



Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Hamburg University of Applied Sciences

Bachelorarbeit

Marc Biele

Energieoptimierung von Gelenkbewegungen eines redundanten Industrieroboters während des Bearbeitungsprozesses

*Fakultät Technik und Informatik
Department Fahrzeugtechnik und Flugzeugbau*

*Faculty of Engineering and Computer Science
Department of Automotive and
Aeronautical Engineering*

Marc Biele

**Energieoptimierung von
Gelenkbewegungen eines redundanten
Industrieroboters während des
Bearbeitungsprozesses**

Bachelorarbeit eingereicht im Rahmen der Bachelorprüfung

im Studiengang Mechatronik
am Department Fahrzeugtechnik und Flugzeugbau
der Fakultät Technik und Informatik
der Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg

in Zusammenarbeit mit:
Fraunhofer Institut für Fertigungstechnik und Angewandte Materialforschung
Abteilung Automatisierung und Produktionstechnik
Ottenbecker Damm 12
21684 Stade

Erstprüfer/in: Prof. Dr. Thomas Frischgesell
Zweitprüfer/in: Christoph Brillinger, M. Sc.

Abgabedatum: 02.04.2025

Zusammenfassung

Name des Studierenden

Marc Biele

Thema der Bachelorthesis

Energieoptimierung von Gelenkbewegungen eines redundanten Industrieroboters während des Bearbeitungsprozesses

Stichworte

Industrieroboter, Inverse Kinematik, Energieoptimierung

Kurzzusammenfassung

Diese Arbeit befasst sich mit der Entwicklung eines Berechnungsverfahrens, welches für einen redundanten Industrieroboter energieoptimierte Gelenkstellungen ermittelt. Das Ziel ist es den Energieverbrauch zu reduzieren, ohne von einer vorgegebenen Endeffektorpose abzuweichen. Es werden mehrere Optimierungsansätze vorgestellt und anhand der physikalischen Simulation eines Beispielsystems, sowie einer Berechnung der pro Gelenk verwendeten Energie, verglichen und bewertet.

Name of Student

Marc Biele

Title of the paper

Energy optimisation of joint movements of a redundant industrial robot during the manufacturing process

Keywords

Industrial robot, inverse kinematics, energy optimisation

Abstract

This thesis describes the development of a calculation method to optimise the energy consumption of a redundant industrial robot. The goal is, to reduce the torque acting on the joint motors, by varying the orientation of the joints while not deviating from a specified end-effector pose. Several optimisation variations will be presented and based on a physical simulation of an example system, as well as the computation of the joint torques, compared and evaluated.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	I
Tabellenverzeichnis	III
Abkürzungsverzeichnis	IV
Symbolverzeichnis	V
1 Einleitung	1
2 Aufgabenstellung und Ziel der Arbeit.....	4
3 Stand der Technik.....	5
3.1 Begriffsdefinition Industrieroboter.....	5
3.2 Bauarten.....	6
3.3 Kinematische Modellierung	8
3.3.1 Rotationsmatritzen	8
3.3.2 Transformationsmatritzen.....	11
3.3.3 Denavit-Hartenberg Notation.....	11
3.4 Direkte Kinematik	14
3.5 Inverse Kinematik.....	15
3.5.1 Jacobimatrix	17
4 Modellierung des Systems	19
4.1 DH-Parameter des Systems.....	21
4.2 Direkte Kinematik des Systems.....	22
4.3 Inverse Kinematik des Systems	23
4.4 Dynamik des Systems.....	23
5 Optimierung der benötigten Antriebsenergie	29
5.1 Optimierung der Gelenkgeschwindigkeiten	30
5.2 Auswahl einer geeigneten Zielfunktion.....	33
5.2.1 Minimierung der potenziellen Energie	36
5.2.2 Optimierung der kinetischen Energie des Systems.....	40
5.2.3 Minimierung des Einflusses der Gravitationskraft auf die Gelenke	43
6 Zusammenfassung und Ausblick	47
7 Literaturverzeichnis	49

A	Anhang	i
----------	---------------------	----------

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Weltweit betriebene Industrieroboter pro Jahr [IFR23]	1
Abbildung 2: Jährliche Inbetriebnahme von Industrierobotern nach Anwendung [IFR23].....	2
Abbildung 3: Energieverbrauch während eines Zerspanungsprozesses [Uhl16]	3
Abbildung 4: Unterscheidung von Industrierobotern anhand ihrer Kinematik [Pott19]	7
Abbildung 5: Auswirkungen unterschiedlicher Drehreihenfolgen [Sic10]	10
Abbildung 6: Algorithmus zur Berechnung der inversen Kinematik mit der Inversen der Jacobimatrix [Sic10]	16
Abbildung 7: CAD-Modell des MABI-MAX-100 auf der Linearachse	20
Abbildung 8: Positionen der DH-Koordinatensysteme des betrachteten Roboters...	21
Abbildung 9: Darstellung eines Teilkörpers mit allen relevanten Parametern	24
Abbildung 10: Zusammenhang zwischen Gelenkgeschwindigkeiten benachbarter Gelenke	25
Abbildung 11: Berechnungsschema nach Luh, Walker und Paul [Luh80].....	28
Abbildung 12: Algorithmus zur Berechnung der inversen Kinematik unter Berücksichtigung eines Optimierungskriteriums	33
Abbildung 13: Gelenkwinkel für die Endeffektorbahn der unmodifizierten inversen Kinematik.....	34
Abbildung 14: Abweichungen von der Sollpose für die unmodifizierte inverse Kinematik.....	35
Abbildung 15: Figur des Roboters nach der unmodifizierten inversen Kinematik	35
Abbildung 16: Gelenkwinkel für die Endeffektorbahn der nach der potenziellen Energie optimierten inversen Kinematik	37
Abbildung 17: Abweichungen von der Sollpose für die nach der potenziellen Energie optimierten inversen Kinematik	38
Abbildung 18: Potenzielle Energie des Systems verglichen zwischen den Berechnungsmethoden	38

Abbildung 19: Figur des Roboters für die nach der potenziellen Energie optimierten inversen Kinematik.....	39
Abbildung 20: Gelenkwinkel für die Endeffektorbahn der nach der kinetischen Energie optimierten inversen Kinematik	41
Abbildung 21: Abweichungen von der Sollpose für die nach der kinetischen Energie optimierten inversen Kinematik	42
Abbildung 22: Kinetische Energie des Systems verglichen zwischen den Berechnungsmethoden	43
Abbildung 23: Gelenkwinkel für die Endeffektorbahn der nach der Minimierung des Einflusses der Gravitationskraft optimierten inversen Kinematik	45
Abbildung 24: Abweichungen von der Sollpose für die nach der Minimierung des Einflusses der Gravitationskraft optimierten inversen Kinematik	45
Abbildung 25: Einfluss der Gravitationskraft auf das System verglichen zwischen den Berechnungsmethoden.....	46

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Achslimits des betrachteten Systems [MABI24]	20
Tabelle 2: DH-Parameter für die Linearachse mit dem MABI-MAX-100	22

Abkürzungsverzeichnis

CAD	Computer Aided Design
CNC	Computerized Numerical Control
DH	Denavit-Hartenberg
IFAM	Institut für Fertigungstechnik und Angewandte Materialforschung

Symbolverzeichnis

C	[-]	Coriolismatrix
E	[J]	Energie
E_{kin}	[J]	Kinetische Energie
E_{pot}	[J]	Potenzielle Energie
f	[N]	Gelenkkräftevektor
F	[N]	Kraft
g	[m/s ²]	Erdbeschleunigungsvektor
I	[-]	Einheitsmatrix
I_S	[-]	Inertialmatrix des Schwerpunkts
J	[-]	Jacobimatrix
J_P	[-]	Jacobimatrix der Position
J_O	[-]	Jacobimatrix der Orientierung
J^+	[-]	Pseudoinverse Jacobimatrix
k_0	[-]	Skalierungsfaktor
M	[-]	Massenträgheitsmatrix
m	[kg]	Masse
N	[Nm]	Moment
n	[Nm]	Gelenkmomentevektor
Q	[N], [Nm]	Gelenkreaktionsvektor
q	[m], [rad]	Gelenkwinkelvektor
$\dot{q}$	[m/s], [rad/s]	Gelenkgeschwindigkeitsvektor
$\ddot{q}$	[m/s ²], [rad/s ²]	Gelenkbeschleunigungsvektor
$\dot{q}_0$	[m/s], [rad/s]	Virtueller Gelenkgeschwindigkeitsvektor

q_M	[m], [rad]	Maximaler Gelenkwinkel
q_m	[m], [rad]	Minimaler Gelenkwinkel
$\bar{q}$	[m], [rad]	Mittelpunkt des Gelenkwinkels
R	[-]	Rotationsmatrix
R_x	[-]	Rotationsmatrix der X-Achse
R_y	[-]	Rotationsmatrix der Y-Achse
R_z	[-]	Rotationsmatrix der Z-Achse
R_{xyz}	[-]	Kombinierte Rotationsmatrix der XYZ-Konvention
R_{zyx}	[-]	Kombinierte Rotationsmatrix der ZYX-Konvention
r	[m]	Positionsvektor
T	[-]	Transformationsmatrix
T_E^0	[-]	Gesamttransformationsmatrix
v	[m/s]	Geschwindigkeitsvektor
v_e	[m/s]	Endeffektorgeschwindigkeitsvektor
$\dot{v}$	[m/s ²]	Beschleunigungsvektor
$\dot{v}_S$	[m/s ²]	Schwerpunktbeschleunigungsvektor
W	[-]	Gewichtungsmatrix
x	[-]	Pose
x_E^B	[-]	Endeffektorpose im Basiskoordinatensystem
$\dot{x}$	[m/s], [rad/s]	Endeffektorgeschwindigkeitsvektor
γ_e	[N], [Nm]	Endeffektorkräfte und -momentenvektor
ω	[rad/s]	Winkelgeschwindigkeitsvektor
$\dot{\omega}$	[rad/s ²]	Winkelbeschleunigungsvektor

$(\)^T$	Transponierte Matrix
$(\)^{-1}$	Invertierte Matrix
$(\)_B^A$	A: Referenzkoordinatensystem, B: Variablenname

1 Einleitung

Der Einsatz von Industrierobotern ist weltweit in den letzten Jahren kontinuierlich gewachsen, und die Anzahl der betriebenen Roboter steigt von Jahr zu Jahr stärker an, wie in **Abbildung 1** zu erkennen ist. Dabei werden Industrieroboter aufgrund ihrer vielseitigen Einsetzbarkeit in sehr unterschiedlichen Anwendungsbereichen genutzt. Die größten Einsatzgebiete sind Transport, Schweißen und Montage. Hierbei werden in der Lebensmitteltechnik Industrieroboter zu Verpackungszwecken verwendet. In der Automobilindustrie hingegen kommen, insbesondere bei der Karosserieherstellung, viele Schweiß- und Montageroboter zum Einsatz [Pott19].

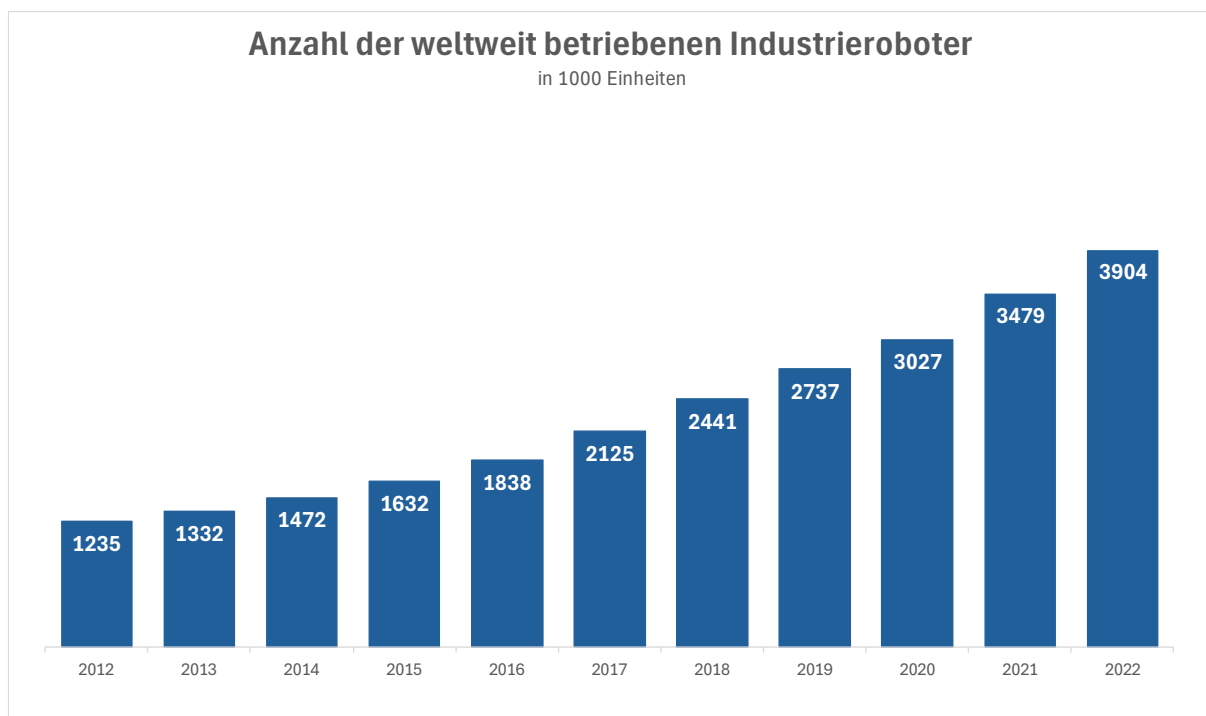


Abbildung 1: Weltweit betriebene Industrieroboter pro Jahr [IFR23]

Aber auch in anderen Bereichen, wie der Prozessindustrie, werden vermehrt Industrieroboter eingesetzt, siehe **Abbildung 2**, da durch andauernde Entwicklung die Präzision und Steifigkeit für diese spezifischen Anwendungsfälle stetig verbessert werden. Außerdem bieten Industrieroboter, im Gegensatz zu herkömmlichen CNC-Bearbeitungsmaschinen, flexiblere und größere Arbeitsräume bei deutlich geringeren Anschaffungskosten. Sie sind zusätzlich leichter zu erweitern und an individuelle Aufgaben anzupassen [Igl15].

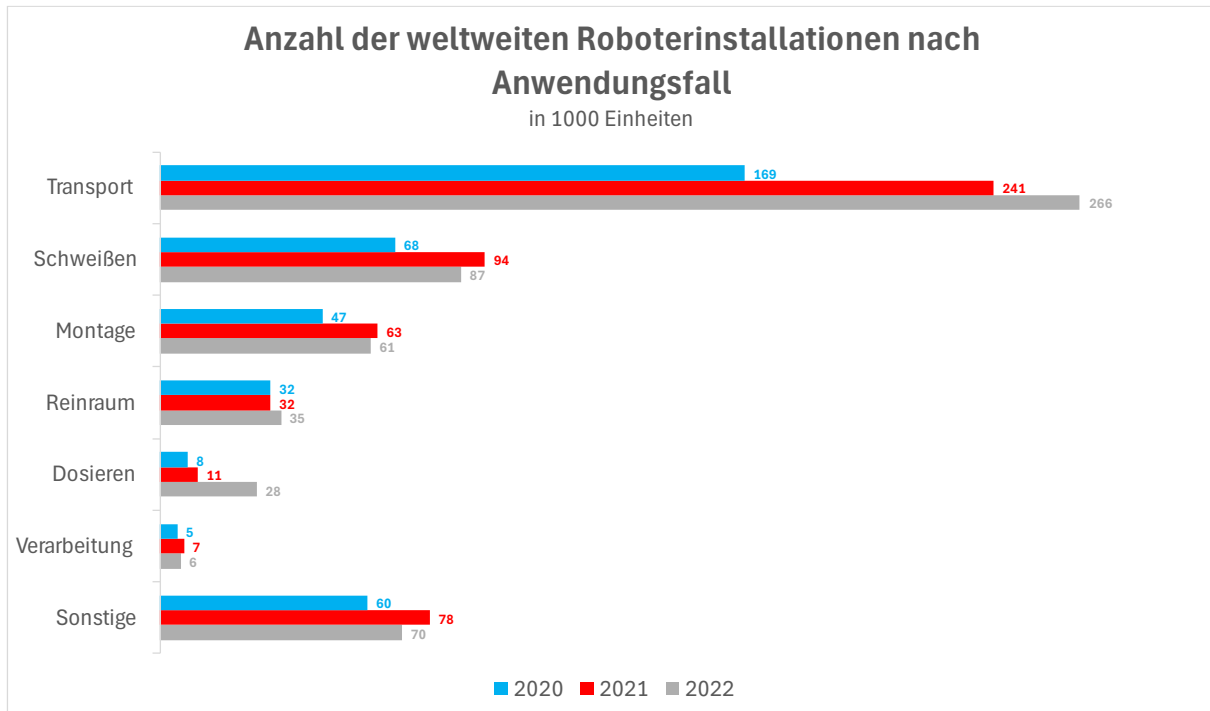


Abbildung 2: Jährliche Inbetriebnahme von Industrierobotern nach Anwendung [IFR23]

Um die bei der Nutzung von Industrierobotern anfallenden Kosten zu verringern, kann der Energieverbrauch als möglicher Ansatzpunkt betrachtet werden. Bei der zerspanenden Verarbeitung mit einem Industrieroboter entfallen etwa 38% der durch den Roboter verbrauchten Energie auf die Kontrolleinheit und die Achsmotoren, siehe **Abbildung 3**. An dieser Stelle kann angesetzt werden, um den Energieverbrauch zu reduzieren. Insbesondere Roboter die mehr Achsen als Freiheitsgraden im Raum besitzen, können aufgrund ihrer Redundanz nach verschiedenen Kriterien optimiert werden [Uhl16].

