



Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Hamburg University of Applied Sciences

Masterthesis

Anthony Berg

Integration von Streuungen bei Einflussgrößen zur Berechnung von Schraubenverbindungen

*Fakultät Technik und Informatik
Department Maschinenbau und Produktion*

*Faculty of Engineering and Computer Science
Department of Mechanical Engineering and
Production Management*

Anthony Berg

**Integration von Streuungen bei Einflussgrößen
zur Berechnung von Schraubenverbindungen**

Masterthesis eingereicht im Rahmen der Masterprüfung

im Studiengang Konstruktionstechnik und Produktentwicklung im Maschinenbau
am Department Maschinenbau und Produktion
der Fakultät Technik und Informatik
der Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg (HAW Hamburg).

Erstprüfer: Prof. Dr. Andreas Meyer-Eschenbach

Zweitprüfer: Prof. Dr. Thorsten Struckmann

Abgabedatum: 01.08.2024

Zusammenfassung

Anthony Berg

Thema der Masterthesis

Integration von Streuungen bei Einflussgrößen zur Berechnung von Schraubenverbindungen

Stichworte

Schraubenverbindungen, VDI 2230, Stochastische Methoden, Monte-Carlo-Simulation, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Wahrscheinlichkeitsverteilung, Fehlerfortpflanzung, Fehlerfortpflanzungsgesetz

Kurzzusammenfassung

Diese Arbeit untersucht die Berechnung von Schraubenverbindungen nach VDI 2230 unter Anwendung stochastischer Methoden. Konservative Annahmen und Tabellenwerte führen oft zu überdimensionierten Verbindungen. Die Arbeit schlägt einen stochastischen Ansatz vor, der die natürlichen Streuungen von Einflussgrößen wie Reibwerten und Anziehungsfaktoren berücksichtigt. Durch die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Monte-Carlo-Simulationen wird die Streuung der Einflussgrößen in die Berechnung integriert, was eine effizientere Dimensionierung von Schraubenverbindungen ermöglicht. Die Ergebnisse zeigen, dass diese Methoden zu effizienteren Dimensionierungen führen, indem sie die Auslegung an eine definierte Ausfallwahrscheinlichkeit anpassen und Überdimensionierungen vermeiden. Dies hat bedeutende praktische Implikationen für Materialnutzung und Kosteneffizienz.

Anthony Berg

Title of the paper

Integration of Variations in Influential Parameters for the Calculation of Bolted Connections

Keywords

Bolted Joints, VDI 2230, Stochastic Methods, Monte Carlo Simulation, Probability Theory, Probability Distribution, Error Propagation, Error Propagation Law

Abstract

This work investigates the calculation of bolted connections according to VDI 2230 using stochastic methods. Conservative assumptions and tabulated values often lead to oversized connections. The study proposes a stochastic approach that accounts for natural variations in factors such as friction coefficients and tightening parameters. By incorporating probability theory and Monte Carlo simulations, the variability of these factors is integrated into the calculation, enabling a more efficient design of bolted connections. The results show that these methods lead to more efficient designs by tailoring the design to a defined failure probability and avoiding overdimensioning. This has significant practical implications for material use and cost efficiency.

Haftungsausschluss

Die Angaben über Schraubenverbindungen in dieser Masterarbeit basieren auf umfassender Literaturrecherche und anwendungstechnischen Erfahrungen aus Fachbüchern und externen Quellen. Der Leser ist angehalten, alle Informationen und Empfehlungen eigenverantwortlich zu prüfen, insbesondere im Hinblick auf Schutzrechte Dritter und spezifische Anwendungen, die nicht ausdrücklich erwähnt sind.

Die Nutzung dieser Arbeit und die Umsetzung der darin enthaltenen Informationen erfolgen auf eigenes Risiko. Der Verfasser übernimmt keine Haftung für etwaige Unfälle oder Schäden, die sich aus der Anwendung der aufgeführten Informationen ergeben. Trotz sorgfältiger Erstellung kann keine Gewähr für die Aktualität, Richtigkeit und Vollständigkeit der Inhalte übernommen werden.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	VIII
Tabellenverzeichnis	IX
Symbol- und Formelverzeichnis	X
Lateinische Symbole	X
Griechische Symbole	XI
Definitionen	XII
1 Einleitung.....	1
1.1 Motivation.....	1
1.2 Zielsetzung.....	2
1.3 Inhalt der Arbeit.....	3
2 Grundlagen der Berechnung von Schraubenverbindungen	5
2.1 Rechenschritte nach VDI 2230	5
2.1.1 R0 – R2: Vorgaben.....	6
2.1.2 R3 – R6: Verspannung	7
2.1.3 R7 – R9: Beanspruchungsfälle	9
2.1.4 R10 – R13: Festigkeitsnachweise.....	11
2.2 Kritische Bewertung des Rechenvorgehens	13
2.2.1 Ausgangssituation	13
2.2.2 Anwendungsbeispiel	14
2.2.3 Problemstellung.....	16
2.3 Zusammenfassung der Grundlagen der Berechnung von Schraubenverbindungen	17
3 Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung	18
3.1 Elementare Begriffe und Grundlagen	18
3.1.1 Diskrete und kontinuierliche Zufallsverteilung	18
3.1.2 Histogramm.....	20
3.1.3 Mittelwert.....	21
3.1.4 Varianz und Standardabweichung	23
3.1.5 Normalverteilung	25
3.1.6 Quantile.....	28
3.2 Vertiefte Wahrscheinlichkeitsrechnung.....	29
3.2.1 Fehlerfortpflanzungsgesetz	29
3.2.2 Addition und Subtraktion	30
3.2.3 Multiplikation und Division	31
3.2.4 Vorgehen bei abhängigen Größen.....	33
3.3 Simulation und Analyse von Wahrscheinlichkeitsverteilungen	34
3.3.1 Monte-Carlo-Simulation.....	34
3.3.2 Resultierende Verteilungsform	35
3.3.3 Logarithmische Transformation	37

3.4	Zusammenfassung der relevanten Wahrscheinlichkeitsrechnung	43
4	Stochastische Herangehensweise bei der Schraubenverbindungsrechnung	45
4.1	Lösungsansatz für die Problemstellung	45
4.2	Praktische Anwendung der stochastischen Grundlagen am Beispiel des Anziehdrehmoments in MATLAB.....	47
4.2.1	Berechnung des Mittelwerts und der Standardabweichung	48
4.2.2	Monte-Carlo-Simulation.....	50
4.2.3	Weitere Funktionen für die Analyse der Ergebnisse	51
4.3	Weitere Berechnungen.....	52
4.4	Zusammenfassung der praktischen Anwendung	53
5	Ergebnisse der stochastischen Herangehensweise.....	55
5.1	Anpassung des derzeitigen Vorgehens	55
5.1.1	Gemittelter Gesamtreibwert.....	55
5.1.2	Berechnung der zulässigen Querkraft	60
5.1.3	Bestimmung der zulässigen Querkraft einer einfachen Schraubenverbindung	65
5.1.4	Bestimmung der zulässigen Querkraft bei Mehrschraubenverbindungen ..	67
5.1.5	Verbesserungspotenzial der Berechnungsschritte R0-R13.....	69
5.2	Kritik und Ausblick zur stochastischen Methode	71
5.2.1	Verteilung der Einflussgrößen	71
5.2.2	Fehlerfortpflanzungsgesetz und große Fehler	72
5.3	Zusammenfassung der Ergebnisse	73
6	Zusammenfassung und Ausblick.....	75
6.1	Arbeitsergebnisse.....	75
6.2	Zusammenfassung der Ergebnisse	76
6.3	Ausblick.....	78
	Quellenverzeichnis.....	81
	Anhang.....	A-1
	Anhang A-1: Mittelwert und Standardabweichung durch Fehlerfortpflanzungsgesetz	A-1
	Anhang A-2: Monte-Carlo-Simulation	A-3
	Anhang A-3: Mittelwert und Standardabweichung aus einem Datensatz	A-5
	Anhang A-4: Varianzanalyse	A-5
	Anhang A-5: Erstellung eines Histogramms	A-5
	Anhang A-6: Kerndichteschätzung	A-5
	Anhang A-7: Überprüfung der Sicherheitswerte	A-6
	Anhang B-1: Gesprächsnotiz vom 30.03.2024 mit Prof. Dr. Andreas Meyer-Eschenbach	B-1
	Anhang B-2: Gesprächsnotiz vom 05.05.2024 mit Prof. Dr. Andreas Meyer-Eschenbach	B-1

Anhang B-3: Gesprächsnotiz vom 26.07.2024 mit Prof. Dr. Andreas Meyer-Eschenbach	B-1
Anhang C-1: Varianz durch Gewindereibwert.....	C-1
Anhang C-2: Standardabweichung des Quotienten der zulässigen Querkraft und dem Anziehdrehmoment	C-1
Anhang D-1: Anteil der Kopfreibung an der Gesamtreibung bei Zylinderschrauben	D-1
Anhang E-1: Programm NKS V 2024	E-1
Anhang E-2: Präsentationsfolien des Vortrags „Berücksichtigung von Streuungen bei Einflussgrößen zur Berechnung von Schraubenverbindungen“.....	E-2

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Zentrisch belastete einfache Durchsteckschraubverbindung	5
Abbildung 2: Wirkungsbereiche der Reibwerte.....	15
Abbildung 3: Wahrscheinlichkeitsverteilung (diskret) und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (kontinuierlich).....	19
Abbildung 4: Histogramme mit variierender Anzahl an Intervallen bei 1000 Werten	21
Abbildung 5: Dichteverlauf und Verteilungsfunktion einer Normalverteilung	26
Abbildung 6: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen mit variierenden Parametern..	27
Abbildung 7: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Einflussgrößen und ihrer Summe	31
Abbildung 8: Vergleich der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer Normalverteilung und einer Dichteschätzung einer Monte-Carlo- Simulation	35
Abbildung 9: Einfluss der Standardabweichung auf die Dichteschätzung in Monte- Carlo-Simulationen	36
Abbildung 10: Verlauf einer rechtsschiefen Wahrscheinlichkeitsdichtekurve	38
Abbildung 11: Vergleich der oberen Grenzwerte aus Monte-Carlo-Simulationen mit logarithmischen, linearen und Sollwert-Grenzwerten	40
Abbildung 12: Vergleich der unteren Grenzwerte aus Monte-Carlo-Simulationen mit logarithmischen, linearen und Sollwert-Grenzwerten.....	42
Abbildung 13: Normalisierte Dichteschätzungen der Monte-Carlo-Simulationen mit verschiedener Anzahl an Faktoren.....	47
Abbildung 14: Anteile von Kopf- und Gewindereibung und Gewindesteigung am Anziehdrehmoment.....	56
Abbildung 15: Anteil der Kopfreibung an der Gesamtreibung in Abhängigkeit vom Nenndurchmesser d	57
Abbildung 16: Reibwertverteilung der einzelnen Reibwerte und des Gesamtreibwerts.....	59
Abbildung 17: Kerndichteschätzung (Monte-Carlo-Simulation) und analytisch bestimmte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von y im Vergleich zum Minimalwert.....	62
Abbildung 18: Untere Grenzwerte der Verteilungsfunktion durch Monte-Carlo- Simulation und Normalverteilung	64
Abbildung 19: Bestimmung des Erhöhungsfaktors zur Anpassung der zulässigen Querkraft.....	66
Abbildung 20: Flanschverbindung mit Mehrschraubenverbindung,.....	67
Abbildung 21: Bestimmung des Erhöhungsfaktors bei Mehrschraubenverbindungen	68

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Grenzwerte der Einflussgrößen	15
Tabelle 2: Summierte Wahrscheinlichkeit bei $\pm k$ Standardabweichungen vom Mittelwert	27
Tabelle 3: Ausgewählte Quantile der Normalverteilung	28
Tabelle 4: Bestimmung der Grenzwerte durch lineare und logarithmische Berechnung	39
Tabelle 5: Summierte Wahrscheinlichkeit bis $\mu + k \cdot \sigma$ einer Normalverteilung	41
Tabelle 6: Minimal- und Maximalwerte sowie zugehörige Wahrscheinlichkeiten des Unter- und Überschreitens	46
Tabelle 7: Wahrscheinlichkeiten für unterschiedliche Anzahlen von Ausfällen bei einer Monte-Carlo-Simulation mit einer Ausfallwahrscheinlichkeit von zwei pro Milliarde (Six-Sigma-Methode).....	53
Tabelle 8: Abhängigkeit verschiedener Rechengrößen von Reibwerten und Anziehungsfaktor.....	70

Symbol- und Formelverzeichnis

Lateinische Symbole

Zeichen	Bezeichnung	Einheit
Kleinbuchstaben		
d_2	Flankendurchmesser	mm
d_3	Kerndurchmesser	mm
d_S	Spannungsdurchmesser	mm
d_W	Außendurchmesser der Kopfauflage	mm
f_{ges}	Summe der Verformung von Schraube und verspannten Platten	μm
f_P	Verformung der verspannten Platten unter Krafteinwirkung	μm
f_S	Verformung der Schraube unter Krafteinwirkung	μm
f_Z	Setzbetrag	μm
$m_{eff,min}$	Mindesteinschraubtiefe	mm
n	Krafteinleitungsfaktor	
p_G	Grenzflächenpressung	$\frac{N}{mm^2}$
$p_{MB max}$	Flächenpressung unter dem Schraubenkopf	$\frac{N}{mm^2}$
q_F	Anzahl der kraftübertragenden inneren Trennfugen	
Großbuchstaben		
$A_{p min}$	Minimale Auflagefläche	mm ²
A_S	Spannungsquerschnitt	mm ²
A_τ	Schraubenquerschnitt in der Trennfugenebene	mm ²
D_{Ki}	Innerer Kopfauflegedurchmesser	mm
D_{Km}	Mittlerer Durchmesser für das Reibungsmoment unter der Kopfauflage	mm
F_A	Axiale Betriebskraft	N
$F_{K erf}$	Erforderliche Mindestklemmkraft	N
F_{KQ}	Erforderliche Mindestklemmkraft durch Querbelastung	N

Zeichen	Bezeichnung	Einheit
F_M	Montagevorspannkraft	N
$F_{M \max}$	Maximale Montagevorspannkraft	N
$F_{M \min}$	Minimale Montagevorspannkraft	N
$F_{M \text{zul}}$	Zulässige Montagevorspannkraft	N
F_Q	Querkraft	N
$F_{Q \max}$	Maximale Querkraft	N
$F_{Q \text{zul}}$	Zulässige Querkraft	N
F_{PA}	Plattenzusatzkraft	N
F_{SA}	Schraubenzusatzkraft	N
F_{SAa}	Dynamische Betriebskraft	N
F_{SAo}	Obere Schraubenzusatzkraft	N
F_{SAu}	Untere Schraubenzusatzkraft	N
$F_{S \max}$	Gesamtschraubenkraft	N
F_V	Vorspannkraft	N
F_Z	Vorspannkraftverlust durch Setzen	N
M_A	Anziehdrehmoment	Nm
P	Steigung	mm
$R_{p0,2}$	Streckgrenze	$\frac{N}{mm^2}$
S_A	Sicherheit gegen Abscheren	
S_D	Sicherheit gegen Dauerbruch	
S_F	Sicherheit gegen Fließen	
S_P	Sicherheit gegen Flächenpressung	

Griechische Symbole

Zeichen	Bezeichnung	Einheit
α_A	Anziehungsfaktor	
α_A'	Anziehungsfaktor ohne Reibwerteeinfluss	
δ_P	Nachgiebigkeit der verspannten Platten	$\frac{mm}{N}$

Zeichen	Bezeichnung	Einheit
δ_S	Nachgiebigkeit der Schraube	$\frac{mm}{N}$
μ_G	Gewindereibwert	
μ_{ges}	Gesamtreibwert aus Kopf- und Gewindereibwert	
μ_K	Kopfreibwert	
μ_T	Kreisfrequenz	
ν	Ausnutzungsgrad	
σ_a	Ausschlagspannung	$\frac{N}{mm^2}$
σ_{AS}	Ertragbare Ausschlagspannung	$\frac{N}{mm^2}$
$\sigma_{M\ zul}$	Zulässige Zugspannung	$\frac{N}{mm^2}$
$\sigma_{z\ max}$	Maximale Zugspannung	$\frac{N}{mm^2}$
τ_B	Scherfestigkeit	$\frac{N}{mm^2}$
$\tau_{Q\ max}$	Maximale Scherspannung	$\frac{N}{mm^2}$
Φ	Kraftverhältnis	

Definitionen

Begriff	Definition
Statistisch	Statistisch bezieht sich auf die Methoden und Techniken zur Sammlung, Analyse und Interpretation von Daten, um Muster und Zusammenhänge zu erkennen. Beispiele beinhalten die Berechnung von Mittelwerten, Varianz und das Erstellen von Histogrammen und Normalverteilungen.
Stochastisch	Stochastisch beschreibt Prozesse oder Systeme, die durch Zufälligkeit und Wahrscheinlichkeiten charakterisiert sind. Es umfasst die Modellierung und Analyse zufälliger Ereignisse, wie sie in Monte-Carlo-Simulationen auftreten.

1 Einleitung

Schraubenverbindungen sind ein wesentlicher Bestandteil vieler mechanischer Konstruktionen und werden in zahlreichen industriellen Anwendungen eingesetzt. Ihre Zuverlässigkeit und Sicherheit sind von entscheidender Bedeutung, da sie oft hohen Belastungen standhalten müssen. Die VDI 2230 ist ein anerkannter Standard für die Berechnung und Auslegung von Schraubenverbindungen und bietet Ingenieuren eine strukturierte Methode, um diese wichtigen Verbindungen zu dimensionieren und zu bewerten. Die Berücksichtigung von Streuungen, wie sie beispielsweise bei Reibwerten und Anziehungsfaktoren bestehen, ist hierbei besonders wichtig. Diese Streuungen können zu großen Abweichungen zwischen minimalen und maximalen berechneten Werten führen und erfordern daher eine sorgfältige Analyse und Bewertung. In dieser Arbeit wird ein neuer Ansatz zur Berechnung und Auslegung von Schraubenverbindungen vorgestellt, der die stochastische Natur dieser Streuungen berücksichtigt.

Im Rahmen der Masterarbeit wurde das Thema der „Berücksichtigung von Streuungen bei Einflussgrößen zur Berechnung von Schraubenverbindungen“ beim NKS 2024 (Norddeutsches Kolloquium Schraubenverbindungen) präsentiert (Anhang E-1). Die Präsentationsfolien im Anhang E-2 dokumentieren die Kerninhalte dieser Arbeit. Die Masterarbeit orientiert sich am roten Faden dieser Präsentation und denselben Beispielen, um eine konsistente und nachvollziehbare Darstellung der Ergebnisse zu gewährleisten.

Der folgende Abschnitt beleuchtet die Motivation für diese Arbeit und zeigt auf, warum eine stochastische Herangehensweise nicht nur sinnvoll, sondern auch notwendig ist, um effizientere und wirtschaftlichere Schraubenverbindungen zu entwickeln.

1.1 Motivation

Die Berechnung und Auslegung von Schraubenverbindungen gemäß der VDI 2230 ist eine wesentliche Methode, um die Sicherheit und Funktionalität mechanischer Verbindungen zu gewährleisten. Dabei müssen zahlreiche Einflussfaktoren berücksichtigt werden, die zum Teil starke Streuungen aufweisen. Derzeit werden für diese Berechnungen oft Tabellenwerte genutzt, die große Abweichungen zwischen Minimal- und Maximalwerten aufweisen. Um die Sicherheit zu garantieren, wird in der herkömmlichen Methodik häufig der ungünstigste Fall angenommen, bei dem alle Einflussgrößen gleichzeitig ihre Grenzwerte annehmen. Diese Annahme führt jedoch dazu, dass Schraubenverbindungen in der Praxis oftmals überdimensioniert werden oder für die Schraube eine unnötig hohe Festigkeitsklasse gewählt wird, da in den seltensten Fällen alle ungünstigsten Fälle

gleichzeitig eintreten. Mit jeder zusätzlichen streuenden Einflussgröße steigt der Unterschied zwischen dem Minimal- und Maximalwert.

Eine überdimensionierte Schraubenverbindung bringt mehrere Nachteile mit sich. Zum einen werden Material und Bauraum nicht effizient genutzt, was zu höheren Produktions- und Materialkosten führt (Anhang B-3). Zum anderen kann die Wahl einer zu hohen Festigkeitsklasse unerwünschte Effekte wie eine verringerte Bruchdehnung oder eine erhöhte Anfälligkeit für Wasserstoffversprödung zur Folge haben [1].

In Anbetracht der geringen Eintrittswahrscheinlichkeit der Grenzwerte erscheint ein stochastisches Herangehen an die Berechnung der Schraubenverbindungen sinnvoll. Die Motivation für diese Arbeit liegt darin, eine alternative Methodik zur Berechnung und Auslegung von Schraubenverbindungen zu entwickeln, die die natürlichen Streuungen der Einflussgrößen realistisch berücksichtigt. Eine stochastische Herangehensweise bietet die Möglichkeit, die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Einflussgrößen zu modellieren und die tatsächliche Ausfallwahrscheinlichkeit als Kriterium in die Berechnung einzubeziehen.

Eine stochastische Betrachtung der Einflussgrößen hat das Potenzial, die Bandbreite der berechneten Werte besser zu definieren und die Auslegung der Schraubenverbindungen effizienter zu gestalten. Dies kann dazu führen, dass Schraubenverbindungen präziser und kosteneffizienter dimensioniert werden. Die realistischere Modellierung der Einflussgrößen ermöglicht es, die Wahrscheinlichkeit des Eintritts der Grenzwerte zu quantifizieren und somit die Dimensionierung der Schraubenverbindungen an den tatsächlichen Betriebsbedingungen auszurichten.

Zusammengefasst zielt diese Arbeit darauf ab, die bisherige konservative Methodik der Schraubenverbindungsrechnung zu hinterfragen und durch eine stochastische Herangehensweise zu ersetzen, um die Effizienz und Wirtschaftlichkeit der Auslegung zu verbessern.

1.2 Zielsetzung

Das Ziel dieser Arbeit ist es, eine präzisere und wirtschaftlichere Methode zur Berechnung und Auslegung von Schraubenverbindungen zu entwickeln, die die natürlichen Streuungen der Einflussgrößen berücksichtigt. Durch die Anwendung stochastischer Methoden soll die bisherige konservative Vorgehensweise hinterfragt und ersetzt werden. Dies umfasst die Modellierung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Einflussgrößen und die Integration der Ausfallwahrscheinlichkeiten in die Berechnungen. Die Arbeit soll zeigen, dass eine stochastische Herangehensweise zu realistischeren und

weniger überdimensionierten Schraubenverbindungen führt, was letztlich zu effizienteren Materialnutzungen und Kosteneinsparungen beitragen kann. Ein weiteres Ziel ist es, praktische Anwendungen dieser Methodik anhand von Beispielen in MATLAB zu demonstrieren und die Vorteile gegenüber der herkömmlichen Methodik aufzuzeigen.

Zur Erreichung dieser Ziele werden folgende Aufgabenpakete bearbeitet:

1. **Analysieren der Literatur:** Untersuchung ausgewählter Grundlagen zur Berechnung von Schraubenverbindungen und zur Stochastik.
2. **Auswählen und Quantifizieren von besonders relevanten Einflussgrößen und deren Streuungen:** Identifikation und Bewertung der wichtigsten Einflussgrößen, die die Berechnung von Schraubenverbindungen beeinflussen.
3. **Finden von aussagekräftigen Auswirkungen von streuenden Einflussgrößen bei der Berechnung von Schraubenverbindungen:** Analyse der Effekte, die die Streuungen der Einflussgrößen auf die Berechnungsergebnisse haben.
4. **Analysieren der Fehlerfortpflanzung und der relativen und absoluten Streuungen in Rechenschritten bei der Berechnung von Schraubenverbindungen und Darstellung anhand von Schaubildern:** Untersuchung der Fehlerfortpflanzung und der damit verbundenen Streuungen während der Berechnung.
5. **Ableiten von Empfehlungen zur Berechnung:** Entwicklung praxisnaher Empfehlungen zur verbesserten Berechnung und Auslegung von Schraubenverbindungen.

1.3 Inhalt der Arbeit

Zunächst werden die Grundlagen der Schraubenverbindungsrechnung nach VDI 2230 erläutert und kritisch bewertet. Dies umfasst eine detaillierte Darstellung der Rechenschritte sowie eine Analyse der Probleme, die durch die Verwendung konservativer Tabellenwerte entstehen.

Anschließend werden die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der stochastischen Methoden vorgestellt. Diese theoretischen Konzepte werden auf die Problemstellung der Schraubenverbindungsrechnung angewendet, um die natürlichen Streuungen der Einflussgrößen realistisch zu modellieren.

Im folgenden Abschnitt wird die praktische Anwendung der stochastischen Methodik am Beispiel der Berechnung des Anziehdrehmoments in MATLAB demonstriert. Dies beinhaltet die analytische Berechnung von Mittelwert und Standardabweichung, die Durchführung von Monte-Carlo-Simulationen und die Analyse der Ergebnisse.

Im Kapitel 5 werden die bisherigen Berechnungsschritte angepasst und Verbesserungspotenziale aufgezeigt. Dies schließt die Bildung eines gemittelten Gesamtreibwerts, eine

detaillierte Betrachtung der Berechnung der zulässigen Querkraft und die Anwendung der stochastischen Methodik auf Mehrschraubenverbindungen ein.

Abschließend werden die Ergebnisse der stochastischen Herangehensweise bei der Berechnung von Schraubenverbindungen zusammengefasst, kritisch bewertet und ein Ausblick auf zukünftige Forschung und Anwendungsmöglichkeiten gegeben. Die Arbeit endet mit einer Zusammenfassung der erzielten Ergebnisse und einem Ausblick auf mögliche Weiterentwicklungen.

2 Grundlagen der Berechnung von Schraubenverbindungen

Die Grundlagen der Berechnung von Schraubenverbindungen bilden das Fundament dieser Masterarbeit. Im Folgenden werden daher die Rechenschritte, die nach der weltweit verbreiteten VDI 2230 für die Berechnung von Schraubenverbindungen maßgeblich sind, beleuchtet und verschiedene Zusammenhänge hervorgehoben, die von besonderer Relevanz für die nachfolgenden Kapitel sind. Im Rahmen dieser Arbeit wird eine zentrisch belastete einfache Durchsteckschraubverbindung betrachtet, die exemplarisch in Abbildung 1 dargestellt ist.

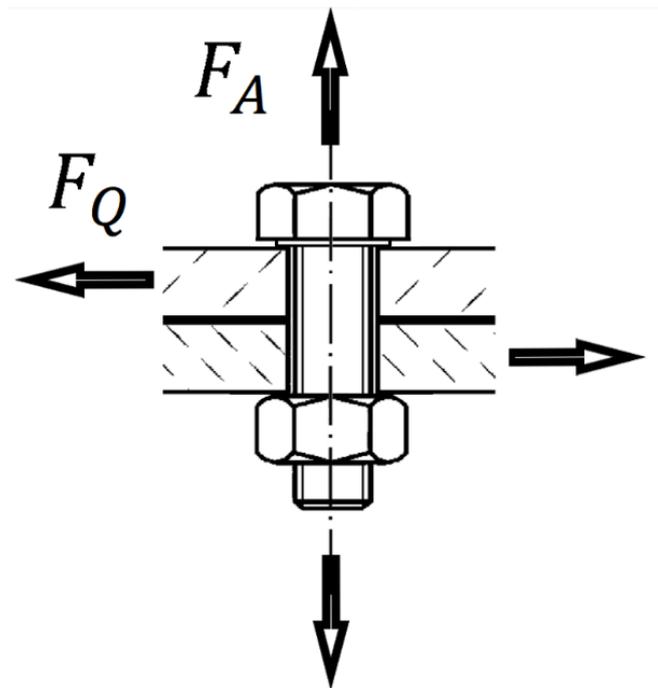


Abbildung 1: Zentrisch belastete einfache Durchsteckschraubverbindung
(In Anlehnung an [2])

Die Abbildung zeigt diese Verbindung inklusive der möglichen angreifenden Axialkräfte F_A und Querkraft F_Q .

2.1 Rechenschritte nach VDI 2230

Die VDI 2230 ist eine vom „Verein Deutscher Ingenieure e.V.“ stammende Richtlinie für die Berechnung von Schraubenverbindungen. Blatt 1 der VDI 2230 behandelt dabei die Einschraubenverbindung. Dabei wird eine systematische schrittweise Berechnung durchgeführt, in denen neben der Berechnung von relevanten Größen der Schrauben-

verbindungen auch Informationen und Tabellen zur Auslegung enthalten sind. Die Formeln der VDI 2230 bilden die Grundlage der Berechnungen der Schraubenverbindungen in dieser Masterarbeit. Das Vorgehen umfasst die Rechenschritte von R0 bis R13, die sich in die vier Kategorien, „Vorgaben“, „Verspannung“, „Beanspruchungsfälle“ und „Festigkeitsnachweise“, aufteilen lassen [1]. In den folgenden Unterkapiteln werden die Rechenschritte nach [1, Kap. 6] vorgestellt.

2.1.1 R0 – R2: Vorgaben

In den ersten Rechenschritten von R0 bis R2 geht es um das Bestimmen von Vorgaben für die nachfolgenden Rechenschritte aus den Randbedingungen und Anforderungen.

Im Rechenschritt R0 wird in mehreren Teilschritten der Nenndurchmesser bestimmt. In diesen Teilschritten werden der Kraftbetrag, die Krafrichtung, der zeitliche Verlauf der Kraft, die vorgesehene Festigkeitsklasse der Schraube und das Anziehverfahren berücksichtigt. Diese verschiedenen Eigenschaften haben direkte Auswirkungen auf die Größe des Nenndurchmessers. Für die Schraubenfestigkeit ist es am günstigsten, wenn eine statische Kraft zentrisch angreift. Exzentrisch angreifende und dynamische Belastungen sind für die Schraube eher ungünstig und bedürfen deshalb eines größeren Durchmessers.

Im Rechenschritt R1 geht es um die Bestimmung des Anziehungsfaktors. Je nach Anziehverfahren variiert dieser unterschiedlich stark. Der Anziehungsfaktor ist ein Maß für die Streubreite der Montagevorspannkraft, die sich einstellt, wenn die Schraube angezogen wird. Konkret stellt der Anziehungsfaktor α_A den Quotienten aus der maximalen zur minimalen Montagevorspannkraft (1) dar.

$$\alpha_A = \frac{F_{M \max}}{F_{M \min}} \quad (1)$$

Da es bei unterschiedlichen Anziehverfahren auch Unterschiede in der Präzision des Anziehens und verschiedene Ursachen für die Streuung gibt, können die Werte für den Anziehungsfaktor untereinander stark variieren.

Im Berechnungsschritt R2 wird die erforderliche Mindestklemmkraft bestimmt. Dieser Wert stellt die untere Grenze der Vorspannkraft dar, die nicht unterschritten werden darf, um ein weiteres Erfüllen der Funktionen zu garantieren. In diesem Berechnungsschritt werden in mehreren Teilschritten verschiedene Belastungen berechnet, die je nach Einsatzumgebung auf die Schraube wirken können. Die Schraube muss jeder dieser Belastungen standhalten, jedoch ist für die Auslegung nur die kritische Belastung nötig, welche durch den Vergleich der Größen bestimmt wird. Diese kritische Größe ist bei den darauffolgenden Schritten maßgeblich für die Festigkeitsnachweise. Verglichen wird

die Kraft, die für die Übertragung einer Querkraft durch Reibschluss zwischen den verspannten Platten benötigt wird, mit der Summe aller axialen Kräfte. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Berechnung der Mindestklemmkraft durch Querbelastung (2) in den Fokus gerückt, da diese aufgrund der Trennfugenreibung zu stark streuenden Werten tendiert (Anhang B-1).

$$F_{K\,erf} = F_{KQ} = \frac{F_{Q\,max}}{q_F \cdot \mu_{T\,min}} \quad (2)$$

Dabei ist $F_{Q\,max}$ die maximale Querkraft, q_F die Anzahl der kraftübertragenden inneren Trennfugen und $\mu_{T\,min}$ der minimale Reibwert in der Trennfuge.

Im Betrieb können zusätzlich Drehmomente um die Schraubenachse auftreten, die die erforderliche Klemmkraft erhöhen. Da solche Drehmomente jedoch in der Praxis eher selten vorkommen, wird dieser Kraftanteil in der Formel nicht berücksichtigt.

Aus den ersten drei Berechnungsschritten R0 bis R2 werden die Größen Nenndurchmesser d , Anziehungsfaktor α_A und die erforderliche Mindestklemmkraft $F_{K\,erf}$ für weitere Berechnungen verwendet.

2.1.2 R3 – R6: Verspannung

In den nächsten Schritten der Schraubenverbindungsrechnung geht es um das Verhalten der Verbindung im verspannten Zustand.

Im Rechenschritt R3 wird zunächst das Kraftverhältnis Φ zwischen der Schraube und den verspannten Platten untersucht. Entscheidend dabei ist das Verformungsverhältnis zwischen der Schraube und den verspannten Platten unter einer wirkenden Kraft. Dies beeinflusst später die Änderung der Vorspannkraft, wenn eine axiale Betriebskraft auf die Schraube wirkt. Zudem wird der Krafteinleitungsfaktor n abhängig vom Einbauort der Schraube bestimmt. Dieser Faktor beschreibt, auf welcher Höhe zwischen den verspannten Bauteilen die Kraft angreift. Während eine Kraft, die unmittelbar unter dem Schraubenkopf und der Mutter angreift, eine Entlastung und Ausdehnung der Platten hervorruft, ist dies bei einer Kraft, die in der Trennfuge angreift, nicht der Fall. Für das Kraftverhältnis (3) gilt:

$$\Phi_n = n \cdot \frac{\delta_P}{\delta_S + \delta_P} = \frac{f_P}{f_S + f_P} = \frac{F_{SA}}{F_{SA} + F_{PA}} \quad (3)$$

δ_P und δ_S sind die Nachgiebigkeit der verspannten Platten und der Schraube unter Krafteinwirkung. f_P und f_S sind die gemessene absolute Verformung der verspannten Platten und der Schraube unter einer bestimmten wirkenden Kraft. F_{SA} ist die Schraubenzusatzkraft, die durch eine Betriebslast zusätzlich auf die Schraube wirkt. F_{PA} ist die

Plattenzusatzkraft, die durch eine Betriebslast hervorgerufen wird und entlastend auf die Platten wirkt.

Mithilfe der Werte für die Verformung und den Kräfteinleitungsfaktor kann ein Verspannungsdiagramm erstellt werden, das die Visualisierung verschiedener Kräfte und Verformungen ermöglicht. Da es für das weitere Vorgehen in dieser Arbeit jedoch nicht relevant ist, wird keine detaillierte Betrachtung durchgeführt.

Beim Rechenschritt R4 wird der Kraftverlust durch das Setzen der Rauigkeitsspitzen berechnet. Nach dem Montieren einer Schraube entstehen durch die Montagevorspannkraft Pressungen zwischen verschiedenen Oberflächen. Dazu gehören die Trennfugen und äußeren Oberflächen der verspannten Platten, die Unterseite des Schraubenkopfes und der Mutter, sowie die Oberflächen im Gewinde. Rauigkeitsspitzen, die sich auf diesen Oberflächen befinden, geben unter dieser Pressung nach, was zu einer Entlastung der Schraubenverbindung führt. Der Vorgang dieses Nachgebens der Rauigkeitsspitzen wird auch Setzen genannt. Diese Entlastung macht sich in Form einer Verringerung der Vorspannkraft bemerkbar. Die Bestimmung dieses Vorspannkraftverlusts kann entweder durch Berechnung der Nachgiebigkeit der Schraube und der verschraubten Bauteile oder durch Messen der Vorspannkraft und der gesamten Verformung beim Verschrauben (4) erfolgen.

$$F_Z = \Delta F_V = \frac{f_Z}{\delta_S + \delta_P} = \frac{f_Z}{f_{ges}} \cdot F_V \quad (4)$$

Mit dem Setzbetrag f_Z und der elastischen Längenänderung f_{ges} , die sich aus der Längenänderung der Schraube und der Platten zusammensetzt.

