beschreibt den differentiellen Zusammenhang zwischen den Koordinatensystemen.

$$\frac{\partial N_i}{\partial \vec{x}} = \underline{J}^{-1} \frac{\partial N_i}{\partial \vec{\xi}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial N_i}{\partial \vec{\xi}} = \underline{J} \frac{\partial N_i}{\partial \vec{x}} \quad \text{mit} \quad \underline{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{pmatrix} \quad (2.110)$$

Der Mittelknoten auf den Elementkanten kann bis zu einem gewissen Maß beliebig verschoben werden. Bei zu großen Verschiebungen, wenn das Element in sich zu stark verzerrt ist, ist die

Berechnung nicht mehr möglich, da die Determinante der Jacobi-Matrix zu Null wird.

2.5.3 Nicht lineares Materialverhalten in der FEM

Die Grundlage für die Berechnung von nicht linearem Verhalten ist das Newton-Raphson-Verfahren. Hierbei wird der Funktionswert durch ein iteratives Verfahren angenähert. In Abbildung 13 ist das Verfahren grafisch für einen Freiheitsgrad dargestellt.

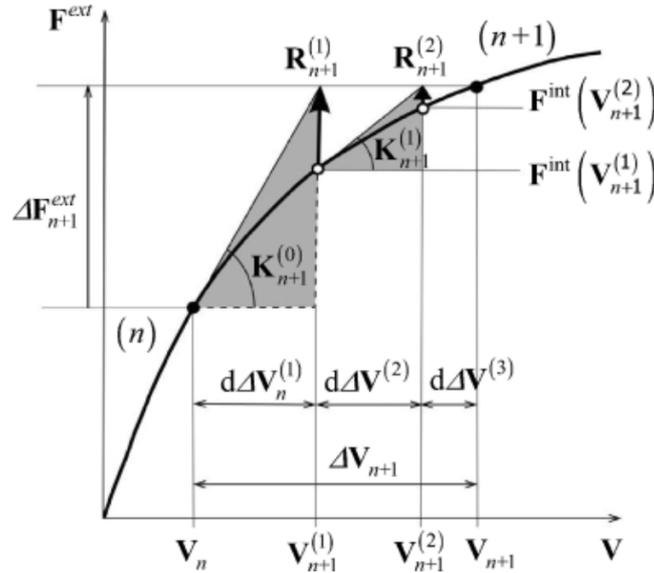


Abbildung 13: Newton-Raphson-Verfahren [1, S.177]

Die durchgezogene Linie entspricht der exakten Lösung von F . V entspricht der Knotenverschiebung. Das Aufbringen der Gesamtlast geschieht in kleineren Schritten, welche inkrementell erhöht werden. Für jeden Lastschritt muss das Kräftegleichgewicht erfüllt sein. Die von außen aufgebrauchte Kraft F^{ext} muss der Summe der Knotenkräfte F^{int} entsprechen. Es werden nun die Verschiebungen der Knoten gesucht, bei denen das Kräftegleichgewicht wieder erfüllt ist. Die Bestimmung der Verschiebungen verläuft wie folgt: Die oberen Indizes beziehen sich auf den Iterationsschritt innerhalb eines Lastschrittes und die unteren auf den Lastschritt.

- Lastschritt $(n+1)$ wählen. Hierbei gilt $F_{(n+1)}^{ext} = F_{(n)}^{ext} + \Delta F_{(n+1)}^{ext}$
- Startwerte für die Iteration festlegen ($i=0$)
 $V_{n+1}^0 = V_n$, $\Delta V_{n+1}^0 = 0$, $K_{n+1}^0 = K_n$, $R_{n+1}^0 = \Delta F_{(n+1)}^{ext}$
 - Berechnung der Tangentialsteifigkeit
 $K_{n+1}^{(i-1)}(V_{n+1}^{i-1})$ mit $K_{n+1}^{i-1}(V) = \frac{\partial F^{int}}{\partial V}$ an der Stelle V_{n+1}^{i-1}
 - Bestimmung des Verschiebungskorrekturen
 $\Delta V_{n+1}^i = \Delta V_{n+1}^{i-1} + [K_{n+1}^{i-1}]^{-1} R_{n+1}^{i-1}$ mit $R_{n+1}^{i-1} = F_{n+1}^{ext} - F_{n+1}^{int}(V_{n+1}^{i-1})$
 - Bestimmung der Gesamtverschiebung
 $V_{n+1}^i = V_n + \Delta V_{n+1}^i$
 - Bestimmung der inneren Kräfte
 $F^{int} = F^{int}(V_{n+1}^i)$

- Bestimmung der Residuen

$$R_{n+1}^i = F_{n+1}^{ext} - F^{int}(V_{n+1}^i)$$

- Konvergenzkriterium

Die Norm von R_{n+1}^i ist kleiner als ein festgelegter Wert. Ist das Konvergenzkriterium noch nicht erfüllt, so wird $i = i + 1$ gesetzt und die Schleife erneut über i ausgeführt.

Sobald das Konvergenzkriterium erfüllt ist, wird der Lastschritt erhöht und die Schleife von vorne ausgeführt. Das Residuum gibt hierbei an wie genau die Lösung des einzelnen Schrittes mit der Lösung der Ausgangsgleichung übereinstimmt. Je dichter das Residuum an der Null liegt, desto besser erfüllt der Iterationsschritt die Ausgangsgleichung. Wenn F^{ext} gleich der Last entspricht, welche auf das Modell aufgebracht wird, so ist die Berechnung beendet.

Wenn ein Material plastifizieren kann, so weist es eine materielle Nicht-Linearität auf. Um diese zu berechnen wird zunächst ein Verfestigungsmodell gewählt (siehe Kapitel 2.1.5). Das Verfestigungsmodell legt eine Verfestigungsmatrix h und den plastischen Multiplikator Λ fest und bestimmt dadurch das Verfestigungsmodell. Die Spannungen werden nach

$$\sigma = C(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (2.111)$$

mit Hilfe der Elastizitätsmatrix C bestimmt. Für das linear-elastische, ideal-plastische Material gilt die Fließbedingung

$$\Phi(\sigma, h) \begin{cases} < 0 & \text{elastisch} \\ = 0 & \text{plastisch} \end{cases} \quad (2.112)$$

Die Fließbedingung vergleicht die Zugfestigkeit und die vorliegende Spannung nach verschiedenen Versagenshypthesen. Im elastischen Bereich, tritt kein Versagen auf und die Differenz aus zulässiger und vorhandener Spannung ist kleiner als Null. Sobald Versagen auftritt und die Streckgrenze erreicht ist, wird $\Phi = 0$.

Um die Spannung, abhängig von der plastischen Dehnung ε^p zu berechnen, kann die Projektionsmethode eingesetzt werden. Diese ist in zwei Schritte unterteilt. Den Ausgang bildet der $(n + 1)$ -Lastschritt, an dem die Spannungen, Dehnungen und Verfestigungen bekannt sind.

1. Prädiktorschritt

Hierbei wird die Berechnung rein elastisch betrachtet. Es wird davon ausgegangen, dass keine plastischen Dehnungen auftreten. Die errechnete Spannung $\sigma_{(n+1)}^{tr}$ (tr steht für trial value) wird dann in die Fließbedingen eingesetzt. Wenn der Wert der Fließbedingung kleiner als Null ist, so war die Annahme der elastischen Rechnung richtig und es kann der nächste Lastschritt berechnet werden. Wenn der Wert für die Fließbedingung größer gleich Null wird, so tritt Fließen auf. Für diesen Fall ist die Berechnung noch nicht beendet und es folgt der Korrektorschritt.

2. Korrektorschritt

Im Korrektorschritt wird die Spannung $\sigma_{(n+1)}^{tr}$ um die Spannung $\sigma_{(n+1)}^{corr} = C\Delta\varepsilon_{(n+1)}^p$ verringert. Die plastische Dehnung $\varepsilon_{(n+1)}^p$ und die Verfestigung h ist hierbei von dem plastischen Multiplikator Λ , der Verfestigung h und der Spannung $\sigma_{(n+1)}$ abhängig. Mit dem Newton-

Raphson-Verfahren werden die voneinander abhängigen Größen iterativ bestimmt, wobei das Ziel die Erfüllung der Fließbedingung $\Phi(\sigma_{n+1}, h_{n+1}) = 0$ ist.

Sobald die Fließbedingung erfüllt ist, wird die Kraft erhöht und es wird der nächste Lastschritt betrachtet.

2.5.4 Rissspitzenelemente

Um die Singularität mit dem Abfall von $\frac{1}{\sqrt{r}}$ (vgl. Gleichung(2.30)) in den Ansatzfunktionen abbilden zu können, werden die Mittelpunktknotten der Elementkanten verschoben. Hierdurch ist die Abbildung von $\xi \rightarrow x$ nicht mehr linear und die Ansatzfunktionen für die Dehnung enthält den Faktor $\frac{1}{\sqrt{r}}$. Im Folgenden wird der Ansatz für ein eindimensionales Element verdeutlicht. Es wird eine quadratische Ansatzfunktion gewählt. Die Verschiebung lautet in natürlichen Koordinaten

$$\begin{aligned} u(\xi) &= \sum_{a=1}^3 N_a(\xi)u^{(a)} = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)u^{(1)} + (1 - \xi^2)u^{(2)} + \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)u^{(3)} \\ &= u^{(3)} + \frac{1}{2}(u^{(2)} - u^{(1)})\xi + \left(\frac{1}{2}(u^{(1)} + u^{(2)}) - u^{(3)}\right)\xi^2 \end{aligned} \quad (2.113)$$

Der Laufindex a läuft über die Knotennummern des Elementes, N_a beschreibt die Formfunktion und $u^{(a)}$ die Verschiebung des Knotens. In Abbildung 14 ist das Element mit der Positionierung des Mittelknottes in Abhängigkeit von \varkappa dargestellt.

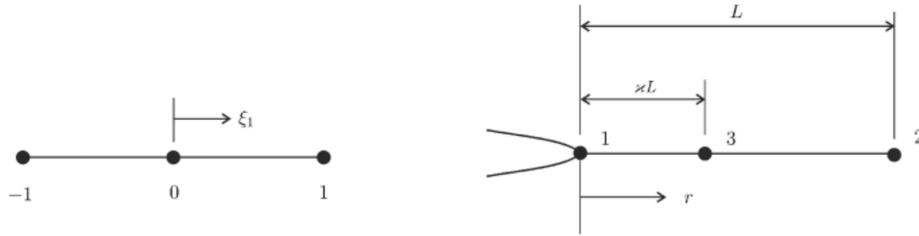


Abbildung 14: links: Element in natürlichen Koordinaten; rechts: Element in lokalen kartesischen Koordinaten [1, S.192]

Mittels der Ansatzfunktion werden auch die Positionen der Knotenpunkte beschrieben, da die Rissspitzenelemente isoparametrisch sind. Die Knoten des Elementes sind an den Stellen $r^{(1)} = 0$, $r^{(2)} = L$ und $r^{(3)} = \varkappa L$. Die Position der Knoten in Abhängigkeit von ξ lautet somit

$$r(\xi) = \sum_{a=1}^3 N_a(\xi)r^{(a)} = \varkappa L + \frac{1}{2}(L - 0)\xi + \left(\frac{1}{2}(0 + L) - \varkappa L\right)\xi^2 = \varkappa L + \frac{1}{2}L\xi + \left(\frac{1}{2} - \varkappa\right)L\xi^2 \quad (2.114)$$

Für ein herkömmliches Element mit $\varkappa = \frac{1}{2}$ verschwindet die letzte Klammer und es besteht ein linearer Zusammenhang zwischen r und ξ .

Für ein Rissspitzenelement ist dies nicht gewollt und es wird $\varkappa = \frac{1}{4}$ gesetzt. Die Umrechnungen zwischen r und ξ lauten dann

$$r(\xi) = \frac{1}{4}L(1 + \xi)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \xi(r) = 2\sqrt{\frac{r}{L}} - 1 \quad (2.115)$$

Die Gleichung für $\xi(r)$ wird in Gleichung (2.113) eingesetzt.

$$u(r) = u^{(1)} + (-3u^{(1)} - u^{(2)} + 4u^{(3)})\sqrt{\frac{r}{L}} + 2(u^{(1)} + u^{(2)} - 2u^{(3)})\frac{r}{L} \quad (2.116)$$

Die Verschiebungen können nach der Position abgeleitet werden, um die Dehnungen zu bestimmen.

$$\varepsilon(r) = \frac{\partial u}{\partial r} = (-3/2u^{(1)} - 1/2u^{(2)} + 2u^{(3)})\frac{1}{\sqrt{Lr}} + 2(u^{(1)} + u^{(2)} - 2u^{(3)})\frac{1}{L} \quad (2.117)$$

Ein eindimensionales Risspitzenelement ist noch nicht ausreichend um eine Risspitze adäquat vernetzen zu können. Deshalb werden im Folgenden noch die kollabierenden Viereckelemente vorgestellt. In Abbildung 15 ist das kollabierte Viereckelement dargestellt. Die Knoten 4,8 und 1 liegen an der gleichen Stelle.

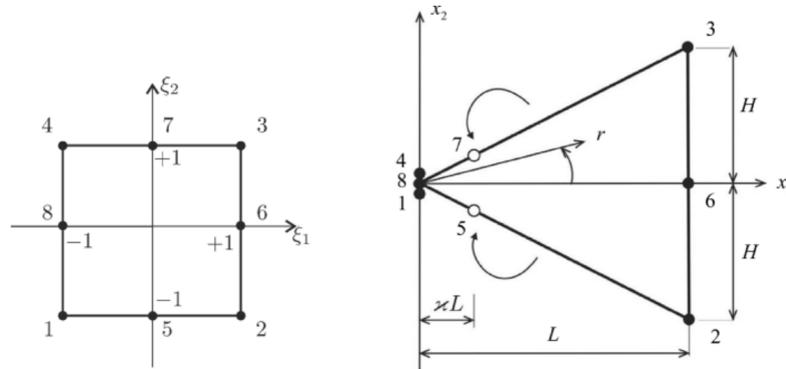


Abbildung 15: Kollabiertes isoparametrisches Viereckelement [1, S.195]

Die Ansatzfunktion des Elementes für die Eckknoten lautet

$$N_a(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_1\xi_1^a)(1 + \xi_1\xi_2^a)(\xi_1\xi_1^a + \xi_2\xi_2^a - 1) \quad (2.118)$$

wobei ξ_i^a der natürlichen Koordinaten des Knotens entspricht. Die Ansatzfunktionen für die Seitenmittenknoten lauten

$$\xi_1^a = 0 : \quad N_a(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}(1 - \xi_1^2)(1 + \xi_2\xi_2^a) \quad (2.119)$$

$$\xi_2^a = 0 : \quad N_a(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}(1 + \xi_1\xi_1^a)(1 - \xi_2^2) \quad (2.120)$$

Die natürlichen Koordinaten lassen sich nach [1, S.195] in lokale Koordinaten umrechnen.

$$x_1 = \frac{L}{2}[(1 + \xi_1)^2(1 - 2\kappa) - (1 + \xi_1)(1 - 4\kappa)] \quad (2.121)$$

$$x_2 = \frac{H}{2}\xi_2[(1 + \xi_1)^2(1 - 2\kappa) - (1 + \xi_1)(1 - 4\kappa)] \quad (2.122)$$

Der Berechnungsvorgang für die Dehnungen ist der gleiche wie für das eindimensionale Element. Durch die Ableitung der Knotenverschiebung nach der Position im lokalen Koordinatensystem

lassen sich die Dehnungen berechnen.

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}; \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad (2.123)$$

Die Ableitungen berechnen sich diesmal mit Hilfe der Jacobi-Matrix.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}}_{J_{ij}^{-1}} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} \quad (2.124)$$

u entspricht hierbei wieder der Verschiebung. $\sum_{a=1}^8 N_a(\xi_1, \xi_2) u^{(a)}$ Die explizite Darstellung der Berechnung der Dehnung ist in [1, S.197] dargestellt. Die Gleichung zur Beschreibung der Spannungen und Dehnungen im kollabierenden Viereckelement enthält einen $\frac{1}{\sqrt{r}}$ und ein $\frac{1}{r}$ Term, wodurch die Singularität in der Rissspitze abgebildet werden kann. In der LEBM werden die Verschiebungen der kollabierenden Seite kinematisch gekoppelt, so dass $u_i^1(1) = u_i^1(4) = u_i^1(8)$. Hierdurch verlieren die Elemente das $\frac{1}{r}$ Verhalten.

In der EPBM für ein ideal plastisches Material sind die Dehnungen an der Rissspitze proportional zu $\frac{1}{r}$, siehe [1, S.95]. Um dieses Verhalten abzubilden werden die Seitenmittenknoten auf $\varkappa = \frac{1}{2}$ gesetzt und der Vorgang der obigen Herleitung wiederholt. Löst man die Gleichung erneut, so erkennt man in den Dehnungen ein $\frac{1}{r}$ Verhalten. Für die elasto plastische Berechnung ist die kollabierende Spitze des Elementes nicht mehr kinematische gebunden und die Knoten können sich getrennt voneinander verschieben. Mit diesen beschriebenen Elementen kann nun die Rissspitze für die LEBM und die EPBM vernetzt werden.

2.5.5 Numerische Berechnung des J-Integrals

Das J-Integral wird in ANSYS (Analyse System, ein Programm zur FEM-Berechnung) für ein 2D-Problem wie folgt berechnet

$$J = \int_A \left[\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - w \delta_{ij} \right] \frac{\partial q}{\partial x_i} dA + \int_A \alpha \sigma_{ii} \frac{\partial \Theta}{\partial x_1} \frac{\partial q}{\partial x_i} q_1 dA - \int_A \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^0}{\partial x_1} q_1 dA - \int_C t_j u_{j,1} q_1 dS \quad (2.125)$$

σ_{ij} ist dabei der Spannungstensor, u_j der Verschiebungsvektor, w die Dehnungsenergiedichte, δ_{ij} ist das Kronecker-delta-Symbol, x_i entspricht der lokalen Koordinatenachse, q dem Risserweiterungsvektor, α dem Wäremausdehnungskoeffizienten, ε_{ij}^0 dem Initialdehnungstensor, t_j der Belastung der Rissflanken, A dem Integrationsbereich, C dem Bereich der belasteten Rissflanken. Der Risserweiterungsvektor q zeigt in die Richtung der lokalen x-Achse. Entlang der Eckknoten, welche auf der Kontur Γ liegen, wird q zu Null gesetzt. Für alle Knoten innerhalb der Kontur, wird q zum Einheitsvektor [8]. Die Kontur zur Bestimmung des J-Integrals wird durch die Rissspitze festgelegt. In Abbildung 16 sind die ersten vier Konturen um die Rissspitze abgebildet.

