



Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Hamburg University of Applied Sciences

Masterarbeit

Alexander Jannsen

Untersuchung numerischer Modelle hinsichtlich ihrer Eignung zur Beschreibung des dynamischen Faserauszuges

Fakultät Technik und Informatik
Department Fahrzeugtechnik und Flugzeugbau

Faculty of Engineering and Computer Science
Department of Automotive and
Aeronautical Engineering

Alexander Jannsen

**Untersuchung numerischer Modelle
hinsichtlich ihrer Eignung zur
Beschreibung des dynamischen
Faserauszuges**

Masterarbeit eingereicht im Rahmen der Masterprüfung

im Studiengang Fahrzeugbau
am Department Fahrzeugtechnik und Flugzeugbau
der Fakultät Technik und Informatik
der Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg

in Zusammenarbeit mit:
Helmut-Schmidt-Universität / Universität der Bundeswehr
Professur für Statik und Dynamik
Friedrich-Ebert-Damm 245
22159 Hamburg

Erstprüfer: Prof. Dr.-Ing. Ralf Ahrens
Zweitprüfer: Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Wolfgang Weber

Abgabedatum: 13.03.2025

Zusammenfassung

Alexander Jannsen

Thema der Masterthesis

Untersuchung numerischer Modelle hinsichtlich ihrer Eignung zur Beschreibung des dynamischen Faserauszuges

Stichworte

Bewehrter Beton, Dynamischer Faserauszug, Shear-Lag-Modell, numerisches Modell, Schubspannungsverlauf, Partikelgeschwindigkeit, Faserauszugsversuch

Kurzzusammenfassung

Diese Arbeit dient der Untersuchung von numerischen Modellen, welche den dynamischen Faserauszug darstellen. Zur Beschreibung dieses Prozesses wurden numerische Modelle erstellt, die Fasern und Matrizen abbilden. Darüber hinaus wurden Idealisierungsmöglichkeiten des Übergangsbereiches zwischen Faser und Matrix modelliert, wobei Haftung und Reibung eine wesentliche Rolle spielten. Daraus entstanden zwei numerische Modelle, die beide Mechanismen im Übergangsbereich darstellen. Diese Modelle wurden mit analytischen Modellen, sogenannten Shear-Lag-Modellen, verglichen. Wichtige physikalische Größen waren dabei die Schubspannung in der Übergangsfläche zwischen Faser und Matrix sowie deren Partikelgeschwindigkeiten. Die Haftungsmodellierung konnte den Schubspannungsverlauf des Shear-Lag-Modells qualitativ wiedergeben. Des Weiteren konnte durch die Anwendung von rotationssymmetrischen Elementen eine Einsparung von Rechenzeit gegenüber Volumenelementen erreicht werden. Das rotationssymmetrische Modell zur Haftungssimulation wurde mit Parametern aus einem Faserauszugsversuch modifiziert und mit den experimentellen Ergebnissen verglichen. Eine charakteristische Kraft-Verschiebungskurve aus dem Versuch konnte nicht reproduziert werden, es zeigte sich, dass die Reaktionskräfte im Modell auf die Faserspitze beschränkt waren. Dies stellt neben einer präziseren Abbildung von Haftung und Reibung einen Ausgangspunkt für weitere Forschungen dar.

Alexander Jannsen

Title of the paper

Investigation of numerical models with regard to their suitability for describing the dynamic fiber pull-out

Keywords

Reinforcement, dynamic fiber pull-out, shear-lag-model, numerical model, shear stress distribution, particle velocity, fiber pull-out test

Abstract

This work serves to investigate numerical models that represent the dynamic fiber pull-out. In order to describe this process, numerical models that display fiber and matrix were created. Furthermore, idealization possibilities for the interface between fiber and matrix were modelled, where cohesion and friction played an important role. This resulted in two numerical models that depicted both mechanisms in the interface. These models were compared to analytical models, so-called shear-lag-models. Important physical quantities were the shear stress in the interface between fiber and matrix as well as their particle velocities. The cohesion model was able to qualitatively reproduce the shear stress distribution of the shear-lag-model. Furthermore, the use of axisymmetric elements cost less computing time compared to volume elements. The axisymmetric model for adhesion was modified with parameters of a fiber pull-out test and compared to the experimental results. A characteristic force-displacement curve from the experiment could not be reproduced since the reaction forces of the model were limited to the fiber tip. This represents further research possibilities, next to a more precise depiction of cohesion and friction.



FAKULTÄT TECHNIK UND INFORMATIK
DEPARTMENT FAHRZEUGTECHNIK UND FLUGZEUGBAU
Prof. Dr.-Ing. Ralf Ahrens

Aufgabenstellung für die Masterarbeit
von Herrn Alexander Jannsen, B.Eng.

**Untersuchung numerischer Modelle hinsichtlich ihrer Eignung zur
Beschreibung des dynamischen Faserauszuges**

Vorbemerkung:

Das dynamische Verhalten (vorgeschädigter) Strukturen aus Verbundmaterialien, z. B. Carbonbeton oder faserverstärkte Kunststoffe, wird maßgeblich durch den dynamischen Auszug von Bewehrungsfasern beeinflusst.

Aufgabenstellung:

In dieser Arbeit sollen verschiedene numerische Modelle in einem Finite-Elemente-Programm umgesetzt und hinsichtlich ihrer Eignung zur Beschreibung des dynamischen Faserauszuges untersucht werden.

Die Aufgabe umfasst im Einzelnen:

- Literaturrecherche zum Thema
- kritische Auseinandersetzung mit Idealisierungen des Übergangsbereiches von Faser zur umgebenden Matrix
- skript-gesteuerte Erstellung der Eingabedatei für die Geometrie, die Rand- und Übergangsbedingungen, die Belastungen sowie für weitere Berechnungsdetails
- Durchführung von Berechnungen mit unterschiedlichen Modellierungsvarianten und Vergleich mit Referenzlösungen aus der Literatur
- Diskussion und Bewertung der erhaltenen Erkenntnisse
- Ausblick auf Erweiterungsmöglichkeiten im Rahmen fortführender Arbeiten

Die numerische Umsetzung soll möglichst mittels Abaqus® sowie Matlab® oder Python erfolgen. Weitere Details zur Aufgabenstellung werden in den Konsultationen festgelegt.

Die Bearbeitung erfolgt in Zusammenarbeit der Professur für Statik und Dynamik der Helmut-Schmidt-Universität / Universität der Bundeswehr, Hamburg, Prof. Dr.-Ing. habil. W. Weber.

Hamburg, den 16.09.2024
gez. R. Ahrens

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	3
Tabellenverzeichnis	6
1. Einleitung	10
1.1. Motivation	10
1.2. Stand der Forschung	10
1.3. Inhalt der Arbeit	10
2. Theoretische Grundlagen	11
2.1. Mechanismen des Faserauszugs	11
2.2. Darstellung des Übergangsbereiches zwischen Faser und Matrix	13
2.2.1. Haftung - Traction Separation Law	13
2.2.2. Reibung - Friction Law	14
2.3. Analytische Shear-Lag-Modelle	15
2.3.1. Shear-Lag-Modell von AZZAM	15
2.3.2. Shear-Lag-Modell von SRIDHAR et al.	23
3. Numerische Modelle	30
3.1. Untersuchung der Solver für dynamische Probleme in ABAQUS	30
3.1.1. Implizite Zeitintegration	30
3.1.2. Explizite Zeitintegration	32
3.1.3. Wahl des Zeitintegrationsverfahrens	34
3.2. Darstellung des Übergangsbereiches zwischen Faser und Matrix in ABAQUS	35
3.2.1. Modellierung der Haftung und Schädigung des Übergangsbereiches als Surface-Based Cohesive Behavior	35
3.2.2. Modellierung der Haftung im Übergangsbereich als Cohesive Element	37
3.2.3. Modellierung der Reibung im Übergangsbereich	37
3.3. Untersuchung der Modellierungsmöglichkeiten des Faserverbundes	39
3.3.1. Rotationssymmetrisches Modell aus Axisymmetric Elements	40
3.3.2. Viertelmodell aus Volumenelementen	41
4. Analytische Validierung der Numerischen Modelle	43
4.1. Validierung mit dem Shear-Lag-Modell nach AZZAM	43
4.1.1. Hafttrennung mit dem rotationssymmetrischen Modell	45
4.1.2. Hafttrennung mit dem Viertelmodell	48
4.1.3. Auswertung der Modellvergleiche und Vergleich mit Literatur	50
4.2. Validierung mit dem Shear-Lag-Modell nach SRIDHAR et al.	52
4.2.1. Reibungssimulation mit dem rotationssymmetrischen Modell	57
4.2.2. Reibungssimulation mit dem Viertelmodell	62
4.2.3. Auswertung der Modellvergleiche und Vergleich mit Literatur	65

5. Abbildung von Experimenten mit einem numerischen Modell	68
5.1. Versuche für den Einzelfaserauszug von SCHEFFLER et al.	68
5.1.1. Versuchsaufbau und Ergebnisse des Einzelfaserauszug-Versuches .	68
5.1.2. Untersuchung der Messposition für die Verschiebung	70
5.2. Darstellung des Versuches als numerisches Modell	73
5.3. Vergleich des Numerischen Modells mit den Versuchsergebnissen	75
6. Zusammenfassung der Ergebnisse	82
7. Fazit und Ausblick	83
Literatur	85
A. Anhang A	88
B. Anhang B	93
C. Anhang C	96

Abbildungsverzeichnis

2.1. Schematisches Kraft-Weg-Diagramm des Faserauszugs ([5])	12
2.2. Riss-Moden ([12], S. 69)	12
2.3. Schematisches Traction Separation Law (in Anlehnung an [13])	14
2.4. (a) Schematische Darstellung des Faser-Matrix-Verbundes, (b) Infinitesimal kleines Faserelement (in Anlehnung an [4])	16
2.5. (a) Freikörperbild des Faser-Matrix-Verbundes, (b) infinitesimal kleines Faser-Matrix-Element (in Anlehnung an [4])	17
2.6. Traction Separation Law mit Reibung (in Anlehnung an [4])	19
2.7. (a) Repräsentativer Verlauf der Übergangsflächen-Schubspannung, (b) Repräsentativer Verlauf des Schlupfes (in Anlehnung an [4])	23
2.8. Schematische Darstellung des Faser-Matrix-Verbundes (in Anlehnung an [2])	23
2.9. Abhängigkeit der Fälle Pure Slip, Slip-Stick und Slip-Reverse Slip von dem Wellengeschwindigkeitsverhältnis C , dem Modulverhältnis φ und der inversen Lastrate k ([2])	26
2.10. Partikelgeschwindigkeiten von Faser (durchgezogene Linien) und Matrix (gestrichelte Linien) für die Fälle I (a), II (b) und III (c) mit den Parametern $\varphi = 2,00$, $k = 0,05$, $\tau = 0,005$ und $T = 10$ ([2])	29
3.1. Konstante Beschleunigung ([17], S. 227)	32
3.2. Zentrales Differenzenverfahren ([17], S. 232)	33
3.3. Numerische Schwingung eines Stabes	34
3.4. Friction Law für numerische Analyse ([2])	38
3.5. Shear stress versus elastic slip while sticking (nach [23])	38
3.6. Reibung als <i>Surface Based Cohesive Behavior</i> (nach [20])	39
3.7. Axisymmetric Element ([26])	41
3.8. (a) Meldung beim Versuch, CAX4-Elemente in ABAQUS/Explicit zu verwenden, (b) Sweep eines Faser-Matrix-Verbundes aus CAX4R-Elementen in ABAQUS	41
3.9. (a) Schematisches C3D8R-Element ([28]), (b) Viertelmodell eines Faser-Matrix-Verbundes	42
4.1. (a) Rotationssymmetrisches Modell (b) Viertelmodell	45
4.2. Numerisches Modell der Faser und des Übergangsbereiches mit Cohesive Elements ([4])	45
4.3. Schlupf entlang der Übergangsfläche für das rotationssymmetrische und das SL-Modell	46
4.4. (a) Schubspannung entlang der Übergangsfläche für das rotationssymmetrische und das SL-Modell, (b) Prozentuale Abweichung zwischen Shear-Lag-Modell und numerischem Modell	47
4.5. Schlupf entlang der Übergangsfläche für das Viertel- und das SL-Modell	48
4.6. (a) Schubspannung entlang der Übergangsfläche für das Viertel- und das SL-Modell, (b) Prozentuale Abweichung zwischen Shear-Lag-Modell und numerischem Modell	49

4.7. Schubspannung für numerisches und analytisches Modell bei einer Netzfeinheit von $l_e = 0,001 \text{ mm}$	51
4.8. Schlupf (a) und Schubspannung (b) entlang der Übergangsfläche für das numerische und das analytische Modell von AZZAM zu den Zeitpunkten $t_1 = 5,23 \times 10^{-5} \text{ s}$ und $t_2 = 6,2832 \times 10^{-5} \text{ s}$ ([4])	52
4.9. Numerisches Modell von SRIDHAR et al. ([2])	52
4.10. Partikelgeschwindigkeiten entlang der Übergangsfläche mit den Parametern $C^2 = 0,1$, $\varphi = 2,00$, $k = 0,05$, $\tau = 0,005$ und $T = 10$. Die gestrichelten Linien sind die Matrixpartikelgeschwindigkeiten, die Durchgezogenen die Faserpartikelgeschwindigkeiten. Des Weiteren sind die roten Linien die Faserpartikelgeschwindigkeiten der Bereiche 2 und 3	54
4.11. (a) Rotationssymmetrisches Modell (b) Viertelmodell	55
4.12. Faser- und Matrixpartikelgeschwindigkeiten entlang der Prozesszone für das analytische und das rotationssymmetrischen Modell mit Reibung durch Shear stress versus elastic slip für den Fall I: Pure Slip (a) und Fall II: Slip-Stick (b). Durchgezogene Linien sind der Faser, gestrichelte Linien der Matrix zuzuordnen. Des Weiteren markieren dünne Linien das analytische und breite Linien das numerische Modell	59
4.13. Faser- und Matrixpartikelgeschwindigkeiten entlang der Prozesszone für das analytische und das rotationssymmetrischen Modell mit Reibung durch Surface-Bases Cohesive Behavior für den Fall I: Pure Slip (a) und Fall II: Slip-Stick (b). Durchgezogene Linien sind der Faser, gestrichelte Linien der Matrix zuzuordnen. Des Weiteren markieren dünne Linien das analytische und breite Linien das numerische Modell	61
4.14. Faser- und Matrixpartikelgeschwindigkeiten entlang der Prozesszone für das analytische und das Viertelmodell mit Reibung durch Shear stress versus elastic slip für den Fall I: Pure Slip (a) und Fall II: Slip-Stick (b). Durchgezogene Linien sind der Faser, gestrichelte Linien der Matrix zuzuordnen. Des Weiteren markieren dünne Linien das analytische und breite Linien das numerische Modell	63
4.15. Faser- und Matrixpartikelgeschwindigkeiten entlang der Prozesszone für das analytische und das Viertelmodell mit Reibung durch Surface-Bases Cohesive Behavior für den Fall I: Pure Slip (a) und Fall II: Slip-Stick (b). Durchgezogene Linien sind der Faser, gestrichelte Linien der Matrix zuzuordnen. Des Weiteren markieren dünne Linien das analytische und breite Linien das numerische Modell	64
4.16. Beispielhafter Schubspannungsverlauf entlang der Prozesszone	66
4.17. Faser- und Matrixpartikelgeschwindigkeiten entlang der Prozesszone für das analytische und das numerische Modell für den Fall I: Pure Slip (a) und Fall II: Slip-Stick (b). Gestrichelte Linien sind der Faser, durchgezogene Linien der Matrix zuzuordnen. Nach (Sridhar, Yang und Cox [2]) markieren dünne Linien das analytische und breite Linien das numerische Modell, jedoch erscheinen alle Linien in ähnlicher Strichstärke ([2])	67

5.1. (a) Ergebnisse der dynamischen Faserauszugsversuche für Fasern mit verschiedenen Beschichtungen (1: Unbeschichtete Faser, 2: Polypropylen-Beschichtung, 3: Styrol-Butadien-Kautschuk-Beschichtung. (b) Schematisches Kraft- Verschiebungs-Diagramm des Faserauszugs ([5])	70
5.2. Schematisches Modell des Faserauszugs	71
5.3. (a) Quasistatische Faserauszugsversuche für Fasern mit verschiedenen Beschichtungen ([5]) (b) Mit GUI ([34]) in MATLAB® aus (a) entnommene Messdaten	72
5.4. (a) Annäherung einer Verschiebung mit konstanter Geschwindigkeit durch eine harmonische Anregung, (b) Rotationssymmetrisches Modell mit freier Länge	75
5.5. Kraft- Verschiebungs-Kurve aus Simulation und quasistatischem Versuch ([10])	76
5.6. Schubspannung (a) und Schlupf (b) entlang der Übergangsfläche für das analytische und das numerische Modell mit den Parametern aus den Versuchen von ([5])	77
5.7. (a) Schubspannung entlang der Übergangsfläche bei linear ansteigender Verschiebung des Faserendes zu drei Zeitpunkten, (b) Vergleich der Schubspannung von harmonischer und linear ansteigender Verschiebung am Faserende	79
5.8. (a) Kraft-Weg-Diagramm für den Punkt II, (b) Reaktionskräfte im rotationssymmetrischen Modell (c) Reaktionskräfte im Viertelmodell	80

Tabellenverzeichnis

3.1. Eigenschaften des impliziten und expliziten Zeitschrittintegrationsverfahrens (nach [17], S. 244)	35
3.2. Veränderbare Parameter für numerische Modelle im PYTHON-Sript	40
4.1. Parameter für das numerische Modell. Die Tabelle basiert größtenteils auf Daten von ([4])	44
4.2. Parameter für das analytische Shear-Lag-Modell und das numerische Modell (a) und Parameter für die Reibung in der Übergangsfläche (b). Die Tabelle basiert zum Teil auf Daten von ([2])	56
4.3. Zeitschritte für die Berechnung des rotationssymmetrischen Modells	57
4.4. Zeitschritte für die Berechnung des Viertelmodells	62
5.1. Geometrische und mechanische Eigenschaften von Faser und Matrix (nach [5])	69
5.2. Ergebnisse der Faserauszugs-Versuche für verschiedene Beschichtungen und Durchmesser (nach [5])	70
5.3. Ergebnisse der Untersuchung des Unterschiedes zwischen Punkt <i>I</i> und Punkt <i>II</i>	73

Symbolverzeichnis

Kleine lateinische Buchstaben

a	Beschleunigung in mm/s ²
c	Wellengeschwindigkeit in mm/S
d	Durchmesser in mm
f	Faservolumenanteil
k	Inverse Lastrate
l	Länge in mm
p	Spannung in MPa
r	Radius in mm
s	Schlupf/Trennung in mm
t	Zeit in s
u	Verschiebung in mm
v	Geschwindigkeit in mm/s
y	Antwortamplitude in mm
z	z-Koordinate in mm

Große lateinische Buchstaben

A	Fläche in mm ²
C	Schallgeschwindigkeitsverhältnis
E	Elastizitätsmodul in MPa
F	Kraft in N
K	Steifigkeit in MPa/mm
M	Masse in tonne
N	Normalkraft in N
P	Auszugskraft in N
R	Reaktionskraft in N
T	Normierte Zeit

U Normierte Verschiebung

V Volumen in mm³

Z Normierte z-Koordinate

Kleine griechische Buchstaben

β Kontrollkonstante

δ Schadensvariable

ϵ Dehnung

η Normierte Frontgeschwindigkeit

γ Kontrollkonstante

λ Erregerkreisfrequenz in 1/s

ν Querkontraktionszahl

ϕ Modulverhältnis

ρ Dichte in tonne/mm³

σ Normalspannung in MPa

τ Schubspannung in MPa

ξ Abweichung in Prozent

ζ Shear-Lag-Parameter nach Nayfeh

Große griechische Buchstaben

Ψ Zugspannung in MPa

Θ Substitution für normierte Geschwindigkeit

Tiefgestellte Indizes

a Axial

Abaqus In Abaqus berechnet

analytisch Analytisch

coh Kohäsiv

cut Grenzfrequenz

e Element

embedded	Eingebettet
f	Faser
i	Rissmodus
j	Bereich in der Prozesszone
k	Zählindex
krit	Kritisch
L	Untere Grenze Fall II: Slip-Stick
m	Matrix
max	Maximum
min	Minimum
n	Normalenrichtung
numerisch	Numerisch
q	Faser/Matrix
r	Reibung
r0	Unbeschädigte Zone der Übergangsfläche
s	Tangentialrichtung
t	Tangentialrichtung
theoretisch	Nach einer Formel berechnet
U	Obere Grenze Fall II: Slip-Stick

Hochgestellte Indizes

0	Schadensinitiation
f	Fail
m	Schadensinitiation
r	Reibung
tan	Plastischer Bereich

1. Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Untersuchung numerischer Modelle hinsichtlich ihrer Eignung zur Beschreibung des dynamischen Faserauszugs.

1.1. Motivation

Bewehrungen sind von hoher Bedeutung für Beton. Bei dynamischen Lasten können Risse im Beton entstehen, welche durch die Bewehrungen überbrückt werden ([1]). Eine Untersuchung numerischer Modelle für den Fall, dass die Bewehrungsfasern infolge dynamischen Lasten aus dem Beton gezogen werden, soll Gegenstand dieser Arbeit sein.

1.2. Stand der Forschung

Der dynamische Faserauszug wurde schon in Form von analytischen Modellen, Versuchen und numerischen Modellen behandelt. Analytisch wurde der dynamische Faserauszug z. B. erforscht durch ([2, 3, 4]). Dabei entwickelten ([3, 4]) Modelle, welche die Hafttrennung beschreiben, während das Modell von ([2]) die Reibung während des Auszugs darstellt. Experimentell wurde der dynamische Auszug einzelner Bewehrungsfasern z. B. durch ([5, 6, 7, 8]) untersucht. Dabei wurden z. T. auch Parameter ermittelt, welche die Haftung und Reibung in der Übergangsfläche beschreiben ([5, 7]). Es gibt auch Versuche zum Auszug von verschiedenen faserverstärkten Kunststoff-Lagen aus Beton ([9]). Modellierungsvarianten für Bewehrungen sind z. B. zylindrische Modelle ([4]) oder zylindrische Viertelmodelle ([10]), sowie ebene Modelle (Plane Stress Models) ([2]). Häufig kommen zur Beschreibung der Übergangsfläche Cohesive Elements zum Einsatz ([2, 4, 10]). Numerische Modelle für den dynamischen Faserauszug sind z. B. in ([4, 2]) zu finden. Dort werden sie mit analytischen Modellen verglichen. In ([10]) wird ein numerisches Modell mit einem quasistatischen Faserauszug verglichen. In dieser Arbeit sollen numerische Modelle zunächst mit analytischen Modellen validiert und anschließend mit einem dynamischen Einzelfaserauszugsversuch verglichen werden.

1.3. Inhalt der Arbeit

Zunächst werden in dieser Arbeit in Kapitel 2 die theoretischen Grundlagen wie die Mechanismen des Faserauszugs sowie die Darstellung des Übergangsbereiches zwischen Faser und Matrix beschrieben. Weiterhin werden analytische Modelle vorgestellt, welche den Faserauszug beschreiben. In Kapitel 3 werden numerische Modellierungsmöglichkeiten für die Übergangsfläche sowie für Faser und Matrix dargestellt, aus denen zwei Modelle mit drei Übergangsflächenmodellierungen hervorgehen. Diese werden in Kapitel 4 mit den in Kapitel 2 vorgestellten analytischen Modellen verglichen. Kapitel 5 kombiniert ein numerisches Modell mit Parametern aus einem Versuch. Die Ergebnisse dieser Arbeit werden in Kapitel 6 zusammengefasst. Abschließend werden in Kapitel 7 die vorherigen Kapitel sowie die Erkenntnisse dieser Arbeit betrachtet und ein Ausblick gegeben.

Die im Zuge dieser Arbeit erstellten MATLAB®- und PYTHON-Skripte sowie ABAQUS-Dateien sind auf beigefügten elektronischen Datenträgern (CD's) enthalten.

2. Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel sollen die Grundlagen betrachtet werden, welche den Faserauszug und insbesondere den dynamischen Faserauszug beschreiben. Dafür werden in Abschnitt 2.1 zunächst die Mechanismen des Faserauszugs erläutert. Anschließend behandelt Abschnitt 2.2 Idealisierungen des Übergangsbereiches zwischen Faser und Matrix. Abschließend werden in Abschnitt 2.3 verschiedene Shear-Lag-Modelle, welche den dynamischen Faserauszug analytisch beschreiben, betrachtet.

2.1. Mechanismen des Faserauszugs

Beim Faserauszug können vier Mechanismen auftreten ([11]):

1. Elastischer Faserauszug
2. Plastischer Faserauszug
3. Faser-Versagen beim Auszug
4. Matrix-Versagen beim Auszug.

Das Versagen von Faser oder Matrix wird in dieser Arbeit nicht betrachtet, stattdessen wird das Versagen der Verbindung zwischen diesen untersucht.

Die Hafttrennung der Übergangsfläche wird durch eine Rissausbreitung in dieser verursacht. In den bereits abgelösten Regionen tritt Reibung auf. Abbildung 2.1 zeigt beispielhaft ein Kraft-Verschiebungs-Diagramm für einen Faserauszug. Erreicht die Auszugskraft den Punkt *A*, entsteht ein Riss in der Verbindung zwischen Faser und Matrix. Zwischen den Punkten *A* und *B* wird der Riss größer. Der Faserauszugskraft wirken Haft- sowie Reibkräfte entgegen, aufgrund letzterer nimmt die Auszugskraft weiter zu. Beim Punkt *B* liegt die maximale Auszugskraft vor, die intakte Region der Verbindung erreicht einen Wert, dessen Überschreiten eine Abnahme der Kraft zufolge hat. Ab Punkt *C* ist die Verbindung zwischen Faser und Matrix vollständig aufgebrochen, die restliche Kraft, welche zwischen den Punkten *C* und *D* auftritt, ist auf Reibung zurückzuführen. Beim Erreichen des Punktes *D* ist die Faser vollständig herausgezogen ([5]).

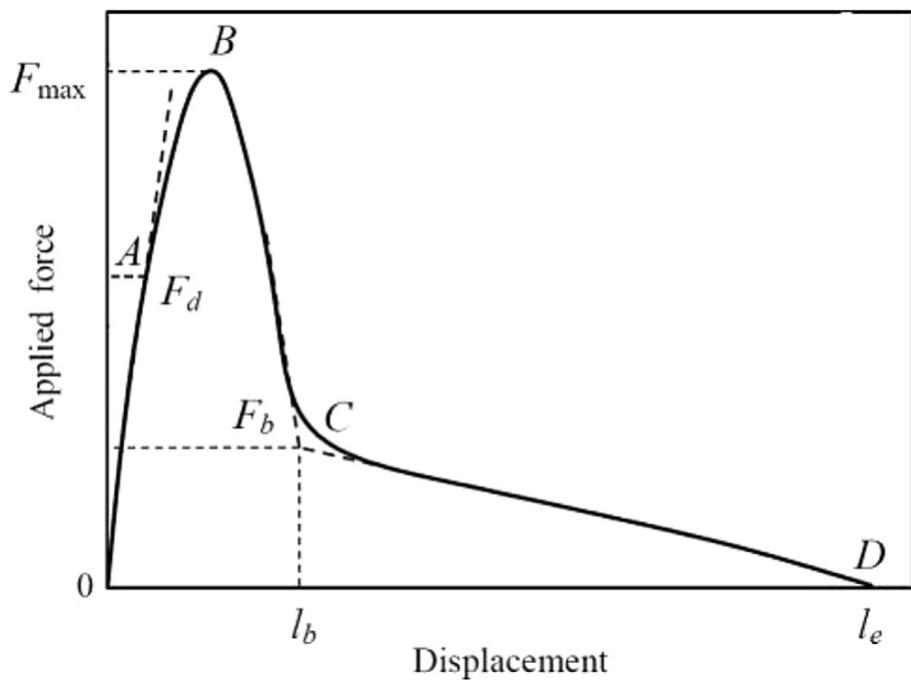


Abbildung 2.1: Schematisches Kraft-Weg-Diagramm des Faserauszugs ([5])

Der sich in der Verbindung ausbreitende Riss wird mit drei Moden unterschieden, welche in Abbildung 2.2 dargestellt sind. Modus I beschreibt die Öffnung des Risses in y-Richtung, welche zur x, z-Ebene symmetrisch ist. Im Falle des Modus II bewegen sich die Risssoberflächen relativ zueinander in x-Richtung, was zu einer asymmetrischen Trennung führt. Bei Modus III entsteht die Trennung durch eine Relativbewegung in z-Richtung ([12], S. 69). Im Zuge dieser Arbeit sollen Modus II-Risse für Relativverschiebungen zwischen Faser und Matrix entlang der Faserachse untersucht werden.

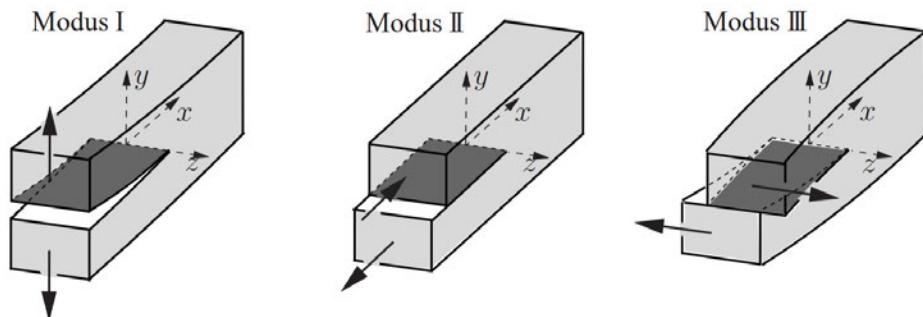


Abbildung 2.2: Riss-Moden ([12], S. 69)

2.2. Darstellung des Übergangsbereiches zwischen Faser und Matrix

Beim Modellieren des Faserauszugs ist die Darstellung der Übergangsfläche von großer Bedeutung. In Abschnitt 2.1 wurde gezeigt, dass beim Faserauszug sowohl eine (auftrennbare) Haftung als auch Reibung auftreten. In diesem Abschnitt sollen Idealisierungsmöglichkeiten für beide Mechanismen dargestellt werden. Zunächst wird in Unterabschnitt 2.2.1 eine Modellierung der Verbindung von Faser und Matrix sowie deren Schädigung in Form des *Traction Separation Law* behandelt. Anschließend wird in Unterabschnitt 2.2.2 eine Modellierung der Reibung mit einem Friction Law nach dem Versagen der Verbindung erläutert.

2.2.1. Haftung - Traction Separation Law

Das Traction Separation Law (TSL, deutsch: Spannungs-Trennungs-Gesetz), beschreibt die Schädigung der Übergangsfläche zwischen Faser und Matrix, in Abhängigkeit der Trennung zwischen diesen beiden. Abbildung 2.3 zeigt beispielhaft ein TSL in Anlehnung an ABDULLA et al. ([13]). Bis zur Schadensinitiierung bei s_i^m und Ψ_i^m (der hochgestellte Index m steht für *maximal*) wird der linear elastische Zusammenhang der Übergangsfläche beschrieben durch

$$\underline{\Psi} = \begin{Bmatrix} \Psi_I \\ \Psi_{II} \\ \Psi_{III} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_I^0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{II}^0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{III}^0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_I \\ s_{II} \\ s_{III} \end{Bmatrix} = \underline{K}^0 \underline{s}. \quad (2.1)$$

Dabei ist $\underline{\Psi}$ der Zugspannungs- und \underline{s} der Trennungsvektor zwischen Faser und Matrix, die Matrix \underline{K}^0 enthält die Steifigkeiten ([13]). Die Indizes weisen auf die Zugehörigkeit der Komponenten zu den in Abschnitt 2.1 beschriebenen Rissmodi hin. In Anlehnung an AZZAM ([4]) wird die Schadens-Evolution des TSL dargestellt. Sobald s_i^m überschritten ist, nimmt die Steifigkeit K_i^{tan} ab mit

$$K_i^{tan}(s_i) = (1 - \delta(s_i))K_i^0. \quad (2.2)$$

Die darin vorkommende Schadensvariable $\delta(s_i)$ wird durch das lineare Schadensevolutionsgesetz

$$\delta(s_i) = \frac{(s_i - s_i^m)s_i^f}{(s_i^f - s_i^m)s_i} \quad (2.3)$$

beschrieben, wobei der Schaden $\delta(s_i)$ in einem Intervall von [0 1] liegt ([4]). Der Wert s_i^f ist die Trennung, bei der Faser und Matrix vollständig voneinander separiert werden. Dies wird durch den hochgestellten Index f (fail) beschrieben ([13]). Des Weiteren nimmt die Zugspannung Ψ_i ab mit

$$\Psi_i(s_i) = (1 - \delta(s_i))K_i^0 s_i \quad (2.4)$$

([4]).