In jedem Fall werden zusätzlich die Werte für die Rautiefen der relevanten Oberflächen und die Unterscheidung zwischen axialer oder Querbelastrung benötigt, um den Setzbetrag f_Z der Oberflächen zu bestimmen. Änderungen der Vorspannkraft durch Temperatureinflüsse können in der Praxis eintreten, werden hier jedoch nicht berücksichtigt.

Im Rechenschritt R5 werden die in den Schritten R2 bis R4 berechneten Werte benötigt, um die minimal erforderliche Montagevorspannkraft $F_{M \min}$ (5) zu bestimmen. Diese setzt sich zusammen aus der erforderlichen Mindestklemmkraft $F_{K \text{ erf}}$, der Schrauben-zusatzkraft, die durch eine angreifende Betriebslast $F_{A \max}$ entsteht und dem Vorspannkraftverlust durch Setzen F_Z .

$$F_{M \min} = F_{K \text{ erf}} + (1 - \Phi_n) \cdot F_{A \max} + F_Z \quad (5)$$

Im Rechenschritt R6 wird die maximal auftretende Montagevorspannkraft $F_{M \max}$ (6) aus dem Anziehungsfaktor α_A und der minimal erforderlichen Montagevorspannkraft $F_{M \min}$ berechnet. In diesem Schritt zeigt sich die Wichtigkeit des Anziehverfahrens. Eine große

Streuung der Werte bewirkt einen großen Anziehungsfaktor α_A . Dieser hat einen direkten Einfluss auf die maximale Vorspannkraft, die bei der Auslegung von Schraubenverbindungen entscheidend ist.

$$F_{M \max} = \alpha_A \cdot F_{M \min} \quad (6)$$

Aus den Rechenschritten R3 bis R6 ergeben sich der Krafteinleitungsfaktor ϕ_n , der Vorspannkraftverlust durch Setzen F_Z , die minimal erforderliche Montagevorspannkraft $F_{M \min}$ und die maximal auftretende Montagevorspannkraft $F_{M \max}$.

2.1.3 R7 – R9: Beanspruchungsfälle

In den Rechenschritten R7 bis R9 werden die Belastungen bei der Montage und im Betrieb berechnet.

Im Rechenschritt R7 wird die maximal zulässige Belastung der Schraube bei der Montage bestimmt. Bei der Montage treten in der Schraube durch das angelegte Anziehdrehmoment neben der axialen Last durch die Streckung der Schraube auch Torsionskräfte in Form einer Schubspannung über den Spannungsquerschnitt A_S (7) auf.

$$A_S = \left(\frac{d_2 + d_3}{2} \right)^2 \cdot \frac{\pi}{4} \quad (7)$$

Dabei ist d_2 der Flankendurchmesser und d_3 der Kerndurchmesser des Schraubengewindes.

Die Berechnung der resultierenden Belastung auf die Schraube, die sich aus den überlagerten Spannungen ergibt, führt zur zulässigen Montagevorspannkraft $F_{M \text{ zul}}$ (8):

$$F_{M \text{ zul}} = \sigma_{M \text{ zul}} \cdot A_S = \frac{v \cdot R_{p0,2 \min}}{\sqrt{1 + 3 \cdot \left[\frac{4}{d_S} \cdot (0,159 \cdot P + 0,577 \cdot \mu_G \cdot d_2) \right]}} \cdot \left(\frac{d_2 + d_3}{2} \right)^2 \cdot \frac{\pi}{4} \quad (8)$$

Mit der zulässigen Zugspannung $\sigma_{M \text{ zul}}$, dem Ausnutzungsgrad v , der Mindeststreckgrenze $R_{p0,2 \min}$, dem Spannungsdurchmesser d_S der Schraube, der Steigung P und dem Gewindereibwert μ_G .

Bei der Auslegung haben viele Faktoren einen direkten Einfluss auf diesen Wert, darunter die Festigkeitsklasse und verschiedene geometrische Größen der Schraube sowie die Gewindereibung. Das Vergleichen dieser zulässigen Montagevorspannkraft mit der maximal auftretenden Montagevorspannkraft stellt den ersten Kontrollpunkt der Berechnungen dar.

$$F_{M \text{ zul}} \geq F_{M \max} \quad (9)$$

Ist die maximal auftretende Montagevorspannkraft $F_{M \max}$ größer, müssen Änderungen in der Auslegung vorgenommen werden. Dies kann durch das Anpassen einer oder mehrerer der genannten Faktoren geschehen. Während das Anpassen der Festigkeitsklasse einen kleinen Aufwand darstellt, sofern die Voraussetzungen dafür gegeben sind, kann unter Umständen der Umstieg auf einen anderen Schraubennennendurchmesser notwendig sein. In diesem Fall müssten alle Rechenschritte, die durch die Umstellung der geometrischen Daten der Schraube betroffen sind, erneut durchgeführt werden. Zusammengefasst geht es in diesem Rechenschritt darum, zu überprüfen, ob beim Einstellen der benötigten Montagevorspannkraft durch das gleichzeitige Wirken des Anziehdrehmoments zulässige Festigkeitswerte in der Schraube überschritten werden.

Im Rechenschritt R8 wird zunächst die Gesamtschraubenkraft $F_{S \max}$ (10) berechnet, die die Summe der maximal auftretenden Montagevorspannkraft $F_{M \max}$ und der Schraubenzusatzkraft darstellt. Die Schraubenzusatzkraft ist der Teil der Betriebskraft $F_{A \max}$, der eine Zusatzbelastung der Schraube bewirkt. Der Grund dafür, dass nicht die gesamte Betriebskraft auf die Schraube wirkt, liegt darin, dass durch eine zusätzliche Belastung der Schraube, diese sich längt, die Platten sich dadurch ausdehnen können und somit die von der elastischen Verformung der Platten ausgehende Kraft verringert wird.

$$F_{S \max} = F_{M \max} + \Phi_n \cdot F_{A \max} \quad (10)$$

Die Gesamtschraubenkraft $F_{S \max}$ wird mithilfe der Spannungsquerschnittsfläche A_S der Schraube in eine Spannung $\sigma_{z \max}$ (11) umgewandelt, die in axialer Richtung wirkt.

$$\sigma_{z \max} = \frac{F_{S \max}}{A_S} \quad (11)$$

Die Sicherheit gegen das Überschreiten der Streckgrenze S_F (12), die sich aus der wirkenden Spannung $\sigma_{z \max}$ und der Dehngrenze $R_{p0,2}$ des Schraubenwerkstoffs ergibt, stellt den ersten von mehreren Sicherheitswerten dar.

$$S_F = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_{z \max}} \geq 1,0 \quad (12)$$

Grundsätzlich muss der Wert für eine Sicherheit eins oder größer sein, um eine ausreichende Sicherheit zu gewährleisten. Die VDI 2230 überlässt dem Anwender das Festlegen der erforderlichen Sicherheit. [3, S. 35]

Im Rechenschritt R9 wird die dynamische Betriebskraft betrachtet. Für die Berechnung ist die Amplitude der Schwingbeanspruchung F_{SAa} (13) relevant, die der halben Differenz des oberen und unteren Werts (F_{SAo} und F_{SAu}) für die Schwingbelastung entspricht.

$$\sigma_a = \frac{F_{SAa}}{A_S} = \frac{F_{SAo} - F_{SAu}}{2 \cdot A_S} \quad (13)$$

Auch hier wird mithilfe der Spannungsquerschnittsfläche A_S die dynamische Betriebskraft in eine Spannung σ_a umgewandelt, die mit der ertragbaren Ausschlagsspannung σ_{AS} verglichen wird, um den Wert für die Sicherheit gegen Dauerbruch S_D (14) zu erhalten.

$$S_D = \frac{\sigma_{AS}}{\sigma_a} \geq 1 \quad (14)$$

Die ertragbare Ausschlagsspannung ist abhängig vom Fertigungsverfahren der Schraube und dem Nenndurchmesser. Außerdem kann für eine zeitfeste Auslegung ein Faktor zur Erhöhung dieses Wertes aus den Schwingspielzahlen für die dauerhafte Auslegung und die gewählte Auslegung bestimmt werden.

Zusammengefasst: In den Rechenschritten R7 bis R9 werden die zulässige Montagevorspannkraft $F_{M\ zul}$, die Sicherheit gegen Fließen S_F und die Sicherheit gegen Dauerbruch S_D berechnet.

2.1.4 R10 – R13: Festigkeitsnachweise

In den letzten Schritten R10 bis R13 der VDI 2230 stehen die Festigkeitsnachweise und die Berechnung des Anziehdrehmoments im Vordergrund.

Im Rechenschritt R10 wird die Flächenpressung unter dem Schraubenkopf $p_{MB\ max}$ (15) betrachtet, die sich aus der zulässigen Montagevorspannkraft $F_{M\ zul}$ und der maximalen Schraubenzusatzkraft $F_{SA\ max}$ ergibt. Um die maximale Flächenpressung zu bestimmen, wird zu den summierten Kräften noch die minimale Auflagefläche $A_{p\ min}$ (16) benötigt, die die Kreisringfläche zwischen dem inneren und dem äußeren Kopfauflegedurchmesser (d_W und D_{Ki}) beschreibt.

$$p_{MB\ max} = \frac{F_{M\ zul} + F_{SA\ max}}{A_{p\ min}} \quad (15)$$

$$A_{p\ min} = \frac{\pi}{4} \cdot (d_W^2 + D_{Ki}^2) \quad (16)$$

Der innere Kopfauflegedurchmesser D_{Ki} wird dabei vom Bohrungsdurchmesser bestimmt.

Die Grenzflächenpressung p_G ist der Tabellenwert für die zulässige Pressung. Diese wird im nächsten Schritt als Referenz für die Bestimmung des Sicherheitswerts gegen Flächenpressung S_P (17) eingesetzt.

$$S_P = \frac{p_G}{p_{MB\ max}} \geq 1,0 \quad (17)$$

Im Rechenschritt R11 wird die Mindesteinschraubtiefe $m_{eff,min}$ der Schraubenverbindung bestimmt. Grundsätzlich gilt, dass mit zunehmender Scherfestigkeit des Innengewindes die Mindesteinschraubtiefe sinkt. Gleichzeitig spielt auch die Festigkeitsklasse der Schraube eine Rolle. Je höher diese ist, desto größer wird auch die Mindesteinschraubtiefe im Innengewinde. Die genauen Werte können einem zugehörigen Diagramm in der VDI 2230 entnommen werden (Quelle). Wenn beispielsweise Stahlschrauben und -mutter mit gleicher Festigkeitsklasse eingesetzt werden, reicht die Höhe der Mutter als Mindesteinschraubtiefe für die Belastung aus. Anders ist dies bei Innengewinden in Platten. Als Richtwert für die Mindesteinschraubtiefe bei Stahlplatten mit Innengewinde gilt mindestens der Nenndurchmesser der Schraube, während dieser bei Platten mit geringerer Festigkeit doppelt bis dreifach so groß ist.

Im Rechenschritt R12 wird die Sicherheit gegen das Abscheren bestimmt. Obwohl auftretende Querkräfte per Reibschluss übertragen werden sollten, muss die Schraube im Falle einer Überlast in der Lage sein, die Querkraft ohne Abscheren zu übertragen. Neben der auftretenden Querkraft spielt bei der Berechnung der Schubspannung $\tau_{Q max}$ (18), die in der Schraube wirkt, die Querschnittsfläche der Schraube A_τ innerhalb der Trennfugenebene eine Rolle.

$$\tau_{Q max} = \frac{F_{Q max}}{A_\tau} \quad (18)$$

Aus Tabellenwerten zur Festigkeitsklasse der Schraube kann der Quotient der Scherfestigkeit zur Zugfestigkeit entnommen werden, um dadurch die maximal übertragbare Querkraft zu erhalten.

Für die Berechnung der Sicherheit gegen das Abscheren S_A wird dann der Quotient dieser maximal übertragbaren zu der tatsächlich wirkenden Last (τ_B und $\tau_{Q max}$) bestimmt. Anders als bei den übrigen Sicherheiten, bei denen zunächst eine Sicherheit größer gleich eins gewählt wird, wird hier standardmäßig eine Sicherheit von 1,1 verlangt.

$$S_A = \frac{\tau_B}{\tau_{Q max}} \geq 1,1 \quad (19)$$

Im letzten Schritt R13 der Schraubenverbindungsrechnung wird das Anziehdrehmoment M_A (20) bestimmt. Dieses setzt sich aus drei verschiedenen Anteilen zusammen. Beim Anziehen wirkt zum einen das Moment, das sich aus der Streckung der Schraube beim Eindrehen ergibt. Dieses ist abhängig von der Gewindesteigung, da diese die Streckung pro Schraubenumdrehung angibt. Zudem kommt es im Gewinde beim Eindrehen durch die Vorspannkraft zu Reibung, die mit dem halben Flankendurchmesser als Hebelarm wirkt. Als dritter Anteil wirkt die Reibung unter der Kopfauflage. Auch hier wirkt

die Vorspannkraft, die den Schraubenkopf auf die Oberfläche des verschraubten Bauteils presst und eine Pressung erzeugt. Diese Pressung wirkt entlang des mittleren Reibradius, der sich aus dem äußeren Kopfauflageradius und dem Bohrungsdurchmesser der Platte an der Kopfaufgabe ergibt.

$$M_A = F_{Mzul} \cdot \left(0,159 \cdot P + 0,577 \cdot \mu_G \cdot d_2 + \frac{D_{Km}}{2} \cdot \mu_K \right) \quad (20)$$

Mit dem mittleren Durchmesser D_{Km} (21) und dem Reibwert μ_K für die Kopfreibung.

$$D_{Km} = \frac{1}{2} \cdot (D_{Ki} + d_W) \quad (21)$$

Zusammengefasst: In den Rechenschritten R10 bis R13 werden die Sicherheit gegen Flächenpressung S_P , die effektive Mindesteinschraubtiefe m_{eff} , die Sicherheit gegen Abscheren S_A und das Anziehdrehmoment M_A bestimmt.

2.2 Kritische Bewertung des Rechenverfahrens

Die im vorigen Kapitel beschriebenen Rechenschritte der VDI 2230 bilden die Grundlage für eine robuste Auslegung von Schrauben. Allerdings geben sie keine Auskunft über die Ausfallwahrscheinlichkeit der ausgelegten Schrauben. Eine Ausfallwahrscheinlichkeit als Anforderung kann bei der Auslegung der Schrauben daher nicht berücksichtigt werden. Verschiedene streuende Einflussgrößen verursachen eine Streuung berechneter Größen innerhalb einer Bandbreite, deren obere Grenze ein Vielfaches der unteren Grenze betragen kann. Die meisten dieser streuenden Größen sind normalverteilt (Anhang B-2). Das bedeutet, dass sie sich größtenteils zwischen den Grenzwerten konzentrieren. Daher erscheint eine effizientere Auslegung für eine effektivere Nutzung der Schraube mit geringerer Wahrscheinlichkeit einer Überdimensionierung möglich.

2.2.1 Ausgangssituation

In den Rechenschritten der VDI 2230 werden für die Bestimmung verschiedener Größen Werte für stark streuende Einflussgrößen benötigt. Dazu gehören unter anderem Angaben für die Reibwerte und den Anziehungsfaktor. Die Schraube wird für den ungünstigsten Fall ausgelegt, bei dem diese Einflussgrößen gleichzeitig ihre jeweils kleinsten beziehungsweise größten Werte annehmen. Durch diese Annahme besteht die Möglichkeit, dass die Schraube in den allermeisten Fällen für die tatsächlich auftretende Belastung überdimensioniert ist oder eine zu hohe Festigkeitsklasse gewählt wurde. Zwar ist eine überdimensionierte Schraube nicht direkt ein Problem, jedoch kann eine Reduzierung der Schraubengröße Gewicht und Bauraum einsparen sowie Kosten für Material und

Produktion senken. Eine höhere gewählte Festigkeitsklasse kann ebenfalls verschiedene Nachteile mit sich bringen. Dazu gehören höhere Kosten aufgrund der hochwertigeren Materialien und aufwendigeren Produktionsprozesse (Anhang B-3). Bei höheren Festigkeitsklassen nimmt die Bruchdehnung ab, was abhängig von der Einsatzumgebung nachteilig sein könnte. Bei der Festigkeitsklasse 12.9 besteht zusätzlich erhöhte Anfälligkeit für Wasserstoffversprödung [1]. Zusätzlich steigt mit höherer Festigkeitsklasse die Mindesteinschraubtiefe, wodurch sich eine zusätzliche Anforderung an die Auslegung bildet [3].

2.2.2 Anwendungsbeispiel

Um die breite Streuung der Ergebnisse zu verdeutlichen, wird ein Anwendungsbeispiel verwendet, das auch in der Präsentation im Anhang E-2 behandelt wird. In der Präsentation wird dieses Beispiel zusätzlich durch anschauliche Skizzen unterstützt und prägnant dargestellt.

Nach Durchführung der Rechenschritte R0 bis R13 gemäß VDI 2230 liegt ein Wert für das Anziehdrehmoment vor. Dieses Anziehdrehmoment führt aufgrund unterschiedlicher Reibwerte und Streuung durch das Anziehverfahren in der Montage zu variierenden Vorspannkraften. Die Vorspannkraft lässt sich durch das Umstellen von (20) zu (22) berechnen. Die Streuung durch das Anziehverfahren wird in Form des Anziehungsfaktors in der Gleichung ergänzt. So kann die Streuung der Werte zwischen der minimalen und maximalen Montagevorspannkraft berücksichtigt werden:

$$F_M = \frac{M_A}{\alpha_A \cdot \left(0,159 \cdot P + 0,577 \cdot \mu_G \cdot d_2 + \frac{D_{Km}}{2} \cdot \mu_K \right)} \quad (22)$$

Die Querkraft ist direkt abhängig vom Reibwert in der Trennfuge und der berechneten Vorspannkraft gemäß (23):

$$F_{Q\ zul} = \mu_T \cdot F_M = \frac{\mu_T \cdot M_A}{\alpha_A \cdot \left(0,159 \cdot P + 0,577 \cdot \mu_G \cdot d_2 + \frac{D_{Km}}{2} \cdot \mu_K \right)} \quad (23)$$

Für die Reibwerte wurden typische Spannen angenommen. Diese liegen im Bereich zwischen 0,08 und 0,16 (Anhang B-2). Für das Anziehverfahren 10 mit drehmomentgesteuertem Anziehen wird nach [3] ein Wertebereich von [1,4 1,6] angenommen. Für das Beispiel und weitere Berechnungen wird angenommen, dass hochwertiges Werkzeug für das Anziehen der Schraube verwendet wird, weshalb ein Anziehungsfaktor von 1,4 gewählt wird (Anhang B-2). Die Werte sind in Tabelle 1 zusammengefasst.

	μ_T	μ_G	μ_K	α_A
Minimal	0,08	0,08	0,08	1,0
Maximal	0,16	0,16	0,16	1,4

Tabelle 1: Grenzwerte der Einflussgrößen

Diese Werte sind Grundlage für die weiteren Berechnungen. In der nachfolgenden Abbildung 2 wird dargestellt, auf welche Bereiche einer Schraubenverbindung sich diese Reibwerte beziehen.

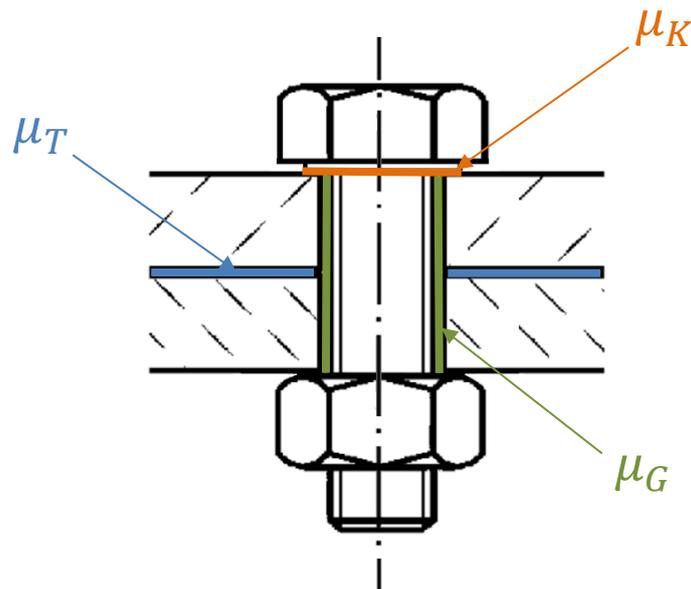


Abbildung 2: Wirkbereiche der Reibwerte
(In Anlehnung an [2])

Mit den minimalen und maximalen Grenzwerten der Einflussgrößen können jeweils die minimale (24) und maximale (25) zulässige Querkraft berechnet werden.

$$F_{Q\text{ zul,min}} = \frac{0,08 \cdot M_A}{1,4 \cdot \left(0,159 \cdot P + 0,577 \cdot 0,16 \cdot d_2 + \frac{D_{Km}}{2} \cdot 0,16\right)} = 26,55m^{-1} \cdot M_A \quad (24)$$

$$F_{Q\text{ zul,max}} = \frac{0,16 \cdot M_A}{1,0 \cdot \left(0,159 \cdot P + 0,577 \cdot 0,08 \cdot d_2 + \frac{D_{Km}}{2} \cdot 0,08\right)} = 133,9m^{-1} \cdot M_A \quad (25)$$

Für eine M10-Zylinderschraube mit den geometrischen Größen $P = 1,5mm$, $d_2 = 9,03mm$ und $D_{Km} = 13,5mm$ ergibt sich der Quotient aus dem maximalen und dem minimalen Wert der zulässigen Querkraft:

$$x = \frac{F_{Q\ zul,max}}{F_{Q\ zul,min}} = \frac{133,9}{26,55} = 5,04$$

Dies verdeutlicht eine bedeutende Streuung der möglichen Werte, was zeigt, dass die alleinige Auslegung für den ungünstigsten Fall bei solch großen Unterschieden zwischen maximalen und minimalen Werten ineffizient ist. Der Quotient von 5,04 zwischen der maximalen und minimalen zulässigen Querkraft unterstreicht das Potenzial für eine präzisere und wirtschaftlichere Auslegung der Schraubenverbindung.

2.2.3 Problemstellung

Die Berechnung und Auslegung von Schraubenverbindungen gemäß der VDI 2230 geht typischerweise von spezifischen Werten für Einflussgrößen wie Reibwert und Anziehungsfaktor aus. Diese Werte müssen ausgewählt werden, was oft mit Unsicherheiten verbunden ist, da sie stark variieren können. Um diese Unsicherheiten zu kompensieren, wird in der Regel ein konservativer Ansatz gewählt (Anhang B-1), indem Worst-Case-Szenarien angenommen werden. Dies führt jedoch dazu, dass Schraubenverbindungen häufig überdimensioniert werden, was Ressourcen und Kosten erhöht.

Ein konkretes Beispiel zeigt, dass die Ergebnisse der VDI 2230-Berechnungen große Unterschiede zwischen minimalen und maximalen Werten aufweisen können. Obwohl die tatsächlichen Werte in einer bestimmten Verteilung vorliegen, wird diese in der konservativen Berechnung nicht berücksichtigt. Dadurch entsteht eine Überdimensionierung, die Kosten erhöht und weitere Nachteile in der Auslegung verursacht.

Die vorgeschlagene Lösung besteht darin, eine stochastische Herangehensweise zu verwenden. Diese Methode ermöglicht es, die Verteilungen der Einflussgrößen in die Berechnung mit einzubeziehen und somit die Unsicherheiten gezielter zu handhaben, ohne auf konservative Worst-Case-Szenarien zurückgreifen zu müssen. Durch die Berücksichtigung der tatsächlichen Verteilung der Einflussgrößen kann die Bandbreite der möglichen Ergebnisse sinnvoll und quantifizierbar begrenzt werden. Dies führt zu einer präziseren und kosteneffizienteren Dimensionierung von Schraubenverbindungen, die näher an den realen Bedingungen liegt. In den folgenden Kapiteln werden die stochastischen Grundlagen eingeführt und auf die Formeln der Schraubenverbindungsrechnung angewendet, um Verbesserungsmöglichkeiten zu identifizieren. Konkrete Schritte für eine optimierte Auslegung werden dabei empfohlen.

2.3 Zusammenfassung der Grundlagen der Berechnung von Schraubenverbindungen

Die Berechnung von Schraubenverbindungen ist eine umfangreiche Rechnung mit vielen Rechenschritten und zu berechnenden Größen. Eine weit verbreitete Richtlinie für dieses Vorgehen stellt die VDI 2230 dar, die aus den Rechenschritten R0 bis R13 besteht. Das Auslegen nach dieser Richtlinie ist sehr robust, da die Schrauben gegen die ungünstigsten Kombinationen mehrerer Einflussgrößen überprüft werden. Dies kann jedoch dazu führen, dass ein Großteil der Schrauben für die tatsächlich auftretenden Bedingungen am Einsatzort und die auftretenden Lasten überdimensioniert sind. Unter üblichen Wertannahmen für Reibwerte und Anziehungsfaktoren zeigt sich, dass zwischen der minimal und maximal zulässigen Querkraft einer beispielhaften Schraubenverbindung ein Faktor von etwa fünf liegen kann. In den folgenden Kapiteln wird daher untersucht, wie Streuungen in den Einflussgrößen besser gehandhabt werden können, um die tatsächliche Verteilung der Werte bei der Auslegung zu berücksichtigen.

3 Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Der Wahrscheinlichkeitsrechnung kommt in dieser Masterarbeit eine große Bedeutung zu, denn für eine möglichst effiziente Bestimmung der Grenzwerte gesuchter Größen ist das elementare Rechnen in Bezug auf Ausfall- beziehungsweise Überlebenswahrscheinlichkeit entscheidend. Letztere geben die Wahrscheinlichkeit an, dass ein System oder eine Komponente, beispielsweise eine Schraube, im Einsatz versagt beziehungsweise weiterhin funktioniert. Aufgrund unterschiedlichster Umstände ist eine absolute Sicherheit in der Auslegung nicht erreichbar. Trotz großzügiger Sicherheiten bei der Auslegung können immer unvorhergesehene Fälle auftreten, die von Fehlern in der Fertigung bis zur unsachgemäßen Verwendung im Endprodukt in Form von Überlasten oder ungünstigen Belastungsarten reichen können. Es ist daher empfehlenswert, den Anspruch an die Sicherheit eines Bauteils – in diesem Fall Schrauben in einer Schraubenverbindung – je nach Anwendungsfall hoch, aber auch realistisch zu stellen. Mit den Grundlagen in diesem Kapitel sollen sowohl das Verständnis für wesentliche Größen der Wahrscheinlichkeitsrechnung als auch der Umgang mit Funktionen mit streuenden Einflussgrößen vermittelt werden.

3.1 Elementare Begriffe und Grundlagen

In diesem Kapitel werden die wesentlichen Grundlagen eingeführt, die für die Analyse und Berechnung von Schraubenverbindungen aus der Perspektive der Wahrscheinlichkeitsrechnung unerlässlich sind. Im Folgenden werden die Eigenschaften von Zufallsvariablen, ihre Verteilungen und stochastischen Kennzahlen behandelt. Diese Grundlagen bilden die Basis für eine erweiterte stochastische Betrachtung der Berechnung von Schraubenverbindungen.

3.1.1 Diskrete und kontinuierliche Zufallsverteilung

Eine Zufallsverteilung beschreibt die möglichen Ergebnisse eines Zufallsprozesses und ihre Wahrscheinlichkeiten. Dabei wird zwischen diskreten und kontinuierlichen Zufallsvariablen unterschieden.

Im diskreten Fall gibt es eine abzählbare Menge an unterschiedlichen Ergebnissen. Ein klassisches Beispiel dafür sind die Augenzahlen eines Würfels: Bei einem Wurf können ausschließlich die Zahlen von eins bis sechs geworfen werden. Jede dieser Zahlen ist ein mögliches Ergebnis und die Wahrscheinlichkeiten lassen sich für jedes dieser Ergebnisse angeben.

Anders verhält es sich bei kontinuierlichen Zufallsvariablen. Hier sind die Ergebnismöglichkeiten nicht abzählbar, sondern entsprechen einem Spektrum. Ein Beispiel dafür

wäre die Temperatur an einem bestimmten Ort zu einem bestimmten Zeitpunkt. Die Temperatur kann jeden Wert innerhalb eines bestimmten Bereichs annehmen und die Wahrscheinlichkeiten verteilen sich über ein Kontinuum von Werten. Anstatt einzelne Wahrscheinlichkeiten für diskrete Ergebnisse zu berechnen, arbeitet man bei kontinuierlichen Verteilungen mit Dichtefunktionen. Um den Unterschied zwischen beiden Arten von Zufallsvariablen zu verdeutlichen, sind in den folgenden Abbildungen die Wahrscheinlichkeiten der diskreten Ergebnisse des Würfelwurfs und die Dichtefunktion für einen Zufallszahlengenerator von 0,5 bis 6,5 dargestellt, bei dem nicht nur ganze Zahlen auftreten können.

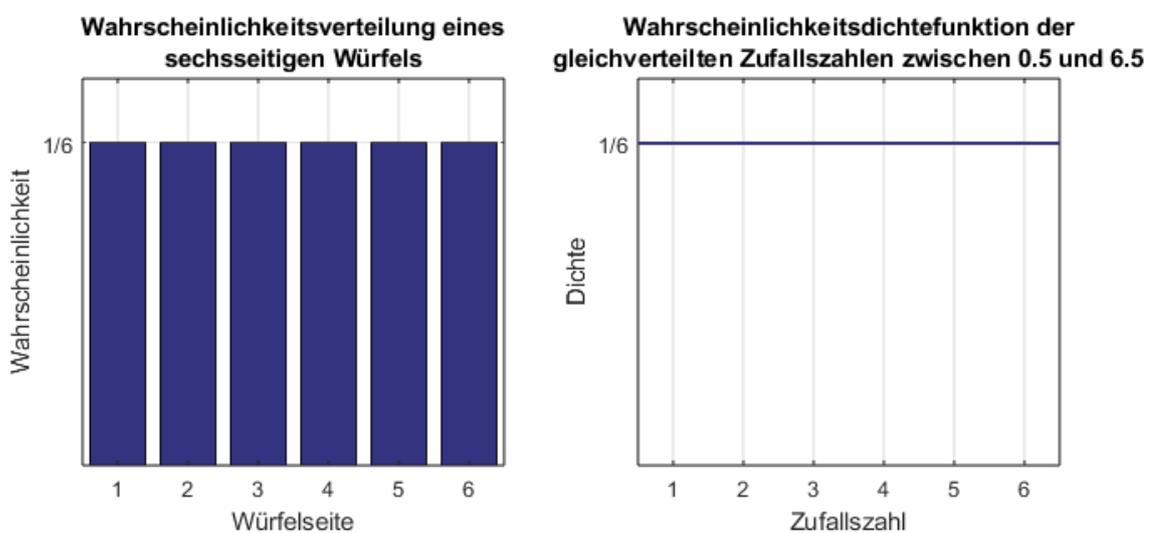


Abbildung 3: Wahrscheinlichkeitsverteilung (diskret) und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (kontinuierlich)

In der Abbildung 3 ist links die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die diskreten Ereignisse des Würfels in Form von Balken dargestellt. Demgegenüber ist rechts die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion dargestellt, die nicht in Balkenform gezeigt werden kann, da die möglichen Ereignisse nicht abzählbar sind. Die Wahrscheinlichkeit wird als Kurve dargestellt, deren Integral vom Minimal- bis zum Maximalwert eins ergeben muss, was einer Wahrscheinlichkeit von 100% entspricht.

Es ist möglich, eine kontinuierliche Verteilung in eine diskrete zu überführen, indem abzählbare Intervalle gesetzt werden, die bestimmte Wertebereiche unter einem Wert zusammenfassen. Diese Diskretisierung ermöglicht es, kontinuierliche Daten in Form von Histogrammen zu visualisieren und zu analysieren. Hierbei gehen allerdings Informationen über die exakte Verteilung zwischen den Werten verloren, da die Feinheiten der kontinuierlichen Verteilung nicht vollständig wiedergegeben werden können.

3.1.2 Histogramm

Ein Histogramm ist eine grafische Darstellung, die verwendet wird, um die Verteilung von Daten zu visualisieren, insbesondere wenn diese in diskrete oder diskretisierte Kategorien eingeteilt sind. Diese Darstellung ermöglicht es, Muster, Trends und Häufigkeiten der aufgetretenen Ereignisse zu erkennen. Das Histogramm ist ein Balkendiagramm, das die Häufigkeit bestimmter Ereignisse darstellt.

Histogramme können sowohl bei diskreten als auch bei diskretisierten Verteilungen angewendet werden. Die Ergebnisse eines Würfelwurfs sind klar voneinander abgegrenzt, weshalb die Häufigkeiten der Ereignisse einfach darzustellen sind. Kontinuierliche Zufallsvariablen müssen erst noch diskretisiert werden, um in einem Histogramm dargestellt werden zu können. Beispielsweise könnten bei Temperaturmessungen Wertebereiche festgelegt werden, in die die Messungen einsortiert und gezählt werden.

Die Anzahl der Balken, auch Bins genannt, in einem Histogramm hängt von der Anzahl der Stichprobenwerte ab. Wenn die Anzahl der Bins hoch und gleichzeitig die Anzahl der Stichprobenwerte gering ist, kann das Histogramm möglicherweise spärlich besetzt sein, sodass kein klarer Trend erkennbar ist. In diesem Fall könnte es sinnvoll sein, die Anzahl der Bins zu verringern, um einen deutlicheren Trend oder eine Konzentration der Werte zu zeigen.

Umgekehrt ist es sinnvoll, die Anzahl der Bins zu erhöhen, wenn die Anzahl der Stichprobenwerte steigt. Dadurch kann die Form der Verteilung genauer beschrieben werden, da mehr Feinheiten der Daten berücksichtigt werden können. Histogramme bieten somit die Flexibilität, durch die Anpassung der Anzahl der Bins die Darstellung der Daten optimal an die vorliegenden Stichproben anzupassen und so unterschiedliche Verteilungsmuster zu untersuchen.

Im Folgenden sind verschiedene Histogramme dargestellt, die in der Anzahl der Stichprobenwerte und der Anzahl der Balken variieren.