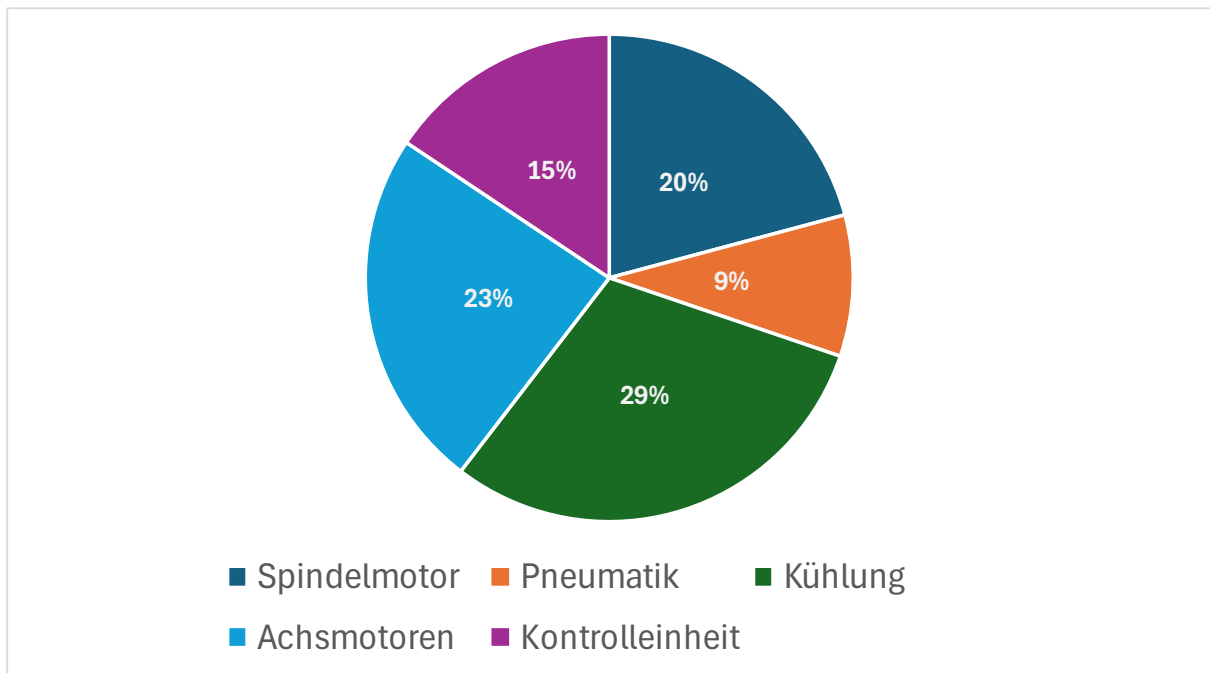


Abbildung 3: Energieverbrauch während eines Zerspanungsprozesses [Uhl16]

2 Aufgabenstellung und Ziel der Arbeit

Das Fraunhofer Institut für Fertigungstechnik und Angewandte Materialforschung (Fraunhofer IFAM) befasst sich unter anderem mit den Themengebieten Automatisierung und Robotik. Insbesondere die nachhaltige Nutzung von Industrierobotern ist unter dem Gesichtspunkt der Reduzierung des CO²-Fußabdrucks in der Fertigung von Großbauteilen ein wichtiges Forschungsgebiet.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, für einen redundanten Industrieroboter ein Verfahren zu entwickeln, welches es erlaubt für eine gegebene Trajektorie des Endeffektors eine energieoptimierte Bewegung der individuellen Gelenke zu berechnen, um zu bestimmen, wie viel Energie dadurch eingespart werden kann.

Als Erstes wird in Kapitel drei ein Überblick über den aktuellen Stand der Technik bezüglich Industrierobotern und deren Bauarten gegeben, sowie grundlegend erläutert, wie ein Industrieroboter mathematisch beschrieben werden kann. Außerdem wird der Zusammenhang zwischen den Endeffektorkoordinaten und den Gelenkwinkeln mit Hilfe der direkten und inversen Kinematik aufgezeigt.

Kapitel vier beschreibt die Aufstellung und Berechnung der zuvor vorgestellten Parameter für einen redundanten 7-Achsen Industrieroboter, der in dieser Arbeit als Beispielroboter genutzt wird. Zusätzlich werden für diesen Roboter die Bewegungsgleichungen der Dynamik aufgestellt, um für die weitere Arbeit nötige Grundlagen wie die Massenträgheitsmatrix oder die resultierende Gewichtskraft herzuleiten.

In Kapitel fünf werden Modifikationen der inversen Kinematik vorgestellt, welche dazu dienen, die Gelenkvariablen des Roboters unter Berücksichtigung verschiedener Optimierungsmethoden zu berechnen. Für jeden der vorgestellten Ansätze wird zusätzlich ein Vergleich des optimierten Aspekts im Vergleich zur unmodifizierten Variante gezeigt.

Im letzten Kapitel wird der Inhalt dieser Arbeit zusammengefasst und ein Ausblick auf mögliche weiterführende Bearbeitungen der behandelten Thematik gegeben.

3 Stand der Technik

3.1 Begriffsdefinition Industrieroboter

Ein Industrieroboter ist definiert als ein programmierbarer Manipulator mit drei oder mehr Achsen, welcher entweder fest oder auf einer mobilen Plattform montiert ist. Ein Manipulator ist in diesem Kontext ein Gerät, welches die physikalische Interaktion mit der Umgebung ermöglicht. Des Weiteren bedeutet Programmierbarkeit in diesem Zusammenhang, dass die Bewegung des Roboters durch gezieltes Ansteuern der verbauten Aktuatoren erfolgt [ISO8273].

Jeder Industrieroboter besitzt einen festen Arbeitsraum, welcher beschreibt, wie weit der Endeffektor des Roboters sich bewegen kann. Damit beschrieben werden kann, wo im Arbeitsraum sich der Endeffektor befindet, wird die Pose benötigt. Die Pose beschreibt die Position und Orientierung eines Koordinatensystems gegenüber eines Referenzkoordinatensystems, wie zum Beispiel dem Basis- oder Weltkoordinatensystems. Die Position wird mit drei kartesischen Koordinaten beschrieben, welche die Verschiebung in Relation zum Referenzkoordinatensystem angeben. Die Orientierung beinhaltet üblicherweise drei Winkel, die die Verdrehung des betrachteten Koordinatensystems in Relation zum Referenzkoordinatensystem beschreiben. Da diese Winkel an sich nicht eindeutig sind, ist es üblich noch eine Konvention anzugeben, in welcher Reihenfolge und um welche Achsen diese Drehungen erfolgen.

$$x_E^B = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ A \\ B \\ C \end{bmatrix}_{zxy} \quad (3.1)$$

Diese Pose x gibt an, wie Koordinatensystem E in Relation zu Koordinatensystem B positioniert und ausgerichtet ist. Es erfolgen Verschiebungen um X, Y und Z entlang der jeweiligen Achsen. Bei den Verdrehungen um die Winkel A, B und C, muss darauf

geachtet werden, dass sich mit jeder Drehung die Achsen für die folgenden Drehungen verändern. Die Einhaltung der korrekten Reihenfolge, hier zuerst eine Drehung um die Z- Achse, danach eine Drehung um die resultierende Y-Achse und als letztes eine Drehung um die wiederum daraus resultierende X-Achse, ist also essenziell.

Die Winkel der Drehgelenke und Verschiebungen der Schubgelenke werden Maschinenkoordinaten genannt.

3.2 Bauarten

Industrieroboter werden nach ihrer Bauweise in Roboter mit serieller Kinematik und Roboter mit paralleler Kinematik unterteilt. Bei seriellkinematischen Robotern bilden die einzelnen Roboterachsen eine kontinuierliche kinematische Kette, welche im Endeffektor endet. Beispiele für serielle Roboter sind Knickarmroboter, SCARA-Roboter oder Portalroboter wie industrielle Hallenkräne oder 3D-Drucker.

Bei parallelkinematischen Robotern arbeiten mehrere Achsen parallel, um ein Glied in der kinematischen Kette des Roboters zu bilden.

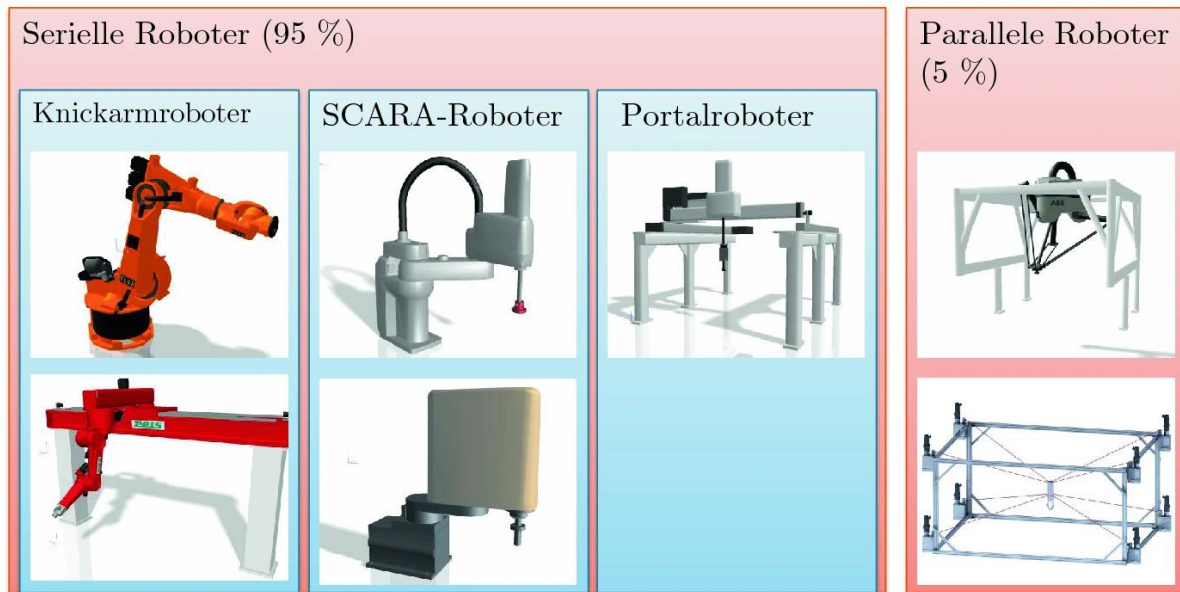


Abbildung 4: Unterscheidung von Industrierobotern anhand ihrer Kinematik [Pott19]

Jede Bauart bietet dabei Vor- und Nachteile in Bezug auf Arbeitsraum, Steifigkeit, Positions- und Wiederholgenauigkeit sowie Geschwindigkeit. Die Auswahl eines geeigneten Roboters hängt daher immer vom spezifischen Anwendungsfall ab.

Der in dieser Arbeit verwendete Roboter ist ein serieller Knickarmroboter vom Typ MABI-MAX-100-2.25-P, welcher auf einer zusätzlichen Linearachse montiert ist.

Serielle Industrieroboter lassen sich zusätzlich darin unterscheiden, wie viele Achsen sie besitzen und wie viele Freiheitsgrade dem Endeffektor zur Verfügung stehen. Wenn die Anzahl der Freiheitsgrade im Raum größer ist als die dem Roboter zur Verfügung stehenden Achsen, handelt es sich um einen unterbestimmten Roboter.

Ein unterbestimmter Roboter kann nicht jeden Punkt innerhalb seines Arbeitsraums, in jeder beliebigen Orientierung, mit dem Endeffektor erreichen.

Wenn ein Roboter mehr Achsen besitzt als Freiheitsgrade, wird der Roboter überbestimmt genannt. Ein überbestimmter Roboter kann jeden Punkt innerhalb seines Arbeitsraums, in beliebiger Orientierung des Endeffektors, in unendlich vielen verschiedenen Ausrichtungen erreichen.

Da der verwendete Roboter über insgesamt sieben Achsen verfügt und alle sechs räumlichen Freiheitsgrade abdeckt, ist dieser überbestimmt. Daraus resultiert die Möglichkeit, jede Pose des Roboters mit unterschiedliche Maschinenkoordinaten zu

erreichen. Dies ermöglicht es, durch die Auswahl von Maschinenkoordinaten, welche weniger Last auf die einzelnen Robotergelenke verursachen, eine Energieoptimierung der Nutzung des Roboters vorzunehmen.

3.3 Kinematische Modellierung

Um zu quantifizieren, welche Roboterposen eines redundanten Industrieroboters weniger Energie nutzen, ist es nötig, den betrachteten Roboter mathematisch zu beschreiben. Diese mathematische Beschreibung ist erforderlich, um bei der Bahnplanung die benötigte Energie berechnen zu können und die Trajektorie unter dem Gesichtspunkt der Energieoptimierung anzupassen.

3.3.1 Rotationsmatritzen

Eine Rotationsmatrix beschreibt im Kontext der Robotik die Orientierung eines Koordinatensystems in Relation zu einem Referenzkoordinatensystem. Jede Spalte der Matrix stellt dar, wie eine der Achsen des Zielkoordinatensystems als Einheitsvektor im Referenzkoordinatensystem orientiert ist. Außerdem beschreibt jede Zeile der Rotationsmatrix, ausgehend vom Zielkoordinatensystem betrachtet, eine Achse des Referenzkoordinatensystems. Die transponierte Rotationsmatrix beschreibt die Rücktransformation vom Zielkoordinatensystem in das Referenzkoordinatensystem.

$$x = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 90^\circ \\ 90^\circ \\ 0 \end{bmatrix}_{xyz} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$R * R^T = I \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Im dreidimensionalen Koordinatenraum gibt es sogenannte Elementardrehungen, die eine Verdrehung um genau eine Koordinatenachse beschreiben. Für jede dieser Elementardrehungen existiert eine Rotationsmatrix, welche nur von dem gewählten Drehwinkel um die Achse abhängig ist:

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$R_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Diese Elementarrotationsmatritzen lassen sich, je nach gewählter Konvention, zu einer vorgefertigten Gesamtrrotationsmatrix kombinieren. Die Konvention beschreibt hierbei, in welcher Reihenfolge die Rotationen um die einzelnen Achsen erfolgen, da unterschiedliche Kombinationen zu unterschiedlichen Ergebnissen führen.

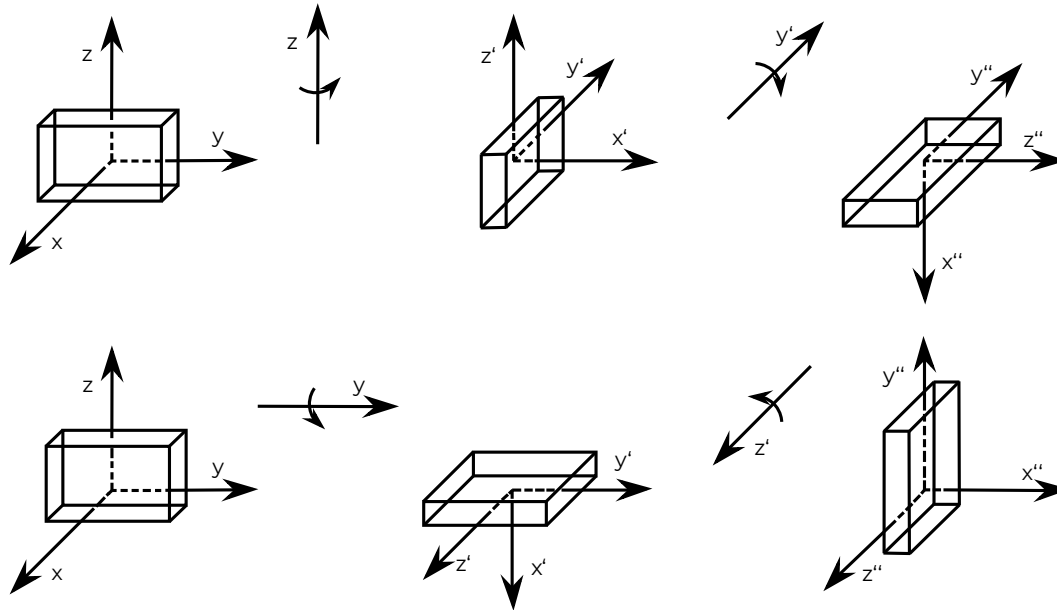


Abbildung 5: Auswirkungen unterschiedlicher Drehreihenfolgen [Sic10]

Zwei häufig verwendete Konventionen sind XYZ sowie ZYX, wobei **s** eine Abkürzung für Sinus und **c** eine Abkürzung für Cosinus ist:

$$R_{xyz}(\alpha, \beta, \gamma) = R_x(\alpha) R_y(\beta) R_z(\gamma)$$

$$R_{xyz}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c_\beta c_\gamma & -c_\beta s_\gamma & s_\beta \\ c_\alpha s_\gamma + c_\gamma s_\beta s_\alpha & c_\alpha c_\gamma - s_\alpha s_\beta s_\gamma & -c_\beta s_\alpha \\ s_\alpha s_\gamma - c_\alpha c_\gamma s_\beta & c_\gamma s_\alpha + c_\alpha s_\beta s_\gamma & c_\alpha c_\beta \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$R_{zyx}(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_x(\gamma)$$

$$R_{zyx}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta & c_\alpha s_\beta s_\gamma - c_\gamma s_\alpha & s_\alpha s_\gamma + c_\alpha c_\gamma s_\beta \\ c_\beta s_\alpha & c_\alpha c_\gamma + s_\alpha s_\beta s_\gamma & c_\gamma s_\beta s_\alpha - c_\alpha s_\gamma \\ -s_\beta & c_\beta s_\gamma & c_\beta c_\gamma \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

3.3.2 Transformationsmatritzen

Da die Koordinatensysteme, die zur Beschreibung eines Industrieroboters genutzt werden, sich nicht nur anhand ihrer Orientierung unterscheiden, sind die zuvor beschriebenen Rotationsmatritzen Teil einer größeren Matrix, der sogenannten Transformationsmatrix. Diese beinhaltet zum einen eine Rotationsmatrix R und einen Vektor r , welcher die translatorische Verschiebung beschreibt:

$$T = \begin{bmatrix} R & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Für die Beschreibung eines seriellen Industrieroboters wird für jede Achse eine Transformationsmatrix benötigt. Um die Position des Endeffektors in Relation zum Fuß des Roboters zu erhalten, werden die Transformationsmatritzen aller Achsen miteinander multipliziert, um eine Gesamttransformationsmatrix zu erhalten, welche die Pose des Endeffektors in Abhängigkeit aller Gelenkwinkel angibt.