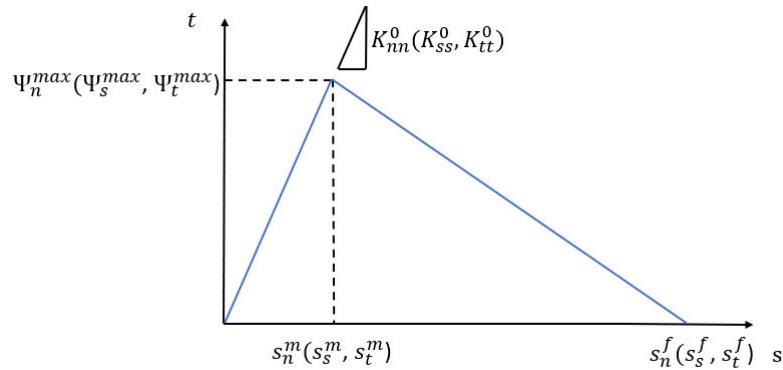


Abbildung 2.3: Schematisches Traction Separation Law (in Anlehnung an [13])

2.2.2. Reibung - Friction Law

Sobald Faser und Matrix vollständig voneinander getrennt sind, ist der restliche Widerstand gegen den Faserauszug auf Reibung zurückzuführen. In Abbildung 2.1 ist dies zwischen den Punkten C und D der Fall ([5]). Gleichung (2.5) zeigt ein Friction Law (FL, deutsch: Reibungsgesetz), bei dem eine konstante Reibungs-Schubspannung τ_r abhängig ist von der Relativgeschwindigkeit zwischen Faser und Matrix,

$$\tau_r = \begin{cases} \tau_0 & (\dot{u}_f - \dot{u}_m < 0), \\ \tilde{\tau} & (\dot{u}_f - \dot{u}_m = 0), \\ -\tau_0 & (\dot{u}_f - \dot{u}_m > 0). \end{cases} \quad (2.5)$$

Darin ist \dot{u}_f die Geschwindigkeit der Faser und \dot{u}_m die Geschwindigkeit der Matrix. Liegt eine Relativgeschwindigkeit zwischen Faser und Matrix vor, so ist die Reibungs-Schubspannung einheitlich und konstant. Liegt diese nicht vor, so ist sie unbestimmt, wobei $|\tilde{\tau}| < \tau_0$ ist. Die Annahme, dass die Reibung einheitlich, sowie des Weiteren zeit- und ratenunabhängig ist, wird damit begründet, dass die vier Effekte, welche die Reibung beim Faserauszug beeinflussen, vernachlässigt werden können. Bei den Effekten handelt es sich um (1) den Poisson-Effekt, durch den der Faserradius infolge der Faserdehnung sinkt und somit die Normalspannung auf die Übergangsfläche verringert; (2) die Restdruckspannungen auf die Übergangsfläche aufgrund ungleichen Schrumpfens bei der Abkühlung; (3) Rauheitseffekte, welche die Normalspannungen auf die Übergangsfläche beim Faserauszug vergrößern; und (4) dynamische Effekte. Dabei heben sich jedoch Poisson- und Rauheitseffekte gegenseitig auf. Des Weiteren haben Tests gezeigt, dass Reibung nach einer Zustandsänderung für kurze Zeiten ($\sim 1\mu s$), welche für dieses Modell angenommen werden, unverändert bleibt ([2]).

2.3. Analytische Shear-Lag-Modelle

Der Begriff Shear-Lag-Model (SLM, deutsch Schubverzerrungs-Modell ([14], S. 28)), ist ursprünglich zurückzuführen auf die Biegeanalyse von Trägern mit weiten Flanschen, für die Schubspannungen und Dehnungen infolge dieser vernachlässigt werden. Die realen Biegungen “hinken” (englisch: to lag) den analytisch berechneten hinterher, da in der Realität Schubspannungen (englisch: shear stresses) in den Flanschen auftreten, wodurch sich der Begriff Shear-Lag-Model ergibt ([15]).

Für Komposit-Materialien wurde der Begriff ursprünglich 1952 von COX als Methode der Analyse von Spannungsübertragungen eingeführt. Die Schubspannung im Übergangsbereich τ zwischen Faser und Matrix berechnet sich dabei aus der durchschnittlichen Faser-Axialspannung $\langle\sigma_f\rangle$ mit

$$\frac{\partial\langle\sigma_f\rangle}{\partial z} = -\frac{2\tau}{r_1}, \quad (2.6)$$

wobei r_1 der Faserradius ist ([15]). In den folgenden Unterabschnitten werden SLM vorgestellt, welche den dynamischen Faserauszug beschreiben. Im Zuge dieser Arbeit werden sie auch als analytische Modelle bezeichnet. Für eine einheitliche Darstellung verschiedener analytischer und numerischer Modelle werden im Folgenden einige Indizes und Zeichen aus den Literaturquellen abgeändert. Die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten SLM wurden mit dem Programm MATLAB® in den Versionen R2023b und R2024a umgesetzt. Das MATLAB®-Skript ist in Anhang A zu finden.

2.3.1. Shear-Lag-Modell von AZZAM

AZZAM veröffentlichte 2016 eine Methode, den dynamischen Faserauszug analytisch zu berechnen, wobei die Faserspitze harmonisch angeregt wird. Abbildung 2.4 (a) zeigt schematisch das Modell des Faser-Matrix-Verbundes in Anlehnung an das Modell von AZZAM. Darin sind für das Modell verwendete Material- und Geometrieeigenschaften sowie an der Faser und in der Übergangsfläche wirkende Spannungen und Kräfte erkennbar. Für dieses SLM gilt zunächst die Annahme, dass Faser und Matrix linear-elastisch und homogen sind. Im weiteren Verlauf dieses Unterabschnittes wird die Matrix als dehnstarr angenommen werden, um die Ermittlung analytischer Ergebnisse zu vereinfachen. Eine Ratenabhängigkeit von Faser, Matrix und Übergangsbereich wird aus diesem Grund ebenfalls vernachlässigt ([4]). Sowohl Faser als auch Matrix haben einen Elastizitätsmodul E_q , eine Dichte ρ_q , als auch eine Fläche A_q , wobei die Faser mit dem Buchstaben f , die Matrix mit dem Buchstaben m indiziert ist. Die Faser hat des Weiteren den Faserumfang \bar{a} . Die Abbildung 2.4 (b) stellt den Freischnitt eines infinitesimal kleinen Faserelementes dar, dessen dynamisches Gleichgewicht in z -Richtung

$$A_f \frac{\partial}{\partial z} \sigma_f(z, t) dz = \rho_f A_f dz \ddot{u}_f(z, t) - \bar{a} dz \tau(z, t) \quad (2.7)$$

lautet. Die Verschiebungen von Faser und Matrix werden mit u_f und u_m beschrieben, die zeitliche Ableitungen $\frac{\partial}{\partial t}$ mit (\cdot) .

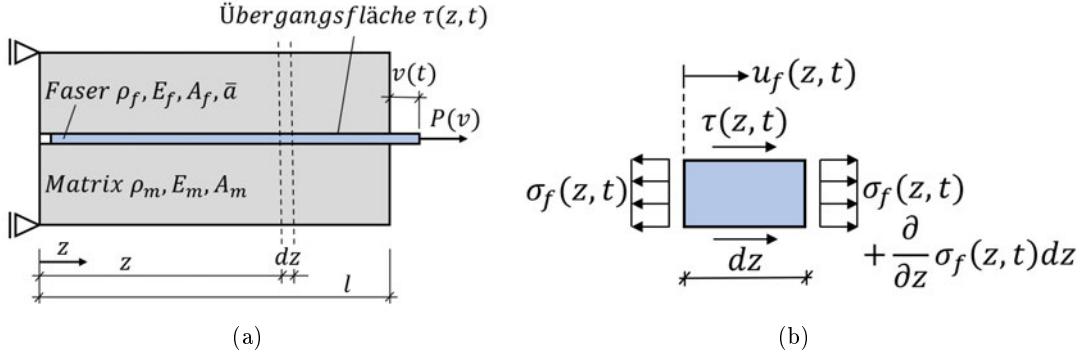


Abbildung 2.4: (a) Schematische Darstellung des Faser-Matrix-Verbundes, (b) Infinitesimal kleines Faserelement (in Anlehnung an [4])

Mit dem Hookeschen Gesetz $\sigma_f(z, t) = E_f \varepsilon_f(z, t)$, bei dem die Dehnung mit $\varepsilon_f(z, t) = \frac{\partial u_f(z, t)}{\partial z}$ beschrieben wird, kann (2.7) erweitert werden zu

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} u_f(z, t) = \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_f(z, t) - \frac{\bar{a}}{E_f A_f} \tau(z, t), \quad (2.8)$$

wobei $c_f = \sqrt{\frac{E_f}{\rho_f}}$ die Wellengeschwindigkeit in der Faser beschreibt. Analog kann die Bewegungsgleichung der Matrix beschrieben werden durch

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} u_m(z, t) = \frac{1}{c_m^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_m(z, t) + \frac{\bar{a}}{E_m A_m} \tau(z, t) \quad (2.9)$$

mit der Matrix-Wellengeschwindigkeit $c_m = \sqrt{\frac{E_m}{\rho_m}}$ ([4]).

Um die Bewegungsgleichung der Übergangsfläche zwischen Faser und Matrix zu ermitteln, wird zunächst die Auszugskraft

$$P(t) = N_f(z, t) + N_m(z, t) + A_f \rho_f \int_z^l \ddot{u}_f(z, t) dz + A_m \rho_m \int_z^l \ddot{u}_m(z, t) dz \quad (2.10)$$

berechnet, welche im Freikörperbild von Abbildung 2.5 (a) dargestellt ist. Dabei sind $N_f(z, t)$ und $N_m(z, t)$ die Normalkräfte in Faser und Matrix. Abbildung 2.5 (b) zeigt Faser und Matrix als infinitesimal kleine Elemente. Das sich daraus ergebende dynamische Gleichgewicht lautet

$$N_f(z, t) + N_m(z, t) = N_f(z, t) + \frac{\partial}{\partial z} N_f(z, t) dz + N_m(z, t) + \frac{\partial}{\partial z} N_m(z, t) dz - A_f \rho_f \ddot{u}_f(z, t) dz - A_m \rho_m \ddot{u}_m(z, t) dz \quad (2.11)$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial z} N_f(z, t) dz + \frac{\partial}{\partial z} N_m(z, t) dz = A_f \rho_f \ddot{u}_f(z, t) dz + A_m \rho_m \ddot{u}_m(z, t) dz. \quad (2.12)$$

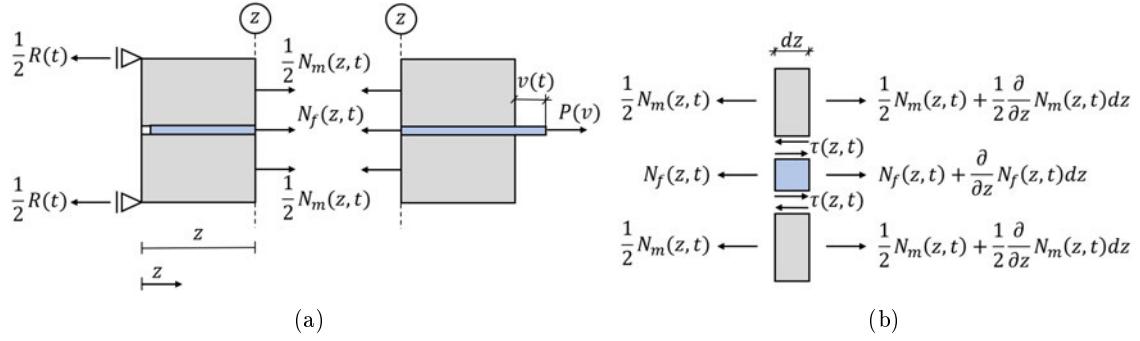


Abbildung 2.5: (a) Freikörperbild des Faser-Matrix-Verbundes, (b) infinitesimal kleines Faser-Matrix-Element (in Anlehnung an [4])

Des Weiteren wird die Steigung der Normalkraft in Faser und Matrix beschrieben durch

$$\frac{\partial}{\partial z} N_f(z, t) = -\bar{a}\tau(z, t) + A_f \rho_f \ddot{u}_f(z, t) \quad (2.13)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial z} N_m(z, t) = \bar{a}\tau(z, t) + A_m \rho_m \ddot{u}_m(z, t). \quad (2.14)$$

Die Relativbewegung zwischen Faser und Matrix in der Übergangsfläche wird im Folgenden als Schlupf (englisch: slip) bezeichnet, dieser berechnet sich mit

$$s(z, t) = u_f(z, t) - u_m(z, t). \quad (2.15)$$

Die Ableitung nach z liefert

$$\frac{\partial}{\partial z} s(z, t) = \frac{\partial}{\partial z} u_f(z, t) - \frac{\partial}{\partial z} u_m(z, t) = \varepsilon_f(z, t) - \varepsilon_m(z, t), \quad (2.16)$$

was eine Differenz der Dehnungen von Faser und Matrix darstellt. Eine weitere Ableitung nach z führt zu

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} s(z, t) = \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon_f(z, t) - \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon_m(z, t). \quad (2.17)$$

Die Dehnungen von Faser und Matrix ergeben sich nach dem Hookeschen Gesetz zu

$$\varepsilon_f(z, t) = \frac{N_f(z, t)}{E_f A_f} \quad (2.18)$$

und

$$\varepsilon_m(z, t) = \frac{N_m(z, t)}{E_m A_m}. \quad (2.19)$$

Werden (2.18) und (2.19) in (2.17) eingesetzt, dann ergibt sich

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} s(z, t) = \frac{1}{E_f A_f} \frac{\partial}{\partial z} N_f(z, t) - \frac{1}{E_m A_m} \frac{\partial}{\partial z} N_m(z, t). \quad (2.20)$$

Darin werden die Ableitungen der Normalkräfte nach der z -Koordinate wiederum ersetzt durch (2.13) und (2.14), um die Differentialgleichung der Grenzfläche darzustellen als

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} s(z, t) = - \left(\frac{1}{E_f A_f} + \frac{1}{E_m A_m} \right) \bar{a} \tau(z, t) + \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_f(z, t) - \frac{1}{c_m^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_m(z, t). \quad (2.21)$$

Die Gleichung (2.21) kann vereinfacht werden mit der Einführung einer Ersatznachgiebigkeit

$$\frac{1}{(EA)^*} = \frac{1}{E_f A_f} + \frac{1}{E_m A_m} \quad (2.22)$$

zu

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} s(z, t) = - \frac{1}{(EA)^*} \bar{a} \tau(z, t) + \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_f(z, t) - \frac{1}{c_m^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_m(z, t). \quad (2.23)$$

Im Folgenden wird die Matrix als dehnstarr angenommen, um das Ermitteln analytischer Lösungen praktikabler zu machen. Dadurch kann die Ersatznachgiebigkeit $\frac{1}{(EA)^*}$ näherungsweise als $\frac{1}{E_f A_f}$ beschrieben werden. Außerdem sind die Dehnung $\varepsilon_m(z, t)$ und die Verschiebung $u_m(z, t)$ der Matrix null, wodurch sich (2.23) reduziert zu

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} s(z, t) = \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} s(z, t) + \frac{1}{E_f A_f} \bar{a} \tau(z, t). \quad (2.24)$$

Da die Verschiebung und die Dehnung der Faser nun dem Schlupf entspricht, ist die Normalkraft in der Faser, abhängig von der Dehnung des Schlupfes,

$$N_f(z, t) = E_f A_f \frac{\partial}{\partial z} s(z, t) \quad (2.25)$$

([4]).

Um die Schädigung des Übergangsbereiches zwischen Faser und Matrix zu beschreiben, wird das TSL aus Abbildung 2.6, welche an AZZAM ([4]) angelehnt ist, verwendet. Der Schaden basiert auf dem Schlupf in der Übergangsfläche und ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Gleichung (2.26) zeigt die Schubspannungs-Schlupf-Beziehung für verschiedene Zustände der Übergangsfläche:

$$\tau(s) = \begin{cases} K^0 s & |s| \leq s^f, \\ (1 - \delta(s)) K^0 s & s^m < |s| \leq s^r, \\ \tau_r sgn(\dot{s}) & |s| > s^r. \end{cases} \quad (2.26)$$

Die Gleichung 2.26 verbindet das in Unterabschnitt 2.2.1 vorgestellte TSL mit Reibung. Diese tritt zwischen Faser und Matrix bereits bei Überschreitung des Schlupfes s^r auf. Dadurch liegen nur noch Reibungs-Schubspannungen vor, diese sind abhängig vom Vorzeichen der Relativgeschwindigkeit \dot{s} ([4]).

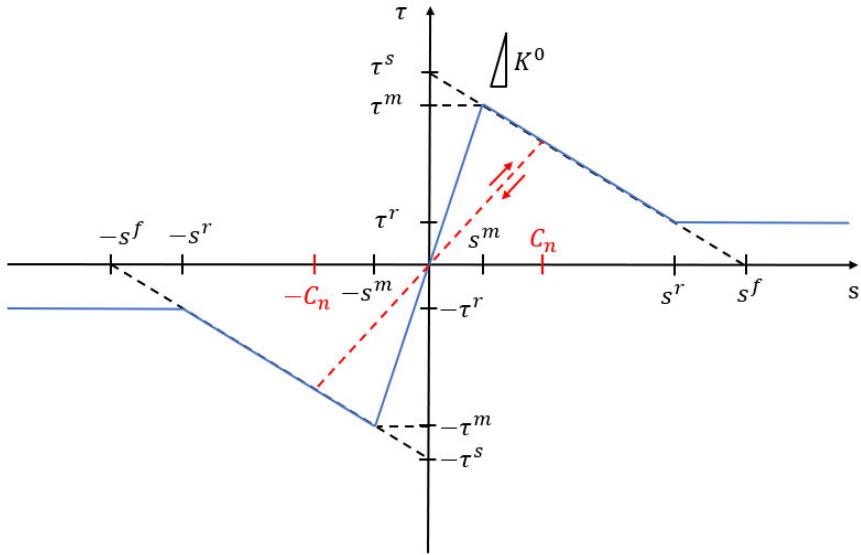


Abbildung 2.6: Traction Separation Law mit Reibung (in Anlehung an [4])

Die harmonische Anregung an der Faserspitze, d. h. an der Position $z = l$ ist eine Weganregung der Form

$$\hat{s}(t) = C_n e^{i\lambda t}, \quad (2.27)$$

wobei C_n die Amplitude und λ die Erregerkreisfrequenz ist ([4]). Im Folgenden wird die analytische Darstellung der Fälle der beschädigten und unbeschädigten Übergangsfläche erläutert.

Fall I: Unbeschädigte Übergangsfläche Solange die Amplitude der Weganregung an der Faserspitze den Schlupf-Wert s^m nicht überschreitet, bleibt die Übergangsfläche unbeschädigt. Die Schlupf-Antwort des Systems infolge harmonischer Anregung wird mit $\hat{s}(z, t)$ gekennzeichnet, wodurch (2.24) dargestellt werden kann als

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \hat{s}(z, t) - \frac{k_{e1}}{E_f} \hat{s}(z, t) - \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{s}(z, t) = 0, \quad (2.28)$$

wobei

$$k_{e1} = \frac{K_i^0 \bar{a}}{A_f} \quad (2.29)$$

ist. Diese Differentialgleichung zweiter Ordnung wird gelöst mit dem Ansatz

$$\hat{s}(z, t) = y(z) e^{i\lambda t}. \quad (2.30)$$

Darin ist $y(z)$ die Antwort-Amplitude an der Stelle z der Faser. Wird dieser Ansatz, nach zweifacher Ableitung $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{s}(z, t) = -\lambda^2 y(z) e^{i\lambda t}$, in (2.28) eingesetzt, so wird diese, nach

herauskürzen des Terms $e^{i\lambda t}$, zu

$$\frac{\partial^2 y(z)}{\partial z^2} - \bar{\omega}^2 y(z) = 0. \quad (2.31)$$

$\bar{\omega}^2$ berechnet sich mit

$$\bar{\omega}^2 = \frac{k_{e1}}{E_f} - \frac{1}{c_f^2} \lambda^2. \quad (2.32)$$

Die Lösung von (2.31) hängt von $\bar{\omega}^2$ ab, dabei gibt es drei charakteristische Fälle: $\bar{\omega}^2 > 0$, $\bar{\omega}^2 < 0$ und $\bar{\omega}^2 = 0$. Diese hängen von der Erregerkreisfrequenz λ ab im Bezug auf die Grenzfrequenz

$$\lambda_{cut} = c_f \sqrt{\frac{k_{e1}}{E_f}}. \quad (2.33)$$

Im Folgenden werden die Lösungen für die verschiedenen Fälle verkürzt dargestellt, eine ausführliche Herleitung findet sich in ([4]).

Ist $\bar{\omega}^2 > 0$, so gilt $-\lambda_{cut} \leq \lambda \leq \lambda_{cut}$. Die drei zeit- und ortsbabhängigen Größen Schlupf $\hat{s}(z, t)$, Übergangsflächen-Schubspannung $\hat{\tau}(z, t)$ und Normalkraft in der Faser $\hat{N}_f(z, t)$ sowie die zeitabhängige Größe Auszugskraft an der Faserspitze $\hat{P}(t)$ werden berechnet mit

$$\hat{s}(z, t) = \frac{\cosh(\bar{\omega}z)}{\cosh(\bar{\omega}l)} C_n e^{i\lambda t}, \quad (2.34)$$

$$\hat{\tau}(z, t) = \frac{\cosh(\bar{\omega}z)}{\cosh(\bar{\omega}l)} K_i^0 C_n e^{i\lambda t}, \quad (2.35)$$

$$\hat{N}_f(z, t) = E_f A_f \bar{\omega} \frac{\sinh(\bar{\omega}z)}{\cosh(\bar{\omega}l)} C_n e^{i\lambda t} \quad (2.36)$$

und

$$\hat{P}(t) = E_f A_f \bar{\omega} \tanh(\bar{\omega}l) C_n e^{i\lambda t}. \quad (2.37)$$

Liegt der charakteristische Fall $\bar{\omega}^2 < 0$ vor, so ist $\lambda > \lambda_{cut}$. Die vier Größen berechnen sich mit

$$\hat{s}(z, t) = \frac{C_n}{2\cos(\bar{\omega}l)} (e^{i(\bar{\omega}z+\lambda t)} + e^{-i(\bar{\omega}z-\lambda t)}), \quad (2.38)$$

$$\hat{\tau}(z, t) = \frac{K^0 C_n}{2\cos(\bar{\omega}l)} (e^{i(\bar{\omega}z+\lambda t)} + e^{-i(\bar{\omega}z-\lambda t)}), \quad (2.39)$$

$$\hat{N}_f(z, t) = \frac{E_f A_f i \bar{\omega} C_n}{2\cos(\bar{\omega}l)} (e^{i(\bar{\omega}z+\lambda t)} - e^{-i(\bar{\omega}z-\lambda t)}) \quad (2.40)$$

und

$$\hat{P}(t) = -E_f A_f \bar{\omega} \tan(\bar{\omega}l) C_n e^{i\lambda t}. \quad (2.41)$$

Für den dritten charakteristischen Fall $\bar{\omega}^2 = 0$ und somit $\lambda = \lambda_{cut}$ werden der Schlupf $\hat{s}(z, t)$, die Übergangsflächen-Schubspannung $\hat{\tau}(z, t)$ und die Normalkraft in der Faser $\hat{N}_f(z, t)$ berechnet mit

$$\hat{s}(z, t) = C_n e^{i\lambda_{cut} t}, \quad (2.42)$$

$$\hat{\tau}(z, t) = K_i^0 C_n e^{i\lambda_{cut} t} \quad (2.43)$$

und

$$\hat{N}_f(z, t) = 0. \quad (2.44)$$

Die fehlende Ortsabhängigkeit von $\hat{s}(z, t)$ und $\hat{\tau}(z, t)$ kann als Starrkörperbewegung interpretiert werden ([4]).

Fall II: Beschädigte Übergangsfläche Ist die Amplitude C_n der Weganregung an der Faserspitze größer als der Schlupf-Wert s^m , bei dessen Überschreiten eine Schädigung initiiert wird, und kleiner als der Schlupf-Wert s^r , so wird die Übergangsfläche teilweise beschädigt. Der unbeschädigte Teil wird als unbeschädigte Zone der Übergangsfläche bezeichnet. In dieser Arbeit wird jedoch die Abkürzung UDZ (englisch: undamaged zone of the interface) verwendet. Diese hat die Länge z_{r0} . Der beschädigte Teil der Übergangsfläche wird als beschädigte Zone der Übergangsfläche (DZ für damaged zone of the interface) mit der Länge $l - z_{r0}$ bezeichnet. Wie beim Fall der unbeschädigten Übergangsfläche werden hier nur die Lösungen dargestellt, die ausführlichen Herleitungen sind zu finden in ([4]).

Für die unbeschädigte Zone können die drei zeit- und ortsabhängigen Größen Schlupf, Übergangsflächen-Schubspannung und Normalkraft in der Faser ermittelt werden mit

$$\hat{s}(z, t) = s^m \frac{\cosh(\bar{\omega}z)}{\cosh(\bar{\omega}z_{r0})} e^{i\lambda t}, \quad (2.45)$$

$$\hat{\tau}(z, t) = \tau^m \frac{\cosh(\bar{\omega}z)}{\cosh(\bar{\omega}z_{r0})} e^{i\lambda t} \quad (2.46)$$

und

$$\hat{N}_f(z, t) = E_f A_f \bar{\omega} s^m \frac{\cosh(\bar{\omega}z)}{\cosh(\bar{\omega}z_{r0})} e^{i\lambda t}. \quad (2.47)$$

Die Länge der UDZ z_{r0} kann durch Lösen der Gleichung

$$\left(s^m - \frac{q_{02}}{E_f \bar{\omega}^2} \right) \cos((\bar{\omega}(l - z_{r0})) + \left(\frac{\bar{\omega}}{\bar{\omega}} \right) s^m \tanh(\bar{\omega}z_{r0}) \sin(\bar{\omega}(l - z_{r0})) = C_n - \frac{q_{02}}{E_f \bar{\omega}^2} \quad (2.48)$$

ermittelt werden, darin ist

$$q_{02} = \frac{\tau^s \bar{a}}{A_f} \quad (2.49)$$

und

$$\bar{\omega}^2 = \frac{|k_{e2}|}{E_f} + \frac{1}{c_f^2} \lambda^2. \quad (2.50)$$

k_{e2} kann berechnet werden, indem

$$\frac{k_{e1}}{E_f} - \frac{q_{02}}{E_f s^m} = \frac{k_{e2}}{E_f} \quad (2.51)$$

umgestellt wird zu

$$k_{e2} = k_{e1} - \frac{q_{02}}{s^m}. \quad (2.52)$$

Die Schubspannung τ^s kann Abbildung 2.6 entnommen werden.

Schlupf, Schubspannung und Normalkraft in der Faser in der DZ sowie die Auszugskraft an der Faserspitze können wie folgt berechnet werden:

$$\hat{s}(z, t) = \left[\frac{q_{02}}{E_f \bar{\omega}^2} + \left(s^m - \frac{q_{02}}{E_f \bar{\omega}^2} \right) \cos(\bar{\omega}(z - z_{r0})) + \left(\frac{\bar{N}_{r0}}{E_f A_f \bar{\omega}} \right) \sin(\bar{\omega}(z - z_{r0})) \right] e^{i\lambda t}, \quad (2.53)$$

$$\hat{\tau}(z, t) = \left[Z_2 \frac{q_{02}}{E_f \bar{\omega}^2} + \tau^s + Z_2 \left(s^m - \frac{q_{02}}{E_f \bar{\omega}^2} \right) \cos(\bar{\omega}(z - z_{r0})) + Z_2 \left(\frac{\bar{N}_{r0}}{E_f A_f \bar{\omega}} \right) \sin(\bar{\omega}(z - z_{r0})) \right] e^{i\lambda t}, \quad (2.54)$$

$$\hat{N}_f(z, t) = E_f A_f \bar{\omega} \left[- \left(s^m - \frac{q_{02}}{E_f \bar{\omega}^2} \right) \sin(\bar{\omega}(z - z_{r0})) + \left(\frac{\bar{N}_{r0}}{E_f A_f \bar{\omega}} \right) \cos(\bar{\omega}(z - z_{r0})) \right] e^{i\lambda t} \quad (2.55)$$

und

$$\hat{P}(t) = E_f A_f \bar{\omega} \left[- \left(s^m - \frac{q_{02}}{E_f \bar{\omega}^2} \right) \sin(\bar{\omega}(l - z_{r0})) + \left(\frac{\bar{N}_{r0}}{E_f A_f \bar{\omega}} \right) \cos(\bar{\omega}(l - z_{r0})) \right] e^{i\lambda t}. \quad (2.56)$$

Z_2 wird berechnet mit

$$Z_2 = \frac{k_{e2} A_f}{\bar{a}}, \quad (2.57)$$

$\bar{\omega}^2$ ergibt sich aus

$$\bar{\omega}^2 = \frac{|k_{e2}|}{E_f} + \frac{1}{c_f^2} \lambda^2, \quad (2.58)$$

abschließend kann \bar{N}_{r0} ermittelt werden mit

$$\bar{N}_{r0} = E_f A_f \bar{\omega} s^m \tanh(\bar{\omega} z_{r0}) \quad (2.59)$$

([4]). Die Abbildung 2.7 (a) zeigt beispielhaft den Verlauf der Übergangsflächen-Schubspannung entlang der Übergangsfläche. In der UDZ steigt die Schubspannung bis $z = z_{r0}$ an, wo sie ihr Maximum τ^m erreicht. In der DZ sinkt die Schubspannung wieder ab. Abbildung 2.7 (b) zeigt den Verlauf des Schlupfes in der Übergangsfläche. Der Schlupf steigt unabhängig von der Zone an und ist maximal am belasteten Faserende bei $z = l$.

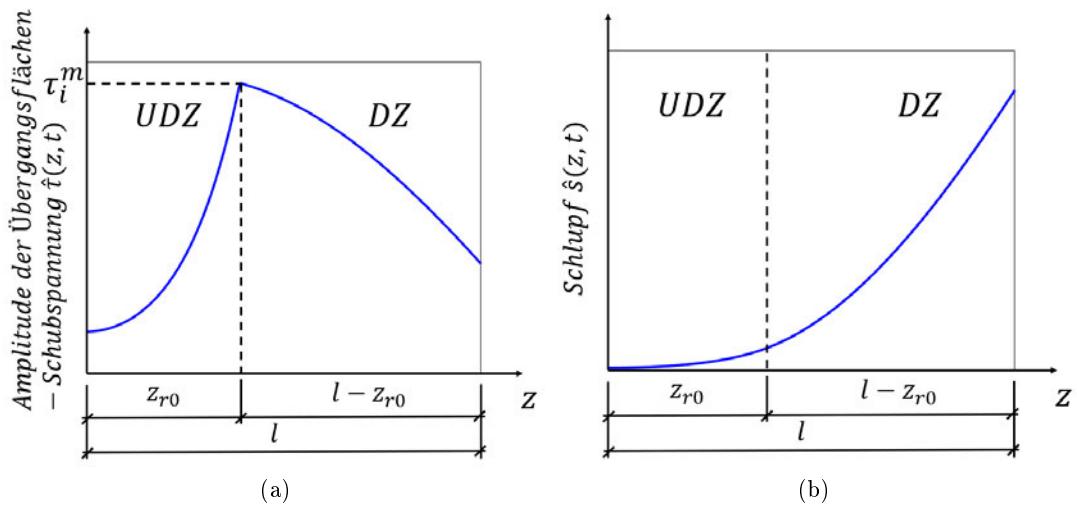


Abbildung 2.7: (a) Repräsentativer Verlauf der Übergangsflächen-Schubspannung, (b) Repräsentativer Verlauf des Schlupfes (in Anlehnung an [4])

2.3.2. Shear-Lag-Modell von Sridhar et al.

Das SLM von SRIDHAR et al. aus dem Jahr 2003 ([2]) beschreibt den dynamischen Faserauszug für zylindrische Fasern als achsensymmetrisches Modell. Die Hafttrennungsenergie ist null, Faser und Matrix sind bereits voneinander getrennt. Da in der Übergangsfläche nur eine Reibungs-Schubspannung wirkt, kann der dynamische Faserauszug als Wellenausbreitungsmodell entlang der Faser betrachtet werden. Abbildung 2.8 zeigt schematisch das Modell des Faser-Matrix-Verbundes in Anlehnung an SRIDHAR et al. Bei $z = 0$ greift die Spannung σ_0 an, die Matrix ist dort frei von Spannungen.