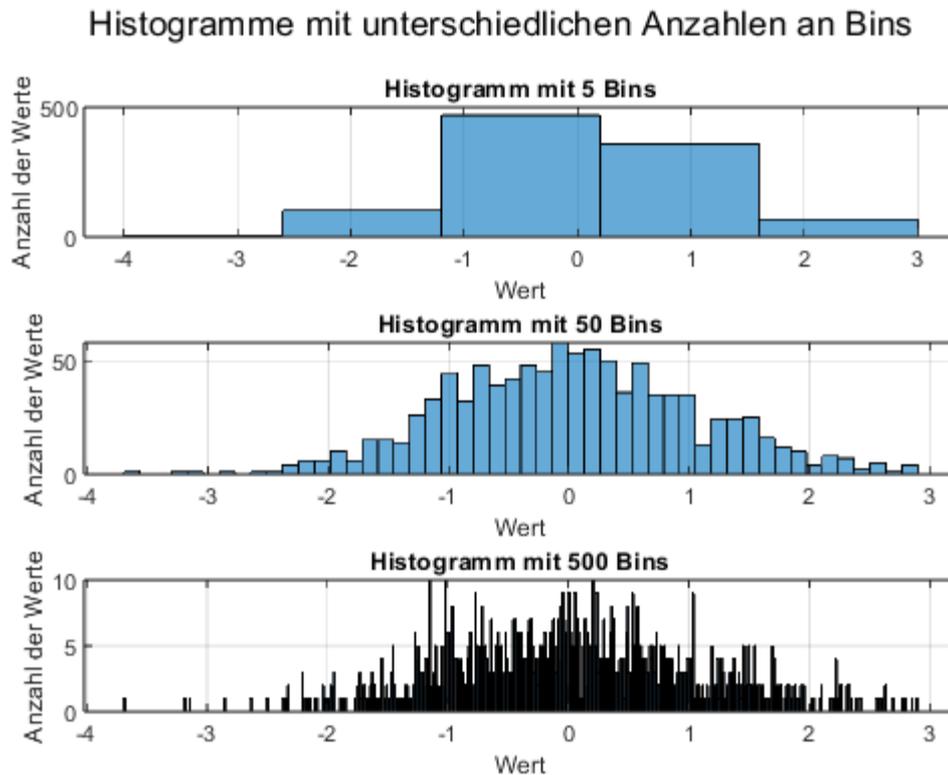


Abbildung 4: Histogramme mit variierender Anzahl an Intervallen bei 1000 Werten

In Abbildung 4 ist zu sehen, dass im oberen Histogramm bei fünf Bins zwar festgestellt werden kann, dass eine Konzentration im mittleren Bereich vorliegt, jedoch bleibt der genaue Verlauf der Wahrscheinlichkeitsdichte unklar. Beim mittleren Histogramm bei 50 Bins lässt sich schon präziser ableiten, wie die zugrunde liegende Kurve geformt ist. Bei 500 Bins im unteren Histogramm ist durch die Streuung der Werte nur schwer eine Konzentration erkennbar. Zwar erkennt man im mittleren Bereich mehr Werte als in den Außenbereichen, jedoch sind keine direkten Schlüsse auf die Form der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion möglich.

3.1.3 Mittelwert

In der Statistik und auch in dieser Arbeit bezieht sich der Mittelwert, der auch mit dem griechischen Buchstaben μ abgekürzt wird, auf den Erwartungswert einer Zufallsverteilung. Dieser Erwartungswert ist der langfristige Durchschnittswert, den die Zufallsvariable bei unendlich vielen Wiederholungen des Experiments annehmen würde.

Der Durchschnittswert einer Stichprobe, die einer bestimmten Verteilung unterliegt, nähert sich mit zunehmender Anzahl an Stichprobenwerten dem Erwartungswert der zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsverteilung an.

Der Mittelwert einer Stichprobe wird berechnet, indem die Summe aller Stichprobenwerte gebildet und durch die Anzahl der Stichproben geteilt wird. Diese Berechnung wird durch die folgende Gleichung (26) dargestellt:

$$\mu_x = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \quad (26)$$

Dabei ist μ_x der Mittelwert, n die Anzahl der Stichprobenwerte und x_i die einzelnen Stichprobenwerte.

Bei einer bekannten diskreten Zufallsverteilung, wie beim Werfen eines Würfels, kann der Mittelwert durch die folgende Gleichung (27) berechnet werden:

$$\mu_x = \sum_{i=1}^k x_i \cdot P(x_i) \quad (27)$$

Dabei ist k die Menge der Ereignisse, i der Index der Ereignisse, x_i sind die Werte des jeweiligen Ereignisses und $P(x_i)$ die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis eintritt. Am Beispiel des Würfels würde dies wie folgt berechnet werden.

Die möglichen Ereignisse entsprechen den Augenzahlen:

$$x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 3; x_4 = 4; x_5 = 5; x_6 = 6$$

Die Wahrscheinlichkeit ist für alle Würfelseiten gleich:

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

Die Augenzahlen werden mit den Wahrscheinlichkeiten multipliziert und aufaddiert:

$$\mu_x = x_1 \cdot P(x_1) + x_2 \cdot P(x_2) + \dots + x_6 \cdot P(x_6)$$

$$\mu_x = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6}$$

$$\mu_x = \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3,5$$

Der Mittelwert liegt also bei 3,5.

Bei einer bekannten kontinuierlichen Zufallsverteilung kann der Mittelwert durch folgende Gleichung (28) berechnet werden:

$$\mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot P(x) dx \quad (28)$$

Dabei ist x die Zufallsvariable und $P(x)$ die Dichtefunktion der Wahrscheinlichkeit. Die Berechnung des Mittelwertes wird im Folgenden am Beispiel einer zufallsgenerierten Zahl zwischen 0,5 und 6,5 durchgeführt.

Das Integral unter dem Dichteverlauf muss die Gesamtwahrscheinlichkeit von eins ergeben. Da die Breite des Wertebereichs zwischen 0,5 und 6,5 sechs beträgt, ergibt sich eine Wahrscheinlichkeitsdichte von $\frac{1}{6}$.

Zunächst wird das Integral der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion in Abschnitte unterteilt, sodass der Verlauf der Wahrscheinlichkeitsdichte durch eine Funktion beschrieben werden kann. Darauf folgt die Berechnung der Integrale.

$$\mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot P(x) dx = \int_{-\infty}^{0,5} x \cdot 0 dx + \int_{0,5}^{6,5} x \cdot P(x) dx + \int_{6,5}^{\infty} x \cdot 0 dx = \int_{0,5}^{6,5} x \cdot P(x) dx$$

$$\mu_x = \int_{0,5}^{6,5} x \cdot \frac{1}{6} dx = \frac{1}{6} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot x^2 \right]_{0,5}^{6,5} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot (6,5^2 - 0,5^2)$$

$$\mu_x = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot (6,5^2 - 0,5^2) = \frac{1}{12} \cdot 42 = 3,5$$

Hierbei ergibt sich ebenfalls ein Mittelwert von 3,5.

3.1.4 Varianz und Standardabweichung

Die Varianz und die Standardabweichung sind wichtige Kennzahlen in der Statistik, die die Streuung einer Zufallsverteilung oder Stichprobe quantifizieren. Die Varianz gibt die mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert an. Die Standardabweichung ist die Wurzel der Varianz und wird häufig als Maß der Streuung verwendet, da sie in der gleichen Dimension wie die Zufallsvariable vorliegt, [4]. Sie wird auch mit dem griechischen Buchstaben σ abgekürzt. Je größer der Wert, desto größer ist auch die Streuung.

Bei einer bekannten diskreten Zufallsverteilung, wie beim Werfen eines Würfels, wird die Varianz berechnet, indem die Differenzen der Ergebnisse zum Mittelwert quadriert, mit der Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses multipliziert und über alle Ergebnisse aufsummiert werden. Die folgende Gleichung stellt die Berechnung der Varianz dar:

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^k (x_i - \mu_x)^2 \cdot P(x_i) \quad (29)$$

Dabei ist $\text{Var}(X)$ die Varianz der Zufallsvariable X , k die Menge der Ereignisse, x_i die einzelnen Stichprobenwerte, μ_x der Mittelwert und $P(x_i)$ die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses. Am Beispiel des Würfels würde dies wie folgt berechnet werden.

Zunächst werden die Werte der möglichen Ereignisse aufgestellt und der Mittelwert gebildet.

$$x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 3; x_4 = 4; x_5 = 5; x_6 = 6; \bar{x} = 3,5$$

Die Wahrscheinlichkeit ist für alle Ereignisse gleich.

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

Die Differenzen werden quadriert, mit der Wahrscheinlichkeit multipliziert und anschließend aufsummiert.

$$\text{Var}(X) = (x_1 - \mu_x)^2 \cdot P(x_1) + (x_2 - \mu_x)^2 \cdot P(x_2) + \dots + (x_6 - \mu_x)^2 \cdot P(x_6)$$

$$\text{Var}(X) = (1 - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (2 - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + (6 - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{6} \cdot (6,25 + 2,25 + 0,25 + 0,25 + 2,25 + 6,25) = \frac{1}{6} \cdot 17,5 = 2,92$$

Die Varianz liegt also bei 2,92.

Bei einer bekannten kontinuierlichen Zufallsverteilung kann die Varianz durch folgende Gleichung berechnet werden:

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 \cdot P(x) dx \quad (30)$$

Dabei ist x die Zufallsvariable und $P(x)$ die Dichtefunktion der Wahrscheinlichkeit.

Die Berechnung der Varianz wird im Folgenden erneut am Beispiel einer zufallsgenerierten Zahl zwischen 0,5 und 6,5 durchgeführt.

Das Integral wird, wie bei der Berechnung des Mittelwerts, in Abschnitte unterteilt, so dass diese durch eine Funktion beschrieben werden können.

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 \cdot P(x) \\ \text{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{0,5} (x - \mu_x)^2 \cdot 0 + \int_{0,5}^{6,5} (x - \mu_x)^2 \cdot P(x) + \int_{6,5}^{\infty} (x - \mu_x)^2 \cdot 0 \\ \text{Var}(X) &= \int_{0,5}^{6,5} (x - \mu_x)^2 \cdot P(x) = \int_{0,5}^{6,5} (x - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (x - 3,5)^3 \right]_{0,5}^{6,5} \\ \text{Var}(X) &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot (3^3 - (-3)^3) = \frac{1}{18} \cdot 2 \cdot 3^3 = 3 \end{aligned}$$

Hierbei ergibt sich eine Varianz von 3, die geringfügig größer ist, als die Varianz der diskreten Verteilung.

In allen vorangegangenen Fällen kann die Standardabweichung (31) berechnet werden, indem die Varianz radiziert wird:

$$\sigma_x = \sqrt{\text{Var}(X)} \quad (31)$$

In den nachfolgenden Kapiteln werden Standardabweichungen in den Berechnungen durch den griechischen Buchstaben σ dargestellt.

3.1.5 Normalverteilung

Die Normalverteilung, auch als Glockenkurve bekannt, ist eine häufig vorkommende Verteilungsform in Technik und Natur. Sie wird durch die Dichtefunktion (32) beschrieben:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (32)$$

Hierbei repräsentieren μ und σ den Mittelwert und die Standardabweichung der Normalverteilung. Um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass ein Wert der Zufallsvariable X innerhalb eines festgelegten Intervalls liegt, wird die Verteilungsfunktion (33) verwendet. Berechnet wird dabei die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wert der Zufallsvariable X unterhalb eines Wertes x auftritt.

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dt \quad (33)$$

Abbildung 5 zeigt im oberen Teil die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und im unteren Teil die Verteilungsfunktion der Wahrscheinlichkeit bei einer Normalverteilung.

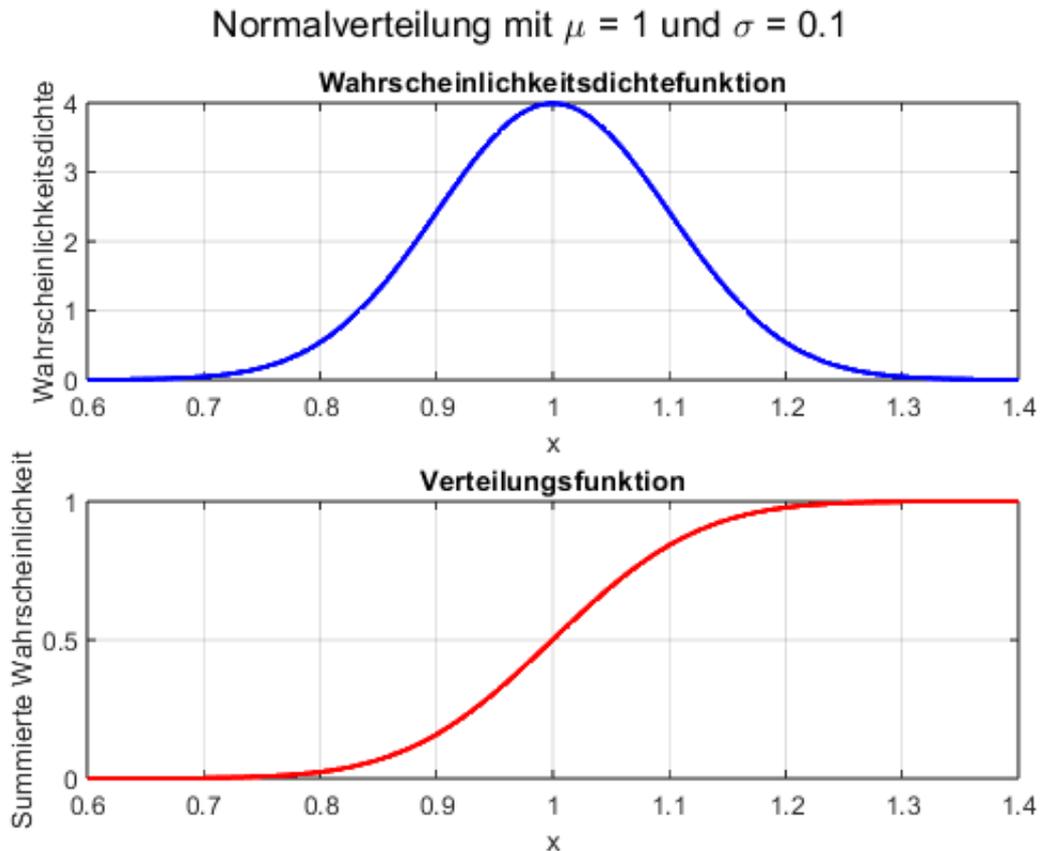
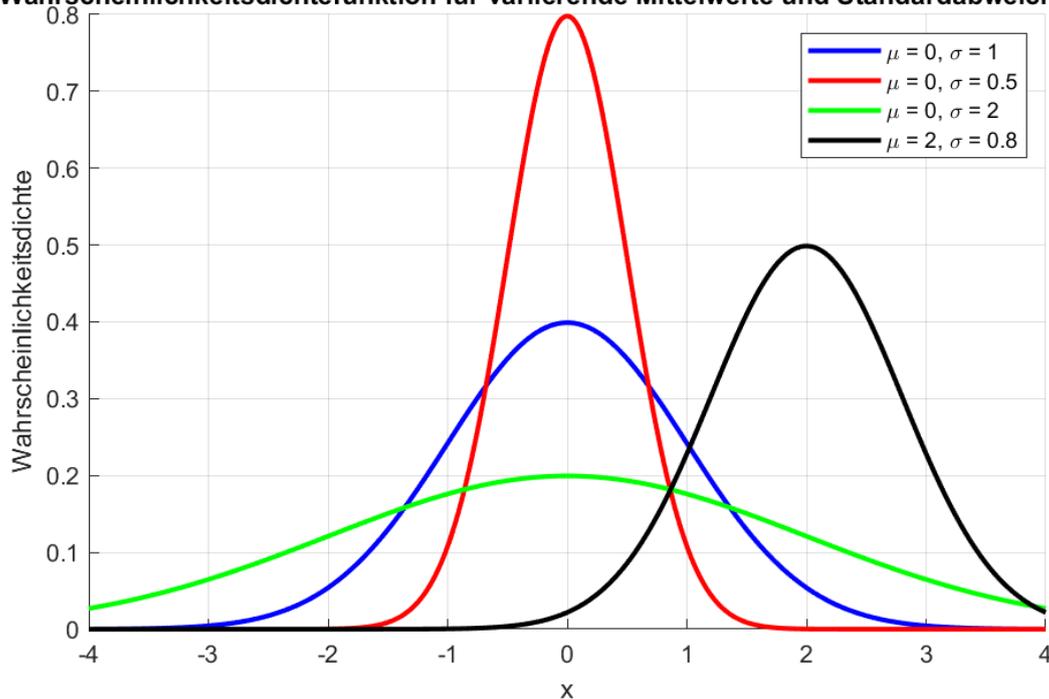


Abbildung 5: Dichteverlauf und Verteilungsfunktion einer Normalverteilung

Wenn die Wahrscheinlichkeit berechnet werden soll, dass ein Wert zwischen der unteren Grenze a und der oberen Grenze b eintritt, dann kann die folgende Gleichung genutzt werden:

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) \quad (34)$$

Die Normalverteilung wird, wie es schon aus der Gleichung (33) hervorgeht, beschrieben durch die Größen Mittelwert und Standardabweichung. Der Mittelwert μ fungiert als Durchschnittswert, Median und Modus der Verteilung. Der Median teilt die Verteilung in zwei Hälften, wobei jeweils 50% der Werte oberhalb und unterhalb des Medians liegen. Der Modus entspricht dem Wert, der am häufigsten auftritt und ist durch den höchsten Punkt der Dichtefunktion erkennbar. Während der Mittelwert die Symmetrieachse der Kurve auf der x -Achse bestimmt, gibt die Standardabweichung die Breite der Verteilung an. Eine größere Standardabweichung führt zu einer flacheren und breiteren Kurve, während eine kleinere Streuung zu einer schmalen und höheren Kurve führt, die um den Mittelwert konzentriert ist. Abbildung 6 zeigt verschiedene Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen mit unterschiedlichen Werten für μ und σ . Diese Variationen verdeutlichen, wie sich Änderungen in Mittelwert und Standardabweichung auf die Form und Verteilung der Kurve auswirken.

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für variierende Mittelwerte und Standardabweichungen**Abbildung 6:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen mit variierenden Parametern

Eine Besonderheit der Normalverteilung liegt darin, dass jeweils eine Standardabweichung σ vom Mittelwert entfernt die Wendepunkte der Kurve vorliegen. Diese können somit grafisch an der Funktion abgelesen werden.

Die Normalverteilung besitzt die Eigenschaft, dass innerhalb eines Intervalls von $[\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]$ für jedes k eine feste summierte Wahrscheinlichkeit liegt. Die Wahrscheinlichkeiten für verschiedene Werte von k sind in Tabelle 2 zusammengefasst:

k	$P(\mu - k\sigma \leq x \leq \mu + k\sigma)$
1	68,27%
2	95,45%
3	99,73%

Tabelle 2: Summierte Wahrscheinlichkeit bei $\pm k$ Standardabweichungen vom Mittelwert

Diese Werte ermöglichen es, unabhängig von den spezifischen Werten für μ und σ , die summierte Wahrscheinlichkeit für ein gegebenes Intervall zu bestimmen.

3.1.6 Quantile

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik stellt sich oft die Frage, welcher Bereich einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit entspricht. Quantile bieten hier die Lösung, da sie die Schwellenwerte in einer Verteilung bestimmen, die bestimmte Anteile der Gesamtwahrscheinlichkeit abdecken. Ein bekanntes Beispiel für ein Quantil ist der Median, auch als 50%-Quantil bezeichnet. Dieser Wert bedeutet, dass 50% der Werte unterhalb dieses Wertes liegen. Ähnlich wie die Verteilungsfunktion, die die Wahrscheinlichkeit für eine Zufallsvariable unterhalb einer Grenze betrachtet, beschreibt ein Quantil, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein Wert unterhalb des Quantilwertes liegt. Beim 10%-Quantil liegen 10% aller Werte unterhalb und beim 90%-Quantil liegen 90% unterhalb der Grenze.

Quantile können grundsätzlich für jede Verteilungsform bestimmt werden, indem der Wert ermittelt wird, unterhalb dessen die gesuchte Prozentzahl an Werten liegt. Ein Vorteil der Normalverteilung ist, dass bei unterschiedlichen Normalverteilungen die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wert innerhalb eines bestimmten Abstands (in Standardabweichungen) vom Mittelwert liegt, immer gleich ist.

In der Tabelle 2 werden ganze Zahlen als Faktor k dargestellt, während die Wahrscheinlichkeit P Zahlen mit vielen Dezimalstellen aufweist. Bei den Quantilen ist es umgekehrt, wie in der nachfolgenden Tabelle 3 gezeigt ist:

$P(x \leq \mu + k\sigma)$	k
90%	1,282
99%	2,326
99,9%	3,090

Tabelle 3: Ausgewählte Quantile der Normalverteilung

Auf der linken Seite sind vorgegebene Wahrscheinlichkeiten von 90%, 99% und 99,9% dargestellt. Der Faktor k auf der rechten Seite gibt an, wie viele Standardabweichungen vom Mittelwert entfernt der Grenzwert liegt, unter dem der entsprechende Prozentsatz der Wahrscheinlichkeit liegt. Bei einer Normalverteilung mit dem Mittelwert $\mu = 1$ und der Standardabweichung $\sigma = 0,1$ würde die Wahrscheinlichkeit $P(x \leq \mu + k\sigma) = 90\%$ den Grenzwert bei $\mu + k\sigma = 1 + 1,282 \cdot 0,1 = 1,1282$ ergeben.

Obwohl die Werte aus der Tabelle auch aus nach dem Faktor k gebildeten Wertetabellen, wie beispielsweise Tabelle 2, entnommen werden könnten, wäre dies durch die dann

notwendige Suche zeitintensiver. Daher ist die Nutzung von spezifischen Quantiltabellen, die schnell und präzise die gesuchten Werte liefern, von Vorteil.

3.2 Vertiefte Wahrscheinlichkeitsrechnung

In diesem Kapitel wird der praktische Umgang mit streuenden Größen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung behandelt, um diese bei der Berechnung von Schraubenverbindungen anzuwenden. Zunächst wird dabei das Fehlerfortpflanzungsgesetz eingeführt, welches den Umgang mit mehreren Streugrößen in Kombination ermöglicht. Verschiedene Beispiele illustrieren die Anwendung dieses Gesetzes und führen schrittweise zur Komplexität der Berechnung von Schraubenverbindungen.

3.2.1 Fehlerfortpflanzungsgesetz

Das Fehlerfortpflanzungsgesetz beschreibt, wie die Varianz beziehungsweise Standardabweichung einer Größe bestimmt werden kann, in die mehrere Einflussgrößen einfließen. Die Berechnung des Mittelwerts erfolgt durch das Einsetzen der Mittelwerte in die Gleichung. Die Berechnung der Standardabweichung ist in der Regel mit einem höheren Aufwand verbunden. Bei der Anwendung dieses Gesetzes gibt es noch einige Hinweise zu beachten: Es gilt nur, wenn alle Streugrößen voneinander unabhängig und normalverteilt sind [4]. Für Additionen und Subtraktionen der Einflussgrößen gibt es keine Einschränkungen hinsichtlich der Größe der Streuung. Bei Multiplikationen und Divisionen hingegen sind nur verhältnismäßig kleine Abweichungen zulässig, um von einer resultierenden Normalverteilung ausgehen zu können. Das bedeutet, dass die Standardabweichung im Verhältnis zum Mittelwert möglichst klein sein sollte. Die Auswirkungen größerer Abweichungen werden im Unterkapitel 3.2.3 genauer betrachtet.

Die Gleichung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes (35) lautet nach [4]:

$$\sigma_0(f(x_1, \dots, x_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{x=\bar{x}} \right)^2 \cdot \sigma_i^2} \quad (35)$$

Die Standardabweichung des neuen Funktionswertes wird berechnet, indem für alle unabhängigen streuenden Größen die Produkte des Quadrats der partiellen Ableitung der jeweiligen Einflussgröße und dem Quadrat der Standardabweichung der Einflussgröße aufsummiert werden. Dabei werden in den partiellen Ableitungen die Mittelwerte der Streugrößen eingesetzt.

Für die Berechnung werden die Mittelwerte und Standardabweichungen der streuenden Größen benötigt. Durch diese Rechenvorschrift wird zunächst die Varianz berechnet, welche nach der Radizierung die Standardabweichung ergibt.

In den folgenden Kapiteln 3.2.2 und 3.2.3 wird das Fehlerfortpflanzungsgesetz an konkreten Beispielen angewendet.

3.2.2 Addition und Subtraktion

Nach der Einführung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes wird dieses in diesem Unterkapitel anhand von Beispielen zur Addition und Subtraktion veranschaulicht. Es wird jeweils die Standardabweichung der Funktion f betrachtet. Gleichung (36) zeigt eine einfache Addition von einer Konstanten a zu zwei weiteren Größen x_1 und x_2 , die jeweils eine Streuung aufweisen: $x_1 = x_2$ mit $\mu = 1$ und $\sigma = 0,1$

$$f(x_1, x_2) = a + x_1 + x_2 \quad (36)$$

Die Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes ergibt:

$$\sigma_0(f(x_1, x_2)) = \sqrt{\frac{\partial f^2}{\partial x_1} \cdot \sigma_1^2 + \frac{\partial f^2}{\partial x_2} \cdot \sigma_2^2}$$

Da

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 1$$

folgt:

$$\sigma_0(f(x_1, x_2)) = \sqrt{1^2 \cdot \sigma_1^2 + 1^2 \cdot \sigma_2^2} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{2 \cdot \sigma^2} = \sqrt{2} \cdot \sigma = \sqrt{2} \cdot 0,1$$

Es zeigt sich, dass bei der Addition zweier Streuergößen die Standardabweichungen nicht einfach addiert werden, sondern zu $\sqrt{2} \cdot \sigma$ führen. Die zusätzlich addierte Konstante a hat keinen Einfluss auf die Streuung der gesuchten Größe. In Abbildung 7 sind die Streuungen der Werte um den Mittelwert dargestellt. Dabei gehört die blaue Kurve zu den Einflussgrößen und die rote Kurve zur Funktion f . Letztere weist dabei eine breitere Streuung auf.

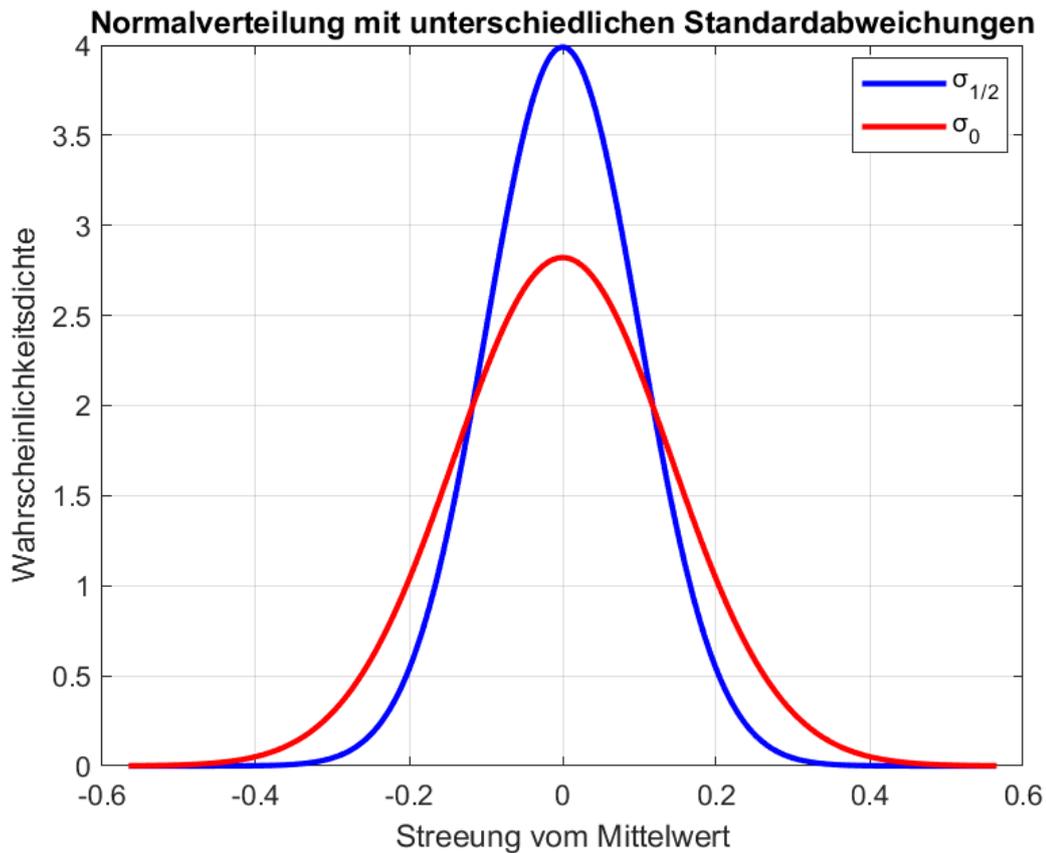


Abbildung 7: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Einflussgrößen und ihrer Summe

Im folgenden Beispiel der Subtraktion (37) sind wieder die partiellen Ableitungen erforderlich:

$$f(x_1, x_2) = x_1 - x_2 \quad (37)$$

Mit den partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -1$$

Die Berechnung der Standardabweichung ergibt:

$$\sigma_y(f(x_1, x_2)) = \sqrt{1^2 \cdot \sigma_1^2 + (-1)^2 \cdot \sigma_2^2} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{2 \cdot \sigma^2} = \sqrt{2} \cdot \sigma$$

Auch bei der Subtraktion ergibt sich der Faktor $\sqrt{2}$, da durch das Quadrieren der partiellen Ableitung der negative Vorfaktor positiv wird. Auch hier hat die Konstante keinen Einfluss auf die Streuung.

3.2.3 Multiplikation und Division

Nach der Betrachtung der Addition und Subtraktion im vorherigen Unterkapitel wird nun die Multiplikation und Division behandelt. In Gleichung (38) wird eine Multiplikation einer

Konstanten a und zwei weiteren Größen x_1 und x_2 , die Streuung aufweisen, dargestellt, wobei gilt: $x_1 = x_2$ mit $\mu = 1$ und $\sigma = 0,1$

$$f(x_1, x_2) = a \cdot x_1 \cdot x_2 \quad (38)$$

Die Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes führt zu:

$$\sigma_0(f(x_1, x_2)) = \sqrt{\frac{\partial f^2}{\partial x_1} \cdot \sigma_1^2 + \frac{\partial f^2}{\partial x_2} \cdot \sigma_2^2}$$

Mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = a \cdot x_2; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = a \cdot x_1$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \sigma_0(f(x_1, x_2)) &= \sqrt{(a \cdot \mu_{x_2})^2 \cdot \sigma_1^2 + (a \cdot \mu_{x_1})^2 \cdot \sigma_2^2} = \sqrt{a^2 \cdot \sigma_1^2 + a^2 \cdot \sigma_2^2} = \sqrt{2 \cdot a^2 \cdot \sigma^2} \\ &= a \cdot \sqrt{2} \cdot \sigma = a \cdot \sqrt{2} \cdot 0,1 \end{aligned}$$

Bei der Multiplikation der verschiedenen Größen zeigt sich, dass Faktoren der Eingangsgrößen auch unmittelbar zum Faktor der Ausgangsgröße werden. Wenn der konstante Vorfaktor a als 1 angenommen wird, ergibt sich interessanterweise die resultierende Standardabweichung von $x_1 \cdot x_2$ ebenfalls zu $\sqrt{2} \cdot \sigma$, so wie es zuvor bei der Addition und Subtraktion der Fall war. Dies liegt an den im Kapitel 3.2.1 beschriebenen Annahmen des Fehlerfortpflanzungsgesetzes, das kleine Fehler annimmt und Fehlerüberlagerungen nicht berücksichtigt. Dies ist insbesondere dann fehleranfällig, wenn große Abweichungen aufeinandertreffen.

Die Ergebnisse in Abbildung 7 stellen also die analytischen Lösungen aller betrachteten Beispiele dar. Für eine Darstellung der Ergebnisse, die die tatsächliche Verteilung der Multiplikation besser darstellt, wird auf Abbildung 8 in Kapitel 3.3.1 verwiesen.

Analog zur Multiplikation wird nun die Division (39) mit den gleichen Werten für x_1 und x_2 betrachtet:

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2} \quad (39)$$

Die partiellen Ableitungen lauten:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{x_2}; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -\frac{x_1}{x_2^2}$$

Die Standardabweichung ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}\sigma_0(f(x_1, x_2)) &= \sqrt{\left(\frac{1}{\mu_{x_2}}\right)^2 \cdot \sigma_1^2 + \left(-\frac{\mu_{x_1}}{\mu_{x_2}^2}\right)^2 \cdot \sigma_2^2} = \sqrt{\frac{1}{\mu_{x_2}^2} \cdot \sigma_1^2 + \frac{\mu_{x_1}^2}{\mu_{x_2}^4} \cdot \sigma_2^2} = \sqrt{2 \cdot \sigma^2} \\ &= \sqrt{2} \cdot \sigma\end{aligned}$$

Auch bei der Division ergibt sich die Standardabweichung zu $\sqrt{2} \cdot \sigma$, wenn die Mittelwerte der Streuergößen jeweils eins sind. Die Exponenten der Mittelwerte zeigen, dass selbst geringe Änderungen zu großen Schwankungen in der resultierenden Standardabweichung führen können.

3.2.4 Vorgehen bei abhängigen Größen

Bei der Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes auf Schraubenverbindungen ist es entscheidend, den Umgang mit Abhängigkeiten zwischen den Größen in den Formeln zu verstehen. Dies wird im folgenden Beispiel (40), das sowohl Addition als auch Multiplikation beinhaltet, verdeutlicht:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 + x_3 \quad (40)$$

Die Größen sind definiert als:

$$x_1 = a \cdot b; \quad x_2 = a \cdot c; \quad x_3 = b \cdot c$$

Obwohl Mittelwerte und Standardabweichungen für x_1 , x_2 und x_3 gegeben sein können, können diese nicht direkt zur Berechnung der Standardabweichung von f verwendet werden, da eine Abhängigkeit zwischen diesen Größen besteht. Es wäre ungenau, anzunehmen, dass diese Größen unabhängig voneinander sind. Durch die Gleichungen für die verschiedenen x -Werte ist ersichtlich, dass sie von denselben ursprünglichen Variablen a , b und c abhängen. Daher muss das Fehlerfortpflanzungsgesetz korrekt angewendet werden, nachdem die x -Werte durch die voneinander unabhängigen Variablen a , b und c ersetzt wurden. Dies wird in der folgenden Gleichung (41) veranschaulicht:

$$f(a, b, c) = a \cdot b \cdot a \cdot c + b \cdot c = a^2 \cdot b \cdot c + b \cdot c = b \cdot c \cdot (a^2 + 1) \quad (41)$$

Die Standardabweichung von f wird berechnet durch:

$$\begin{aligned}\sigma_0(f(a, b, c)) &= \sqrt{\frac{\partial f^2}{\partial a} \cdot \sigma_a^2 + \frac{\partial f^2}{\partial b} \cdot \sigma_b^2 + \frac{\partial f^2}{\partial c} \cdot \sigma_c^2} \\ \sigma_0(f(a, b, c)) &= \sqrt{(2\mu_a \cdot \mu_b \cdot \mu_c)^2 \cdot \sigma_a^2 + (\mu_c \cdot (\mu_a^2 + 1))^2 \cdot \sigma_b^2 + (\mu_b \cdot (\mu_a^2 + 1))^2 \cdot \sigma_c^2}\end{aligned}$$

Wie dieses einfache Beispiel zeigt, kann der Wurzelterm durch die partiellen Ableitungen schnell komplex werden. Die analytische Lösung kann daher sehr aufwändig sein, besonders wenn die Verschachtelung von Variablen tiefer geht und immer mehr ursprüngliche Größen bei den partiellen Ableitungen berücksichtigt werden müssen. Um diesen Aufwand zu umgehen, können Monte-Carlo-Simulationen eingesetzt werden, die im nächsten Kapitel eingeführt werden.

3.3 Simulation und Analyse von Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Im Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung spielt die Simulation und Analyse von Wahrscheinlichkeitsverteilungen eine zentrale Rolle, um realitätsnahe Ergebnisse zu erzielen. Simulationen ermöglichen die Darstellung und Analyse komplexer Verteilungsmuster, die keiner festen Form unterliegen und analytisch nur schwer zu berechnen sind. Dieses Kapitel bildet die Grundlage für die praxisorientierte Umsetzung der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

3.3.1 Monte-Carlo-Simulation

In den vorherigen Kapiteln wurde bereits erwähnt, dass die alleinige Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetz problematisch sein kann, insbesondere wenn große Standardabweichungen bei den Streugrößen auftreten. Um eine genauere Abbildung der resultierenden Verteilung zu ermöglichen, wird häufig eine Monte-Carlo-Simulation durchgeführt. Hierbei werden große Mengen zufällig generierter Zahlen verwendet, die den Vorgaben der Mittelwerte und Standardabweichungen der Streugrößen entsprechen. Diese Zahlen werden in die entsprechende Formel eingesetzt und die Ergebnisse werden in einem Histogramm dargestellt.