Nach [1, S.296] lässt sich das J-Integral in ein Linien-Flächenintegral umwandeln, hierfür wird die von der Kontur Γ umschlossene Fläche (in Abbildung 16 blau gekennzeichnet) in der Rechnung mitbetrachtet. Das Flächenintegral bildet die Differenz zwischen dem inneren und äußeren Pfad ab. Hierdurch wird das Integral wegunabhängig. Der Riss stumpft unter Belastung in der

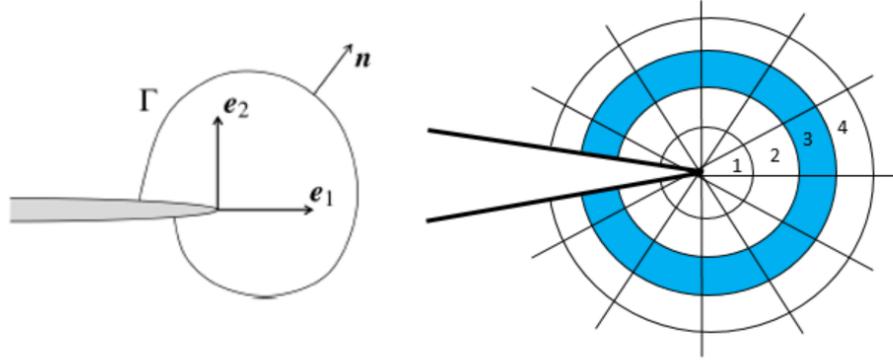


Abbildung 16: Konturen um die Risspitze in ANSYS [4]

Risspitze ab und der Riss wird zu einer Kerbe. Liegt die innere Kontur zu dicht an der Risspitze, so wird das Wegintegral, durch die nun endlichen Werte im Spannungsfeld (Kerbwirkung anstatt Risspitze), wegabhängig. Dies ist in Abbildung 19 gut zu erkennen.

2.5.6 Numerische Bestimmung des Spannungsintensitätsfaktors

In der LEBM (linear elastischen Bruchmechanik) lassen sich nach [9, S.22] über die Energiefreisetzungsrate die Spannungsintensitätsfaktoren in das J-Integral überführen. Es folgt der Zusammenhang

$$J_1 = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E'} + \frac{1 + \nu}{E} K_{III}^2 \quad (2.126a)$$

$$J_2 = -2 \frac{K_I K_{II}}{E'} \quad (2.126b)$$

$$J_3 = 0 \quad (2.126c)$$

Mittels dem Superpositionsprinzip darf eine Rissbelastung in zwei getrennte Belastungen $(^{(1)}, ^{(2)})$ zerlegt und getrennt berechnet werden. Um die Lösung für das Gesamtsystem zu erhalten, werden die Lösungen der Teilsysteme addiert.

$$K_i \rightarrow K_i^{(1)} + K_i^{(2)} \quad (2.127)$$

Der Zusammenhang aus Gleichung (2.127) wird in Gleichung (2.126) eingesetzt. Dieser Zusammenhang wird ausgeklammert. Die einzelnen Summanden lassen sich wieder durch J darstellen. Der gemischte Term I_k wird als Interaktions-Integral bezeichnet.

$$J_1 = J_1(K_i^{(1)}) + J_1(K_i^{(2)}) + \underbrace{J_1(K_i^{(1)}, (K_i^{(2)}))}_{=I_1} \quad (2.128a)$$

$$J_2 = J_2(K_i^{(1)}) + J_2(K_i^{(2)}) + \underbrace{J_1(K_i^{(1)}, (K_i^{(2)}))}_{=I_2} \quad (2.128b)$$

$$J_3 = 0 \quad (2.128c)$$

I_k folgt zu

$$I_1 = 2 \left(\frac{K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)}}{E'} + \frac{1 + \nu}{E} K_{III}^{(1)} K_{III}^{(2)} \right) \quad (2.129a)$$

$$I_2 = -2 \frac{K_I^{(1)} K_{II}^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_I^{(2)}}{E'} \quad (2.129b)$$

$$I_3 = 0 \quad (2.129c)$$

Durch eine geschickte Wahl des (2)-Systems werden die nicht benötigten Spannungsintensitätsfaktoren zu Null bzw. Eins gesetzt, so dass in I_i nur noch die zu bestimmende Spannungsintensität stehen bleibt. Nach dieser kann dann Gleichung (2.129) umgestellt werden.

In ANSYS ist das Interaktions-Integral (ohne Initial-Dehnung und Temperaturänderung) nach [8] wie folgt implementiert.

$$I_0 = - \frac{\int_V q_{i,j} \left[\sigma_{kl} \varepsilon_{kl}^{\text{aux}} \delta_{ij} - \sigma_{kj}^{\text{aux}} u_{k,i} - \sigma_{kj} u_{k,j}^{\text{aux}} \right] dV}{\int_S \delta q_n dS} \quad (2.130)$$

q_i entspricht hierbei dem Risserweiterungsvektor. Die Tensoren mit ^{aux} entsprechen dem Hilfsystem (dem ⁽²⁾-System).

3 Modelle: Aufbau und Untersuchung

Im folgenden wird der Eigenanteil dieser Bachelorarbeit vorgestellt. Zunächst wird das Modell der CT-Probe vorgestellt und deren Konvergenz, jeweils für die Modellierung in APDL und in der Workbench, belegt. Im Anschluss werden einige Untersuchungen vorgestellt, welche die Theorie mit der Anwendung vergleichen. Danach wird das CT-Proben-Modell mit verschiedenen Bruchmechanismen berechnet und die Ergebnisse gegenübergestellt. Dem nachfolgend wird ein Modell mit mittigem Riss vorgestellt. Diese wurde ebenfalls einmal in APDL und einmal in der Workbench modelliert. Zum Schluss wird diese ebenfalls noch nach verschiedenen Bruchmechanismen berechnet und die Berechnungsergebnisse werden ebenfalls verglichen.

3.1 Modellierung der CT-Probe in APDL

APDL steht für ANSYS Parametric Design Language und ist eine Programmiersprache, mit welcher man in ANSYS-Classic Finite-Elemente-Modelle erstellen kann. In ANSYS-Classic müssen zur Erstellung eines Modells alle Befehle einzeln eingegeben werden. Jeder Punkt und jede Unterteilung einer Linie zur Erstellung des Netzes wird manuell gesteuert. Dies hat den Vorteil, dass der Modellierende sein Modell sehr gut kontrollieren kann. Des Weiteren sind in APDL mehr Möglichkeiten, wie zum Beispiel die elasto-plastische bruchmechanische Berechnung, vorhanden als in der Workbench.

3.1.1 Beschreibung des CT-Proben-Modells in APDL

In Anlehnung an eine CT-Probe (Compact Tension) wurde ein Modell erstellt. Die exakte Geometrie wurde nicht verwendet, da sich die Berechnung dieser nicht mit den analytischen Gleichungen annähern lässt. Des Weiteren sind die Rissflanken spannungsfrei, da sie sich frei verschieben können. Die vorgenommene Änderung der Geometrie der Flanken sollte keinen signifikanten Einfluss auf die Auswertung der Belastung der Risspitze und der Plastifizierung des Ligamentes haben. Die CT-Probe dient zur experimentellen Bestimmung der Bruchzähigkeit. Der Riss entsteht erst während des Versuches. In dem FEM-Modell muss der Riss im Vorhinein vorhanden sein. Die Rissflanken sind annähernd spannungsfrei, da sich das Material dort verschieben kann.

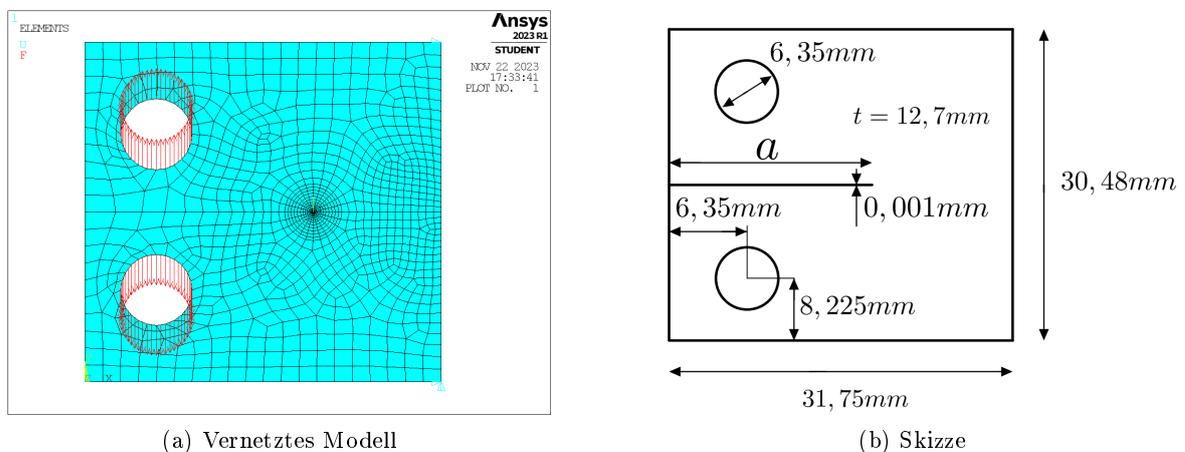


Abbildung 17: Modell der CT-Probe

Aus Abbildung 17 lassen sich die Maße des Modells entnehmen. Das Modell ist als Fläche

(wahlweise als Schiebe oder Platte) aufgebaut worden. Der Riss liegt horizontal auf der halben Höhe und hat die Länge a , welche variabel ist. Der Riss startet an der linken Kante und endet in der Netzverfeinerung der Rissspitze, welche in Abbildung 17 durch die in konzentrischen Kreisen angeordneten Elemente zu erkennen ist. Das Modell ist statisch bestimmt gelagert. Durch ein Festlager an der unteren rechten Ecke ist die Bewegung in x- und y-Richtung gesperrt und durch ein Loslager an der rechten oberen Ecke wird die Rotation um die z-Achse verhindert.

Bei dem Modell können mehrere Eigenschaften variiert werden. Die Risslänge, die Kraft, der Spannungszustand und das Material. Bei den Materialeigenschaften kann eine linear-elastisches und ein linear-elastisches-ideal-plastisches Verhalten eingestellt werden.

An diesem Modell werden alle folgenden Untersuchungen durchgeführt. Das Modell wurde APDL (ANSYS Parametric Design Language) erstellt.

In Kapitel 2.5.4 wird beschrieben, dass der Mittelknoten für die elasto plastische Bruchmechanik bei $L/2$ liegen muss. Diese Funktion ist in APDL nicht verfügbar. Auch das kollabierende Viereckelement ist in APDL leider nicht implementiert. [10]

3.1.2 Konvergenz des CT-Proben-Modells in APDL

Da die FEM-Berechnung nur einer numerischen Lösung entspricht und die Lösung von der Diskretisierung des Modells abhängig ist, muss die Konvergenz des Modells geprüft werden. Hierbei wird die Elementkantenlänge, bzw. der Abstand der Knoten solange verringert bis das Ergebnis der Berechnung nicht mehr vom Netz abhängig ist.

Die unten stehende Konvergenzstudie (Tabelle 2 und Tabelle 3) untersucht den Einfluss der Kantenlänge des Netzes und den Einfluss der Vernetzung der Rissspitze. Die Rissspitze ist mit Risspitzenelementen vernetzt. Die Elementkantenlänge der Elemente, welche in erster und zweiter Reihe um die Rissspitze angeordnet sind, wird direkt festgelegt und nicht automatisch vernetzt. Der Übersicht halber wird die Elementkantenlänge der ersten Elementreihe um die Rissspitze im Folgenden mit EKL1 abgekürzt und die Elementkantenlänge der zweiten Elementreihe mit EKL2. Die Elementanzahl bzw. die Knotenanzahl variiert von Modell zu Modell, da mit der Veränderung der Rissspitze das Netz vollständig neu erstellt werden muss. Eine alleinige Änderung der Risspitzenelemente würde zu einem unstrukturierten Netz führen, welches die Berechnung von J beeinflussen würde.

In Tabelle 1 sind die Modellversionen zusammengefasst. Die Globale Elementkantengröße ist hierbei nur eine prozentuale Angabe im Bezug auf das Ausgangsmodell (A).

Modell	Ausgangsmodell (A)	(B)	(C)	(D)	(E)	(F)
Globale Elementgröße	1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
EKL1	0,1	0,05	0,1	0,2	0,2	0,1
EKL2	0,5	0,25	0,5	0,5	0,3	0,1

Tabelle 1: Modellversionen für die Konvergenzstudie des CT-Proben-Modells

Um die Modelle vergleichen zu können wurde in Tabelle 3 die relativen Abweichungen der Spannungen, Verschiebungen und des J-Integrals im Bezug auf das Ausgangsmodell (Modell (A)) berechnet.

	(A)	(B)	(C)	(D)	(E)	(F)
Anzahl Elemente [-]	1349	4634	4413	4396	4489	4924
Anzahl Knoten [-]	4250	14209	13582	13505	13754	14989
Maximale Verschiebung (Vec Sum) [mm]	0.044845	0.044894	0.04487	0.04484	0.04484	0.044905
Maximale Vergleichsspannung (von Mises) [MPa]	204.103	217.024	204.414	206.778	208.07	216.895
J [$\frac{N}{mm}$]	0.83733	0.83768	0.83733	0.83658	0.83658	0.83791

Tabelle 2: Konvergenzstudie CT-Proben-Modell in APDL, absolute Größen

	Abweichung (A) (B) [%]	Abweichung (A) (C) [%]	Abweichung (A) (D) [%]	Abweichung (A) (E) [%]	Abweichung (A) (F) [%]
Maximale Verschiebung (Vec Sum)	0.11	0.06	-0.01	-0.01	0.13
Maximale Vergleichsspannung (von Mises)	6.33	0.15	1.31	1.94	6.27
J	0.04	0.00	-0.09	-0.09	0.07

Tabelle 3: Konvergenzstudie CT-Proben-Modell in APDL, relative Abweichung

In der Konvergenzstudie zeigen sich deutliche Abweichungen der Spannungen. Dies ist auch zu erwarten, da das Netz eine Singularität in der Riss Spitze aufweist. Je feiner die Riss Spitze vernetzt ist, desto dichter liegen die Knoten an der Singularität und desto höher werden die Spannungen. Modell (B) und (F) haben in der ersten Elementreihe um die Riss Spitze die gleiche Kantenlänge und ungefähr gleiche maximale Spannungen (vgl. Tabelle 2 und tabelle 3). Die Elementkantenlänge der zweiten Reihe ist bei den beiden Modellen deutlich unterschiedlich. Diese beeinflusst die maximale Spannung nicht maßgeblich.

Die maximale Verschiebung ist bei allen Modellen ungefähr gleich und kann als konvergent betrachtet werden. Die maximale Verschiebung liegt an der Außenkante des Modells, wo der Riss beginnt und nicht an der Riss Spitze, wo die größte Spannung vorliegt.

Die Bewertung des Modells, ob das Material versagt oder nicht, geschieht über die Plastifizierung des Ligamentes und über das J-Integral. Da das J-Integral unabhängig von der maximalen Spannung in der Riss Spitze konvergiert, kann das Modell als auskonvergiert bezeichnet werden.

3.2 Modellierung der CT-Probe in der Workbench

Im folgenden wird die Modellierung der CT-Probe in der Workbench vorgestellt. Die Workbench ist ein Teil des Programms von ANSYS und ist für den Modellierenden leichter zu bedienen, da dort ein Modellbaum vorhanden ist und alle Eingaben vorwiegend Geometrie basiert sind. In der Workbench sind allerdings noch nicht alle Funktionen implementiert, welche in APDL zur Verfügung stehen. Die bruchmechanische Berechnung ist in der Workbench nur mit linear elastischen Materialien möglich. Des Weiteren muss der Körper mit Volumenelementen und der

Methode Tetrahedrons vernetzt sein. Es kann also keine Scheibe oder Platte mit Riss simuliert werden.

3.2.1 Beschreibung des CT-Proben-Modells in der Workbench

Das Modell ist als Volumenkörper ohne Riss modelliert. In Abbildung 18 ist das Netz des Modells abgebildet. Die Belastungen wurden als Flächenlast auf die Zylindermantelflächen in positive und negative y-Richtung aufgebracht. Die resultierende Kraft pro Zylindermantelfläche beträgt $F = 4739N$. Das Modell wurde auf den unteren Kanten gelagert, in dem die Verschiebungen der Knoten auf der linken unteren Kante in x-,y- und z- Richtung gesperrt wurden. Die Verschiebungen der Knoten auf der rechten unteren Kante wurden in x- und z-Richtung verhindert.

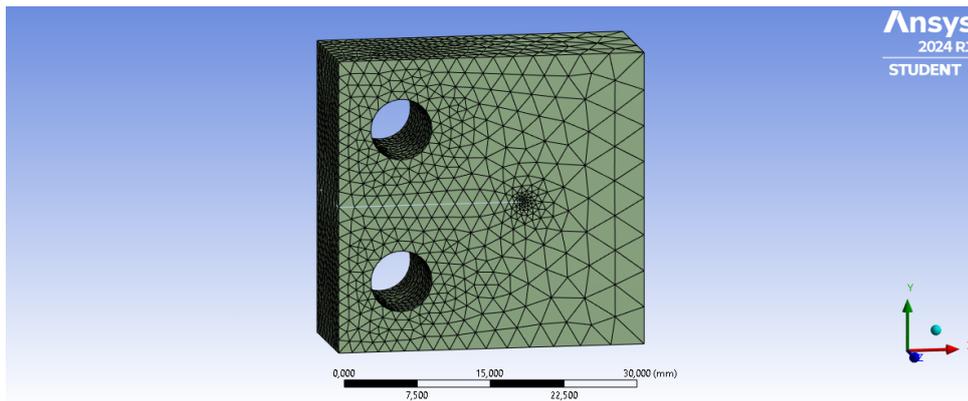


Abbildung 18: Netz des CT-Proben-Modells in der Workbench

Die Dimensionen des CT-Proben-Modells entsprechen den gleichen aus dem Modell in Kapitel 3.1.1. Der Riss wird in der Workbench als Fläche eingebracht, welche den Riss darstellt und somit die passende Geometrie und Lage im Bezug auf das Volumenmodell haben muss, um den Riss abzubilden. Mit dem Fracture-Tool können Fläche und Volumenkörper dem Riss und dem Bauteil zugeordnet werden. Das Programm trennt dann automatisch den Volumenkörper auf und definiert eigenständig die Risspitze. Die Risspitze benötigt hier ebenfalls wie in dem APDL-Code ein eigenes Koordinatensystem zur Berechnung der Rissspitzenbelastung. Die Netzverfeinerung muss händisch ebenfalls im Fracture-Tool eingestellt werden. Hier wird die Elementkantenlänge der ersten Elementreihe um die Risspitze festgelegt und die Wachstumsrate, mit der die Elementkantenlänge nach außen hin größer werden soll. Ebenfalls lässt sich hier noch die Größe des Bereiches der Netzverfeinerung einstellen. Die Kantenlänge der Box der Netzverfeinerung muss allerdings mindestens doppelt so groß sein wie die Risslänge, wodurch das gesamte Modell innerhalb der Netzverfeinerung liegt.