Aus der Gesamttransformationsmatrix können anschließend die direkte Kinematik sowie die Jacobimatrix für den Roboter aufgestellt werden.

3.3.3 Denavit-Hartenberg Notation

Um die direkte Kinematik eines seriellen Roboters darzustellen, veröffentlichten J. Denavit und R. Hartenberg 1955 einen Artikel, welcher die Beschreibung einer seriellen Kinematik durch vier Parameter ermöglicht. Diese Notation und die modifizierte Variante sind in der Robotik weit verbreitet und für den Großteil aller Industrieroboter sind Tabellen mit DH-Parametern vorhanden [DH55].

In dieser Arbeit wird ausschließlich die ursprüngliche DH-Notation verwendet.

Jede Achse eines seriellen Industrieroboters bekommt in der DH-Notation ein eigenes Koordinatensystem sowie vier Parameter, welche die Transformation zwischen dem Koordinatensystem der Achse und dem der vorherigen Achse beschreiben.

Jeder der vier DH-Parameter beschreibt eine Elementartransformation und kann allgemein mit einer Transformationsmatrix ausgedrückt werden:

Der Winkel ϑ_i beschreibt eine Drehung um die z_{i-1} -Achse, welcher im Fall eines Drehgelenks auch den eingestellten Motorwinkel beinhaltet.

$$\mathbf{T}_{z_{i-1}}(\vartheta_i) = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_i) & -\sin(\vartheta_i) & 0 & 0 \\ \sin(\vartheta_i) & \cos(\vartheta_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Die Länge d_i beschreibt eine Verschiebung entlang der z_{i-1} -Achse, welche im Fall eines Schubgelenks die Auslenkung der Achse beinhaltet.

$$\mathbf{T}_{z_{i-1}}(d_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Der Winkel α_i beschreibt eine Drehung um die x_i -Achse und gibt nur die Ausrichtung der Achsen zueinander an.

$$\mathbf{T}_{x_i}(\alpha_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Die Länge a_i beschreibt eine Verschiebung entlang der x_i -Achse und gibt die Länge der Normalen zwischen den Achsen an.

$$\mathbf{T}_{x_i}(a_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Diese vier Transformationsmatrizen werden durch Multiplikation zu einer Matrix zusammengefasst, welche die Koordinatentransformation von Achse {i} zu Achse {i-1} beschreibt:

$$\begin{aligned}
 T_i^{i-1} &= T_{z_{i-1}}(\vartheta_i) * T_{z_{i-1}}(d_i) * T_{x_i}(\alpha_i) * T_{x_i}(a_i) \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_i) & -\sin(\vartheta_i) \cos(\alpha_i) & \sin(\vartheta_i) \sin(\alpha_i) & a_i \cos(\vartheta_i) \\ \sin(\vartheta_i) & \cos(\vartheta_i) \cos(\alpha_i) & -\cos(\vartheta_i) \sin(\alpha_i) & a_i \sin(\vartheta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

Die Wahl der Achskoordinatensysteme folgt ebenfalls einem Satz aus Konventionen:

- Die Z-Achse des DH-Koordinatensystems liegt im Fall eines Drehgelenks auf der Drehachse und im Fall eines Schubgelenks parallel zum Schubweg.
- Die Richtung der Z-Achse ist nicht vorgeschrieben, wird aber meist in positiver Dreh- / Schubrichtung gewählt.
- Liegen zwei aufeinander folgende Achsen kollinear zueinander, ist die X-Achse frei wählbar.
- Die X-Achse liegt auf der Normalen der Z-Achse und der Z-Achse des vorherigen Koordinatensystems.
- Da das Koordinatensystem der ersten Achse keinen Vorgänger hat, darf die X-Achse hier frei gewählt werden.
- Die Richtung der X-Achse ist ebenfalls nicht vorgegeben, zeigt aber meist in Richtung des nächsten Gelenks.
- Liegen zwei Achsen parallel zueinander, kann die Lage frei gewählt werden, in diesem Fall ist der Parameter d_i nicht eindeutig.
- Das letzte Koordinatensystem hat keinen Nachfolger, weshalb keine Normale zur Bestimmung der X-Achse gebildet werden kann. Diese ist dann frei wählbar, wenn das resultierende Koordinatensystem durch eine, mit den DH-Parametern beschreibbare Koordinatentransformation erreichbar ist.
- Die Y-Achse resultiert immer aus dem Rechtssystem des Koordinatensystems.

3.4 Direkte Kinematik

Die direkte Kinematik beschreibt die Roboterpose in Abhängigkeit der Gelenkwinkel.

$$x = f(q) \quad (3.15)$$

Sie wird entweder direkt aus der Robotergeometrie aufgestellt oder aus der Gesamttransformationsmatrix der DH-Notation entnommen.

Da die DH-Parameter für das betrachtete System bereits bekannt sind, wird die direkte Kinematik aus diesen entnommen.

$$T_E^0 = \begin{bmatrix} R_E^0 & r_E^0 \\ [0 & 0 & 0] & 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Je nach Roboter besitzt die direkte Kinematik bis zu sechs Einträge, abhängig von der Anzahl der Freiheitsgrade, welche benötigt werden, um die Pose des Endeffektors vollständig zu beschreiben. Ausgehend davon, dass ein Roboter sechs Freiheitsgrade besitzt, lässt sich die direkte Kinematik folgendermaßen aus einer Transformationsmatrix entnehmen:

$$x = \begin{pmatrix} r_E^0 \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

r_E^0 ist ein (3×1) Vektor und beschreibt den translatorischen Anteil der Endeffektorpose in Abhängigkeit der Gelenkwinkel.

Die Winkel α , β und γ beschreiben den rotatorischen Anteil der Endeffektorpose und sind mithilfe der in **(3.18)** beschriebenen Gleichungen aus der Rotationsmatrix R_E^0 zu berechnen. Dabei ist zu beachten, dass je nach gewünschter Winkelkonvention andere Werte in die Funktion einzusetzen sind.

Für die x-y-z Konvention werden folgende Gleichungen verwendet:

$$\begin{aligned}\alpha &= \arctan2(-R_{23}, R_{33}) \\ \beta &= \arctan2\left(R_{13}, \sqrt{(R_{23})^2 + (R_{33})^2}\right) \\ \gamma &= (-R_{12}, R_{11})\end{aligned}\tag{3.18}$$

3.5 Inverse Kinematik

Die Inverse Kinematik ist das Gegenstück zur direkten Kinematik und beschreibt die Gelenkwinkel des Roboters in Abhängigkeit der Roboterpose.

$$q = f^{-1}(x)\tag{3.19}$$

Im Gegensatz zur direkten Kinematik ist die inverse Kinematik nicht eindeutig. Es wird zwischen vier Lösungsfällen unterschieden:

- Die gegebene Pose x befindet sich außerhalb des Arbeitsraumes des Roboters.
- Für die Pose x gibt es genau eine Lösung, entweder weil diese am Rand des Arbeitsraumes liegt oder der Roboter eingeschränkt ist.
- Der Roboter kann die Pose x in mehreren Kombinationen der Gelenkwinkel q erreichen. Diese Kombinationen werden Konfigurationen oder Figuren genannt.
- Es gibt unendlich viele Lösungen, die die Pose x erfüllen. In diesem Fall ist der Roboter entweder redundant ausgelegt, mindestens zwei Drehachsen fluchten oder mindestens zwei Schubachsen sind parallel zueinander angeordnet.

Eine Möglichkeit, die inverse Kinematik zu erhalten, ist die Nutzung eines Algorithmus, welcher mithilfe der inversen oder pseudoinversen Jacobimatrix aus der Roboterpose einen Satz Gelenkkoordinaten berechnet. Dieser Koordinatensatz erfüllt die gewünschte Pose unter Berücksichtigung der vorherigen Pose sowie der Geschwindigkeit des Endeffektors. Der Ablauf dieses Algorithmus ist in **Abbildung 6** abgebildet:

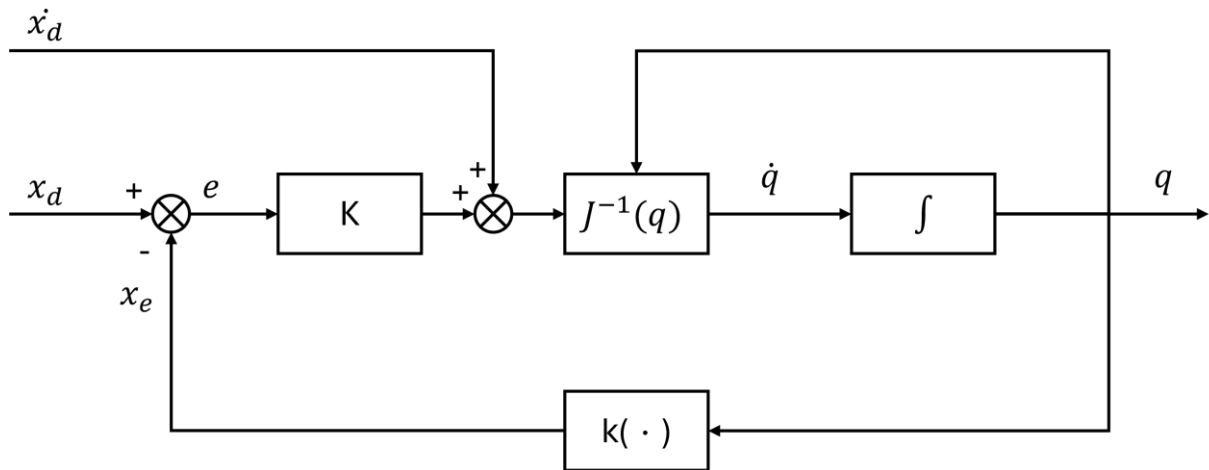


Abbildung 6: Algorithmus zur Berechnung der inversen Kinematik mit der Inversen der Jacobimatrix [Sic10]

Für die Zielpose beziehungsweise die Zielgeschwindigkeiten des Endeffektors x_d und $\dot{x}_d$, werden die dazugehörigen Gelenkkoordinaten q gesucht. Die Ausgangspose des Endeffektors x_e ergibt, zusammen mit der Zielpose die Abweichung. Die Matrix K ist eine Diagonalmatrix und enthält Skalierungsfaktoren, die auf die Komponenten der Abweichung e angewendet werden. Da die Abweichung e eine Positions Differenz darstellt, wird zu dieser im nächsten Schritt die gewünschten Zielgeschwindigkeit $\dot{x}_d$ addiert. Der daraus resultierende Vektor gibt die Endeffektorgeschwindigkeit an, welche mithilfe der Inversen der Jacobimatrix $J^{-1}(q)$ zu einem Satz Gelenkgeschwindigkeiten $\dot{q}$ verrechnet wird. Diese Gelenkgeschwindigkeiten werden anschließend integriert, um die Gelenkwinkel zu erhalten. Nach der Berechnung werden diese Gelenkwinkel für den nächsten Iterationsschritt in die inverse Jacobimatrix eingesetzt, sowie mit Hilfe der direkten Kinematik $k(\cdot)$ in die Endeffektorpose x_e umgerechnet.

Die Abbruchbedingung dieses Algorithmus ist entweder eine festgesetzte Maximalanzahl an Iterationen oder ein Schwellwert, unter den alle Komponenten der Abweichung e fallen müssen.

3.5.1 Jacobimatrix

Die Jacobimatrix $\mathbf{J}$ beschreibt den Zusammenhang zwischen den Gelenkgeschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}$ eines Roboters und den translatorischen und rotatorischen Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{x}}$ seines Endeffektors:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{J}(\mathbf{q}(t)) \dot{\mathbf{q}}(t) \quad (3.20)$$

Die Matrix hat dabei die Form $(m \times n)$, wobei m die Anzahl der Freiheitsgrade im Raum und n die Anzahl der Robotergelenke angibt. Zusätzlich wird die Jacobimatrix dazu genutzt, um zu berechnen, wie eine Last am Endeffektor sich auf die benötigten Antriebsgrößen auswirkt.

Um die Jacobimatrix für einen Roboter aufzustellen, gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten:

- Die analytische Herleitung der Matrix durch Ableiten der Funktion der direkten Kinematik in Bezug auf die Gelenkvariablen. Da dabei nach jeder Gelenkvariable separat abgeleitet werden muss, entsteht eine Jacobimatrix. Jede Spalte dieser Matrix beschreibt die Ableitung der direkten Kinematik nach einer bestimmten Gelenkvariable.
- Die Herleitung über die geometrischen Eigenschaften des Roboters, auf welche im Folgenden näher eingegangen wird.

Für die geometrische Herleitung werden die Orientierungen sowie Position jedes Gelenkkoordinatensystems, in Bezug auf das Weltkoordinatensystem, benötigt. Diese Informationen lassen sich aus den Transformationsmatrizen der DH-Notation

extrahieren. Es wird in jeder Spalte der Jacobimatrix genau ein Robotergetränk betrachtet, wobei die Art des betrachteten Gelenks ebenfalls von Relevanz ist:

- Für ein Schubgelenk lautet die Spalte:

$$\begin{bmatrix} J_{Pi} \\ J_{Oi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ 0_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

- Für ein Drehgelenk lautet die Spalte:

$$\begin{bmatrix} J_{Pi} \\ J_{Oi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{i-1} \times (r_e - r_{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

- z_{i-1} ist die dritte Spalte der Rotationsmatrix, die die Rotation vom Basiskoordinatensystem bis zum Koordinatensystem $i - 1$ beschreibt.
- $0_{3 \times 1}$ ist ein (3×1) Nullvektor.
- r_e ist der Vektor aus der Gesamttransformationsmatrix, der die translatorische Verschiebung beschreibt (die ersten drei Werte der vierten Spalte der Transformationsmatrix).
- r_{i-1} ist der Verschiebungsvektor der Transformationsmatrix, die die Transformation vom Basiskoordinatensystem bis zum Koordinatensystem $i - 1$ beschreibt [Sic10] .

Die Jacobimatrix bietet außerdem die Möglichkeit, über ihre Determinante Singularitäten des Roboters zu bestimmen. Eine Singularität beschreibt dabei eine Roboterpose, in der der Endeffektor mindestens einen Freiheitsgrad verliert. Unterschieden wird dabei zwischen äußeren Singularitäten, welche am Rand des Arbeitsbereichs auftreten, und inneren Singularitäten, bei denen der Roboter sich selbst blockiert oder einschränkt. Eine innere Singularität kann zum Beispiel dann auftreten, wenn der Roboter sich intern ohne Bewegung des Endeffektors, umpositionieren muss.

4 Modellierung des Systems

Um den Energieverbrauch des verwendeten Industrieroboters berechnen und optimieren zu können, wird ein Modell des Systems benötigt. Dieses Modell wird zusätzlich dazu genutzt, eine Simulation des Industrieroboters zu erstellen, die dazu verwendet wird zu quantifizieren wie viel Energie im Betrieb des Roboters eingespart werden kann.

Der in dieser Arbeit verwendete Industrieroboter vom Typ MABI-MAX-100-2.25-P ist ein Sechs-Achsen-Knickarmroboter mit einer zugelassenen Traglast von 100 kg am Endeffektor. Dieser Roboter ist auf einer Linearachse montiert, welche den verfügbaren Arbeitsraum deutlich erhöht und zusätzlich eine siebte Achse stellt, siehe **Abbildung 7**. Dadurch stehen für sechs Freiheitsgrade im Raum insgesamt sieben verfahrbare Achsen zur Verfügung, demnach ist das Gesamtsystem überbestimmt. Überbestimmtheit bedeutet im Kontext der Robotik, dass es für jede Pose des Endeffektors mehrere Figuren des Roboters gibt, die diese erfüllen. Damit kann durch eine Betrachtung des Energieverbrauchs dieser Posen und die gezielte Auswahl von weniger energieaufwendiger Posen der Energieverbrauch des Roboters reduziert werden. Es muss dabei allerdings darauf geachtet werden, dass für zusammenhängende Bewegungen des Endeffektors die einzelnen Roboterposen keine sprunghaften Änderungen enthalten.