Monte-Carlo-Simulationen sind besonders dort von Vorteil, wo analytische Lösungen aufgrund zu komplexer Formeln mit hohem Aufwand verbunden sind oder partielle Ableitungen nicht praktikabel sind. Mögliche Nachteile können in einem hohen Rechenaufwand liegen, da eine statistische Aussagekraft der resultierenden Verteilungen erst mit einer großen Anzahl von simulierten Stichproben erreicht wird.

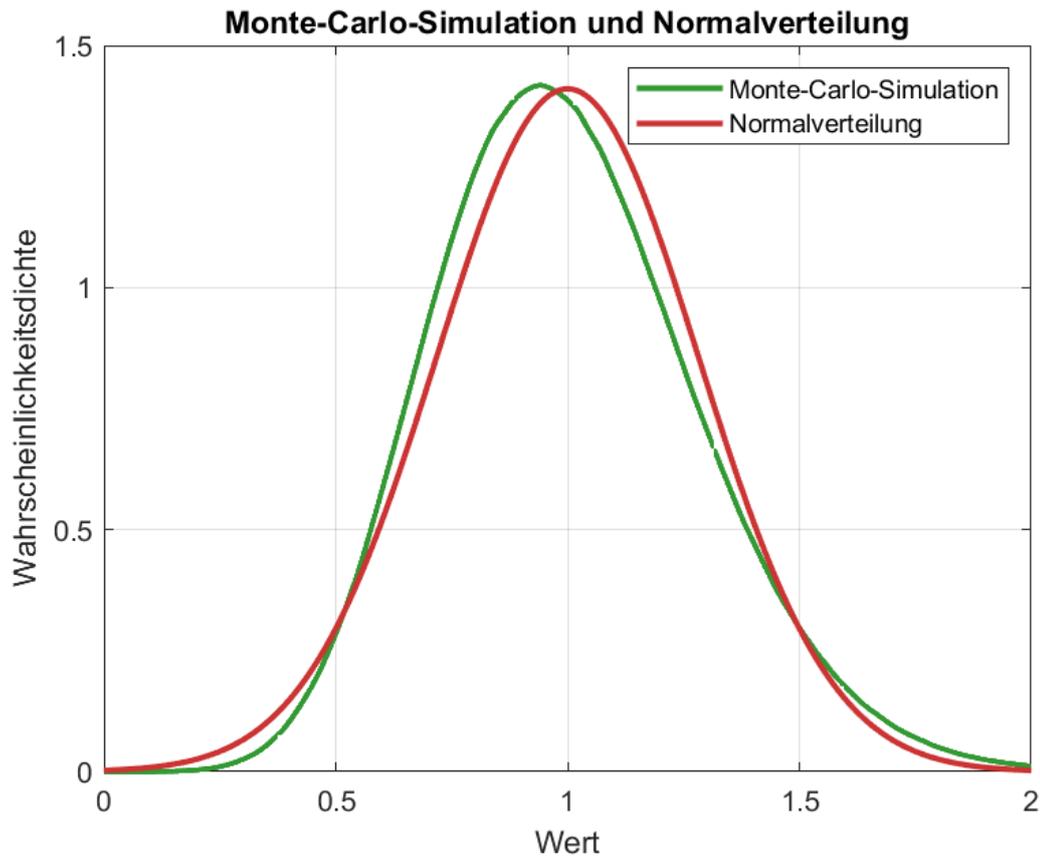


Abbildung 8: Vergleich der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer Normalverteilung und einer Dichteschätzung einer Monte-Carlo-Simulation

Abbildung 8 zeigt die Dichteschätzung der Monte-Carlo-Simulation einerseits und die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Normalverteilung, die aus einem berechneten Mittelwert und der Standardabweichung resultiert. Dabei wurde der Wert $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ mit $x_1 = x_2$ mit $\mu = 1$ und $\sigma = 0,1$ berechnet. Die Monte-Carlo-Simulation hier und weitere basieren jeweils auf 100.000.000 simulierten Stichprobenwerten.

Dieses Beispiel verdeutlicht, dass große Streuungen bei der Berechnung von Mittelwert und Standardabweichung über Formeln nicht genug berücksichtigt werden und so zu Abweichungen führen können, die die berechnete Verteilung erkennbar von der simulierten und damit realitätsnäheren Verteilung unterscheidet. Im nachfolgenden Kapitel 3.3.2 wird näher auf die Charakteristik der Monte-Carlo-Simulation eingegangen, warum sie eine asymmetrische Form aufweist und wie die Größe der Fehler die Asymmetrie beeinflusst.

3.3.2 Resultierende Verteilungsform

Dieses Unterkapitel widmet sich der Betrachtung von Verteilungsformen, die von der Normalverteilung abweichen. Wie bereits in Kapitel 3.2.1 erwähnt, ist es wichtig, dass die Standardabweichungen nicht zu groß sind, da ansonsten die resultierende Verteilung

stärker von der Normalverteilung abweicht. Dennoch ist es notwendig, sich mit der Behandlung großer Abweichungen auseinanderzusetzen. Dies gilt besonders im Kontext der Schraubenverbindungsberechnung, wo beträchtliche Abweichungen auftreten können, sowohl bei Reibwerten als auch bei Anziehungsfaktoren.

Für das bekannte Rechenbeispiel $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ mit $x_1 = x_2$ mit $\mu = 1$ und $\sigma = 0,1$ wird die Standardabweichung variiert, um den Einfluss des Verhältnisses der Standardabweichung zum Mittelwert auf die Form der Verteilung zu untersuchen.

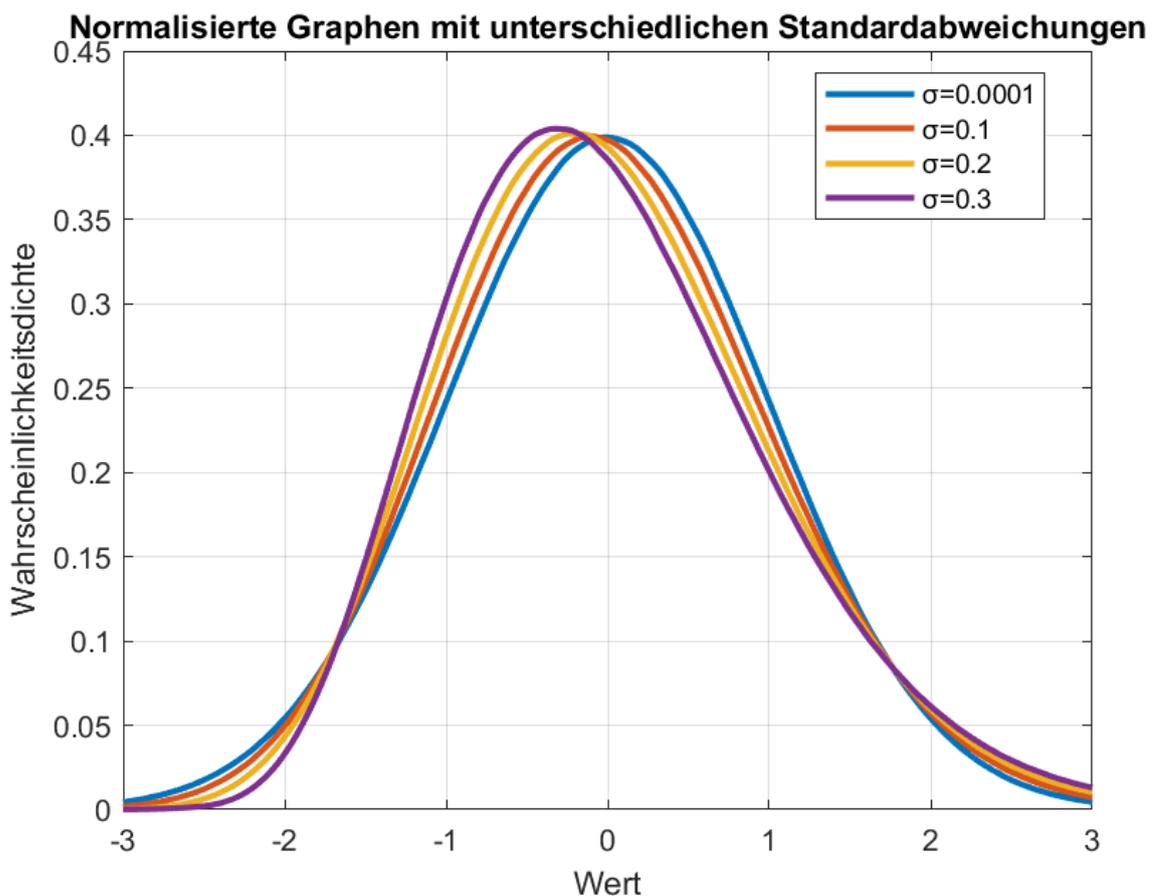


Abbildung 9: Einfluss der Standardabweichung auf die Dichteschätzung in Monte-Carlo-Simulationen

In Abbildung 9 wird die Dichtekurve des berechneten Produkts f dargestellt. Die Graphen sind normalisiert, wobei die Werte auf der x -Achse den Abstand in Standardabweichungen vom Mittelwert angeben. Der analytische Mittelwert liegt in der Mitte bei null. Der blaue Graph, der eine sehr geringe Standardabweichung der x -Werte aufweist, kann daher fast als symmetrisch und normalverteilt betrachtet werden. Mit zunehmender Standardabweichung wird erkennbar, wie die ursprüngliche Normalverteilungsform verzerrt wird. Der Modus verschiebt sich nach links. In Richtung höherer Werte fällt der Graph nicht mehr so schnell ab, weshalb er langfristig über dem Graphen der idealen

Normalverteilung verläuft. Linksseitig des Hochpunkts der Kurve fällt der Graph jedoch stärker ab und liegt bei kleineren Werten unter der Kurve der idealen Normalverteilung. Die Trends verstärken sich mit zunehmender Standardabweichung. Eine solche Verteilungsform wird rechtsschief genannt.

Diese Entwicklungen lassen sich darauf zurückführen, dass bei den Rechenmethoden zur Fehlerfortpflanzung Fehlerkombinationen in Form gleichzeitig auftretender Fehler nicht berücksichtigt werden. Je kleiner die Streuung der Werte x_1 und x_2 ist, desto geringer ist der Einfluss dieser Fehlerüberlagerung auf die Verteilung des berechneten Produkts f . Letztere kommt der Verteilung des Produkts der idealen Normalverteilung also näher, je kleiner die Streuung ist, was in der Abbildung anschaulich dargestellt ist.

Diese Asymmetrie entsteht, weil hohe Werte, wenn sie miteinander kombiniert werden, zu einem Ergebnis führen können, das deutlich über dem Mittelwert liegt, während niedrige Werte bei gleichzeitigem Auftreten näher am Mittelwert bleiben. Dies führt zu einer Verzerrung der Verteilung von f , die sich in einer signifikanten Asymmetrie äußert.

Ein Beispiel zur Verdeutlichung: Werden zwei hohe Werte, wie etwa $x_1 = 1,2$ und $x_2 = 1,2$, miteinander multipliziert, ergibt sich $f = 1,2 \cdot 1,2 = 1,44$. Das Ergebnis 1,44 liegt 44% über dem Mittelwert von 1. Werden hingegen zwei niedrige Werte, wie etwa $x_1 = 0,8$ und $x_2 = 0,8$, multipliziert, ergibt sich $f = 0,8 \cdot 0,8 = 0,64$. Das Ergebnis 0,64 liegt 36% unter dem Mittelwert von 1. Obwohl die Ausgangswerte mit gleicher Wahrscheinlichkeit eintreten und gleich weit vom Mittelwert entfernt liegen, ist dies beim Produkt nicht der Fall. Dieses Beispiel zeigt, dass hohe Werte ein Produkt erzeugen können, das deutlich weiter über dem Mittelwert liegt, als niedrige Werte unter dem Mittelwert liegen können. Dies führt zu einer Verzerrung der Verteilung von f , die sich in einer Asymmetrie ausdrückt.

Gleichzeitig verschiebt sich der Modus der Verteilung nach unten, da Kombinationen wie z.B. $x_1 = 0,9$ und $x_2 = 1,1$ ein Produkt $f = 0,9 \cdot 1,1 = 0,99$ ergeben, das kleiner als der Mittelwert ist. Solche Kombinationen treten häufiger auf, da die Werte um den Mittelwert symmetrisch verteilt sind und häufiger Produkte kleiner als eins als größer als eins erzeugen. Mit höherer Standardabweichung entfernt sich der Modus vom Mittelwert, der gemäß den Ergebnissen der Monte-Carlo-Simulation weiterhin bei eins liegt, nach links.

3.3.3 Logarithmische Transformation

In diesem Unterkapitel wird untersucht, inwieweit analytische Ergebnisse ohne eine Monte-Carlo-Simulation genutzt werden können. Eine nützliche Operation ist die logarithmische Transformation. Diese findet häufig Anwendung bei rechtsschiefen Dichtefunktionen [5] wie beispielsweise bei dem Beispiel im vorangegangenen Unterkapitel

3.3.2., was durch Multiplikation entstanden ist. Der qualitative Verlauf einer rechtsschiefen Dichtefunktion ist in Abbildung 10 dargestellt.

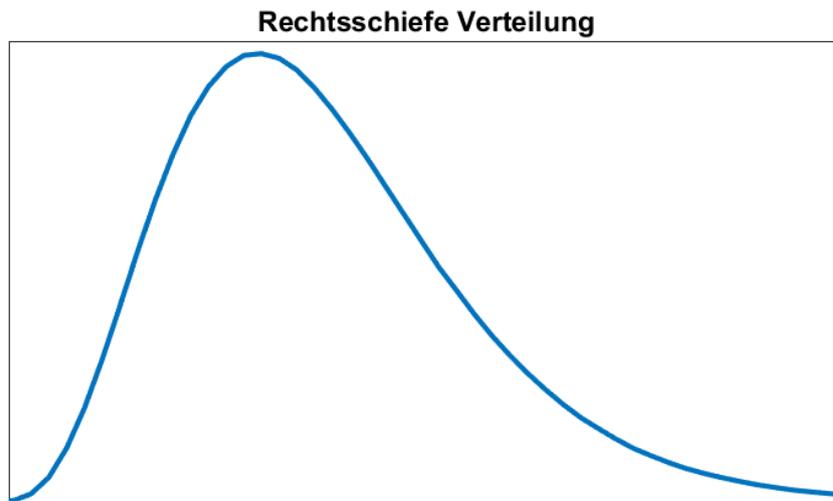


Abbildung 10: Verlauf einer rechtsschiefen Wahrscheinlichkeitsdichtekurve

Die asymmetrische Verteilung lässt sich durch die Anwendung einer logarithmischen Transformation näher an eine symmetrische Form bringen. Der Vorteil liegt darin, dass die berechneten Werte des Mittelwertes und der Standardabweichung unter Umständen, auf die nachfolgend eingegangen wird, treffender als die Werte vom bisherigen Vorgehen die in beliebigen Intervallen liegenden Wahrscheinlichkeiten beschreiben können.

Durch die Logarithmierung der asymmetrischen Kurve wird der in Kapitel 3.3.2 beschriebenen Verzerrung des Kurvenverlaufs entgegengewirkt. Dabei wird die gestaucht wirkende Seite links des Mittelwertes gestreckt und die gestreckte Seite rechts des Mittelwertes gestaucht. Dieses Vorgehen wird am Beispiel (42) mit $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ mit $x_1 = x_2$ mit $\mu = 1$ und $\sigma = 0,1$ verdeutlicht:

$$f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 \quad (42)$$

Durch Berechnung des natürlichen Logarithmus ergibt sich eine neue Größe f^* (43):

$$f^*(x_1 \cdot x_2) = \ln f = \ln(x_1 \cdot x_2) \quad (43)$$

mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f^*}{\partial x_1} = \frac{1}{\mu_{x_1}}; \quad \frac{\partial f^*}{\partial x_2} = \frac{1}{\mu_{x_2}}$$

$$\begin{aligned} \sigma_0^*(f^*(x_1 \cdot x_2)) &= \sqrt{\frac{\partial f^{*2}}{\partial x_1} \cdot \sigma_1^2 + \frac{\partial f^{*2}}{\partial x_2} \cdot \sigma_2^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\mu_{x_1}}\right)^2 \cdot \sigma_1^2 + \left(\frac{1}{\mu_{x_2}}\right)^2 \cdot \sigma_2^2} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \\ &= \sqrt{2 \cdot \sigma^2} = \sqrt{2} \cdot \sigma \approx 0,141 \end{aligned}$$

In diesem speziellen Fall ist die Standardabweichung gleich der Standardabweichung im linearen Fall, die in Kapitel 3.2.3 berechnet wurde, allerdings unterscheidet sich der weitere Umgang mit der berechneten Größe. Nach Bestimmung der Standardabweichung wird diese bei der Rücktransformation der Funktion genutzt, um die Intervallgrenzen zu berechnen. Da diese zuvor logarithmiert wurde, wird die Funktion f^* nun exponenziert. Dadurch wird eine Rücktransformation der Funktion zur ursprünglichen Funktion durchgeführt.

Die Berechnung der Grenzwerte bei der logarithmischen Transformation erfolgt gemäß (44):

$$f_{O/U,log} = e^{\ln(\mu) \pm x \cdot \sigma_0^*} \quad (44)$$

Im Gegensatz dazu werden die Grenzwerte ohne logarithmische Transformation nach (45) berechnet:

$$f_{O/U,lin} = \mu \pm x \cdot \sigma_0 \quad (45)$$

x stellt dabei den Faktor der Standardabweichung dar. In der Tabelle 4 wird die Bestimmung der Grenzwerte für $x = 1$ gezeigt, um die Unterschiede zwischen den ursprünglichen Grenzwerten und den neuen Grenzwerten durch logarithmische Transformation aufzuzeigen.

	Untere Grenze	Obere Grenze
Logarithmisch	$f_{U,log} = e^{\ln(\mu) - x \cdot \sigma_0^*}$ Mit $x = 1$ $e^{\ln(1) - 1 \cdot 0,141} = 0,868$	$f_{O,log} = e^{\ln(\mu) + x \cdot \sigma_0^*}$ Mit $x = 1$ $e^{\ln(1) + 1 \cdot 0,141} = 1,151$
Linear	$f_{U,lin} = \mu - x \cdot \sigma_0$ Mit $x = 1$ $1 - 1 \cdot 0,141 = 0,859$	$f_{O,lin} = \mu + x \cdot \sigma_0$ Mit $x = 1$ $1 + 1 \cdot 0,141 = 1,141$

Tabelle 4: Bestimmung der Grenzwerte durch lineare und logarithmische Berechnung

Zu erkennen ist, dass die durch Logarithmierung bestimmten Grenzen beide höher liegen als die linearen Grenzen. Mithilfe einer Monte-Carlo-Simulation soll nun geprüft werden, welche Grenzen im konkreten Beispiel besser geeignet sind.

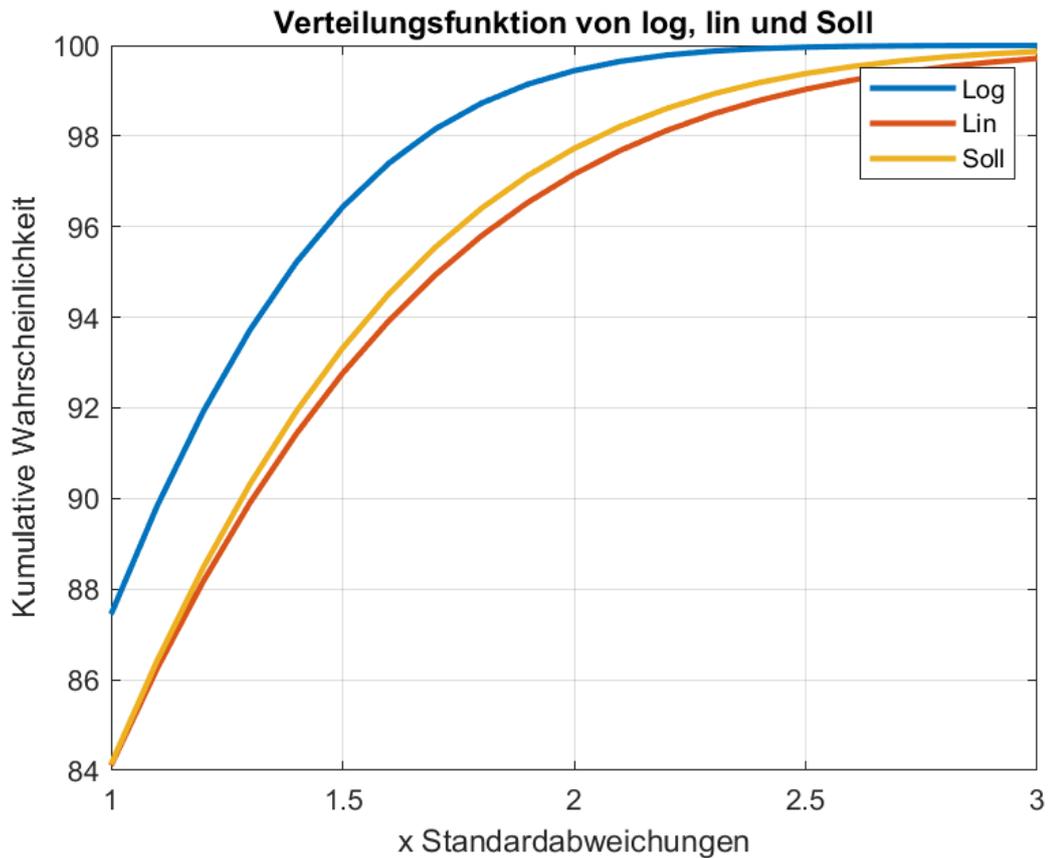


Abbildung 11: Vergleich der oberen Grenzwerte aus Monte-Carlo-Simulationen mit logarithmischen, linearen und Sollwert-Grenzwerten

In Abbildung 11 werden die Verteilungsfunktionen der logarithmischen, der linearen und der Sollwerte verglichen, um Aussagen über die Sicherheit bei der Berechnung der verschiedenen Methoden treffen zu können. Für die Bestimmung der verschiedenen Graphen wurde zunächst wieder eine Monte-Carlo-Simulation durchgeführt, um eine realistische Verteilung der Werte zu erhalten. Die Kurven der logarithmischen und linearen Wahrscheinlichkeit wurden gebildet, indem der auf der x -Achse aufgetragene Wert als Faktor der Standardabweichung zur Bestimmung der Grenzwerte nach (44) beziehungsweise (45) genutzt wurde. Die Kurven geben also in Abhängigkeit von x , den Anteil der simulierten Werte der Monte-Carlo-Simulation unterhalb des nach der entsprechenden Gleichung bestimmten Grenzwertes an. Die Log-Kurve beschreibt also $P(e^{\ln(\mu)+x\cdot\sigma} \geq f)$, während die Lin-Kurve $P(\mu + x \cdot \sigma \geq f)$ beschreibt. Betrachtet wird zunächst nur die obere Grenze, also die Wahrscheinlichkeit, dass simulierte Werte unterhalb des von x abhängigen Grenzwerts liegen. Der Graph für die Sollwerte dient als Referenz bei der Bewertung der anderen Kurven und stellt die Sollwerte der summierten Wahrscheinlichkeit bei einer idealen Normalverteilung mit normalverteilten Werten dar. Sie basiert nicht auf den Ergebnissen der Monte-Carlo-Simulation. In der nachfolgenden Tabelle 5 sind

wieder einige Werte in Abhängigkeit des Faktors der Standardabweichungen angegeben, die so auch am Graphen der Sollwerte abgelesen werden können.

k	$P(x \leq \mu + k \cdot \sigma)$
1	0,8413 \cong 84,13%
2	0,9772 \cong 97,72%
3	0,9987 \cong 99,87%

Tabelle 5: Summierte Wahrscheinlichkeit bis $\mu + k \cdot \sigma$ einer Normalverteilung

Bei der Verteilung der Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulation liegt eine Asymmetrie vor, weshalb sich die Kurve der linearen Methode von den Sollwerten unterscheidet. Gäbe es diese nicht, wäre die Kurve der linearen Methode mit der Kurve der Sollwerte identisch. Das ist insofern problematisch, als dass nun bei einem berechneten Wert einer Standardabweichung nicht mehr von den Prozentsätzen der Normalverteilung ausgegangen werden kann. Da der Graph für das lineare Vorgehen unter dem Graphen für die Sollwerte der Normalverteilung liegt, bedeutet dies, dass beim Festlegen der oberen Grenze bei beispielsweise $\mu + 2\sigma$ nicht mehr mit 97,72% zu rechnen ist, sondern mit einem geringeren Wert. Leider ist dadurch auch unklar, wo der tatsächliche obere Grenzwert für 97,72% bei der linearen Methode liegt.

Da der obere Grenzwert bei der logarithmischen Methode höher ist als bei der linearen, wie in Tabelle 4 gezeigt, liegt ein größerer Anteil der Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulation unterhalb des oberen Grenzwertes als bei der linearen Methode. Der Graph für die Sollverteilung befindet sich zwischen den beiden anderen Graphen, was bedeutet, dass bei der logarithmischen Methode eine versteckte Sicherheit vorliegt. Wenn für Berechnungen die höheren Werte eines berechneten Wertes, in diesem Fall f , relevant sind, kann die logarithmische Herangehensweise vorteilhaft sein, da sie über dem Graphen für die Sollwerte verläuft. Es kann also davon ausgegangen werden, dass beim Festlegen des oberen Grenzwertes bei $e^{\ln(\mu)+2 \cdot \sigma}$ mehr als 97,72% der Werte unterhalb des Grenzwertes liegen und somit die Anforderung von mindestens 97,72% sicher erfüllt wird.

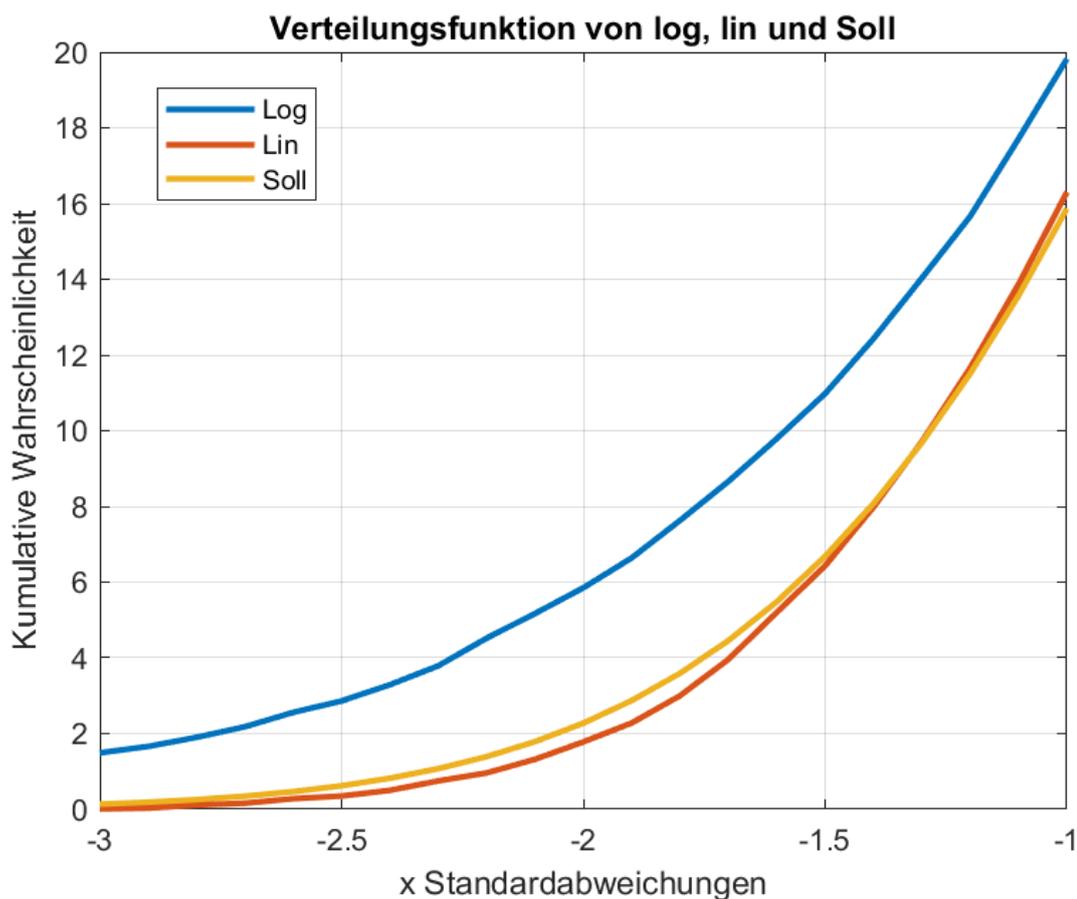


Abbildung 12: Vergleich der unteren Grenzwerte aus Monte-Carlo-Simulationen mit logarithmischen, linearen und Sollwert-Grenzwerten

In Abbildung 12 wird die untere Grenze betrachtet und somit die Wahrscheinlichkeit, dass der untere Grenzwert unterschritten wird. Hierbei zeigt sich, dass beim Graphen der linearen Methode ein deutlich geringerer Anteil unterhalb des unteren Grenzwertes liegt als beim logarithmischen Graphen. Der Grund hierfür liegt darin, dass der untere berechnete Grenzwert beim linearen Vorgehen kleiner ist als der logarithmisch berechnete untere Grenzwert. Folglich liegen auch weniger Werte von f unterhalb des linearen als des logarithmischen Wertes. Der Graph für die Sollwerte verläuft erneut zwischen den beiden anderen Graphen. Es zeigt sich also, dass bei der unteren Grenze die lineare Methode sicherer ist als die der logarithmischen Transformation, da mehr Werte oberhalb des unteren Grenzwertes liegen. Die gleiche Problematik, die bei der Betrachtung der oberen Grenze schon bei der linearen Methode auftrat, liegt nun bei der logarithmischen Methode vor. Es ist unklar, mit wie vielen Standardabweichungen gerechnet werden muss, um den Sollwert zu erreichen, sodass 97,72% oberhalb der unteren Grenze liegen. Hier ist die lineare Methode besser geeignet, einen sicheren Grenzwert zu berechnen.

Es zeigt sich also, dass sowohl die logarithmische als auch die lineare Vorgehensweise Vorteile aufweisen. Wenn der obere Grenzwert betrachtet werden soll, ist das Vorgehen der logarithmischen Transformation sicherer, während es bei der Betrachtung der unteren Grenze sicherer ist, mit der linearen Methode zu rechnen. Sollte bei der Berechnung sowohl eine obere als auch eine untere Grenze benötigt werden, können diese auch jeweils mit einer der beiden Methoden berechnet werden, sodass die obere Grenze mit dem Vorgehen der logarithmischen Transformation und die untere Grenze nach dem linearen Vorgehen bestimmt wird. Somit hätte man bei der Berechnung sowohl für die untere als auch die obere Grenze eine versteckte Sicherheit und könnte zumindest von den Tabellenwerten des Sollwert-Graphen einer Normalverteilung ausgehen.

3.4 Zusammenfassung der relevanten Wahrscheinlichkeitsrechnung

Kapitel 3 vermittelt die grundlegenden Konzepte, die für das weitere Vorgehen und die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung bei der Berechnung von Schraubenverbindungen erforderlich sind.

Zunächst werden diskrete und kontinuierliche Zufallsverteilungen eingeführt, die verschiedene Arten von Wahrscheinlichkeitsmodellen beschreiben. Ein Histogramm dient als grafische Darstellung zur Visualisierung der Häufigkeitsverteilung von Daten, wobei die Ergebnisse in Kategorien, den sogenannten Bins, summiert und unterteilt werden.

Der Mittelwert einer Verteilung gibt den durchschnittlichen Wert der Stichprobe an, während Varianz und Standardabweichung die Streuung der Werte um den Mittelwert quantifizieren. Die Normalverteilung, eine der wichtigsten Zufallsverteilungen, beschreibt häufig natürliche Phänomene und ist durch ihre Glockenkurvenform charakterisiert. Sie wird allein durch den Mittelwert und die Standardabweichung beschrieben. Quantile einer Verteilung ermöglichen es, Werte zu identifizieren, die eine bestimmte Wahrscheinlichkeit der Verteilung abdecken.

Im zweiten Teil wird das Fehlerfortpflanzungsgesetz vorgestellt, das die Berechnung der Unsicherheit aus verschiedenen Einflussgrößen beschreibt. Das Vorgehen wird anhand von Beispielen für Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division veranschaulicht.

Die Simulation und Analyse von Wahrscheinlichkeitsverteilungen erweitern die theoretischen Konzepte durch praktische Anwendungen. Die Monte-Carlo-Simulation ist eine weit verbreitete Methode zur Erzeugung zufälliger Stichproben, um komplexe Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu generieren. Dabei können realitätsnähere Verteilungsformen ermittelt werden. Durch logarithmische Achsenskalierung kann bei rechtsschiefen asymmetrischen Verteilungen eine zuverlässigere Standardabweichung für obere Grenzwerte berechnet werden.

Auf diesen Grundlagen wird im nächsten Kapitel die praktische Umsetzung aufbauen.

4 Stochastische Herangehensweise bei der Schraubenverbindungsrechnung

In diesem Kapitel werden die beiden Themengebiete der Schraubenverbindungsrechnung und der Wahrscheinlichkeitsrechnung zusammengeführt. Es wird ein Lösungsansatz für die in Kapitel 2.2.3 dargestellte Problemstellung präsentiert und anhand der Berechnung des Anziehdrehmoments beispielhaft umgesetzt. Es werden in MATLAB die konkreten Schritte für die Programmierung der automatisierten Berechnung des Mittelwerts und der Standardabweichung vorgestellt und der Aufbau einer Monte-Carlo-Simulation erläutert. Anschließend folgt eine Übersicht über zusätzliche Funktionen von MATLAB, die bei der Analyse der Simulationsergebnisse von Nutzen sind.

4.1 Lösungsansatz für die Problemstellung

Die vorangegangenen Kapitel haben gezeigt, dass bei der Schraubenverbindungsrechnung viele Einflussgrößen mit starken Streuungen berücksichtigt werden müssen. Die Berechnung des ungünstigsten Falls führt zu Grenzwerten mit einer sehr geringen Wahrscheinlichkeit, die jedoch bei der Auslegung nicht berücksichtigt wird. Dies wird anhand eines Beispiels verdeutlicht, bei dem ein Produkt aus n unterschiedlichen normalverteilten Faktoren (46) untersucht wird:

$$f(x_1 \dots x_n) = \prod_{i=1}^n x_i \quad (46)$$

Dabei ist f die betrachtete Größe, für die Minimal- und Maximalwerte berechnet werden und x_i sind jeweils Faktoren, wobei gilt: $\mu = 1$ und $\sigma = 0,1$

Im nächsten Schritt werden für $n = 1 \dots 4$ die Minimal- und Maximalwerte für f berechnet sowie die Wahrscheinlichkeit, dass ein f -Wert unterhalb oder oberhalb dieser Grenzen liegt. Für $n = 3$ lautet die Berechnung exemplarisch mit angenommenen Grenzwerten von $\mu \pm 2 \cdot \sigma$:

$$f(x_1 \dots x_3) = \prod_{i=1}^3 x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

$$f_{min} = \prod_{i=1}^3 x_{i,min} = 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 0,512 \quad f_{max} = \prod_{i=1}^3 x_i = 1,2 \cdot 1,2 \cdot 1,2 = 1,728$$

Eine Monte-Carlo-Simulation zeigt, dass etwa 0,036% der Werte unterhalb von 0,512 liegen und 0,022% oberhalb von 1,728.