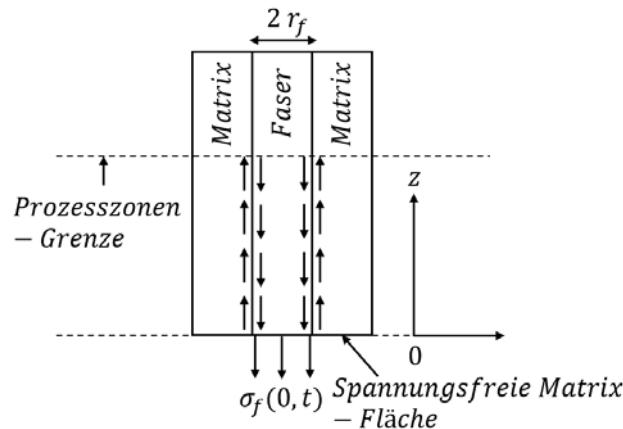


Abbildung 2.8: Schematische Darstellung des Faser-Matrix-Verbundes (in Anlehnung an [2])

Die in der Grenzfläche wirkende Reibungs-Schubspannung τ_r kann durch das in Unterabschnitt 2.2.2 eingeführte FL nach (2.5) beschrieben werden. Weitere Annahmen sind, dass beide Materialien isotrop sind mit einem Elastizitätsmodul E_q , einer Querkontraktionszahl ν_q und einer Dichte ρ_q , wobei die Faser mit f und die Matrix mit m indiziert ist. Die Faser hat außerdem den Radius r_f , die Matrix ist ebenfalls zylindrisch, wobei ihre Dicke aus einem Faservolumenanteil f folgt. Die axialen Verschiebungen, Dehnungen und Spannungen von Faser und Matrix werden, unter Berücksichtigung ihrer Indizes, mit u_q , ε_q und σ_q beschrieben ([2]).

Die Wellengleichung lautet

$$\frac{\partial^2 u_f}{\partial z^2} = -\frac{2\tau_r}{r_f \hat{E}_f} + \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2 u_f}{\partial t^2} \quad (2.60)$$

für die Faser und

$$\frac{\partial^2 u_m}{\partial z^2} = \frac{2f}{1-f} \frac{\tau_r}{r_f \hat{E}_m} + \frac{1}{c_m^2} \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} \quad (2.61)$$

für die Matrix. Dabei ist die Wellengeschwindigkeit von Faser und Matrix

$$c_q = \sqrt{\frac{\hat{E}_q}{\rho_q}} \quad (2.62)$$

mit

$$\hat{E}_q = \frac{E_i(1-\nu_q)}{(1+\nu_q)(1-2\nu_q)}. \quad (2.63)$$

An der Stelle $z = 0$ ist die Matrix spannungsfrei, die Faser unterliegt der Axialspannung

$$\sigma_f(0, t) = p(t), \quad (2.64)$$

außerdem werden die z -Koordinate, Zeit und Verschiebung normiert mit $Z = \frac{z}{r_f}$, $T = \frac{c_f t}{r_f}$ und $U = \frac{u}{r_f}$. Das Reibungs-Schubspannungsgesetz aus (2.5) wird in die Wellengleichungen (2.60) und (2.61) von Faser und Matrix eingesetzt. Daraus ergibt sich

$$\frac{\partial^2 U_f}{\partial Z^2} = \frac{\partial^2 U_f}{\partial T^2} - \tau \operatorname{sgn}(\dot{U}_m - \dot{U}_f) \quad (2.65)$$

für die Faser und

$$\frac{\partial^2 U_m}{\partial Z^2} = C^2 \frac{\partial^2 U_m}{\partial T^2} + \varphi \tau \operatorname{sgn}(\dot{U}_m - \dot{U}_f) \quad (2.66)$$

für die Matrix. Darin sind die dimensionslosen Parameter des Wellengeschwindigkeitsverhältnisses C , des Modulverhältnisses φ und der normierten Reibungs-Schubspannung τ enthalten. Sie werden berechnet mit

$$C^2 = \frac{c_f^2}{c_m^2} = \frac{\hat{E}_f \rho_m}{\hat{E}_m \rho_f}, \quad (2.67)$$

$$\varphi = \frac{fE_f}{(1-f)E_m} \quad (2.68)$$

und

$$\tau = \frac{2\tau_0}{E_f}. \quad (2.69)$$

Für die Last wird eine lineare Last-Funktion

$$p(t) = \frac{\sigma_0 t}{t_0} \quad (2.70)$$

angenommen, des Weiteren wird die normierte inverse Lastrate

$$k = \frac{\tau_0 c_f t_0}{\sigma_0 r_f} \quad (2.71)$$

eingeführt ([2]).

Bei linearen Lasten existieren zwei oder drei Bereiche auf der z -Koordinate, welche von den Parametern C und φ abhängen. In diesen bewegen sich Faser und Matrix entweder gleich schnell bewegen, sie "haften" aneinander (englisch: *stick*), oder es liegt eine Relativgeschwindigkeit und somit ein Schlupf zwischen den beiden (englisch: *slip*). Die dimensionsbehafteten Grenzen l_1 , l_2 und l_3 dieser Bereiche bewegen sich linear mit der Zeit. Sie werden berechnet mit

$$l_j = \eta_j c_f t \quad (2.72)$$

($j = 1, 2$ oder 3). Dabei beschreibt η_j die normierte Frontgeschwindigkeit, welche von den Geometrie-, sowie Materialeigenschaften abhängt. Die Gesamtheit dieser Bereiche wird als Prozesszone bezeichnet. Die Verschiebungen sind abschnittsweise von der z -Koordinate abhängige quadratische Funktionen, welche im Folgenden für drei Fälle (englisch: *Regimes*) dargestellt werden. Für die dimensionslose Z -Koordinate werden die Bereichsgrenzen berechnet aus

$$L_j = \eta_j T \quad (2.73)$$

([2]).

Ermittlung der Grenzen C_L und C_U Um Festzulegen, welcher der drei Fälle vorliegt, müssen sowohl das Wellengeschwindigkeitsverhältnis C mit (2.67) als auch die Grenzen C_L und C_U ermittelt werden. Diese hängen ab von dem Wellengeschwindigkeitsverhältnis C , dem Modulverhältnis φ aus (2.68) und der inversen Lastrate k aus (2.71). Zur Berechnung wird zunächst der Fall II (slip-stick) angenommen, für den mit (2.83) die normierte Frontgeschwindigkeit η_1 ermitteln lässt. Anschließend wird die Grenze C_U berechnet mit Hilfe der Annahme, dass beim Wechsel von Fall II zu Fall I die Reibungs-Schubspannung in dem "stick"-Bereich den Wert $\tau = \tau_0$ erreicht. Gleichung (2.84) ändert sich somit zu

$$\frac{(\eta_1^2 + 2k\eta_1 - 1)(1 - C_U^2)}{2k(\eta_1(1 - C_U^2) + (1 - \eta_1^2)\sqrt{(C_U^2 + \varphi)(1 + \varphi)})} = 1. \quad (2.74)$$

Aus (2.74) kann die Grenze C_U ermittelt werden. Soll die Grenze C_L ermittelt werden, so wird davon ausgegangen, dass die Reibungs-Schubspannung in dem Stick-Bereich den Wert $\tau = -\tau_0$ erreicht, wodurch ein Wechsel zu einem Reverse Slip-Bereich stattfindet. Auch dafür wird zunächst die normierte Frontgeschwindigkeit η_1 mit (2.83) ermittelt, um anschließend mit der aus (2.84) abgeleiteten Gleichung

$$\frac{(\eta_1^2 + 2k\eta_1 - 1)(1 - C_L^2)}{2k(\eta_1(1 - C_L^2) + (1 - \eta_1^2)\sqrt{(C_L^2 + \varphi)(1 + \varphi)})} = -1 \quad (2.75)$$

die Grenze C_L zu berechnen. Sind die Grenzen ermittelt, so können wiederum der Fall, sowie weitere normierte Frontgeschwindigkeiten und Verschiebungen bestimmt werden ([2]).

Welcher der drei Fälle Pure Slip, Slip-Stick und Slip-Reverse Slip sich einstellt, hängt neben dem Wellengeschwindigkeitsverhältnis C auch von dem Modulverhältnis φ und der inversen Lastrate k ab. Ist C groß, d. h. die Faserwellengeschwindigkeit ist größer als die Matrixwellengeschwindigkeit, dann stellt sich der Fall Pure Slip ein. Für sehr kleine Modulverhältnisse φ können sich, abhängig vom Wellengeschwindigkeitsverhältnis C , nur die Fälle Pure Slip oder Slip-Stick einstellen. Der Fall Slip-Reverse Slip kann erst vorliegen, sobald das Modulverhältnis φ eine gewisse Größe erreicht. Mit steigender inverser Lastrate k wird das Einstellen des Falles Slip-Stick wahrscheinlicher ([2]).

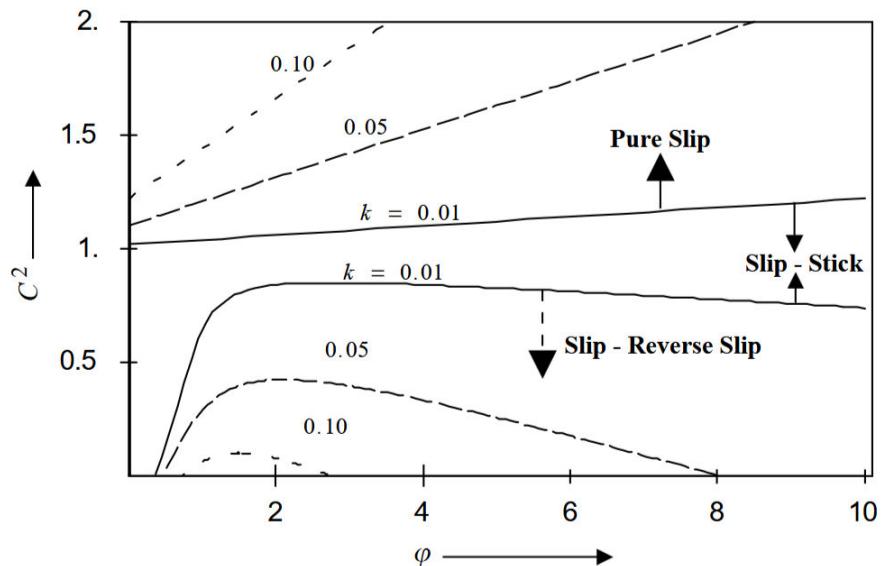


Abbildung 2.9: Abhängigkeit der Fälle Pure Slip, Slip-Stick und Slip-Reverse Slip von dem Wellengeschwindigkeitsverhältnis C , dem Modulverhältnis φ und der inversen Lastrate k ([2])

Fall I: Pure Slip ($C > C_U$) Der Fall des Pure Slip, also der des reinen Rutschens, liegt dann vor, wenn das Wellengeschwindigkeitsverhältnis C den kritischen Wert C_U

überschreitet. In diesem Fall liegen zwei Bereiche vor, die normierten Verschiebungen der Matrix für diese Prozesszone werden berechnet mit

$$U_m(Z, T) = \begin{cases} \frac{\Theta_{m,I,1}}{2(1+\eta_1^2 C^2)(1-\eta_2^2 C^2)} & (0 \leq Z \leq \eta_1 T), \\ \frac{\tau \varphi}{2(1-\eta_2^2 C^2)} (Z - \eta_2 T)^2 & (\eta_1 T < Z \leq \eta_2 T), \end{cases} \quad (2.76)$$

wobei $\Theta_{m,I,1} = \tau \varphi \left(\begin{array}{c} Z^2(1 + \eta_1^2 C^2 - 2\eta_1 \eta_2 C^2) \\ + T^2(\eta_2^2 - 2\eta_1 \eta_2 + \eta_1^2 \eta_2^2 C^2) \end{array} \right)$ ist. Für die Faser kann die normierte Verschiebung berechnet werden durch

$$U_f(Z, T) = \frac{\tau(-Z+T\eta_2)(Z(k+\eta_2)-T(1-k\eta_2))}{2k(1+\eta_2^2)} \quad (0 \leq Z \leq \eta_2 T). \quad (2.77)$$

Die Konstanten η_1 und η_2 ergeben sich aus

$$\eta_1 = \frac{1}{C} \quad (2.78)$$

und

$$\eta_2 = \sqrt{1 + k^2} - k. \quad (2.79)$$

Die Abbildung 2.10 (a) zeigt die Partikelgeschwindigkeit, also die Ableitungen der normierten Verschiebungen von Faser und Matrix, für den Fall I. Die Faser hat bis auf die Position $Z = \eta_2 T$ die betragsmäßig größere Partikelgeschwindigkeit ([2]).

Fall II: Slip-Stick ($C_L \leq C \leq C_U$) Liegt der Fall II vor, so gibt es in einem Bereich eine Relativgeschwindigkeit und dadurch slip zwischen Faser und Matrix. In einem zweiten Bereich bewegen sich beide gleich schnell, sie “kleben” also aneinander (englisch: stick). Dies ist der Fall, wenn das Wellengeschwindigkeitsverhältnis C innerhalb der Grenzen von C_L und C_U liegt. In Abbildung 2.10 (b) ist zu erkennen, wie oberhalb der Grenze $\eta_1 T$ die Partikelgeschwindigkeiten von Faser und Matrix übereinstimmen. Die normierten Verschiebungen der Matrix lassen sich ermitteln aus

$$U_m(Z, T) = \begin{cases} \frac{\Theta_{m,II,1}}{4k(1+\eta_1 \eta_2)(1+\eta_1^2 C^2)} & (0 \leq Z \leq \eta_1 T), \\ \frac{\tau(\eta_1^2 + 2k\eta_1 - 1)(Z - \eta_2 T)^2}{4k(1+\eta_1 \eta_2)(\eta_2 - \eta_1)} & (\eta_1 T < Z \leq \eta_2 T), \end{cases} \quad (2.80)$$

mit $\Theta_{m,II,1} = \tau \left(\begin{array}{c} Z^2((\eta_1^2 + 2k\eta_1 - 1)(\eta_2 - \eta_1)C^2 + 2k\varphi(1 + \eta_1 \eta_2)) \\ + T^2((\eta_1^2 + 2k\eta_1 - 1)(\eta_2 - \eta_1) - 2k\varphi\eta_1^2(1 + \eta_1 \eta_2)) \end{array} \right)$. Die normierten Verschiebungen der Faser werden berechnet mit

$$U_f(Z, T) = \begin{cases} \frac{\Theta_{f,II,1}}{4k(1+\eta_1 \eta_2)} & (0 \leq Z \leq \eta_1 T), \\ \frac{\tau(\eta_1^2 + 2k\eta_1 - 1)(Z - \eta_2 T)^2}{4k(1+\eta_1 \eta_2)(\eta_2 - \eta_1)} & (\eta_1 T < Z \leq \eta_2 T), \end{cases} \quad (2.81)$$

darin ist $\Theta_{f,II,1} = \tau \left(\begin{array}{c} -Z^2((2k + \eta_1 + \eta_2) + 2ZT(1 + \eta_1 \eta_2)) \\ + T^2((2k\eta_1 \eta_2 - \eta_1 - \eta_2) \end{array} \right)$. Die normierte Frontgeschwindigkeit η_2 ergibt sich aus

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{1 + \varphi}{C^2 + \varphi}} \quad (2.82)$$

η_1 aus der quadratischen Gleichung

$$(\eta_1^2 + 2k\eta_1 - 1)(1 + C^2\eta_1\eta_2) + 2k\varphi(1 + \eta_1\eta_2)\eta_1 = 0. \quad (2.83)$$

η_1 ist die positiv-reelle Lösung und liegt zwischen $[0 \ 1]$. Die Reibungs-Schubspannung im stick-Bereich, also im Bereich $(\eta_1 T < Z \leq \eta_2 T)$, wird berechnet mit

$$\tau_r = \tilde{\tau} = \tau_0 \frac{(\eta_1^2 + 2k\eta_1 - 1)(1 - C^2)}{2k(\eta_1(1 - C^2) + (1 - \eta_1^2)\sqrt{(C^2 + \varphi)(1 + \varphi)}}, \quad (2.84)$$

dabei ist $|\tilde{\tau}| < \tau_0$ ([2]).

Fall III: Slip-Reverse Slip ($C \leq C_L$) Im letzten Fall, in dem das Wellengeschwindigkeitsverhältnis $C \leq C_L$ ist, existieren drei Bereiche, zwischen denen sich die Geschwindigkeiten von Faser und Matrix schneiden. In einem Bereich bewegt sich die Matrix schneller als die Faser und in den anderen beiden Bereichen die Faser schneller als die Matrix (Reverse Slip, vgl. Abbildung 2.10 (c)). Die normierten Verschiebungen der Matrix können in diesem Fall berechnet werden mit

$$U_m(Z, T) = \begin{cases} \frac{\Theta_{m,III,1}}{2(1-\eta_1^2C^2)(1+\eta_3^2C^2)} & (0 \leq Z \leq \eta_1 T), \\ \frac{\Theta_{m,III,2}}{2(\eta_1^2C^2-1)(\eta_3^2C^2+1)} & (\eta_1 T < Z \leq \eta_3 T), \end{cases} \quad (2.85)$$

wobei $\Theta_{m,III,1} = \tau\varphi \begin{pmatrix} Z^2(1 + \eta_1^2C^2 - 4\eta_1\eta_3C^2 + 2\eta_3^2C^2) \\ +T^2(\eta_3^2 - 4\eta_1\eta_3 + 4\eta_1^2\eta_3^2C^2 + 2\eta_1^2) \end{pmatrix}$ und $\Theta_{m,III,2} = \tau\varphi(Z - \eta_3 T) \begin{pmatrix} Z(1 - \eta_1^2C^2 + 4\eta_1\eta_3C^2) \\ +T(\eta_3 - \eta_1^2\eta_3C^2 - 4\eta_1) \end{pmatrix}$ sind. Die normierten Verschiebungen der Faser werden ermittelt mit

$$U_f(Z, T) = \begin{cases} \frac{\Theta_{f,III,1}}{4k(1+\eta_1)(1+\eta_3)} & (0 \leq Z \leq \eta_1 T), \\ \frac{\Theta_{f,III,2}}{4k(\eta_1^2-1)(1+\eta_3)} & (\eta_1 T < Z \leq \eta_2 T), \\ \frac{\tau(Z-\eta_3 T)^2}{2k(1-\eta_3^2)} & (\eta_2 T < Z \leq \eta_3 T), \end{cases} \quad (2.86)$$

dabei ist $\Theta_{f,III,1} = \tau \begin{pmatrix} Z^2(2k(\eta_1 - 2\eta_3 - 1) - (1 + \eta_1)(1 + \eta_3)) \\ -T^2(1 + \eta_3 + 2k\eta_3 + \eta_1(1 + \eta_3 - 2k(\eta_3 + 2))) \\ +2ZT(1 + \eta_1)(1 + \eta_3) \end{pmatrix}$ und $\Theta_{f,III,2} = \tau \begin{pmatrix} Z^2(1 + \eta_3 - \eta_1^2(1 + \eta_3) + 2k(\eta_1^2 - 1 - 2\eta_1(1 + \eta_3))) \\ +T^2((\eta_1^2 - 1)(1 + \eta_3) + 4k\eta_1 + 2k\eta_3(\eta_1^2 + 2\eta_1 - 1)) \\ +2ZT(\eta_1^2 + 4k\eta_1 - 1)(1 + \eta_3) \end{pmatrix}$. Die normierten Frontgeschwindigkeiten η_1 und η_3 können durch das Lösen der quadratischen Gleichungen

$$\eta_3 - \eta_1^2\eta_3C^2 + 2\eta_1(\eta_3^2C^2 - 1) = 0 \quad (2.87)$$

und

$$\frac{(\eta_1 - 1)}{(\eta_1 + 1)} + \frac{1}{(\eta_3 + 1)} - \frac{\varphi(\eta_3^2 - 4\eta_1\eta_3 + \eta_1^2\eta_3^2C^2 + 2\eta_1^2)}{(1 - \eta_1^2C^2)(1 + \eta_3^2C^2)} = \frac{(1 - \eta_1)}{2k} \quad (2.88)$$

ermittelt werden ([2]).

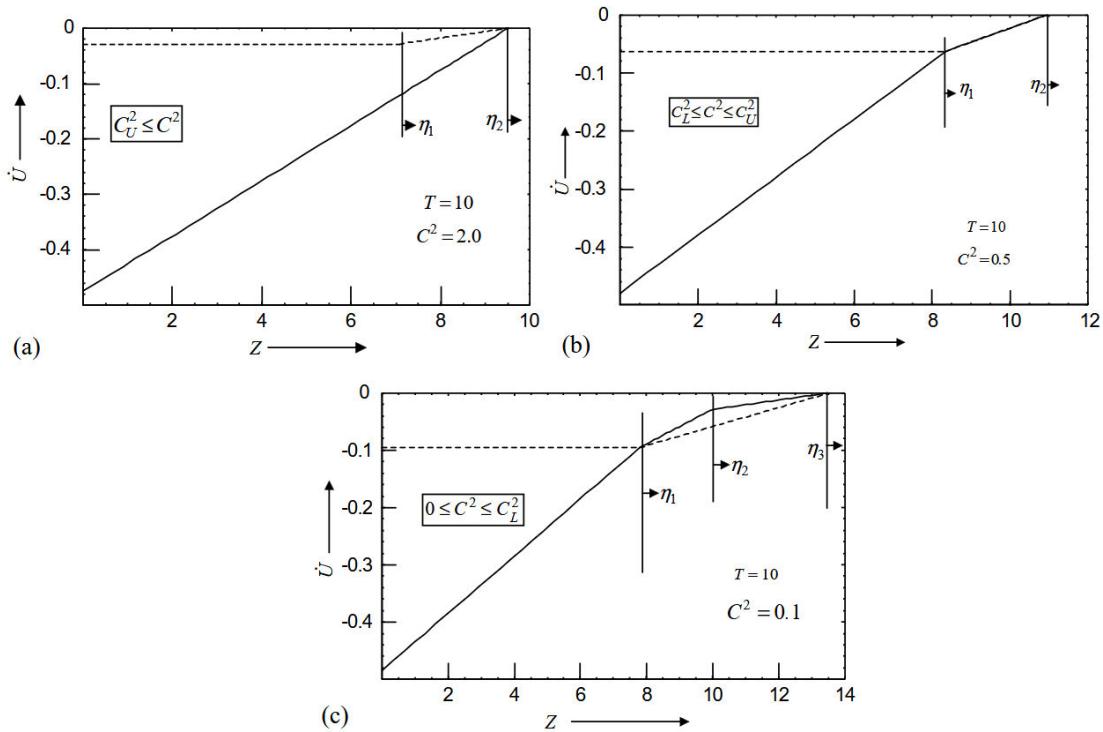


Abbildung 2.10: Partikelgeschwindigkeiten von Faser (durchgezogene Linien) und Matrix (gestrichelte Linien) für die Fälle I (a), II (b) und III (c) mit den Parametern $\varphi = 2,00$, $k = 0,05$, $\tau = 0,005$ und $T = 10$ ([2])

3. Numerische Modelle

In dieser Arbeit werden die Ergebnisse der im vorherigen Kapitel vorgestellten analytischen SLM mit numerischen Finite-Element-Modellen verglichen. Dafür wird das Programm ABAQUS in der Version 2024 von DASSAULT SYSTEMES verwendet. Zunächst werden in diesem Kapitel die Solver vorgestellt, die für die numerische Beschreibung des dynamischen Faserauszuges im Rahmen dieser Arbeit in Betracht gezogen wurden. Anschließend werden Idealisierungen des Übergangsbereiches zwischen Faser und Matrix erläutert und abschließend verschiedene Modellierungsmöglichkeiten von beiden erörtert. Bei der Finite-Elemente-Methode (FEM) wird ein Kontinuum in finite Teilbereiche diskretisiert, deren Verhalten durch Ansatzfunktionen abgebildet wird. ([16], S. 3).

Zunächst werden verschiedene Solver für dynamische Problemstellungen in ABAQUS erläutert, anschließend wird die Darstellung des Übergangsbereiches als numerisches Modell behandelt, bevor abschließend mögliche Modellierungen des Faser-Matrix-Verbundes dargestellt werden. Für diese Arbeit wurden mit Hilfe des Programmes PYTHON 3.12.6 Eingabedateien erstellt, an welchen Parameteränderungen für die numerischen ABAQUS-Modelle vorgenommen werden können. Die Grundstruktur dieser Skripte wurde aus ABAQUS-Journal-Dateien übernommen und anschließend modifiziert.

3.1. Untersuchung der Solver für dynamische Probleme in Abaqus

Nichtlineare zeitabhängige Probleme werden in der FEM beschrieben mit der Differentialgleichung

$$\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{u}}(t) + \underline{R}(\underline{u}(t)) = \underline{F}(t). \quad (3.1)$$

Dabei ist $\underline{\underline{M}}$ die Massenmatrix, $\ddot{\underline{u}}(t)$ der Beschleunigungsvektor und $\underline{R}(\underline{u}(t))$ der Vektor der inneren Reaktionskräfte. Diese stehen im Gleichgewicht mit dem Vektor der äußeren Lasten $\underline{F}(t)$. Für eine Lösung von (3.1) wird eine direkte Zeitintegration verwendet. Die Differentialgleichung wird zum diskreten Zeitpunkt t_n und anschließend zum Zeitpunkt $t_{k+1} = t_k + \Delta t$ berechnet, Δt ist der Zeitschritt. Dabei gibt es zwei Vorgehensweisen, die Implizite und Explizite Zeitintegration, welche im Folgenden kurz beschrieben werden ([17], S. 211 und 224).

3.1.1. Implizite Zeitintegration

Bei der impliziten Zeitintegration wird die Differentialgleichung

$$\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{u}}(t_{k+1}) + \underline{R}(\underline{u}(t_{k+1})) = \underline{F}(t_{k+1}) \quad (3.2)$$

zum zukünftigen Zeitpunkt t_{k+1} ausgewertet. Die Gleichung kann nicht direkt nach den Zustandsgrößen wie der Verschiebung u gelöst werden, es wird ein iteratives Verfahren benötigt ([17], S. 224).

In ABAQUS wird dieses Verfahren dynamisch implizit (englisch: Implicit dynamic analysis oder dynamic, implicit) genannt, die Zeitschrittintegration erfolgt mit dem Newmark-

β -Verfahren ([18]). Für zwei Randbeschleunigungen wird einer konstanter Mittelwert gebildet,

$$a(t) = \frac{1}{2} (a_{k+1} + a_k), \quad (3.3)$$

zu sehen in Abbildung 3.1. Daraus wird die Geschwindigkeit v und Verschiebung u berechnet mit

$$v = v_k + \int_{t_k}^t a d\hat{t} = v_k + \frac{1}{2} (a_{k+1} + a_k) (t - t_k), \quad (3.4)$$

und

$$u(t) = u_k + \int_{t_k}^t \left(v_k + \frac{1}{2} (a_{k+1} + a_k) (\hat{t} - t_k) \right) d\hat{t}. \quad (3.5)$$

Für die rechten Intervallränder werden v_{k+1} und u_{k+1} durch die Taylorreihenentwicklung bis zur dritten Zeitableitung berechnet mit

$$v_{k+1} = v_k + a_k \Delta t + \gamma \dot{a}_k \Delta t^2 \quad (3.6)$$

und

$$u_{k+1} = u_k + v_k \Delta t + a_k \frac{\Delta t^2}{2} + \beta \dot{a}_k \Delta t^3, \quad (3.7)$$

darin ist

$$\dot{a}_k = \frac{a_{k+1} - a_k}{\Delta t}. \quad (3.8)$$

Durch Einsetzen von (3.8) und (3.6) und (3.7) ergeben sich

$$v_{k+1} = v_k + [(1 - \gamma) a_k + \gamma a_{k+1}] \Delta t. \quad (3.9)$$

sowie

$$u_{k+1} = u_k + v_k \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) a_k + \beta a_{k+1} \right] \Delta t^2. \quad (3.10)$$

In (3.6) und (3.7) sowie (3.9) und (3.10) sind β und γ Kontrollkonstanten für den Fehler des Abbruchs der Taylorreihenentwicklung. Da die Berechnung iterativ für jeden Zeitschritt erfolgt, ist die Rechendauer hoch. Vorteilhaft ist jedoch, dass das Verfahren unbedingt stabil ist und somit große Zeitschritte erlaubt ([17], S. 227-229).

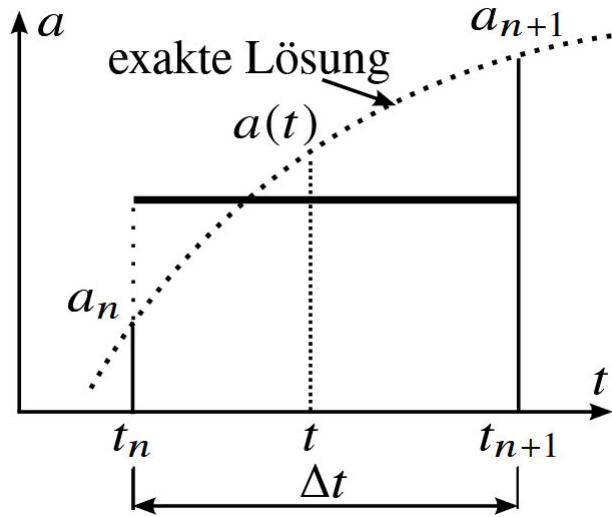


Abbildung 3.1: Konstante Beschleunigung ([17], S. 227)

3.1.2. Explizite Zeitintegration

Mit der expliziten Zeitintegration wird die Differentialgleichung

$$\underline{M\ddot{u}(t_k)} + \underline{R(u(t_k))} = \underline{F(t_k)} \quad (3.11)$$

zum aktuellen Zeitpunkt t_k analysiert und die Zustandsgrößen, welche am zukünftigen Zeitpunkt t_{k+1} vorhanden sind, werden durch Extrapolieren ermittelt ([17], S. 224).

Die Zeitintegration erfolgt mit dem *zentralen* Differenzenverfahren, bei dem zu einem Zeitpunkt t_k die Geschwindigkeit als Steigung zwischen den Zeitpunkten t_{k-1} , t_k und t_{k+1} als Vorwärts- bzw. Rückwärtsdifferenzenquotient berechnet wird mit

$$v_k^{vorw} = v_{k+1/2} = \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta t} \quad (3.12)$$

und

$$v_k^{rückw} = v_{k-1/2} = \frac{u_k - u_{k-1}}{\Delta t} \quad (3.13)$$

(vgl. Abbildung 3.2).

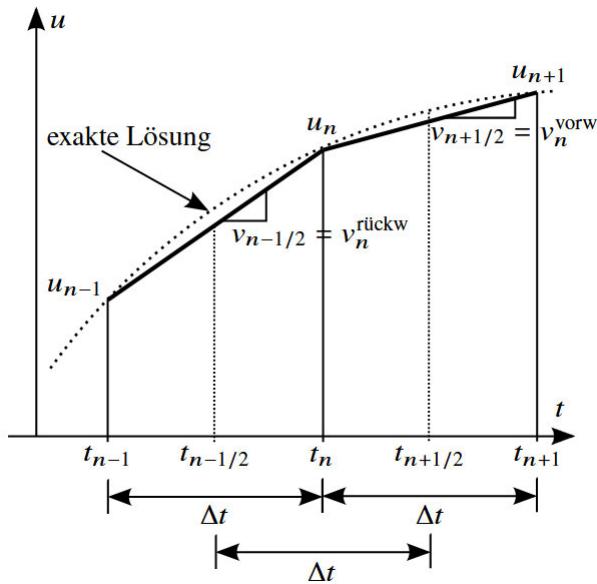


Abbildung 3.2: Zentrales Differenzenverfahren ([17], S. 232)

Anschließend wird mit dem Mittelwert aus 3.12 und 3.13 der zentrale Differenzenquotient

$$v_k = \frac{1}{2}(v_k^{vorw} + v_k^{rückw}) = \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2\Delta t} \quad (3.14)$$

berechnet. Um die Beschleunigung zu berechnen, wird der Geschwindigkeitsverlauf als linear angenommen, sodass die Beschleunigung die Steigung zwischen den Vorwärts- und Rückwärtskoeffizienten der Geschwindigkeit ist,

$$a_n = \frac{v_k^{vorw} - v_k^{rückw}}{\Delta t} = \frac{v_{k+1/2} - v_{k-1/2}}{\Delta t} \quad (3.15)$$

([17], S. 231-232).

Diese Methode ist nur bedingt stabil, weshalb der Zeitschritt Δt einen kritischen Zeitschritt

$$\Delta t_{krit} = l_{e,min} \frac{1}{c_e} \quad (3.16)$$

nicht überschreiten darf. $l_{e,min}$ ist die kleinste Elementkantenlänge und c_e die Schallgeschwindigkeit einer Longitudinalwelle im Element. Diese Berechnung des kritischen Zeitschrittes ist nur für lineare Systeme geeignet. Für nichtlineare Systeme wird häufig ein Stabilisierungsfaktor namens Courant-Zahl, welcher meist 0,9 beträgt, verwendet. Die Berechnung der Schallgeschwindigkeit ist abhängig von der Dimension des Elementes. Für 1-D-Elemente wird sie berechnet mit

$$c_e = \sqrt{\frac{E}{\rho_e}}, \quad (3.17)$$

für 2-D-Elemente mit

$$c_e = \sqrt{\frac{E}{\rho_e(1 - \nu^2)}} \quad (3.18)$$

und für 3-D-Elemente mit

$$c_e = \sqrt{\frac{E(1 - \nu)}{\rho_e(1 + \nu)(1 - 2\nu)}}. \quad (3.19)$$

Wird die Courant-Zahl berücksichtigt, so beträgt der tatsächliche kritische Zeitschritt

$$\Delta t = 0,9\Delta t_{krit}. \quad (3.20)$$

([17], S. 238-240).