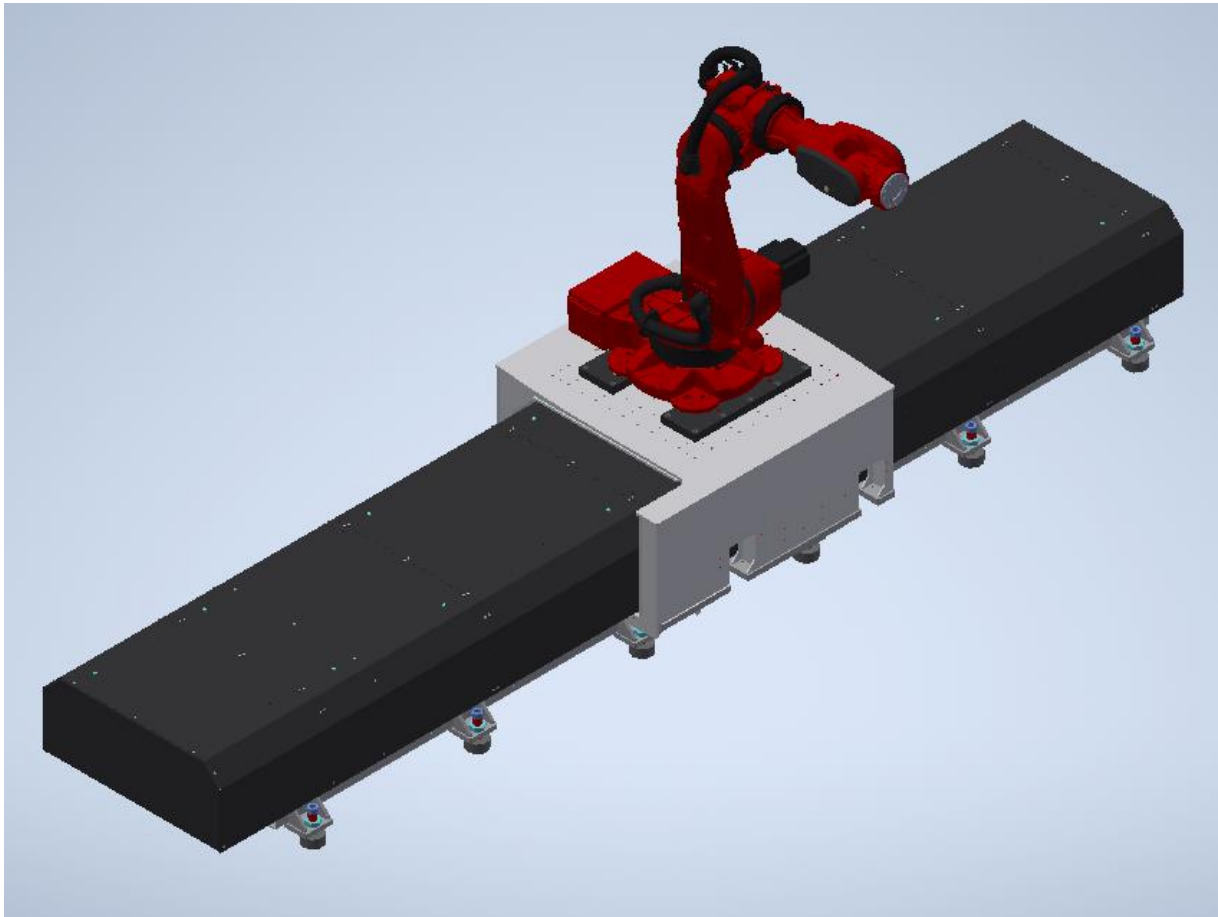


Abbildung 7: CAD-Modell des MABI-MAX-100 auf der Linearachse

Herstellerangaben zu maximalen und minimalen Achswinkel sind in **Tabelle 1** zu finden.

Tabelle 1: Achslimits des betrachteten Systems [MABI24]

Achsbezeichnung	Minimum	Maximum
Linearachse	0 m	4,3 m
MABI-MAX-100 Achse 1	- 181°	+ 181°
MABI-MAX-100 Achse 2	-73°	+ 138°
MABI-MAX-100 Achse 3	-178°	+ 73°
MABI-MAX-100 Achse 4	- 300°	+ 300°
MABI-MAX-100 Achse 5	- 95°	+ 95°
MABI-MAX-100 Achse 6	- 181°	+ 181°

4.1 DH-Parameter des Systems

Um die DH-Parameter des Roboters aufzustellen, ist es zuerst erforderlich, für jede Roboterachse das dazugehörige DH-Koordinatensystem aufzustellen. Da für diese Arbeit die ursprüngliche DH-Notation genutzt wird, folgt daraus, dass für die Achse i das Koordinatensystem $i - 1$ ausschlaggebend ist. Die Koordinatensysteme wurden darüber hinaus so gewählt, dass sie Rechtssystemen entsprechen und die Z-Achse immer in positiver Richtung ausgerichtet ist (für die Drehgelenke gilt in diesem Fall eine die positive Drehrichtung der Gelenke entspricht einer Drehung im Uhrzeigersinn um die Z-Achse des jeweiligen Koordinatensystems). Damit ergeben sich folgende Positionen für die DH-Koordinatensysteme, siehe **Abbildung 8**.

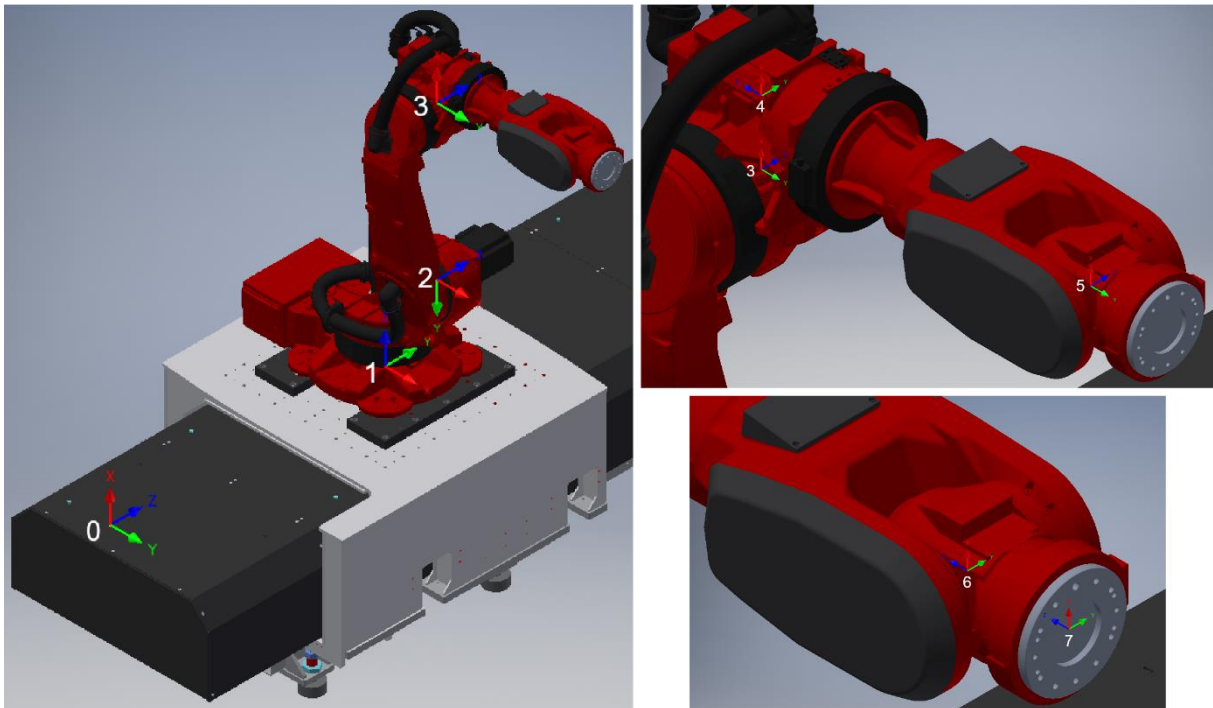


Abbildung 8: Positionen der DH-Koordinatensysteme des betrachteten Roboters

Um die Auslenkung der einzelnen Achsen zu beschreiben, werden die Gelenkvariablen Q_1 bis Q_7 gewählt. Die letzten benötigten Werte zur Aufstellung der DH-Notation sind die Längen zwischen den Gelenken sowie die Verdrehungen zwischen den Orientierungen der Koordinatensysteme. Diese werden aus den CAD-

Daten des Roboters entnommen. Mit all diesen Parametern lässt sich nun die DH-Tabelle für den Roboter aufstellen:

Tabelle 2: DH-Parameter für die Linearachse mit dem MABI-MAX-100

i	θ	d	α	a
1	90°	Q1	0mm	90°
2	Q2	660,5mm	340mm	-90°
3	Q3 – 90°	0mm	1000mm	0°
4	Q4	0mm	175mm	90°
5	Q5	-905,5mm	0mm	-90°
6	Q6	0mm	0mm	90°
7	Q7	-198,5mm	0mm	0°

4.2 Direkte Kinematik des Systems

Anschließend wird für jede Zeile der Tabelle (jede Koordinatentransformation) mit Gleichung (3.14) eine Transformationsmatrix gebildet. Jede dieser Transformationsmatritzen beschreibt eine Achse des Roboters und berücksichtigt dabei zusätzlich die Auslenkung der vorhergehenden Roboterachse. Durch die Multiplikation aller auf diesem Weg erstellten Transformationsmatritzen ergibt sich eine Gesamttransformationsmatrix, welche (unter Berücksichtigung aller Gelenkkoordinaten des Roboters) die Position und die Orientierung des Endeffektors in Bezug auf den Roboterursprung im Ursprungskoordinatensystem angibt.

Um aus dieser Gesamttransformationsmatrix die direkte Kinematik des Systems zu entnehmen, werden Gleichung (3.17) und (3.18) benötigt. Da die Gesamttransformationsmatrix aufgrund der hohen Komplexität des Roboters sehr umfangreich und schlecht darzustellen ist, ist diese im **Anhang** zu finden.

4.3 Inverse Kinematik des Systems

Die inverse Kinematik des Systems wird, wie in **Abbildung 6** gezeigt, mit einem iterativen Algorithmus aufgestellt. Da die Berechnung die Gelenkkoordinaten der vorhergegangenen Roboterpose beinhaltet, wird an dieser Stelle, aufgrund ihrer Komplexität, auf eine allgemeine Aufstellung der Gleichungen verzichtet. Die dafür benötigte Jacobimatrix wird aus dem gleichen Grund nicht in allgemeiner Form aufgestellt.

4.4 Dynamik des Systems

Die Dynamik eines Roboters beschreibt den Zusammenhang zwischen den in den Gelenken wirkenden Kräften und Momenten sowie Kräften, welche durch die Erdbeschleunigung, Coriolisbeschleunigung und Trägheitsbeschleunigung entstehen. Durch die Vorgabe einer Trajektorie des Endeffektors mit Angaben zu den Gelenkvariablen in jedem Zeitschritt, kann mit den Bewegungsgleichungen das in jedem Gelenk benötigte Moment bestimmt werden. Die allgemeine Form der Bewegungsgleichung lautet:

$$\begin{aligned} M\ddot{q} + C(\dot{q}, q) + g(q) &= Q \text{ bzw.} \\ \ddot{q} &= M^{-1}(Q - C(\dot{q}, q) - g(q)) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen gibt es in der Mechanik zwei generelle Berechnungsmethoden:

- Die Newton-Euler Methode, bei der ein komplexes System in Teilkörper zerlegt wird. Für jeden der Teilkörper wird über das Prinzip des Kräfte- und Momentengleichgewichts die Bewegung beschrieben.

- Die Methode nach Lagrange nutzt die Langrangeschen Gleichungen zweiter Art, um die gesamten potenziellen und kinetischen Energien des Systems zu beschreiben, um so die Bewegungsgleichung herzuleiten.

Für das betrachtete System wird für die Aufstellung der Bewegungsgleichung die Newton-Euler Methode gewählt. Die dafür benötigten Massen und Trägheiten der Teilkörper werden aus vorhandenen CAD-Daten entnommen.

Das Vorgehen nach der Newton-Euler Methode sieht vor, dass jede Achse eines Roboters separat als starrer Körper betrachtet wird. Die Massen und Volumen der Körper werden als bekannt angenommen und damit auch die Lage des jeweiligen Schwerpunktes und die Trägheiten des Körpers bezüglich dieses Schwerpunktes.

Die allgemeinen Gleichungen nach Newton und Euler lauten:

$$\begin{aligned} F &= m\dot{v}_S \\ N &= I_S\dot{\omega} + \omega \times I_S\omega \end{aligned} \quad (4.2)$$

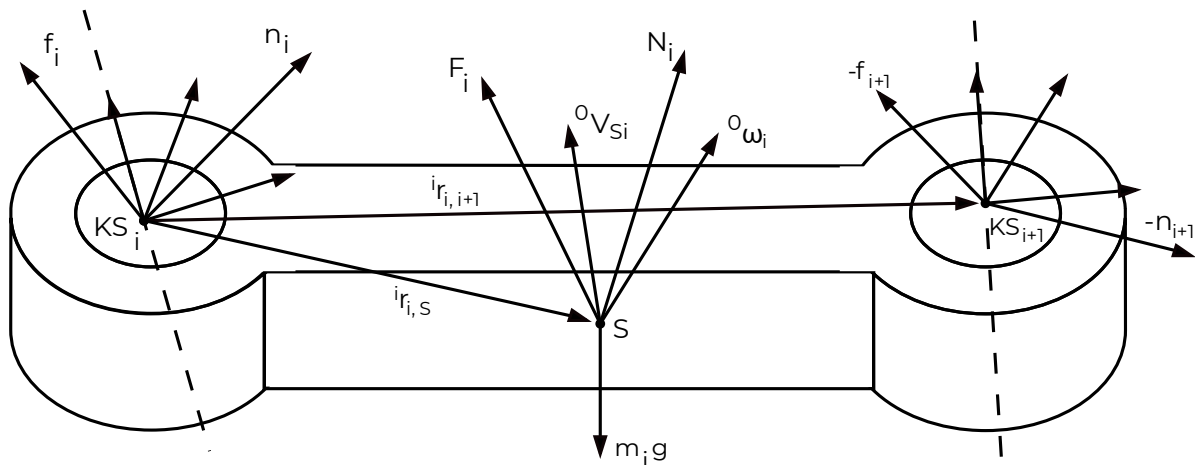


Abbildung 9: Darstellung eines Teilkörpers mit allen relevanten Parametern

Um die Gleichungen (4.2) auf einen Körper wie in **Abbildung 9** anzuwenden, müssen zuerst einige Parameter bestimmt werden. Begonnen wird mit den Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der einzelnen Gelenke. Dabei ist darauf zu achten, dass je nach Gelenkart unterschiedliche Gleichungen zur Anwendung kommen.

Für ein Drehgelenk berechnen sich die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \omega_{i+1}^{i+1} &= R_i^{i+1}(\omega_i^i + \dot{q}_{i+1}z_i^i) \\
 v_{i+1}^{i+1} &= R_i^{i+1}v_i^i + \omega_{i+1}^{i+1} \times r_{i,i+1}^{i+1} \\
 \dot{\omega}_{i+1}^{i+1} &= R_i^{i+1}(\dot{\omega}_i^i + \omega_i^i \times \dot{q}_{i+1}z_i^i + \ddot{q}_{i+1}z_i^i) \\
 \dot{v}_{i+1}^{i+1} &= R_i^{i+1}\left(\dot{v}_i^i + \dot{\omega}_i^i \times r_{i,i+1}^i + \omega_i^i \times (\omega_i^i \times r_{i,i+1}^i)\right)
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Für ein Schubgelenk sind diese Gleichungen etwas anders aufgebaut:

$$\begin{aligned}
 \omega_{i+1}^{i+1} &= R_i^{i+1}\omega_i^i \\
 v_{i+1}^{i+1} &= R_i^{i+1}(v_i^i + \dot{q}_{i+1}z_i^i) + \omega_{i+1}^{i+1} \times r_{i,i+1}^{i+1} \\
 \dot{\omega}_{i+1}^{i+1} &= R_i^{i+1}\dot{\omega}_i^i \\
 \dot{v}_{i+1}^{i+1} &= R_i^{i+1}\left(\dot{v}_i^i + \dot{\omega}_i^i \times r_{i,i+1}^i + \omega_i^i \times (\omega_i^i \times r_{i,i+1}^i)\right) \\
 &\quad + 2\omega_{i+1}^{i+1} \times \dot{q}_{i+1}z_{i+1}^{i+1} + \ddot{q}_{i+1}z_{i+1}^{i+1}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

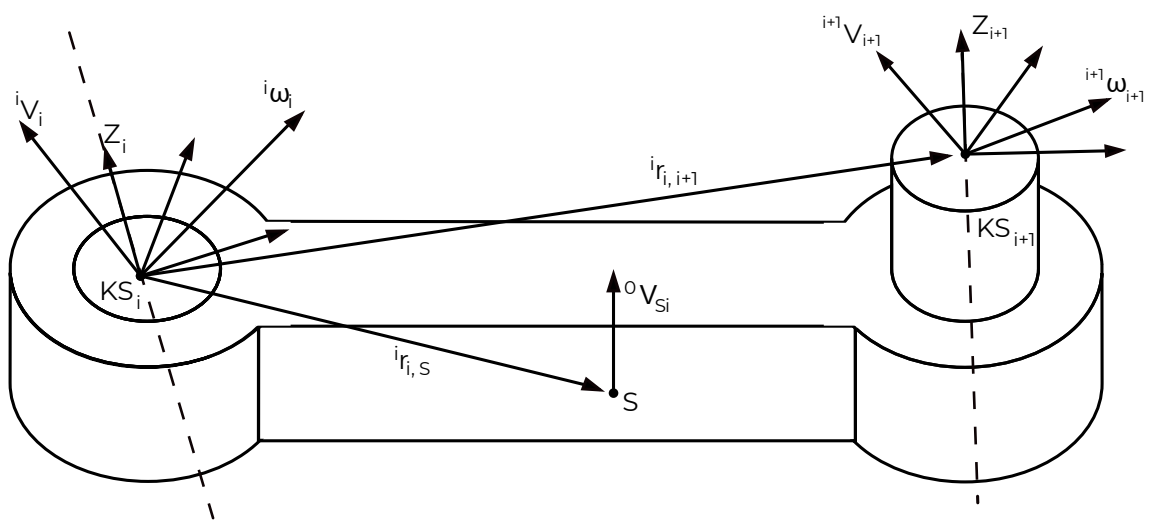


Abbildung 10: Zusammenhang zwischen Gelenkgeschwindigkeiten benachbarter Gelenke

Abbildung 10 zeigt, dass diese Größen noch nicht ausreichend sind, da die relevante Beschleunigung zur Bestimmung der auf einen Körper wirkenden Kraft die Beschleunigung im Schwerpunkt ist. Die Beschleunigung des Schwerpunkts lässt sich mit den in den Gleichungen (4.3) und (4.4) berechnen:

$$\dot{v}_{S,i+1}^{i+1} = \dot{v}_{i+1}^{i+1} + \dot{\omega}_{i+1}^{i+1} \times r_{S,i+1}^{i+1} + \omega_{i+1}^{i+1} \times (\omega_{i+1}^{i+1} \times r_{S,i+1}^{i+1}) \quad (4.5)$$

Nachdem nun alle Geschwindigkeiten und Beschleunigungen aufgestellt sind, können diese in die Newton-, beziehungsweise Euler-Gleichung eingesetzt werden, um die in dem Teilkörper wirkenden Kräfte und Momente zu bestimmen:

$$\begin{aligned} f_i^i &= R_{i+1}^i f_{i+1}^{i+1} + F_i^i \\ n_i^i &= R_{i+1}^i n_{i+1}^{i+1} + r_{i,S}^i \times F_i^i + r_{i,i+1}^i \times R_{i+1}^i f_{i+1}^{i+1} + N_i^i \end{aligned} \quad (4.6)$$

Im letzten Schritt kann nun die Gelenkreaktion bestimmt werden, dabei ist ebenfalls zu beachten, um welche Art von Gelenk es sich handelt. Des Weiteren ist die wirkende Kraft beziehungsweise das wirkende Moment in das richtige Referenzkoordinatensystem zu transformieren und die korrekte Achse, im Fall der genutzten DH-Notation die Z-Achse, auszuwählen. Für die Bestimmung der Gelenkreaktion einer Schubachse ergibt sich damit:

$$Q_{A,i} = f_i^{iT} R_{i-1}^i \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Für die Gelenkreaktion eines Drehgelenks ist hingegen folgende Gleichung zu verwenden:

$$Q_{A,i} = n_i^{iT} R_{i-1}^i \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Da für die Berechnungen der Kräfte und Momentengleichgewichte jedes Teilkörpers auch die Kräfte und Momente des in der kinematischen Kette folgenden Körpers benötigt werden, ist es nötig die Berechnungen nacheinander auszuführen. Das Berechnungsschema nach [Luh80] beschreibt einen Ablauf, um die Berechnungen für ein System mit beliebig vielen Teilkörpern durchzuführen.