Für $n = 1$ bis $n = 4$ sind die Ergebnisse in der folgenden Tabelle 6 gesammelt:

n	f_{min}	$P(f < f_{min})$ in %	f_{max}	$P(f > f_{max})$ in %
1	0,8	2,28	1,2	2,28
2	0,64	0,274	1,44	0,215
3	0,512	0,0361	1,728	0,0224
4	0,4096	0,00494	2,0736	0,00243

Tabelle 6: Minimal- und Maximalwerte sowie zugehörige Wahrscheinlichkeiten des Unter- und Überschreitens

Die Tabelle zeigt zwei wesentliche Erkenntnisse: Erstens sinkt mit zunehmender Anzahl an Faktoren die Wahrscheinlichkeit, dass ein Grenzwert erreicht oder überschritten wird. Zweitens zeigen die variierenden Werte der Wahrscheinlichkeiten für Werte außerhalb der Grenzwerte, dass diese Wahrscheinlichkeiten bei der Berechnung von Minimal- und Maximalwerten kaum eine Rolle spielen. Für eine aussagekräftige Bestimmung der Grenzwerte sollte jedoch die Wahrscheinlichkeit des Unter- oder Überschreitens dieser Grenzen berücksichtigt werden. Die Berechnung der Minimal- und Maximalwerte ohne die zugehörige Ausfallwahrscheinlichkeit ermöglicht keine verlässliche Einschätzung der Sicherheit der Schraubenverbindung. Der Vorteil einer solchen Berücksichtigung liegt darin, dass die Schraubenverbindung so sicher wie nötig und gleichzeitig so effizient wie möglich gestaltet werden kann.

Abbildung 13 zeigt den Verlauf der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für die Gleichung (46) für $n = 1 \dots 4$, welche durch Monte-Carlo-Simulation erstellt wurden. Diese sind normalisiert, wobei -1 den jeweiligen Wert f_{min} und 1 den Wert f_{max} aus der Tabelle 6 darstellt.

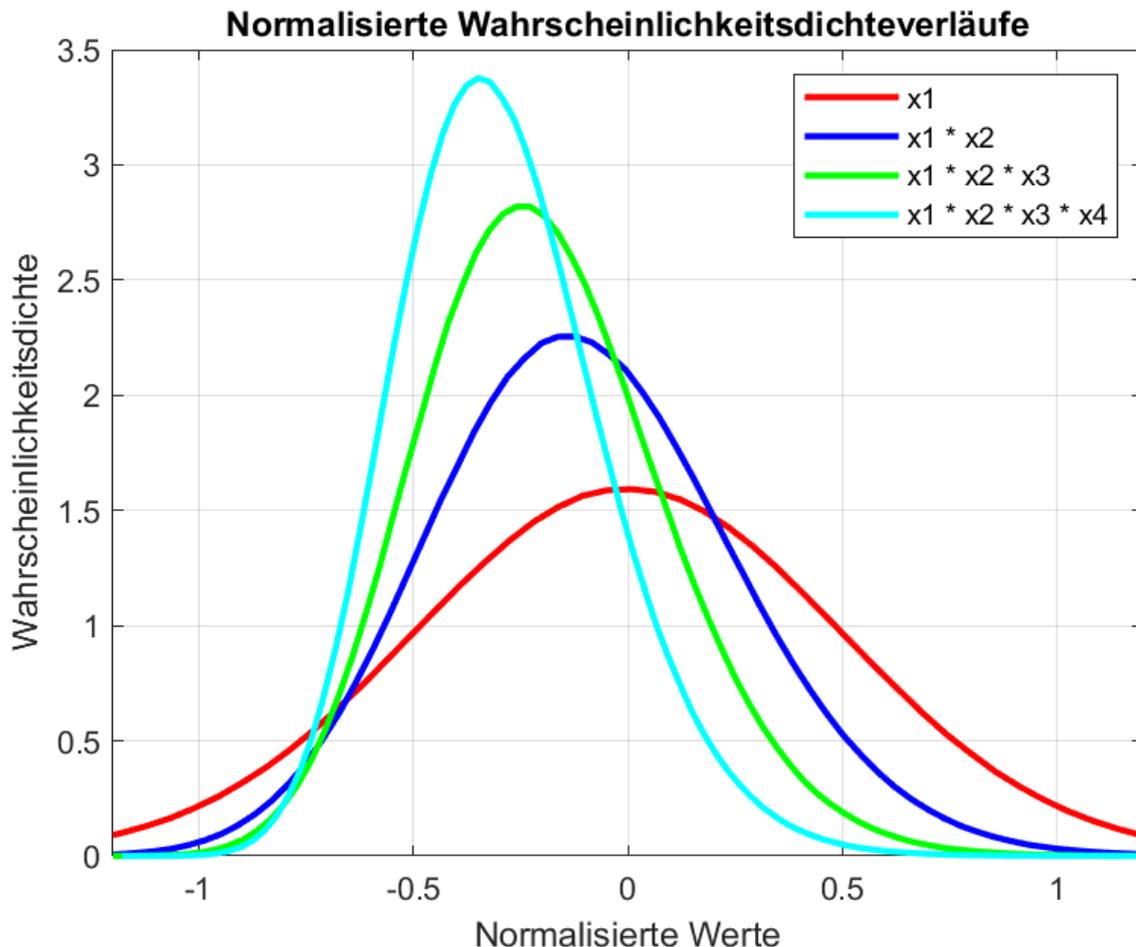


Abbildung 13: Normalisierte Dichteschätzungen der Monte-Carlo-Simulationen mit verschiedener Anzahl an Faktoren

Zu erkennen ist, dass sich mit der Anzahl der Faktoren die Verteilung der Werte zunehmend auf einen geringeren Bereich konzentriert. Dies bedeutet gleichzeitig, dass sich die Wahrscheinlichkeit, dass Grenzwerte erreicht werden, verringert.

In den folgenden Kapiteln wird untersucht, wie dieses Verhalten für eine effizientere Auslegung von Schrauben genutzt werden kann. Der Lösungsansatz besteht darin, die Formeln der Schraubenverbindungsrechnung dahingehend zu analysieren, ob stark streuende Einflussfaktoren vorkommen und falls dies der Fall ist, das Fehlerfortpflanzungsgesetz anzuwenden. Zudem sollen die Verteilungen der in diesen Formeln berechneten Größen durch Monte-Carlo-Simulationen bestimmt und analysiert werden. Dies ermöglicht eine konkrete und praktisch anwendbare Verbesserung bei der Auslegung.

4.2 Praktische Anwendung der stochastischen Grundlagen am Beispiel des Anziehdrehmoments in MATLAB

Die Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes kann schnell zeit- und rechenaufwendig werden, insbesondere wenn sie manuell durchgeführt wird. Die in Kapitel 3.2.2 und

3.2.3 behandelten einfachen Beispiele stellen oft nur die Ausnahme dar. In der Praxis, besonders bei der Berechnung von Schraubenverbindungen, treten häufig komplexe Formeln auf, die aus mehreren Größen bestehen und in weiteren Formeln berechnet werden müssen. Dies führt zu komplexen Gleichungen, die schnell unüberschaubar werden.

Um diesen Herausforderungen zu begegnen, wird in diesem Kapitel das Vorgehen zur Programmierung relevanter Funktionen in MATLAB beschrieben. Konkret wird gezeigt, wie der Mittelwert und die Standardabweichung mittels des Fehlerfortpflanzungsgesetzes automatisiert berechnet und eine Monte-Carlo-Simulation zur Erstellung einer Verteilung der Werte für das Anziehdrehmoment einer Schraube durchgeführt werden können. Die Automatisierung dieser Berechnungen in MATLAB ermöglicht eine effiziente und präzise Analyse, die die Handhabung komplexer Gleichungen vereinfacht und den Rechenaufwand reduziert.

4.2.1 Berechnung des Mittelwerts und der Standardabweichung

Das Ziel dieser Berechnung ist, eine Normalverteilung der Ergebnisse durch das Anwenden des Fehlerfortpflanzungsgesetzes zu ermöglichen. Die Berechnung des Anziehdrehmomentes stellt den letzten Berechnungsschritt (R13) nach der VDI2230 dar. Diese Berechnung umfasst verschiedene Größen, von denen einige durch zusätzliche Formeln beschrieben werden müssen.

Die Gleichung für das Anziehdrehmoment (47) lautet:

$$M_A = F_{M\ zul} \cdot \left(0,159 \cdot P + 0,577 \cdot d_2 \cdot \mu_G + \frac{D_{Km}}{2} \cdot \mu_K \right) \quad (47)$$

Für D_{Km} gilt:

$$D_{Km} = \frac{D_{Ki} + d_W}{2} \quad (48)$$

Die maximale Vorspannkraft $F_{M\ zul}$ wird aus dem Berechnungsschritt R7 wie folgt bestimmt:

$$F_{M\ zul} = \sigma_{M\ zul} \cdot A_S \quad (49)$$

Dabei berechnen sich $\sigma_{M\ zul}$ (50) und A_S durch (51):

$$\sigma_{M\ zul} = \frac{v \cdot R_{p0,2\ min}}{\sqrt{1 + 3 \cdot \left[\frac{4}{d_S} \cdot (0,159 \cdot P + 0,577 \cdot \mu_G \cdot d_2) \right]^2}} \quad (50)$$

$$A_S = \frac{\pi}{4} \cdot d_S^2 \quad (51)$$

Mit dem Spannungsdurchmesser (52):

$$d_s = \frac{d_2 + d_3}{2} \quad (52)$$

Die Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes kann bei der Vielzahl an Größen und der Komplexität durch verschachtelte Formeln sehr aufwendig sein. Um diesen Aufwand zu verdeutlichen, befindet sich der Term zur Berechnung des Varianzanteils des Gewinndereibwerts an der Varianz der Standardabweichung der zulässigen Montagevorspannkraft im Anhang C-1. Dieser stellt lediglich einen von acht Termen in der Gleichung zur Berechnung der Standardabweichung des Anziehdrehmoments dar.

Nachfolgend wird das Vorgehen zur Programmierung der Berechnungen in MATLAB anhand der Gleichung für das Anziehdrehmoment erläutert. Der zugehörige MATLAB-Code ist im Anhang A-1 in elf verschiedene Teile gegliedert. Diese Teile werden der Reihe nach beschrieben, um das Vorgehen für die Implementierung beliebiger Formeln anschaulich zu machen.

Zunächst werden die relevanten Variablen als symbolische Größen eingeführt. Dazu gehören alle Größen, die in den Gleichungen des Anziehdrehmoments vorkommen, sowohl Mittelwerte als auch Standardabweichungen. Diese symbolischen Variablen bilden die Basis für die spätere Berechnung.

Im nächsten Schritt werden diese Variablen in zwei Vektoren zusammengefasst: ein Vektor v für die Mittelwerte und ein Vektor w für die Standardabweichungen der Größen. Diese Vektoren ermöglichen eine strukturierte Verarbeitung der Daten.

Anschließend werden die diskreten Werte für Mittelwert und Standardabweichung aller Größen definiert. Es wird darauf geachtet, dass alle Größen in SI-Einheiten angegeben werden, um Konsistenz und Einheitlichkeit in den Berechnungen zu gewährleisten. Einheitenlose Größen werden mit der Einheit „1“ dargestellt, um Verwirrung zu vermeiden.

Daraufhin werden zwei weitere Vektoren erstellt, die die diskreten Werte der Größen enthalten. Die Reihenfolge dieser Werte entspricht der Reihenfolge der symbolischen Variablen aus den vorherigen Vektoren, was die Zuordnung erleichtert.

Die verschachtelten Gleichungen, die in der Gleichung für das Anziehdrehmoment vorkommen, werden nun von der untersten bis zur höchsten Ebene definiert. Dies umfasst alle notwendigen Schritte zur vollständigen Formulierung der Gleichung.

Im folgenden Schritt wird die Gleichung für das Anziehdrehmoment angegeben. Diese Gleichung, die in der Variable M_A gespeichert wird, enthält alle Größen in symbolischer Form und bildet die Grundlage für die weiteren Berechnungen.

Der Mittelwert des Anziehdrehmoments wird berechnet, indem die symbolischen Größen durch die entsprechenden diskreten Werte ersetzt werden. Das Ergebnis dieser Berechnung ist ein einfacher Zahlenwert.

Die Berechnungen werden dann initialisiert, wobei die Lösung zunächst auf null gesetzt wird.

Das Fehlerfortpflanzungsgesetz wird angewendet, indem die symbolische Gleichung des Anziehdrehmoments für alle Größen partiell abgeleitet wird. Diese Ableitungen werden mit den Standardabweichungen multipliziert und quadriert, um eine symbolische Gleichung zu erhalten.

Schließlich wird die resultierende Gleichung radiziert, um die Standardabweichung des Anziehdrehmoments zu berechnen.

Im letzten Schritt werden die symbolischen Variablen durch die zuvor definierten diskreten Werte ersetzt, um die Standardabweichung des Anziehdrehmoments als konkreten Zahlenwert zu berechnen.

Die Ergebnisse der Funktion umfassen die berechneten Werte für Mittelwert und Standardabweichung des Anziehdrehmoments sowie die Gleichungen, die zur Nachvollziehbarkeit und Überprüfung der Lösung relevant sind.

4.2.2 Monte-Carlo-Simulation

Für die Berechnung der Anziehdrehmoments nach dem Berechnungsschritt R13 der VDI 2230 wird eine Monte-Carlo-Simulation durchgeführt. Der zugehörige MATLAB-Code ist im Anhang A-2 in sechs Teile gegliedert.

Zunächst werden die diskreten Werte der Größen, also die Mittelwerte und Standardabweichungen, definiert. Diese Werte bilden die Grundlage für die Zufallsverteilung der Einflussgrößen.

Im nächsten Schritt wird die Anzahl der zu simulierenden Werte festgelegt. Eine höhere Anzahl an Werten erhöht zwar den Rechenaufwand, verbessert jedoch die Genauigkeit der Ergebnisse. Mit mehr Werten wird die Robustheit gegenüber Ausreißern in der Simulation gesteigert.

Anschließend werden aus den angegebenen Mittelwerten und Standardabweichungen Vektoren für alle relevanten Größen erstellt. Diese Vektoren enthalten die zuvor festgelegte Anzahl an normalverteilten Werten.

Danach werden alle erforderlichen Gleichungen definiert, die vor der Berechnung des Anziehdrehmoments angewendet werden müssen.

Sobald diese Berechnungen abgeschlossen sind, wird die Gleichung für das Anziehdrehmoment angegeben. Dies führt zu einem Vektor mit vielen Werten für das Anziehdrehmoment, die eine beliebige Verteilungsform aufweisen können.

Abschließend wird die Verteilung des Anziehdrehmoments analysiert, insbesondere die Lage der Grenzwerte für bestimmte Prozentzahlen. Die Bestimmung der Quantile stellt den letzten Schritt der Simulation dar.

4.2.3 Weitere Funktionen für die Analyse der Ergebnisse

Zur weiteren Analyse der berechneten und simulierten Ergebnisse stehen verschiedene MATLAB-Funktionen zur Verfügung, die wertvolle Einblicke in die Verteilungsformen bieten und zur Veranschaulichung der Daten beitragen können. Diese Funktionen sind ebenfalls im Anhang aufgeführt und werden im Folgenden erläutert.

Im Anhang A-3 werden der Mittelwert und die Standardabweichung der Daten aus einer Monte-Carlo-Simulation berechnet. Diese Berechnungen dienen dazu, die statistischen Eigenschaften der Simulationsergebnisse zu ermitteln und mit den analytischen Größen abzugleichen. Dadurch kann das Simulationsmodell überprüft werden.

Eine wichtige Ergänzung zu Kapitel 4.2.1 besteht darin, die Anteile der berechneten Gesamtvarianz den einzelnen streuenden Größen zuzuordnen. Diese Varianzanalyse (Anhang A-4) ermöglicht eine genauere Lokalisierung der Ursachen der Streuung und eine gezielte Verbesserung der Genauigkeit. Auf Grundlage dieser Ergebnisse können Haupt- und Nebeneinflüsse beliebiger Formeln bestimmt werden. Praktisch hätte dies den Vorteil, dass zur Verbesserung der Genauigkeit, der Fokus auf die Optimierung der Haupteinflüsse gelegt werden kann und nicht Aufwand zur Verbesserung der Genauigkeit von Nebeneinflüssen betrieben wird. Um diese Analyse durchzuführen, wird im Programmcode ein zusätzlicher Vektor eingeführt, der in der Iterationsschleife die Quadrate der Produkte aus partieller Ableitung und Standardabweichung jeder Größe speichert.

Eine weitere nützliche Funktion ist die Erstellung eines Histogramms zur Visualisierung der Verteilung der Anziehdrehmomente (Anhang A-5). Dieses erleichtert das Setzen von Ober- und Untergrenzen für zulässige Werte. Für den betrachteten Datensatz werden die 1%- und 99%-Quantile bestimmt, welche als vertikale Markierungen im Diagramm eingezeichnet werden. Diese Markierungen sind hilfreich bei der Bestimmung der optimalen Anziehdrehmomente.

Zusätzlich zur Monte-Carlo-Simulation wird die „ksdensity“-Funktion (Anhang A-6) verwendet, um eine Dichteschätzung, auch Kerndichteschätzung genannt, der simulierten Anziehdrehmomente zu erstellen. Diese Schätzung ähnelt dem Wahrscheinlichkeitsdichteverlauf der Normalverteilung, bietet jedoch eine genauere Darstellung, da sie

Asymmetrien und andere Verteilungen korrekt abbilden kann. Durch die Kerndichteschätzung lassen sich Verteilungen besser analysieren als durch Histogramme [6], insbesondere im Vergleich mit dem Wahrscheinlichkeitsdichteverlauf kann die Kerndichteschätzung helfen, potenzielle Fehler bei der Analyse ohne Monte-Carlo-Simulation zu erkennen.

Bei der Schraubenverbindungsrechnung ist es entscheidend, verschiedene Sicherheitsanforderungen gleichzeitig zu berücksichtigen. Simulationen können zwar zeigen, wie viele Schrauben die Sicherheitsüberprüfung bestehen, jedoch nicht, ob zwischen den Sicherheitsanforderungen Abhängigkeiten bestehen. Zum Beispiel könnten bei vier Prüfungen, bei denen jeweils 99% der Schrauben die Anforderungen erfüllen, im ungünstigsten Fall nur 96% der Schrauben alle notwendigen Sicherheitswerte erreichen. Um diesen Aspekt in der Simulation zu berücksichtigen, sollten die Ergebnisse der einzelnen Simulationen kombiniert und ausgewertet werden (Anhang A-7).

4.3 Weitere Berechnungen

Die in den vorherigen Kapiteln beschriebenen Schritte können auf beliebige Formeln angewendet werden. Für eine genaue Berechnung sollten alle streuenden Größen aufgelistet und quantifiziert werden. Es ist wichtig, dass keine Abhängigkeiten zwischen den Einflussgrößen bestehen, da diese die Ergebnisse verfälschen können. Sollten dennoch Abhängigkeiten vorhanden sein, kann die Berechnung der Standardabweichung über das Fehlerfortpflanzungsgesetz nicht durchgeführt werden. Bei der Programmierung der Monte-Carlo-Simulation hingegen können Fallunterscheidungen eingebaut werden, die diese Abhängigkeiten abbilden. Sofern Einflussgrößen in die Berechnung eingehen, die nicht normalverteilt sind, kann das Fehlerfortpflanzungsgesetz nicht angewendet werden. Eine Monte-Carlo-Simulation hingegen ist unabhängig von der Verteilungsform der Einflussgrößen und kann daher trotzdem durchgeführt werden.

Für die Aussagekraft der Ergebnisse ist es entscheidend, eine ausreichend große Anzahl an Simulationsergebnissen zu generieren. Wenn eine sehr geringe Ausfallwahrscheinlichkeit angestrebt wird, wie zum Beispiel bei der Six Sigma Methode, bei der nur zwei Ausfälle pro 1.000.000.000 Werte zulässig sind, sollte die Anzahl der generierten Werte entsprechend hoch sein. Bei einer Simulation mit 1.000.000.000 Werten und einer Ausfallwahrscheinlichkeit von 0,0000002%, was zwei Ausfällen pro Milliarde Werte entspricht, ergeben sich die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

Anzahl der Ausfälle	Wahrscheinlichkeit
0	13,53%
1	27,07%
2	27,07%
3	18,04%
4	9,02%
≥ 5	5,27%

Tabelle 7: Wahrscheinlichkeiten für unterschiedliche Anzahlen von Ausfällen bei einer Monte-Carlo-Simulation mit einer Ausfallwahrscheinlichkeit von zwei pro Milliarde (Six-Sigma-Methode)

Obwohl die Streuung bei einer Stichprobe von einer Milliarde Werten gering ist, kann das tatsächlich eingetretene Ergebnis unterschiedliche Schlussfolgerungen bei der Analyse zulassen. Daher sollte die Anzahl der simulierten Werte nicht pauschal festgelegt werden, sondern sich an den Anforderungen der jeweiligen Berechnung und geforderten Sicherheit der Ergebnisse orientieren.

Es ist möglich, dass bei einer geringeren Anzahl von Simulationen noch keine Ausfälle auftreten. In solchen Fällen kann man zwar annehmen, dass die Ausfallwahrscheinlichkeit unter einem bestimmten Wert liegt, jedoch ist es schwierig, eine präzise Aussage zu treffen, wenn keine Verteilung der Ergebnisse vorliegt. Für eine genaue Bestätigung, dass die Ausfallwahrscheinlichkeit tatsächlich unter einer definierten Grenze liegt, ist es wichtig, eine hinreichend große Anzahl an Simulationen durchzuführen, um eine aussagekräftige Verteilung der Ergebnisse zu erhalten. Andernfalls bleibt es schwierig, sicherzustellen, dass die tatsächliche Ausfallwahrscheinlichkeit nicht höher ist als die angestrebte Schranke, insbesondere wenn kein Ausfall beobachtet wurde.

4.4 Zusammenfassung der praktischen Anwendung

In diesem Kapitel wurden die Berechnung von Schraubenverbindungen und die Wahrscheinlichkeitsrechnung zusammengeführt. Anhand der Berechnung von Grenzwerten eines Produktes aus n Streuergößen wurde gezeigt, dass die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten dieser Grenzwerte mit zunehmender Anzahl an Faktoren sinkt. Der beschriebene Lösungsansatz durch die Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes und Monte-Carlo-Simulationen berücksichtigt, dass sich die Ergebnisse bei mehreren Streuergößen stärker konzentrieren. Diese Erkenntnisse sollen durch die Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes zur Festlegung neuer Grenzwerte genutzt werden.

Die Berechnung der Schraubenverbindung nach VDI 2230 ist umfangreich und aufgrund vieler verschiedener Größen und Formeln komplex. Die manuelle Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes ist zeitaufwendig und fehleranfällig, weshalb eine maschinelle Berechnung, beispielsweise mit MATLAB, empfohlen wird. Am Beispiel der Berechnung des Anziehdrehmoments wird das Vorgehen bei der Programmierung in MATLAB demonstriert, wobei sich diese Schritte auf beliebige Formeln anwenden lassen.

Für die Durchführung einer Monte-Carlo-Simulation wird beschrieben, wie Mittelwerte und Standardabweichungen der Größen festgelegt und in der Simulation verwendet werden. Eine ausreichend große Anzahl an Simulationsergebnissen ist wichtig, um eine realistische Verteilung und zuverlässige Aussagen zu erhalten.

5 Ergebnisse der stochastischen Herangehensweise

In diesem Kapitel werden die konkreten Ergebnisse der stochastischen Betrachtung der Berechnung von Schraubenverbindungen behandelt. Die Werkzeuge, um statistische und stochastische Methoden auf beliebige Rechnungen anzuwenden, wurden in den vorigen Kapiteln beschrieben. Da die gesamte Berechnung der Schraubenverbindungen eine Vielzahl von verschiedenen Rechenschritten beinhaltet, werden hier zwei für die Dimensionierung relevante Ergebnisse dargestellt.

5.1 Anpassung des derzeitigen Vorgehens

Die Motivation hinter der stochastischen Betrachtung liegt in einer effektiveren Auslegung von Schrauben. In diesem Kapitel wird das praktische Vorgehen zur Bestimmung eines gemittelten Gesamtreibwerts und die Berechnung der zulässigen Querkraft aus einem berechneten Anziehdrehmoment erläutert.

5.1.1 Gemittelter Gesamtreibwert

In der VDI 2230 wird in Rechenschritt R13 in der Gleichung für das Anziehdrehmoment mit zwei verschiedenen Reibwerten gerechnet: Der Reibwert der Kopfauflage der Schraube und der Reibwert der Gewindereibung zwischen Schraube und verschraubter Mutter. Auch hier werden jeweils die ungünstigsten Werte zur Bestimmung der Größe verwendet. In diesem Kapitel wird das Vorgehen zur Bestimmung eines gemittelten Gesamtreibwerts betrachtet, bei der eine Eingrenzung des Wertebereichs der Reibwerte unter Berücksichtigung der jeweiligen Einflüsse auf die Gesamtreibung vorgenommen wird. Dabei kommt der Berechnung der Standardabweichung des Mittelwerts eine wichtige Rolle zuteil. Die nachfolgende Abbildung 14 zeigt beispielhaft mit den Maßen einer M10-Sechskantschraube die Anteile des Anziehdrehmoments, die auf Kopf- und Gewindereibung und die Gewindesteigung zurückgehen.

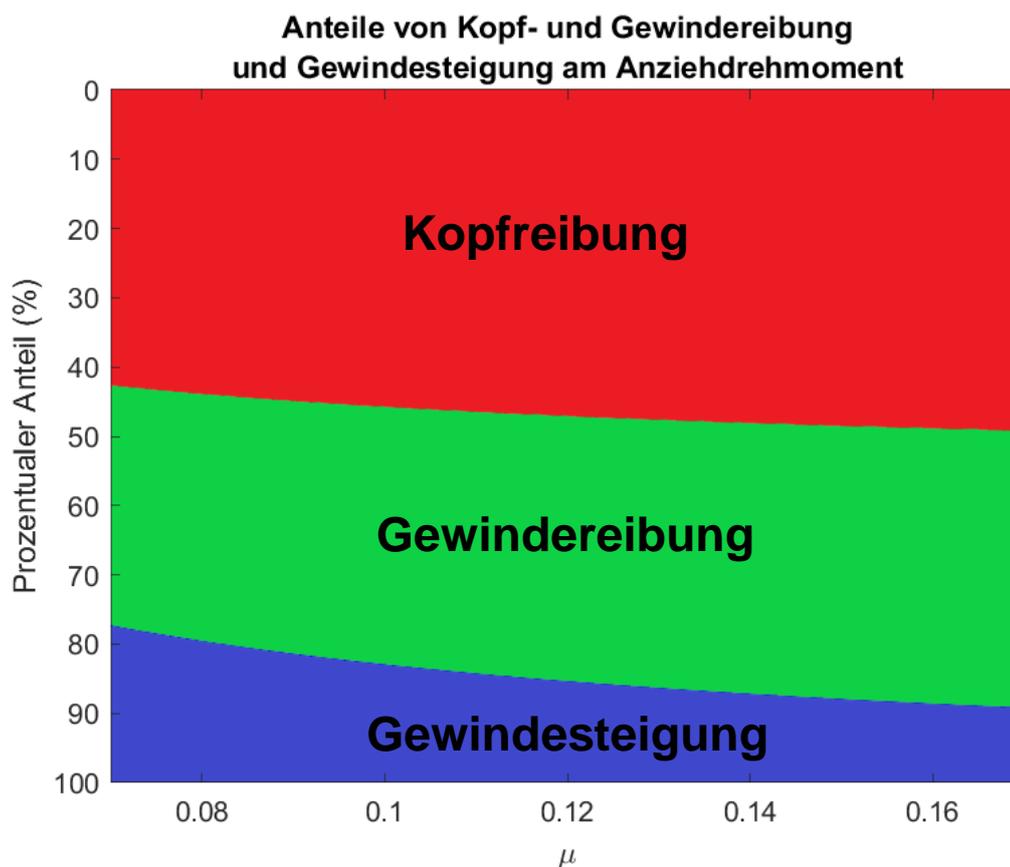


Abbildung 14: Anteile von Kopf- und Gewindereibung und Gewindesteigung am Anziehdrehmoment

In der Abbildung ist zu sehen, dass die Gewindesteigung einen geringen Anteil am Anziehdrehmoment bewirkt und gleichzeitig mit steigender Reibung weiter schrumpft. Ebenfalls ist wichtig, zu beachten, dass der Anteil der Kopfreibung größer ist als der Anteil der Gewindereibung. Das Verhältnis beider Größen zueinander ist unabhängig vom Reibwert, allerdings ändert sich dieses mit dem Nenndurchmesser der betrachteten Schraubenverbindung. Die nachfolgende Abbildung 15 zeigt den Anteil der Kopfreibung an der Gesamtreibung in Abhängigkeit vom Nenndurchmesser d einer Sechskantschraube. Eine vergleichbare Abbildung für die Zylinderschrauben befindet sich im Anhang D-1. Die zugrundeliegenden geometrischen Daten entstammen [7].

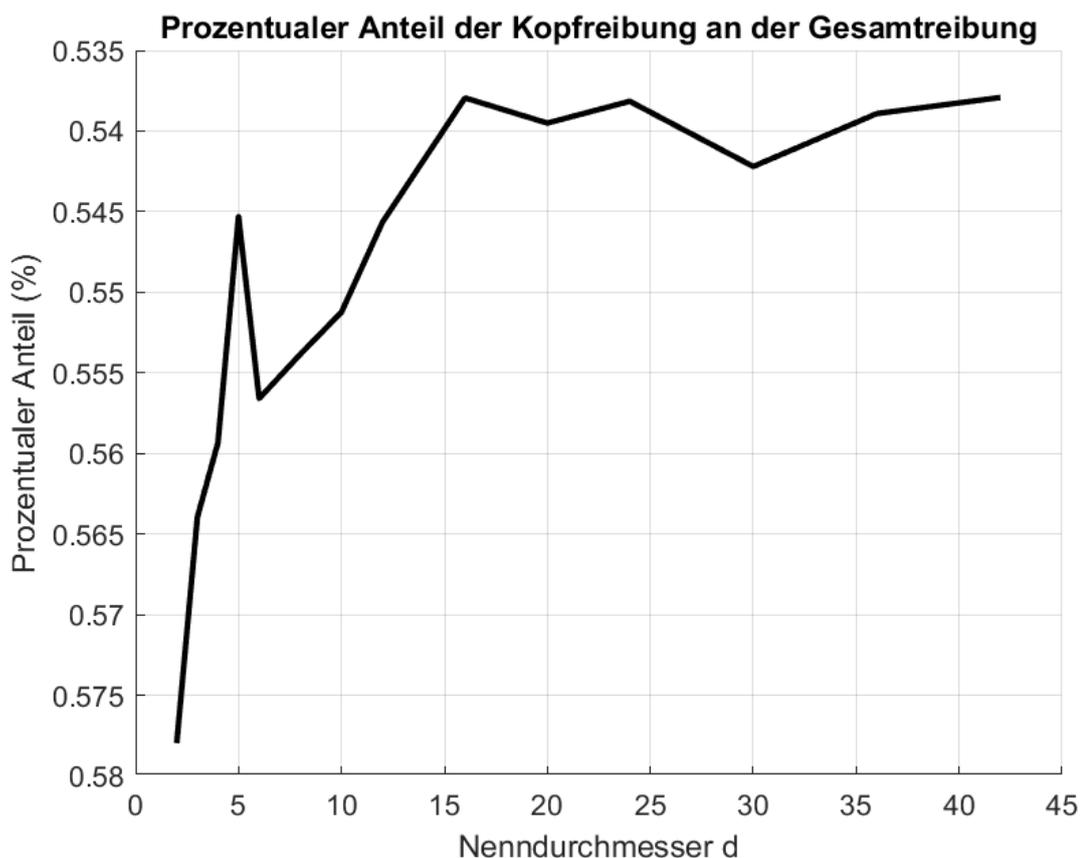


Abbildung 15: Anteil der Kopfreibung an der Gesamtreibung in Abhängigkeit vom Nenndurchmesser d

Der Anteil der Kopfreibung an der Gesamtreibung nähert sich mit größer werdendem Nenndurchmesser d einem Wert von 54% an und ist damit nur geringfügig größer als der Anteil der Gewindereibung. Für die Bestimmung des Gesamtreibwerts wird vereinfacht angenommen, dass beide Reibwerte gleichstark einfließen:

$$\mu_{Ges}(\mu_K, \mu_G) = \frac{\mu_K + \mu_G}{2} \quad (53)$$

Die Idee bei der Bestimmung eines gemittelten Gesamtreibwerts liegt darin, durch die kombinierte Betrachtung der Reibwerte, den Wertebereich des Gesamtreibwerts zu verkleinern. Die Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes ist aufgrund der einfachen Gleichung unkompliziert:

$$\sigma_0(\mu_{Ges}(\mu_K, \mu_G)) = \sqrt{\frac{\partial f^2}{\partial \mu_K} \cdot \sigma_{\mu_K}^2 + \frac{\partial f^2}{\partial \mu_G} \cdot \sigma_{\mu_G}^2}$$

Mit

$$\frac{\partial f}{\partial \mu_K} = \frac{\partial f}{\partial \mu_G} = \frac{1}{2} ; \quad \sigma = \sigma_{\mu_K} = \sigma_{\mu_G}$$

ergibt sich:

$$\sigma_0(\mu_{Ges}(\mu_K, \mu_G)) = \sqrt{\frac{1^2}{2} \cdot \sigma_{\mu_K}^2 + \frac{1^2}{2} \cdot \sigma_{\mu_G}^2} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \sigma^2 + \frac{1}{4} \cdot \sigma^2}$$

$$\sigma_0(\mu_{Ges}(\mu_K, \mu_G)) = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \sigma^2} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \approx 0,707 \cdot \sigma$$

Die Standardabweichung des gemittelten Gesamtreibwerts ist also um fast 30% kleiner als die Streuung der einzelnen Reibwerte. Dies bedeutet, dass der Wertebereich der Reibwerte von [0,08 0,16] ebenfalls um den Faktor $\sqrt{2}$ auf etwa [0,092 0,148] verkleinert werden kann. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein einzelner Reibwert innerhalb des Wertebereichs [0,08 0,16] liegt, ist genauso groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass der gemittelte Gesamtreibwert innerhalb des neuen Wertebereichs [0,092 0,148] liegt. Um für kleine Schrauben oder Zylinderschrauben den Wertebereich zu ermitteln, werden anstelle eines gleich starken Einflusses der Reibwerte gemäß Abbildung 15 oder Anhang D-1 etwa 60% Einfluss von Kopfreibung und 40% Einfluss von Gewindereibung angenommen. Dadurch ergibt sich ein Wertebereich von [0,091 0,149].

In Abbildung 16 sind die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der einzelnen sowie des gemittelten Gesamtreibwerts dargestellt, wenn angenommen wird, dass die Grenzwerte des Wertebereichs jeweils dem Mittelwert plus minus drei Standardabweichungen entsprechen.