Abbildung 3.3 zeigt, dass bei der expliziten Zeitintegration Schwingungen auftreten können, welche physikalisch nicht auftreten sollten. Das gezeigte Volumenmodell eines Stabes wurde entlang der Faser harmonisch angeregt, jedoch bilden sich Auslenkungen normal zur Längsachse aus. Dieses Phänomen wird als numerische Schwingung bezeichnet, für das es Stabilisierungsverfahren gibt. In ABAQUS wird dieses Verfahren dynamisch explizit (englisch: Implicit dynamic analysis oder dynamic, explicit) genannt ([19]), es bietet die Möglichkeit, den kritischen Zeitschritt Δt_{krit} selbst zu berechnen.

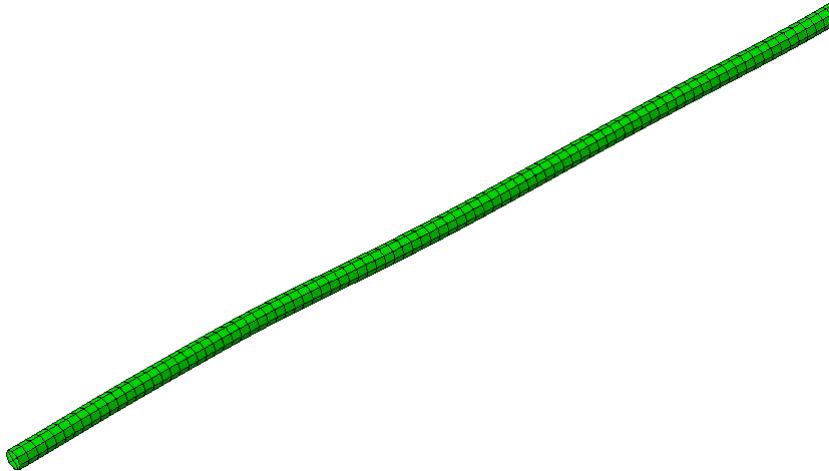


Abbildung 3.3: Numerische Schwingung eines Stabes

3.1.3. Wahl des Zeitintegrationsverfahrens

Im Folgenden sind in Tabelle 3.1 einige Eigenschaften beider Zeitintegrationsverfahren gegenübergestellt.

Tabelle 3.1: Eigenschaften des impliziten und expliziten Zeitschrittintegrationsverfahrens (nach [17], S. 244)

explizit	implizit
Nur bedingte Stabilität des Verfahrens gegeben	Zeitschrittverfahren ist unbedingt stabil, eine Wahl großer Zeitschritte ist möglich.
Für nichtlineare Fragestellungen gibt es keine Konvergenzprobleme	Bei unstetigen nichtlinearen Anwendungen müssen kleine Zeitschritte zum Erhalt der Konvergenz gewählt werden.
Zeitschritt sehr klein	Sehr große Rechenzeit für einen Zeitschritt
Benötigt hohe Zeitschrittanzahl	Kommt abhängig von der Rechnung mit wenigen Zeitschritten aus

Das implizite Zeitintegrationsverfahren wird häufig auf lineare oder schwach nichtlineare, langanhaltende transiente dynamische Probleme angewandt, das dynamisch explizite Verfahren für stark nichlineare Vorgänge über kleine Zeiträume, wie sie bei der Kurzzeitdynamik auftreten ([17], S. 245). Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit für die Simulation des dynamischen Faserauszuges das dynamisch explizite Verfahren verwendet.

3.2. Darstellung des Übergangsbereiches zwischen Faser und Matrix in Abaqus

Im Folgenden werden von ABAQUS gebotene Möglichkeiten zur Modellierung der in Abschnitt 2.2 vorgestellten Kontaktarten (TSL und FL) des Übergangsbereiches zwischen Faser und Matrix dargestellt. In diesem Abschnitt sollen Idealisierungsmöglichkeiten für beide Mechanismen dargestellt werden.

3.2.1. Modellierung der Haftung und Schädigung des Übergangsbereiches als Surface-Based Cohesive Behavior

Eine Möglichkeit, die (auftrennbare) Haftung zwischen Faser und Matrix in ABAQUS zu modellieren, ist ihre Definition in Form einer Interaction Property (deutsch: Interaktions-Eigenschaft) im Interaction Module (deutsch: Interaktions-Modul). In diesem Unterabschnitt sollen die von ABAQUS gebotenen Optionen dargestellt werden, welche in dieser Arbeit Anwendung gefunden haben. Die (auftrennbare) Haftung wird zwischen zwei Flächen definiert, für den Solver Dynamic, Explicit, welcher in dieser Arbeit verwendet wird, geschieht dies mit einem General Contact (deutsch: Allgemeiner Kontakt). Die Trennungen s des TSL entspricht den Relativverschiebungen der Knoten der Slave Surface (deutsch: untergeordnete Fläche) zu ihren Projektionen auf die Master Surface (deutsch: übergeordnete Fläche) ([20]).

Um die mechanischen Eigenschaften des Übergangsbereiches zu definieren, verwendet ABAQUS das in Unterabschnitt 2.2.1 vorgestellte *TSL*. Diese Arbeit benutzt ein ungekopp-

peltes *TSI*, deren linear-elastischer Bereich durch

$$\underline{\Psi} = \begin{Bmatrix} \Psi_n \\ \Psi_s \\ \Psi_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{nn}^0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{ss}^0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{tt}^0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_n \\ s_s \\ s_t \end{Bmatrix} = \underline{K}^0 \underline{s} \quad (3.21)$$

und deren Aussehen in Abbildung 2.3 dargestellt ist. Dabei stellt der Index *n* das *TSI* in lokaler Normalenrichtung und die Indizes *s* und *t* das *TSI* in die beiden lokalen Tangentialrichtungen dar. Bei dieser Einstellung beeinflusst eine Trennung in eine der in Abschnitt 2.1 dargestellten Riss-Modenrichtungen die anderen Moden nicht. Soll ein gekoppeltes Gesetz genutzt werden, so ist diese Option in ABAQUS/CAE auszuwählen unter **Create Interaction Property > Contact > Mechanical > Cohesive Behaviour: Specify stiffness coefficients: Coupled**. Des Weiteren sind neben den Steifigkeitstermen K_{nn}^0 , K_{ss}^0 und K_{tt}^0 auch Kopplungsterme zu definieren. Andernfalls können die Steifigkeitsterme für den ungekoppelten Fall unter **Create Interaction Property > Contact > Mechanical > Cohesive Behaviour: Specify stiffness coefficients: Uncoupled** definiert werden. Soll ein Riss-Modus nicht berücksichtigt werden, so kann der Steifigkeitsterm zu null gesetzt werden ([20]). Modellierungen in dieser Arbeit haben gezeigt, dass die drei Rissmoden aus Abschnitt 2.1 nicht zwangsläufig den Indizes *n*, *t* und *s* zugeordnet sind. So kann ein Modus II-Riss beispielsweise mit $t_n = K_n^0 s_n$ zu modellieren sein

Für die Schadensinitiierung können vier Kriterien ausgewählt werden, welche entweder von der Spannung t_i^m oder der Trennung s_i^m abhängen. Beim Maximum Stress Criterion (deutsch: Maximal-Spannungs-Kriterium) tritt Schaden auf, sobald

$$\max \left\{ \frac{\langle t_n \rangle}{t_n^m}, \frac{t_s}{t_s^m}, \frac{t_t}{t_t^m} \right\} = 1. \quad (3.22)$$

Die Macaulay-Klammer $\langle \rangle$ deutet an, dass bei einer Druckspannung kein Schaden auftritt. In ABAQUS/CAE kann dieses Kriterium eingestellt werden unter **Create Interaction Property > Contact > Mechanical > Damage: Initiation** unter dem Tab **Criterion: Maximum nominal stress**. Das Maximum Separation Criterion (deutsch: Maximal-Trennungs-Kriterium) wiederum definiert die Schadensinitiierung mit

$$\max \left\{ \frac{\langle s_n \rangle}{s_n^m}, \frac{s_s}{s_s^m}, \frac{s_t}{s_t^m} \right\} = 1. \quad (3.23)$$

In diesem Fall bedeutet die Macaulay-Klammer $\langle \rangle$, dass bei reiner Kompression kein Schaden in der Übergangsfläche auftritt. Auswählbar ist dieses Kriterium in ABAQUS/CAE unter **Create Interaction Property > Contact > Mechanical > Damage: Initiation** unter dem Tab **Criterion: Maximum separation**. Weitere Kriterien sind das Quadratic Stress Criterion und das Quadratic Separation Criterion. Für Surface-Based Cohesive Behavior ist keine Dicke der Übergangsfläche definierbar ([20]).

Eine lineare Schadensevolution kann in ABAQUS/CAE eingestellt werden unter **Mechanical > Damage: Evolution** unter dem Tab **Type: Displacement: Softening: Linear** ([20]).

3.2.2. Modellierung der Haftung im Übergangsbereich als Cohesive Element

Anders als bei der in Unterabschnitt 3.2.1 beschriebenen Modellierung der Haftung als Kontaktbedingung kann das Cohesive Elements eine Dicke des Übergangsbereiches darstellen, was jedoch nicht zwangsläufig notwendig ist ([20]). Bei Cohesive Elements handelt es sich um modellierte Elemente, denen als Material- und Netz-Eigenschaften kohäsives Verhalten zugeordnet wird. Bei den Element-Typen handelt es sich um *COH*-Elemente, welche für 2D-, 3D- oder achsensymmetrische Anwendungen erstellt werden können ([21]). Die Steifigkeitseigenschaften (vgl. K_i^0) des TSL, sowie die Schadensevolution können unter den Materialeigenschaften eingestellt werden. Die Steifigkeit des Cohesive Element berechnet sich aus der Stärke der Übergangsfläche t_{coh} und ihren Elastizitäts- bzw. Schubmoduln mit

$$\begin{aligned} K_{nn}^0 &= \frac{E_{nn}}{t_{coh}} \\ K_{ss}^0 &= \frac{G_{sn}}{t_{coh}} \\ K_{tt}^0 &= \frac{G_{tn}}{t_{coh}}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

([22]). Für dynamische Analysen muss für die Cohesive Elements auch eine Dichte festgelegt werden.

Da weder die SLM aus Abschnitt 2.3, noch der Versuch aus Abschnitt 5.1 eine Dicke, Elastizitäts- oder Schubmoduln der Übergangsfläche angegeben, wird in dieser Arbeit die Haftung mit dem Surface-Based Cohesive Behavior statt mit Cohesive Elements modelliert. Des Weiteren müssen bei einer Modellierung als Kontaktbedingung keine Annahmen zur Dichte der Übergangsfläche getroffen werden.

3.2.3. Modellierung der Reibung im Übergangsbereich

Um das in Unterabschnitt 2.2.2 vorgestellte FL (2.5) in ABAQUS umzusetzen, werden in dieser Arbeit zwei Modellierungsvarianten angewandt. Zum einen bietet ABAQUS mit der Funktion Shear stress versus elastic slip while sticking (SSVESWS, deutsch: Schubspannung versus elastischer Schlupf während des Haftens) die Möglichkeit, das FL anzuwenden. Zum anderen verwenden ([2]) die in Unterabschnitt 3.2.2 beschriebenen Cohesive Elements, um Reibung zwischen Faser und Matrix zu simulieren. In dieser Arbeit wird jedoch ein Surface-Based Cohesive Behavior, wie in Unterabschnitt 3.2.1 dargestellt, verwendet. Beide Varianten haben gemeinsam, dass sie, um numerische Probleme bei einer Relativgeschwindigkeit von null zwischen Faser und Matrix zu vermeiden, einen linearen Übergangsbereich zwischen den Zuständen eines nicht vorhandenen oder vorhandenen Schlupfes herstellen. Somit werden, wie in Abbildung 3.4 dargestellt, Unstetigkeiten vermieden ([2]). Im Folgenden werden die beiden Modellierungsarten kurz vorgestellt.

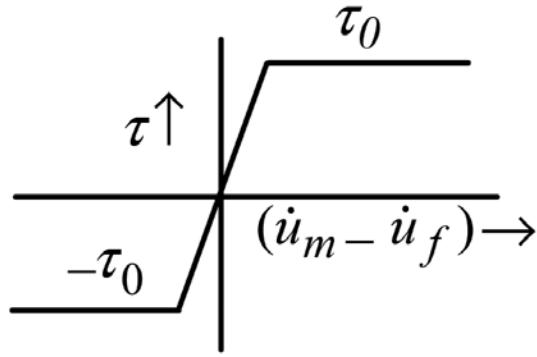


Abbildung 3.4: Friction Law für numerische Analyse ([2])

Shear stress versus elastic slip while sticking Die Funktion SSVESWS, erlaubt eine Modellierung eines Übergangsbereiches zwischen Haftung und Reibung, welcher nicht sprunghaft ist, sobald es eine Relativbewegung zwischen Faser und Matrix gibt. Statt dessen wird eine Relativbewegung zwischen beiden Komponenten erlaubt, obwohl der Zustand eigentlich "haftend" ist, bis eine kritische Schubspannung τ_0 erreicht wird. Dafür wird eine Steifigkeit κ definiert, welche für den "haftenden" Bereich bis zum Erreichen von τ_0 gilt. Abbildung 3.5 zeigt das SSVESWS-Modell für die Reibung ([23]). Die Parameter der SSVESWS-Funktion können eingestellt werden unter **Create Interaction Property > Contact > Tangential Behavior > Friction formulation: Penalty**. Die Interaction wird dann als Surface-to surface contact (Explicit) mit der Mechanical constraint formulation: Penalty contact method und Finite sliding definiert.

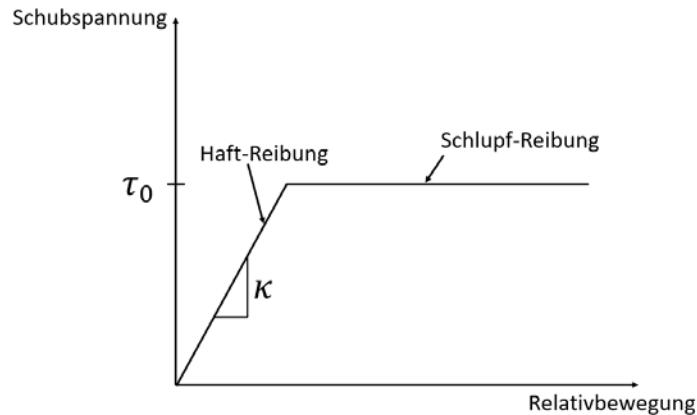


Abbildung 3.5: Shear stress versus elastic slip while sticking (nach [23])

Reibung durch Surface-Based Cohesive Behavior Für eine Abbildung des *FL* (2.5) mit einem Surface-Based Cohesive Behavior wird für die Relativverschiebung s^f , bei der die Verbindung zwischen Faser und Matrix vollständig versagt, ein großer Wert angenommen, sodass die Spannung in der Übergangsfläche nach (2.4) kaum abnimmt (vgl. Abbildung

3.6). Die maximal ertragbare Schubspannung entspricht dabei dem Wert der Reibungs-Schubspannung.

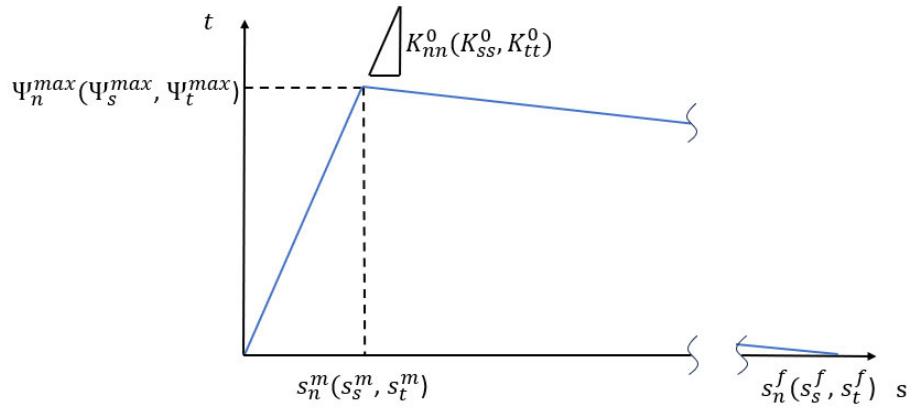


Abbildung 3.6: Reibung als *Surface Based Cohesive Behavior* (nach [20])

3.3. Untersuchung der Modellierungsmöglichkeiten des Faserverbundes

In diesem Abschnitt werden Modellierungsmöglichkeiten des Faserverbundes vorgestellt, welche in dieser Arbeit betrachtet wurden. Tabelle 3.2 zeigt, welche Parameter der numerischen Modelle im PYTHON-Skript geändert werden können. Für alle Modelle gilt, dass die Erdbeschleunigung vernachlässigt wird.

Tabelle 3.2: Veränderbare Parameter für numerische Modelle im PYTHON-Sript

Parameter	Spezifikation
Geometrie	<ul style="list-style-type: none"> • Faser- und Matrixlänge • Faser-Radius- und Matrix-Dicke • Freie Länge
Randbedingung	<ul style="list-style-type: none"> • Einspannung der Matrix • Symmetrie der Faser • Keine Randbedingung • Einspannung der Matrix und Symmetrie der Faser
Übergangsbedingung	<p>Haftung:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Surface-Based Cohesive Behavior <p>Reibung:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Shear Stress versus elastic slip while sticking • Surface-Based Cohesive Behavior
Belastung	<ul style="list-style-type: none"> • Harmonische Weganregung • lineare Zugspannung am Faserende • Lineare Verschiebung am Faserende
Material	<ul style="list-style-type: none"> • Mechanische Eigenschaften von Faser und Matrix • Elastizitätsmodul • Dichte • Querkontraktionszahl

3.3.1. Rotationssymmetrisches Modell aus Axisymmetric Elements

ABAQUS bietet die Möglichkeit, für rotationssymmetrische Körper sogenannte Axisymmetric Elements zu nutzen, wobei die Belastung ebenfalls rotationssymmetrisch wirken muss ([24]). Die Abbildung 3.7 zeigt beispielhaft, wie sich ein Axisymmetric Ele-

ment, in diesem Fall ein *CAX4*-Element (4-Knoten bilinear), in einem rotationssymmetrischen Körper darstellt. In dieser Arbeit wird jedoch ein Axisymmetric Element mit reduzierter Integration verwendet (*CAX4R*, 4-Knoten bilinear mit reduzierter Integration und Hourglass-Control ([25])), da für die Anwendung von ABAQUS/Explicit keine CAX4-Elemente zugelassen sind (vgl. Abbildung 3.8 (a)). Nach der Berechnung ist eine rotationsymmetrische Modellierung (sweep) des FE-Modells möglich, um den rotationsymmetrischen Körper darzustellen (s. Abbildung 3.8 (b)). Wie in ([2]) werden Faser und Matrix als zylindrisch angenommen. Durch eine Anwendung von Axisymmetric Elements in dieser Arbeit soll die Rechenzeit reduziert werden. Der PYTHON-Code für das rotationssymmetrische Modell ist in Anhang B zu finden.

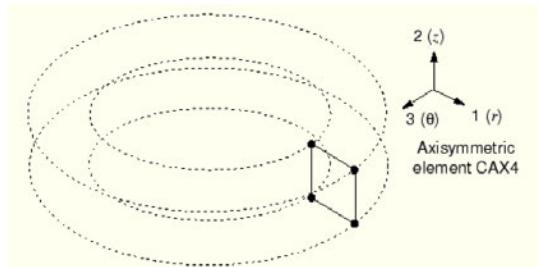


Abbildung 3.7: Axisymmetric Element ([26])

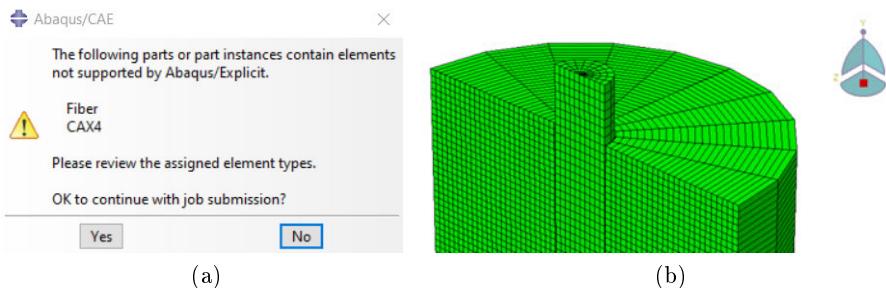


Abbildung 3.8: (a) Meldung beim Versuch, CAX4-Elemente in ABAQUS/Explicit zu verwenden, (b) Sweep eines Faser-Matrix-Verbundes aus CAX4R-Elementen in ABAQUS

3.3.2. Viertelmodell aus Volumenelementen

Neben Axisymmetric Elements wurden in dieser Arbeit auch Volumenmodelle des Typs C3D8R (8-Knoten Linear mit reduzierter Integration und Hourglass-Control) verwendet ([27]). Dieses verfügt über nur einen Integrationspunkt, welcher sich in der Mitte des Elementes befindet (s. Abbildung 3.9 (a)). Die reduzierte Variante wurde zwecks Einsparung von Rechenzeit verwendet, die Hourglass-Control ist standardmäßig aktiviert ([28]). Wie in ([2]) werden Faser und Matrix als zylindrisch angenommen. Um weitere Rechenzeit einzusparen, wurde die Rotationssymmetrie einiger Faser-Matrix-Verbunde genutzt, und

ein Viertelmodell verwendet, wie in Abbildung 3.9 (b) sichtbar ist. Das PYTHON-Skript für das Viertelmodell ist in Anhang C zu finden. Ein Viertelmodell wird z. B. auch in ([10]) genutzt.

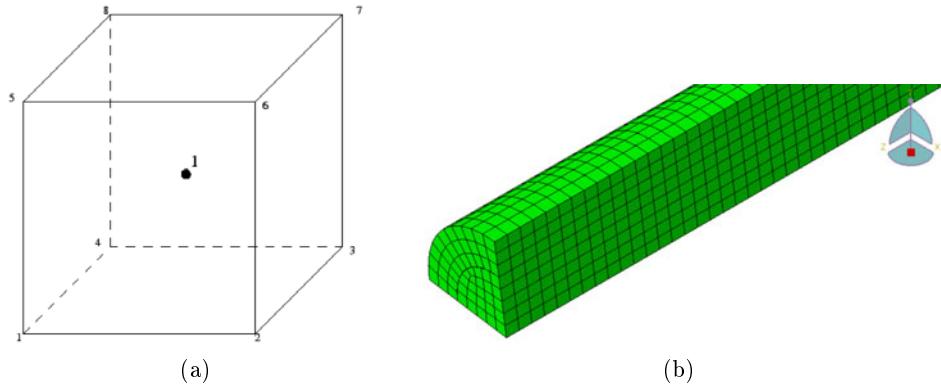


Abbildung 3.9: (a) Schematisches C3D8R-Element ([28]), (b) Viertelmodell eines Faser-Matrix-Verbundes

4. Analytische Validierung der Numerischen Modelle

In diesem Kapitel werden die im vorherigen Kapitel vorgestellten numerischen Modelle mit den in Abschnitt 2.3 beschriebenen analytischen SLM verglichen. Zunächst wird die numerische Modellierung der Haftungstrennung mit dem SLM von AZZAM validiert, anschließend die Reibung mit dem SLM von SRIDHAR et al. Zu beachten ist, dass die SLM und somit auch die numerischen Modelle unterschiedliche Koordinatensysteme verwenden. Beim SLM von AZZAM verläuft die Faserlängsachse entlang der z-Achse in positive Richtung (vgl. Abbildung 2.4 (a)), bei dem von SRIDHAR et al. verläuft sie in negative Richtung (vgl. Abbildung 2.8). In den Unterabschnitten werden analytische Ergebnisse mit dem tiefgestellten Index *analytisch* und numerische Ergebnisse mit dem tiefgestellten Index *numerisch* gekennzeichnet.

4.1. Validierung mit dem Shear-Lag-Modell nach Azzam

Um die Schädigung der Übergangsfläche sowie die Haftung verschiedener numerischer Modelle mit dem analytischen Shear-Lag-Modell von AZZAM aus Unterabschnitt 2.3.1 zu validieren, wurden die in ([4]) verwendeten Parameter für die Geometrie, sowie die Materialeigenschaften und Eigenschaften des TSL verwendet. Diese sind in Tabelle 4.1 einsehbar. Da die Matrix starr ist, werden in ([4]) keine Angaben zum Elastizitätsmodul E_m sowie der Dichte ρ_m gemacht. Um eine starre Matrix zu simulieren, wurden beide Parameter um den Faktor 10 größer als die der Matrix gewählt. Als Querkontraktionszahl wurde $\nu = 0,33$ gewählt ([29]), da E_f und ρ_f dem Material Aluminium ähneln ([30]). In Anlehnung an ([2]) wurde ein Faservolumenanteil von $f = 40\%$ angenommen. Die Matrix Dicke berechnete sich mit $f = \frac{V_f}{V}$ ([31]) zu $0,00581\text{ mm}$.

Tabelle 4.1: Parameter für das numerische Modell. Die Tabelle basiert größtenteils auf Daten von ([4])

	Faser	Matrix	Übergangsfläche
Elastizitätsmodul E (MPa)	72000	720000	
Dichte ρ ($\frac{\text{tonne}}{\text{mm}^3}$)	$2,7 \times 10^{-9}$	$2,7 \times 10^{-8}$	
Querkontraktionszahl ν	0.33	0.33	
Querschnittsfläche der Faser A_f (mm^2)	$3,14 \times 10^{-4}$		
Faserumfang \bar{a} (mm)	$6,28 \times 10^{-2}$		
Länge l (mm)	5	5	
Steifigkeit der Übergangsfläche K^0 ($\frac{\text{MPa}}{\text{mm}}$)			652
Schlupf bei Schadensinitiierung s^m (mm)			0,005
Schlupf bei Reibung s^r (mm)			0,08
Schlupf bei vollständigem Versagen zwischen Faser und Matrix s^f (mm)			0,0941
Schubspannung bei Schadensinitiierung τ^m (MPa)			3,26
Schubspannung bei Reibung τ^r (MPa)			0,517
Schubspannung τ^s (MPa)			3,44
Erregeramplitude C_n (mm)	$6,125 \times 10^{-2}$		
Erregerkreisfrequenz λ ($\frac{1}{\text{s}}$)	1×10^5		

Für das analytische Shear-Lag-Modell erfolgt die harmonische Anregung, wie in (2.27) beschrieben, mit $e^{i\lambda t}$. Nach der Eulerschen Formel

$$e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y) \quad (4.1)$$

ist der Realteil der Anregung ein Kosinus. In dieser Arbeit wird für die numerischen Modelle eine sinusförmige Anregung gewählt, da erwartet wird, dass eine Auslenkung um die volle Amplitude im ersten Zeitschritt zu numerischen Problemen führt. Da Sinus und Kosinus um eine Viertelperiode phasenverschoben sind, wurden die numerischen und analytischen Ergebnisse um eine Viertelperiode versetzt miteinander verglichen. Das analytische Modell wurde zum Zeitpunkt $t_{\text{analytisch}} = 0$ s ausgewertet, der Zeitpunkt des numerischen Modells ist $t_{\text{numerisch}} = 1,57 \times 10^{-5}$ s. $t_{\text{numerisch}}$ wurde auf eine Viertelperiode bei der Erregerkreisfrequenz $\lambda = 1 \times 10^5$ festgelegt, um Rechenzeit zu sparen. Das rotationssymmetrische und das Viertelmodell für die Simulation der Hafttrennung sind in Abbildung 4.1 (a) und (b) dargestellt.

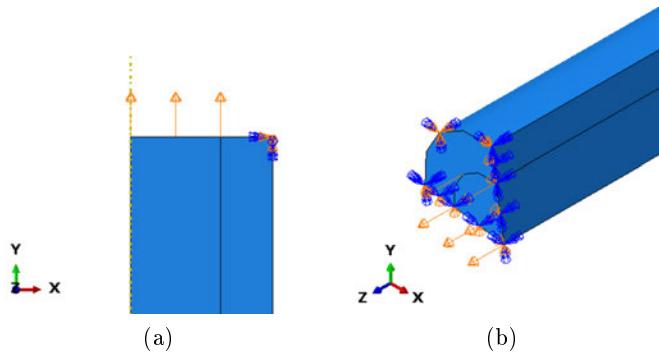


Abbildung 4.1: (a) Rotationssymmetrisches Modell (b) Viertelmodell

Abbildung 4.2 zeigt das numerische Modell von AZZAM für die Faser und einen Übergangsbereich aus Cohesive Elements. Aus den in Unterabschnitt 3.2.2 genannten Gründen wird in dieser Arbeit ein Surface-Based Cohesive Behavior genutzt. Des Weiteren ist in Abbildung 4.2 zu sehen, dass die Matrix nicht modelliert ist. Es wird angenommen, dass die Cohesive Elements vollständig eingespannt sind. In dieser Arbeit wird statt der Cohesive Elements die Matrix eingespannt. AZZAM verwendet für die Faser C3D8R-Elemente, was auch bei dem in dieser Arbeit verwendeten Viertelmodell der Fall ist, für die Cohesive Elements werden COH3D8-Elemente verwendet ([4]).

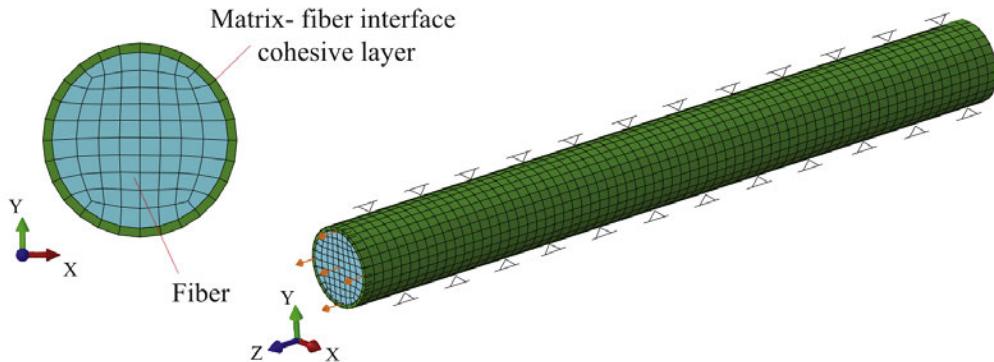


Abbildung 4.2: Numerisches Modell der Faser und des Übergangsbereiches mit Cohesive Elements ([4])

4.1.1. Hafttrennung mit dem rotationssymmetrischen Modell

In diesem Unterabschnitt werden analytische Shear-Lag- sowie numerische Lösungen für das rotationssymmetrische Modell verglichen. In dem numerischen Modell wurden 20000 CAX4R-Elemente verwendet, die Übergangsfläche wurde mit 2500 Elementen diskretisiert. Die Rechenzeit betrug etwa 14 min, der mit (3.20) berechnete kritische Zeitschritt betrug $\Delta t_{krit, theorettisch} = 2,33 \times 10^{-10} \text{ s}$. In ABAQUS war der Zeitschritt im Mittel $\Delta t_{krit, Abaqus} = 2,3 \times 10^{-10} \text{ s}$.

Abbildung 4.3 (a) vergleicht den analytisch berechneten Schlupf $\hat{s}_{analytisch}(z, t)$ mit dem numerisch berechneten $\hat{s}_{numerisch}(z, t)$. Bei beiden Modellen stieg der Schlupf von $z = 0 \text{ mm}$ monoton mit zunehmenden Abstand zum unbelasteten Faserende. Am belasteten Faserende lag dieser für beide bei $\hat{s} = 0,06 \text{ mm}$. Der Schlupf wurde vom rotationssymmetrischen Modell gut nachgebildet, im Mittel war die prozentuale Abweichung $\bar{\xi} = 5 \%$.