3.2.2 Konvergenz des CT-Proben-Modells in der Workbench

Im folgenden wurde die Konvergenz des Modells untersucht, um die Netzunabhängigkeit der Lösung zu bestätigen. Da mit der Studentenzulassung von ANSYS modelliert wurde, ist die Knotenanzahl auf 128.000 begrenzt. Modell (A) ist das Ausgangsmodell, dessen Konvergenz belegt werden soll. EKL1 ist die Elementkantenlänge der ersten Elementreihe um die Risspitze und die Wachstumsrate gibt an, um welchen Faktor die Netzverfeinerung um die Risspitze abnehmen soll. Es wurden folgende Netzänderungen untersucht:

- (A) EKL1 = 0,2 mm , Wachstumsrate = 1,4
- (B) EKL1 = 0,1 mm , Wachstumsrate = 1,25
- (C) EKL1 = 0,1 mm , Wachstumsrate = 1,4
- (D) EKL1 = 0,2 mm , Wachstumsrate = 1,25

In Tabelle 4 sind die Ergebnisse dargestellt. Die relative Abweichung bezieht sich immer auf das Ausgangsmodell (A). Eine Elementkantenänderung des Gesamtnetzes wurde nicht vorgenommen, da das gesamte CT-Proben-Modell innerhalb der Netzverfeinerung lag.

	Absolute Größen				rel. Abweichung zu (A) in [%]		
	(A)	(B)	(C)	(D)	(A) (B)	(A) (C)	(A) (D)
Anzahl Elemente [-]	36515	88222	54609	51049	-	-	-
Anzahl Knoten [-]	53817	125617	79333	74012	-	-	-
Maximale Verschiebung (Vec Sum) [mm]	0,32656	0,32713	0,32704	0,32666	0,175	0,147	0,031
Maximale Vergleichsspannung (von Mises) [MPa]	928,2	1161,8	1304,2	811,33	25,167	40,509	12,59
K_I [$MPa\sqrt{mm}$]	769.19	771.4	771.39	768.88	0,287	0,286	0,040

Tabelle 4: Konvergenz des CT-Proben-Modells in der Workbench

Es ist wie bei der Konvergenz im APDL-Modell deutlich zu erkennen, dass die Spannungen nicht konvergieren. Aufgrund der Singularität in der Risspitze ist dies auch nicht zu erwarten. Da die Verschiebungen und Spannungsintensitätsfaktoren allerdings auskonvergiert sind, kann das Modell (A) als konvergent bezeichnet werden.

3.3 Untersuchung des CT-Proben-Modells in APDL

Im folgenden werden einige Untersuchungen an dem CT-Proben-Modell in APDL durchgeführt. Zunächst wird die Wegabhängigkeit des J-Integrals untersucht. Anschließend wird näher betrachtet, wie sich die Größe der plastischen Zone auf das J-Integral auswirkt und ab wann eine elasto-plastische Betrachtung notwendig ist. Zum Schluss werden noch die Größe und Form der plastischen Zonen aus der Analytik mit der Numerik verglichen.

3.3.1 Wegabhängigkeit des J-Integrals

Im Folgenden soll die Wahl der Kontur für die Berechnung des J-Integrals näher untersucht werden. In Kapitel 2.5.5 wird gezeigt wie das J-Integral numerisch berechnet wird.

Es wird eine Scheibe modelliert, welche die Abmaße des Modells aus Kapitel 3.1.1 hat. Die Risslänge a wird auf $20mm$ gesetzt. Die Streckgrenze des Modells beträgt $200MPa$. Die Scheibe wurde mit drei verschiedenen Kräften zwischen 300 und 500 N belastet. Das errechnete J-Integral wurde für die ersten 20 Konturen (Elementreihen) um die Risspitze notiert und in Abbildung 19 über die Konturnummer aufgetragen.

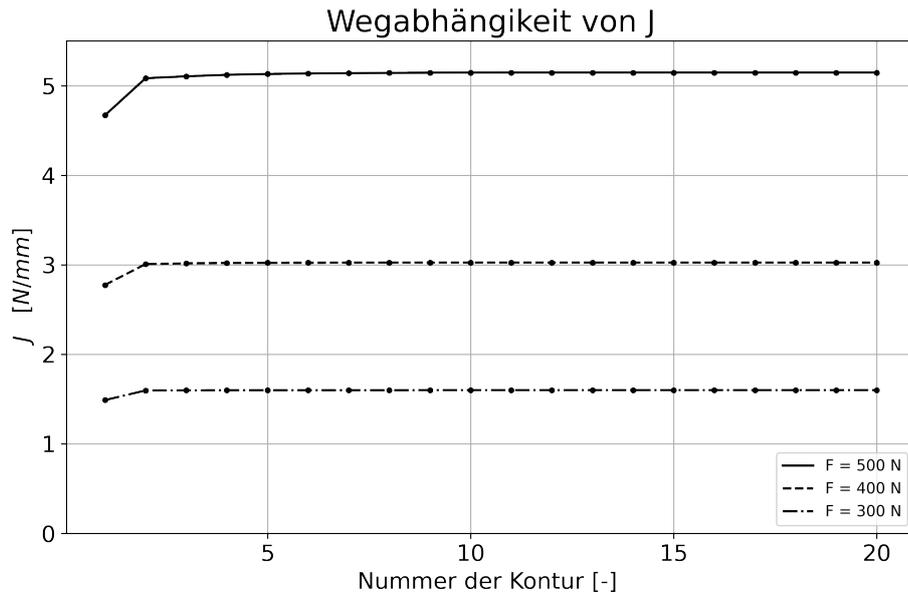


Abbildung 19: Abhängigkeit des J-Integrals von der Kontur

Es zeigt sich, dass sich das J-Integral ab der dritten Kontur einem Wert annähert. In Abbildung 20 ist die absolute Änderung des J-Integrals von der i -ten zu $(i+1)$ -ten Kontur dargestellt. Die Änderung zwischen den ersten drei Konturen ist verhältnismäßig groß und wurde nicht mit abgebildet, damit die kleineren Schwankungen der späteren Konturen dargestellt werden können.

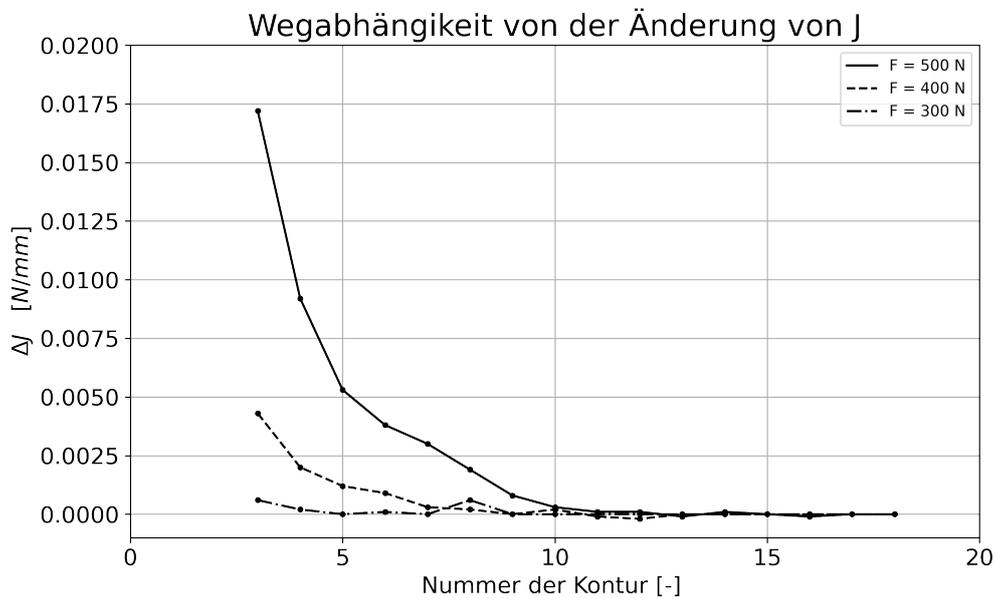


Abbildung 20: Abhängigkeit der Änderung von J über die Kontur

Je größer die angreifende Kraft ist, desto größer ist die plastische Zone. Das J-Integral nähert sich einem Grenzwert an, sobald der Abstand um die Singularität in der Rissspitze groß genug ist (siehe Kapitel 2.5.5). Je größer die plastische Zone ist, desto größer muss der Abstand der Kontur zur Rissspitze gewählt werden, damit das J-Integral verwendet werden kann. Für dieses

Modell kann immer die letzte Kontur für die Bestimmung des J-Integrals gewählt werden. Die Kontur darf auch durch die plastische Zone verlaufen und muss diese nicht komplett einließen, da eine monotone Belastung vorliegt.

In Abbildung 21 sind exemplarisch die plastischen Dehnungen (nach von Mises) der Risspitze für die Kraft $F = 400N$ dargestellt.

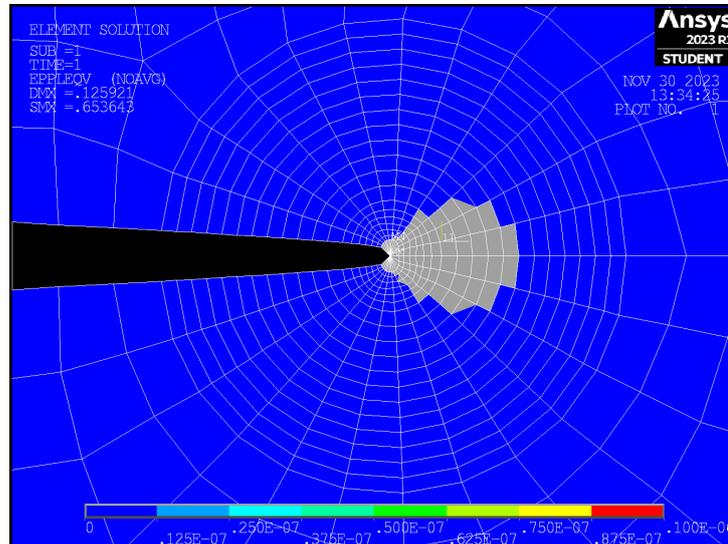


Abbildung 21: Plastifizierte Zone an der Risspitze bei $F = 400N$ im ESZ

In Abbildung 21 ist zu erkennen, dass die plastische Zone erst von der 13-ten Kontur vollständig umschlossen ist, die Änderung des J-Integrals in Abbildung 20 allerdings schon ab der achten Kontur gegen Null geht.

Sobald die Kontur die ganze plastische Zone umschließt, ist die Änderung des J-Integrals meistens nahe Null, wobei auch hier wieder vereinzelt Schwankungen auftreten.

Die Änderungen sind im Gesamten ab der dritten Kontur bei diesem Beispiel nur noch sehr gering. In diesem Versuch lag die maximale Abweichung von der dritten bis zur letzten Kontur bei unter einem Prozent.

3.3.2 Einfluss der plastischen Zone auf das J-Integral

Im folgenden wurde untersucht, wie sich die Größe der plastischen Zone des Materials auf das J-Integral auswirkt. Hierfür wurde das Modell, welches in Kapitel 3.1.1 beschrieben ist modifiziert und eine Schleife implementiert. Die Schleife variiert die Streckgrenze des Materials zwischen 200 und $1000MPa$ in $25MPa$ Schritten. Für jeden Schritt wurde das J-Integral bestimmt und die x-Koordinate des letzten plastifizierten Knotens des Ligamentes dokumentiert. Die x-Koordinate des Knotens entspricht der Größe der plastischen Zone. Das Modell wurde im ESZ (Dicke = 1) modelliert, da hier die plastische Zone deutlich größer ist und dadurch die Unterschiede leichter zu detektieren sind. Die Simulation wurde für verschiedene Kräfte und verschiedene Risslängen durchgeführt. Die Kraft variiert zwischen $200N$ und $800N$ und die Risslänge zwischen 10 und $20mm$.

In Abbildung 22 sind die Ergebnisse der Simulation dargestellt. Auf der Abszisse ist das J-Integral und auf der Ordinate die plastische Zone abgetragen. Die Datenpunkte auf der Abszisse entsprechen der linear elastischen Lösung. Da sich auf Grund der Diskretisierung des Modells nicht bei jeder Streckgrenzenänderung auch die Größe der plastischen Zone ändert, liegen einige

Punkte übereinander.

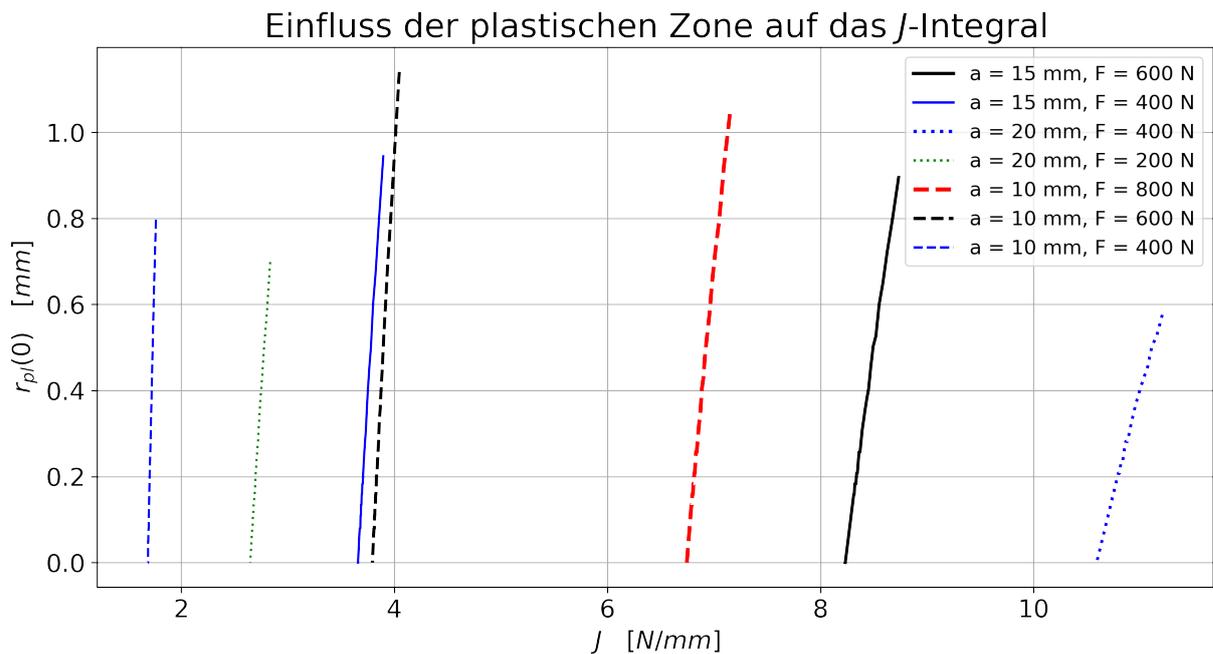


Abbildung 22: Einfluss der plastischen Zone auf das J-Integral

Es ist zu erkennen, dass die Größe der plastischen Zone mit abnehmender Streckgrenze steigt. Das J-Integral wird größer je niedriger die Streckgrenze ist, da der Materialwiderstand kleiner wird.

Um eine bessere Einschätzung der Abweichung von der linear elastischen zur elasto plastischen Lösung treffen zu können, wurde in Abbildung 23 noch einmal die Abweichung der J-Integrals im Vergleich zur elastischen Lösung über die Größe der plastischen Zone aufgetragen.

Wenn eine Abweichung von 5% als zulässig definiert wird (horizontale Gerade in Abbildung 23) so ist deutlich zu erkennen, dass die Größe der plastischen Zone für kleine Abweichungen des J-Integrals primär von der Risslänge definiert wird. Je länger der Riss, desto kleiner muss die plastische Zone sein, damit eine linear elastische Rechnung ausreichend wäre und die Abweichung vom J-Integral klein ist.

In dieser Simulation lag die zulässige Größe der plastischen Zone zwischen $0,509\text{mm}$ bei $a = 20\text{mm}$ und $0,891\text{mm}$ bei $a = 10\text{mm}$. Je kleiner der Riss ist, desto dichter liegen die linear elastischen und die elasto plastischen Lösungen aneinander. Dies lässt sich auch in Abbildung 22 ablesen. Die gepunkteten Graphen (für $a = 20\text{mm}$) weisen eine deutlich stärkere Krümmung als die gestrichelten Graphen (für $a = 10\text{mm}$) auf.

Das Spannungsfeld um die Rissspitze ändert sich signifikant, wenn der Materialwiderstand durch eine verringerte Streckgrenze abnimmt. In Abbildung 24 sind die Vergleichsspannungen nach von Mises dargestellt.

Das J-Integral stellt allerdings ein Maß der Belastung der Rissspitze dar. Die Spannungen sind zwar auf Grund der Verfestigung unterschiedlich, die Materialbelastung im Gesamten aber auf Grund der identischen Kraft gleich. Durch die Änderung der Streckgrenze wird der Materialwiderstand verändert. Hierdurch kann die Größe der plastischen Zone variiert werden. Das Material an sich ist nicht mehr das gleiche, allerdings betrachtet das J-Integral nur die Materi-

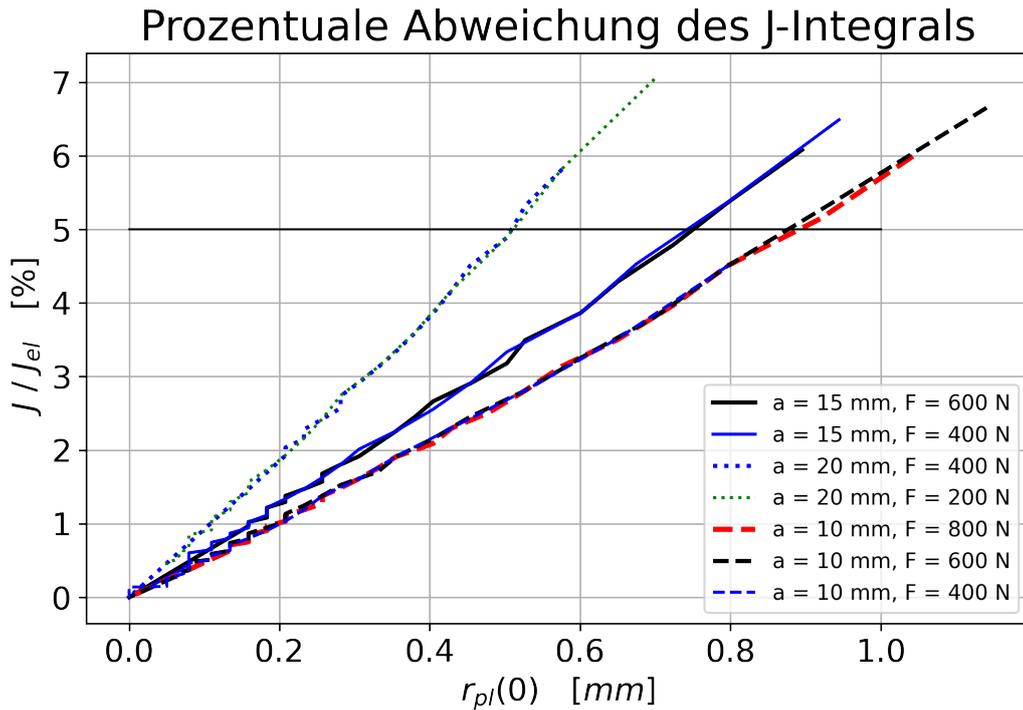


Abbildung 23: Einfluss der plastischen Zone auf das J-Integral

albelastung und nicht den Materialwiderstand. Deshalb sollte der Vergleich der J-Integrale trotz Materialänderung zulässig sein.