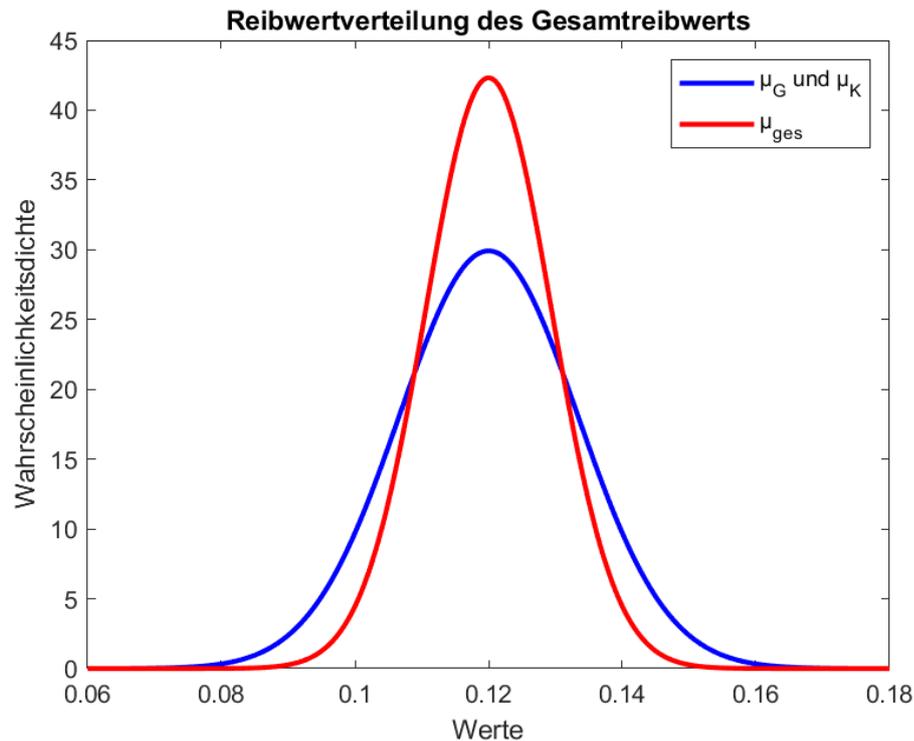


Abbildung 16: Reibwertverteilung der einzelnen Reibwerte und des Gesamtreibwerts

Die kombinierte Betrachtung der Reibwerte für Kopf- und Gewindereibung hat eine Reduzierung der Standardabweichung des Gesamtreibwerts gegenüber den einzelnen Reibwerten ergeben und somit eine Verkleinerung des Wertebereichs bewirkt. Dieser neue Wertebereich enthält die gleiche summierte Wahrscheinlichkeit wie bei den einzelnen Größen im größeren Wertebereich.

Hier ein praktisches Beispiel für diese neuen Grenzwerte: Es soll eine Montagevorspannkraft aus einem Anziehdrehmoment berechnet werden. Die Streuung bedingt durch das Anziehverfahren wird hierbei nicht berücksichtigt. Gefordert wird eine maximale Ausfallwahrscheinlichkeit von 1% bei einer Schraubenverbindung. Durch Messungen ist bekannt, dass jeweils 99% der Werte der Kopf- und Gewindereibung zwischen 0,08 und 0,16 liegen. In der Berechnung des Anziehdrehmoments muss jetzt nicht mit 0,08 und 0,16 gerechnet werden, sondern mit 0,092 und 0,148, um die Grenzwerte des Intervalls mit 99% der Werte zu berechnen.

Bei der Anwendung der neuen Grenzwerte des Gesamtreibwerts muss jedoch stets die Ausfallwahrscheinlichkeit berücksichtigt werden, um sicherzustellen, dass die Sicherheitsanforderungen an die Schraubenverbindung nicht unzulässig unterschritten werden.

5.1.2 Berechnung der zulässigen Querkraft

In diesem Kapitel wird das Anwendungsbeispiel aus Kapitel 2.2.2 erneut aufgegriffen. Dabei ging es um die Bestimmung der zulässigen Querkraft aus einem Anziehdrehmoment und es wurde aufgezeigt, dass nur der ungünstigste Fall berücksichtigt wird, die Verteilung der Werte jedoch nicht. Die Berechnung der zulässigen Querkraft zeigte allerdings ein großes Potenzial für eine effektivere Auslegung. Die nachfolgende Gleichung (54) zeigt, dass viele Einflussgrößen in die Berechnung einfließen, die jeweils große Streuungen aufweisen:

$$F_{Qzul} = \frac{\mu_T}{\alpha_A \cdot \left(0,159 \cdot P + \left(0,577 \cdot d_2 + \frac{1}{2} \cdot D_{Km} \right) \cdot \mu_{ges} \right)} \cdot M_A \quad (54)$$

Die Gleichung wurde in Kapitel 2.2.2 bereits zur Berechnung der Streubreite der Ergebnisse also der Berechnung des Minimal- und Maximalwerts verwendet, jedoch wurden die einzelnen Reibwerte nach der Bestimmung eines Gesamtreibwerts hier durch diesen ersetzt.

Da die Streuung durch Reibung bereits separat betrachtet wird, wird der angepasste Anziehungsfaktor α_A' für die Berechnung eingeführt. Dieser Faktor gilt für das drehmomentgesteuerte Anziehen nach VDI 2230 (Verfahren Nr. 10) und stellt sicher, dass bei gleichem Anziehdrehmoment immer die gleiche Vorspannkraft erreicht wird. α_A' berücksichtigt praktische Einflüsse wie unkalibrierte Werkzeuge und unterschiedliche Monteure, jedoch keine Reibwerteinflüsse. Für diesen Wert gelten jedoch die gleichen Wertebereiche:

$$\alpha_A' = \alpha_A$$

Für die nachfolgenden Berechnungen wird der Mittelwert einer Größe nicht mehr durch das Symbol μ , sondern durch einen Querstrich über der jeweiligen Größe dargestellt. Diese Änderung wird vorgenommen, um Verwechslungen zu vermeiden, da das Symbol μ zuvor sowohl für den Mittelwert als auch den Reibwert verwendet wurde. Für die Berechnung werden die folgenden Werte der Einflussgrößen verwendet:

$$\overline{\mu_T} = 0,12 \quad ; \quad \sigma_{\mu_T} = \frac{0,04}{3}$$

$$\overline{\alpha_A'} = 1,2 \quad ; \quad \sigma_{\alpha_A'} = \frac{0,2}{3}$$

$$\overline{\mu_{ges}} = 0,12 \quad ; \quad \sigma_{\mu_{ges}} = \frac{0,04}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Dabei wurden die Standardabweichungen der Einflussgrößen so angepasst, dass zwischen den Grenzwerten der Wertebereiche, also [0,08 0,16] für Reibwerte und [1,0

1,4] für den Anziehungsfaktor, jeweils drei Standardabweichungen zum Mittelwert liegen. Das entspricht 99,73% der Werte innerhalb des Wertebereichs. Bei der Standardabweichung des Gesamtreibwertes wurde der Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ hinzugefügt um den die Standardabweichung des Gesamtreibwertes geringer ist als die Standardabweichung der Reibwerte von Kopf und Gewinde.

Für die geometrisch notwendigen Werte wurde eine M10-Zylinderschraube mit Regelgewinde betrachtet, die folgende Werte aufweist:

$$P = 1,5\text{mm} \cong 0,0015\text{m}; \quad d_2 = 9,03\text{mm} \cong 0,00903\text{m}; \quad D_{Km} = 13,5\text{mm} \cong 0,0135\text{m}$$

Zur Vereinfachung der nachfolgenden Schritte wird das Anziehdrehmoment auf die linke Seite der Gleichung (54) gebracht, sodass schließlich der Quotient aus zulässiger Querkraft und Anziehdrehmoment y berechnet wird. Der Mittelwert dieser Größe wird durch Einsetzen der Mittelwerte der Einflussgrößen berechnet:

$$y = \frac{F_{Qzul}}{M_A} = \frac{0,12}{1,2 \cdot \left(0,159 \cdot 0,0015\text{m} + \left(0,577 \cdot 0,00903\text{m} + \frac{1}{2} \cdot 0,0135\text{m} \right) \cdot 0,12 \right)} \quad (55)$$

$$y = 59,747\text{m}^{-1}$$

Um die Rechnung überschaubar zu halten, werden folgende Terme substituiert:

$$0,159 \cdot P = a;$$

$$\left(0,577 \cdot d_2 + \frac{1}{2} \cdot D_{Km} \right) = b$$

Daraus ergibt sich:

$$y = \frac{F_{Qzul}}{M_A} = \frac{\mu_T}{\alpha_A' \cdot (a + b \cdot \mu_{ges})}$$

Die Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes (56):

$$\sigma_0 \left(y(\mu_T, \alpha_A', \mu_{ges}) \right) = \sqrt{\frac{\partial f^2}{\partial \mu_T} \cdot \sigma_{\mu_T}^2 + \frac{\partial f^2}{\partial \alpha_A'} \cdot \sigma_{\alpha_A'}^2 + \frac{\partial f^2}{\partial \mu_{ges}} \cdot \sigma_{\mu_{ges}}^2} \quad (56)$$

Mit:

$$\frac{\partial y}{\partial \mu_T} = \frac{1}{\alpha_A' \cdot (a + b \cdot \mu_{ges})}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha_A'} = -\frac{\mu_T}{\alpha_A'^2 \cdot (a + b \cdot \mu_{ges})}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \mu_{ges}} = -\frac{b \cdot \mu_T}{\alpha_A' \cdot (a + b \cdot \mu_{ges})^2}$$

Daraus ergibt sich die Gleichung für die Standardabweichung von y , dem Quotienten aus Querkraft und Anziehdrehmoment. Aufgrund ihrer Länge befindet sich die vollständige Gleichung im Anhang C-2. Ein Einsetzen der Werte führt zu der Standardabweichung:

$$\sigma_0 \left(y(\mu_T, \alpha_A', \mu_{ges}) \right) = 8,44$$

Dieser wird zusammen mit dem zuvor berechneten Mittelwert genutzt, um die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer Normalverteilung zu erstellen. In der Abbildung 17 ist diese in Rot dargestellt. Zusätzlich wird in Blau die Kurve der Kerndichteschätzung aus den Ergebnissen der Monte-Carlo-Simulation dargestellt. Die Monte-Carlo-Simulation wurde für die Gleichung (55) durchgeführt. Die Angaben der Standardabweichungen waren die gleichen wie zur analytischen Bestimmung der resultierenden Standardabweichung.

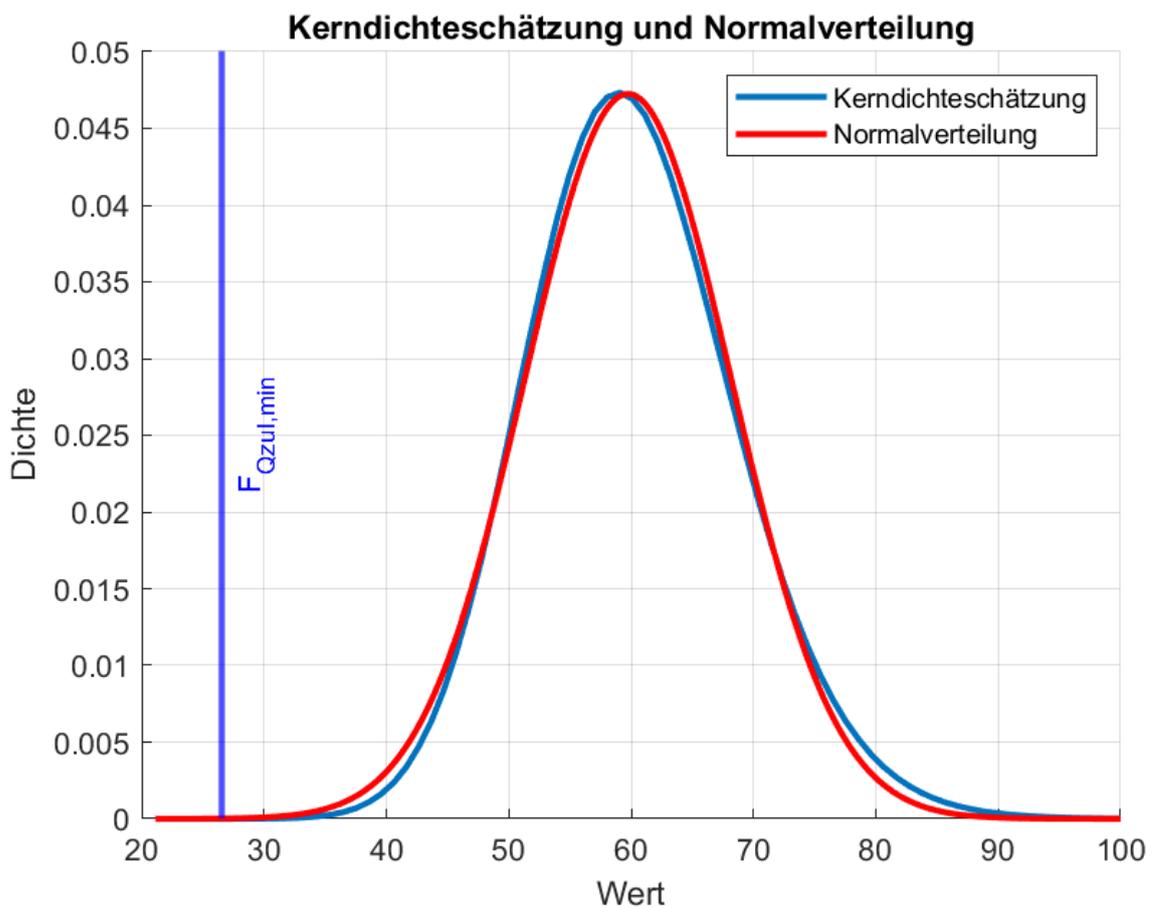


Abbildung 17: Kerndichteschätzung (Monte-Carlo-Simulation) und analytisch bestimmte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von y im Vergleich zum Minimalwert

Eine vertikale blaue Linie markiert die in (24) berechnete untere Grenze der zulässigen Querkraft, also den Fall, dass die ungünstigsten Werte der Einflussgrößen gleichzeitig

eintreten. Es ist zu erkennen, dass beide Kurven eine deutliche Überschneidung aufweisen und sich im Verlauf stark ähneln. Außerdem liegt nur ein sehr geringer Anteil der Werte in der Nähe oder unterhalb der minimalen zulässigen Querkraft. Je nach zulässiger Ausfallwahrscheinlichkeit ließe sich dieser Wert der zulässigen Querkraft stark erhöhen. Auf diesen Aspekt wird nachfolgend und im Kapitel 5.1.4 weiter eingegangen.

Im direkten Vergleich der beiden Kurven fällt auf, dass die Kurve der Kerndichteschätzung rechtsschief, also asymmetrisch ist. Diese Asymmetrie wird hinsichtlich ihrer Folgen auf das Berechnen der summierten Wahrscheinlichkeit mit dem analytisch bestimmten Mittelwert und der Standardabweichung überprüft, da nicht immer eine Monte-Carlo-Simulation durchgeführt wird, um die tatsächliche Verteilung darzustellen.

In Abbildung 18 wird in Blau die Verteilungsfunktion der Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulation dargestellt. In Rot ist zum Vergleich die Verteilungsfunktion einer idealen Normalverteilung dargestellt. Für den Mittelwert und die Standardabweichung gelten dabei jeweils die analytisch bestimmten Werte. Auf der x -Achse wird der Faktor der Standardabweichung angezeigt, um den der Wert vom Mittelwert entfernt ist. Der prozentuale Anteil der Werte, der unterhalb dieses Grenzwerts liegt, kann an der y -Achse abgelesen werden.

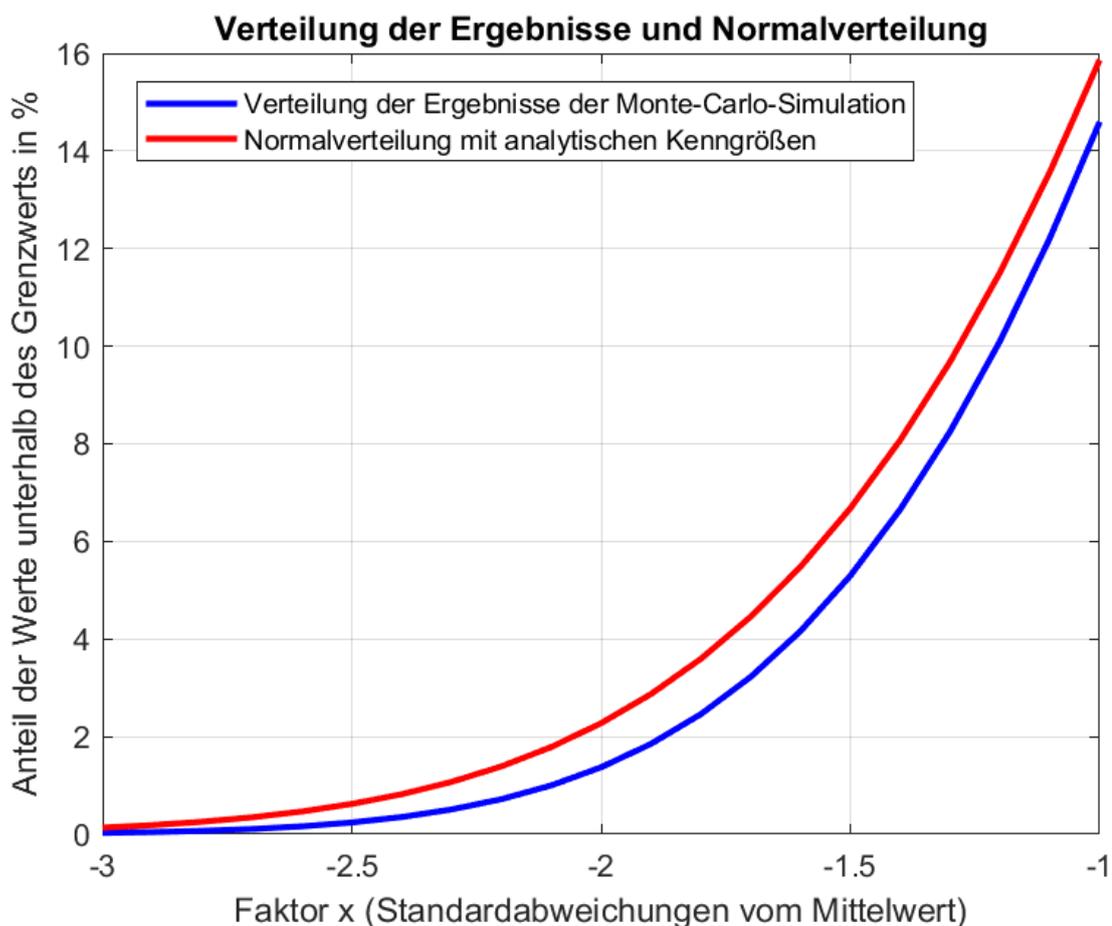


Abbildung 18: Untere Grenzwerte der Verteilungsfunktion durch Monte-Carlo-Simulation und Normalverteilung

Der blaue Graph verläuft unterhalb des roten Graphs, was bedeutet, dass weniger Werte der Monte-Carlo-Simulation im kritischen unteren Bereich liegen als durch die Normalverteilung angenommen. Das ist für die analytische Berechnung vorteilhaft, da bei der Berechnung ohne Monte-Carlo-Simulation die Normalverteilung, die aus den analytisch bestimmten Werten des Mittelwerts und der Standardabweichung gebildet wird, gegenüber der Verteilung der simulierten Ergebnisse eine zusätzliche unbekannte Sicherheit aufweist. Konkret bedeutet dies, dass weniger als 1% der Werte unter dem 1%-Quantil der Normalverteilung liegen. Im Kontext der Ausfallwahrscheinlichkeiten würden somit weniger Ausfälle eintreten als bei der Auslegung ursprünglich angenommen wurde.

Bei dieser Berechnung der zulässigen Querkraft reicht die Betrachtung der unteren Grenze aus, da nur ein Unterschreiten des Grenzwerts für die Funktionserfüllung der Schraubenverbindung kritisch ist. Sollte die obere Grenze entscheidend sein, beispielsweise bei einem gewünschten Abscheren der Schraube bei Überlast, dann würde die obere Grenze berücksichtigt werden. Um in diesem Fall die analytischen Ergebnisse anwendbar zu machen, wäre zunächst eine logarithmische Transformation der Funktion erforderlich, wie in Kapitel 3.3.3 beschrieben.

5.1.3 Bestimmung der zulässigen Querkraft einer einfachen Schraubenverbindung

Die Verteilung der Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulation kann zur Auslegung von Schraubenverbindungen genutzt werden. Dieses Kapitel beschreibt detailliert, wie dies am Beispiel der Bestimmung der zulässigen Querkraft einer einfachen Schraubenverbindung, also einer Schraubenverbindung mit einer Schraube, unter Berücksichtigung der Ausfallwahrscheinlichkeit erfolgen kann. Hierfür wird eine zulässige Ausfallwahrscheinlichkeit und die Standardabweichungen der Einflussgrößen benötigt.

Zur Vereinfachung wird angenommen, dass sich die Standardabweichungen der Einflussgrößen gleich verändern. Nachfolgend sind die Angaben der Standardabweichungen in Abhängigkeit von x dargestellt:

$$\overline{\mu_T} = 0,12 \quad ; \quad \sigma_{\mu_T} = \frac{0,04}{x}$$

$$\overline{\alpha_{A'}} = 1,2 \quad ; \quad \sigma_{\alpha_{A'}} = \frac{0,2}{x}$$

$$\overline{\mu_{ges}} = 0,12 \quad ; \quad \sigma_{\mu_T} = \frac{0,04}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Im vorigen Kapitel wurde $x = 3$ angenommen. Je größer der Faktor x wird, desto weniger streuen die Werte der Einflussgrößen. Durch den Faktor x kann die individuelle Prozessgenauigkeit berücksichtigt werden. Im Anwendungsfall sollten jedoch die Werte für x für jede Einflussgröße separat ermittelt werden.

Mithilfe der Ergebnisse zahlreicher Monte-Carlo-Simulationen, die variierende zulässige Ausfallwahrscheinlichkeiten und Werte für x berücksichtigen, kann ein Diagramm zur Ermittlung einer an die Umstände angepassten zulässigen Querkraft erstellt werden. Für das Beispiel einer M10-Schraube sind in Abbildung 19 Ausfallwahrscheinlichkeiten von 0,1% bis 5% und für x –Werte zwischen zwei und drei dargestellt.

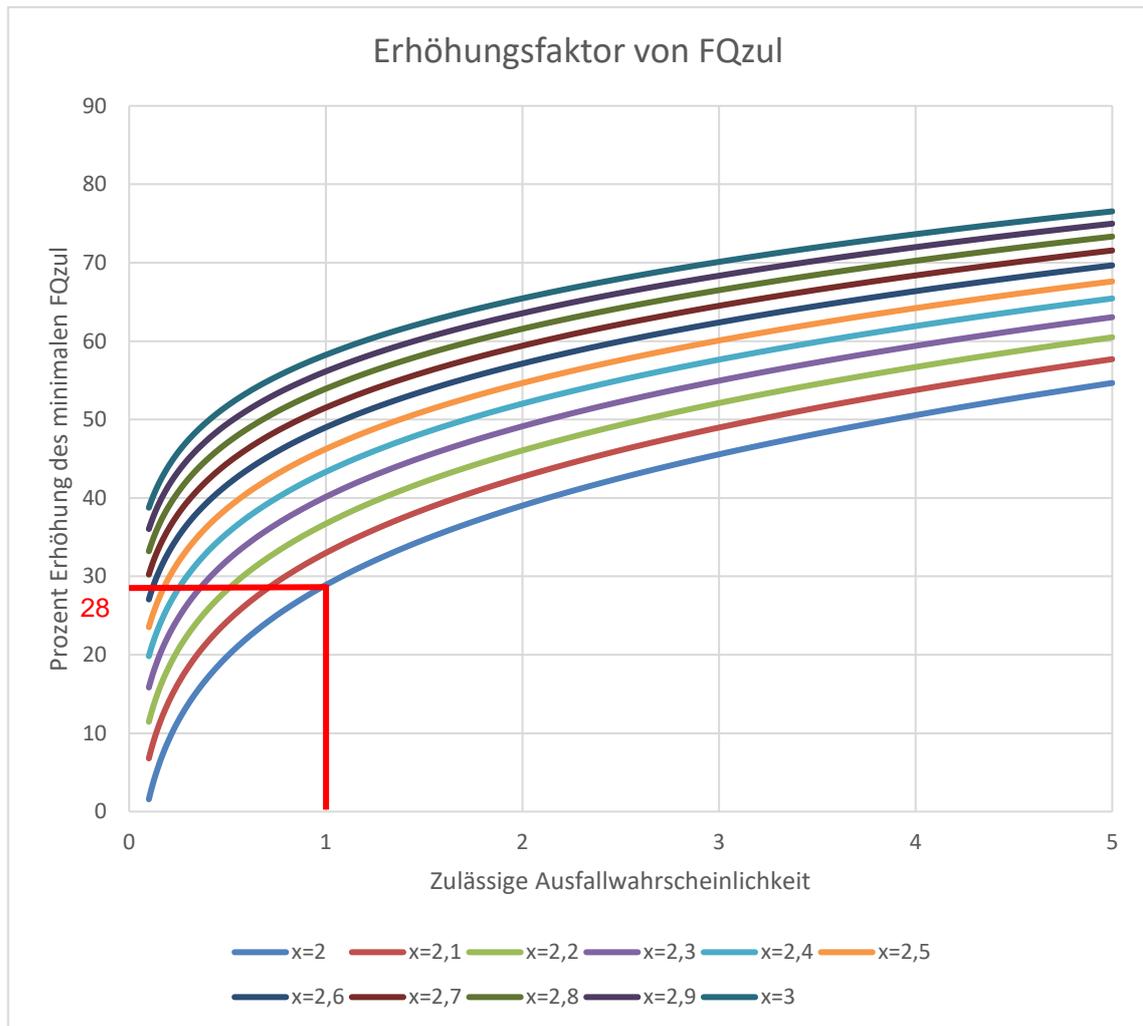


Abbildung 19: Bestimmung des Erhöhungsfaktors zur Anpassung der zulässigen Querkraft

Anhand dieses Diagramms kann die zulässige Querkraft neu bestimmt werden. Für den Fall einer Ausfallwahrscheinlichkeit von einem Prozent und $x = 2$ ist durch rote Striche das Vorgehen zum Ablesen des gesuchten Werts dargestellt. Der dort abgelesene Wert stellt die prozentuale Erhöhung des berechneten minimalen Werts dar, der sich ergibt, wenn jeweils die ungünstigsten Werte aufeinandertreffen. Für das Beispiel einer M10-Schraube wurde bereits in Kapitel 2.2.2 in (24) ein Wert von $F_{Q\text{ zul},min} = 26,55\text{ m}^{-1} \cdot M_A$ berechnet. Der abgelesene Wert liegt bei etwa 28% und führt somit zu einer angepassten zulässigen Querkraft von:

$$F_{Q\text{ zul},min} = 1,28 \cdot 26,55\text{ m}^{-1} \cdot M_A = 33,98\text{ m}^{-1} \cdot M_A \quad (57)$$

Eine zulässige Ausfallwahrscheinlichkeit von einem Prozent bewirkt eine Erhöhung der zulässigen Querkraft um fast 30%. Da das Auftreten der Ergebnisse an den Rändern sehr selten vorkommt, können bereits sehr kleine zulässige Ausfallwahrscheinlichkeiten

zu großen Anpassungen der zulässigen Querkraft führen. Da die Konzentration der Werte vom Rand zum Mittelwert zunimmt, verlangsamt sich dieser Trend, was sich in einer abnehmenden Steigung der Kurve zeigt. Gleichzeitig steigt der Erhöhungsfaktor der zulässigen Querkraft bei zunehmendem x . Der vertikale Abstand zwischen den Kurven wird kleiner, da die Stauchung der Verteilung geringer wird.

Mithilfe solcher Diagramme können die Ergebnisse einen direkten und praktisch umsetzbaren Einfluss auf die Auslegung von Schraubenverbindungen haben.

5.1.4 Bestimmung der zulässigen Querkraft bei Mehrschraubenverbindungen

Bei vielen Anwendungen werden mehrere Schrauben für die gleiche Aufgabe oder Funktion eingesetzt. Ein Beispiel für solche Mehrschraubenverbindungen sind Flansche. Abbildung 20 zeigt einen typischen Flansch, der durch mehrere Schrauben verbunden wird.



Abbildung 20: Flanschverbindung mit Mehrschraubenverbindung,
(Quelle: [8])

Wenn dort eine Querkraft auftritt, die gleichmäßig auf alle eingesetzten Schrauben wirkt, hat dies bei der Auslegung mit stochastischem Ansatz Auswirkungen auf die zulässige Querkraft.

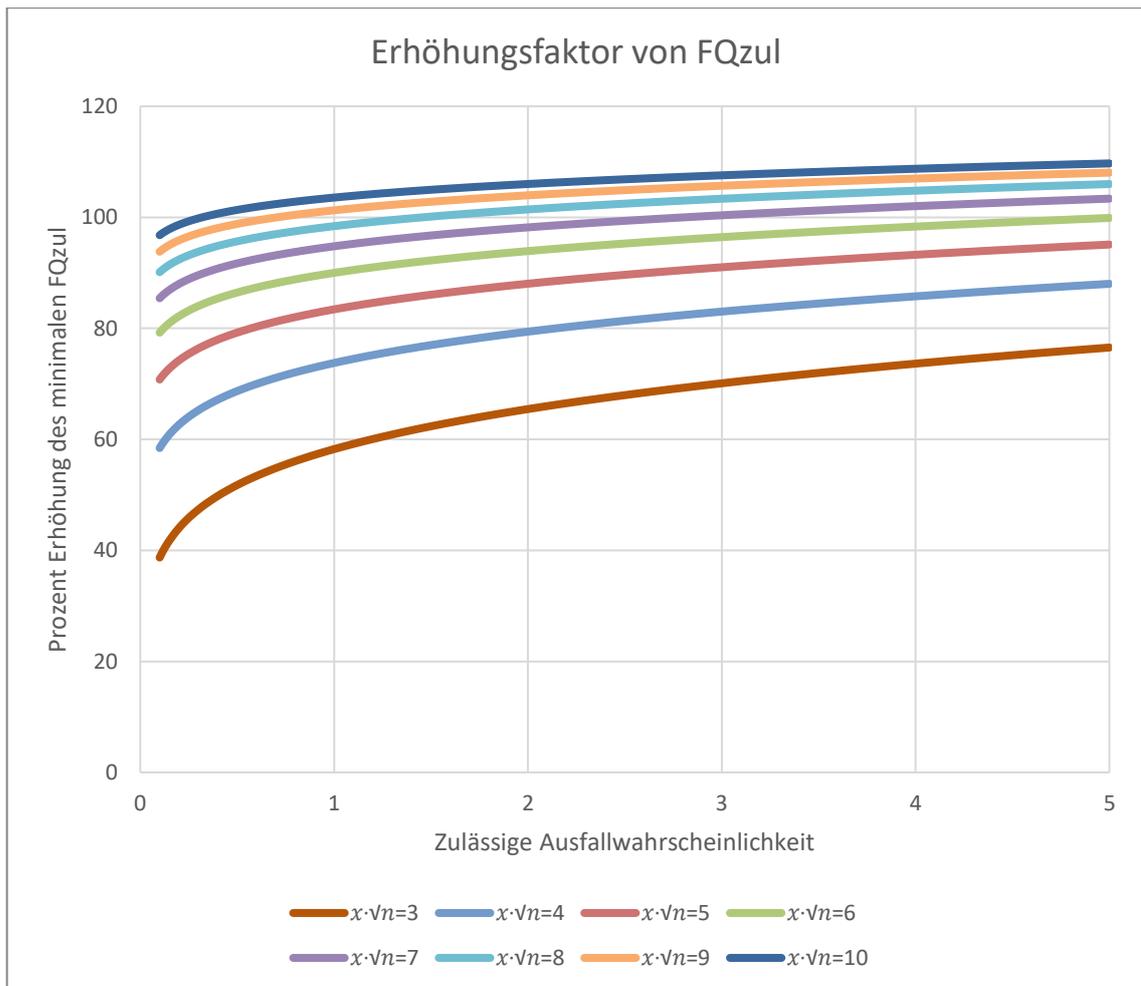


Abbildung 21: Bestimmung des Erhöhungsfaktors bei Mehrschraubenverbindungen

Das Diagramm in Abbildung 21 unterscheidet sich in einem wesentlichen Punkt von dem in Abbildung 19. Hier ist nicht nur der Faktor x , die Anzahl der Standardabweichungen innerhalb der Grenzwerte entscheidend, sondern das Produkt aus dem Faktor x und der Wurzel der Anzahl der Schrauben. Bei Mehrschraubenverbindungen ist es wichtig, dass die Summe der einzelnen zulässigen Querkräfte der Schrauben größer ist als die gesamte Querkraftbelastung auf die Schrauben. Im Durchschnitt muss der Wert der zulässigen Querkraft $F_{Q\ zul}$ über der an einer Schraube angreifenden Querkraft F_Q liegen. Die Summe aller einzelnen zulässigen Querkräfte, geteilt durch die Anzahl der Schrauben, ergibt den Mittelwert der zulässigen Querkraft der Schrauben $\overline{F_{Q\ zul}}$. Dieser Zusammenhang ist in der folgenden Ungleichung (58) dargestellt.

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n F_{Q\ zul,i} = \overline{F_{Q\ zul}} \geq F_Q \quad (58)$$

Die Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes (59) ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned}\sigma_{F_{Q\text{ zul}}}\left((F_{Q\text{ zul},1}, \dots, F_{Q\text{ zul},n})\right) &= \sqrt{\frac{\partial f}{\partial F_{Q\text{ zul},1}}^2 \cdot \sigma_{F_{Q\text{ zul},1}}^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial F_{Q\text{ zul},n}}^2 \cdot \sigma_{F_{Q\text{ zul},n}}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \sigma_{F_{Q\text{ zul},1}}^2 + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \sigma_{F_{Q\text{ zul},n}}^2}\end{aligned}\quad (59)$$

Da in dem betrachteten Beispiel die Standardabweichung für alle Schrauben gleich ist, vereinfacht sich der Ausdruck zu (60):

$$\begin{aligned}\sigma_{F_{Q\text{ zul}}}\left((F_{Q\text{ zul},1}, \dots, F_{Q\text{ zul},n})\right) &= \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \sigma_1^2 + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \sigma_n^2} = \sqrt{n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \sigma^2} \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\end{aligned}\quad (60)$$

Durch die größere Anzahl an Werten haben Ausreißer eine geringere Wirkung und die Streuung des Mittelwerts der zulässigen Querkraft verringert sich zum Mittelwert hin. Diese verringerte Streuung ermöglicht es, den Wert für die zulässige Querkraftbeanspruchung bei mehreren Schrauben im Vergleich zu einer einzelnen Schraube anzuheben, während sich die Annahme der Ausfallwahrscheinlichkeit durch die verringerte Streuung nicht ändert.

Im Diagramm ist auch zu erkennen, dass sich die verschiedenen Graphen asymptotisch einem Grenzwert nähern. Dieser liegt etwa bei:

$$\frac{\overline{F_{Q\text{ zul}}} - F_{Q\text{ zul},\min}}{F_{Q\text{ zul},\min}} = \frac{59,75 - 26,55}{26,55} = 1,25 \cong 125\%$$

Der Wert bedeutet, dass der minimale Wert der zulässigen Querkraft maximal auf den Mittelwert der zulässigen Querkraft erhöht werden kann. Wenn die Streuung der Werte der zulässigen Querkraft gering ist, sind die Werte stark um den Mittelwert konzentriert. Ein Überschreiten dieses Wertes wäre unabhängig von der Streuung der Werte mit einer hohen Ausfallwahrscheinlichkeit verbunden, da etwa 50% der Werte links vom Mittelwert und somit unterhalb der Grenze liegen würden.