Als erstes werden (von der Basis des Systems ausgehend) mit den Gleichungen **(4.3)** und **(4.4)** die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Achskoordinatensysteme berechnet.

Danach werden mit der Gleichung **(4.5)** die Schwerpunktbeschleunigungen für jeden Teilkörper berechnet.

Anschließend werden (vom Endeffektor ausgehend) die auf jeden Teilkörper wirkenden Kräfte mit Gleichung **(4.6)** bestimmt. Dabei sind für den letzten Teilkörper in der kinematischen Kette die am Endeffektor angreifenden Kräfte und Momente zu berücksichtigen.

Im letzten Schritt werden mit den Gleichungen **(4.7)** und **(4.8)** die Gelenkkräfte beziehungsweise Gelenkmomente bestimmt.

Das Schema ist in **Abbildung 11** dargestellt und für ein System mit beliebig vielen Teilkörpern anwendbar.

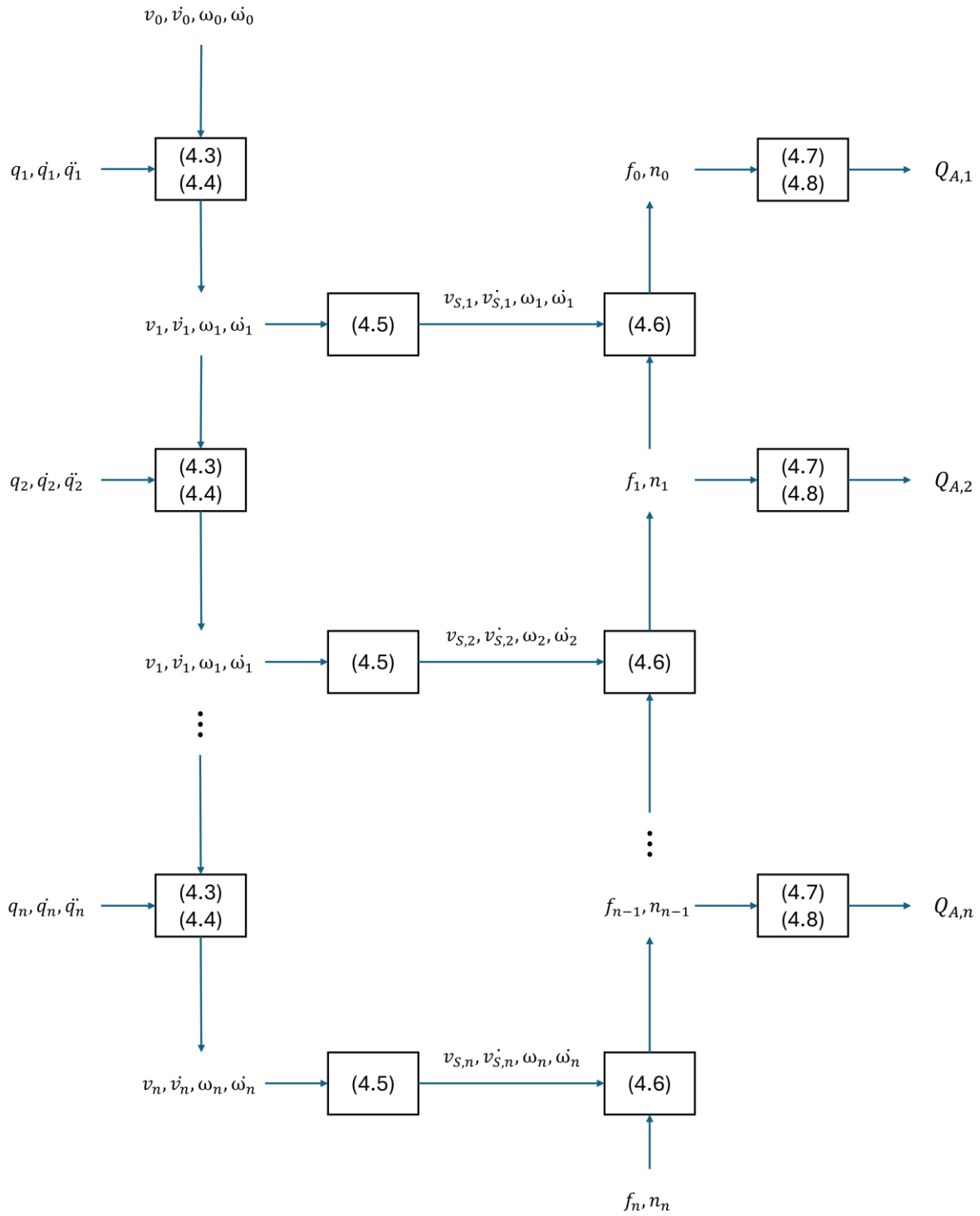


Abbildung 11: Berechnungsschema nach Luh, Walker und Paul [Luh80]

5 Optimierung der benötigten Antriebsenergie

Energie beschreibt die über eine Zeit erbrachte Arbeit. Im Kontext eines Industrieroboters bedeutet dies, dass die von den Achsmotoren verbrauchte Energie in einem festen Zeitraum davon abhängt, wie viel Arbeit die Motoren erbringen müssen. Die von den Motoren zu erbringende Arbeit ist wiederum abhängig von den in den Gelenken angreifenden Momenten. Diese Momente setzen sich aus den in den Achsschwerpunkten angreifenden Kräften mit dem Hebelarm vom Schwerpunkt zum vorhergehenden Gelenk und den Trägheiten der Achsen mit den Winkelgeschwindigkeiten zusammen. Während die Winkelgeschwindigkeiten nur bei einer Bewegung des Systems relevant sind, sind die in den Achsschwerpunkten wirkenden Kräfte für die Haltemomente der Motoren im Stillstand verantwortlich. Da eine dieser Kräfte durch die Erdbeschleunigung hervorgerufen wird, kann das auf die Motoren wirkende Moment reduziert werden, in dem der Roboter intern eine andere Figur annimmt, um so das Haltemoment zu reduzieren. Ebenfalls kann für eine Bewegung des Roboters der Einfluss der Trägheiten verringert werden, indem Achsen mit geringerer Trägheit bei der Bewegung bevorzugt werden.

Eine Figur bezeichnet dabei die unterschiedlichen internen Ausrichtungen der Roboterachsen, welche die Pose des Endeffektors nicht beeinflusst. Unterschiedliche Roboter besitzen nur dann verschiedene Figuren für Endeffektorposen, wenn mehr bewegliche Achsen als in der Pose berücksichtigte Freiheitsgrade zur Verfügung stehen.

Um unterschiedliche Figuren für das betrachtete System zu erzeugen, muss die Berechnung der Gelenkwinkel in der inversen Kinematik angepasst werden. Das in Kapitel drei beschriebene Vorgehen zur Berechnung der Gelenkwinkel für eine gewünschte Endeffektorpose nutzt den in Gleichung (3.20) beschriebenen Zusammenhang zwischen den Gelenkgeschwindigkeiten $\dot{q}$ und den Endeffektorgeschwindigkeiten $\dot{x}$ über die Jacobimatrix J .

Das folgende Kapitel beschreibt nach [Sic10] die Möglichkeit, die Berechnung der Gelenkgeschwindigkeiten $\dot{q}$ zu erweitern und diese nach verschiedenen Kriterien zu modifizieren.

5.1 Optimierung der Gelenkgeschwindigkeiten

Da für einen überbestimmten Roboter die Jacobimatrix mehr Spalten als Zeilen hat ($n < m$), existieren für die Gleichung (3.20) unendlich viele Lösungen. Diese Eigenschaft kann dazu genutzt werden, die Gleichung als ein eingeschränktes lineares Optimierungsproblem zu formulieren.

Das Ziel dieses Optimierungsproblems ist es, einen Satz an Gelenkgeschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}$ zu finden, welche die gegebene Endeffektorpose erfüllt und gleichzeitig die quadratische Kostenfunktion

$$g(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{W} \dot{\mathbf{q}} \quad (5.1)$$

minimiert. Die Matrix $\mathbf{W}$ ist dabei eine positiv definite Gewichtungsmatrix. Dieses Problem kann mit der Hilfe des Lagrange-Multiplikators zu

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{J}^T (\mathbf{J} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{v}_e \quad (5.2)$$

gelöst werden. Wird nun die Matrix $\mathbf{W}$ als Einheitsmatrix gewählt, lässt sich Gleichung (5.2) zu

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^T (\mathbf{J} \mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{v}_e \quad (5.3)$$

vereinfachen. Die Matrix

$$\mathbf{J}^+ = \mathbf{J}^T (\mathbf{J} \mathbf{J}^T)^{-1} \quad (5.4)$$

wird auch als die rechte Pseudoinverse oder Moore-Penrose-Pseudoinverse der Jacobimatrix bezeichnet. Mithilfe dieser Pseudoinversen kann auch für Roboter, deren Jacobimatrix nicht quadratisch ist, eine Matrix berechnet werden, mit der der Algorithmus zur Berechnung der inversen Kinematik durchlaufen werden kann [Sch15].

Wenn $\dot{\mathbf{q}}$ eine Lösung für Gleichung (3.20) ist, dann muss $\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{P}\dot{\mathbf{q}}_0$ auch eine mögliche Lösung sein, bei der $\mathbf{P}$ eine Matrix ist, welche auf den Kern der Jacobimatrix projiziert und $\dot{\mathbf{q}}_0$ ein beliebiger Vektor von Gelenkgeschwindigkeiten ist. Der Kern einer Matrix ist dabei eine Menge an Vektoren, die, wenn mit der Matrix selbst multipliziert, einen Nullvektor ergeben. Demnach kann Gleichung (5.1) wie folgt erweitert werden:

$$g(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_0)^T (\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_0) \quad (5.5)$$

Die Gewichtungsmatrix $\mathbf{W}$ wird hier als Einheitsmatrix angenommen und kann somit ignoriert werden.

Auch diese Gleichung kann durch Nutzung des Lagrange-Multiplikators gelöst werden. Damit ergibt sich die Gleichung

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^+ \mathbf{v}_e + (\mathbf{I} - \mathbf{J}^+ \mathbf{J}) \dot{\mathbf{q}}_0 \quad (5.6)$$

für die gesuchten Gelenkgeschwindigkeiten. Der Term $(\mathbf{I}_n - \mathbf{J}^+ \mathbf{J}) \dot{\mathbf{q}}_0$ beschreibt nun eine virtuelle oder auch interne Bewegung der Roboterelkenke, die die Figur des Roboters anpassen kann, ohne die Pose des Endeffektors zu beeinflussen.

Um nun einen Vektor $\dot{\mathbf{q}}_0$ an Gelenkgeschwindigkeiten zu erhalten (welcher die redundante Beschaffenheit des Roboters nutzt), um die Figur des Roboters nach einer Kostenfunktion zu optimieren, kann

$$\dot{\mathbf{q}}_0 = k_0 \left(\frac{d}{dq} w(\mathbf{q}) \right)^T \quad (5.7)$$

gewählt werden.

Der Faktor k_0 dient der Skalierung, während $w(\mathbf{q})$ eine weitere Zielfunktion für die Optimierung beschreibt.

Mit dieser Funktion kann beispielsweise sichergestellt werden, dass die virtuelle Bewegung dafür sorgt, dass der Roboter innere Singularitäten so weit wie möglich umfährt:

$$w(q) = \sqrt{\det(J(q)J^T(q))} \quad (5.8)$$

Eine weitere mögliche Zielfunktion

$$w(q) = -\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{q_i - \bar{q}_i}{q_{iM} - q_{im}} \right)^2 \quad (5.9)$$

optimiert den Abstand der Gelenkwinkel von ihren maximalen Auslenkungen. Die Winkel q_{iM} und q_{im} sind dabei die maximal beziehungsweise minimal zulässigen Gelenkwinkel und $\bar{q}_i$ beschreibt den Mittelpunkt zwischen diesen beiden Werten.

Die einzige Bedingung für eine mögliche sekundäre Zielfunktion $w(q)$ besteht darin, dass sie von den Gelenkwinkeln $\mathbf{q}$ abhängig ist.

Wenn eine geeignete Funktion für $w(q)$ und damit auch für $\mathbf{q}_0$ gefunden ist, wird diese in Gleichung (5.6) eingesetzt. Die daraus entstandene Gleichung $\mathbf{g}(\dot{\mathbf{q}})$ für die Berechnung der Gelenkgeschwindigkeiten, wird anschließend in den in Kapitel 3.5 gezeigten Algorithmus, siehe **Abbildung 6**, eingesetzt und ermöglicht so die Berechnung der inversen Kinematik für eine vorgegebene Endeffektorpose unter Berücksichtigung des gewählten Optimierungskriteriums, siehe **Abbildung 12**.

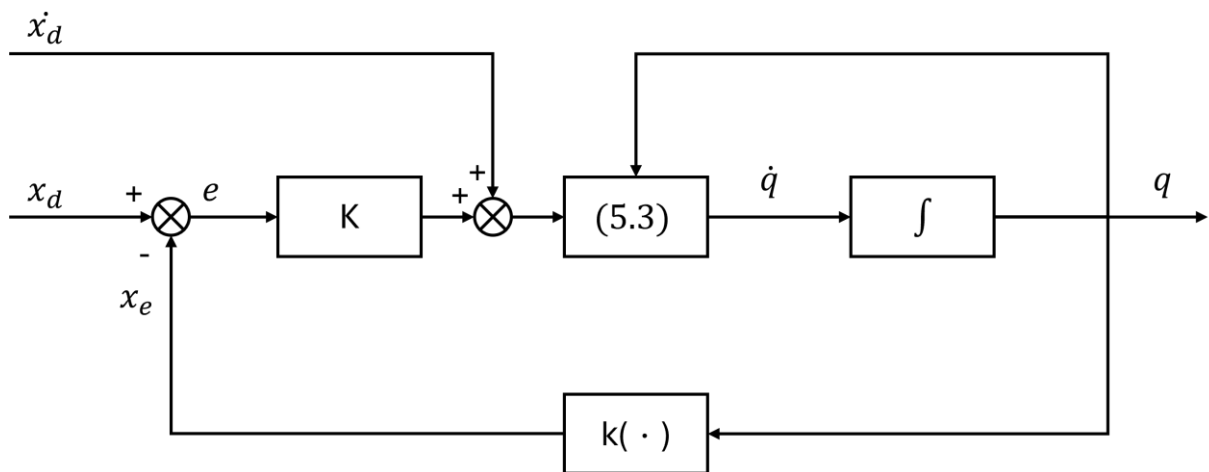


Abbildung 12: Algorithmus zur Berechnung der inversen Kinematik unter Berücksichtigung eines Optimierungskriteriums

5.2 Auswahl einer geeigneten Zielfunktion

Die Auswahl einer geeigneten Zielfunktion stellt den nächsten Schritt dieser Arbeit dar.

Um die eingesparte Energie quantifizieren zu können, muss zuerst eine Referenzgröße erstellt werden. Dafür wird zuerst eine Koordinatenbahn für den Endeffektor generiert, für die anschließend mit der unmodifizierten inversen Kinematik die Gelenkwinkel in jedem Zeitschritt berechnet werden.

Die verwendete Endeffektorbahn lässt sich folgendermaßen beschreiben:

$$x_d = \begin{bmatrix} 1,5 + \sin(t * \omega) * 0,5 \\ \cos(t * \omega) * 1,5 \\ 3,5 + \cos(t * \omega) * 0,5 \\ (t * \omega) + \frac{\pi}{2} \\ 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}_{XYZ} \quad (5.10)$$

Die daraus resultierende Bahn, mit $\omega = \frac{\pi}{T}$, $T = 3,6$ und Zeitschritten von $\Delta t = 0,01s$, besitzt 306 individuelle Endeffektorposen.

Mit der unmodifizierten inversen Kinematik ergeben sich für diese Endeffektorbahn die in **Abbildung 13** zu sehenden Gelenkwinkel.