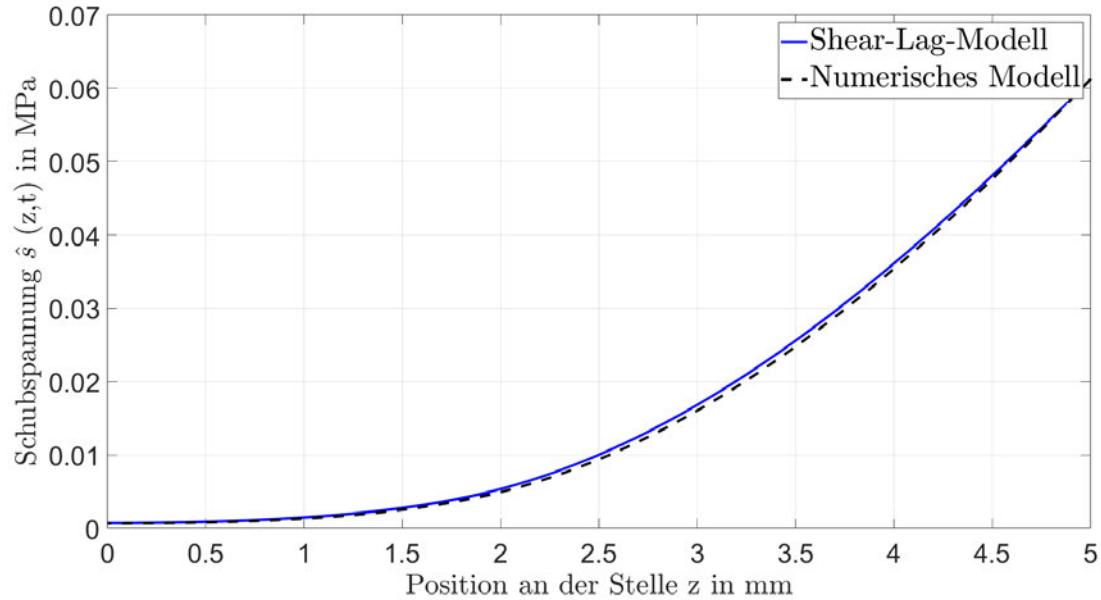
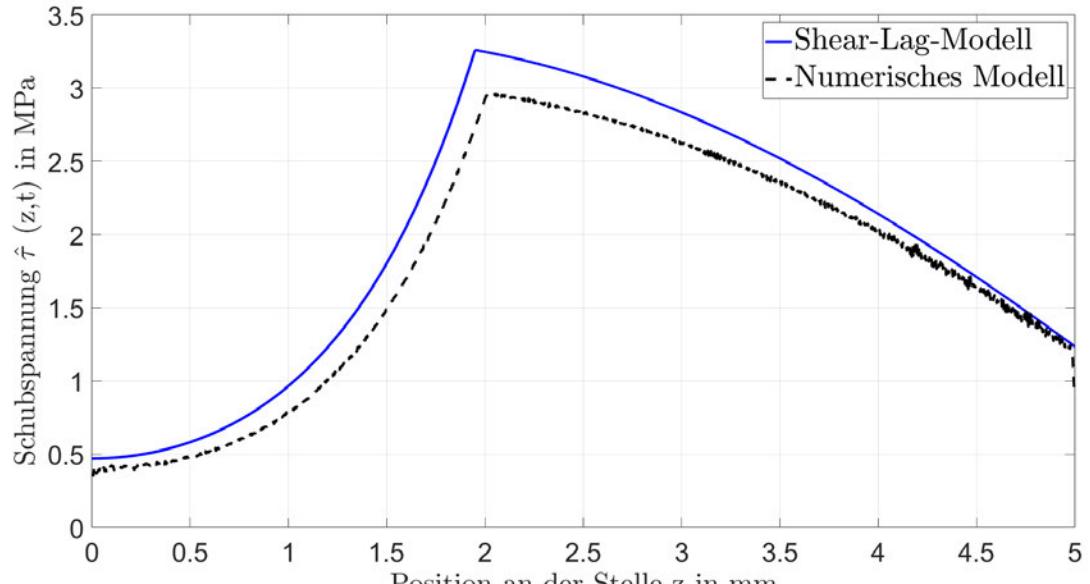


Abbildung 4.3: Schlupf entlang der Übergangsfläche für das rotationssymmetrische und das SL-Modell

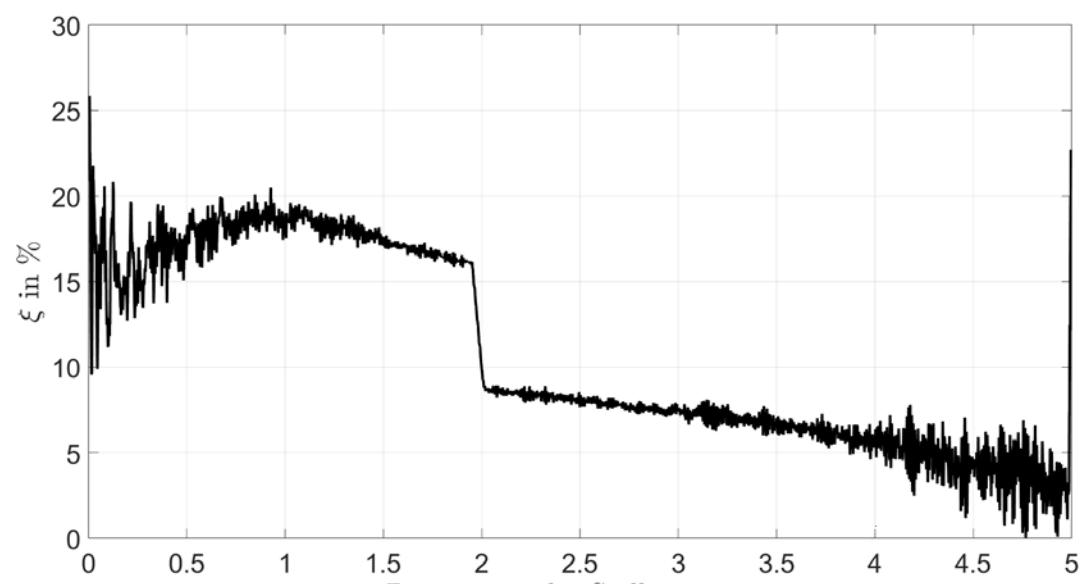
Die Schubspannungen $\hat{\tau}_{analytisch}(z, t)$ und $\hat{\tau}_{numerisch}(z, t)$ entlang der Übergangsfläche sowie deren prozentuale Abweichung ξ voneinander werden in Abbildung 4.4 (a) und 4.4 (b) dargestellt. Der aus dem numerischen Modell berechnete Verlauf war zunächst negativ, er wurde deshalb umgekehrt, damit der Verlauf mit dem des SLM verglichen werden konnte. Des Weiteren wurde der leicht verrauschte Verlauf mit einem gleitenden Mittelwert von 10 Datenpunkten geglättet, um Trends bei der prozentualen Abweichung erkennbarer zu machen.

Der Verlauf von $\hat{\tau}_{numerisch}(z, t)$ ähnelte $\hat{\tau}_{analytisch}(z, t)$, unterschätzte aber die Schubspannung über die gesamte Länge der Übergangsfläche. Die Position z_{r0} , bei der die Schädigung der Übergangsfläche beginnt, ist durch $\hat{\tau}_{max}$ gekennzeichnet. Für das analytische Modell war $z_{r0,analytisch} = 1,94 \text{ mm}$, für das numerische $z_{r0,numerisch} = 2,03 \text{ mm}$. Sie wichen um ca. 5 % voneinander ab. An dieser Stelle ist die analytische Schubspannung $\hat{\tau}_{max,analytisch} = 3,26 \text{ MPa}$, die numerische Schubspannung liegt darunter mit $\hat{\tau}_{max,numerisch} = 2,95 \text{ MPa}$. Die prozentualen Abweichungen waren in der UDZ größer als in der DZ. Die mittlere Abweichung $\bar{\xi}$ betrug über die gesamte Länge der Übergangs-

fläche 11 %.



(a)



(b)

Abbildung 4.4: (a) Schubspannung entlang der Übergangsfläche für das rotationssymmetrische und das SL-Modell, (b) Prozentuale Abweichung zwischen Shear-Lag-Modell und numerischem Modell

4.1.2. Hafttrennung mit dem Viertelmodell

Im Viertelmodell waren 135000 C3D8R-Elemente eingesetzt. Die Länge der Übergangsfläche wurde mit 2500 Elementen diskretisiert. Die Berechnungszeit betrug ca. 4,5 h. Der kritische Zeitschritt nach (3.20) betrug $\Delta t_{krit, theoreatisch} = 1,35 \times 10^{-10} \text{ s}$, der in ABAQUS verwendete Zeitschritt war $\Delta t_{krit, Abaqus} = 1,3 \times 10^{-10} \text{ s}$. Die Schlupf-Werte $\hat{s}(z, t)$ für das Viertel- und das SLM sind in den Abbildungen 4.5 (a) zu sehen, die Schubspannungen $\hat{\tau}_{analytisch}(z, t)$ und $\hat{\tau}_{numerisch}(z, t)$ sowie deren prozentualen Abweichungen von einander sind in den Abbildungen 4.6 (a) und (b) dargestellt. $\hat{s}_{numerisch}(z, t)$ und $\hat{\tau}_{numerisch}(z, t)$ verliefen für das Viertelmodell ähnlich zum rotationssymmetrischen Modell. Aus dem Viertelmodell ergab sich ein glatterer Schubspannungsverlauf. Die prozentuale Abweichung ähnelte der des rotationssymmetrischen Modells, der Verlauf ist glatter. Die mittlere prozentuale Abweichung des Schlupfes betrug $\bar{\xi} = 5 \%$, die der Schubspannung $\bar{\xi} = 11 \%$.

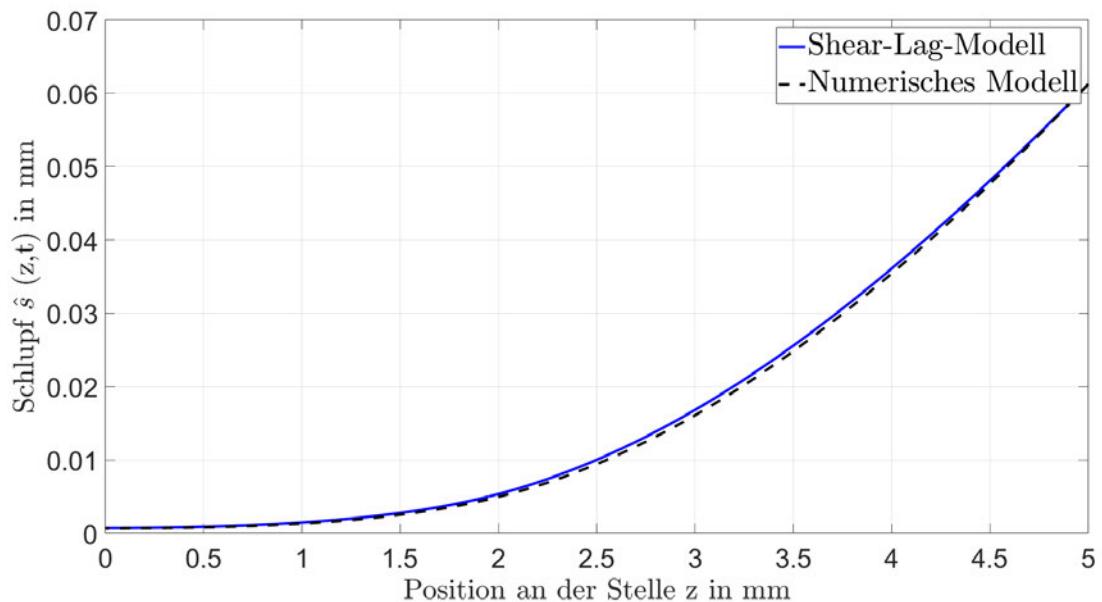
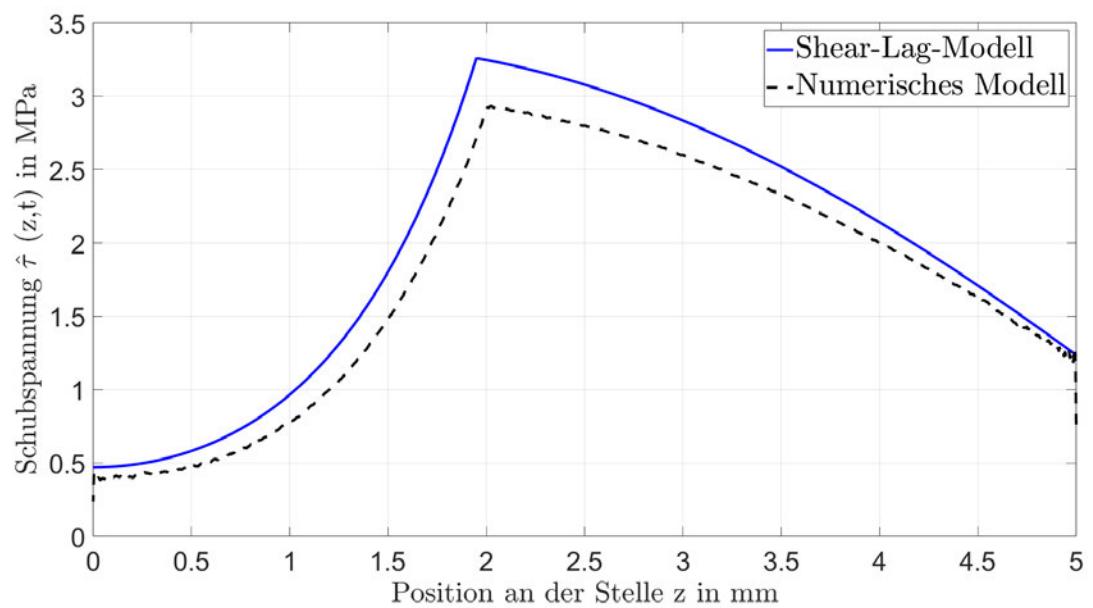
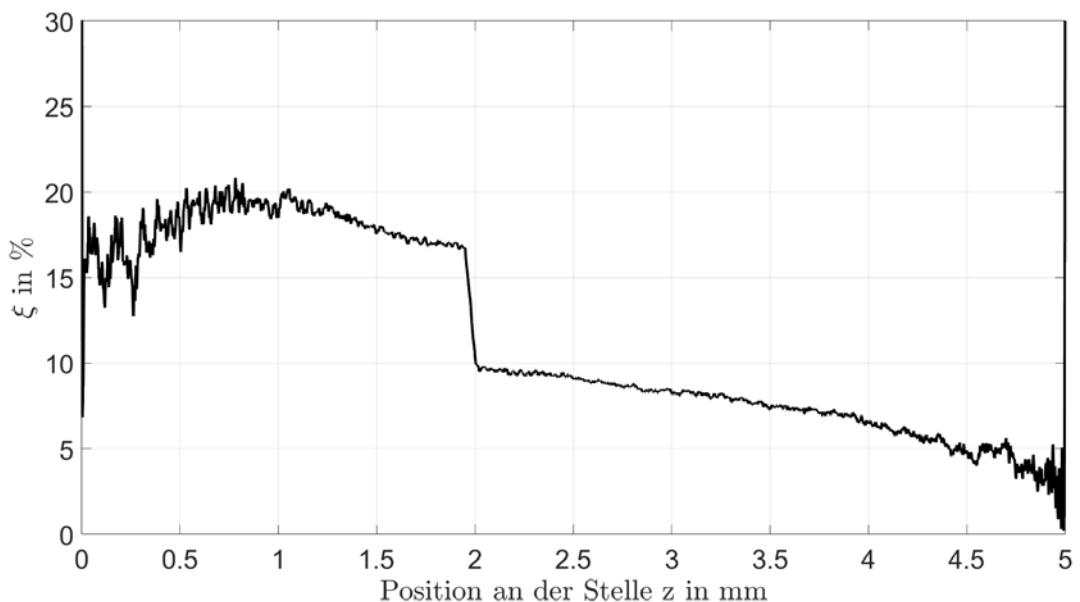


Abbildung 4.5: Schlupf entlang der Übergangsfläche für das Viertel- und das SL-Modell



(a)



(b)

Abbildung 4.6: (a) Schubspannung entlang der Übergangsfläche für das Viertel- und das SL-Modell, (b) Prozentuale Abweichung zwischen Shear-Lag-Modell und numerischem Modell

4.1.3. Auswertung der Modellvergleiche und Vergleich mit Literatur

Abschließend werden allgemeine Beobachtungen und Besonderheiten der beiden Modelle beschrieben. Des Weiteren werden diese mit den Ergebnissen aus ([4]) von AZZAM gegenübergestellt. Der Schlupf wurde von beiden numerischen Modellen nah am SLM dargestellt, im Mittel liegt die prozentuale Abweichung $\bar{\xi} = 5\%$. Die Verläufe der Schubspannungen beider Modelle folgen qualitativ denen des SLM, beide unterschätzen sie jedoch. Im Mittel betrugen die Abweichung $\bar{\xi} = 11\%$, wobei der Verlauf des rotationssymmetrischen Modells für die Berechnung der Abweichung geglättet wurde. Die Abweichung war in der UDZ größer als in der DZ. Ein Grund dafür könnte die Verschiebung der numerisch berechneten Länge der UDZ z_{r0} gegenüber der analytisch berechneten sein. Sie wurde von beiden Modellen mit einer Abweichung von 5 % zum SLM gut geschätzt. Durch diese Abweichung ist die Differenz der Schubspannungen größer. Der Schubspannungsverlauf des Viertelmodells war glatter als der des rotationssymmetrischen Modells. Das rotationssymmetrische Modell wies eine signifikant geringere Rechenzeit auf. Zu beachten ist, dass der Schubspannungsverlauf des rotationssymmetrischen Modells negativ war. Eine Maßnahme zur Annäherung der numerischen Schubspannungsverläufe an die des SLM war eine Erhöhung der Steifigkeit und Dichte der Matrix um den Faktor 10. Außerdem wurde die Matrix an der Übergangsfläche eingespannt, um die im analytischen Modell vorliegende starre Matrix zu imitieren. Dies brachte jedoch keine Verbesserungen. Eine weitere Maßnahme war eine Verdopplung der Netzfeinheit von $l_e = 0,002\text{ mm}$ auf $l_e = 0,001\text{ mm}$ beim rotationssymmetrischen Modell. Dies näherte den Schubspannungsverlauf des numerischen Modells den des analytischen tatsächlich an (s. Abbildung 4.7). Eine Folge war jedoch eine deutlich höhere Rechenzeit und ein stärkeres Rauschen innerhalb des Verlaufes.

Zusammenfassend zeigte sich, dass beide Modelle den Schlupf-Verlauf und die Länge der UDZ akkurat wiedergaben. Der Schubspannungsverlauf wurde von beiden Modellen qualitativ wiedergegeben, unterschätzt jedoch den des SLM. Der Schubspannungsverlauf des Viertelmodells war glatter, das rotationssymmetrische Modell hatte eine deutlich kürzere Rechenzeit.

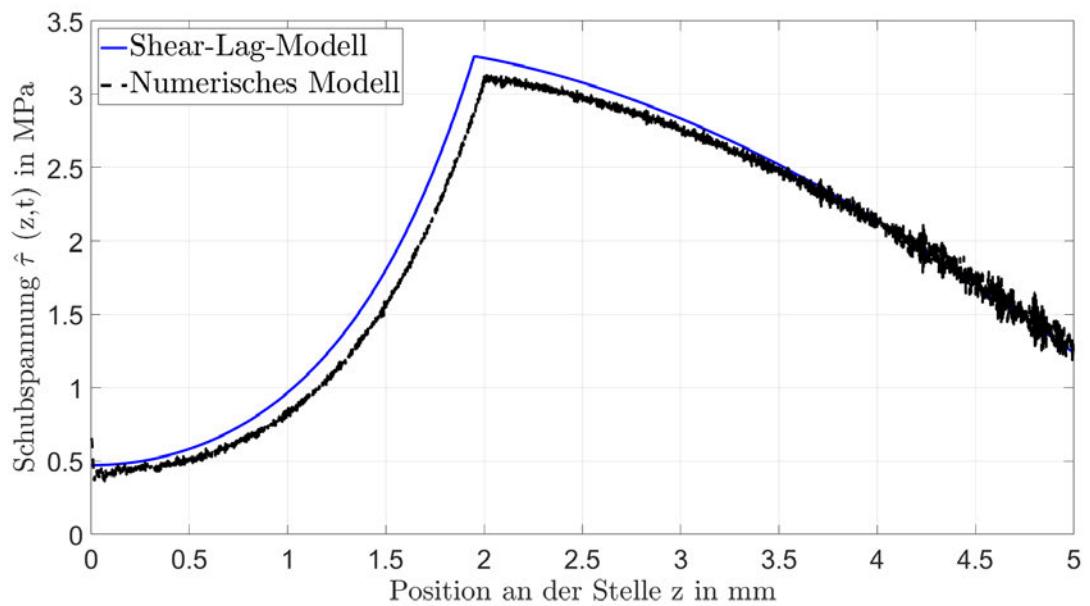


Abbildung 4.7: Schubspannung für numerisches und analytisches Modell bei einer Netzeinheit von $l_e = 0,001 \text{ mm}$

Abbildung 4.8 (a) und (b) zeigen die Schlupf- und Schubspannungsverläufe aus ([4]) für das SLM und das numerische Modell zu den Zeitpunkten $t_1 = 5,23 \times 10^{-5} \text{ s}$ und $t_2 = 6,2832 \times 10^{-5} \text{ s}$. Die Ergebnisse bei $t_2 = 6,2832 \times 10^{-5} \text{ s}$ sollen mit denen aus dieser Arbeit verglichen werden, obwohl diese für andere Zeiten erstellt wurden. Dies ist möglich, weil bei den SLM dieser Arbeit die Größen zum Zeitpunkt $t = 0 \text{ s}$ ausgewertet wurden, was um eine Periode zu $t_2 = 6,2832 \times 10^{-5} \text{ s}$ phasenverschoben ist und somit die selben analytischen Verläufe liefert. Die Schlupf-Verteilung des numerischen Modells aus ([4]) verhält sich zum Großteil wie die der numerischen Modelle dieser Arbeit. Das numerische Modell von AZZAM bildet den Schubspannungsverlauf exakter ab als die Modelle dieser Arbeit, des Weiteren wird die Länge der UDZ z_{r0} passender berechnet.

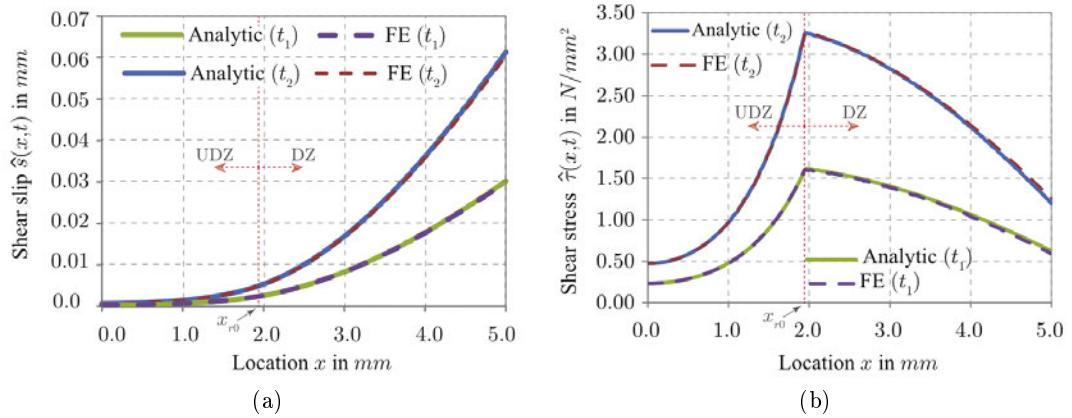


Abbildung 4.8: Schlupf (a) und Schubspannung (b) entlang der Übergangsfläche für das numerische und das analytische Modell von AZZAM zu den Zeitpunkten $t_1 = 5,23 \times 10^{-5} \text{ s}$ und $t_2 = 6,2832 \times 10^{-5} \text{ s}$ ([4])

4.2. Validierung mit dem Shear-Lag-Modell nach Sridhar et al.

Für die Validierung der für verschiedene Modelle formulierten numerischen Reibung mit dem Shear-Lag-Modell von SRIDHAR et al. aus Unterabschnitt 2.3.2 müssen die Parameter der Modelle so eingestellt werden, dass sich die drei Fälle Pure Slip, Slip-Reverse Slip und Slip-Stick einstellen. Das numerische Modell, welches SRIDHAR et al. für den Vergleich mit dem Shear-Lag-Modell nutzen, ist ein Plane Stress Modell (deutsch: Modell des ebenen Spannungszustandes), welches aus 4-Punkt bilinearen und Cohesive Elements besteht. Eine Verwendung anstelle eines achsensymmetrischen Systems ist möglich, wenn der Faserradius $r_f = 2h$ und $f = \frac{h}{H}$ ist, wie in Abbildung 4.9 zu sehen. Die Reibung wurde durch Cohesive Elements zwischen Faser und Matrix nachgebildet ([2]).

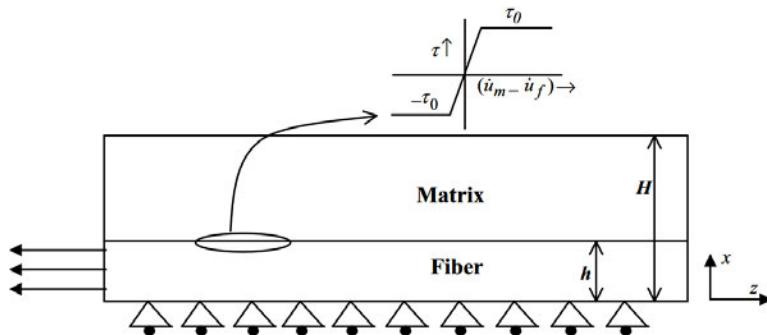


Abbildung 4.9: Numerisches Modell von SRIDHAR et al. ([2])

Im Folgenden werden die Geometrie-, Mechanik- und Werkstoffeigenschaften vorgestellt, welche für eine Darstellung der drei Fälle genutzt wurden. Die in ([2]) verwendeten

Parameter für die Darstellung der Modelle wurden nicht vollständig beschrieben, weshalb teilweise eigene Annahmen getroffen werden mussten. Direkt gegebene Parameter waren der Faservolumenanteil f , die Reibungs-Schubspannung in der Übergangsfläche τ_0 , die normierte Reibungsschubspannung τ , das Modulverhältnis φ , die inverse Lastrate k und die Wellengeschwindigkeitsverhältnisse C für die drei Fälle. Durch Umformung von (2.69) kann der Elastizitätsmodul der Faser E_f berechnet werden, mit dem wiederum durch Nutzung von (2.68) E_m ermittelt werden kann. Es wurden Annahmen für den Startzeitpunkt t_0 , die eingängliche Axialspannung σ_0 und den Faserradius r_f getroffen, so kann durch Umformung von (2.71) die Faserwellengeschwindigkeit c_f ermittelt werden. Der Faserradius r_f wurde wie in ([4]) gewählt. Die Matrixwellengeschwindigkeit c_m wird dann aus (2.67) bestimmt. Die Annahme der Querkontraktionszahlen ν_f und ν_m ermöglicht abschließend die Berechnung von \hat{E}_f und \hat{E}_m mit (2.63) sowie den Dichten ρ_f und ρ_m aus (2.62). Die gegebenen und angenommenen Parameter für die Fälle I und II sind in Tabelle 4.2 dargestellt. Im Folgenden wird erläutert, warum der Fall III: Slip-Reverse Slip nicht behandelt wird.

Nach (2.86) wird die normierte Verschiebung der Faser $U_f(Z, T)$ für den Fall Slip-Reverse Slip berechnet. Nach Ableitung von (2.86) nach T ergeben sich die Faserpartikelgeschwindigkeiten für die Bereiche 2 [$\eta_1 T < Z \leq \eta_2 T$] und 3 [$\eta_2 T < Z \leq \eta_3 T$] zu

$$\dot{U}_{f,2}(Z, T) = \frac{\Theta_{f,III,2}}{4k(\eta_1^2 - 1)(\eta_3 + 1)} \quad (4.2)$$

mit

$$\Theta_{f,III,2} = \tau 2T \left(\begin{array}{l} 4\eta_1 k + (\eta_1^2 - 1)(\eta_3 + 1) + 2\eta_3 k (\eta_1^2 + 2\eta_1 - 1) \\ + 2Z(\eta_3 + 1)(\eta_1^2 + 4k\eta_1 - 1) \end{array} \right) \quad (4.3)$$

und

$$\dot{U}_{f,3}(Z, T) = \frac{(\tau\eta_3(Z - \eta_3 T))}{k(\eta_3^2 - 1)}. \quad (4.4)$$

Mit den Parametern $C^2 = 0, 1$, $k = 0, 05$, $\tau = 0, 005$ und $T = 10$ ergibt sich statt dem in Abbildung 2.10 (c) dargestellten Verlauf der Fasergeschwindigkeiten in den Bereichen 2 und 3 der Verlauf aus Abbildung 4.10. In diesem sind die roten Linien die Faserpartikelgeschwindigkeiten nach (4.2) und (4.4) für die Bereiche 2 und 3, welche nicht mit denen aus Abbildung 2.10 (c) übereinstimmen. Aus diesem Grund wird der Fall III nicht weiter untersucht.

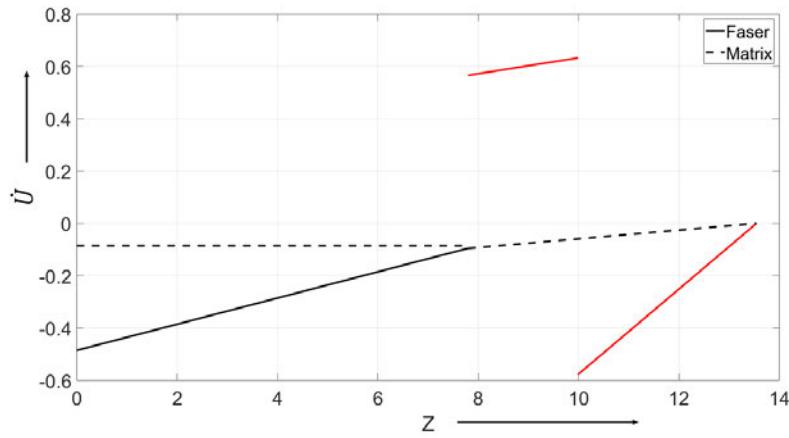


Abbildung 4.10: Partikelgeschwindigkeiten entlang der Übergangsfläche mit den Parametern $C^2 = 0,1$, $\varphi = 2,00$, $k = 0,05$, $\tau = 0,005$ und $T = 10$. Die gestrichelten Linien sind die Matrixpartikelgeschwindigkeiten, die Durchgezogenen die Faserpartikelgeschwindigkeiten. Des Weiteren sind die roten Linien die Faserpartikelgeschwindigkeiten der Bereiche 2 und 3

Zu beachten ist abschließend, dass in der Simulation in ([2]) die Querkontraktionszahlen zu null gesetzt werden (vgl. Annahmen aus Unterabschnitt 2.2.2). Dies führte jedoch bei den Modellen in dieser Arbeit zu numerischen Problemen, weshalb Querkontraktion genutzt und stattdessen eine Ausdehnung der Faser in radialer Richtung verhindert wird. Des Weiteren wird in ([2]) nicht angegeben, wie die normierten Partikelgeschwindigkeiten $\dot{U}(Z, T)$ in absolute Partikelgeschwindigkeiten $\dot{u}(z, t)$ umgerechnet werden. Es wird angenommen, dass dies durch Multiplikation mit der Faserwellengeschwindigkeit c_f geschieht. Für den Vergleich zwischen numerischem und analytischem Modell werden die Partikelgeschwindigkeiten aus ABAQUS mit $\dot{U}_{Abaqus} = \frac{\dot{u}_{Abaqus}}{c_f}$ normiert. Die Tabellen 4.2 (a) und (b) zeigen Parameter für das numerische Modell und das SLM sowie die Parameter für die Reibung in der Übergangsfläche. In den folgenden Abbildungen stellen durchgezogene Linien die Faser- und gestrichelte Linien die Matrixgeschwindigkeiten dar. Des Weiteren wird zwischen analytischen Ergebnissen (dünne Linien) und numerischen Ergebnissen (starke Linien) unterschieden. In Abbildung 4.11 (a) und (b) sind das rotationssymmetrische und das Viertelmodell für die Simulation der Reibung dargestellt.