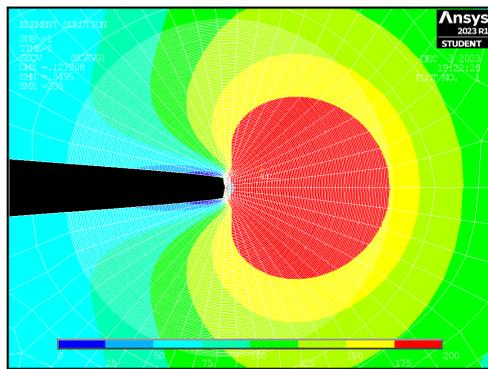
Bei dem Vergleich der J-Integrale müssen noch die plastischen Dehnungen erwähnt werden. Die plastischen Dehnungen sind teilweise sehr hoch und physikalisch nicht mehr plausibel. Die Netzauftrennung ist für die elastol-plastische Berechnung nicht möglich, weshalb kein Abbruch der plastischen Dehnung möglich ist und der Materialwiderstand bei zu großen Belastungen nicht mehr in die Realität übertragbar ist.

3.3.3 Form und Größe der plastischen Zone

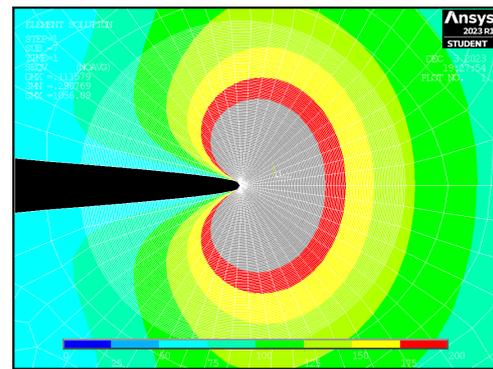
In Kapitel 2.3.1 wurde beschrieben, wie in erster Näherung für das Kleinbereichsfließen die Größe und Form der plastischen Zone aussehen könnte. Zur Erinnerung, das Kleinbereichsfließen ist auf einen Bereich beschränkt, der deutlich kleiner als $0,1a$ ist.

Für die Untersuchung der plastischen Zone wurde das Modell verwendet, welches in Kapitel 3.1.1 beschrieben wurde. Die Streckgrenze für das Modell beträgt 200MPa , die Querkontraktionszahl $0,3$ und die Risslänge 15mm . Das Modell wurde mit einer Gesamtlast von 300N belastet. Nach Gleichung (2.46) und (2.50) lässt sich die Grenze der plastischen Zone berechnen. In Abbildung 25 ist die plastische Zone nach der analytischen Lösung und nach der FEM-Lösung dargestellt. Die schwarze durchgezogene Linie entspricht der analytischen Lösung. Für die FEM-Lösung wurden die plastischen Dehnungen nach von Mises am undeformierten Modell dargestellt. Die blauen Elemente weisen eine Dehnung auf, welche kleiner als $1 \cdot 10^{-6}$ ist. Die Dehnung in den grauen Elementen ist größer als $1 \cdot 10^{-4}$. Der graue Bereich entspricht demnach der plastischen Zone.

In Abbildung 25a ist die plastische Zone für den ESZ und in Abbildung 25b die plastische Zone für den EVZ abgebildet. Um die plastischen Zonen analytisch zu berechnen, wird die jeweilige Spannungsintensität des vorliegenden Zustandes benötigt. Diese wurde mittels der FEM-Lösung

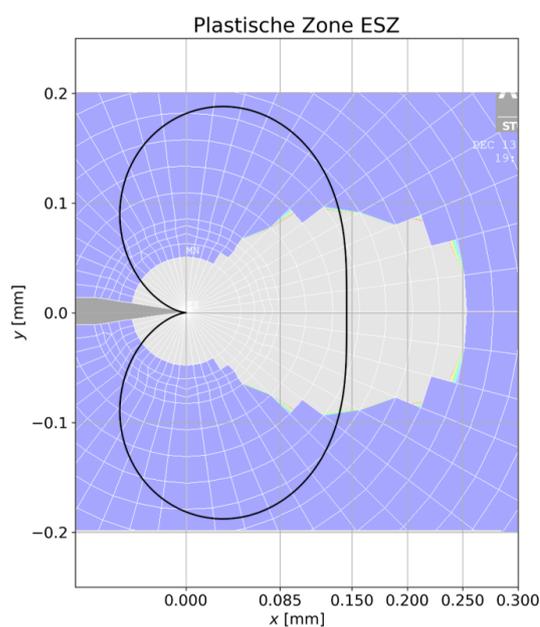


(a) $R_e = 200\text{MPa}, F = 450\text{N}$

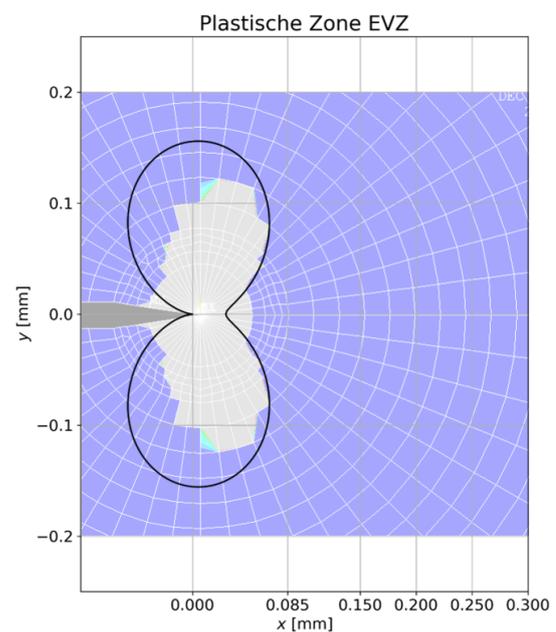


(b) $R_e = 1000\text{MPa}, F = 450\text{N}$

Abbildung 24: Vergleichsspannung nach von Mises an der Risspitze



(a) ESZ



(b) EVZ

Abbildung 25: Vergleich der plastischen Zonen vom Kleinbereichsfließen analytisch und FEM

aus dem J-Integral bestimmt und nach Gleichung 3.1 in K_{JI} umgerechnet. Es folgen die Spannungsintensitäten von $K_{JI}^{ESZ} = 191,3\text{MPa}\sqrt{\text{mm}}$ und $K_{JI}^{EVZ} = 216,8\text{MPa}\sqrt{\text{mm}}$.

Die Abbildung 25 zeigt deutlich, dass die Größen und Formen der plastischen Zonen nicht übereinstimmen.

Für den ESZ ist die plastische Zone im Ligament in der Analytik zu klein. Auch die Risslängenkorrektur nach Irwin wäre nicht ausreichend, um die Größe der plastischen Zone hinreichend zu korrigieren. Die Form der FEM-Lösung der plastischen Zone weicht von der analytischen Beschreibung stark ab. Hier bestätigt die FEM-Lösung eher den Ansatz nach dem Dugdale-Modell, dass das Material in einem Streifen um das Ligament herum plastifiziert (siehe [1, S.88]).

Die plastische Zone sollte nach der Analytik nierenförmig aussehen. Die plastische Zone gibt dies in der FEM-Lösung nicht wieder, allerdings weist das Spannungsfeld, weit von der Risspitze entfernt, wieder die Nierenform auf (vgl. Abbildung 24). Dies ist auch plausibel, da die Analytik hier die Verfestigung des Materials nicht berücksichtigt und die plastifizierte Zone nur vom

Überschreiten der Fließgrenze bestimmt wird.

Die analytische Lösung für den EVZ liegt dichter an der FEM-Lösung. Die FEM-Lösung weist eine größere plastische Zone im Ligament auf. Dies liegt vermutlich an der Vernetzung, da die erste Reihe der Elemente um die Rissspitze immer plastifiziert, da dort die Singularität vorliegt. Die Form der plastischen Zone weist leichte Unterschiede auf. Die Gestalt der Fläche mit der mittigen Einschnürung ist in beiden Lösungen vorhanden. Die plastische Zone der FEM-Lösung ist stärker zum Ligament hin geneigt als es die analytische Lösung vorhersagen würde.

Die FEM-Lösungen liegen beide im Bereich des Kleinbereichsfließens und sollten von der Analytik nach Gleichung (2.46) und (2.50) beschreiben werden können. Die FEM-Rechnung weicht hier von der analytischen Lösung ab. Dies könnte an der Vernetzung liegen oder an den Dimensionen des Modells. Das Modell ist im Verhältnis zu der Größe des Risses sehr klein. Mit einer höheren Streckgrenze und kleineren plastischen Zonen ändern sich die Formen der plastischen Zone nicht signifikant.

3.4 Berechnung des CT-Proben-Modells

Um die verschiedenen Methoden zu vergleichen, wurden diese in den folgenden Kapiteln exemplarisch durchgerechnet.

- Linear elastische Betrachtung
 - analytische Berechnung
 - analytische Berechnung mit Korrektur nach Irwin für den ESZ und den EVZ
 - FEM-Berechnung in APDL
 - FEM-Berechnung in der Workbench
- elasto plastische Betrachtung
 - FAD mit FKM
 - FAD mit FEM

Das Modell für die FEM-Berechnung wurde in Kapitel 3.1.1 beschrieben. In Quelle [11] sind Versuche zur Änderung der Bruchzähigkeiten unter Korrosionseinfluss durchgeführt worden. In dem Paper sind unter anderem auch die Bruchzähigkeiten von den nicht korrodierten Proben dokumentiert. Diese Versuche dienen als Referenzwert für die numerische und analytische Berechnung des Modells.

Der Versuch zeigte beim Material Al6061T6 mit einer Streckgrenze von $R_e = 294MPa$ eine Bruchzähigkeit von $K_{IC} = 714,67 MPa\sqrt{mm}$ [11, Tab.4]. In [11, Fig.3] lässt sich ablesen, dass das Material ungefähr eine Zugfestigkeit von $330MPa$ aufweist. Des Weiteren zeigt das Diagramm eine Bruchdehnung von 0,55%. Typischerweise sollte die Bruchdehnung bei der Legierung um den Faktor 10 bis 20 größer sein. Nach [12] hat Al6061T6 ein E-Modul von $E = 68.900MPa$ und eine Querkontraktionszahl von $\nu = 0,33$. Die Zugfestigkeit und die Streckgrenze liegen bei dem Material dicht beieinander. Die CT-Probe im Versuch hat eine Risslänge von (der linken Kante bis zur Rissspitze) $a = 19,05mm$. Die Rissinitiierung ist bei einer Kraft von $F = 4.739N$ aufgetreten.

Die Risslänge a ist für die CT-Probe als Länge von Rissspitze bis Kraftwirkungslinie der angreifenden Kraft definiert. Im Allgemeinen bezeichnet a allerdings die gesamte Risslänge. Die Größe c bezeichnet den Abstand von der linken Kante des Modells bis zur Wirkungslinie der angreifenden Kraft. Es wird vereinfacht angenommen, dass die Kräfte im Mittelpunkt des Kreises angreifen und nicht auf dem Rand.

Für eine Vergleichbarkeit der linear elastischen und elasto plastischen Ergebnisse lässt sich nach [7, S.17] das J-Integral in einen Spannungsintensitätsfaktor umrechnen. Der Spannungsintensitätsfaktor aus der elasto plastischen Rechnung erhält den Index J .

$$J = \eta R_e \delta = \frac{K_{JI}^2}{E'} \quad \text{mit } E' = \begin{cases} E & \text{für } ESZ \\ \frac{E}{1-\nu^2} & \text{für } EVZ \end{cases} \quad (3.1)$$

Je größer die plastische Zone, desto größer ist der Unterschied zwischen K_I und K_{JI} . η ist eine Konstante und hängt vom Spannungszustand, der Geometrie und dem Werkstoff ab. Nach [7, S.54] darf $\eta = 1,5$ angenommen werden.

Die Bruchzähigkeit der CT-Probe lässt sich nach [13, S.149] und [11] durch

$$K_I = \frac{F}{t\sqrt{w}} \cdot \frac{2 + \frac{a}{w}}{\left(1 - \frac{a}{w}\right)^{(3/2)}} \left[0,886 + 4,64\left(\frac{a}{w}\right) - 13,32\left(\frac{a}{w}\right)^2 + 14,72\left(\frac{a}{w}\right)^3 - 5,6\left(\frac{a}{w}\right)^4 \right] \quad (3.2)$$

bestimmen. Diese Gleichung ist eigentlich auf den Bereich $(w - a) \geq 2,5\left(\frac{K_{IC}}{R_e}\right)^2$ beschränkt. Diese Bedingung ist hier nicht erfüllt, da $(w - a) = 12,7\text{mm} < 2,5\left(\frac{K_{IC}}{R_e}\right)^2 = 14,8\text{mm}$. Da in [11] allerdings diese Formel zur Bestimmung von K_{IC} verwendet wurde, wird diese hier dennoch verwendet. Es folgt $K_{I,CT\text{-Probe}} = 715.16 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$.

3.4.1 Linear elastische Betrachtung

Analytisch liegen nur die Spannungsintensitätsfaktoren für reinen Zug oder reine Biegung vor. In dem Modell liegt allerdings durch die exzentrische Kraft eine Normal- und eine Biegespannung vor. Die Risslänge a entspricht hierbei der gesamten Risslänge. Sie geht von der linken Kante bis zu Rissspitze und die Länge c geht von der linken Kante bis zur Kraftwirkungslinie. Die Nennspannungen lassen sich nach Gleichung (3.3) und (3.4) bestimmen.

$$\sigma_{N,Z} = \frac{F}{b \cdot t} \quad (3.3)$$

$$\sigma_{N,B} = \frac{F \cdot \left(\frac{b}{2} - c\right)}{\frac{tb^2}{6}} \quad (3.4)$$

Es folgt $\sigma_{N,Z} = 11,75\text{MPa}$ und $\sigma_{N,B} = 21,15\text{MPa}$. Anschließend werden nach Kapitel 2.2.2 Gleichung (2.39) bis Gleichung (2.42) die Spannungsintensitätsfaktoren für Modus I bestimmt. Als Spannung σ werden die jeweiligen Nennspannungen eingesetzt. Die Spannungsintensitäten für reine Zugbelastung ergeben $K_{I,Zug} = 310.7 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$ und für reine Biegung folgt $K_{I,Biegung} = 267.1 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$. Nach dem Superpositionsprinzip lassen sich die Spannungsintensitätsfaktoren addieren. Die Gesamtbelastung der Rissspitze folgt zu $K_I = 577.7 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$.

Dieses Ergebnis ist hier nur bedingt gültig, da die Formeln für lange angerissene Bauteile gültig

sind, bei denen der Riss im Vergleich zu den Bauteilabmessungen klein ist. Des Weiteren wurde die Plastifizierung des Materials nicht berücksichtigt.

Um die Risslängenkorrektur nach Irwin (siehe Kapitel 2.3.2) anzuwenden, wird die Größe der plastischen Zone mit Gleichung (2.56) berechnet. Für den ESZ folgt die Größe der plastischen Zone für die Zugbelastung $r_{pl,Zug}^{ESZ} = 0.131mm$ und für die Biegebelastung $r_{pl,Biegung}^{ESZ} = 0.178mm$. Für den EVZ folgt $r_{pl,Zug}^{EVZ} = 0.015mm$ und $r_{pl,Biegung}^{EVZ} = 0.021mm$. Der Riss wird um die Größe der plastischen Zone erweitert. Da durch die Überlagerung der beiden Zustände zwei Risslängenerweiterungen vorhanden sind, wird die konservative Annahme getroffen, dass auch diese addiert werden. Die effektive Risslänge beträgt dann für den ESZ $a_{eff}^{ESZ} = 19,359mm$ und für den EVZ $a_{eff}^{EVZ} = 19,086mm$. Die Spannungsintensitätsfaktoren für die effektive Risslänge werden nach dem gleichen Schema mit wie oben bestimmt, nur dass anstelle von a a_{eff} eingesetzt wird.

Es folgen die Spannungsintensitäten $K_{I,eff,Zug} = 385.4 MPa\sqrt{mm}$ und $K_{I,eff,Biegung} = 322.5 MPa\sqrt{mm}$ für den ESZ und $K_{I,eff,Zug} = 369,6 MPa\sqrt{mm}$ und $K_{I,eff,Biegung} = 312,0 MPa\sqrt{mm}$ für den EVZ. Diese werden wieder addiert und es ergeben sich die Spannungsintensitätsfaktoren von $K_{I,eff} = 707,95 MPa\sqrt{mm}$ für den ESZ und $K_{I,eff} = 981,6 MPa\sqrt{mm}$ für den EVZ.

In der linear elastischen FEM-Berechnung für den ESZ in APDL ergibt sich der Spannungsintensitätsfaktor von $K_I = 712.77MPa\sqrt{mm}$ und ein J-Integral von $7.3745\frac{N}{mm}$. Die Auslastung der Rissspitze beträgt 99,7%. Für den EVZ wird ebenfalls ein Spannungsintensitätsfaktor von $K_I = 712.77MPa\sqrt{mm}$ errechnet. Die J-Integrale hingegen unterscheiden sich. Das J-Integral für dem EVZ beträgt $J = 6.7108\frac{N}{mm}$. Die Umrechnung zwischen J und K_I nach Gleichung 3.1 weicht hier um 2% von der APDL-Berechnung ab.

In der Workbench wurde ein Volumenmodell berechnet und kein Flächenmodell, wie in den obigen Betrachtungen. Die Ergebnisse sind deshalb nur bedingt vergleichbar. Bei der Auswertung wird ein Pfad in die Rissspitze in positive z-Richtung gelegt. Für jeden Knoten auf dem Pfad wird die Spannungsintensität über 6 Konturen bestimmt. In Abbildung 26 ist das Diagramm abgebildet. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Spannungsintensität in der Mitte des Modells zunimmt. Die Maximale Spannungsintensität beträgt $K_I = 769,19MPa\sqrt{mm}$.