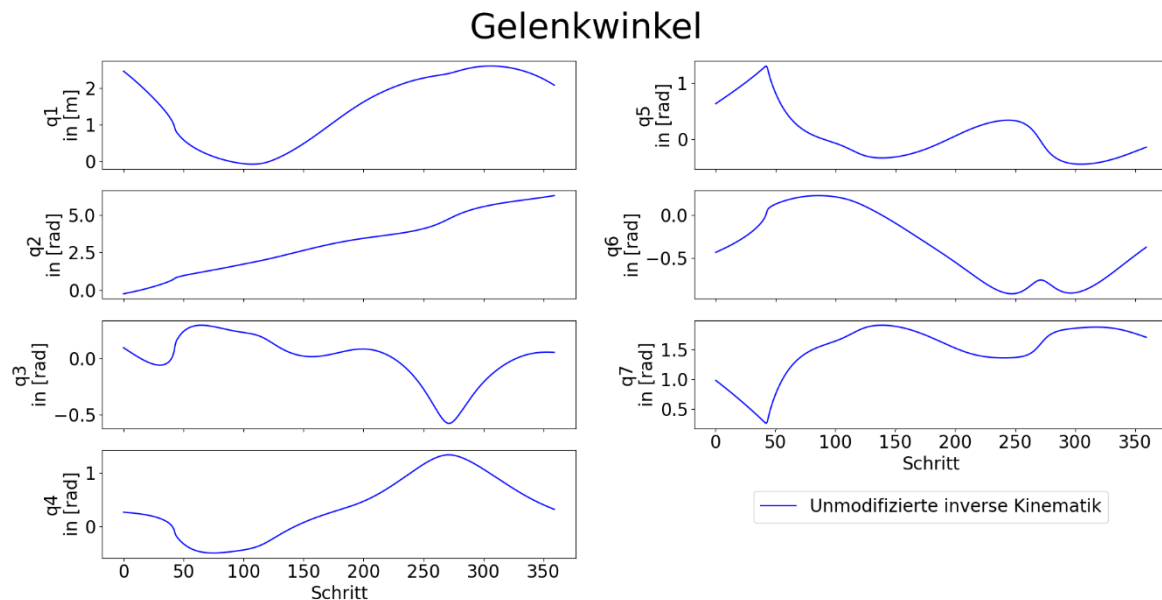


Abbildung 13: Gelenkwinkel für die Endeffektorbahn der unmodifizierten inversen Kinematik

Werden diese Gelenkwinkel für jeden Iterationsschritt mit der direkten Kinematik des Systems wieder in eine Endeffektorpose umgerechnet und mit den vorgegebenen Werten, die sich aus (5.10) ergeben, verglichen, so ergeben sich translatorische und rotatorische Abweichungen von der Sollpose. Diese Abweichungen sind in **Abbildung 14** dargestellt.

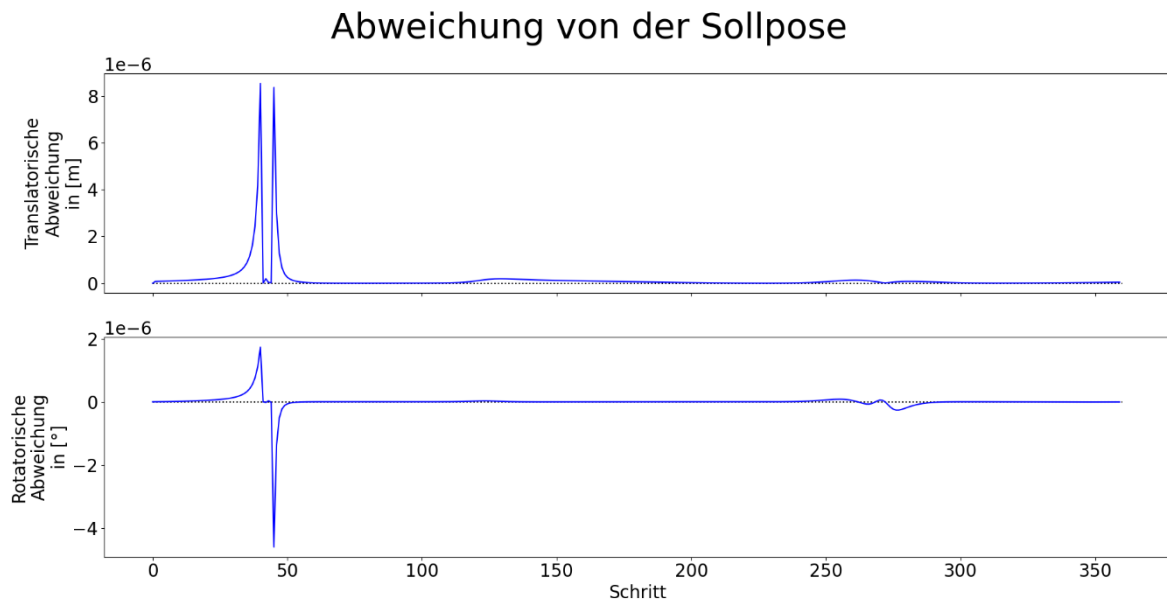


Abbildung 14: Abweichungen von der Sollpose für die unmodifizierte inverse Kinematik

Die Abweichungen von der vorgegebenen Pose sind, mit einer maximalen Abweichung von $8\text{ }\mu\text{m}$, deutlich geringer als die im Datenblatt des Roboters maximale Pose-Wiederholgenauigkeit und damit ausreichend genau [MAB124].

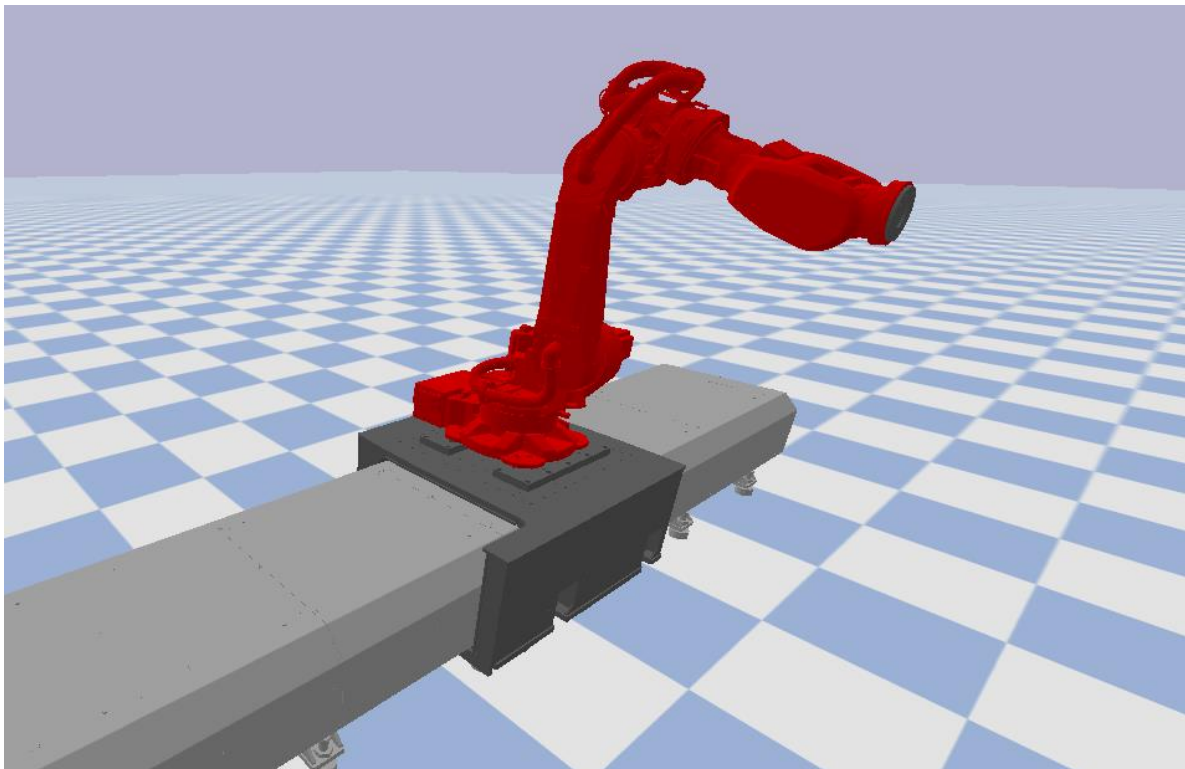


Abbildung 15: Figur des Roboters nach der unmodifizierten inversen Kinematik

Die Figur, die aus der nach **(5.10)** beschriebenen letzten Endeffektorpose der Bahn mit unmodifizierten inversen Kinematik berechnet wird, ist in **Abbildung 15** dargestellt.

5.2.1 Minimierung der potenziellen Energie

Die Gesamtenergie des Systems lässt sich als die Summe der kinetischen und potenziellen Energie beschreiben:

$$E = E_{kin} + E_{pot} \quad (5.11)$$

Ein Ansatz, den Energieverbrauch des Systems zu reduzieren, besteht darin, die potenzielle Energie der einzelnen Teilkörper zu minimieren.

$$E_{pot} = - \sum_{i=1}^n (m_i g_0^T p_i) = w(q) \quad (5.12)$$

Der Vektor p_i beschreibt dabei für jeden Teilkörper des Roboters die Position des Schwerpunkts im Weltkoordinatensystem, abhängig von den Gelenkkoordinaten q . Damit ist die Gleichung zur Aufstellung der potenziellen Energie eine für die Optimierung geeignete Funktion $w(q)$. Der Parameter g_0^T beschreibt den Vektor der Erdbeschleunigung und ist in transponierter Form dargestellt, um zusammen mit p_i ein Skalarprodukt zu ergeben.

Für die Berechnung der Gelenkwinkel mit dem in **Abbildung 12** gezeigten iterativen Vorgehen wird Gleichung **(5.6)** anstelle von **(5.3)** genutzt. Unter Verwendung von Gleichung **(5.12)**, sowie $k_0 = 0,1 * 10^{-3}$ in der darauffolgenden Gleichung **(5.7)**, ergeben sich folgende Gelenkwinkel für die vorgegebene Endeffektorbahn:

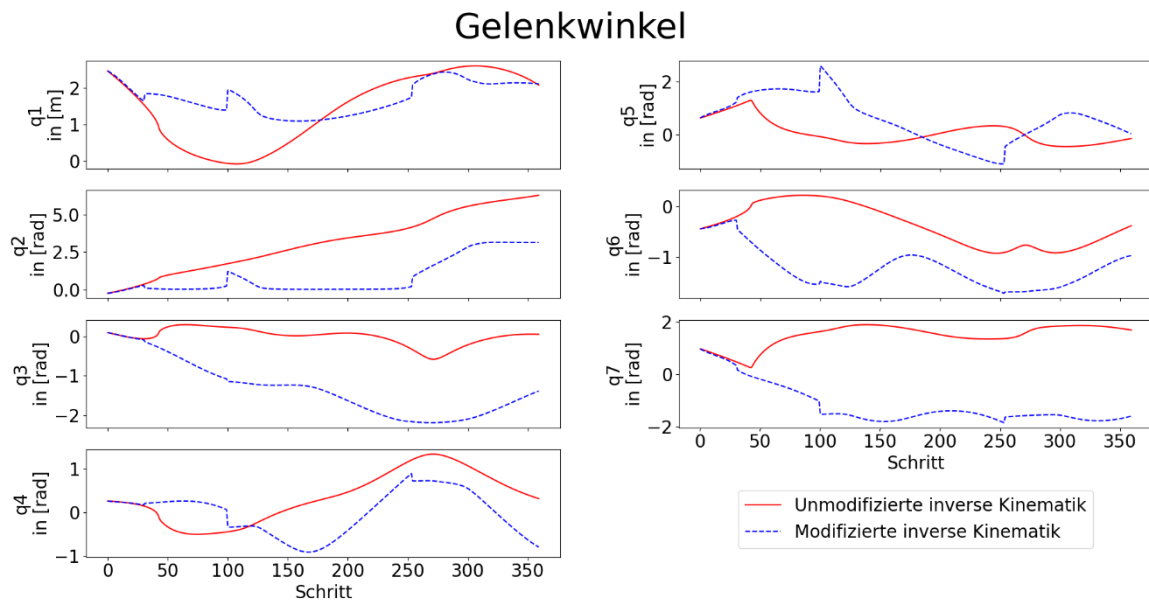


Abbildung 16: Gelenkwinkel für die Endeffektorbahn der nach der potenziellen Energie optimierten inversen Kinematik

Es ist zu erkennen, dass die Gelenkwinkel dieser Berechnung deutlich von den Gelenkwinkeln der Referenzberechnung abweichen. Allerdings ist ebenfalls zu erkennen, dass die Gelenkwinkel aller Gelenke mehrere sprunghaften Änderungen aufweisen, was beim Verfahren eines realen Systems nicht unbedingt umsetzbar ist. Das liegt daran, dass die dafür benötigten hohen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Achsen zu einer Überschreitung der maximal zulässigen Lasten der Achsmotoren führen können.

Die maximale Abweichung von der Sollpose ist um den Faktor 1,25 höher als bei der unmodifizierten inversen Kinematik, liegt aber ebenfalls unterhalb der maximalen Pose-Wiederholgenauigkeit des Roboters, wie in **Abbildung 17** zu sehen ist.

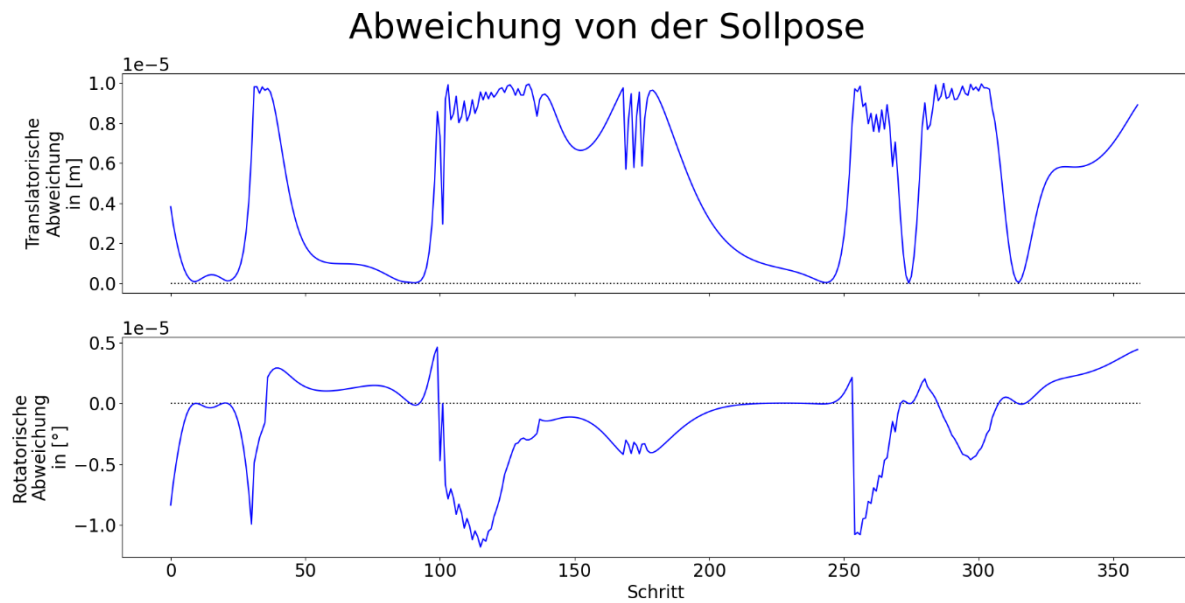


Abbildung 17: Abweichungen von der Sollpose für die nach der potenziellen Energie optimierten inversen Kinematik

Im Vergleich mit der unmodifizierten inversen Kinematik ist die Kinetische Energie des Systems für diesen Optimierungsansatz deutlich geringer. Dies spricht dafür, dass die Optimierung der Roboterfiguren, um die potenzielle Energie des Systems zu reduzieren, erfolgreich ist.

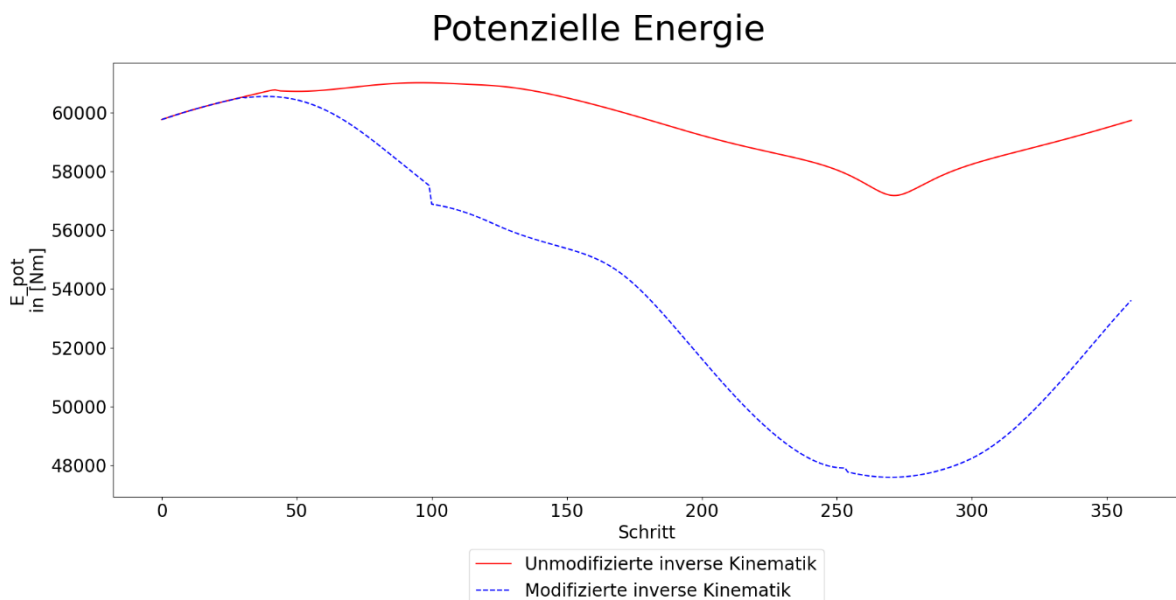


Abbildung 18: Potenzielle Energie des Systems verglichen zwischen den Berechnungsmethoden

Ein Problem dabei ist, dass die Minimierung der potenziellen Energie nicht zu einer Optimierung der statischen Gelenkreaktionen führt. Wie in **Abbildung 19** zu sehen ist, führt die Nutzung dieser Optimierungsfunktion dazu, dass die Schwerpunkte der einzelnen Achsen so weit wie möglich abgesenkt werden, ohne dass eine Abweichung von der Sollpose entsteht.