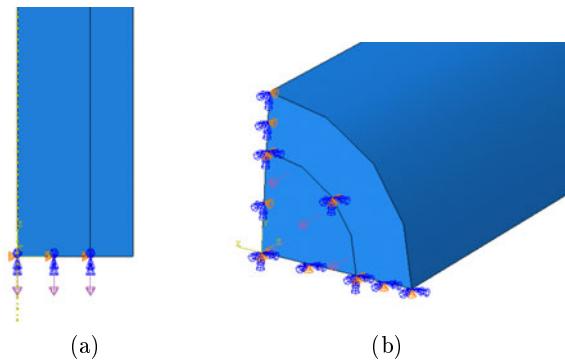


Abbildung 4.11: (a) Rotationssymmetrisches Modell (b) Viertelmodell

Tabelle 4.2: Parameter für das analytische Shear-Lag-Modell und das numerische Modell (a) und Parameter für die Reibung in der Übergangsfläche (b). Die Tabelle basiert zum Teil auf Daten von ([2])

Parameter	Fall I: Pure Slip	Fall II: Slip-Stick
Faserlänge l_f (mm)	0,4	0,4
Faserradius r_f (mm)	0,01	0,01
Elastizitätsmodul Faser E_f (MPa)	100000	100000
Elastizitätsmodul Matrix E_m (MPa)	46296	46296
Querkontraktionszahl Faser ν_f	0,3	0,3
Querkontraktionszahl Matrix ν_m	0,25	0,25
Dichte Faser ρ_f ($\frac{\text{tonne}}{\text{mm}^3}$)	$3,3654 \times 10^{-8}$	$3,3654 \times 10^{-8}$
Dichte Matrix ρ_m ($\frac{\text{tonne}}{\text{mm}^3}$)	$1,3889 \times 10^{-7}$	$1,3889 \times 10^{-9}$
\hat{E}_f (MPa)	134620	134620
\hat{E}_m (MPa)	555560	555560
anteil f	0,4	0,4
Wellengeschwindigkeit Faser c_f ($\frac{\text{mm}}{\text{s}}$)	2×10^6	2×10^6
Wellengeschwindigkeit Matrix c_m ($\frac{\text{mm}}{\text{s}}$)	$6,3246 \times 10^6$	$6,3246 \times 10^6$
Wellengeschwindigkeitsverhältnis C	3,1623	0,3162
Modulverhältnis φ	1,44	1,44
Inverse Lastrate k	0,1	0,1
Normierte Reibungs-Schubspannung τ	0,002	0,002
Reibungs-Schubspannung τ_0 (MPa)	100	100
Eingängliche Axialspannung p_0 (MPa)	100	100
Startzeit t_0 (s)	5×10^{-10}	5×10^{-10}
Normierter Zeitpunkt der Auswertung T	5,7	5,72

(a)

		Surface-Based Cohesive Behavior
t^m (MPa)		100
K^0 ($\frac{\text{MPa}}{\text{mm}}$)		160000
s^f (mm)		1×10^8
τ_0 (MPa)	100	
κ ($\frac{\text{MPa}}{\text{mm/s}}$)	160000	
μ_r	1	
p_{radial} (MPa)	150	

(b)

4.2.1. Reibungssimulation mit dem rotationssymmetrischen Modell

In diesem Unterabschnitt werden die Ergebnisse des rotationssymmetrischen Modells aus Axisymmetric Elements für die in Unterabschnitt 3.2.3 vorgestellten Modellierungsvarianten mit dem analytischen SLM von SRIDHAR et al. für die Fälle I: Pure-Slip und II: Slip-Stick verglichen. Für beide Modellierungsvarianten und beide Fälle sind der theoretische kritische Zeitschritt $\Delta t_{krit, theorettisch}$ nach (3.20), sowie der von ABAQUS gewählte kritische Zeitschritt $\Delta t_{krit, Abaqus}$ in Tabelle 4.3 dargestellt. Die Rechenzeit wird nicht aufgeführt, da sie nur wenige Sekunden betrug. Das numerische Modell aus Axisymmetric Elements bestand aus 1600 CAX4R-Elementen, die Übergangsfläche wurde mit 200 Elementen diskretisiert.

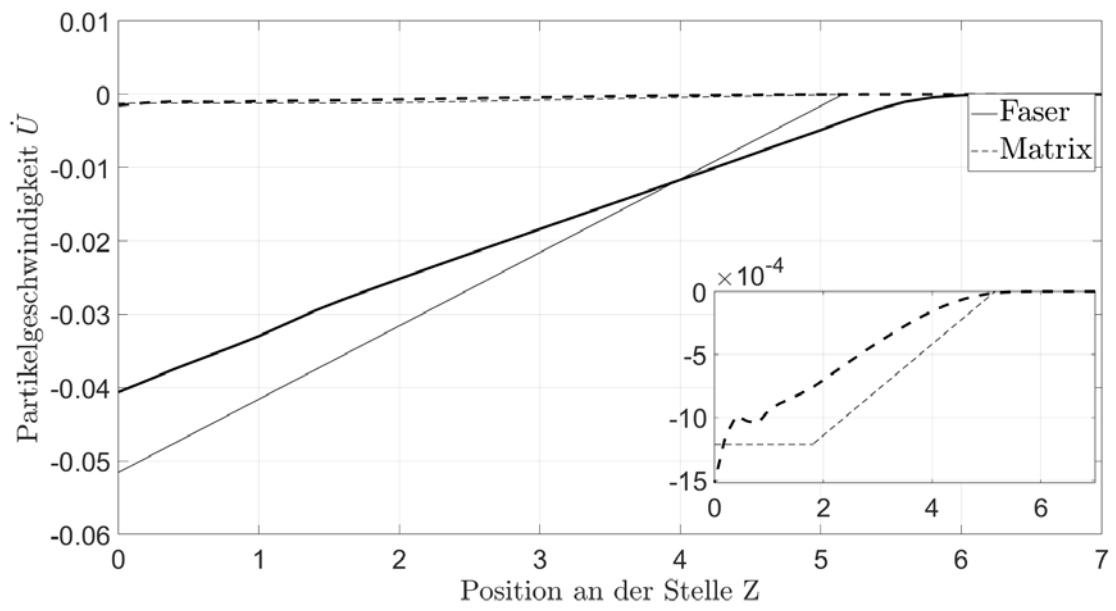
Tabelle 4.3: Zeitschritte für die Berechnung des rotationssymmetrischen Modells

		Surface-Based Cohesive Behavior
$\Delta t_{krit, theorettisch}$ Fall I (s)	$3,0 \times 10^{-9}$	$3,0 \times 10^{-9}$
$\Delta t_{krit, theorettisch}$ Fall II (s)	$3,0 \times 10^{-10}$	$3,0 \times 10^{-10}$
$\Delta t_{krit, Abaqus}$ Fall I (s)	$2,7 \times 10^{-10}$	$8,3 \times 10^{-10}$
$\Delta t_{krit, Abaqus}$ Fall II (s)	$2,58 \times 10^{-10}$	$2,6 \times 10^{-10}$

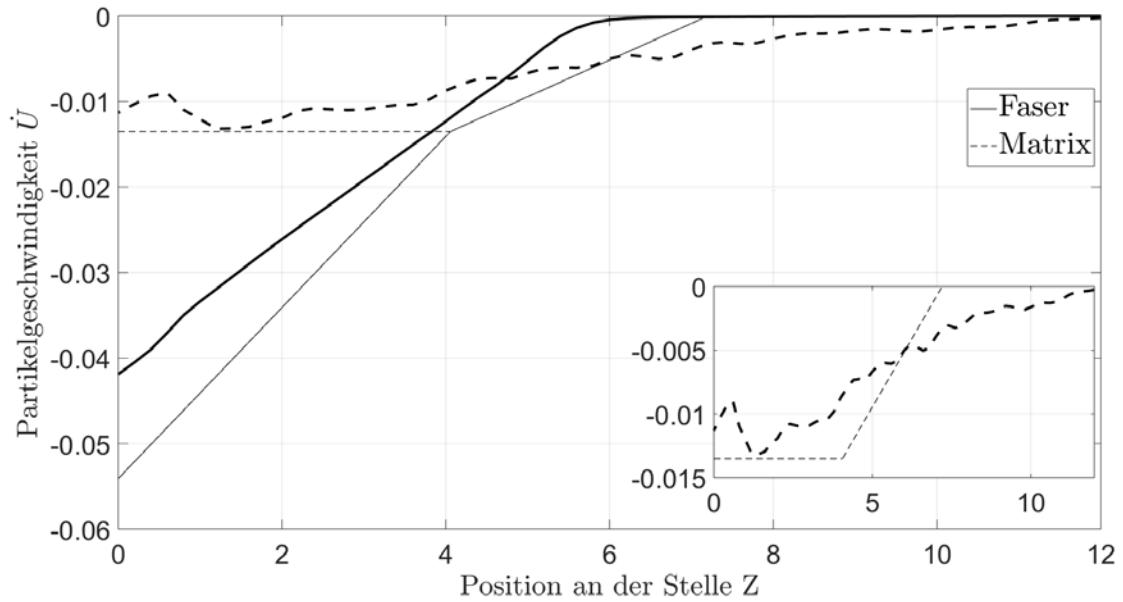
Im Folgenden werden die Ergebnisse für die Fälle Pure Slip und Slip-Stick, welche mit dem rotationssymmetrischen Modell und der Reibungsformulierung Shear stress versus elastic slip erstellt wurden, mit den Ergebnissen des SLM verglichen. Die Abbildung 4.12 (a) zeigt die Partikelgeschwindigkeiten $\dot{U}_f(z, t)$ und $\dot{U}_m(z, t)$ für den Fall I: Pure-Slip für das analytische *SL*- und das numerische Modell. Die Prozesszonen waren nicht identisch, die des numerischen Modells war größer als die des Analytischen. Bei $Z = 0$ war $\dot{U}_{f,analytisch}$ betragsmäßig größer als $\dot{U}_{f,numerisch}$, dies änderte sich bei $Z = 4$. $\dot{U}_{f,analytisch}$ sank linear ab bis $Z = 5,2$. $\dot{U}_{f,numerisch}$ verlief nahezu linear, zum Ende der Prozesszone bei $Z = 6$ flachte die Steigung immer weiter ab. $\dot{U}_{m,analytisch}$ bewegte sich mit einer konstanten Geschwindigkeit bis ca. $Z = 2$, von wo aus es linear absank. $\dot{U}_{m,numerisch}$ hatte keinen konstanten Verlauf, sie schwankte bei niedrigen Z und sank bei höheren Z nahezu linear auf null ab, wobei sich das Ende der Prozesszone mit denen der analytischen Modelle deckte (s. Detailansicht in Abbildung 4.12 (a)). Für $\dot{U}_{m,analytisch}$ war keine Bereichsgrenze erkennbar. Das numerische Modell unterschätzte auf weite Bereiche entlang z die Geschwindigkeiten gegenüber dem analytischen Modell.

Abbildung 4.12 (b) zeigt die Geschwindigkeiten entlang der Prozesszone für den Fall II: Slip-Stick. Von $Z = 0$ aus sank $\dot{U}_{f,analytisch}$ linear ab und $\dot{U}_{m,analytisch}$ verlief konstant. Ab $Z = 4$ überlagerten sich die die beiden Verläufe, da Faser und Matrix aneinander hielten. $\dot{U}_{m,numerisch}$ wies Schwankungen auf, es war jedoch der Trend einer absinkenden Geschwindigkeit erkennbar. Ein Wechsel des Bereiches war nicht erkennbar (vgl. Detailansicht in Abbildung 4.12 (b)). Bei $Z = 4,8$ schnitten sich die Verläufe von $\dot{U}_{m,numerisch}$ und $\dot{U}_{f,numerisch}$. Ein paralleler Verlauf, welcher wie beim analytischen Modell auf Haltung hinweist, war nicht erkennbar. $\dot{U}_{f,numerisch}$ sank bei $Z = 6,5$ auf null, was für $\dot{U}_{m,numerisch}$ erst bei $Z = 12$ der Fall war. Für die numerischen und analytischen Faser-

partikelgeschwindigkeiten lag die Differenz des Endes der Prozesszone bei $L \approx 1$. Für die Matrixpartikelgeschwindigkeiten lag die Differenz bei $L \approx 7$. Auch für den Fall II wurden die Geschwindigkeiten vom Modell unterbewertet. Die analytischen Verläufe bleiben für alle weiteren in diesem Unterabschnitt dargestellten Fälle gleich und werden nicht erneut erläutert, um Wiederholungen zu vermeiden.



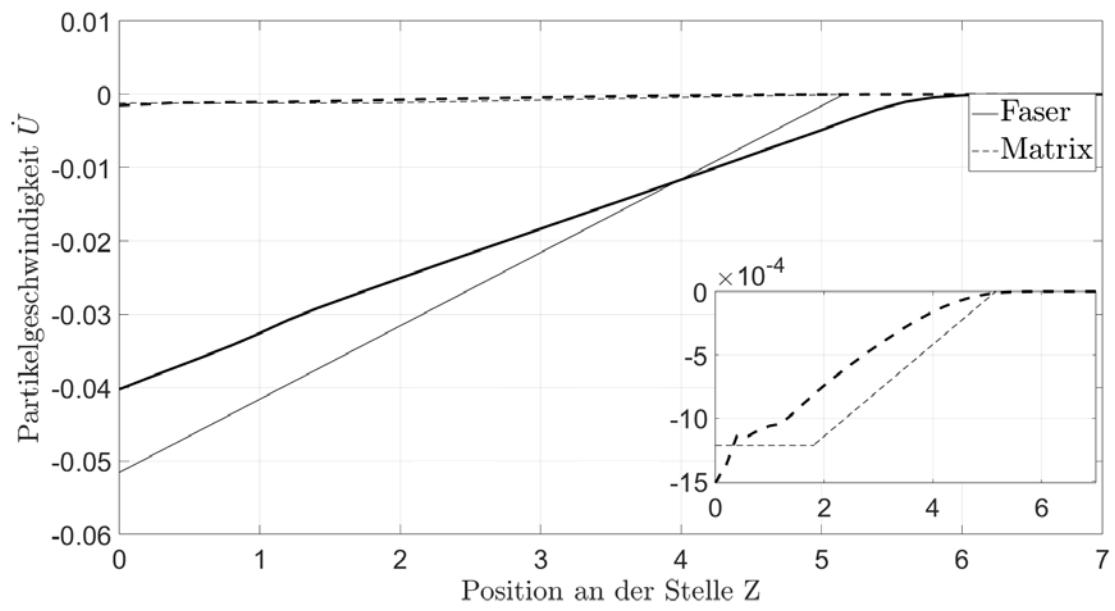
(a)



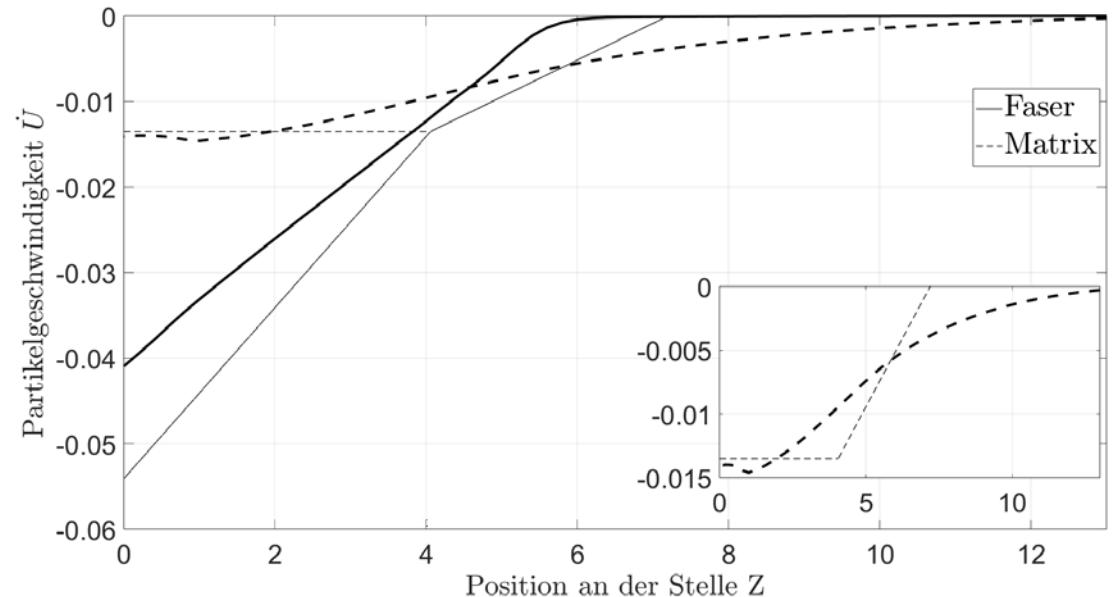
(b)

Abbildung 4.12: Faser- und Matrixpartikelgeschwindigkeiten entlang der Prozesszone für das analytische und das rotationssymmetrischen Modell mit Reibung durch Shear stress versus elastic slip für den Fall I: Pure Slip (a) und Fall II: Slip-Stick (b). Durchgezogene Linien sind der Faser, gestrichelte Linien der Matrix zuzuordnen. Des Weiteren markieren dünne Linien das analytische und breite Linien das numerische Modell

Die Berechnungen des rotationssymmetrischen Modells, dessen Reibung mit Surface-Based Cohesive Behavior modelliert wurde, werden in den Abbildungen 4.13 (a) und 4.13 (b) den SLM für die beiden Fälle gegenübergestellt. Im Fall I: Pure Slip in Abbildung 4.13 (a) entsprachen die Verläufe von $\dot{U}_{f,\text{numerisch}}$ und $\dot{U}_{m,\text{numerisch}}$ zum Großteil denen aus Abbildung 4.12 (a). $\dot{U}_{m,\text{numerisch}}$ wies wie auch $\dot{U}_{m,\text{numerisch}}$ aus dem SSVESWS-Modell Schwankungen auf, diese waren jedoch kleiner. Für den Fall II: Slip-Stick verlief die mit dem Surface-Based Cohesive Behavior berechnete Matrixgeschwindigkeit ruhiger als die mit dem SSVESWS ermittelte und wies eine ähnlich große Prozesszone auf.



(a)



(b)

Abbildung 4.13: Faser- und Matrixpartikelgeschwindigkeiten entlang der Prozesszone für das analytische und das rotationssymmetrischen Modell mit Reibung durch Surface-Bases Cohesive Behavior für den Fall I: Pure Slip (a) und Fall II: Slip-Stick (b). Durchgezogene Linien sind der Faser, gestrichelte Linien der Matrix zuzuordnen. Des Weiteren markieren dünne Linien das analytische und breite Linien das numerische Modell

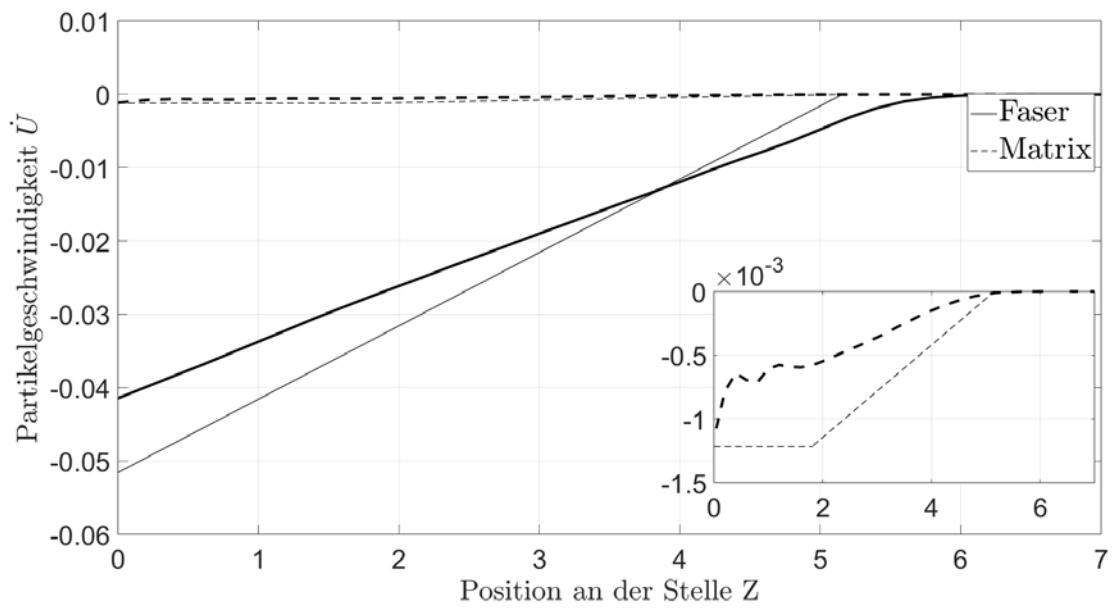
4.2.2. Reibungssimulation mit dem Viertelmodell

Im Folgenden werden die Ergebnisse der numerischen Volumenmodelle mit den in Unterabschnitt 3.2.3 vorgestellten Modellierungen der Reibung mit den Ergebnissen des analytischen SLM von SRIDHAR et al. für die Fälle I: Pure-Slip und II: Slip-Stick verglichen. Beide Modelle setzen sich zusammen aus 10800 C3D8R-Elementen, die Übergangsfläche wurde mit 200 Elementen diskretisiert. Die Tabelle 4.4 zeigt den theoretischen kritischen Zeitschritt nach (3.20) sowie den von ABAQUS gewählten kritischen Zeitschritt für beide Varianten und beiden Fällen, wie beim rotationssymmetrischen Modell wird auch hier die Rechenzeit aufgrund ihrer geringen Dauer nicht aufgeführt.

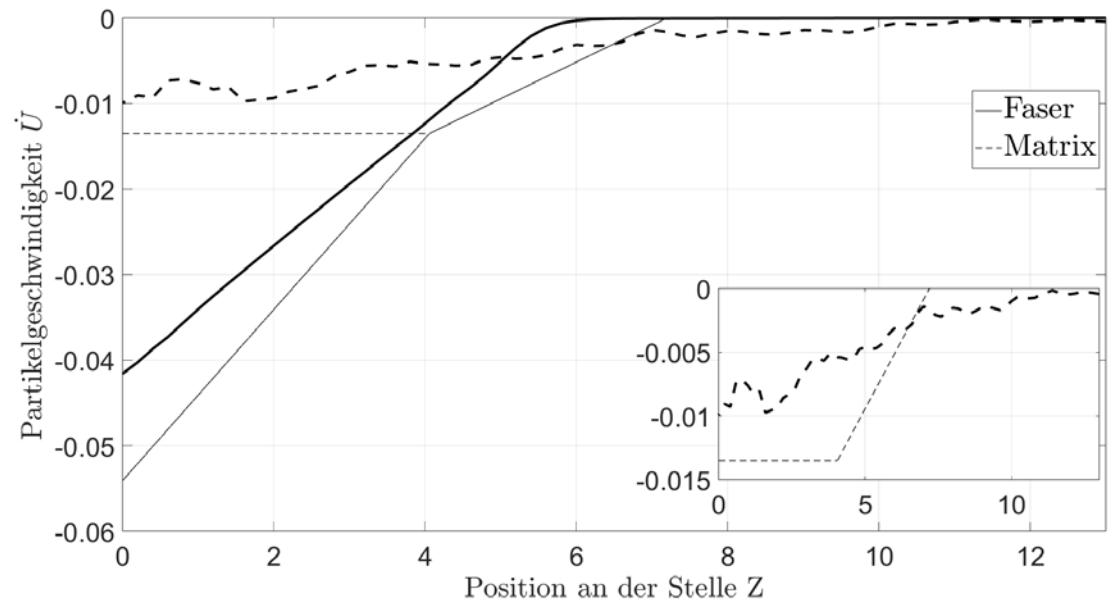
Tabelle 4.4: Zeitschritte für die Berechnung des Viertelmodells

		Surface-Based Cohesive Behavior
$\Delta t_{krit, theorettisch}$ Fall I (s)	$4,3 \times 10^{-9}$	$4,3 \times 10^{-9}$
$\Delta t_{krit, theorettisch}$ Fall II (s)	$2,7 \times 10^{-10}$	$2,7 \times 10^{-10}$
$\Delta t_{krit, Abaqus}$ Fall I (s)	$4,2 \times 10^{-10}$	$4,2 \times 10^{-10}$
$\Delta t_{krit, Abaqus}$ Fall II (s)	$2,6 \times 10^{-10}$	$2,6 \times 10^{-10}$

Für die Modellierung von Reibung mit SSVESWS in einem Viertelmodell sind die Ergebnisse der Fälle I und II in den Abbildungen 4.14 (a) und 4.14 (b) den Berechnungen des SLM gegenübergestellt. Der Verläufe der Partikelgeschwindigkeiten $\dot{U}_{f, numerisch}$ und $\dot{U}_{m, numerisch}$ entsprachen denen der rotationssymmetrischen Modelle mit der gleichen Reibungsformulierung. Bei einem Viertelmodell, dessen Reibung mit Surface-Based Cohesive Behavior modelliert wurde, ergaben sich für die numerisch berechneten Partikelgeschwindigkeiten ähnliche Verläufe wie beim rotationssymmetrischen Modell.

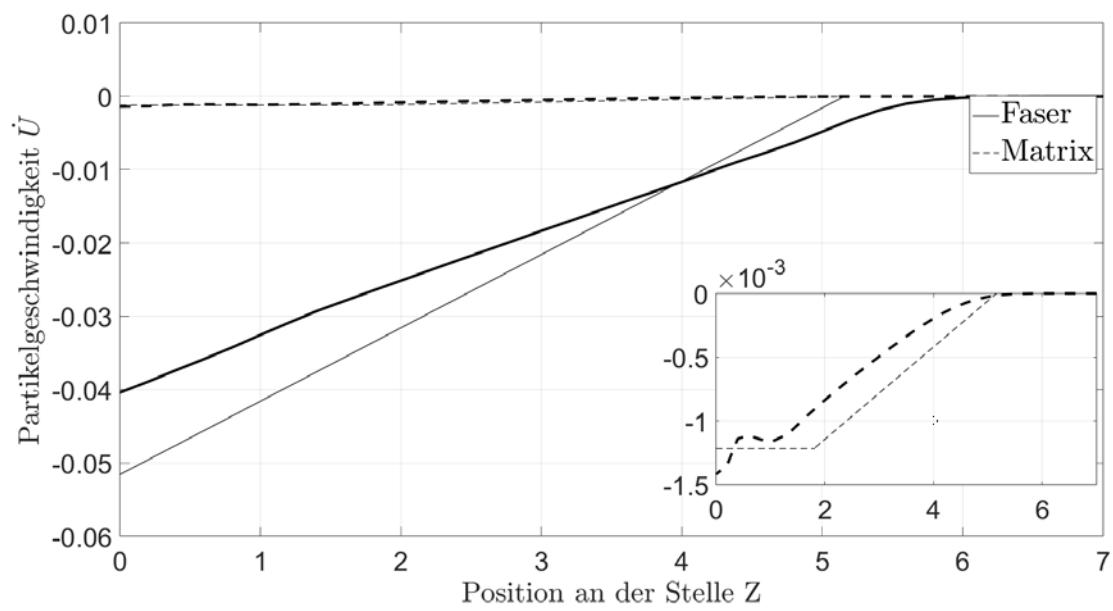


(a)

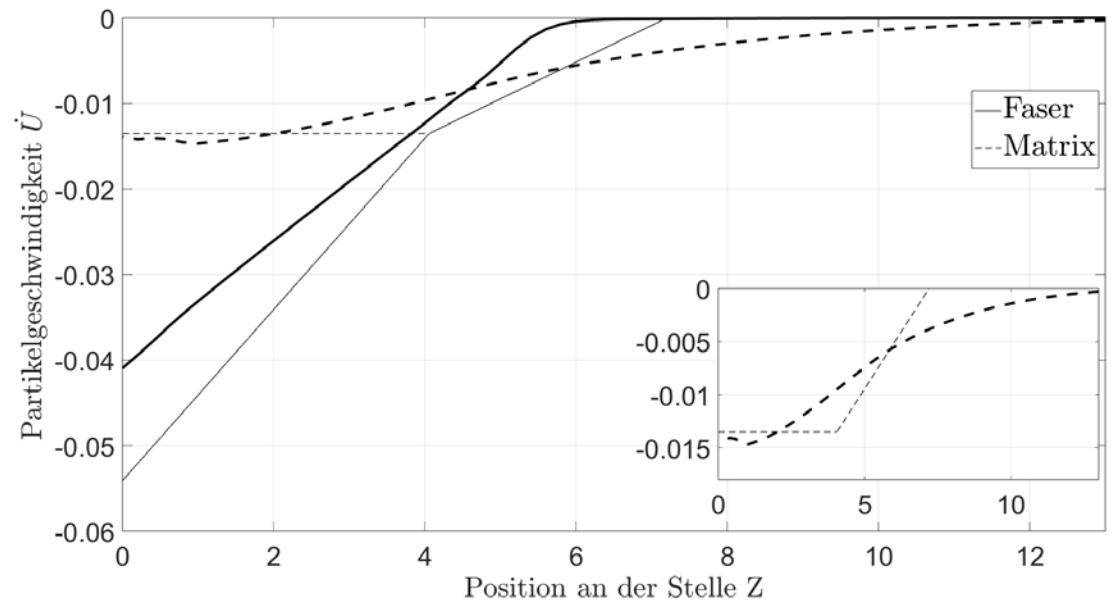


(b)

Abbildung 4.14: Faser- und Matrixpartikelgeschwindigkeiten entlang der Prozesszone für das analytische und das Viertelmodell mit Reibung durch Shear stress versus elastic slip für den Fall I: Pure Slip (a) und Fall II: Slip-Stick (b). Durchgezogene Linien sind der Faser, gestrichelte Linien der Matrix zuzuordnen. Des Weiteren markieren dünne Linien das analytische und breite Linien das numerische Modell



(a)



(b)

Abbildung 4.15: Faser- und Matrixpartikelgeschwindigkeiten entlang der Prozesszone für das analytische und das Viertelmodell mit Reibung durch Surface-Bases Cohesive Behavior für den Fall I: Pure Slip (a) und Fall II: Slip-Stick (b). Durchgezogene Linien sind der Faser, gestrichelte Linien der Matrix zuzuordnen. Des Weiteren markieren dünne Linien das analytische und breite Linien das numerische Modell

4.2.3. Auswertung der Modellvergleiche und Vergleich mit Literatur

In diesem Unterabschnitt sollen allgemeine Beobachtungen und Besonderheiten einzelner Modelle erläutert werden. Des Weiteren werden die Ergebnisse aus ([2]) von SRIDHAR et al. zum Vergleich herangezogen. Die Größenordnungen der numerischen Partikelgeschwindigkeiten passten zu denen aus dem SLM. Sowohl Faser- als auch Matrixpartikelgeschwindigkeit wurden von den numerischen Modellen unterbewertet. Die Verläufe von $\dot{U}_{f, \text{numerisch}}$ und $\dot{U}_{m, \text{numerisch}}$ waren über alle Modellierungsvarianten ähnlich, die Matrixpartikelgeschwindigkeit hatte bei einer Reibung mit Surface-Based Cohesive Behavior einen glatteren Verlauf als bei einer Modellierung mit SSVESWS. Die Steigung der numerischen Ergebnisse flachte gegen Ende der Prozesszone ab, dies könnte an der endlichen Steigung des Übergangsbereiches zwischen Haftung und Reibung liegen ([2]). Für den Fall I: Pure Slip wurde die Prozesszone der Faser überschätzt, während beim Fall II: Slip-Stick die Prozesszone der Matrix zu groß war. Keine der Modellierungen konnte einen Bereichswechsel, welchen $Z = \eta_1 T$ im analytischen Modell aufweist, darstellen. Die Abbildung 4.16 zeigt stellvertretend für die numerischen Modelle den Schubspannungsverlauf des rotationssymmetrischen Modells mit SSVESWS entlang der Prozesszone. Die Schubspannung stieg an und erreichte ihr Maximum bei ca. $\tau_{\max} = 100 \text{ MPa}$, was τ_0 entsprach. Zum Ende der Prozesszone fiel sie ab. Eine konstante Schubspannung entlang der Prozesszone stellte sich nicht ein. Die anderen Modellierungsvarianten wiesen ähnliche Verläufe auf, jedoch schwankte das Maximum zwischen $\tau_{\max} = 55 \text{ MPa}$ und $\tau_{\max} = 120 \text{ MPa}$.

Insgesamt zeigte sich, dass die numerischen Modelle die Partikelgeschwindigkeiten des SLM in der selben Größenordnung wiedergaben, jedoch besonders der Verlauf der Matrixpartikelgeschwindigkeiten nicht akkurat wiedergegeben wurde. Eine konstante Partikelgeschwindigkeit und Bereichswechsel konnten nicht ermittelt werden. Die Prozesszone wurde im Fall II zu groß geschätzt. Besonders die numerische Modellierung der Matrixpartikelgeschwindigkeit sollte weiter untersucht werden.