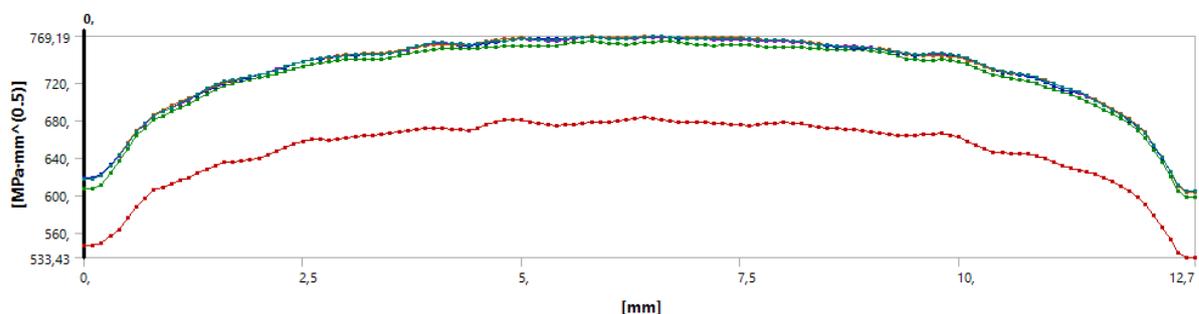


Abbildung 26: K_I -Verlauf über den Pfad des CT-Proben-Modells in der Workbench

Die Auswertung des J-Integrals wird analog durchgeführt. Auch hierfür lässt sich ein Diagramm erstellen. Dieses weist allerdings den gleichen Verlauf auf, weshalb es hier weggelassen wurde. Das maximale J-Integral liegt wieder in der Mitte des Pfades und beträgt $J = 7,6752\frac{N}{mm}$. Das J-Integral und die Spannungsintensität lassen sich nach 3.1 mit dem EVZ ineinander umrechnen.

3.4.2 Elasto plastische Betrachtung

Nach [7, S.220] (der FKM-Richtlinie) wird die Spannungsintensität durch

$$K = (F_m \sigma_m + F_b \sigma_b) \sqrt{\pi a} \quad (3.5)$$

mit

$$F_m = 0,265(1 - \lambda)^4 + \frac{0,857 + 0,265\lambda}{(1 - \lambda)^{3/2}} \quad (3.6)$$

und

$$F_b = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda} \tan\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)} \left[0,923 + 0,199 \left(1 - \sin\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)\right)^4 \right] \sec\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) \quad (3.7)$$

berechnet. λ ist definiert als

$$\lambda = \frac{a}{t} \quad (3.8)$$

wobei a der Risstiefe der angerissenen Scheibe entspricht und t der Breite der Scheibe. Für $0 \leq \lambda \leq 1$ ist der Fehler in F_m unter 2% und der Fehler F_b unter 3%. Die Formeln sind nur für den Bereich $0 \leq \lambda \leq 1$ gültig.

Der Plastifizierungsgrad des Ligamentes wird für den Gültigkeitsbereich $0 \leq \lambda \leq 1$ nach

$$L_r = \frac{\lambda\sigma_m + \frac{\sigma_b}{3} + \sqrt{(\lambda\sigma_m + \frac{\sigma_b}{3})^2 + (1 - \lambda)^2\sigma_m^2}}{(1 - \lambda)^2 R_e} \quad (3.9)$$

bestimmt.

Für das konkrete Modell erhält man eine Spannungsintensität von $K_I = 676.4MPa\sqrt{mm}$ und einen Plastifizierungsgrad von $L_r = 0.616$. Mit der Materialbruchzähigkeit von $K_{Ic} = 714.67MPa\sqrt{mm}$ folgt $K_r = \frac{K_I}{K_{Ic}} = 0.946$. Nach Gleichung (2.79) folgt die maximal zulässige Spannungsintensität für den vorliegenden Plastifizierungsgrad zu $K_{I,zul} = 653.7MPa\sqrt{mm}$. Das Bauteil würde nach der FKM-Richtlinie der Belastung nicht standhalten. Dieses Ergebnis ist zu erwarten, da das Material bei der vorgegeben Belastung versagen muss. In Abbildung 27 ist die Grenzkurve der FKM-Richtlinie nach Kapitel 2.4.3 gestrichelt dargestellt. Der Stern ist der Arbeitspunkt nach der FKM-Richtlinie. Es ist zu erkennen, dass der Arbeitspunkt sehr dicht an der Grenzkurve liegt und die FKM-Richtlinie das Materialverhalten im Versuch gut beschreibt.

Nach der FEM-Berechnung beträgt das J-Integral $J = 8,6263 \frac{N}{mm}$ für die elasto plastische Rechnung im ESZ. Nach Gleichung (3.1) (ESZ) folgt $K_{JI} = 770,9MPa\sqrt{mm}$. Die plastische Grenzlast für das Modell beträgt $F_L = 8.450N$. Der Plastifizierungsgrad beträgt $S_r = 0,561$ und die normierte Spannungsintensität $K_r = 1,076$. Die zulässige Grenzbelastung der Risspitze beträgt nach dem Fad-Diagramm für den Arbeitspunkt $K_{zul} = 662,2MPa\sqrt{mm}$. In Abbildung 27 ist der Arbeitspunkt nach der FEM-Berechnung für den ESZ als Dreieck dargestellt und die analytische Grenzkurve als durchgezogene Linie.

Für den EVZ wird ein J-Integral von $J = 6,9219 \frac{N}{mm}$ berechnet und ist somit deutlich kleiner als das J-Integrals des ESZ. Nach Gleichung (3.1) folgt $K_{JI} = 731,6MPa\sqrt{mm}$. Die vollplastische Traglast ist bei $F_L = 12.000N$ erreicht. Die Auslastung des Ligamentes beträgt somit 39,5% und

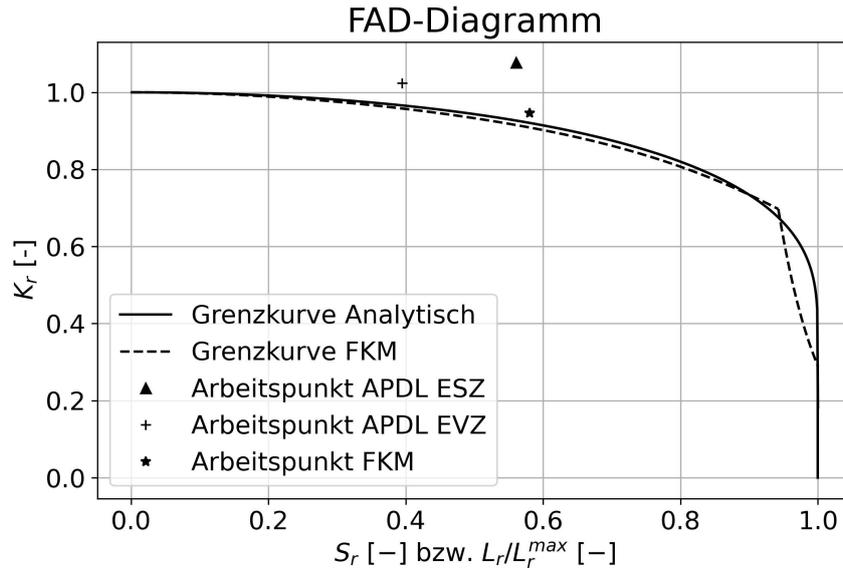


Abbildung 27: Einordnung der Arbeitspunkte in das FAD-Diagramm

der Plastifizierungsgrad $S_r = 0,395$. Die zulässige Grenzbelastung nach dem FAD-Diagramm beträgt $K_{zul} = 690,4 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$. Die Auslastung der Risspitze folgt zu 106,0%. Auch bei der FEM-Berechnung ist das Bauteil überlastet. Hier allerdings deutlich stärker als in der FKM-Berechnung. Die FEM-Berechnung beschreibt das Werkstoffverhalten hier schlechter.

3.4.3 Gegenüberstellung der Ergebnisse

Die Ergebnisse zwischen der linear elastischen und elasto plastischen Rechnung weisen teilweise erhebliche Unterschiede auf. Bei einer Belastung von $F = 4.739 \text{ N}$ beginnt die Rissinitiierung und das Bauteil versagt.

Aus dem Versuch geht $K_I = 714,6 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$ hervor. Dies dient als Referenzwert für die Berechnungen. In Tabelle 5 sind die Ergebnisse der Berechnung aufgelistet. Für die EPBM wird aus J K_{JI} nach Gleichung 3.1 bestimmt. Die Auswertung und der Vergleich erfolgen nur über die Spannungsintensitäten, da kein J_{Ic} als Vergleichswert vorhanden ist. Eine Bestimmung von J_{Ic} durch K_{Ic} mittels Gleichung (3.1) ist nicht zweckmäßig, da sich die Auslastungen dann immer die Potenz 0,5 voneinander unterscheiden.

$$J_{Ic} = \frac{K_{Ic}^2}{E} \text{ und } K_{JI} = \sqrt{EJ} \implies a_K = \frac{K_{JI}}{K_{Ic}} = \frac{\sqrt{EJ}}{\sqrt{EJ_{Ic}}} = \sqrt{\frac{J}{J_{Ic}}} \quad (3.10)$$

Bei der rein linear elastischen Berechnung weichen die Spannungsintensitäten um ca. 19,8% von der im Versuch bestimmten Spannungsintensität ab. Eine linear elastische Rechnung würde also einen deutlich zu großen Materialwiderstand bestimmen.

Mit der linear elastischen Rechnung und der Risslängenkorrektur nach Irwin werden die Spannungsintensitäten sehr viel besser abgeschätzt. Hier ergeben sich Abweichungen von 1 bis 5%. Die FEM-Berechnung in APDL ergibt ebenfalls eine sehr gute Übereinstimmung mit dem Spannungsintensitätsfaktor aus dem Versuch. Die Abweichung beträgt hier lediglich 0,3%. Die Spannungsintensitätsfaktoren des ESZ und des EVZ stimmen in der APDL-Berechnung überein, die J-Integrale allerdings nicht. Nach Gleichung (3.1) lassen sich die Größen des ESZ ineinander

Methode	Vorhandene Belastung der Risspitze			Auslastung des Ligaments [%]
	$K_I [MPa\sqrt{mm}]$	$J [\frac{N}{mm}]$	Auslastung [%]	
Versuch	714,6	-	100	-
Analytisch LE	577,7	-	80,8	-
Analytisch LE mit Korrektur nach Irwin ESZ	708,0	-	99,1	-
Analytisch LE mit Korrektur nach Irwin EVZ	681,6	-	95,3	-
APDL LE ESZ	712,77	7,3745	99,7	-
APDL LE EVZ	712,77	6,7108	99,7	-
Workbench LE	769,19	7,6752	107,6	-
FKM EP	676,4	-	103,5	58,0
APDL EP ESZ	770,95	8,6265	116,4	56,1
APDL EP EVZ	731,57	6,9219	106,0	39,5

Tabelle 5: Gegenüberstellung der Ergebnisse der verschiedenen Berechnungsmethoden

umrechnen. Für den EVZ weichen die Größen in der Umrechnung um ca. 2% von der APDL Lösung ab.

Das Volumenmodell in der Workbench führt zu einer deutlichen Überschätzung der Spannungsintensität. Hier liegen die maximalen Auslastungen bei 107,6% und 116,2%. Die Umrechnung zwischen K_I und dem J-Integral erfolgt über den EVZ und nicht über den ESZ wie beim Modell in APDL. Der Unterschied zwischen Modellen liegt wahrscheinlich in der Art der Modellierung, da sich ein 2D- und ein 3D-Modell nicht direkt vergleichen lassen.

Die elasto plastische Betrachtung nach der FKM-Richtlinie stimmt ebenfalls sehr gut dem Versuch überein. Hier wird zusätzlich noch eine Aussage über die Belastung des Ligamentes getroffen. Da keine Messdaten zur Plastifizierung des Ligamentes vorliegen, kann die Auslastung nicht verifiziert oder verglichen werden. Die Auslastungen in Tabelle 5 beziehen sich, bei den elasto plastischen Berechnungen, auf die zulässige Bruchzähigkeit für den jeweiligen Plastifizierungsgrad.

Bei der elasto plastischen Berechnung nach der FKM-Richtlinie beträgt die zulässige Bruchzähigkeit für den Plastifizierungsgrad von $L_r = 0,616$ bei $K_{I,zul} = 653,74MPa\sqrt{mm}$. Mit der vorhandenen Spannungsintensität von $K_I = 676,4MPa\sqrt{mm}$ unterschätzt die FKM-Richtlinie den Werkstoffwiderstand leicht, was bei konservativen Annahmen vorteilhaft ist.

Die FEM-Berechnung für den ESZ mit linear elastischem ideal plastischem Materialmodell weicht in den Ergebnissen deutlich von dem Versuch ab. Nach der analytischen Lösung für

das FAD-Diagramm, liegt die zulässige Spannungsintensität für den Plastifizierungsgrad von $S_r = 0,561$ bei $K_{I,zul} = 662,25MPa\sqrt{mm}$. Mit der vorhandenen Spannungsintensität von $K_{JI} = 770,95MPa\sqrt{mm}$ folgt eine Auslastung der Rissspitze von 116,4%. Allerdings ist auch hier die Unterschätzung des Werkstoffwiderstandes von Vorteil, wenn konservative Annahmen getroffen werden. Die Größe der plastischen Zone beträgt hier 1,605mm und die Risslänge beträgt 19,05mm nach Kapitel 3.3.2 bestätigt sich auch hier die Annahme, dass das J-Integral von der linear elastischen zur elasto plastischen Rechnung um mehr als 5% abweicht.

Für den EVZ ist die Belastung des Ligamentes und der Rissspitze deutlich geringer als für den ESZ.

Im Gesamten ist die FKM-Richtlinie die für die praktische Anwendung beste Berechnung, da diese sehr dicht an der im Versuch gemessene Bruchzähigkeit heran kommt. Des Weiteren trifft die FKM-Richtlinie Aussagen nicht nur über die Spannungsintensität an der Rissspitze, sondern auch über die Ligamentplastifizierung. Die FKM-Richtlinie ist darüber hinaus auch sehr einfach in der Anwendung und verursacht einen verhältnismäßig geringeren Aufwand im Vergleich zur FEM-Berechnung.

3.5 Modellierung der Scheibe mit mittigem Riss

In den folgenden beiden Unterpunkten wird zunächst das Modell der Scheibe mit mittigem Riss vorgestellt und anschließend die Konvergenz des vorgestellten Modells belegt. Die Vor- und Nachteile der Modellierung in APDL sind in Kapitel 3.1 und Kapitel 3.2 dargelegt.

Die Scheibe wird auf der unteren Kante eingespannt und an der oberen Kante mit einer Zugkraft von $F = 300.000N$ belastet. Die Scheibe hat die Höhe $2h = 300mm$, die Breite $2b = 200mm$ und die Dicke $t = 10mm$. Der Riss liegt genau in der Mitte der Scheibe, senkrecht zur Belastungsrichtung. Der Riss hat die Länge $2a = 10mm$ und geht über die gesamte Dicke der Scheibe.

3.5.1 Beschreibung des Modells der Scheibe mit mittigem Riss in APDL

In Abbildung 28 ist das Netz der FEM-Berechnung mit den Randbedingungen dargestellt. Die Gesamtkraft wurde auf die einzelnen Knoten der oberen Kante aufgeteilt. Die Verschiebungen der Knoten der unteren Kante wurde in x- und y- Richtung gesperrt. Die einzelnen Dimensionen sind aus Kapitel 3.5 zu entnehmen. Alle Einzelheiten können aus dem Code im Anhang B entnommen werden.

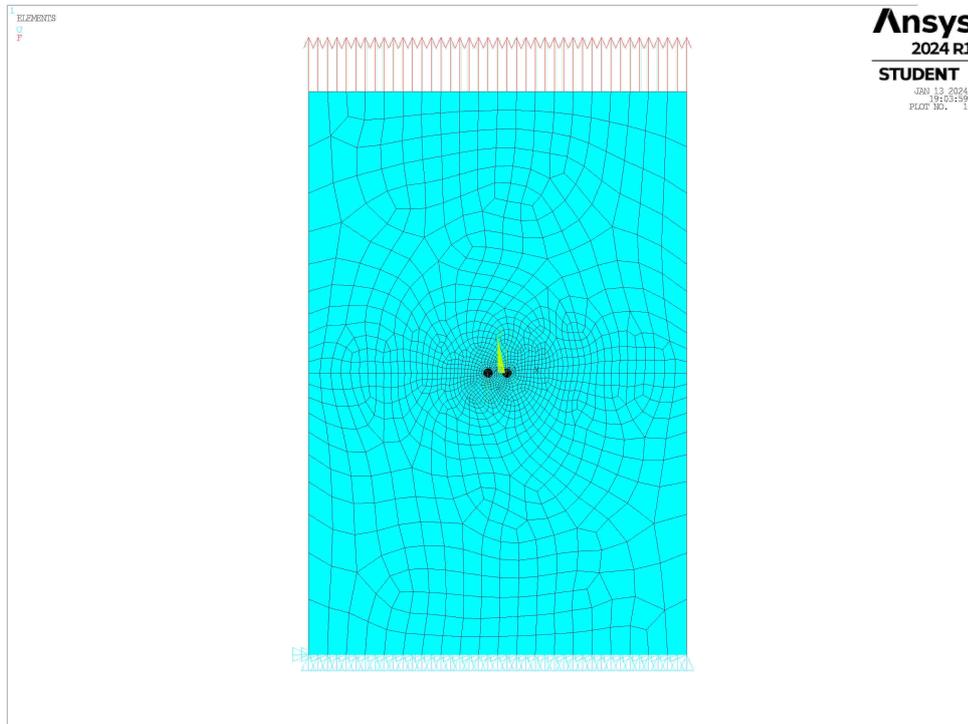


Abbildung 28: Modell der Scheibe mit mittigem Riss in APDL

Der Riss hat eine Höhe von $0,01\text{mm}$. Die Enden des Risses sind mit den Rissspitzenelementen vernetzt. Die Bereiche um die Rissspitzen wurden außerdem mit konzentrischen Kreisen vernetzt, damit das J-Integral bestimmt werden kann. Zur Bestimmung des J-Integrals wurden außerdem noch lokale Koordinatensysteme in die Rissspitzen gelegt. Die lokale 1-Achse entspricht der Rissweiterungsrichtung.

Das Ligament wurde als Linie für die Vernetzung vordefiniert, um es angemessen auswerten zu können.