5.1.5 Verbesserungspotenzial der Berechnungsschritte R0-R13

Im Rahmen dieser Masterarbeit wurden einige Beispiele der Schraubenverbindungsrechnung nach VDI 2230 durchgeführt. In diesem Kapitel soll eine Einschätzung der restlichen Berechnungsschritte hinsichtlich der Eignung der Anwendung der stochastischen Herangehensweise vorgenommen werden.

In der nachfolgenden Tabelle werden die relevanten Größen der Rechenschritte R0 bis R13 aufgeführt und jeweils die Abhängigkeit zu den stark streuenden Einflussgrößen, also den Reibwerten und dem Anziehungsfaktor, kenntlich gemacht. In der Tabelle 8 sind links verschiedene Größen der VDI 2230 und oben die streuenden Einflussgrößen aufgeführt. Orange markierte Zellen zeigen eine Abhängigkeit zwischen den Größen, während graue Zellen keine Abhängigkeit anzeigen.

	μ_T	μ_G	μ_K	α_A
$F_{K\text{erf}}$				
Φ_n				
F_Z				
$F_{M\text{ min}}$				
$F_{M\text{ max}}$				
$F_{M\text{ zul}}$				
S_F				
S_D				
S_P				
m_{eff}				
S_A				
M_A				
Weitere Größen bei berechnetem Anziehdrehmoment der Schraube M_A				
$F_{M,\text{ist}}$				
$F_{Q\text{ zul}}$				
$S_{F,\text{ist}}$				
$S_{D,\text{ist}}$				
$S_{P,\text{ist}}$				
$S_{A,\text{ist}}$				

Tabelle 8: Abhängigkeit verschiedener Rechengrößen von Reibwerten und Anziehungsfaktor

Die Tabelle enthält zwei verschiedene Abschnitte. Im oberen Teil befinden sich die relevanten Größen der VDI 2230, während im unteren Teil die für die stochastische Betrachtung relevanten Größen aufgeführt sind. Diese unteren Größen sind die Ergebnisse, die eintreffen, wenn ein zuvor berechnetes Anziehdrehmoment beim Anziehen einer Schraube angewendet wurde.

Die Abhängigkeit zeigt an, welche streuungsbehafteten Einflussgrößen Einfluss auf die jeweilige Ist-Größe haben. Viele Größen sind abhängig von den Gewinde- und Kopfreibwerten sowie dem Anziehungsfaktor, da diese einen unmittelbaren Einfluss auf die sich einstellende Vorspannkraft der angezogenen Schraube haben. Die Berechnung der zulässigen Querkraft vereint durch die Trennfugenreibung alle möglichen Abhängigkeiten in einer Größe. Deshalb macht sich dort die Effektivität der stochastischen Herangehensweise gegenüber der Berechnung der minimalen und maximalen Werte besonders bemerkbar.

Neben dieser Größe weisen aber noch weitere Größen Potential durch ein stochastisches Betrachten auf. Dazu gehören die sich einstellende Montagevorspannkraft $F_{M,ist}$, die tatsächliche Sicherheit gegen Fließen $S_{F,ist}$ und die tatsächliche Sicherheit gegen Flächenpressung $S_{P,ist}$. Konkret könnten auch hier, wie in den Kapiteln 5.1.3 und 5.1.4, Simulationsreihen in Form von Monte-Carlo-Simulationen durchgeführt und Anpassungen mit Ausfallwahrscheinlichkeiten vorgenommen werden.

5.2 Kritik und Ausblick zur stochastischen Methode

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der Masterarbeit kritisch bewertet und Verbesserungspotenzial aufgezeigt. Diese Arbeit stellt einen ersten Versuch dar, stochastische Ansätze bei der Berechnung von Schraubenverbindungen anzuwenden. Dabei wurden einige Vereinfachungen getroffen, die in zukünftigen Studien berücksichtigt werden sollten. Im Folgenden werden diese Aspekte separat betrachtet und diskutiert.

5.2.1 Verteilung der Einflussgrößen

In der vorliegenden Masterarbeit wurde davon ausgegangen, dass die relevanten streuenden Einflussgrößen einer exakten Normalverteilung folgen. In der Realität kann diese Annahme jedoch von der tatsächlichen Verteilung abweichen. Ein Beispiel ist die Betrachtung der Reibwerte in einer Schraubenverbindung, bei denen verschiedene Faktoren einen Einfluss auf die Kopf- und Gewindereibung haben. Die Oberflächenrauigkeit, die Beschichtung und die Schmierung sind einige der Größen, die unter konstanten Produktionsbedingungen möglicherweise normalverteilt sind. Veränderungen wie der

Wechsel von Fertigungswerkzeugen oder Herstellern können jedoch die Verteilungskurve dieser Größen beeinflussen. Diese Abweichungen können durch Stichprobenmessungen geschätzt werden.

Es ist jedoch nicht zwingend erforderlich, dass die Verteilung exakt normalverteilt sind. Monte-Carlo-Simulationen sind flexibel genug, um mit jeder Wahrscheinlichkeitsverteilung zu arbeiten und können so verschiedene Verteilungskurven angemessen berücksichtigen. Dies ermöglicht eine genauere Modellierung und Analyse, auch wenn die zugrunde liegenden Daten keine perfekte Normalverteilung aufweisen.

Obwohl das Fehlerfortpflanzungsgesetz ausschließlich für normalverteilte Größen gilt, sind die analytischen Lösungen hilfreich, um Größen zu identifizieren, die für eine stochastische Betrachtung geeignet sind. Obwohl diese Lösungen auf der Annahme von Normalverteilungen basieren, bieten sie wertvolle Einblicke in die Struktur und das Verhalten der betrachteten Größen. Zusätzlich können dadurch Einschätzungen getroffen werden, welche Größen Haupt- und Nebeneinflüsse sind. Durch die Kombination analytischer Methoden mit stochastischen Simulationen kann ein umfassendes Verständnis der relevanten Einflussgrößen und ihrer Streuung erreicht werden.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Kritik an der Annahme exakter Normalverteilungen zwar berechtigt ist, aber durch pragmatische Ansätze gemildert werden kann. Auf diese Weise wird eine angemessene Analyse und Interpretation der stochastischen Ergebnisse ermöglicht.

5.2.2 Fehlerfortpflanzungsgesetz und große Fehler

Wie in Kapitel 3.2.1 erläutert, basiert das Fehlerfortpflanzungsgesetz auf der Annahme, dass die Fehler gering sind. Bei den Einflussgrößen der Schraubenverbindungen können jedoch große Streuungen auftreten. Das Fehlerfortpflanzungsgesetz berücksichtigt nicht die Überlagerung von Streuungen, die in der Praxis auftreten kann, wenn zwei stark streuende Werte zusammenwirken. Es berechnet den Einfluss jeder streuenden Größe isoliert, während die anderen Werte als Mittelwert angenommen werden.

Die Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulation zeigen jedoch, dass mit zunehmender Streuung die Effekte der Überlagerung von Fehlern stärker werden, was zu asymmetrischen Verteilungen führen kann.

In dieser Arbeit wurde mehrfach der Umgang mit Asymmetrien in Verteilungen thematisiert und entsprechende Werkzeuge sowie Herangehensweisen vorgestellt. Es ist zulässig, das Fehlerfortpflanzungsgesetz anzuwenden, jedoch sollte die resultierende Ungenauigkeit im Vergleich zu den realistischeren Monte-Carlo-Simulationen berücksichtigt

werden. Letztere bieten eine genauere Beschreibung der tatsächlichen Verteilung und sind besonders wertvoll, wenn die Fehlergrößen signifikant sind.

5.3 Zusammenfassung der Ergebnisse

Die Anwendung stochastischer Methoden zur Berechnung von Schraubenverbindungen nach VDI 2230 liefert vielversprechende Ergebnisse. Die Analyse zeigt, dass die Kombination der Reibwerte für Kopfauflage und Gewinde zu einem gemittelten Gesamtreibwert führt, dessen Wertebereich um etwa 30% kleiner als der Wertebereich der einzeln betrachteten Werte ist. Dies ermöglicht effizientere Dimensionierungen.

Durch Monte-Carlo-Simulationen wurden variierende Streuungen der Reibwerte und des Anziehungsfaktors in die Auslegung von Einzelschraubenverbindungen integriert. Diese Analyse ermöglichte die Bestimmung einer optimalen zulässigen Querkraft, die eine Ausfallwahrscheinlichkeit berücksichtigt. Die stochastische Methode erlaubt es, einerseits Ausfallwahrscheinlichkeiten zu bestimmen, andererseits aber auch diese Wahrscheinlichkeit als Auslegungskriterium für Schraubenverbindungen zu verwenden.

Bei Mehrschraubenverbindungen, wie sie beispielsweise bei Flanschen vorkommt, konnte gezeigt werden, wie die zulässige Querkraft der einzelnen Schrauben addiert wird, um die Gesamtbelastung zu bewältigen. Die Standardabweichung der Einflussgrößen nimmt mit der Wurzel der Anzahl der Schrauben ab. Dies bedeutet, dass für den Mittelwert aller Kräfte die individuellen Standardabweichungen durch diese Wurzel geteilt werden. Diese Vorgehensweise ermöglicht eine höhere zulässige Querkraft bei gleichbleibender Ausfallwahrscheinlichkeit.

Zusätzlich wurde untersucht, wie die Berechnungsschritte R0-R13 der VDI 2230 für eine stochastische Herangehensweise geeignet sind. Dabei zeigte sich, dass viele relevante Größen, wie die sich einstellende Montagevorspannkraft $F_{M,ist}$, die tatsächliche Sicherheit gegen Fließen $S_{F,ist}$ und die tatsächliche Sicherheit gegen Flächenpressung $S_{P,ist}$, stark von den streuenden Einflussgrößen wie Reibwerten und Anziehungsfaktor abhängen. Eine erweiterte stochastische Betrachtung dieser Größen, so wie sie schon für die zulässige Querkraft durchgeführt wurde, könnte die Auslegung der Schraubenverbindungen weiter optimieren.

Abschließend wurde die Annahme einer Normalverteilung für die Einflussgrößen kritisch betrachtet und die Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes bei stark streuenden Einflussgrößen diskutiert.

Es zeigt sich, dass stochastische Ansätze die traditionellen Berechnungsmethoden effektiv ergänzen und die Dimensionierung von Schraubenverbindungen signifikant effizienter und kostengünstiger gestalten können.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Im abschließenden Kapitel dieser Arbeit werden die wesentlichen Ergebnisse und Erkenntnisse zusammengefasst und ein Ausblick auf mögliche zukünftige Forschungsrichtungen gegeben. Die Arbeit hat gezeigt, wie die Anwendung stochastischer Methoden zur Berechnung von Schraubenverbindungen gemäß der VDI 2230 zu effizienteren Dimensionierungen führen kann. Im vorherigen Kapitel wurden die wichtigsten Ergebnisse detailliert dargestellt. Dieses Kapitel fasst die Schlüsselergebnisse zusammen, diskutiert die Implikationen für die Praxis und potenzielle Weiterentwicklungen und Forschungsthemen, die auf den gewonnenen Erkenntnissen aufbauen können.

6.1 Arbeitsergebnisse

In diesem Kapitel werden die in der Zielsetzung definierten Aufgabenpakete rekapituliert. Es wird aufgezeigt, welche Aufgaben erfüllt wurden, an welchen Stellen der Arbeit sie behandelt wurden und wie die jeweiligen Ergebnisse dokumentiert sind.

1. **Analysieren der Literatur:** Untersuchung ausgewählter Grundlagen zur Berechnung von Schraubenverbindungen und zur Stochastik.

Die Grundlagen zur Berechnung von Schraubenverbindungen wurden in Kapitel 2 direkt aus der VDI 2230 und einem Fachbuch [1] mit Bezug auf diese Richtlinie entnommen. Eine weitergehende Analyse war hier nicht erforderlich. Die stochastischen Grundlagen in Kapitel 3 sind weit verbreitet. Das Fehlerfortpflanzungsgesetz, die Bedingungen zur Anwendung und Informationen zur logarithmischen Transformation stammen aus Fachbüchern der Mathematik ([4]) und Datenanalyse [5].

2. **Auswählen und Quantifizieren von besonders relevanten Einflussgrößen und deren Streuungen:** Identifikation und Bewertung der wichtigsten Einflussgrößen, die die Berechnung von Schraubenverbindungen beeinflussen.

Die Auswahl und Quantifizierung der Einflussgrößen wurden in Absprache mit Prof. Dr. Andreas Meyer-Eschenbach auf Reibwerte und Anziehungsfaktoren sowie deren entsprechende Wertebereiche festgelegt (Anhang B-1). Das Verfahren zur Durchführung einer Varianzanalyse in Kapitel 4.2.3 zeigt, wie für beliebige Formeln die Größen mit den größten Varianzanteilen bestimmt werden können.

3. **Finden von aussagekräftigen Auswirkungen von streuenden Einflussgrößen bei der Berechnung von Schraubenverbindungen:** Analyse der Effekte, die die Streuungen der Einflussgrößen auf die Berechnungsergebnisse haben.

Am Beispiel der Berechnung der zulässigen Querkraft in Kapitel 2.2.2 wurde gezeigt, dass streuende Einflussgrößen in Kombination zu Werten führen, die untereinander stark variieren können. Bei der konservativen Methode, den ungünstigsten Fall zu berechnen, führt dies dazu, dass für einen sehr unwahrscheinlichen Fall ausgelegt und somit häufig überdimensioniert wird. Das Potenzial der stochastischen Herangehensweise steigt mit der Anzahl der streuenden Größen und kann helfen, diese Überdimensionierung falls möglich zu vermeiden.

4. **Analysieren der Fehlerfortpflanzung und der relativen und absoluten Streuungen in Rechenschritten bei der Berechnung von Schraubenverbindungen und Darstellung anhand von Schaubildern:** Untersuchung der Fehlerfortpflanzung und der damit verbundenen Streuungen während der Berechnung.

Die Analyse der Fehlerfortpflanzung wird bei den verschiedenen Anwendungen des Fehlerfortpflanzungsgesetzes demonstriert, unter anderem auch an ausgewählten Beispielen der Schraubenverbindungsrechnung, wie der Berechnung der zulässigen Querkraft in Kapitel 5.1.2. Die Auswirkungen relativer Streuungen werden in Kapitel 3.3.2 behandelt. Das Verhalten der absoluten Streuungen wird an einfachen Beispielen in Kapitel 3.2.2 und 3.2.3 erläutert, wobei die Aussagen dazu allgemeingültig sind. Grundsätzlich werden die Kernaussagen dieser Arbeit durch Schaubilder und Diagramme veranschaulicht

5. **Ableiten von Empfehlungen zur Berechnung:** Entwicklung praxisnaher Empfehlungen zur verbesserten Berechnung und Auslegung von Schraubenverbindungen.

Die Empfehlungen zur Berechnung befinden sich in Kapitel 5.1. Diese beschreiben Anpassungen an der derzeitigen Methode unter Einführung einer Ausfallwahrscheinlichkeit bei der Auslegung.

6.2 Zusammenfassung der Ergebnisse

Die VDI 2230 stellt eine robuste Methode dar, Schrauben gegen die ungünstigsten Kombinationen verschiedener Einflussgrößen auszulegen. Dies führt jedoch oft zu einer

Überdimensionierung der Schrauben, da die tatsächlich auftretenden Bedingungen und Lasten nicht immer angemessen abgebildet werden. Die Untersuchung der Schraubenverbindungsrechnung nach der VDI 2230 zeigt, dass die stochastischen Methoden vielversprechende Ergebnisse liefern. Ein wesentlicher Befund dieser Arbeit ist, dass die zulässige Querkraft einer Schraubenverbindung bei üblichen Annahmen für Reibwerte und Anziehungsfaktoren um den Faktor von etwa fünf variieren kann. Deshalb wurde untersucht, wie die Streuungen der Einflussgrößen besser gehandhabt werden können, um den Ergebnisraum effizienter zu begrenzen.

Kapitel 3 führte grundlegende Konzepte der Wahrscheinlichkeitsrechnung ein, die für die Schraubenverbindungsrechnung relevant sind. Dazu gehören diskrete und kontinuierliche Zufallsverteilungen, Histogramme, Mittelwert, Varianz, Standardabweichung, Normalverteilung und Quantile. Das Fehlerfortpflanzungsgesetz wurde erläutert, das die Standardabweichung einer Funktionsgröße aus verschiedenen Einflussgrößen berechnet. Die Monte-Carlo-Simulationen veranschaulichten, wie komplexe Wahrscheinlichkeitsverteilungen generiert werden können. Logarithmische Achsenskalierungen wurden als Werkzeug zur besseren Auswertung asymmetrischer Verteilungen beschrieben.

Kapitel 4 widmete sich der praktischen Anwendung dieser Konzepte. Es zeigte sich, dass bei der Berechnung von Grenzwerten eines Produktes aus n Streuungsgrößen die Wahrscheinlichkeit des Eintritts dieser Grenzwerte mit zunehmender Anzahl der Streuungsgrößen abnimmt. Das Fehlerfortpflanzungsgesetz wird angewendet, um neue Grenzwerte festzulegen. Da die manuelle Anwendung des Gesetzes zeitaufwendig und fehleranfällig sein kann, wurde die maschinelle Berechnung, beispielsweise mit MATLAB, empfohlen. Die Durchführung einer Monte-Carlo-Simulation zur Bestimmung realistischer Verteilungen und sicherer Aussagen wurde ebenfalls beschrieben.

In den Ergebnissen der Anwendung stochastischer Methoden auf die Schraubenverbindungsrechnung gemäß VDI 2230 zeigte sich, dass die Kombination der Reibwerte für Kopfauflage und Gewinde zu einem gemittelten Gesamtreibwert führte, dessen Streuung etwa 30% kleiner als die der einzeln betrachteten Werte ist. Dies ermöglicht präzisere Dimensionierungen. Bei Einzelschraubenverbindungen ermöglichte die Monte-Carlo-Simulation eine Bestimmung der optimalen zulässigen Querkraft unter Berücksichtigung der Ausfallwahrscheinlichkeit.

Für Mehrschraubenverbindungen, wie sie bei Flanschen vorkommen, wurde gezeigt, dass sich die zulässige Querkraft der einzelnen Schrauben addiert, um die Gesamtbelastung zu tragen. Die Standardabweichung der Einflussgrößen nimmt mit der Wurzel

der Anzahl der Schrauben ab, was bedeutet, dass die individuellen Standardabweichungen durch diese Wurzel geteilt werden müssen. Dies führte zu einer höheren zulässigen Querkraft bei gleichbleibender Ausfallwahrscheinlichkeit.

Die Berechnungsschritte R0 bis R13 der VDI 2230 wurden auf ihre Eignung für eine stochastische Herangehensweise untersucht. Es wurde festgestellt, dass viele relevante Größen, insbesondere die sich einstellende Montagevorspannkraft $F_{M,ist}$, die tatsächliche Sicherheit gegen Fließen $S_{F,ist}$ und die tatsächliche Sicherheit gegen Flächenpressung $S_{P,ist}$ stark von streuenden Einflussgrößen wie Reibwerten und Anziehungsfaktor abhängen. Eine erweiterte stochastische Betrachtung dieser Größen könnte die Auslegung der Schraubenverbindungen weiter optimieren.

Abschließend wurde die Annahme einer Normalverteilung für die Einflussgrößen kritisch betrachtet und die Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes bei stark streuenden Einflussgrößen diskutiert. Es zeigt sich, dass stochastische Ansätze die traditionellen Berechnungsmethoden effektiv ergänzen und die Dimensionierung von Schraubenverbindungen deutlich effizienter und präziser gestalten können.

Diese Arbeit zeigt, dass die Betrachtung der Schraubenverbindungsrechnung unter Berücksichtigung der Wahrscheinlichkeitsrechnung besser dazu beitragen kann, die Verteilung der Ergebnisse bei der Auslegung besser zu nutzen. Im Gegensatz zur traditionellen Methode, bei der lediglich mit den ungünstigsten Werten gerechnet wird und dadurch für sehr unwahrscheinliche Fälle ausgelegt wird, bieten stochastische Ansätze eine differenziertere Sichtweise. Durch die Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes und Monte-Carlo-Simulationen kann eine realitätsnähere Abbildung der Verteilung der Werte innerhalb der Bandbreite der möglichen Ergebnisse erreicht werden. Dies könnte dazu führen, dass Schraubenverbindungen in den meisten Fällen nicht mehr unnötig überdimensioniert werden müssen.

Als zusätzliche Größe bei der Auslegung wurde durch die stochastische Betrachtung die Ausfallwahrscheinlichkeit eingeführt. Zusammen mit der Streuung der Einflussgrößen hat sie maßgeblichen Einfluss auf die Anpassung der Werte. Diese Ansätze ermöglichen effizientere und kostengünstigere Schraubenverbindungen, die den tatsächlichen Bedingungen besser gerecht werden.

6.3 Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurden die Vorteile einer stochastischen Betrachtung bei der Berechnung von Schraubenverbindungen aufgezeigt. Diese Ergebnisse eröffnen mehrere interessante Forschungsfragen und -richtungen, die in zukünftigen Arbeiten weiter untersucht werden könnten.

Überprüfung und Darstellung identifizierter Größen:

Es wäre sinnvoll, die in dieser Arbeit identifizierten, aber nicht weitergehend betrachteten Größen wie die sich einstellende Montagevorspannkraft $F_{M,ist}$, die tatsächliche Sicherheit gegen Fließen $S_{F,ist}$ und die tatsächliche Sicherheit gegen Flächenpressung $S_{P,ist}$ genauer zu überprüfen. Hierbei könnten Diagramme erstellt werden, die die Verteilung dieser Größen und deren Einfluss auf die Berechnung von Schraubenverbindungen veranschaulichen. Diese Diagramme könnten sich dabei an den Diagrammen der Querkraft orientieren. Eine detaillierte Analyse dieser Größen könnte dazu beitragen, die Effizienz und Genauigkeit der Schraubenverbindungsauslegung weiter zu verbessern. Zudem könnte untersucht werden, inwieweit sich mehrere Erhöhungsfaktoren kombinieren lassen, da diese teilweise unterschiedliche Anforderungen an die Schraube stellen.

Anwendung stochastischer Methoden auf andere Maschinenbauteile:

Der nächste logische Schritt wäre die Anwendung stochastischer Methoden auf andere Maschinenbauteile, bei denen stark streuende Größen eine Rolle spielen. Die stochastische Betrachtung könnte auch hier zu einer Effizienzsteigerung und besseren Dimensionierung führen, ähnlich wie bei Schraubenverbindungen.

Untersuchung der Asymmetrie in Monte-Carlo-Simulationen:

Eine vertiefte Untersuchung der Asymmetrie in den Zufallsverteilungen der Monte-Carlo-Simulationen wäre von großem Interesse. Es sollte erforscht werden, ob die Größe der Abweichungen und Streuungen bereits Aussagen zur Asymmetrie der resultierenden Verteilung ermöglichen. Die Einführung spezifischer Größen zur Beschreibung der Asymmetrie könnte die analytische Berechnung von Wahrscheinlichkeiten in Intervallen präzisieren und zu neuen Formeln führen, die den Zusammenhang zwischen Asymmetrie und Abweichung der einzelnen Größen besser beschreiben. Zusätzlich wäre es sinnvoll, eine gezielte Recherche nach bestehenden Formeln zur quantitativen Beschreibung der Asymmetrie durchzuführen. Es besteht die Möglichkeit, dass solche Formeln bereits entwickelt, jedoch bislang nicht in diesem spezifischen Kontext angewendet wurden. Das Auffinden und die Anwendung solcher existierenden Formeln könnten zur Verfeinerung der analytischen Berechnungen beitragen. Diese Suche nach bestehenden Methoden und deren Anwendung könnte neue Erkenntnisse liefern und die Grundlage für weiterführende Entwicklungen legen.

Da in dieser Arbeit festgestellt wurde, dass die berechnete Standardabweichung bei asymmetrischen Verteilungen oft ungenau ist, könnte eine zukünftige Forschungsrichtung die einseitige Betrachtung der Streuung sein, um den Einfluss der Asymmetrie zu verringern.

Diese Forschungsrichtungen bieten vielfältige Möglichkeiten zur Weiterentwicklung der in dieser Arbeit gewonnenen Erkenntnisse und zur Erweiterung und Anwendung stochastischer Methoden im Maschinenbau. Eine intensivere Untersuchung dieser Fragen könnte nicht nur die Dimensionierung von Schraubenverbindungen verbessern, sondern auch zu einer allgemeinen Verbesserung der Berechnungsmethoden mit Ausfallwahrscheinlichkeit im Maschinenbau führen.

Quellenverzeichnis

- [1] A. Meyer-Eschenbach, *Schraubenverbindungen*. Germany, 2022.
- [2] M. Petersen, *Schraubenverbindungen - Grundlagen*, (14. Januar 2021). Zugegriffen: 21. Juli 2024. [Online Video]. Verfügbar unter: https://www.youtube.com/watch?v=LY_8RusX_Is
- [3] *VDI 2230 Blatt 1 Systematische Berechnung hochbeanspruchter Schraubenverbindungen*, Düsseldorf., November 2015.
- [4] L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. Band 3: Vektoranalysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik, Fehler- und Ausgleichsrechnung: mit 550 Abbildungen, zahlreichen Beispielen aus Naturwissenschaft und Technik sowie 295 Übungsaufgaben mit ausführlichen Lösungen*, 7., Überarbeitete und Erweiterte Auflage. in Lehrbuch. Erscheinungsort nicht ermittelbar, 2016.
- [5] W. Kessler, *Multivariate Datenanalyse: für die Pharma-, Bio- und Prozessanalytik; ein Lehrbuch*, Repr. Weinheim: Wiley-VCH, 2008.
- [6] „Verwendung der Ripley’s K-Funktion und der Kernel-Dichte-Schätzung? - Our Planet Today“. Zugegriffen: 23. Juli 2024. [Online]. Verfügbar unter: <https://geoscience.blog/de/verwendung-der-ripleys-k-funktion-und-der-kernel-dichte-schatzung/>
- [7] R. Gomeringer, *Tabellenbuch Metall: mit Formelsammlung*, 47., neu Bearbeitete und Erweiterte Auflage, Korrigierter Nachdruck. in Europa-Fachbuchreihe für Metallberufe. Haan-Gruiten: Verlag Europa Lehrmittel, 2017.
- [8] „ANSI B16.5 Orifice Flanges Manufacturer & Exporter“, Werner Flanges Inc. Zugegriffen: 25. Juli 2024. [Online]. Verfügbar unter: <https://msiflanges.com/ansi-b16-5-orifice-flanges-manufacturer-exporter/>

Anhang

Anhang A-1: Mittelwert und Standardabweichung durch Fehlerfortpflanzungsgesetz

```
function FMzul_Standardabweichung()
```

1

```
%Definieren der Variablen
```

```
syms R_p02min sR_p02min
syms P d_2 d_3 d_W D_Ki sP sd_2 sd_3 sd_W sD_Ki
syms my_G my_K smy_G smy_K
syms ny sny
```

2

```
%Sammeln der Mittelwerte und Standardabweichungen in symbolischer Form
```

```
v = [R_p02min,P, d_2, d_3, d_W, D_Ki, ...
     my_G, my_K, ny];

w = [sR_p02min, sP, sd_2, sd_3, sd_W, sD_Ki, ...
     smy_G, smy_K, sny];
```

3

```
% Diskrete Werte für Mittelwert und Standardabweichung angeben
```

```
R_p02min_diskret= 650*1000^2; %N/mm^2
sR_p02min_diskret= 10/3*1000^2;
```

```
P_diskret= 1.5/1000;%mm
sP_diskret= 0.1/3/1000;
```

```
d_2_diskret=9.03/1000; %mm
sd_2_diskret=0.1/3/1000;
```

```
d_3_diskret= 8.16/1000;%mm
sd_3_diskret= 0.1/3/1000;
```

```
d_W_diskret= 14.6/1000;%mm
sd_W_diskret= 0.1/3/1000;
```

```
D_Ki_diskret= 11/1000;%mm
sD_Ki_diskret= 0.1/3/1000;
```

```
my_G_diskret= 0.12; %
smy_G_diskret= 0.04/3;
```

```
my_K_diskret= 0.12; %
smy_K_diskret= 0.04/3;
```

```
ny_diskret= 0.9; %
sny_diskret= 0;
```

4

%Matrizen mit diskreten Werten erstellen

```
v_diskret = [R_p02min_diskret, P_diskret, d_2_diskret, d_3_diskret,
d_W_diskret, D_Ki_diskret, ...
my_G_diskret, my_K_diskret, ny_diskret];
```

```
w_diskret = [sR_p02min_diskret, sP_diskret, sd_2_diskret, sd_3_disk-
ret, sd_W_diskret, sD_Ki_diskret, ...
smy_G_diskret, smy_K_diskret, sny_diskret];
```

5

%Weitere Gleichungen definieren

```
d_S=(d_2+d_3)/2;
D_Km=(d_W+D_Ki)/2;
```

%Gleichungen der vorkommenden Größen

```
A_S=pi/4*d_S^2;
sigma_Mzul=(ny*R_p02min)/(1+3*(4/d_S*(0.159*P+0.577*my_G*d_2))^2)^(1/2);
F_Mzul=sigma_Mzul*A_S;
```

6

%Gleichung für das Anziehdrehmoment, hierbei wird symbolisch die Gleichung für M_A erstellt

```
M_A=F_Mzul*(0.159*P+0.577*d_2*my_G+D_Km/2*my_K);
```

7

%In der symbolischen Gleichung werden die Variablen durch die anfangs definierten Werte der Größen ersetzt und somit der Mittelwert berechnet

```
M_A_diskret=subs(M_A, v, v_diskret);
```

8

%Lösungsvariable der Standardabweichung von M_A zu Beginn gleich null setzen

```
LSG=0;
```

9

%Für jede Variable wird die Varianz berechnet, indem die partielle Ableitung gebildet und mit der

```
%Standardabweichung multipliziert wird; anschließend wird das Produkt
quadriert;
%Für alle Variablen werden die Terme aufaddiert
```

```
for u=1:length(v)
    LSG=LSG+(diff(M_A,v(u))*w(u))^2;
end
```

10

```
%Die Standardabweichung ergibt sich aus der Wurzel der Varianz
```

```
L=LSG^(0.5);
```

11

```
%Die Standardabweichung wird durch einsetzen der diskreten Werte für
die
%symbolischen Größen berechnet
```

```
Standardabweichung_diskret=subs(L, [v w], [v_diskret w_diskret]);
```

```
end
```

Anhang A-2: Monte-Carlo-Simulation

Durchführung einer Monte-Carlo-Simulation

1

```
function FMzul_Quantil_Monte_Carlo()
```

```
% Diskrete Werte angeben
```

```
R_p02min_diskret = 650 * 1000^2; % N/mm^2
sR_p02min_diskret = 10 / 3 * 1000^2;
```

```
P_diskret = 1.5 / 1000; % mm
sP_diskret = 0.1 / 3 / 1000;
```

```
d_2_diskret = 9.03 / 1000; % mm
sd_2_diskret = 0.1 / 3 / 1000;
```

```
d_3_diskret = 8.16 / 1000; % mm
sd_3_diskret = 0.1 / 3 / 1000;
```

```
d_W_diskret = 14.6 / 1000; % mm
sd_W_diskret = 0.1 / 3 / 1000;
```

```
D_Ki_diskret = 11 / 1000; % mm
sD_Ki_diskret = 0.1 / 3 / 1000;
```

```
my_G_diskret = 0.12; %
smy_G_diskret = 0.04 / 3;
```

```
my_K_diskret = 0.12; %
smy_K_diskret = 0.04 / 3;
```

```
ny_diskret = 0.9; %
sny_diskret = 0;
```

2

```
% Zufallsverteilung: Anzahl der Stichproben
```

```
l_norm = 10000000;
```

3

```
% Zufallsverteilung: Stichproben werden unter Angabe des Mittelwerts
und der Standardabweichung generiert
```

```
R_p02min_norm = sR_p02min_diskret * randn(l_norm, 1) + R_p02min_diskret;
P_norm = sP_diskret * randn(l_norm, 1) + P_diskret;
d_2_norm = sd_2_diskret * randn(l_norm, 1) + d_2_diskret;
d_3_norm = sd_3_diskret * randn(l_norm, 1) + d_3_diskret;
d_W_norm = sd_W_diskret * randn(l_norm, 1) + d_W_diskret;
D_Ki_norm = sD_Ki_diskret * randn(l_norm, 1) + D_Ki_diskret;
my_G_norm = smy_G_diskret * randn(l_norm, 1) + my_G_diskret;
my_K_norm = smy_K_diskret * randn(l_norm, 1) + my_K_diskret;
ny_norm = sny_diskret * randn(l_norm, 1) + ny_diskret;
```

4

```
% Berechnung der Zwischenwerte
```

```
d_S_norm = (d_2_norm + d_3_norm) / 2;
D_Km_norm = (d_W_norm + D_Ki_norm) / 2;
```

```
A_S_norm = pi / 4 * d_S_norm.^2;
sigma_Mzul_norm = (ny_norm .* R_p02min_norm) ./ (1 + 3 * (4 ./
d_S_norm .* (0.159 * P_norm + 0.577 * my_G_norm .*
d_2_norm)).^2).^ (1/2);
F_Mzul_norm = sigma_Mzul_norm .* A_S_norm;
```

5

```
% Berechnung der gesuchten Zielgröße
```

```
M_A_norm = F_Mzul_norm .* (0.159 * P_norm + 0.577 * d_2_norm .*
my_G_norm + D_Km_norm / 2 .* my_K_norm);
```

6

```
% Berechnung des 99,9%-Quantils und Ausgabe
```

```
quantil = quantile(M_A_norm, 0.999);
fprintf('99%-Quantil von M_A: %4.3f \n', quantil);
```

```
end
```

Anhang A-3: Mittelwert und Standardabweichung aus einem Datensatz

%Der Mittelwert und die Standardabweichung eines Datensatzes können in einer entsprechenden Variable gespeichert werden

```
Mittelwert=mean(M_A_norm)
Standardabweichung=std(M_A_norm)
```

Anhang A-4: Varianzanalyse

Zuordnung der Varianzanteile

Ergänzend zu Anhang 1

9

%Bei jedem berechneten Varianzanteil wird dieser in einer zusätzlichen Variable separat gespeichert

```
for u=1:length(v)
    LSG=LSG+(diff(M_A,v(u))*w(u))^2;
    VAR(u)=(diff(M_A,v(u))*w(u))^2;
end
```

Anhang A-5: Erstellung eines Histogramms

Erstellung und Bearbeitung der Histogramme

```
histogram(Datensatz_Anziehdrehmoment)
hold on

% Berechnung des 1% und 99% Quantils
quantile_1 = quantile(Datensatz_Anziehdrehmoment, 0.01);
quantile_99 = quantile(Datensatz_Anziehdrehmoment, 0.99);

title('Verteilung der Anziehdrehmomente')
xlabel('Wert')
ylabel('Relative Häufigkeit')
xline(quantile_1, '-', '1%-Grenze')
xline(quantile_99, '-', '99%-Grenze')
```

Anhang A-6: Kerndichteschätzung

Ksdensity

```
data = M_A_norm;
[f, xi] = ksdensity(data);

% Plotten der Dichteschätzung
figure;
plot(xi, f, 'LineWidth', 2);
xlabel('Datenwert');
ylabel('Dichte');
title('Kerndichteschätzung der Daten');
```

```
x_space = linspace(min(data), max(data), 1000);
mu = M_A_diskret;
sigma = L;
y = normpdf(x_space, mu, sigma);
plot(x_space, y)
```

Anhang A-7: Überprüfung der Sicherheitswerte

Überprüfung der Sicherheitswerte

```
sicher=0;
for xyz=1:l_norm

    if S_A_norm(xyz)>=1.1 && S_D_norm(xyz)>=1 && S_F_norm(xyz)>=1 &&
S_P_norm(xyz)>=1

        sicher = sicher +1;
    end

end

sicher = sicher /l_norm*100;
fprintf('%4.3f%% haben alle Sicherheiten über 1 \n', weiter)
```

Anhang B-1: Gesprächsnotiz vom 30.03.2024 mit Prof. Dr. Andreas Meyer-Eschenbach

Nach VDI 2230 wird immer vom ungünstigsten Fall ausgegangen, was zu Überdimensionierungen führt

Die Berechnung der erforderlichen Mindestklemmkraft durch Querbelastung bzw. der zulässigen Querkraft nach der Montage enthält einen zusätzlichen Faktor μ_T . Dieser Faktor, kombiniert mit den anderen Einflussgrößen, führt zu einer großen Streuung der Ergebnisse und ist daher ein gutes Beispiel für das Potenzial einer stochastischen Betrachtung.