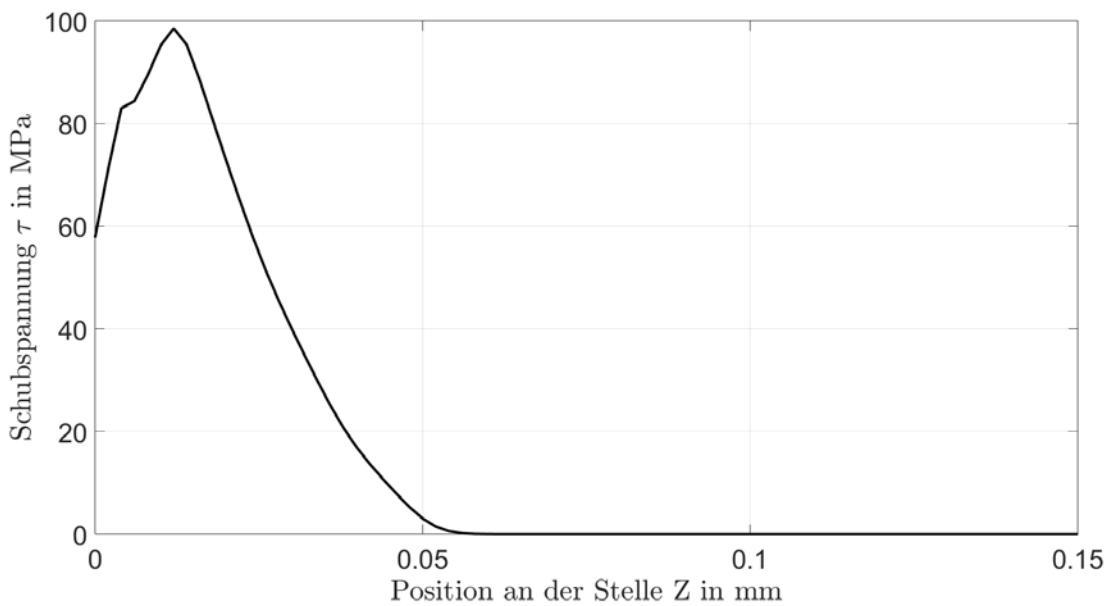


Abbildung 4.16: Beispielhafter Schubspannungsverlauf entlang der Prozesszone

Der Vergleich einiger numerischer Berechnungen mit analytischen Ergebnissen aus ([2]) von SRIDHAR et al. sind in Abbildung 4.17 (a) für den Fall I: Pure Slip und in (b) für den Fall II: Slip-Stick zu sehen. Die gestrichelten Linien stellen die Faserpartikelgeschwindigkeit dar, die durchgezogenen die Matrixpartikelgeschwindigkeit, anders als die in dieser Arbeit erstellten Abbildungen. In ([2]) werden die numerischen Ergebnisse mit starken und die analytischen Ergebnisse mit dünnen Linien angegeben, in den Abbildungen erscheinen jedoch alle Linienstärken gleich. Für beide Fälle ist zu sehen, dass $\dot{U}_{f,numerisch}$ und $\dot{U}_{f,analytisch}$ zum Großteil parallel verliefen und das Ende der Prozesszone mit geringer Abweichung zum SLM erreichten. Anders als beim numerischen Modell, welches im Verlauf dieser Arbeit ermittelt wurde, war $\dot{U}_{f,numerisch}$ betragsmäßig größer als $\dot{U}_{f,analytisch}$. Die numerisch berechneten Matrixpartikelgeschwindigkeiten verliefen für beide Fälle bis zu den jeweiligen Bereichsgrenzen konstant, was mit dem SLM übereinstimmt. Abschließend sanken sie linear zum Ende der Prozesszone ab, welche sie mit geringer Abweichung zum SLM erreichen. In Abbildung 4.17 (b) verliefen $\dot{U}_{f,numerisch}$ und $\dot{U}_{m,numerisch}$ im Bereich von $6 \leq Z \leq 11$ parallel. Eine Haftung von Faser und Matrix konnte abgebildet werden. Dies war bei den numerischen Modellen, welche für diese Arbeit erstellt wurden, nicht der Fall.

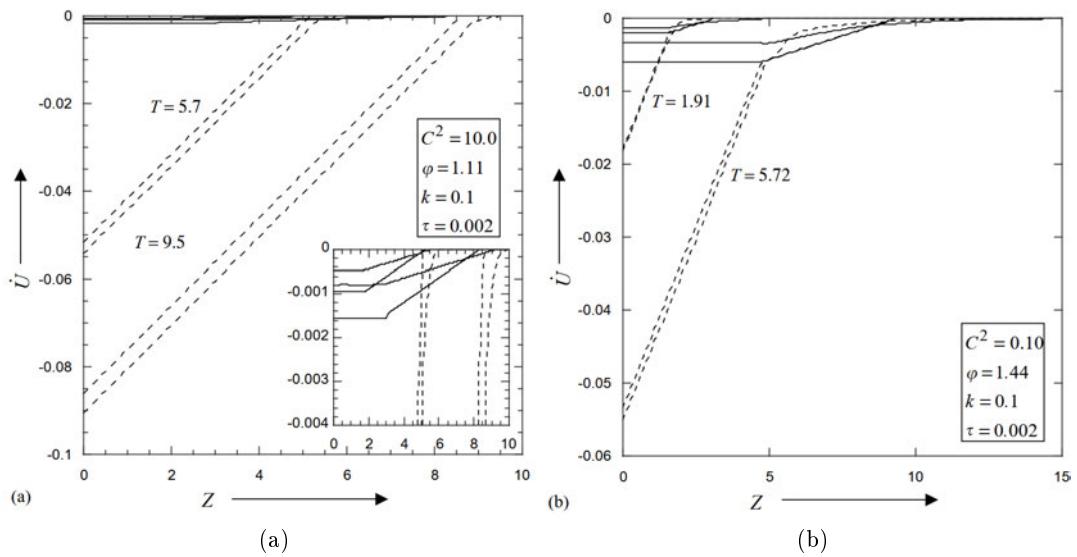


Abbildung 4.17: Faser- und Matrixpartikelgeschwindigkeiten entlang der Prozesszone für das analytische und das numerische Modell für den Fall I: Pure Slip (a) und Fall II: Slip-Stick (b). Gestrichelte Linien sind der Faser, durchgezogene Linien der Matrix zuzuordnen. Nach (Sridhar, Yang und Cox [2]) markieren dünne Linien das analytische und breite Linien das numerische Modell, jedoch erscheinen alle Linien in ähnlicher Strichstärke ([2])

5. Abbildung von Experimenten mit einem numerischen Modell

In diesem Kapitel wird die Darstellung eines dynamischen Faserauszugsversuchs mit einem numerischen Modell für Hafttrennung behandelt. Dafür werden zunächst der Versuchsaufbau und die Versuchsergebnisse kurz dargestellt. Außerdem wird der Einfluss der Messposition für die Verschiebung untersucht. Anschließend wird der Versuch mit einem rotationssymmetrischen Modell reproduziert, welches abschließend mit den Versuchen verglichen wird. Aufgrund der Abweichungen der numerischen Reibungsmodelle zu den SLM werden diese nicht mit dem Versuch verglichen.

5.1. Versuche für den Einzelfaserauszug von Scheffler et al.

SCHEFFLER et al. haben 2017 ([5]) Faserauszugsversuche für alkalibeständigen glasfaserverstärkten Beton mit u. A. hohen Lastraten durchgeführt. Dabei werden für das Experiment neben detaillierten Angaben zu Materialien und Geometrien sowie Kraft-Verschiebungs-Kurven auch wichtige Parameter für die in Abschnitt 2.2 vorgestellten Modellierungen des Übergangsbereichs angegeben. Diese Parameter werden in die SLM aus Abschnitt 2.3 und in die numerischen Modelle aus Abschnitt 3.2 implementiert. Für die Darstellung der Haftung im Übergangsbereich wird die maximal ertragbare Spannung (in diesem Fall handelt es sich um eine Schubspannung) τ^m angegeben, welche im Experiment als local interfacial shear strength (IFSS, deutsch: Übergangsflächenscherfestigkeit) bezeichnet wird. Des Weiteren wird die Reibungs-Schubspannung τ_0 in Form des interfacial frictional stress (Übergangsflächen-Reibungs-Spannung) angegeben ([5]).

5.1.1. Versuchsaufbau und Ergebnisse des Einzelfaserauszug-Versuches

Versuchsaufbau Für den Versuch wurden verschiedene beschichtete, am Leibnitz-Institut für Polymerforschung Dresden e.V. (IPF) hergestellte, alkalibeständige Glasfasern zu unterschiedlichen Tiefen in Matrix-Tropfen aus Beton eingebettet. Diese hatten jeweils einen Durchmesser von 2,6 mm. Die Faserbeschichtungen bestanden aus Polypropylen (W) oder Styrol-Butadien-Kautschuk (S), außerdem wurden einige Fasern unbehandelt (U) gelassen. Der Beton besteht aus Portlandzement 42.5 R, welcher mit Flugasche gebunden wurde. Genauere Angaben zur Herstellung von Faser und Matrix finden sich in ([5]). Die Tabelle 5.1 zeigt die geometrischen und mechanischen Eigenschaften von Faser und Matrix. Für den dynamischen Faserauszug wurde eine Zugbelastung entlang in axiale Faserrichtung aufgebracht, welche mit einer Geschwindigkeit von $10000 \frac{\mu\text{m}}{\text{s}}$ aus der Matrix gezogen wurde. Dabei betrug die maximale Verschiebung 180 μm ([5]). Für die Dichte von Faser und Matrix mussten in dieser Arbeit Annahmen getroffen werden. Für die Glasfaser wurde eine Dichte von $\rho_f = 2,0 \times 10^{-9} \frac{\text{tonne}}{\text{mm}^3}$ ([32]) und für Beton eine Dichte von $\rho_m = 2,4 \times 10^{-9} \frac{\text{tonne}}{\text{mm}^3}$ ([33]) angenommen.

Tabelle 5.1: Geometrische und mechanische Eigenschaften von Faser und Matrix (nach [5])

Eigenschaft	Glasfaser	Betonmatrix
Faserdurchmesser, U-, W-, S-Beschichtung $2r_f(\mu\text{m})$	11...22	-
Radius des Matrix-Tropfens $r_m(\text{mm})$	-	1,3
Axialer Zugmodul $E_A(\text{GPa})$	78	28
Transversaler Zugmodul $E_T(\text{GPa})$	78	28
Axiale Querkontraktionszahl ν_A	0,17	0,2
Transversale Querkontraktionszahl ν_T	0,17	0,2
Länge der eingebetteten Faser l_{embedded}	300...2600	-

Versuchsergebnisse Die Ergebnisse des dynamischen Faserauszuges für alle drei Beschichtungsarten sind in Abbildung 5.1 (a) dargestellt. Die maximal ertragbare Schubspannung τ^m kann durch Umformung der Gleichung

$$F_{\max} = \begin{cases} \frac{2\pi r_f \tau^m}{\zeta} \tanh(\zeta l_e) & \zeta l_e < \ln(o + \sqrt{o^2 + 1}) \\ \frac{2\pi r_f}{\zeta} \left\{ \tau^m \frac{u}{\sqrt{o^2 + 1}} + \tau_0 \left[\zeta l_{\text{embedded}} - \ln(o + \sqrt{o^2 + 1}) \right] \right\} & \zeta l_e \geq \ln(o + \sqrt{o^2 + 1}) \end{cases} \quad (5.1)$$

berechnet werden. F_{\max} ist die Maximalkraft, r_f der Faserradius, l_{embedded} die Länge der eingebetteten Faser und ζ der *Shear-Lag-Parameter* nach NAYFEH ist. Des Weiteren ist τ_0 die Reibungs-Schubspannung, welche nach dem Auftrennen der Verbindung zwischen Faser und Matrix wirkt. Der Parameter o wird berechnet mit

$$o = \sqrt{\frac{\tau_i^m}{\tau_0} - 1}. \quad (5.2)$$

Eine genaue Berechnung des Shear-Lag-Parameters β findet sich in ([5]), die *Maximalkraft* F_{\max} kann aus dem Kraft-Weg-Diagramm am Punkt *B* ermittelt werden, schematisch zu sehen in Abbildung 5.1 (b). Die konstante Reibungs-Schubspannung, welche nach der vollständigen Trennung zwischen Faser und Matrix wirkt, berechnet sich aus

$$\tau_0 = \frac{F_b}{\pi d_f l_{\text{embedded}}}. \quad (5.3)$$

Die Reibungskraft F_b kann aus dem Kraft-Weg-Diagramm am Punkt *C* ermittelt werden (vgl. Abbildung 5.1 (b) ([5])). Ausgewählte Ergebnisse für alle Beschichtungen und zwei verschiedene Durchmesser, $d_f = 12 \mu\text{m}$ und $d_f = 17 \mu\text{m}$, der dynamischen Faserauszugsversuche sind in Tabelle 5.2 einsehbar. Neben der Anzahl der Proben werden dort auch die maximal ertragbaren Schubspannungen und die Reibungs-Schubspannungen angegeben. Es ist zu erkennen, dass die unbeschichteten Fasern mit $12 \mu\text{m}$ Durchmesser die größte maximal ertragbare Schubspannung aufweisen. Die höchste Reibungs-Schubspannung nach Hafttrennung weisen die Faser-Matrix-Verbände mit Styrol-Butadien-Kautschuk-Beschichtung auf.

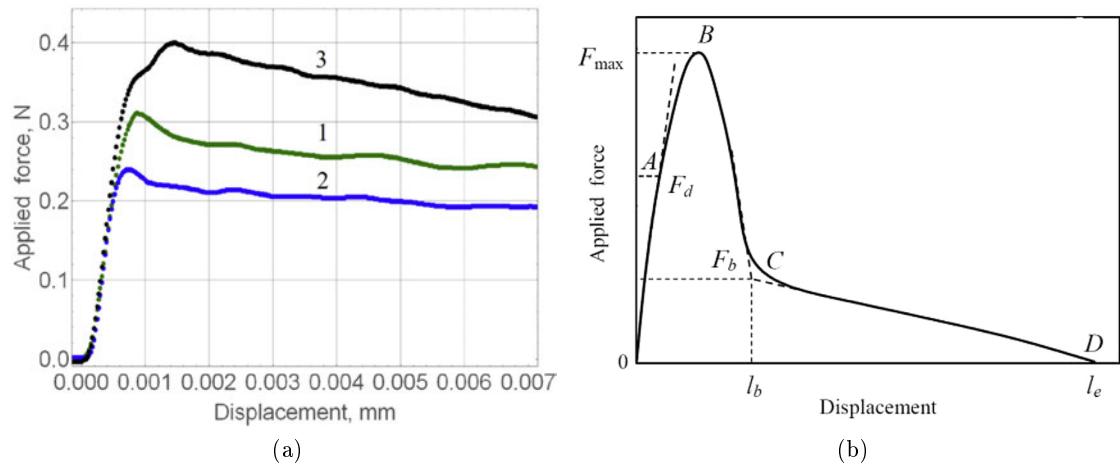


Abbildung 5.1: (a) Ergebnisse der dynamischen Faserauszugsversuche für Fasern mit verschiedenen Beschichtungen (1: Unbeschichtete Faser, 2: Polypropylen-Beschichtung, 3: Styrol-Butadien-Kautschuk-Beschichtung. (b) Schematisches Kraft-Verschiebungs-Diagramm des Faserauszugs ([5])

Tabelle 5.2: Ergebnisse der Faserauszugs-Versuche für verschiedene Beschichtungen und Durchmesser (nach [5])

Beschichtung	Anzahl der Proben	Maximal ertragbare Schubspannung in MPa	Schubspannung in MPa
Unbeschichtet, $d_f = 12 \mu\text{m}$	23	$93,2 \pm 17,9$	$4,0 \pm 1,0$
Unbeschichtet, $d_f = 17 \mu\text{m}$	63	$84,6 \pm 24,3$	$4,8 \pm 1,7$
Unbeschichtet, beide Durchmesser	86	$86,9 \pm 23,0$	$4,6 \pm 1,6$
Styrol-Butadien-Kautschuk-Beschichtung	71	$91,8 \pm 20,0$	$6,8 \pm 3,1$
Polypropylen-Beschichtung	92	$75,7 \pm 17,2$	$3,5 \pm 1,2$

5.1.2. Untersuchung der Messposition für die Verschiebung

Da aus ([5]) nicht hervorgeht, an welcher Faserposition die Kraft-Weg-Diagramme aus Abbildung 5.1 (a) ermittelt wurden, soll in diesem Unterabschnitt untersucht werden, wie groß der Unterschied zwischen einer Messung am belasteten Faserende und am Übergangsbereich zwischen Faser und Matrix ist. Um die Berechnung dieses Unterschiedes zu

vereinfachen, wurde ein statischer Lastfall angenommen. Eine weitere Annahme ist, dass sich Faser und Matrix bereits vollständig voneinander gelöst haben und die einzige Kraft zwischen Faser und Matrix Reibung ist. In Abschnitt 2.1 wurde bereits erwähnt, dass dies ab dem Punkt *C* der Fall ist ([5]). Weitere Annahmen sind, dass die Dehnung der freien Länge konstant ist, dass die Matrix dehnstarr ist und dass sich der Faserdurchmesser beim Auszug nicht verändert. Abbildung 5.2 zeigt das Modell schematisch. Die Faser haftet nicht an der Matrix, sie ist auf die Länge u_i in Folge der Kraft F_i herausgezogen.



Abbildung 5.2: Schematisches Modell des Faserauszugs

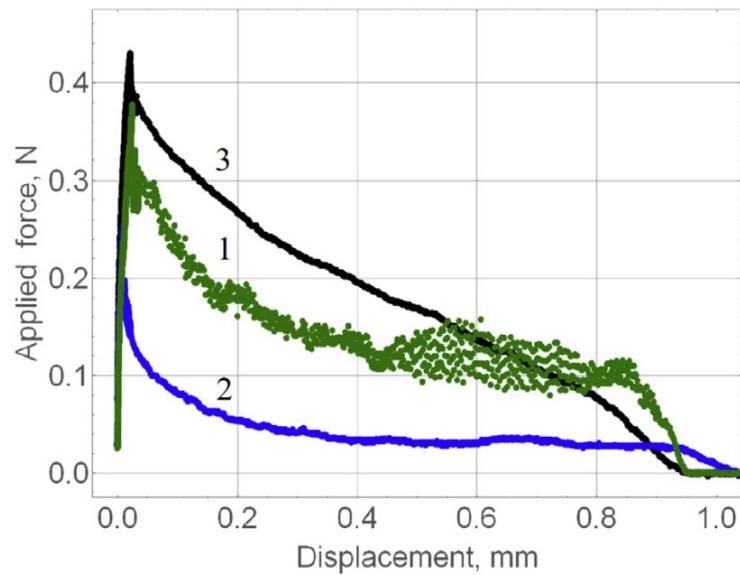
Die Verschiebung wurde mit MATLAB® am Punkt *I* am Übergang zwischen eingebetteter und freier Länge l_{frei} sowie am belasteten Faserende am Punkt *II* berechnet. Die Daten des quasistatischen Faserauszuges wurden von der Kurve 3 in Abbildung 5.3 (a) mit Hilfe einer GUI (Graphical User Interface, deutsch: Grafische Benutzeroberfläche) von ([34]) in MATLAB® übertragen. In ([5]) finden sich keine Angaben zur freien Länge. In einem anderen Faserauszugs-Versuch ([7]), welcher ebenfalls am IPF stattfand, wurde die freie Länge angegeben mit $l_{frei} < 50 \mu\text{m}$. Für die folgende Untersuchung wurde $l_{frei} = 30 \mu\text{m}$ angenommen. Der Faserradius wurde als $r_f = 0,006 \text{ mm}$ angenommen, da dieser aus Tabelle 5.2 nach ([5]) nicht hervorgeht. Aus der Kraft F_i und der Verschiebung u_i des jeweiligen Datenpunktes *i* wurden anschließend die Verschiebungsänderungen Δu berechnet, für den Punkt *I* mit

$$\Delta u_{I,i} = \frac{F_i}{E_f A} u_i, \quad (5.4)$$

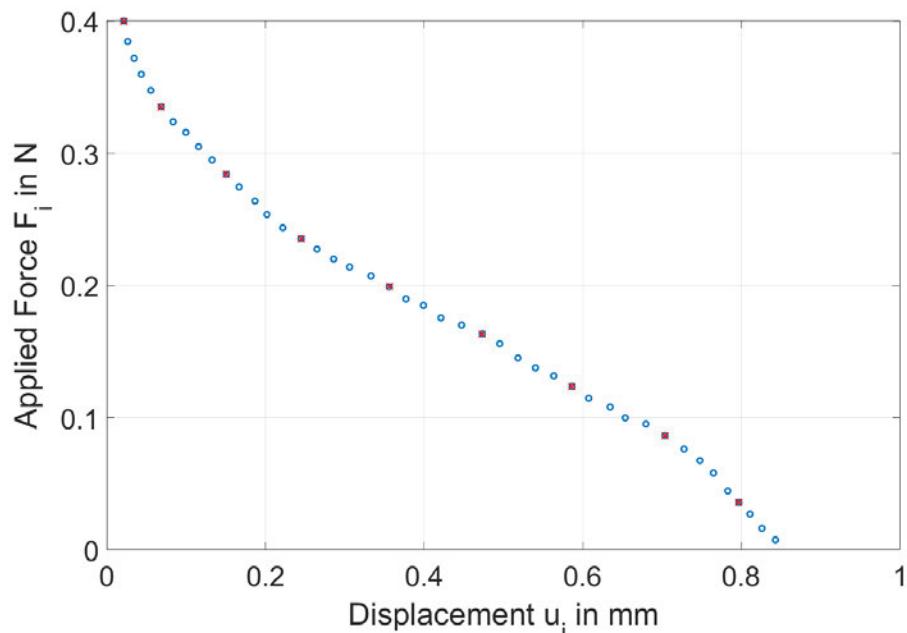
und für den Punkt *II* mit

$$\Delta u_{II,i} = \frac{F_i}{E_f A} (u_i + l_{frei}). \quad (5.5)$$

Die Tabelle 5.3 zeigt für in Abbildung 5.3 (b) dargestellte, ausgewählte Datenpunkte (rote Kreuze), die mit (5.4) und (5.5) berechneten Verschiebungsänderungen sowie deren Verhältnis $\frac{\Delta u_{I,i}}{\Delta u_{II,i}}$.



(a)



(b)

Abbildung 5.3: (a) Quasistatische Faserauszugsversuche für Fasern mit verschiedenen Beschichtungen ([5]) (b) Mit GUI ([34]) in MATLAB® aus (a) entnommene Messdaten

Tabelle 5.3: Ergebnisse der Untersuchung des Unterschiedes zwischen Punkt *I* und Punkt *II*

Verschiebung Punkt <i>I</i>	Verschiebung Punkt <i>II</i>	Verhältnis $\frac{\Delta u_{I,i}}{\Delta u_{II,i}}$
0, 00096	0, 00232	2, 421
0, 0026	0, 00374	1, 439
0, 00485	0, 00581	1, 199
0, 00653	0, 00734	1, 226
0, 00803	0, 00871	1, 084
0, 00876	0, 00932	1, 063
0, 00821	0, 00863	1, 051
0, 00689	0, 00718	1, 043
0, 00323	0, 00335	1, 038

5.2. Darstellung des Versuches als numerisches Modell

Im Folgenden soll auf die Findung der Parameter eingegangen werden, welche für eine Darstellung der Haftung mit dem TSL notwendig sind. Die maximal ertragbare Schubspannung, bevor Schaden auftritt, sowie die Reibungs-Schubspannung sind für verschiedene Durchmesser und Beschichtungen aus Tabelle 5.2 entnehmbar. Für das TSL müssen außerdem der Schlupf s^m , bei der die Schädigung initiiert wird, und s^f , bei der die Verbindung Faser und Matrix vollständig versagt, aus dem Kraft-Weg-Diagramm ermittelt werden. Dabei sind jedoch drei Unschärfen zu beachten: Zum einen die im vorherigen Abschnitt beschriebene Abweichung der Ergebnisse je nach Verschiebungs-Messposition. Zum anderen, dass das TSL auf Schlupf basiert, während das Kraft-Verschiebungs-Diagramm absolute Verschiebungen darstellt. Des Weiteren haben die Faser-Matrix-Proben aus den Versuchen freie Längen, welche im analytischen Shear-Lag-Modellen nicht abgebildet werden.

Für die Ermittlung von s^m muss der Punkt gefunden werden, bei dem die Schädigung auftritt. Dies ist in Abbildung 5.1 (b) bei Punkt *A* der Fall. Dieser Punkt kann an einem Knick im Kraft-Weg-Diagramm detektiert werden, wie theoretische Modelle und Experimente gezeigt haben ([5]). Aus Abbildung 5.1 (a) ist dieser Knick jedoch für keine Kraft-Weg-Kurve erkennbar, weshalb die Annahme getroffen wurde, dass er bei einer Verschiebung von $0, 0005 \text{ mm}$ liegt. SCHEFFLER et al. geben eine lokale IFSS (Ψ^m im TSL) an, welche im Mittel bei $75, 7 \text{ MPa}$ liegt. Aus s^m und der IFFS ergibt sich für den linear elastischen Bereich des TSL eine Steifigkeit von $K^0 = 151400 \frac{\text{MPa}}{\text{mm}}$.

Der Punkt, an dem die Verbindung zwischen Faser und Matrix vollständig versagt, ist in Abbildung 5.1 (b) an der Stelle *C* zu finden, an welcher ebenfalls ein “Knick” auftritt ([5]). Dieser ist an der Kurve 2, welche das Kraft-Weg-Diagramm für den Auszug von mit Polypropylen beschichteten Fasern darstellt, besonders gut erkennbar. Aus diesem Grund wurde das TSL auf Basis der Kurve 2 erstellt und die Ergebnisse des numerischen Modells mit dieser verglichen.

Für eine Darstellung der Anregung in der Simulation wurden folgende Annahmen ge-

troffen: Bis zum Versagen der Haftung wird die Faser $0,0011\text{ mm}$ aus dem Beton gezogen (vgl. Abbildung 5.1), die Auszugsgeschwindigkeit beträgt $10\frac{\text{mm}}{\text{s}}$ ([5]). Die Auszugszeit ist somit, wenn von einer linearen Verschiebung ausgegangen wird, $1,1 \times 10^{-4}\text{ s}$. ([4]) geht von einer harmonischen Anregung aus, weshalb für einen ersten Vergleich mit dem SLM eine harmonische Weganregung angenommen wird. Die Periode ist $t_{\text{Periode}} = 4,4 \times 10^{-4}\text{ s}$ und die Eigenkreisfrequenz somit $\lambda = \frac{2\pi}{t_{\text{Periode}}}$ (eine Abbildung der harmonischen Weganregung ist in Abbildung 5.4 (a) zu sehen). Da das SLM von AZZAM keine Erregeramplitude C_n oberhalb von s^f nutzt, wurde für den Vergleich zwischen SLM und numerischem Modell eine Amplitude $C_n = 0,0009\text{ mm}$ gewählt. Im zweiten Schritt soll das numerische Modell eine lineare steigende Auslenkung, also einen Auszug mit konstanter Geschwindigkeit bis $u = 0,007\text{ mm}$ erfahren. Dies entspricht der maximalen Verschiebung in Abbildung 5.1 (a). Um Rechenzeit zu sparen, wird das rotationssymmetrische Modell verwendet, da es bei der Simulation der Haftung den Verlauf ähnlich darstellte wie das Viertelmodell. Die Matrix wurde nicht vollständig modelliert, ihre Dicke wurde wie in Abschnitt 4.1 gewählt. Das rotationssymmetrische Modell mit freier Länge ist in Abbildung 5.4 (b) dargestellt.

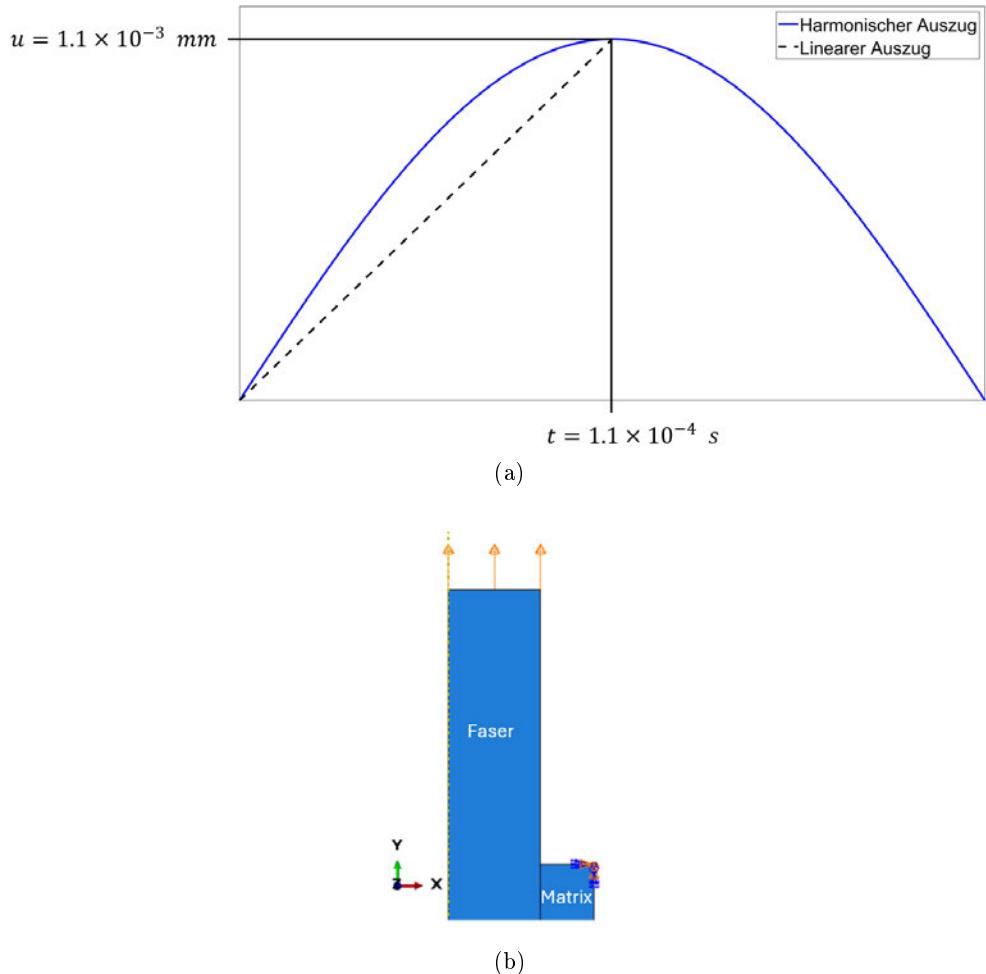


Abbildung 5.4: (a) Annäherung einer Verschiebung mit konstanter Geschwindigkeit durch eine harmonische Anregung, (b) Rotationssymmetrisches Modell mit freier Länge

5.3. Vergleich des Numerischen Modells mit den Versuchsergebnissen

In diesem Abschnitt werden die mit den in Tabelle 5.1 stehenden Eigenschaften gebildeten numerischen Modelle mit den Versuchsergebnissen verglichen. Bevor die Ergebnisse des numerischen Modells anhand eines Kraft-Verschiebungs-Diagrammes den Versuchsergebnissen gegenübergestellt werden, erfolgt ein Vergleich mit dem SLM von AZZAM. Aufgrund der fehlenden Reibung im Modell wird kein Verlauf wie in Abbildung 5.1 (a) erwartet. Numerische Simulationen von quasistatischen Faserauszugsversuchen haben gezeigt, dass die Reaktionskraft bei Versagen absinkt ([10]). Dies ist in Abbildung 5.5 zu sehen. Für das numerische Modell dieser Arbeit wird deshalb erwartet, dass die Reaktionskraft absinkt, sobald eine Verschiebung auftritt, die größer ist als $s^m = 0,0005 \text{ mm}$.