3.5.2 Konvergenz des Modells der Scheibe mit mittigem Riss in APDL

Aufgrund der Linienlast an der oberen Kante und der Einspannung an der unteren Kante liegen in dem Modell Singularitäten vor. Aufgrund dieser Singularitäten können die Spannungen und Verschiebungen in den Ecken des Modells nicht konvergieren. Um dieses Problem zu umgehen, wurden diese Stellen von der Betrachtung der Konvergenz ausgeschlossen. Die Vergleichsspannung und die Verschiebungen in Tabelle 7 und die Abweichungen in Tabelle 8 beziehen sich nur auf die Spannungen am äußersten Punkt des linken Ligamentes.

In den Rissspitzen liegen ebenfalls Singularitäten vor.

Die Gesamtbelastungen waren immer identisch, allerdings ist das Ergebnis von der Anzahl der Knoten n_F abhängig, auf welche die Gesamtkraft verteilt wurde.

In Tabelle 6 sind die Modellversionen aufgelistet. Die Globale Elementgröße bezieht sich auf die Abweichung zum Ausgangsmodell.

Modell	Ausgangsmodell (A)	(B)	(C)	(D)	(E)	(F)
Globale Elementgröße [-]	1	1	0,5	0,5	0,5	1
EKL1 [mm]	0,1	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
EKL2 [mm]	0,5	0,5	0,5	0,5	0,25	0,25
n_F [-]	41	41	41	81	41	41

Tabelle 6: Modellversionen für die Konvergenzstudie des Scheiben-Modells mit mittigem Riss

	(A)	(B)	(C)	(D)	(E)	(F)
Anzahl Elemente [-]	2422	2566	4627	5186	4730	2669
Anzahl Knoten [-]	7386	7830	14119	15816	14382	8093
Maximale Verschiebung (Vec Sum) [mm]	0,30278	0,30278	0,30289	0,30297	0,30289	0,30278
Maximale Vergleichsspannung (von Mises) [MPa]	130,1	130,1	130,1	129,83	130,1	130,1
J [$\frac{N}{mm}$]	5.0135	5.0171	5.0167	5.0432	5.0107	5.0172

Tabelle 7: Konvergenzstudie des Modells der Scheibe mit mittigem Riss in APDL, absolute Größen

	Abweichung (A) (B) [%]	Abweichung (A) (C) [%]	Abweichung (A) (D) [%]	Abweichung (A) (E) [%]	Abweichung (A) (F) [%]
Maximale Verschiebung (Vec Sum)	0,000	0,036	0,063	0,036	0,000
Maximale Vergleichsspannung (von Mises)	0.000	0.000	0.208	0.000	0.000
J	0,072	0,064	0,592	0,056	0,074

Tabelle 8: Konvergenzstudie des Modells der Scheibe mit mittigem Riss in APDL, relative Abweichung

In den Tabellen 7 und 8 ist deutlich zu erkennen, dass die maximale Spannung am linken Ende des Ligamentes netzunabhängig ist und sich weder durch Änderung von n_F noch durch die Änderung der Elementkantenlänge ändert. Die Rissspitzenbelastung ist ebenfalls konvergent, da ihre Abweichungen bei verschiedenen Rissspitzenkonfigurationen sehr klein sind (vgl. Tabelle 8). Es zeigt sich, dass die Änderung in der Netzverfeinerung der Rissspitze nur Auswirkungen auf die Rissspitzenbelastung haben und die Änderungen im gesamten Netz nur Auswirkungen auf die Spannungen in der Scheibe haben.

3.5.3 Beschreibung des Modells der Scheibe mit mittigem Riss in der Workbench

Das Modell wurde in der Workbench als Volumenmodell erstellt. Der Körper wurde wieder ohne Riss modelliert und der Riss nachträglich durch ein Flächenmodell eingebracht. Das lokale Koordinatensystem für die Berechnung der Rissspitzenbelastung wurde in die Mitte der Fläche gelegt. Die Box, welche den Bereich der Netzverfeinerung eingrenzt, ist würfelförmig und hat eine Kantenlänge von 20mm . Die EKL1 um die Rissspitze hat eine Kantenlänge von $0,3\text{mm}$, die Wachstumsrate der Elementkantenlängen beträgt $1,2$. Das globale Netz hat eine Elementkantenlänge von 15mm . In Abbildung 29 ist das Netz dargestellt.

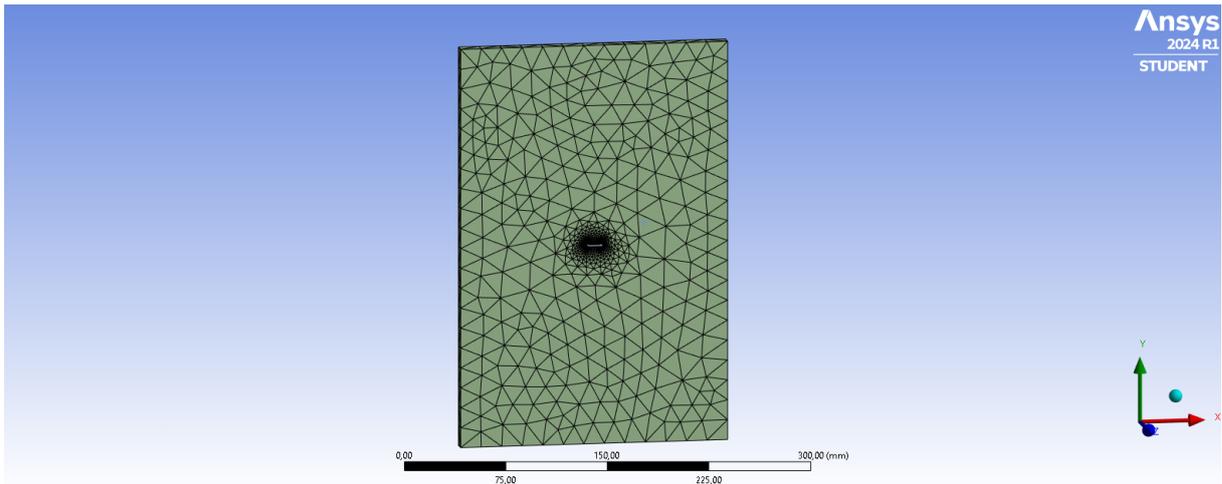


Abbildung 29: Netz der Scheibe mit mittigem Riss als Volumenmodell in der Workbench

Die Dimensionen sind aus Kapitel 3.5 zu entnehmen. Die Lagerung erfolgt bei dem Modell über die Einspannung an der unteren Fläche. Die Kraft wurde auf der oberen Fläche als Flächenlast aufgebracht.

3.5.4 Konvergenz des Modells der Scheibe mit mittigem Riss in der Workbench

Eine automatische Konvergenz ist in rissbehafteten Modellen nicht möglich. Deshalb wurde das Netz händisch verfeinert. Aufgrund der Singularitäten in der Rissspitze und bei der Einspannung ist auch hier keine Konvergenz der Spannungen zu erwarten. Es wurden folgende Netzkonfiguration untersucht. Modell (A) ist hierbei das Ausgangsmodell.

- (A) globale Elementgröße = 15 mm ; Wachstumsrate = $1,2$; EKL1 = $0,3$
- (B) globale Elementgröße = 15 mm ; Wachstumsrate = $1,4$; EKL1 = $0,1$
- (C) globale Elementgröße = 15 mm ; Wachstumsrate = $1,4$; EKL1 = $0,3$
- (D) globale Elementgröße = 7 mm ; Wachstumsrate = $1,2$; EKL1 = $0,3$

In Tabelle 9 sind die Ergebnisse der Konvergenzstudie aufgelistet. Die Abweichungen beziehen sich auf das Ausgangsmodell (A).

	Absolute Größen				rel. Abweichung zu (A) in [%]		
	(A)	(B)	(C)	(D)	(A) (B)	(A) (C)	(A) (D)
Anzahl Elemente [-]	66203	71432	26501	89718	-	-	-
Anzahl Knoten [-]	45915	49489	17555	60152	-	-	-
Maximale Verschiebung (Vec Sum) [mm]	0,6508	0,9508	0,6508	0,651	0,001	0,000	0,072
Maximale Vergleichsspannung (von Mises) [MPa]	927,53	1482,6	941,01	717,05	60,843	1,453	22,693
K_I [$MPa\sqrt{mm}$]	641,99	642,39	641,45	640,65	0,062	0,084	0,209

Tabelle 9: Konvergenz des Scheibenmodells mit mittigem Riss in der Workbench

Es ist gut zu erkennen, dass genau wie im APDL-Modell die maximale Spannung von der Singularität in der Risspitze abhängig ist. Je kleiner die Kantenlängen der Elemente um die Risspitze, desto größer wird die maximale Spannung. Die maximale Spannung ist allerdings kein auswertbarer Parameter der Risspitze. In der Risspitze wird die Belastung über den Spannungsintensitätsfaktor K_I definiert. Die Spannungsintensität konvergiert, wie in Tabelle 9 deutlich zu erkennen ist. Die Verschiebungen konvergieren ebenfalls, weshalb dieses Modell als konvergent betrachtet werden kann.

3.6 Berechnung der Scheibe mit mittigem Riss

Im Folgenden sollen die einzelnen Berechnungsmethoden vorgestellt und im Anschluss verglichen werden. Zunächst wird die linear elastische Berechnung beschrieben und danach die elasto-plastische Berechnung. Die linear elastische Berechnung umfasst die analytische Berechnung, die Berechnung mit der Risslängenkorrektur nach Irwin und linear elastische APDL-Berechnung und die linear elastische Berechnung in der Workbench. Die elasto-plastische Berechnung umfasst die Analyse nach der FKM-Richtlinie und der elasto-plastischen APDL-Berechnung.

Das Modell ist symmetrisch, weshalb keine Biegespannung vorliegt. Die Ergebnisse für die Risspitze sind aufgrund der Symmetrie ebenfalls die gleichen und werden deshalb immer nur einmal aufgeführt.

Die Dimensionen des Modells sind aus Kapitel 3.5 übernommen. Die Materialparameter sind die gleichen wie bei dem CT-Proben-Modell in Kapitel 3.4. Die Streckgrenze beträgt $\sigma_F = R_e = 294MPa$, die Zugfestigkeit beträgt $R_m = 330MPa$, der E-Modul ist $E = 68.900MPa$ groß und die Querkontraktionszahl beträgt $\nu = 0,33$. Die Bruchzähigkeit beträgt $K_I = 714,67MPa\sqrt{mm}$. Mit der gegebenen Belastung von $F = 300.000N$ auf reinen Zug folgt nach

$$\sigma_n = \frac{F}{b t} \quad (3.11)$$

eine Spannung von $\sigma_n = 150MPa$. Mit dieser Spannung können die Spannungsintensitäten für die LEBM und die EPBM an der Rissspitze bestimmt werden.

3.6.1 Linear elastische Betrachtung

Nach [2, S.86] berechnet sich der Spannungsintensitätsfaktor durch

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} F\left(\frac{a}{b}\right) \quad (3.12)$$

mit dem Geometriefaktor

$$F_I = \frac{1 - 0,025(a/b)^2 + 0,06(a/b)^4}{\cos\left(\frac{\pi a}{2b}\right)} \quad (3.13)$$

Mit der Breite $b = 100mm$ und der Risslänge $a = 5mm$ folgt $F_I = 1.0015$ und somit $K_I = 594,5MPa\sqrt{mm}$ für die analytische Lösung.

Mit den Gleichungen nach Kapitel 2.3.2 werden die Größen der plastischen Zonen bestimmt. Für den ESZ folgt die Größe der plastischen Zone zu $r_{pl}^{ESZ} = 0.6508mm$. Die effektive Spannungsintensität beträgt $K_{I,eff}^{ESZ} = 632,00MPa\sqrt{mm}$. Für den EVZ folgt die Größe der plastischen Zone zu $r_{pl}^{EVZ} = 0.2169mm$. Die effektive Spannungsintensität beträgt $K_{I,eff}^{EVZ} = 607.26MPa\sqrt{mm}$.

Mit dem FEM-Modell mit dem ESZ, welches in APDL erstellt wurde, wurde der Spannungsintensitätsfaktor von $K_I = 600.3MPa\sqrt{mm}$ und ein J-Integral von $J = 5.2319\frac{N}{mm}$ bestimmt. Die Auslastung für die Spannungsintensität beträgt 84,00%. Die Auslastung für das J-Integral kann nicht bestimmt werden, da der Referenzwert aus dem Versuch nicht vorliegt. Eine Umrechnung nach Gleichung 3.1 ist nach der Argumentation in Kapitel 3.4 nicht zielführend. Das APDL-FEM-Modell im EVZ bestimmt einen Spannungsintensitätsfaktor von $K_I = 603.55MPa\sqrt{mm}$ und ist somit kleiner als der im ESZ. Die Auslastung des Modells beträgt 84.45%. Das J-Integral beträgt $J = 4.8127\frac{N}{mm}$ und ist kleiner als das des ESZ.

In der Workbench ist das Modell ein Volumenmodell und kein Flächenmodell, wodurch die Ergebnisse nur schlecht miteinander verglichen werden können. In Abbildung 30 ist der K_I -Verlauf über die rechte Rissspitze dargestellt. Der Maximalwert beträgt $K_I = 641.88MPa\sqrt{mm}$. Die Auslastung beträgt 89.81%. Der Verlauf des J-Integrals über die Rissspitze ist analog zu dem des Spannungsintensitätsfaktors. Der maximale Wert des J-Integrals liegt bei $J = 5.318\frac{N}{mm}$.

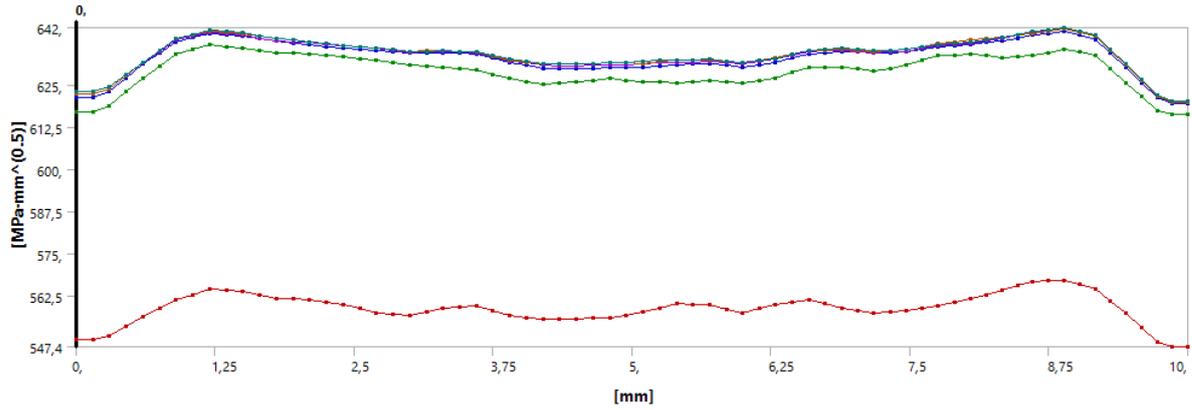


Abbildung 30: K_I -Verlauf über den Pfand des Scheibenmodells mit mittigem Riss in der Workbench

3.6.2 Elasto-plastische Betrachtung

Nach der FKM-Richtlinie [7, S.218] lautet die Spannungsintensität für die Scheibe mit mittigem Riss

$$K = (F_m \sigma_m \pm F_b \sigma_b) \sqrt{\pi a} \quad (3.14)$$

mit

$$F_m = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} (1 - 0,5\lambda + 0,326\lambda^2) \text{ und } \lambda = \frac{2a}{t} \text{ wobei } 0 < \lambda < 1 \quad (3.15)$$

t entspricht hierbei der Breite b . Da hier keine Biegespannung vorliegt, folgt $\sigma_b = 0$. Der Plastifizierungsgrad berechnet sich für die reine Zugbelastung für den ESZ nach

$$L_r = \frac{\sigma_m}{(1-\lambda)R_e} \quad (3.16)$$

und für den EVZ folgt

$$L_r = \frac{\sqrt{3}\sigma_m}{2(1-\lambda)R_e} \quad (3.17)$$

Die Grenzkurve und alle weiteren Größen berechnen sich wie im Kapitel 2.4.3 beschrieben. Es folgt der Spannungsintensitätsfaktor $K = 595.2 MPa \sqrt{mm}$. L_r^{max} errechnet sich zu 1.06. Für den ESZ beträgt $K_r = 0,9339$ und $L_r = 0,5371$. Die zulässige Bruchzähigkeit nimmt ab und beträgt noch $K_{Ic} = 667,47 MPa \sqrt{mm}$. Die Auslastung der Rissspitze ergibt sich zu 89,17% und die des Ligamentes zu 50.61%.

Für den EVZ bleibt der Spannungsintensitätsfaktor gleich. Mit einem Plastifizierungsgrad des Ligamentes von $L_r = 0.4651$ folgt die zulässige Bruchzähigkeit des Material zu $K_{Ic} = 678.61 MPa \sqrt{mm}$. Die Auslastung der Rissspitze beträgt 87.71% und die Auslastung des Ligamentes 43.83%. Die Belastungen für den EVZ sind etwas geringer als die des ESZ.

In dem APDL-Modell im ESZ wird ein J-Integral von $J = 5.7266 \frac{N}{mm}$ errechnet. Wird dieses nach Gleichung (3.1) in K_{JI} umgerechnet, folgt $K_{JI} = 628,14 MPa \sqrt{mm}$ und somit eine Auslastung der Rissspitze von 87.89%.

Die Ligamentauslastung lässt sich für diese Modell nicht numerisch bestimmen, da das Material aufgrund der reinen Zugbelastung schlagartig versagt, sobald die Streckgrenze im Ligament erreicht wird. Mit der Modifikation, dass das Tangentenmodul auf 90 MPa gesetzt wird, wird das Modell numerisch stabiler und es lässt sich eine vollplastische Traglast ermitteln. Damit die Elemente nicht zu stark verzerrt sind, werden die Linien der Oberen Seitenkanten (vom Lastangriff bis zum Ligament) 30 Teile unterteilt und die Faktorisierung der Kantenlänge herausgenommen. Die vollplastische Traglast folgt zu $F_{voll,pl.} = 558000N$ und damit eine Auslastung des Ligamentes von 53,76%. Analytisch würde sich eine vollplastische Traglast für das linear-elastische-idealplastische Materialmodell von 558600N errechnen.

Für den EVZ des selben Modells erfolgt eine Auslastung der Risspitze von 87.12%. Es wurde $J = 5.0135 \frac{N}{mm}$ berechnet und daraus folgend $K_{JI} = 622,61MPa\sqrt{mm}$.

Die vollplastische Traglast wurde mit den gleichen Modellmodifikationen wie für den ESZ bestimmt. Die vollplastische Traglast beträgt $F_{voll,pl.} = 610000N$ und daraus folgende Auslastung 49,2%. Allerdings ist hier die obere Kante plastifiziert und nicht das Material um die Risspitzen.