Die Haupteinflussgrößen auf die Streuung sind die Reibwerte für Kopf-, Gewinde- und Trennfugenreibung sowie der Anziehungsfaktor

Anhang B-2: Gesprächsnotiz vom 05.05.2024 mit Prof. Dr. Andreas Meyer-Eschenbach

Werte für Reibung und Anziehungsfaktoren liegen normalverteilt vor

Reibwerte zwischen 0,08 und 0,16

Anziehungsfaktor α_A : Verfahren 10 wird betrachtet mit hochwertigem Werkzeug deshalb wird die untere Grenze von 1,4 gewählt

Die Annahme, dass zwei bis drei Standardabweichungen innerhalb des Wertebereichs liegen ist plausibel

Anhang B-3: Gesprächsnotiz vom 26.07.2024 mit Prof. Dr. Andreas Meyer-Eschenbach

α_A' gilt nur für Verfahren 10, Montageeinflüsse, dabei werden keine Schwankungen durch variierende Reibwerte umfasst, es gilt gleiches Drehmoment erzeugt gleiche Vorspannkraft; Ursachen für Schwankungen umfassen unterschiedliches Anziehen der Monteure; lange zurückliegende Kalibrierung; unterschiedliche Werkzeuge; Anwendungsunterschiede unter den Monteuren

Einflüsse auf die Reibwerte haben Rauigkeit, Schmierung, Beschichtung, Pressung, Verschleiß

→es lässt sich nicht pauschal sagen, wie dieser konkret aussieht

Material- und Fertigungskosten steigen; Grobe Faustregel: die Kosten steigen linear zur Vorspannkraft

Anhang C-1: Varianz durch Gewindereibwert

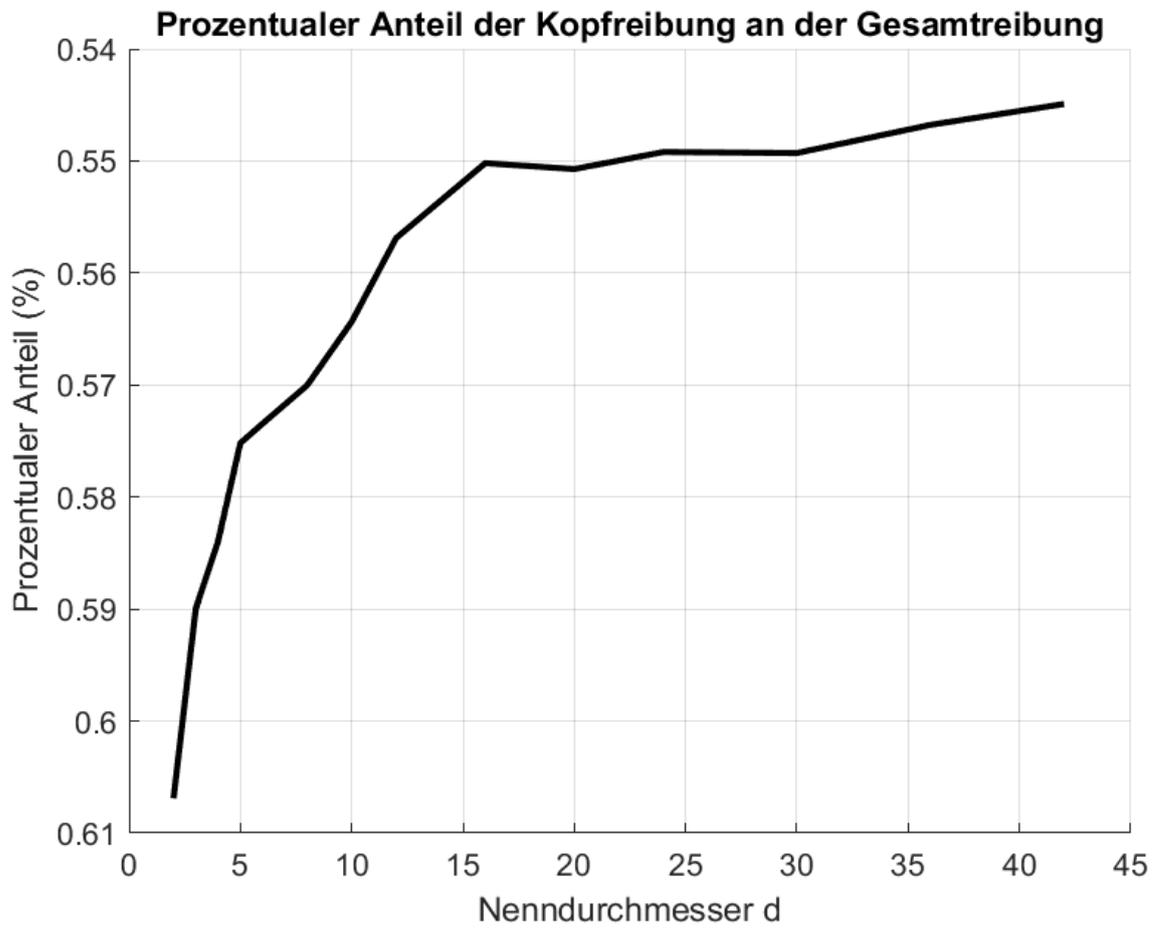
Für alle Werte innerhalb der Klammer gelten die Mittelwerte

$$\sigma_{\mu_G}^2 = \left[\frac{577 \cdot R_{p0\min} \cdot d_2 \cdot \nu \cdot \pi \cdot \left(\frac{d_2}{2} + \frac{d_3}{2}\right)^2}{4000 \cdot \sqrt{\frac{48 \left(\frac{159P}{1000} + \frac{577d_2\mu_G}{1000}\right)^2}{\left(\frac{d_2}{2} + \frac{d_3}{2}\right)^2} + 1}} - 1731 \cdot R_{p0\min} \cdot d_2 \cdot \nu \cdot \pi \cdot \left(\frac{159P}{1000} + \frac{577d_2\mu_G}{1000}\right) \cdot \left(\frac{159P}{1000} + \frac{577d_2\mu_G}{1000} + \mu_K \left(\frac{D_{Ki}}{4} + \frac{d_{IV}}{4}\right)\right) \right]^{3/2}$$

Anhang C-2: Standardabweichung des Quotienten der zulässigen Querkraft und dem Anziehdrehmoment

$$\sigma_0(Y) = \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha_A' \cdot (a + b \cdot \overline{\mu_{ges}})}\right)^2 \cdot \sigma_{\mu_T}^2 + \left(-\frac{\overline{\mu_T}}{\alpha_A'^2 \cdot (a + b \cdot \overline{\mu_{ges}})}\right)^2 \cdot \sigma_{\alpha_A'}^2 + \left(-\frac{b \cdot \overline{\mu_T}}{\alpha_A' \cdot (a + b \cdot \overline{\mu_{ges}})}\right)^2 \cdot \sigma_{\mu_{ges}}^2}$$

Anhang D-1: Anteil der Kopfreibung an der Gesamtreibung bei Zylinderschrauben



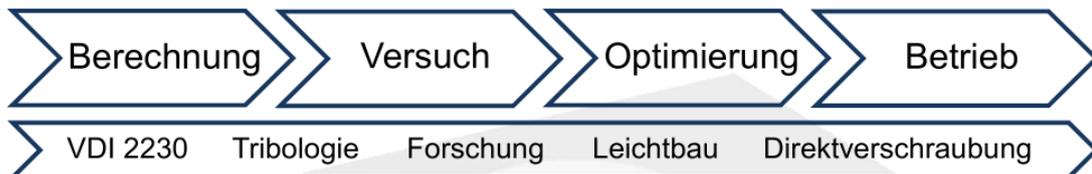
Anhang E-1: Programm NKS V 2024

Norddeutsches Kolloquium Schrauben- Verbindungen 2024



Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg

Donnerstag, den **16. Mai 2024**



ab 8:45 Uhr Empfang (Raum 202)

9:30 Uhr Beginn der **1. Vortragsreihe**

Eröffnung, Programmübersicht und Einführung *Prof. Dr. Meyer-Eschenbach, HAW Hamburg*

Berücksichtigung von Streuungen bei Einflussgrößen zur Berechnung von Schraubenverbindungen
Hr. Berg, Prof. Meyer-Eschenbach, HAW Hamburg

Reibwertanforderungen in der Automobilindustrie aus Sicht eines Schraubenherstellers
Hr. Stahl, Fa. Arnold Umformtechnik

Gruppenfoto, Pause und Gespräch (10:45 bis 11:10 Uhr)

Entwicklung eines „Reibungszahlrechners“ zur Abschätzung von Trennfugenreibungszahlen mittels KI
Hr. Rajabi, Fa. Porsche

Mittagspause, Laborbesichtigung und Gespräch (12:15 bis 13:40 Uhr)

13:45 Uhr Beginn der **2. Vortragsreihe**

Schadensanalyse bei dem Versagen von Schraubenverbindungen - Schwerpunkt Montagefehler
Hr. Jende, Fa. Competitive Strategy

Optimierung des Anziehprozesses von Schraubverbindungen: Eine konstantenbasierte Abschaltstrategie bei Stick-Slip
Prof. Seibel, Leuphana Universität Lüneburg

14:45 Uhr Ausstellung und Diskussion: Versuche zu Verschraubungen (Raum 122 und 202)

Kaffee und Kuchen • Abschluss um ca. 16:00 Uhr

Programmausschuss:

Prof. Meyer-Eschenbach (Vorsitz) • Prof. Kloss-Grote • Prof. Kopenhagen • Dr. v. Minden • Prof. Schäfer

HAW Hamburg, Berliner Tor 21, 20099 Hamburg - Gebäude BT21, Raum 310, Raum 122, Raum 202

Anmeldung bis zum 19. April: Andreas.Meyer-Eschenbach@haw-hamburg.de

Anhang E-2: Präsentationsfolien des Vortrags „Berücksichtigung von Streuungen bei Einflussgrößen zur Berechnung von Schraubenverbindungen“

(Hinweis: vorgenommene Anpassung an Folie 9 zur besseren Lesbarkeit der Zahlenwerte)



Berücksichtigung von Streuungen bei Einflussgrößen zur Berechnung von Schraubenverbindungen

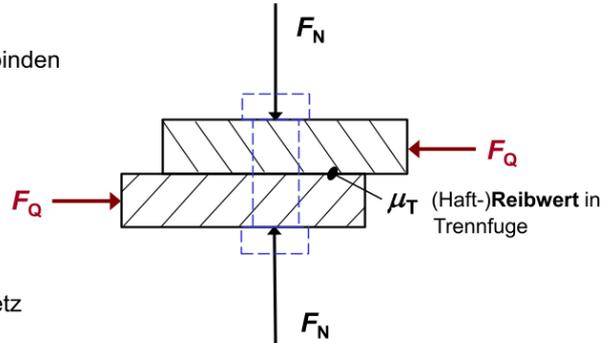
B.Sc. Anthony Berg
Prof. Dr.-Ing. Andreas Meyer-Eschenbach
Department Maschinenbau und Produktion
Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg

 μ_T μ_G μ_K α_A

Reibung in der Trennfuge: μ_T

Standardaufgabe

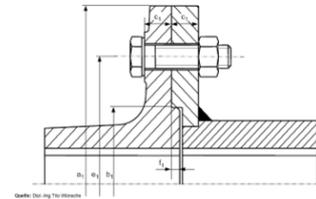
querkraftbelastete Bauteile verbinden



Reibungseffekt

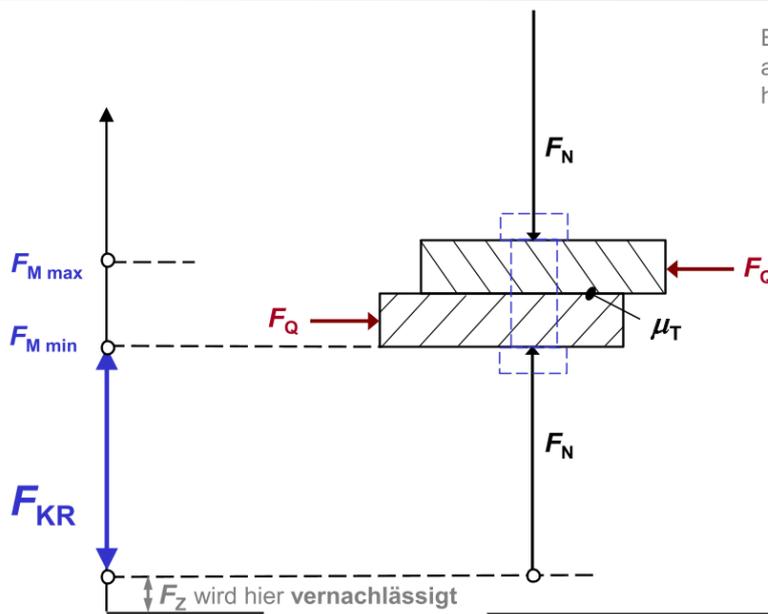
Coulomb'sches Reibungsgesetz
(Reibkraft als Reaktionskraft)

$$\mu_T \cdot F_N (\cdot n) = F_R > F_Q \quad n = 1 \text{ bei Einschraubenverbindung}$$



Erforderliche Restklemmkraft: F_{KR}

Betriebskraft F_A in
axialer Richtung wird
hier vernachlässigt



$$\mu_T \cdot F_{KR} = \mu_T \cdot F_N = F_R > F_Q$$

6 Kräfte

Reibung beim Anziehen: μ_G und μ_K

$$M_A = F_M \cdot (0,159 \cdot P + 0,577 \cdot d_2 \cdot \mu_G + \mu_K \cdot \frac{1}{2} D_{Km})$$

$$F_M = \frac{M_A}{0,159 \cdot P + (0,577 \cdot d_2 \cdot \mu_G + \frac{1}{2} D_{Km} \cdot \mu_K)}$$

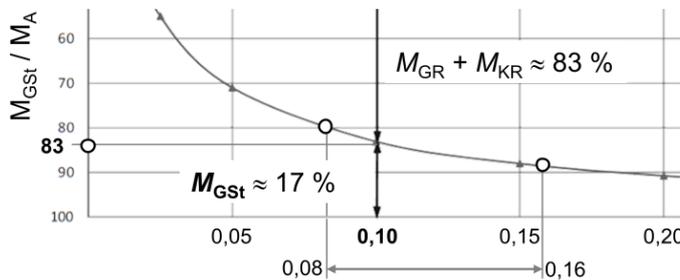
$$F_M = \frac{M_A}{0,159 \cdot P + (0,577 \cdot d_2 + \frac{1}{2} D_{Km}) \cdot \mu_{ges}}$$

Vereinfachung:

$\mu_G \approx \mu_K$
oder $\mu_{ges} =$
 $\mu_{GK} \approx \frac{1}{2} (\mu_G + \mu_K)$
ohne Gewichtung

Hinweis:

Anziehfaktor α_A wird
später berücksichtigt



Bei $\mu_{ges} = 0,10$ verbleiben nur ca. 17% für das Gewindesteigungsdrehmoment

Montage-Anziehdrehmomente M_A

Abmessung	Festigkeitsklasse	Reibungszahlklasse B				
		0,08	0,10	0,12	0,14	0,16
M 10	8.8	36	43	48	54	59
	10.9	53	63	71	79	87
	12.9	62	73	83	93	101

$F_M = 45,6 \text{ kN}$

maximales M_A in Nm bei 90 %-iger
Ausnutzung der Streckgrenze
nach VDI 2230, Tabelle A1

$F_M = 41,0 \text{ kN}$

$$M_A = F_M \cdot [0,159 \cdot P + (0,577 \cdot d_2 + \frac{1}{2} D_{Km}) \cdot \mu_{ges}]$$

Anziehfaktor α_A

$$\alpha_A = \frac{F_{M \max}}{F_{M \min}}$$

$$F_{M, \max} = F_{M \min} \cdot \alpha_A$$

$$F_{M, \min} = F_{M \max} / \alpha_A$$

Ausgewählte Anziehverfahren	Bemerkung	Anziehfaktor
Anziehen mit Längensteuerung per Ultraschall	Kleinerer Wert bei direkter mechanischer Ankopplung	1,1 ... 1,2
Hydraulisches Anziehen reibungsfrei und torsionsfrei	Meist erst ab M20, kleinerer Wert bei größeren Klemmlängen $l_k/d > 5$	1,1 ... 1,4
Sreckgrenzen- oder drehwinkelgesteuertes Anziehen (von Hand oder motorisch)	Schrauben werden mit $F_{V \min}$ berechnet	1,2 ... 1,4
Impulsschrauber drehmoment- oder drehwinkelgesteuert		1,2 ... 2,0
Drehmomentgesteuertes Anziehen mit Drehmomentschlüssel	Abhängig von Güteklasse des Drehmomentschlüssels	1,4 ... 1,6

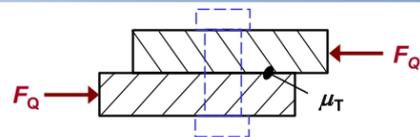
$$F_{M \max} < 0,9 \cdot R_{p0,2}$$

Beispiel: $F_{M \max} = F_{M \min} \cdot 1,4$

Montage (Anziehmomente)

$$F_{R \min} > F_{Q \text{ zul}} = F_M \cdot \mu_T$$

$$F_R = M_A \cdot \frac{\mu_T}{\alpha_A \cdot [a + b \cdot \mu_{\text{ges}}]}$$



$$\mu_T = 0,08 \dots 0,16$$

$$P = 1,5 \text{ mm}$$

$$\mu_{\text{ges}} = 0,08 \dots 0,16$$

$$d_2 = 9,03 \text{ mm}$$

$$\alpha_A = 1,0 \dots 1,4$$

$$D_{K_m} = 13,5 \text{ mm}$$

Beispiel:

$$F_{R \min} = M_A \cdot \frac{0,08}{1,4 \cdot [0,159 \cdot P + (0,577 \cdot d_2 + \frac{1}{2} D_{K_m}) \cdot 0,16]} = M_A \cdot 26,5 \text{ m}^{-1}$$

$$F_{R \max} = M_A \cdot \frac{0,16}{1,0 \cdot [0,159 \cdot P + (0,577 \cdot d_2 + \frac{1}{2} D_{K_m}) \cdot 0,08]} = M_A \cdot 134 \text{ mm}^{-1}$$

$$\rightarrow F_{R \max} = 5,06 \cdot F_{R \min}$$

Realistische Toleranzen

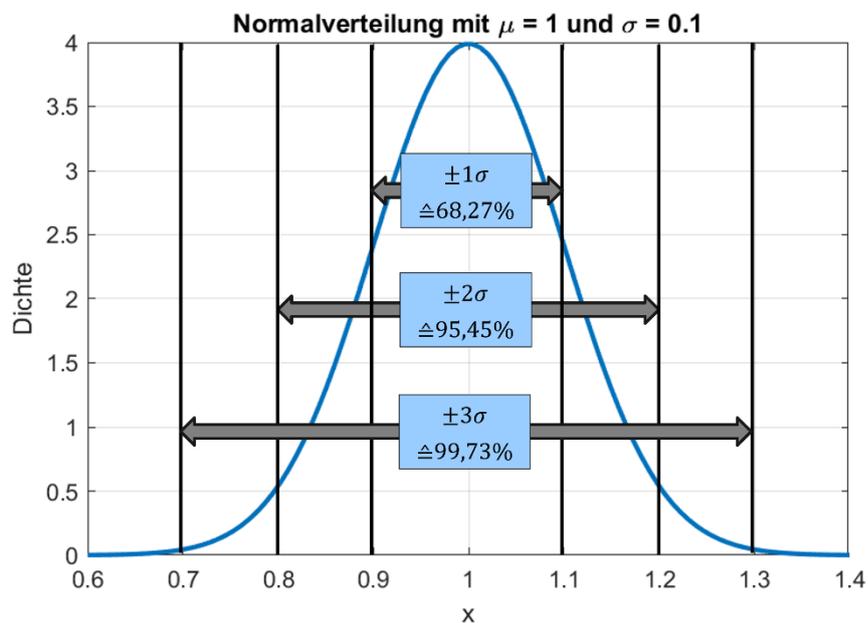
Ist bei der Kombination von vier Faktoren der **jeweils ungünstigste Fall** wirklich realistisch ?

$$\mu_T = 0,08 \dots 0,16 \quad \mu_G = 0,08 \dots 0,16 \quad \mu_K = 0,08 \dots 0,16 \quad \alpha_A = 1,0 \dots 1,4$$

Führen **statistische Analysen** zu engeren Toleranzen ?

Wie hilfreich ist das **Fehlerfortpflanzungsgesetz** ?

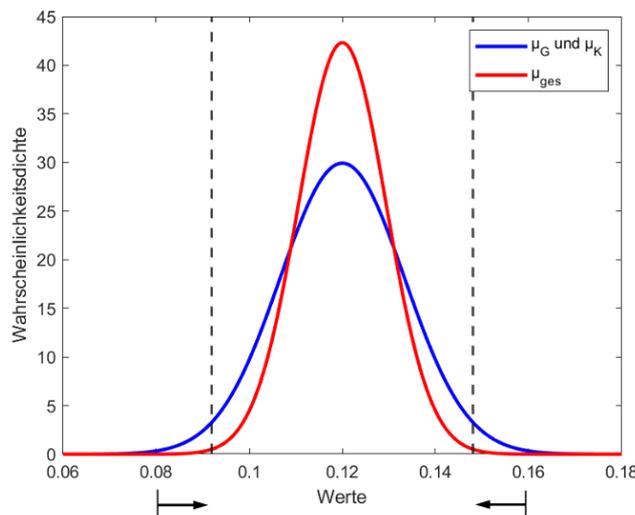
Einführung in die Normalverteilung



Kombination und Mittelung von zwei Reibwerten IKP Institut für Konstruktion und Produktentwicklung

Ansätze für μ_G und μ_K :

- Reibwerte μ_G und μ_K sind normalverteilt
- zulässige Grenzen innerhalb von $\pm 3 \sigma$ (oder $\pm 2 \sigma$)



$$\mu_{\text{ges}} \approx \frac{1}{2} (\mu_G + \mu_K)$$

ohne höhere Gewichtung
der Reibung unter dem Kopf

Kombination von zwei
Normalverteilungen führt zu
engerer
Normalverteilung

→ also **engeres
Reibwertfenster**

0,092 ... 0,148

Fehlerfortplanzung von μ_G und μ_K

σ_0 = Gesuchte Standardabweichung

$$\sigma_0(f(x_1, \dots, x_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{x=\bar{x}} \right)^2 \cdot \sigma_i^2}$$

$$\mu_G = \mu_K = 0,12 \pm 0,04 = \mu \pm 3 \cdot \sigma$$

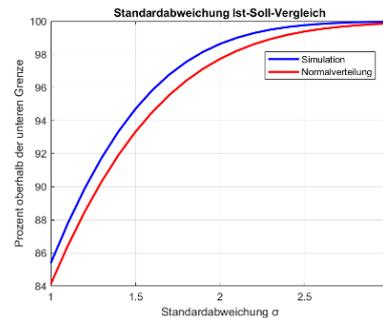
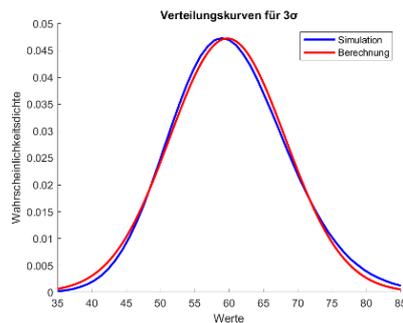
$$\mu_{\text{ges}} \approx \frac{1}{2} (\mu_G + \mu_K) \quad \text{mit } \bar{\mu}_G = \bar{\mu}_K = 0,12; \quad \sigma_{\mu_G} = \sigma_{\mu_K} = \sigma_{\mu} = \frac{0,04}{3}$$

$$\sigma_0(\mu_{\text{ges}}(\mu_G, \mu_K)) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \sigma_{\mu_G}^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \sigma_{\mu_K}^2} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \sigma_{\mu}^2} = \frac{\sigma_{\mu}}{\sqrt{2}}$$

Fehlerfortplanzung von μ_{ges} , μ_T und α_A

$$y = \frac{F_{Qzul}}{M_A} = \mu_T \cdot \frac{1}{\alpha_A \cdot \left(0,159 \cdot P + \left(0,577 \cdot d_2 + \frac{1}{2} \cdot D_{Km}\right) \cdot \mu_{ges}\right)} = \frac{\mu_T}{\alpha_A \cdot (a + b \cdot \mu_{ges})}$$

$$\sigma_0(y) = \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha_A \cdot (a + b \cdot \mu_{ges})}\right)^2 \cdot \sigma_{\mu_T}^2 + \left(-\frac{\bar{\mu}_T}{\alpha_A^2 \cdot (a + b \cdot \mu_{ges})}\right)^2 \cdot \sigma_{\alpha_A}^2 + \left(-\frac{b \cdot \bar{\mu}_T}{\alpha_A \cdot (a + b \cdot \mu_{ges})^2}\right)^2 \cdot \sigma_{\mu_{ges}}^2}$$

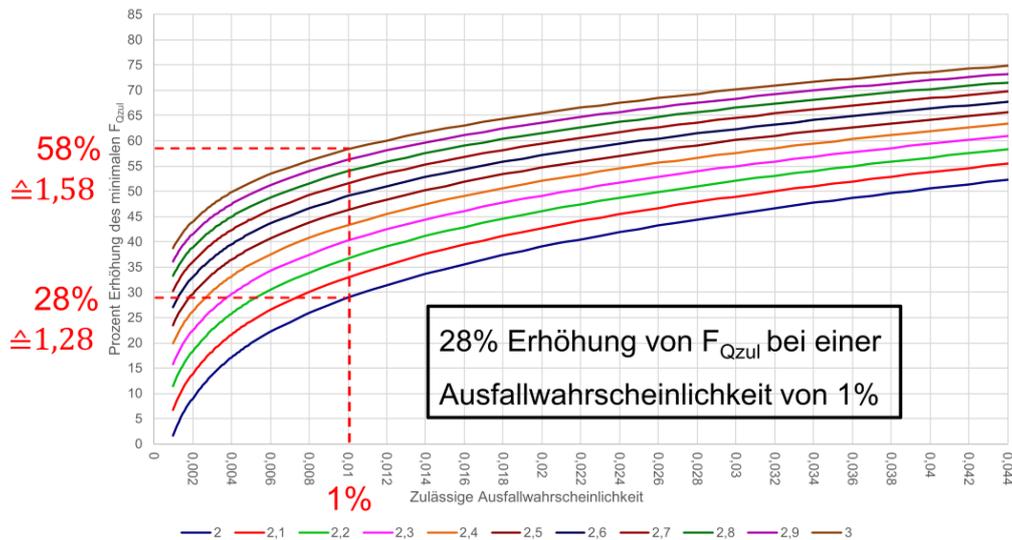


Fehlerfortplanzung von μ_{ges} , μ_T und α_A

Grenzwert abhängig von

$$F_R = M_A \cdot \frac{\bar{\mu}_T}{\alpha_A \cdot (a + b \cdot \mu_{ges})}$$

Erhöhungsfaktor von F_{Qzul} für M10



Schlussfolgerungen

$$F_{R \max} = 5,06 \cdot F_{R \min} \text{ für Maximum-Minimum-Methode}$$

$$F_{R \max} = \frac{5,06}{1,28} \cdot F_{R \min} (\cong 3,95) \text{ für } 2\sigma \text{ und } 99\% \text{ im Intervall}$$

$$F_{R \max} = \frac{5,06}{1,58} \cdot F_{R \min} (\cong 3,20) \text{ für } 3\sigma \text{ und } 99\% \text{ im Intervall}$$

Chancen:

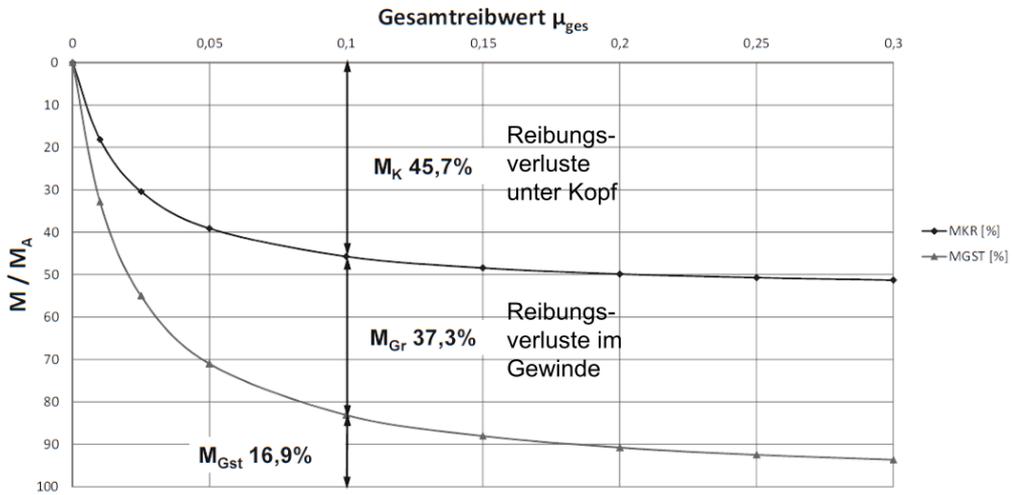
- Durch Kombination von Verteilungen Einengung der Intervalle möglich
- Ausfallwahrscheinlichkeit kann bestimmt werden
- Bei mehreren zusammenwirkenden Schrauben können Streuungen zusätzlich verringert werden

→ Weitere Untersuchungen sind angestrebt

BACKUP

BACKUP

BACKUP: Wirkungsgrad und Reibungsanteile beim Anziehen

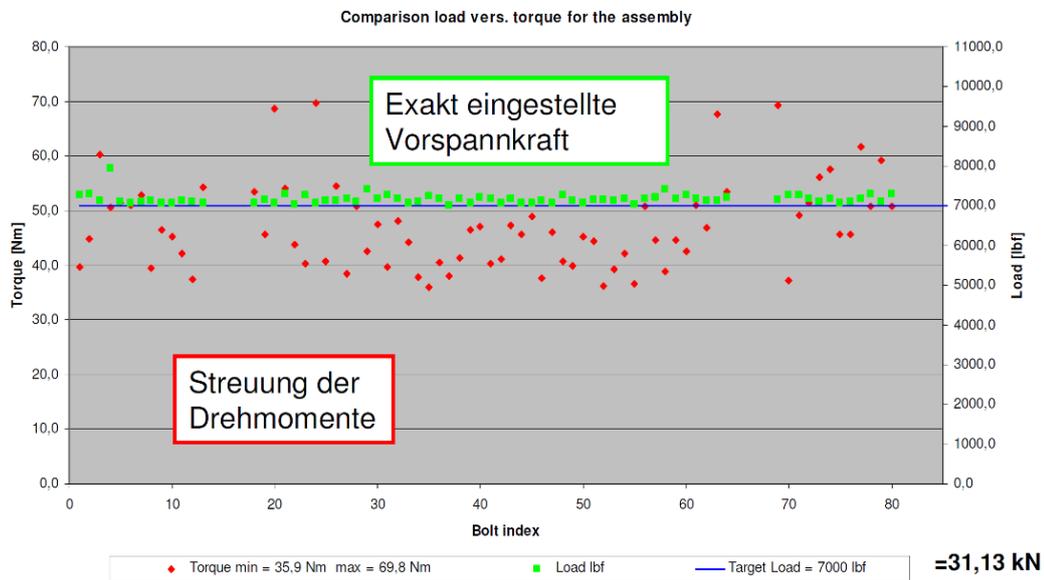


bei $\mu = 0,10$ verbleiben nur ca. 17% für das Gewindesteigungsdrehmoment

4 Reibung

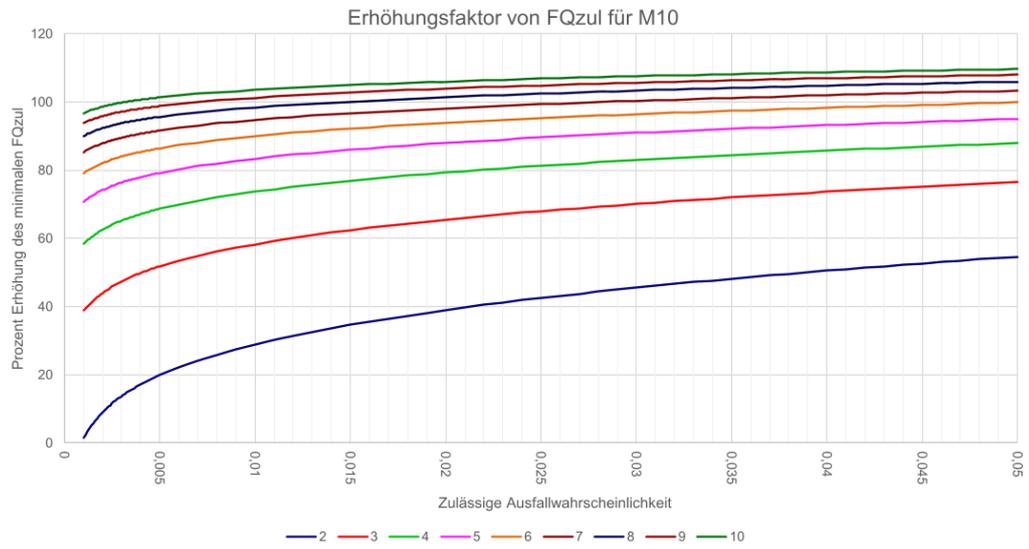
Quelle: Masterthesis, D. Mahn, 2013

Streuung von Drehmomenten am Bsp. eines Flugzeugbauteils



Fa. Intellifast

BACKUP



Eidesstattliche Erklärung

Gemäß der Allgemeinen Prüfungs- und Studienordnung ist zusammen mit der Abschlussarbeit eine schriftliche Erklärung abzugeben, in der der Studierende bestätigt, dass die Abschlussarbeit „– bei einer Gruppenarbeit die entsprechend gekennzeichneten Teile der Arbeit [(§ 18 Abs. 1 APSO-TI-BM bzw. § 21 Abs. 1 APSO-INGI)] – ohne fremde Hilfe selbständig verfasst und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt wurden. Wörtlich oder dem Sinn nach aus anderen Werken entnommene Stellen sind unter Angabe der Quellen kenntlich zu machen.“

Quelle: § 16 Abs. 5 APSO-TI-BM bzw. § 15 Abs. 6 APSO-INGI

Eine unrichtig abgegebene Erklärung kann -auch nachträglich- zur Ungültigkeit des Studienabschlusses führen.

Erklärung zur selbstständigen Bearbeitung der Arbeit

Hiermit versichere ich,

Name: _____

Vorname: _____

dass ich die vorliegende Hausarbeit ohne fremde Hilfe selbständig verfasst und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Wörtlich oder dem Sinn nach aus anderen Werken entnommene Stellen sind unter Angabe der Quellen kenntlich gemacht.

Ort

Datum

Unterschrift im Original