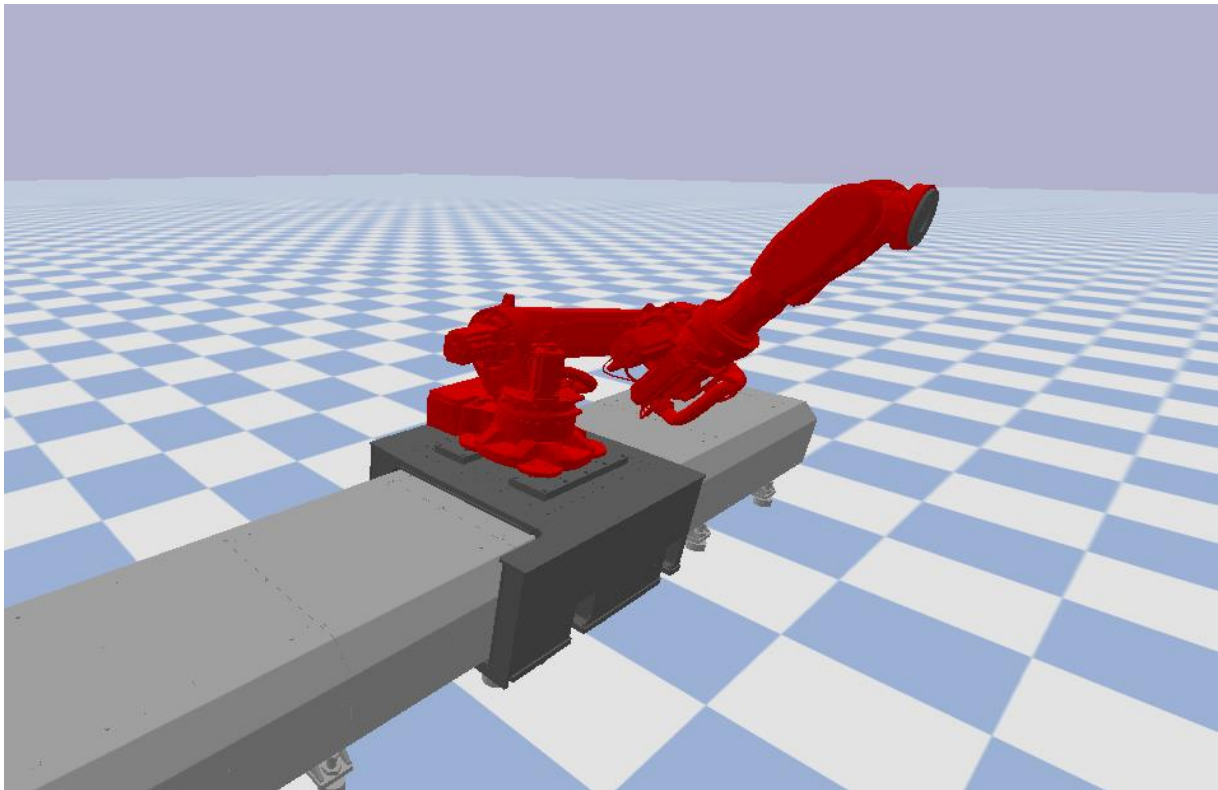


Abbildung 19: Figur des Roboters für die nach der potenziellen Energie optimierten inversen Kinematik

Dies führt zwar zu einer Minimierung der potenziellen Energie der Achsen, da der Abstand der Schwerpunkte zum Bezugspotenzial (dem Basiskoordinatensystem) sinkt. Es führt aber ebenfalls dazu, dass die in den Schwerpunkten angreifende Gewichtskraft ein größeres Moment auf die Achsmotoren ausüben kann. Dies ist auch ersichtlich, wenn die Figur des Roboters mit der in **Abbildung 15** gezeigten Figur verglichen wird. Die Endeffektorpose ist identisch, jedoch ist das auf Achse drei wirkende Moment im Stillstand wesentlich höher, da der orthogonal zur Gewichtskraft wirkende Hebelarm des Schwerpunktes größer ist.

Demnach ist die Optimierung der potenziellen Energie des Systems nicht sinnvoll.

5.2.2 Optimierung der kinetischen Energie des Systems

Ein weiterer Ansatz ist es, anstelle der potenziellen Energie des Systems, die kinetische Energie zu optimieren. Die gesamte kinetische Energie eines Systems lässt sich nach [Sic10] als

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \quad (5.13)$$

beschreiben. Verglichen mit Gleichung (5.1) ist erkennbar, dass diese Gleichung ohne weitere Modifikation als quadratische Kostenfunktion $g(\dot{q})$ verwendbar ist, da die Gewichtungsmatrix $\mathbf{W}$ frei wählbar ist.

Die Massenträgheitsmatrix $\mathbf{M}$ aus der allgemeinen Bewegungsgleichung des Systems beschreibt die Trägheiten der Teilkörper des Systems, bezogen auf die einzelnen Gelenke. Diese Matrix kann dazu genutzt werden, die in Gleichung (5.2) beziehungsweise (5.4) gezeigte Aufstellung der Pseudoinversen der Jacobimatrix zu gewichten. Die daraus resultierende Pseudoinverse der Jacobimatrix nimmt damit folgende Form an:

$$J^+ = M^{-1} J^T (J M^{-1} J^T)^{-1} \quad (5.14)$$

Die Massenträgheitsmatrix $\mathbf{M}$ kann spaltenweise aufgestellt werden, indem der in **Abbildung 11** gezeigte Algorithmus für jedes Gelenk durchlaufen wird. Dabei sind sämtliche $\dot{q} = \mathbf{0}$ und $\ddot{q} = \mathbf{0}$ anzunehmen, mit Ausnahme von $\ddot{q}_i = \mathbf{1}$ mit $i = (1, \dots, n)$. Die Gravitationskraft ist ebenfalls als $g = \mathbf{0}$ anzunehmen.

Diese Matrix ist allerdings abhängig von den Gelenkwinkeln des Systems und muss somit für jeden Berechnungsschritt neu aufgestellt werden.

Mit der auf diese Weise erzeugten pseudoinversen Jacobimatrix wird dann der iterative Algorithmus aus **Abbildung 12** durchlaufen.

Da die Aufstellung der Massenträgheitsmatrix $\mathbf{M}$ im Zusammenhang des in dieser Arbeit untersuchten Systems nicht funktioniert hat, wird im Zuge der hier präsentierten

Ergebnisse eine Ersatzmatrix $\mathbf{W}_m$ genutzt. Diese Matrix ist eine Diagonalmatrix, bei der die aufsummierten Massen der Teilkörper, welche jedes Gelenk bewegt, auf der Hauptdiagonalen aufgetragen sind. Dies ist aufgrund der physikalischen Berechnung der kinetischen Energie

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 \quad (5.15)$$

eine Lösung, da dies mit Gleichung (5.13) verglichen eine ähnliche Lösung darstellt.

Die Gelenkwinkel, die aus der Berechnung mit dieser Gewichtungsmatrix resultieren, sind in **Abbildung 20** gezeigt.

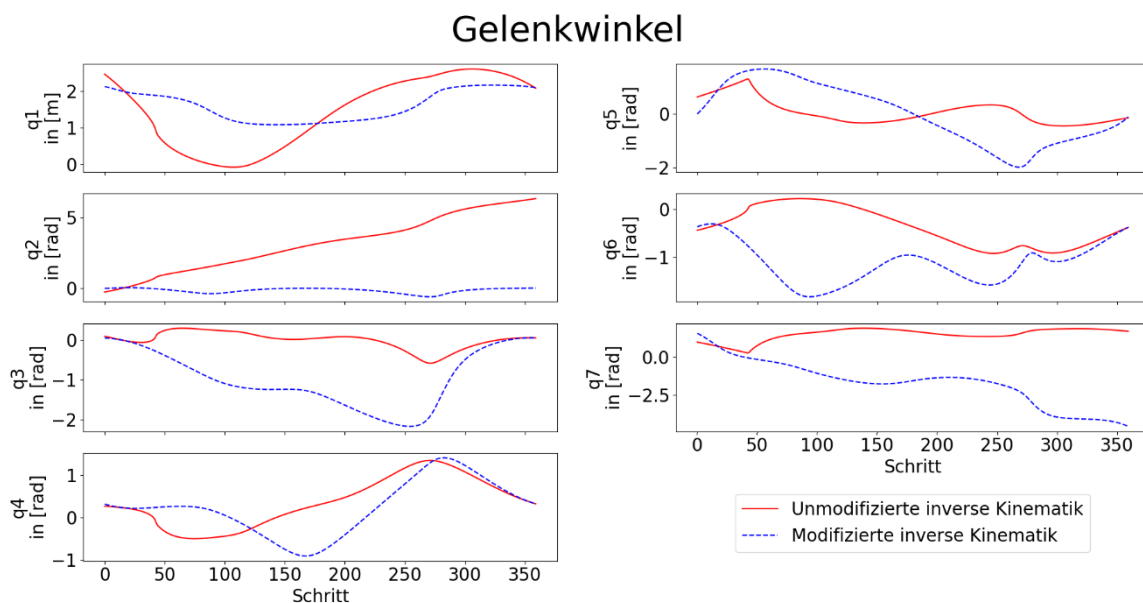


Abbildung 20: Gelenkwinkel für die Endeffektorbahn der nach der kinetischen Energie optimierten inversen Kinematik

Zu erkennen ist, dass die Achsen, die am Anfang der kinematischen Kette sitzen, weniger bewegt werden als bei der unmodifizierten inversen Kinematik, während die Achsen, welche geringere Trägheiten überwinden müssen eine höhere Nutzung aufweisen.

Auch bei diesen berechneten Gelenkwinkeln ist die Abweichung von der Sollpose geringer als die maximale Pose-Wiederholgenauigkeit des Roboters und damit ausreichend, zu sehen in **Abbildung 21**.

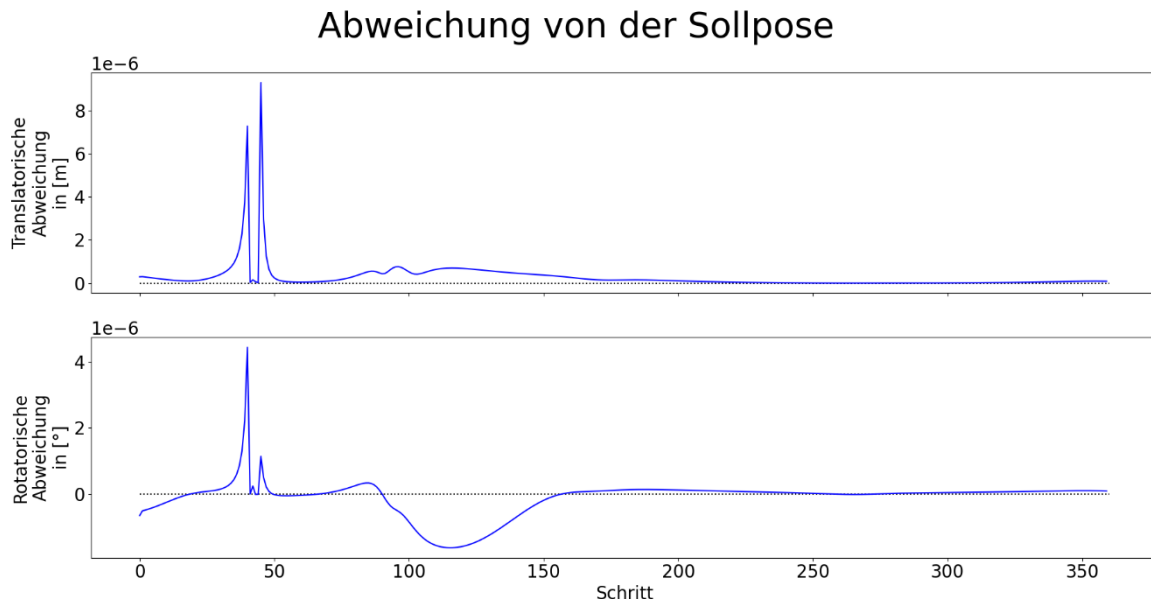


Abbildung 21: Abweichungen von der Sollpose für die nach der kinetischen Energie optimierten inversen Kinematik

Verglichen mit der unmodifizierten inversen Kinematik ist die kinetische Energie dieses Berechnungsverfahrens zwar geringer, aber die Abweichung ist mit Ausnahme eines Ausreißers im Durchschnitt kleiner als bei der potenziellen Energie, zu sehen in **Abbildung 22**. Der Ausreißer am Anfang der unmodifizierten Bahn kommt durch eine ruckartige Änderung der Gelenkwinkel, also einer Änderung der Figur des Roboters zu Stande, welcher zu hohen Gelenkgeschwindigkeiten führt.

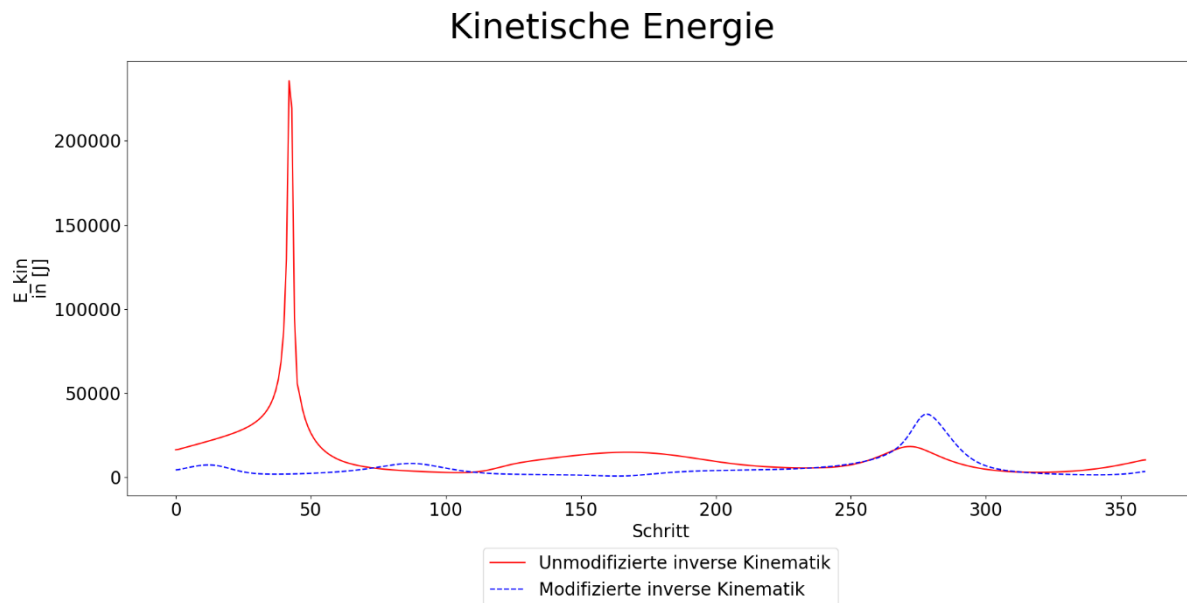


Abbildung 22: Kinetische Energie des Systems verglichen zwischen den Berechnungsmethoden

Die Optimierung der kinetischen Energie des Systems ist also ein funktioneller Ansatz, erzielt aber aufgrund der geringen Bewegungsgeschwindigkeiten des Systems einen wesentlich geringeren Einfluss.

5.2.3 Minimierung des Einflusses der Gravitationskraft auf die Gelenke

Wie schon bei der Optimierung der potenziellen Energie angemerkt, ist für die statische Betrachtung der Gelenkreaktionen des Systems die einzig auf die Teilkörperschwerpunkte wirkende Kraft die Gewichtskraft. Um den Einfluss dieser Kraft auf die Achsmotoren zu optimieren, muss der orthogonal zur Erdbeschleunigung stehende Anteil des Hebelarms zwischen den Schwerpunkten der Teilkörper und den vorhergehenden Gelenken minimiert werden. Anders ausgedrückt, der Anteil der Gewichtskraft, welche durch die Lagerung der Achsen aufgenommen wird und so kein Reaktionsmoment in den Achsmotoren erzeugt, soll maximiert werden.

Die Statik eines Roboters besagt, dass die Summe aller Kräfte und Momente im Stillstand gleich null sein muss. Mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit lässt sich die

Beziehung zwischen den Gelenkkkräften und -momenten und den am Endeffektor wirkenden Kräften und Momenten als

$$Q = J^T(q) \gamma_e \quad (5.16)$$

ermitteln. [Sic10] Die Gelenkkkräfte und -momente $\mathbf{Q}$ hängen also von der transponierten Jacobimatrix J^T und den Endeffektorkräften und -momenten γ_e ab [Sic10] .

Der in (5.16) aufgezeigte Zusammenhang kann dazu genutzt werden, um die generalisierten Gravitationskräfte $\mathbf{g}(q)$ aus der allgemeinen Bewegungsgleichung des Systems (4.1) zu beschreiben:

$$g(q) = \sum_{i=1}^n J_i^T(q) \gamma_{g,i} \quad (5.17)$$

Anstelle von γ_e wird hier $\gamma_{g,i}$ genutzt, was die Gewichtskräfte für die jeweiligen Teilkörper darstellt. Über die Minimierung der quadratischen Norm von $\mathbf{g}(q)$ ergibt sich mit

$$w(q) = \sqrt{g(q)^T g(q)} \quad (5.18)$$

eine Funktion, die für die Optimierung geeignet ist.

Werden in der Berechnung der inversen Kinematik die in den Gleichungen (5.17) und (5.18) beschriebenen Bedingungen zur Optimierung verwendet und zusätzlich in (5.7) $k_0 = 0,1 * 10^{-6}$ angenommen, so ergeben sich die in **Abbildung 23** dargestellten Gelenkwinkel für die vorgegebene Endeffektorbahn.