3.6.3 Gegenüberstellung der Ergebnisse

Die Berechnungsergebnisse sind in Tabelle 10 nochmals aufgelistet. Alle Ergebnisse liegen dicht beieinander. Auffällig ist, dass die Belastung in dem Volumenmodell in der Workbench deutlich größer ist, als in den Flächenmodellen. In den Ergebnissen ist des Weiteren auffällig, dass die FKM-Richtlinien-Lösung sehr dicht an der analytischen Lösung liegt.

In Tabelle 10 beziehen sich die Auslastungen immer auf die Spannungsintensität K_I beziehungsweise auf die aus J errechnete Spannungsintensität K_{JI} nach Gleichung (3.1). Nach Gleichung (3.10) ist es nicht zweckmäßig die Bruchzähigkeit in ein J-Integral umzurechnen.

Methode	Vorhandene Belastung der Risspitze			Auslastung des Ligaments [%]
	K_I [$MPa\sqrt{mm}$]	J [$\frac{N}{mm}$]	Auslastung [%]	
Analytisch LE	594,5	-	83,18	-
Analytisch LE mit Korrektur nach Irwin ESZ	632,0	-	88,43	-
Analytisch LE mit Korrektur nach Irwin EVZ	607,3	-	84,97	-
APDL LE ESZ	600,3	5,232	84,00	-
APDL LE EVZ	603,6	4,813	84,45	-
Workbench LE	641,9	5,318	89,91	-
FKM EP ESZ	595,2	-	89,17	50,61
FKM EP EVZ	595,2	-	87,71	43,83
APDL EP ESZ	628,1	5,727	87,89	53,76
APDL EP EVZ	622,6	5,014	87,12	49,18

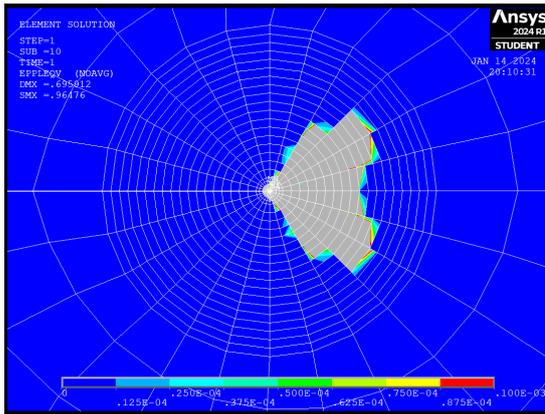
Tabelle 10: Gegenüberstellung der Ergebnisse des Modells der Scheibe mit mittigem Riss

Leider ist kein Versuch vorhanden, mit dem die Ergebnisse verglichen werden können. Daher ist eine Beurteilung der Ergebnisse nur schlecht möglich. Vom Berechnungsaufwand her, ist die FKM-Richtlinie die praktikabelste, da diese viele Aussagen mit wenig Arbeitsaufwand tätigt.

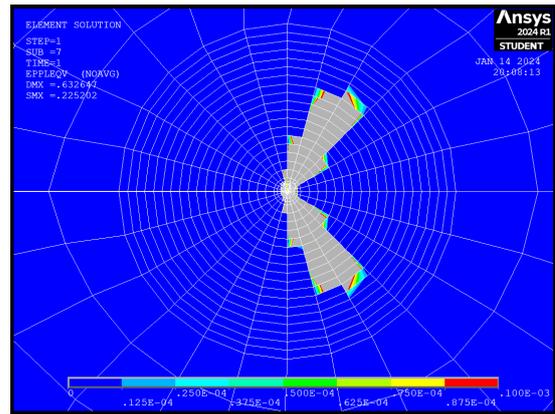
3.7 Vergleich der beiden Modelle

Die Berechnungsergebnisse lassen sich nur schwer gegenüberstellen, da diese außer dem Material wenig Übereinstimmungen haben. Ein Resultat ist allerdings, dass die Berechnungen bei der größeren Scheibe deutlich dichter beieinanderliegen. Je kleiner der Riss im Vergleich zu den Bauteildimensionen, desto weniger relevant scheint die Berechnungsmethode.

Die plastischen Zonen sehen auch deutlich unterschiedlich aus, wenn man die beiden Modelle vergleicht. In Abbildung 31 sind die plastischen Zonen des Modells der Scheibe mit mittigem Riss dargestellt und in Abbildung 25 die plastischen Zonen des CT-Proben-Modells. In beiden Abbildungen sind die plastischen Dehnungen (von Mises) aufgetragen. Die grauen Bereiche zeigen die plastifizierten Bereiche und die blauen die rein elastisch belasteten Bereiche des Materials. Die Unterschiedlichen plastischen Zonen lassen sich vermutlich auf die Belastungsart zurückführen. Während bei der dem Modell der CT-Probe eine Zugbelastung und eine Biegebelastung vorliegen, so liegt bei der Scheibe mit mittigem Riss aufgrund der Symmetrie nur eine reine Zugbelastung vor.



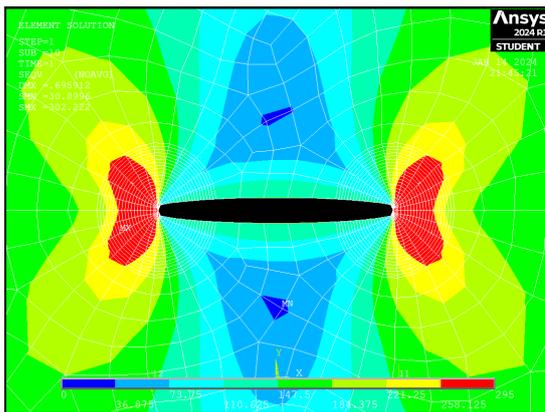
(a) ESZ



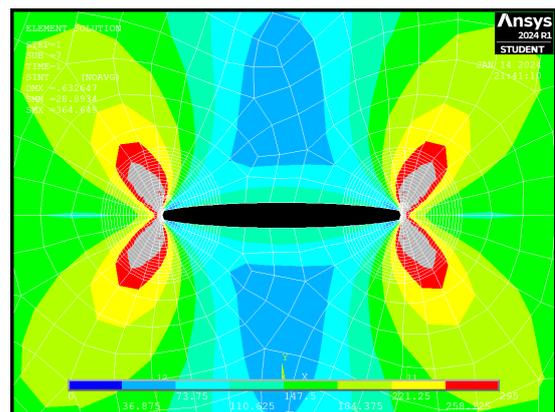
(b) EVZ

Abbildung 31: Vergleich der plastischen Zonen des Scheibenmodells

Das Spannungsfeld um die Risspitze sieht ebenfalls sehr unterschiedlich zwischen den beiden Modellen aus. Während das Modell der CT-Probe noch den nierenförmigen Spannungsverlauf für den ESZ aufweist (vgl. Abbildung 24) so ist dieser bei dem Scheibenmodell mit mittigem Riss nicht mehr zu erkennen (vgl. Abbildung 32).



(a) ESZ



(b) EVZ

Abbildung 32: Spannungsfeld um die Risspitze (von Mises Vergleichsspannung) für das Scheibenmodell

Die Verläufe von K_I und dem J -Integral über die Risspitze sind ebenfalls für beide Modelle unterschiedlich. Der Verlauf der Graphen des CT-Proben-Modells steigt deutlich flacher an und erreicht sein Maximum in der Mitte des Modells (vgl. Abbildung 26). Der Verlauf der Spannungsintensität bei dem Scheibenmodell mit mittigem Anriss steigt deutlich schneller an und fällt zur Mitte hin wieder leicht ab (vgl. Abbildung 30).

4 Fazit

Das J-Integral ist unter bestimmten Voraussetzungen wegunabhängig. Die Kontur kann ab der zweiten Elementreihe um die Rissspitze ausgewertet werden, da die Singularität durch die Rissspitzelemente nur in der ersten Reihe vorliegt und sich das J-Integral nur noch minimal ändert. Im Allgemeinen ist es allerdings zweckmäßig die Kontur so zu legen, dass die gesamte plastische Zone innerhalb der Kontur liegt, da dann absolut keine Änderung mehr zwischen den J-Integralen (von verschiedenen Konturen) vorliegt.

Je größer die plastische Zone, desto größer wird das J-Integral. Wenn man eine kleine Abweichung im J-Integral zulässt, kann näherungsweise mit der linear elastischen Lösung gearbeitet werden. Hier ist die Abweichung der Lösung umso kleiner, je kleiner die absolute Risslänge ist. Die Belastung hat auch einen Einfluss auf das J-Integral (vgl. Abbildung 23), allerdings scheint die Größe der zulässigen plastischen Zone primär von der Risslänge definiert zu sein. Je kleiner die Risslänge, desto größer darf die plastische Zone sein, damit die Abweichung im J-Integral trotzdem noch klein ist.

Die Größe und Form der plastischen Zone liegt für den EVZ dicht an der analytischen Lösung. Für den ESZ stimmen sowohl Form als auch die Größe nicht überein. Für den ESZ beschreibt das Dugdale-Modell die plastische Zone der FEM-Lösung besser. Die FEM-Lösung stimmt ebenfalls besser mit dem Versuch überein, da sich die plastische Zone entlang des Ligamentes erstreckt.

In der Berechnung des Modells hat sich ergeben, dass die FEM-Berechnung weiter von der Realität entfernt ist als die Berechnung nach der FKM-Richtlinie. Die FKM-Richtlinie beschreibt die vorliegende Belastung und den Materialwiderstand hinreichend gut. Nach Tabelle 5 liegen je nach Berechnungsmethode Unterschiede von bis zu 20% in den Auslastungen vor.

In Tabelle 10 zeigt sich, dass bei der Scheibe mit mittigem Riss die Abweichungen zwischen den Ergebnissen der Auslastungen verhältnismäßig klein sind. Zwischen der kleinsten und Größten Auslastung liegen 6,73%. Es scheint so, als würden sich die Ergebnisse der Berechnungsmethode annähern, je kleiner der Riss im Verhältnis zum Bauteil ist.

Die Messung der Bruchzähigkeit wurde nicht selbst durchgeführt. In den vorliegenden Daten weist das Material eine Bruchdehnung auf, die um mindestens das zehnfache zu klein ist, wenn man die Materialdaten mit anderen Quellen vergleicht. Hier würde es sich gut anbieten, den Versuch selbst durchzuführen und auch das CTOD-Kriterium mit auszuwerten. Das Modell der Scheibe mit mittigem Riss, könnte ebenfalls nochmals nachgebaut und geprüft werden, um die errechneten Werte mit der Realität vergleichen zu können.

Des Weiteren wäre es ebenfalls interessant, das Modell in APDL nochmal als Volumenmodell aufzubauen um einen direkten Vergleich der beiden FEM-Modelle ziehen zu können.

Im Gesamten gestaltet sich die Berechnung und Versagensbewertung als schwierig, da schon im Versuch die Bruchzähigkeit von der Art des Prüfkörpers abhängig ist und in verschiedenen Messreihen große Unterschiede in der Bruchzähigkeit gemessen werden.

An der Bruchmechanik hat mich die mathematische Beschreibung interessiert. Wie über komplexe Funktionen und das Potential der Oberflächenschaffung die Schädlichkeit des Risses charakterisiert werden kann. Ein weiterer Reiz war die Einarbeitung in die Tensorrechnung, welche für die mathematischen Berechnungen benutzt wurde. Es war schön einen ersten Einblick in die Thematik zu erhalten, allerdings hat sich im Verlauf der Arbeit sehr schnell herausgebildet, dass ich dem Thema im Umfang einer Bachelorarbeit nur schwer gerecht werden konnte. Das Thema hat sehr viel mehr Facetten, welche sehr viel tiefgreifender beleuchtet werden können. Dennoch hat es mir Freude bereitet mich einzuarbeiten. Es war interessant zu sehen, auf wie viele Arten sich Risschädlichkeiten analytisch, empirisch und numerisch berechnen lassen und wie dicht die Ergebnisse beisammen liegen.

5 Quellen

Literatur

- [1] Meinhard Kuna, editor. *Numerische Beanspruchungsanalyse von Rissen*. SpringerLink. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2008.
- [2] Dietmar Gross. *Bruchmechanik*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 5. Aufl. 2011 edition, 2011.
- [3] Peter Steinke. *Finite-Elemente-Methode*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 4. Aufl. 2012 edition, 2012.
- [4] O. Verf. 1.2. understanding how fracture mechanics problems are solved. "https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v192/ans_frac/Hlp_G_STR10_2.html", 02.01.2023.
- [5] Dietmar Gross. *Technische Mechanik 2*. SpringerLink. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2012.
- [6] Herbert A. Mang. *Festigkeitslehre*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 4., aktual. Aufl. 2013 edition, 2013.
- [7] Christina Berger, editor. *Bruchmechanischer Festigkeitsnachweis für Maschinenbauteile*. FKM-Richtlinie. VDMA Verlag, Frankfurt, Main, 4. Auflage 2018 edition, 2018. Literaturangaben.
- [8] O. Verf. 2.4. fracture-parameter calculation types. "https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v231/en/ans_frac/frac_parmcalctypes.html
- [9] Paul Judt. *Numerische Beanspruchungsanalyse von Rissen und Berechnung von Risspfaden mittels wegunabhängiger Erhaltungsintegrale*. Number Bericht 2017, 2 in Berichte des Instituts für Mechanik. Kassel University Press, Kassel, 2017.
- [10] Klaus Graf. Persönliche Mitteilung vom 14.12.2023.
- [11] S. Sunil Kumar, Neelakantha V. Londe, K. Dilip Kumar, and Mohammed Ibrahim Kittur. Estimation of fracture toughness (K_{IC}) using Charpy impact test for Al6061T6 and Al7075T6 alloys subjected to corrosion. *Materials Today: Proceedings*, 46:2414–2420, 2021.
- [12] Alan Keith Hellier, P P Chaphalkar, and Gangadhara B Prusty. Fracture toughness measurement for aluminium 6061-T6 using notched round bars. "https://www.researchgate.net/publication/331887724_Fracture_Toughness_Measurement_for_Aluminium_6061-T6_using_Notched_Round_Bars", 02.01.2023.
- [13] Hans Albert Richard. *Ermüdungsrisse*. SpringerLink. Springer Vieweg, Wiesbaden, 3., erw. Aufl. 2012 edition, 2012.

A APDL-Code des CT-Proben-Modells

```
finish
/clear                               Löscht alle vorherigen Daten
/COM, Structural                       Start des Modellaufbaus

! Geometrie Parameter
w = 25.4                               ! Geometrieparameter für CT-Probe in mm
B = 12.7                               ! Dicke der Platte in mm
r_h = 0.001                           ! Höhe des Risses in mm
a = 0.25*w + 12.7                     ! Länge des Risses in mm

! Belastungs Parameter
f_ges = 4739                           ! Kraft pro Kreis in N

! Netzverfeinerung
radius_a = 0.1*w                       ! Radius der Netzverfeinerung außen
radius_i = 0.008*w                    ! Radius der Netzverfeinerung innen
! (bestimmt Öffnungswinkel der Risspitze)
num_div_l_Netz_u = 6                  ! Unterteilung Linien der Netzverfeinerung
! (Umfang)
num_div_l_Netz_r_a = 18               ! Unterteilung der Netzverfeinerung außen
! (Radial)
num_div_l_Netz_r_i = 1                ! NICHT ÄNDERN, Unterteilung der
! Netzverfeinerung außen (Radial)

num_div_l_f = 6                       ! Unterteilung der Linien für Lasteinleitung
f_angriff = f_ges/(num_div_l_f*4*2)  ! Kraft/Knoten (4 Linien, Elementansatzgrad 2)
num_cont = 24                         ! Anzahl der Contouren die für das J-Integrals
! ausgewertet werden sollen

! Material konstanten
Re = 294                              ! Streckgrenze in MPa
Emodul = 68900                        ! E-Modul in MPa
querkontraktionszahl = 0.3           ! Querkontraktionszahl
EmodulT = 1                           ! Tangentenmodul

/PREP7                                ! startet Preprocessor zur Modellerstellung,
! AB HIER NICHTS MEHR ÄNDERN
! (außer Spannungszustand)
```

```

! Nichtlineare Berechnung
NSUBST,10,1000,5

! Anzahl der Substeps: Soll-Substeps = 10
! (da AUTOTS = ON, Anzahl der ersten
! Substeps),max-Substeps = 1000,
! min-substeps = 5

AUTO TS, ON
! Unterteilung des Substeps automatisch
! Elenemtyp
ET,1,PLANE183
! Elementtyp festlegen, Zuordnungsnummer,
! PLANE183 -> 2D-Element mit quadratischer
! Ansatzfunktion
KEYOPT,1,1,0
! ET 1 = 8-node quadrilant
! (Quadrat, ohne Mittelknoten)
KEYOPT,1,6,0
! Use pure displacement formulation (default)
! Spannungszustand wählen:
KEYOPT,1,3,3
! ESZ mit Dicke
R,1,B,
! Dicke des Modells
! KEYOPT,1,3,2
! EVZ (z-Dehnung = 0.0, Dicke = 1mm)
! KEYOPT,1,3,0
! ESZ (Dicke = 1mm)

! Materialparameter festlegen
MPTEMP, , , , , , ,
! definiert Temperatur der
! Material Properties
MPTEMP,1,0
! bringt Temperatur aus Tabelle auf
MPDATA,EX,1, ,Emodul
! bestimmt das E-Modul
MPDATA,PRXY,1, ,querkontraktionszahl
! Querkontraktionszahl festlegen
TB,BISO,1,1,2,
! Verfestigungsansatz: J-Int Auswertung nur
! mit BISO möglich
TBTEMP,0
! bestimmt Temperatur in der data table
TBDATA, ,Re,EmodulT, , , ,
! Streckgrenze und Tangentenmodul festlegen

! Punkte des Modells
K,1,0,0,0
! Ecke unten links
K,2,1.25*w,0,0
! Ecke unten rechts
K,3,1.25*w,1.2*w,0
! Ecke oben rechts
K,4,0,1.2*w,0
! Ecke oben links
K,5,0,(0.6+r_h/2)*w,0
! Startpunkt obere Rissflanke
K,6,a,(0.6+r_h/2)*w,0
! Endpunkt obere Rissflanke
K,8,a,0.6*w,0
! Risspitze
K,9,a,(0.6-r_h/2)*w,0
! Endpunkt untere Rissflanke
K,10,0,(0.6-r_h/2)*w,0
! Startpunkt untere Rissflanke
K,11,1.25*w,0.6*w,0
! Mittelpunkt der rechten Kante,
! Endpunkt Ligament