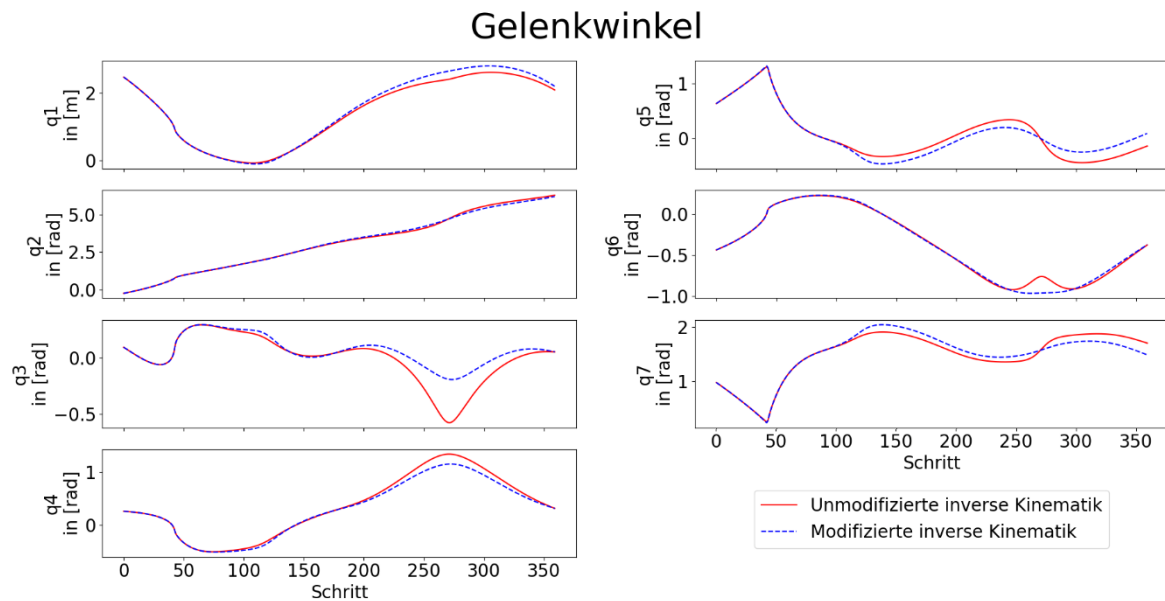


Abbildung 23: Gelenkwinkel für die Endeffektorbahn der nach der Minimierung des Einflusses der Gravitationskraft optimierten inversen Kinematik

Die maximalen Abweichungen von der Sollpose sind in **Abbildung 24** dargestellt und liegen, wie bei den anderen Berechnungsverfahren, unter der maximalen Pose-Wiederholgenauigkeit des Roboters und sind somit akzeptabel.

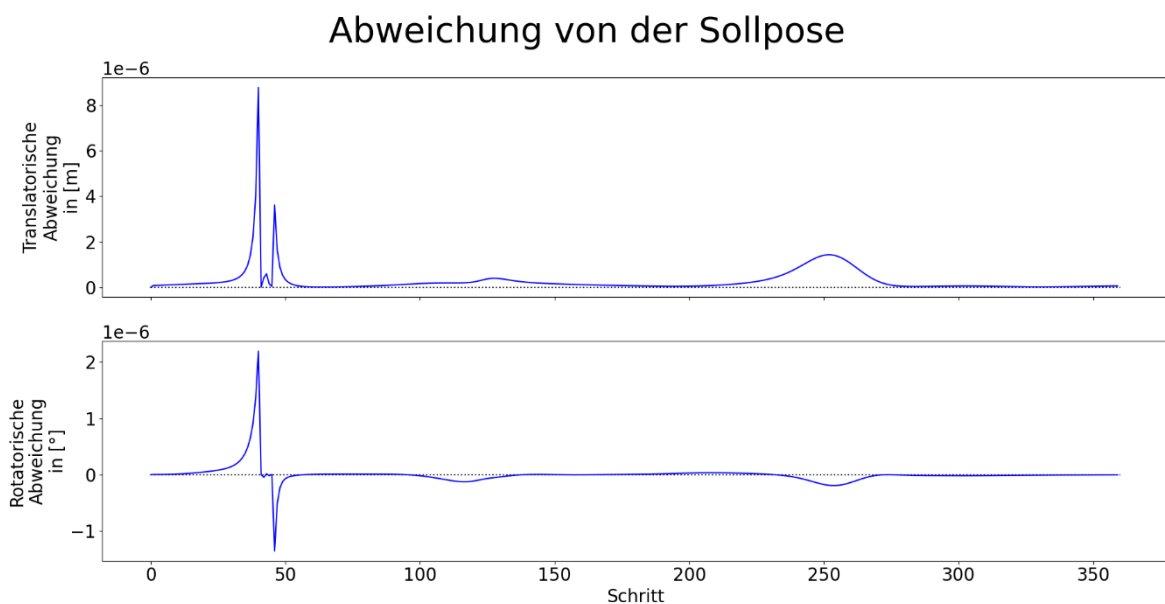


Abbildung 24: Abweichungen von der Sollpose für die nach der Minimierung des Einflusses der Gravitationskraft optimierten inversen Kinematik

Die durch die Gravitationskraft hervorgerufenen Reaktionsmomente sind in **Abbildung 25** zu sehen.

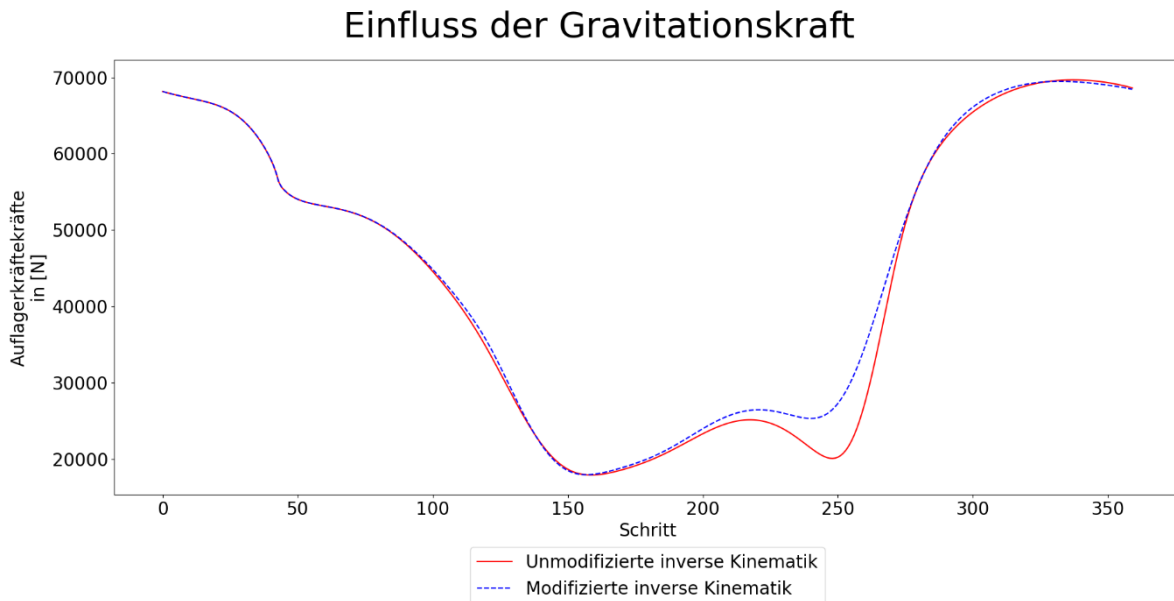


Abbildung 25: Einfluss der Gravitationskraft auf das System verglichen zwischen den Berechnungsmethoden

Verglichen mit der unmodifizierten inversen Kinematik, sind die von den Lagern aufgenommenen Kräfte für diese Optimierung größer, was bedeutet, dass der durch Haltemomente der Achsmotoren auszugleichende Anteil der Gewichtskraft geringer ist.

Die Minimierung des Einflusses der Gravitationskraft auf die Gelenke ist also ebenfalls ein funktioneller Ansatz, welcher aufgrund seines Einflusses auf die statischen Roboterfiguren eine größere Auswirkung auf die benötigten Motormomente hat als die zuvor beschriebene Optimierung der kinetischen Energie.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Ein über die letzten Jahre erkennbarer und andauernder Trend ist, dass in der Industrie von Jahr zu Jahr mehr Industrieroboter zum Einsatz kommen. Dies liegt zum einen daran, dass Knickarmroboter aufgrund ihrer hohen Flexibilität eine Vielzahl an Aufgaben übernehmen können, wie zum Beispiel bei der Montage, Transportaufgaben oder sogar der zerspanenden Bearbeitung. Zum anderen sind Knickarmroboter in der Anschaffung nicht so teuer wie Portalmaschinen mit vergleichbarem Arbeitsraum. Das Fraunhofer IFAM erforscht im Zusammenhang verschiedener Projekte, wie die Nutzung von industriellen Knickarmrobotern in Hinsicht auf Prozessgenauigkeiten und Energieverbrauch verbessert werden kann. Daraus lässt sich das Ziel dieser Arbeit, die Energieoptimierung eines redundanten Knickarmroboters durch die Anpassung der internen Gelenkstellungen, ableiten.

Als erstes wurde ein grundlegender Überblick über Industrieroboter und deren verschiedene Bauarten und Einsatzgebiete gegeben. Anschließend wurde die mathematische Beschreibung von seriellkinematischen Robotern anhand der DH-Notation erklärt und hergeleitet, wie daraus die direkte und inverse Kinematik eines Roboters sowie die Jacobimatrix bestimmt werden können. Diese mathematischen Zusammenhänge sind danach für ein redundantes Beispielsystem ausgearbeitet worden und zusätzlich wurde die Dynamik dieses Systems aufgestellt. Dazu wurde das Verfahren nach Newton-Euler, in Kombination mit dem Algorithmus nach Luh, Walker und Paul, verwendet.

Als nächstes wurden mehrere Möglichkeiten zur Optimierung der Energie des Systems aufgezeigt und Modifikationen für die inverse Kinematik aufgestellt, um diese zu berechnen. Anschließend wurden diese modifizierten Berechnungen, anhand einer Beispielbahn des Endeffektors des Systems durchgerechnet. Mit Hilfe der auf diese Weise erstellten Daten wurden die Optimierungsmethoden mit der unmodifizierten Berechnungsmethode für die inverse Kinematik verglichen sowie Vor- und Nachteile der einzelnen Verfahren aufgezeigt.

Das Ergebnis dieser Arbeit ist, dass es in der Tat möglich ist, den Energieverbrauch eines redundanten Roboters durch die Anpassung der Berechnung der inversen

Kinematik zu optimieren. Dabei ist allerdings zu beachten, dass die aufgezeigten Optimierungsfunktionen in dieser Form nicht für den Einsatz an realen Systemen geeignet sind, da Parameter wie die minimalen und maximalen Verfahrwinkel der Robotergetriebe nicht berücksichtigt werden.

Weiterführende Themengebiete, die sich aus dieser Arbeit ergeben, sind die Berücksichtigung der minimalen und maximalen Gelenkwinkel eines Roboters bei der Optimierung, so dass diese Optimierungsberechnungen auch auf reale Roboter übertragen werden können, ohne eine Beschädigung der Roboter zu riskieren.

Die aufgezeigten Optimierungsfunktionen können außerdem noch weiter verfeinert und angepasst werden, um zum Beispiel bestimmte Aspekte der Optimierung zu priorisieren oder je nach Anwendungsfall individualisiert zu werden.

7 Literaturverzeichnis

- [DH55] Jacques Denavit, Richard S. Hartenberg (1955): A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices.
- [IFR23] IFR (2023): Presentation of World Robotics 2023. Online verfügbar unter: https://ifr.org/img/worldrobotics/2023_WR_extended_version.pdf, Aufgerufen am 26.02.2025
- [Igl15] Iglesias, Sebastián, Ares (2015): Overview of the state of robotic machining: Current situation and future potential.
- [ISO8273] International Organization for Standardization (ISO), ISO8273 (2021): Robotics – Vocabulary.
- [Luh80] J. Luh, M. Walker, R. Paul (1980): On-line computational scheme for mechanical manipulators. J. Dyn. Sys., Meas., Control 102(2).
- [MAB124] MABI: Datenblatt MABI-MAX-100-2.25-P. Online verfügbar unter: <https://www.mabi-robotic.com/robotic/robotic-arm/product.asp?IDProdukt=5>, Aufgerufen am 26.02.2025
- [Pott19] Pott, Andreas; Dietz, Thomas (2019): Industrielle Robotersysteme. Entscheiderwissen für die Planung und Umsetzung wirtschaftlicher Roboterlösungen. Wiesbaden: Springer Vieweg (Springer eBooks Computer Science and Engineering).
- [Sch15] Karsten Schmidt, Götz Trenkler (2015): Einführung in die Moderne Matrix-Algebra. Springer-Verlag Berlin Heidelberg
- [Sic10] Siciliano, Bruno (2010): Robotics. Modelling, planning and control. (Advanced textbooks in control and signal processing). Springer Verlag London Limited.
- [Uhl16] Uhlmann, Reinkober, Hollerbach (2016): Energy efficient usage of industrial robots for machining processes

A Anhang

Gesamttransformationsmatrix

$-((s(Q2)*s(Q5) - s(Q3 + Q4)*c(Q2)*c(Q5))*c(Q6) - s(Q6)*c(Q2)*c(Q3 + Q4))*c(Q7) - (s(Q2)*c(Q5) + s(Q5)*s(Q3 + Q4)*c(Q2))*s(Q7),$	$((s(Q2)*s(Q5) - s(Q3 + Q4)*c(Q2)*c(Q5))*c(Q6) - s(Q6)*c(Q2)*c(Q3 + Q4))*s(Q7) - (s(Q2)*c(Q5) + s(Q5)*s(Q3 + Q4)*c(Q2))*c(Q7)$	$-(s(Q2)*s(Q5) - s(Q3 + Q4)*c(Q2)*c(Q5))*s(Q6) - c(Q2)*c(Q6)*c(Q3 + Q4)$	$0.1985*(s(Q2)*s(Q5) - s(Q3 + Q4)*c(Q2)*c(Q5))*s(Q6) + 1.0*s(Q3)*c(Q2) + 0.175*s(Q3 + Q4)*c(Q2) + 0.1985*c(Q2)*c(Q6)*c(Q3 + Q4) + 0.9055*c(Q2)*c(Q3 + Q4) + 0.34*c(Q2) + 0.649$
$((s(Q2)*s(Q3 + Q4)*c(Q5) + s(Q5)*c(Q2))*c(Q6) + s(Q2)*s(Q6)*c(Q3 + Q4))*c(Q7) - (s(Q2)*s(Q5)*s(Q3 + Q4) - c(Q2)*c(Q5))*s(Q7)$	$-((s(Q2)*s(Q3 + Q4)*c(Q5) + s(Q5)*c(Q2))*c(Q6) + s(Q2)*s(Q6)*c(Q3 + Q4))*s(Q7) - (s(Q2)*s(Q5)*s(Q3 + Q4) - c(Q2)*c(Q5))*c(Q7)$	$(s(Q2)*s(Q3 + Q4)*c(Q5) + s(Q5)*c(Q2))*s(Q6) - s(Q2)*c(Q6)*c(Q3 + Q4)$	$1.0*Q1 - 0.1985*(s(Q2)*s(Q3 + Q4)*c(Q5) + s(Q5)*c(Q2))*s(Q6) + 1.0*s(Q2)*s(Q3) + 0.175*s(Q2)*s(Q3 + Q4) + 0.1985*s(Q2)*c(Q6)*c(Q3 + Q4) + 0.9055*s(Q2)*c(Q3 + Q4) + 0.34*s(Q2) + 3.756$
$-(s(Q6)*s(Q3 + Q4) - c(Q5)*c(Q6)*c(Q3 + Q4))*c(Q7) - s(Q5)*s(Q7)*c(Q3 + Q4)$	$(s(Q6)*s(Q3 + Q4) - c(Q5)*c(Q6)*c(Q3 + Q4))*s(Q7) - s(Q5)*c(Q7)*c(Q3 + Q4)$	$s(Q6)*c(Q5)*c(Q3 + Q4) + s(Q3 + Q4)*c(Q6)$	$-0.1985*s(Q6)*c(Q5)*c(Q3 + Q4) - 0.1985*s(Q3 + Q4)*c(Q6) - 0.9055*s(Q3 + Q4) + 1.0*c(Q3) + 0.175*c(Q3 + Q4) + 1.7364$
0	0	0	1



Erklärung zur selbstständigen Bearbeitung einer Abschlussarbeit

Gemäß der Allgemeinen Prüfungs- und Studienordnung ist zusammen mit der Abschlussarbeit eine schriftliche Erklärung abzugeben, in der der Studierende bestätigt, dass die Abschlussarbeit „– bei einer Gruppenarbeit die entsprechend gekennzeichneten Teile der Arbeit [(§ 18 Abs. 1 APSO-TI-BM bzw. § 21 Abs. 1 APSO-INGI)] – ohne fremde Hilfe selbstständig verfasst und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt wurden. Wörtlich oder dem Sinn nach aus anderen Werken entnommene Stellen sind unter Angabe der Quellen kenntlich zu machen.“

Quelle: § 16 Abs. 5 APSO-TI-BM bzw. § 15 Abs. 6 APSO-INGI

Dieses Blatt, mit der folgenden Erklärung, ist nach Fertigstellung der Abschlussarbeit durch den Studierenden auszufüllen und jeweils mit Originalunterschrift als letztes Blatt in das Prüfungsexemplar der Abschlussarbeit einzubinden.

Eine unrichtig abgegebene Erklärung kann -auch nachträglich- zur Ungültigkeit des Studienabschlusses führen.

Erklärung zur selbstständigen Bearbeitung der Arbeit

Hiermit versichere ich,

Name: _____

Vorname: _____

dass ich die vorliegende _____ – bzw. bei einer Gruppenarbeit die entsprechend gekennzeichneten Teile der Arbeit – mit dem Thema:

ohne fremde Hilfe selbstständig verfasst und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Wörtlich oder dem Sinn nach aus anderen Werken entnommene Stellen sind unter Angabe der Quellen kenntlich gemacht.

- die folgende Aussage ist bei Gruppenarbeiten auszufüllen und entfällt bei Einzelarbeiten -

Die Kennzeichnung der von mir erstellten und verantworteten Teile der _____ ist erfolgt durch:

Ort

Datum

Unterschrift im Original