```

```

! Flächen des Modells
A,1,2,11,3,4,5,6,9,10,
CYL4,0.25*w,0.875*w,0.125*w
ASBA,1,2
CYL4,0.25*w,0.325*w,0.125*w
ASBA,3,1
CYL4,a,0.6*w,radius_a
CYL4,a,0.6*w,radius_i
AOVLAP,ALL

L,8,27

L,8,28

LSEL,S,,6
LSEL,a,,8
ASBL,4,all
ADELE,3
ADELE,5
ALLSEL
LDELE,28,31
AADD,6,1,2

! Linien für das Ligament
L,11,19
L,19,23
L,23,8

! Linien für die Netzverfeinerung
L,20,24
L,24,8
L,8,26
L,26,22

! Kraftangriffslinien unterteilen
LSEL,S,,10,17,1,1,1
LESIZE,all,,num_div_l_f
ALLSEL

```

```

! Grundfläche aus Punkten aufbauen
! oberer Kreis für Belastung
! subtrahiert oberen Kreis vom der Grundfläche
! unterer Kreis für Belastung
! subtrahiert unteren Kreis vom der Grundfläche
! Kreis für Netzverfeinerung (außen)
! Kreis für Netzverfeinerung (innen)
! fügt alle Flächen zu einer zusammen, Linien
! der einzelnen Flächen bleiben erhalten
! Linie von der Risspitze (KP 8) zum Schnittpunkt
! der Linien der Fläche der Netzverfeinerung innen
! und der oberen Rissflanke (KP 27)
! Linie von der Risspitze zum Schnittpunkt der
! Linien der Fläche der Netzverfeinerung innen
! und der unteren Rissflanke
! wählt Linie 6 aus (Risspitze zu Rissflanke)
! ergänzt Auswahl um Linie 8
! teilt Fläche 4 mit allen ausgewählten Linien
! löscht Fläche 3 (Risspitze)
! löscht Fläche 5 (Bereich zwischen Rissflanken)
! wählt alles aus
! löscht Linie 28 bis 31
! Fügt Fläche 6,1 und 2 zu einer zusammen
! (Linien gehen verloren)

```

```

! Linie von Keypoint 11 zu 19
! Linie von Keypoint 19 zu 23
! Linie von Keypoint 29 zu 8

```

```

! außen Norden
! innen Norden
! innen Süden
! außen Süden

```

```

! wählt Linie 10 bis 17 aus
! unterteilt alle Linien in num_div_l_f Teile
! wählt alles aus

```

! Unterteilung der Netzverfeinerung in Umfangs Richtung

LSEL,S, , ,18 ! wählt Linie 18 aus
LSEL,A, , , ,21 ! ergänzt Linie 21 in Auswahl
LSEL,A, , , ,37 ! -"
LSEL,A, , , ,36 ! -"
LSEL,A, , , ,22 ! -"
LSEL,A, , , ,25 ! -"
LSEL,A, , , ,35 ! -"
LSEL,A, , , ,34 ! -"
LESIZE,ALL, , , ,num_div_1_Netz_u ! unterteilt alle ausgewählten Linien in
! num_div_1_Netz_u Teile
ALLSEL ! wählt alles aus

! Unterteilung der Netzverfeinerung in radialer Richtung außen

LSEL,S, , , ,19 ! wählt Linie 19 aus
LSEL,A, , , ,23 ! ergänzt Linie 23 in Auswahl
LSEL,A, , , ,27 ! -"
LSEL,A, , , ,32 ! -"
LSEL,A, , , ,33 ! -"
LESIZE,ALL, , , ,num_div_1_Netz_r_a ! unterteilt alle ausgewählten Linien in
! num_div_1_Netz_r_a Teile
ALLSEL ! wählt alles aus

! Unterteilung der Netzverfeinerung in radialer Richtung innen

LSEL,S, , , ,24 ! wählt Linie 24 aus
LSEL,A, , , ,20 ! ergänzt Linie 20 in Auswahl
LSEL,A, , , ,26 ! -"
LSEL,A, , , ,6 ! -"
LSEL,A, , , ,8 ! -"
LESIZE,ALL, , , ,num_div_1_Netz_r_i ! unterteilt alle ausgewählten Linien in
! num_div_1_Netz_r_i Teile
ALLSEL ! wählt alles aus

! Unterteilung des Ligamentes

LESIZE,7,w/36 ! unterteilt Linie 7 in Teile der Länge w/36

! Linien der Außenkanten

LESIZE,1, , , ,20 ! unterteilt Linie 1 in 20 Teile
LESIZE,2, , , ,20,0.4 ! unterteilt Linie 2 in 20 Teile, mit Faktor 0.4
LESIZE,3, , , ,20,2.5 ! unterteilt Linie 3 in 20 Teile, mit Faktor 2.5
LESIZE,4,4, , , ,20 ! unterteilt Linie 4 in 20 Teile
LESIZE,5,5, , , ,10 ! unterteilt Linie 5 in 10 Teile
LESIZE,38,w/18, , , ,0.2 ! unterteilt Linie 38 in Teile der Länge w/18 ,
! mit Faktor 0.2
LESIZE,39,w/18, , , ,0.2 ! -"
LESIZE,9,9, , , ,10 ! unterteilt Linie 9 in 10 Teile

```

ASBL,all,all ! fügt alle Linien den Flächen hinzu

! Flächen vernetzen
KSCON,8,0.1,1,6,0.5 ! Vernetzt die Rissspitze: KSCON, KP,EKL1,
! 1 = Viertelpunktelement, Anzahl der Elemente
! in Umgangsrichtung, EKL2

AMESH,ALL ! Vernetzt die Geometrie

! Lagerung
!displacements in x-Richtung
KSEL,S,KP, ,2 ! wählt KP 2 aus
NSLK ! wählt Knoten des ausgewählten Keypoints
CM,disp_x,NODE ! legt Komponente mit ausgewählten Knoten an
D,disp_x,UY,0 ! legt die Verschiebung der Komponente disp_x
! in y-Richtung auf Null fest

ALLSEL ! wählt alles aus

! displacements in y-Richtung
KSEL,S,KP, ,2 ! wählt KP 2 aus
KSEL,A,KP, ,3 ! ergänzt KP 3 in Auswahl
NSLK ! wählt Knoten des ausgewählten Keypoints
CM,disp_y,NODE ! legt Komponente mit ausgewählten Knoten an
D,disp_y,UX,0 ! legt die Verschiebung der Komponente disp_y
! in x-Richtung auf Null fest

ALLSEL ! wählt alles aus

!Rissspitze definieren
KSEL,S,KP, ,8 ! wählt KP 8 aus
NSLK ! wählt Knoten des ausgewählten Keypoints
CM,Crack_tip,NODE ! legt Komponente mit ausgewählten Knoten an
ALLSEL ! wählt alles aus

! Kräfte am oberer Kreis aufbringen
LSEL,S, , ,10,13,1,1 ! wählt Linie 10 bis 13 in 1ner Schritten aus
! und alle mit der Linie verbundenen KPs und
! Knoten
CM,Force_nodes_O,NODE ! Komponente Force_nodes_O der Knoten der
! Linie 10-13
F,Force_nodes_O,FY,f_angriff ! bringt Kraft f_angriff auf Komponente
! Force_nodes_O in y-Richtung auf

ALLSEL ! wählt alles aus

```

```

! Kräfte am unteren Kreis aufbringen
LSEL,S, , ,14,17,1,1           ! wählt Linie 14 bis 17 in 1er Schritten aus
                                ! und alle mit der Linie verbundenen KPs und
                                ! Knoten
CM,Force_nodes_U,node         ! Komponente Force_nodes_U der Knoten der
                                ! Linie 10-13
F,Force_nodes_U,fy,-f_angriff ! bringt Kraft -f_angriff auf Komponente
                                ! Force_nodes_U in y-Richtung auf
ALLSEL                          ! wählt alles aus

! ligamentknoten definieren
LSEL,S, , ,7,                 ! wählt Linie 7 aus
LSEL,A, , ,19,                ! ergänzt Linie 19 in Auswahl
LSEL,A, , ,20,                ! ergänzt Linie 20 in Auswahl
NSLL                          ! wählt Knoten der ausgewählten Linien aus
NSLE,U,MID                    ! wählt Mittelknoten der ausgewählten Elemente
                                ! ab
CM,ligament,NODE              ! erstellt Komponente mit ausgewählten Knoten
ALLSEL                          ! wählt alles aus

! J-integral definieren
CLOCAL,11,CART,a,0.6*w,0      ! legt lokales Koordinatensystem (mit Nr. 11,
                                ! kartesisch) in Position der Rissspitze
CINT,NEW,1                    ! legt neue Berechnung der Rissbelastung fest
CINT,TYPE,JINT                ! Auswertung mit J-Integral
CINT,CENC,Crack_tip, ,11,1    ! definiert Rissspitze für Berechnung, lokales
                                ! KS 11, Risserweiterungsrichtung 1(x)-Achse
                                ! des lokalen KS
CINT,SYMM,off                 ! Schaltet Symmetrie aus, da ganzes Modell
CINT,NORM,11,2                ! legt normale des Risses fest, lokales KS,
                                ! 2(y)-Richtung
CINT, NCON, num_cont          ! legt Anzahl der Konturen fest, die um die
                                ! Rissspitze ausgewertet werden sollen
OUTRES,CINT,10                ! J-Integral wird alle 10 Substeps berechnet

! Berechnen
FINISH
/SOL                            ! startet Berechnung
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH

/post1                          ! startet Postprozessor

set,last                        ! zeigt Ergebnis des letzten Substeps an

```

B APDL-Code des Modells der Scheibe mit mittigem Riss

```
finish
/clear
/COM, Structural
! Variablen setzen
! geometrie Parameter
b = 100 ! geometrieparameter für CT
t = 10 ! Dicke der Platte
r_h = 0.01 ! höhe des Risses
w = 24.5

! Steuerelemente
a = 5 ! länge des Risses
f_ges = 300000 / t ! gesamt Kraft
num_cont = 25 ! anzahl der Contouren

! Netzverfeinerung
radius_a = 0.1*w ! radius der netzverfeinerung außen
radius_i = 0.008*w ! radius der netzverfeinerung innen
num_div_l_f = 20 ! Unterteilung der Linien für dem Kraftangriff
num_div_l_Netz_u = 6 ! Unterteilung des Umfanges
num_div_l_Netz_r_a = 18
num_div_l_Netz_r_i = 1 ! sollte nicht verändert werden

! Material konstanten
Re = 294 ! Streckgrenze in MPa
Emodul = 68900 ! Emodul in MPa
querkontraktionszahl = 0.3 ! Querkontraktionszahl
EmodulT = 1 ! Tangenten Modul

f_angriff = f_ges / (num_div_l_f*2+1)

/PREP7

! Nichtlineare rechnung einstellen
NSUBST,10, 1000,5 ! Steuert anzahl der Substeps
AUTO TS, ON ! Unterteilung des Substeps automatisch
```

```

! Elenemttyp festlegen
ET,1,PLANE183                                ! elementtyp festlegen
KEYOPT,1,1,0                                  ! 8-node quadrilant
KEYOPT,1,6,0
! KEYOPT,1,3,0                                ! Plane stress
KEYOPT,1,3,2                                  ! Plane strain (Z strain = 0.0)
! Material festlegen
MPTEMP, , , , , ,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1, ,Emodul
MPDATA,PRXY,1, ,querkontraktionszahl
TB,BISO,1,1,2,
TBTEMP,0
TBDATA, ,Re,EmodulT, , , ,

! Keypoints festlegen
k,1,b,b,0
k,2,-b,b,0
K,3,-b,0,0
k,4,-b,-b,0
k,5,b,-b,0
K,6,b,0,0
K,7,a,0,0                                     ! Rissspitze links
k,8,a,r_h/2,0
k,9,-a,r_h/2,0
K,10, -a,0,0                                  ! Rissspitze rechts
K,11,-a,-r_h/2,0
K,12,a,-r_h/2,0

! Flächen aufbauen
A,1,2,3,4,5,6
A,7,8,9,10,11,12
ASBA,1,2

CYL4,a,0,radius_a
CYL4,a,0,radius_i
CYL4,-a,0,radius_a                            ! subtrahiert kreis vom rechteck
CYL4,-a,0,radius_i

AOVLAP,all
L,7,29
L,7,30
LSEL,s, , ,8
LSEL,a, , ,11
ASBL,6,all

```

ADELE,3
ADELE,8

ALLSEL
L,10,31
L,10,32
LSEL,s, , ,14
LSEL,a, , ,15
ASBL,7,all
ADELE,5
ADELE,9

AADD,10,1,2
AADD,11,3,4

LDELE,35,36,1
LDELE,41,42,1

! Weitere Linien aufbauen um das netz zu kontrollieren
! Linien für das ligament

L,6,13
L,13,17
L,17,7
L,10,27
L,27,23
L,23,3

! Linien für die Netzverfeinerung

L,14,18
L,18,7
L,7,20
L,20,16

L,22,26
L,26,10
L,10,28
L,28,24

! Linien unterteilen

! Kraftangriff

ALLSEL
LESIZE,1, , ,num_div_l_f

! Unterteilung der Netzverfienerung in
Umfangs Richtung

```
LSEL,S, , ,13
LSEL,A, , ,49
LSEL,A, , ,50
LSEL,A, , ,16
LSEL,A, , ,51
LSEL,A, , ,22
LSEL,A, , ,23
LSEL,A, , ,52
LSEL,A, , ,17
LSEL,A, , ,45
LSEL,A, , ,46
LSEL,A, , ,20
LSEL,A, , ,47
LSEL,A, , ,26
LSEL,A, , ,27
LSEL,A, , ,48
LESIZE,all, , ,num_div_l_Netz_u
allsel
```

! Unterteilung der Netzverfienerung in ra-
dialer Richtung außen

```
LSEL,S, , ,9
LSEL,A, , ,21
LSEL,A, , ,39
LSEL,A, , ,40
LSEL,A, , ,28
LSEL,A, , ,43
LSEL,A, , ,29
LSEL,A, , ,18
LSEL,A, , ,34
LSEL,A, , ,44
LESIZE,all, , ,num_div_l_Netz_r_a
ALLSEL
```

! Unterteilung der Netzverfienerung in ra-
dialer Richtung innen

```
LSEL,S, , ,10
LSEL,A, , ,24
LSEL,A, , ,8
LSEL,A, , ,11
LSEL,A, , ,25
LSEL,A, , ,14
```

```
LSEL,A, , ,30
LSEL,A, , ,12
LSEL,A, , ,33
LSEL,A, , ,15
LESIZE,all, , ,num_div_l_Netz_r_i
ALLSEL
```

```
! Unterteilung des Ligamentes
```

```
LESIZE,7,3, , ,0.2
```

```
LESIZE,19,3, , ,5
```

```
! Linien der Außenkanten
```

```
LESIZE,2, , ,10,0.2
```

```
LESIZE,3, , ,10,5
```

```
LESIZE,4, , ,20
```

```
LESIZE,5, , ,10,0.2
```

```
LESIZE,6, , ,10,5
```

```
! Linen zu Flächen hinzufügen
```

```
ASBL,all,all
```

```
! Flächen vernetzen
```

```
KSCON,7,0.1,1,6,0.5
```

```
KSCON,10,0.1,1,6,0.5
```

```
AMESH,all
```

```
! Lagerung
```

```
!displacements
```

```
LSEL,s, , ,4
```

```
NSLL
```

```
CM,disp,node
```

```
D,disp,ux,0
```

```
D,disp,uy,0
```

```
ALLSEL
```

```
KSEL,s, , ,4
```

```
KSEL,a, , ,5
```

```
NSLK
```

```
CM,disp_Rand,node
```

```
D,disp_Rand,ux,0
```

```
D,disp_Rand,uy,0
```

```
ALLSEL
```

```
!Rissspitze definieren
KSEL, ,kp, ,7
NSLK
CM,Crack_tip_R,node
ALLSEL
```

```
KSEL, ,kp, ,10
NSLK
CM,Crack_tip_L,node
ALLSEL
```

```
! Kräfte aufbringen
LSEL,s, , ,1,1,1,1
CM,Force_nodes_O,node
F,Force_nodes_O,fy,f_angriff
ALLSEL
```

```
! ligamentknoten definieren
LSEL,s, , ,7,
LSEL,a, , ,9,
LSEL,a, , ,18,
LSEL,a, , ,19,
NSLL
NSLE,U,MID
CM,ligament,node
ALLSEL
```

```
! J-integral definieren
CLOCAL,11,CART,a,0,0
CINT,NEW,1
CINT,TYPE,JINT
CINT,CENC,Crack_tip_R, ,11,1
CINT,SYMM,OFF
CINT,NORM,11,2
CINT,NCON, num_cont
OUTRES,CINT,10
```

! output material forces every 10 substeps

```
s
CLOCAL,12,CART,-2*a,0,0,180
CINT,NEW,2
CINT,TYPE,JINT
CINT,CENC,Crack_tip_L, ,12,1
CINT,SYMM,OFF
```

```
CINT,NORM,12,2  
CINT, NCON, num_cont  
OUTRES,CINT,10
```

```
! Berechnen
```

```
FINISH
```

```
/SOL
```

```
/STATUS,SOLU
```

```
SOLVE
```

```
FINISH
```

```
/post1
```

```
SET,LAST
```



Erklärung zur selbstständigen Bearbeitung einer Abschlussarbeit

Gemäß der Allgemeinen Prüfungs- und Studienordnung ist zusammen mit der Abschlussarbeit eine schriftliche Erklärung abzugeben, in der der Studierende bestätigt, dass die Abschlussarbeit „– bei einer Gruppenarbeit die entsprechend gekennzeichneten Teile der Arbeit [(§ 18 Abs. 1 APSO-TI-BM bzw. § 21 Abs. 1 APSO-INGI)] – ohne fremde Hilfe selbstständig verfasst und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt wurden. Wörtlich oder dem Sinn nach aus anderen Werken entnommene Stellen sind unter Angabe der Quellen kenntlich zu machen.“

Quelle: § 16 Abs. 5 APSO-TI-BM bzw. § 15 Abs. 6 APSO-INGI

Dieses Blatt, mit der folgenden Erklärung, ist nach Fertigstellung der Abschlussarbeit durch den Studierenden auszufüllen und jeweils mit Originalunterschrift als letztes Blatt in das Prüfungsexemplar der Abschlussarbeit einzubinden.

Eine unrichtig abgegebene Erklärung kann -auch nachträglich- zur Ungültigkeit des Studienabschlusses führen.

Erklärung zur selbstständigen Bearbeitung der Arbeit

Hiermit versichere ich,

Name: _____

Vorname: _____

dass ich die vorliegende _____ – bzw. bei einer Gruppenarbeit die entsprechend gekennzeichneten Teile der Arbeit – mit dem Thema:

ohne fremde Hilfe selbstständig verfasst und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Wörtlich oder dem Sinn nach aus anderen Werken entnommene Stellen sind unter Angabe der Quellen kenntlich gemacht.

- die folgende Aussage ist bei Gruppenarbeiten auszufüllen und entfällt bei Einzelarbeiten -

Die Kennzeichnung der von mir erstellten und verantworteten Teile der _____ ist erfolgt durch:

Ort

Datum

Unterschrift im Original