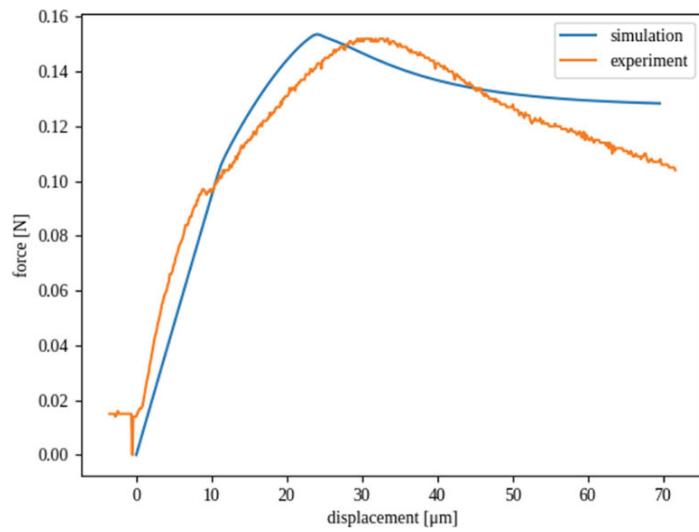
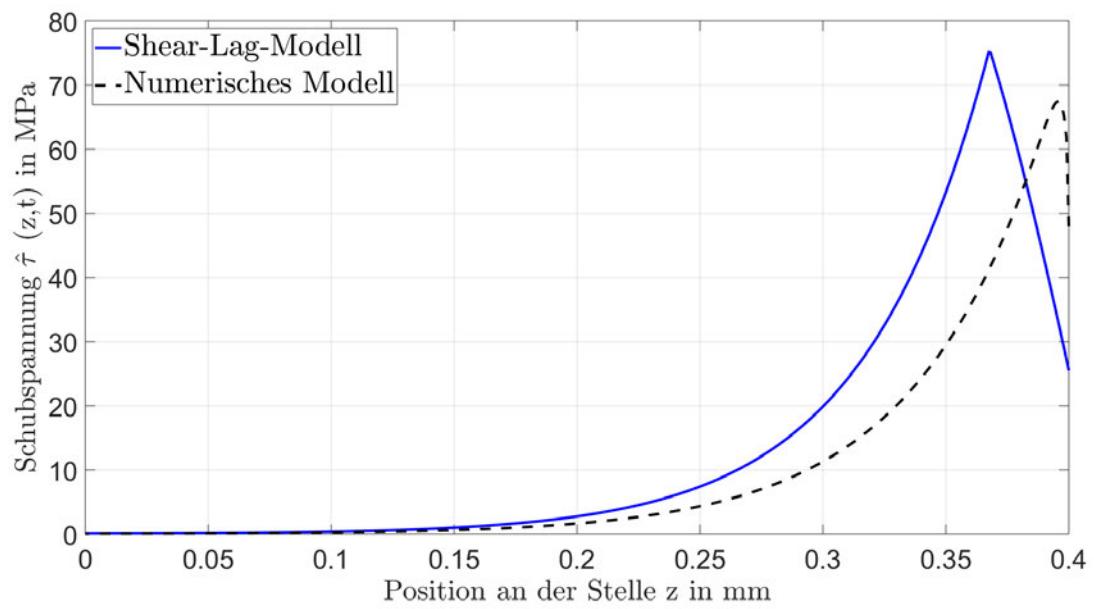
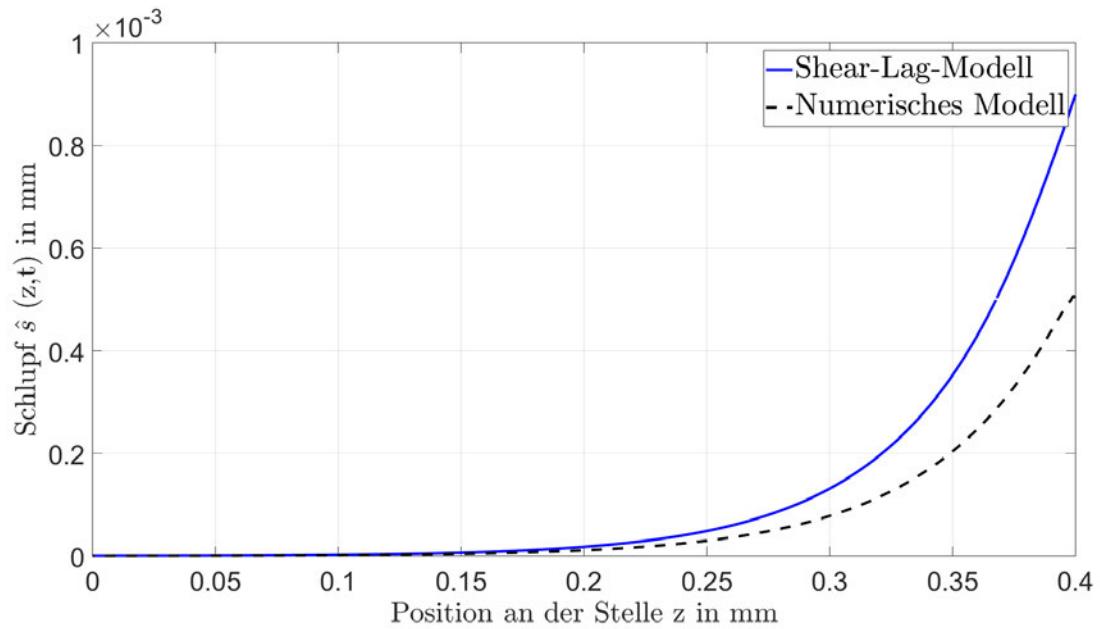


Abbildung 5.5: Kraft-Verschiebungs-Kurve aus Simulation und quasistatischem Versuch ([10])

Abbildung 5.6 (a) vergleicht die Ergebnisse der numerischen Berechnung einer harmonischen Weganregung mit dem SLM. Das numerische Modell unterschätzte, wie schon in Kapitel 4.1 beobachtet, die Schubspannung. Außerdem ist zu erkennen, dass die Länge der UDZ z_{r0} beim numerischen Modell größer war als beim analytischen. Dies kann neben der ohnehin auftretenden Abweichung von 5 % daran liegen, dass die Matrix weniger steif war als beim Vergleich in Kapitel 4.1. Durch die Verschiebung der Matrix wurde der numerische Schlupf und somit die Schädigung reduziert (vgl. Abbildung 5.6 (b), in welcher der numerisch berechnete Schlupf dem des SLM gegenübergestellt wird). Ein weiterer Einfluss könnte die größere Entfernung der Weganregung zur Übergangsfläche sein.



(a)

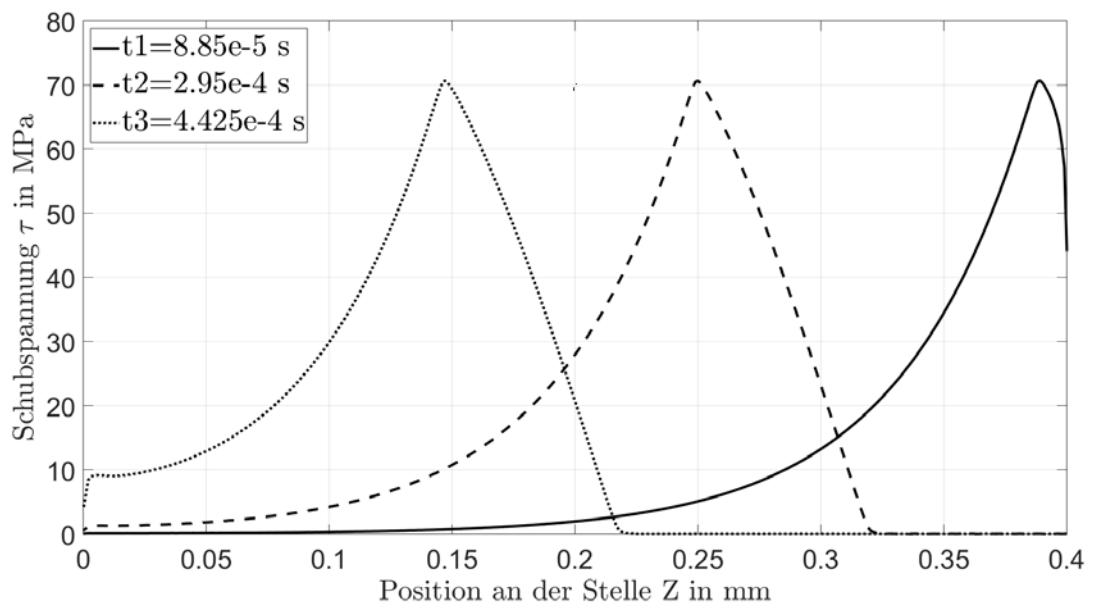


(b)

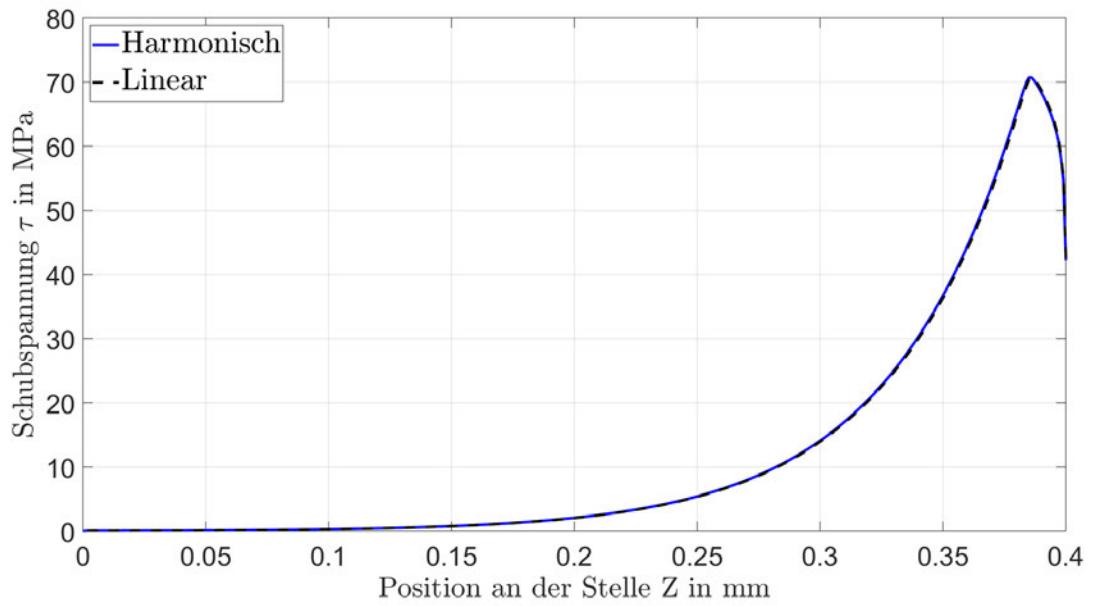
Abbildung 5.6: Schubspannung (a) und Schlupf (b) entlang der Übergangsfläche für das analytische und das numerische Modell mit den Parametern aus den Versuchen von ([5])

Die Abbildung 5.7 (a) zeigt das numerische Modell mit dem Auszug bei konstanter

Geschwindigkeit bis $0,007 \text{ mm}$ zu den Zeitpunkten $t_1 = 8,85 \times 10^{-5} \text{ s}$, $t_2 = 2,95 \times 10^{-4} \text{ s}$ und $t_3 = 4,425 \times 10^{-4} \text{ s}$. Es ist zu erkennen, wie die maximale Schubspannung sich entlang der Übergangsfläche bewegte und z_{r0} kleiner wurde. In Abbildung 5.7 (b) wird eine harmonische Anregung einem Auszug mit konstanter Geschwindigkeit gegenübergestellt. Dabei fällt auf, dass beide Verläufe gut übereinander lagen.



(a)



(b)

Abbildung 5.7: (a) Schubspannung entlang der Übergangsfläche bei linear ansteigender Verschiebung des Faserendes zu drei Zeitpunkten, (b) Vergleich der Schubspannung von harmonischer und linear ansteigender Verschiebung am Faserende

Ein Kraft-Weg-Diagramm für den Punkt *II* aus Abbildung 5.2 für den linearen Fasersauszug ist in Abbildung 5.8 (a) dargestellt. Im Vergleich zu den Kräften im Kraft-Weg-Diagramm aus Abbildung 5.1 waren die Reaktionskräfte des Punktes *II* niedrig, die des Punktes *I* waren null. Ein Abfall der Kraft-Weg-Kurve war nicht erkennbar. Stattdessen lagen die Reaktionskräfte unterhalb der im Versuch aufgetretenen Kräfte und stiegen linear mit der Verschiebung an. In Abbildung 5.8 (b) zu sehen ist, dass sich die Reaktionskräfte des numerischen Modells auf die Faserspitze beschränkten. In dieser Arbeit verwendete Viertelmodelle wiesen ebenfalls nur lokale Reaktionskräfte an der Faserspitze auf (vgl. Abbildung 5.8 (c)). Aufgrund der unplausiblen Ergebnisse konnte die Untersuchung der Messposition für die Verschiebung aus Kapitel 5.1.2 nicht einbezogen werden.

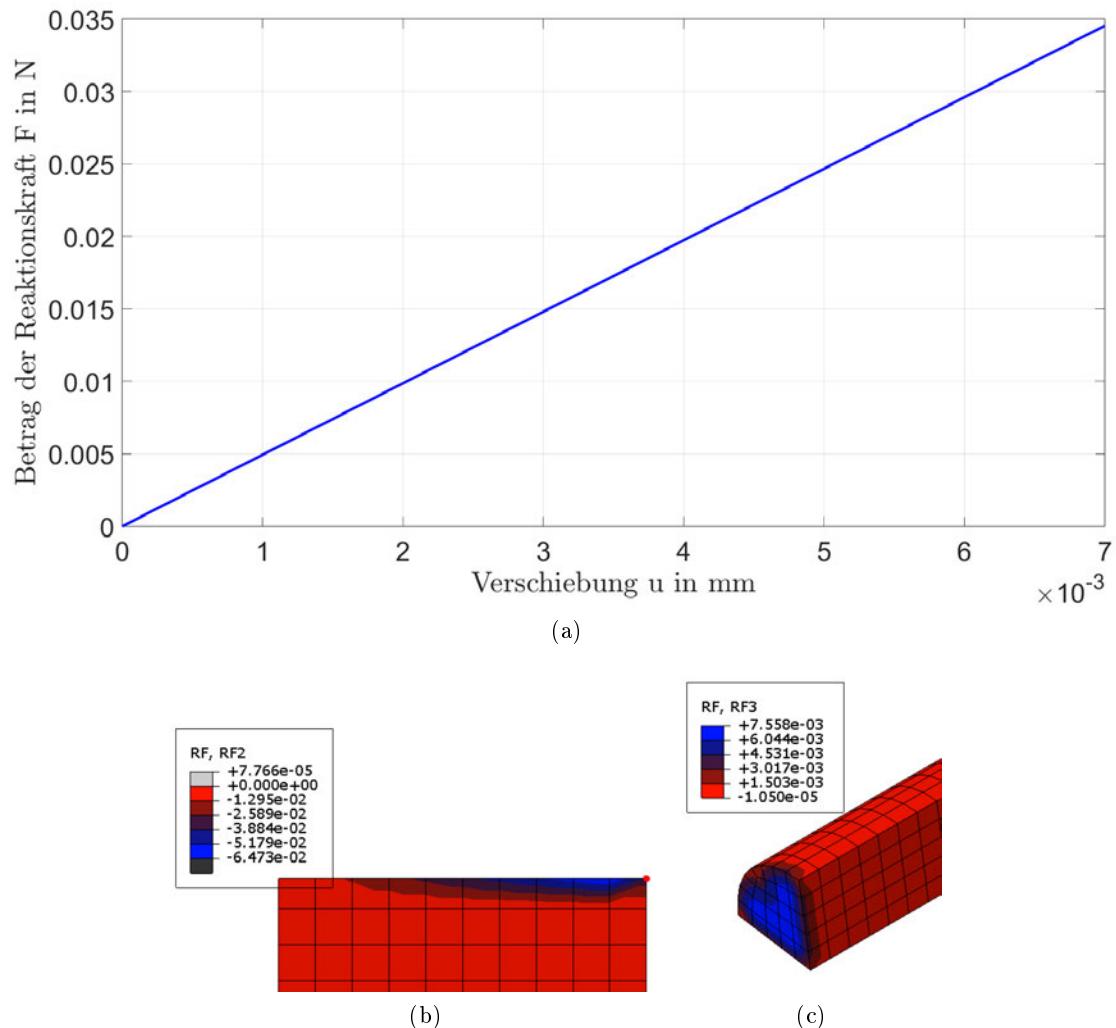


Abbildung 5.8: (a) Kraft-Weg-Diagramm für den Punkt *II*, (b) Reaktionskräfte im rotationssymmetrischen Modell (c) Reaktionskräfte im Viertelmodell

Zusammenfassend zeigt sich, dass für das rotationssymmetrische Modell mit einer freien Länge die UDZ gegenüber dem SLM vergrößert wurde. Eine harmonische Anregung lieferte die selben Ergebnisse wie ein Faserauszug mit konstanter Geschwindigkeit. Ein Kraft-Weg-Diagramm zeigte einen linearen Anstieg der Reaktionskraft. Ein Abfall infolge der Schädigung der Übergangsfläche konnte nicht dargestellt werden.

6. Zusammenfassung der Ergebnisse

In dieser Arbeit wurden verschiedene numerische Modelle zur Darstellung von Haftung und Reibung erstellt und mit analytischen Shear-Lag-Modellen sowie Versuchsergebnissen verglichen. In diesem Kapitel sollen die Ergebnisse der Arbeit kurz zusammengefasst werden.

Ein Vergleich des rotationssymmetrischen und des Viertelmodells mit dem SLM von AZZAM zeigte, dass beide numerischen Modelle den analytisch berechneten Verlauf des Schlupfes $\hat{s}(z, t)$ gut nachbilden konnten. Der Verlauf der Schubspannungen $\hat{\tau}_{numerisch}(z, t)$ gab für beide Modelle den Verlauf von $\hat{\tau}_{analytisch}(z, t)$ qualitativ wieder. Im Mittel gab es eine Abweichung zum SLM von 11 %. Gut abgeschätzt wurde hingegen die Länge der UDZ z_{r0} . Das Viertelmodell wies gegenüber dem rotationssymmetrischen einen glatteren Schubspannungsverlauf auf, hatte jedoch eine deutlich höhere Rechenzeit. Durch eine höhere Netzfeinheit war eine Annäherung an den Verlauf des SLM möglich, was jedoch die Rechenzeit in großen Maße erhöhte. Eine Versteifung der Matrix zur Annäherung an das analytische Modell verbesserte die Ergebnisgüte nicht. Die Genauigkeit des numerischen Modells von AZZAM aus ([4]) hinsichtlich des Schubspannungsverlaufes und der Länge der UDZ wurde nicht erreicht.

Eine Simulation der Modelle für Reibung in der Übergangsfläche brachte beim Vergleich mit dem SLM von AZZAM für alle Modellierungsvarianten ähnliche Ergebnisse für die Fälle Pure Slip und Slip-Stick hervor. In der Regel wurden die Partikelgeschwindigkeiten der numerischen Modelle gegenüber den analytischen unterbewertet, sie lagen jedoch in der selben Größenordnung. Für den Fall I wurde die Prozesszone der Faser überschätzt, für den Fall II die der Matrix. Ein Bereichswechsel, wie er beim SLM bei $Z = \eta_1 T$ vorliegt, konnte nicht dargestellt werden. Die verschiedenen Modellierungsvarianten wiesen keinen Unterschied in den Rechendauern auf. Die Genauigkeit des numerischen Modells von SRIDHAR et al. aus ([2]) wurde nicht erreicht.

Eine Anpassung des rotationssymmetrischen Haftungsmodells an Versuche zeigte, dass die Länge der UDZ gegenüber der eines SLM mit den selben Parametern für das TSL deutlich vergrößert wurde. Dies ist auf den größeren Schlupf und die höhere Entfernung der Anregung zurückzuführen. Ein Vergleich zwischen harmonischer und linear steigender Weganregung zeigte, dass die Ergebnisse der numerischen Modelle sich nicht voneinander unterscheiden. Ein Kraft-Weg-Diagramm aus dem numerischen Modell ergab keine plausiblen Ergebnisse.

7. Fazit und Ausblick

Das Ziel der Untersuchung im Rahmen dieser Arbeit war die Analyse numerischer Modelle im Bezug ihrer Eignung zur Darstellung des Faserauszugs. Dafür wurde in Kapitel 1 zunächst ein Einblick in den Stand der Forschung gegeben, in Kapitel 2 wurden die theoretischen Grundlagen des Faserauszugs, Idealisierungen des Übergangsbereiches und analytische Modelle, welche den Faserauszug beschreiben, erläutert. Kapitel 3 behandelte anschließend Modellierungsmöglichkeiten für die Übergangsfläche, die Faser und die Matrix. Die daraus resultierenden Modelle wurden in Kapitel 4 mit den in Kapitel 2 vorgestellten analytischen Modellen sowie mit Referenzlösungen aus der Literatur verglichen. Die Modelle wurden anschließend in Kapitel 5 auf Parameter eines Versuches angepasst und ein Vergleich zu diesen gezogen. Abschließend wurden die gewonnenen Erkenntnisse aus den Kapiteln 4 und 5 in Kapitel 6 zusammengefasst.

Die Untersuchungen der Modelle für die Haftung mit dem Surface-Based Cohesive Behavior ergaben, dass sie geeignet sind, den Verlauf des Schlupfes und die Länge der UDZ gut darzustellen. Der Verlauf der Schubspannung in der Übergangsfläche konnte ebenfalls qualitativ dargestellt werden. Beide numerischen Modelle unterschätzten die Schubspannungverläufe des SLM im Mittel um 11 %. Durch die Wahl eines rotations-symmetrischen Modells konnte eine kürzere Rechenzeit auf Kosten eines weniger glatten Schubspannungsverlaufes erreicht werden.

Für die Reibungssimulation stellte sich heraus, dass die numerischen Modelle die analytischen nur in der Größenordnung der Partikelgeschwindigkeit und abhängig vom Fall in der Größenordnung der Prozesszone darstellten. Unabhängig von der Modellierungsart von Faser, Matrix oder Reibung unterschätzten die numerischen Modelle die Analytischen. Ein Bereichswechsel war ebenfalls nicht erkennbar. Anders als bei der Haftungssimulation gab es für rotationssymmetrische und Viertelmodelle keinen Unterschied in der Rechenzeit. Aufgrund der Abweichungen wurde keine Untersuchung mit Parametern aus Versuchen durchgeführt.

Eine Abweichung des numerischen Modells zum SLM aufgrund der freien Länge und der Steifigkeit der Matrix konnte ebenfalls gezeigt werden. So war die Länge der UDZ größer als die des SLM. Wird statt einer harmonischen eine lineare Weganregung verwendet, so gibt es nur geringe Abweichungen zum Schubspannungs-Verlauf. Zur Beschreibung des Faserauszuges in Form eines Kraft-Weg-Diagrammes waren beide Modelle in ihrer Ausführung aufgrund unplausibler Reaktionskräfte ungeeignet.

Weitere Forschungsschritte könnten deshalb eine bessere Simulation der Reaktionskräfte im Faserverbund sein. Durch eine bessere Modellierung der Haftung und insbesondere der Reibung könnte ein Kraft-Weg-Diagramm realitätsnäher dargestellt werden. Dies könnte durch die Verwendung von Cohesive Elements statt Surface-Based Cohesive Behavior gelingen, wie es bei ([4, 2]) der Fall war. Eine bessere Darstellung von Reibung könnte auch durch ein eigen programmiertes Reibungsgesetz mit User-Subroutinen gelingen. Bei der Haftungssimulation könnte eine Konvergenzstudie durchgeführt werden, um eine Näherung an das Shear-Lag-Modell zu erreichen. Sobald beide Mechanismen den Shear-Lag-Modellen entsprechen, sollte eine Kombination der beiden, z. B. durch User-Subroutinen erfolgen, um den Faserauszug vollständig zu modellieren. Ein nächster

Schritt wäre eine numerische Modellierung des dynamischen Auszugs mehrerer Fasern, um das Verhalten von bewehrtem Beton unter dynamischer Belastung besser darzustellen.

Literatur

- [1] W. E. Weber u. a. "Analytical and Numerical Modelling of a Sub- and Supersonic Moving Load Front Along a Rod's Skin". In: *Advanced Methods of Continuum Mechanics for Materials and Structures, Advanced Structured Materials 60* (2016). DOI: https://doi.org/10.1007/978-981-10-0959-4_26.
- [2] N. Sridhar, Q. D. Yang und B. N. Cox. "Slip, stick, and reverse slip characteristics during dynamic fibre pullout". In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids 51 2003* (2003), S. 1215–1241. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(03\)00035-8](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(03)00035-8).
- [3] J. Ivanova u. a. "Interface behavior of a bi-material plate under dynamic loading. Cohesive interface debonding". In: *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik / Volume 95, Issue 11* (2014), S. 1190–1201. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.201300119>.
- [4] A. Azzam. "Dynamic analysis of fiber pullout mechanism in cementitious composites under harmonic pullout displacement: analytical approach". In: *International Journal of Mechanical Sciences 119 2016* (2016), S. 36–50. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.09.030>.
- [5] C. Scheffler, S. Zhandarov und E. Mäder. "Alkali resistant glass fiber reinforced concrete: Pull-out investigation of interphase behavior under quasi-static and high rate loading". In: *Cement and Concrete Composites 84* (2017), S. 19–27. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cemconcomp.2017.08.009>.
- [6] E. Mäder C. Scheffler. "Fibre Reinforced Concrete: Pull-Out Tests under Quasi-Static and High-Speed Loading". In: *18 TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPOSITE MATERIALS* (2011).
- [7] S. Zhandarov u. a. "Investigation of interfacial strength parameters in polymer matrix composites: Compatibility and reproducibility". In: *Advanced Industrial and Engineering Polymer Research 1* (2018), S. 82–92. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aiepr.2018.06.002>.
- [8] E. Woelfel u. a. "Dynamic Single-Fiber Pull-Out of Polypropylene Fibers Produced with Different Mechanical and Surface Properties for Concrete Reinforcement". In: *Materials 2021, 14(4), 722* (2021). DOI: <https://doi.org/10.3390/ma14040722>.
- [9] C. Yuan u. a. "Interfacial bond behaviour between hybrid carbon/basalt fibre composites and concrete under dynamic loading". In: *International Journal of Adhesion Adhesives 99* (2020). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2020.102569>.
- [10] E. Marquis u. a. "Computational Modeling and Experimental Investigation of a Single-Fiber-Pull-Out Test with a Bio-Inspired Carbon Fiber-Matrix Interphase". In: *fib Symposium* (2023), S. 1252–1261. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-32511-3_128.

-
- [11] J. H. Tsai, A. Patra und R. Wetherhold. "Finite element simulation of shaped ductile fiber pullout using a mixed cohesive zone/friction interface model". In: *Composites: Part A 36* (2005), S. 827–838. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2004.10.025>.
 - [12] D. Gross und T. Seelig. *Bruchmechanik*. 6. Aufl. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2016, 2016. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-46737-4>.
 - [13] K. F. Abdulla, L. S. Cunningham und M. Gillie. "Simulating masonry wall behaviour using a simplified micro-model approach". In: *Engineering Structures 151* (2017), S. 349–365. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.08.021>.
 - [14] M. Bruchmüller. "Berechnung des Elastizitätsmoduls von Verbundwerkstoffen unter Berücksichtigung der Adhäsion an der Faser-Matrix-Grenzfläche". Diss. Technische Universität Ilmenau, 2022. DOI: <https://doi.org/10.22032/dbt.53066>.
 - [15] J. A. Nairn. "On the Use of Shear-Lag Methods for Analysis of Stress Transfer in Unidirectional Composites". In: *Mechanics of Materials 26* (1997), S. 63–80. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0167-6636\(97\)00023-9](https://doi.org/10.1016/S0167-6636(97)00023-9).
 - [16] B. Klein. *FEM*. 9. Aufl. Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2012, 2012. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-8348-2134-8>.
 - [17] M. Wagner. *Lineare und nichtlineare FEM*. Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2017, 2017. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-658-17866-6>.
 - [18] Abaqus Version 6.6 Documentation. *Implicit dynamic analysis*. 1. März 2006. URL: <https://classes.engineering.wustl.edu/2009/spring/mase5513/abaqus/docs/v6.6/books/stm/default.htm?startat=ch02s04ath19.html> (besucht am 18.02.2025).
 - [19] Abaqus Version 6.6 Documentation. *Explicit dynamic analysis*. 1. März 2006. URL: <https://classes.engineering.wustl.edu/2009/spring/mase5513/abaqus/docs/v6.6/books/usb/default.htm?startat=pt03ch06s03at07.html> (besucht am 25.02.2025).
 - [20] Simulia Abaqus 2016. *Surface-based cohesive behavior*. 5. Juli 2015. URL: <http://130.149.89.49:2080/v2016/books/usb/default.htm?startat=pt09ch37s01alm66.html> (besucht am 18.02.2025).
 - [21] M. Veith. *Cohesive Elements in Abaqus: An Introduction*. 12. Juni 2024. URL: <https://caeassistant.com/blog/cohesive-elements-behavior-abaqus-video/> (besucht am 24.02.2025).
 - [22] F. Di Caprio, S. Saputo und A. Sellitto. "Numerical-Experimental Correlation of Interlaminar Damage Growth in Composite Structures: Setting Cohesive Zone Model Parameters". In: *Advances in Materials Science and Engineering Volume 2019* (2019). DOI: <https://doi.org/10.1155/2019/2150921>.

-
- [23] Abaqus Version 6.6 Documentation. *Frictional behavior*. 1. März 2006. URL: <https://classes.engineering.wustl.edu/2009/spring/mase5513/abaqus/docs/v6.6/books/usb/default.htm?startat=pt09ch30s01aus142.html> (besucht am 22.02.2025).
 - [24] Abaqus Version 6.6 Documentation. *Axisymmetric elements*. 1. März 2006. URL: <https://classes.engineering.wustl.edu/2009/spring/mase5513/abaqus/docs/v6.6/books/stm/default.htm?startat=ch03s02ath66.html> (besucht am 25.02.2025).
 - [25] Abaqus Version 6.6 Documentation. *Axisymmetric solid element library*. 1. März 2006. URL: <https://classes.engineering.wustl.edu/2009/spring/mase5513/abaqus/docs/v6.6/books/usb/default.htm?startat=pt06ch22s01ael05.html> (besucht am 25.02.2025).
 - [26] Abaqus Version 6.6 Documentation. *Finite Elements*. 1. März 2006. URL: <https://classes.engineering.wustl.edu/2009/spring/mase5513/abaqus/docs/v6.6/books/gss/default.htm?startat=ch03s01.html> (besucht am 25.02.2025).
 - [27] Abaqus Version 6.6 Documentation. *Three-dimensional solid element library*. 1. März 2006. URL: <https://classes.engineering.wustl.edu/2009/spring/mase5513/abaqus/docs/v6.6/books/usb/default.htm?startat=pt06ch22s01ael03.html> (besucht am 25.02.2025).
 - [28] G. Dhondt. *Eight-node brick element with reduced integration (C3D8R and F3D8R)*. 2. März 2014. URL: https://web.mit.edu/calculix_v2.7/CalculiX/ccx_2.7/doc/ccx/node27.html (besucht am 22.02.2025).
 - [29] Chemie.de. *Poissonzahl*. URL: <https://www.chemie.de/lexikon/Poissonzahl.html> (besucht am 15.02.2025).
 - [30] Material Magazin. *Aluminium*. 2025. URL: <https://www.materialmagazin.com/index.php/ne-metalle/eigenschaften-von-aluminium> (besucht am 10.03.2025).
 - [31] Technische Universität Berlin. *Mikromechanische Mischungsregeln*. URL: http://svfs.ifm.tu-berlin.de/mikromechanische_mischungsregeln.html (besucht am 14.02.2025).
 - [32] FiberDowels. *Glasfaser vs Stahl*. 2025. URL: <https://fiberdowels.com/de/glasfaser-vs-stahl/> (besucht am 04.03.2025).
 - [33] Dornbach. *Betondichte*. 2009. URL: <https://www.dornbach.com/de/baulexikon/Dichte-von-Beton.html> (besucht am 04.03.2025).
 - [34] J. Doke. *GRABIT*. 2025. URL: <https://de.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/7173-grabit> (besucht am 23.02.2025).

A. Anhang A

MATLAB®-Skript für Shear-Lag-Modelle

```
clear; close all; clc;
% Verschiedene Shear-Lag-Modelle zur Validierung von FEM-Modellen des
% dynamischen Faserauszuges
% Ersteller Skript: Alexander Jannsen mit Matrikelnummer: 2308580

% Fall 1: Modell Azzam (DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.09.030)
% Fall 2: Modell Sridhar et al. (DOI:https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(03\)00035-8)
% Versuchparameter von Scheffler et al. (https://doi.org/10.1016/j.cemconcomp.2017.08.009)

Fall=2;

% Shear-Lag-Model Azzam-----
% Anmerkung: x entspricht hier der Koordinate z in der Arbeit
if Fall==1
    % Parameter aus Versuchen von Scheffler et al. (https://doi.org/10.1016/j.cemconcomp.2017.08.009)
    % Anregung
    % t_step=0.0011/10;
    %
    % C_n=0.0009; %Amplitude an Faserspitze in mm 0.0011
    % lambda=2*pi/(4*t_step); %Erregerfrequenz in 1/s 2*pi/(4*t_step)
    %
    % Shear-stress shear-slip relation
    % K0=151400; %Steigung Schubspannung in MPa/mm %155333
    % s_m=0.0005; %Schlupfschadengrenze in mm %0.0005
    % s_r=0.08; %Schlupf-Haftungsversagensgrenze in mm %0.08
    % s_f=0.0011; %0.0011
    % Tau_m=75.5; %Schubspannung, bis zu der Schaden auftritt in MPa %93.2
    % Tau_s=138.42; %Schubspannung für softening curve in MPa 186.4
    %
    % Faser-Parameter
    % E_r=78000; %E-Modul Faser in MPa 78000
    % A_r=pi*0.01^2; %Querschnittsfläche Faser in mm^2 pi*0.012^2
    % Rho_r=2*10^-9; %Dichte des Fasermaterials in t/mm^3 2*10^-9
    % a=pi*2*0.01; %Faserumfang in mm pi*2*0.012
    % c_r=sqrt(E_r/Rho_r); %Schallgeschwindigkeit
    % l=0.4; %Faserlänge in mm 0.4
    % x=linspace(0,1,1000)'; %Vektor mit Positionen auf x-Koordinate
    %
    % Parameter von Azzam (DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.09.030)
    C_n=6.125e-2; %Amplitude an Faserspitze in mm
    lambda=1e5; %Erregerfrequenz in 1/s
    %
    % Shear-stress shear-slip relation
    K0=652; %Steigung Schubspannung in MPa/mm
    s_m=0.005; %Schlupfschadengrenze in mm
    s_r=0.08; %Schlupf-Haftungsversagensgrenze in mm
    s_f=0.0941; %Schlupf failure
    Tau_m=3.26; %Schubspannung, bis zu der Schaden auftritt in MPa
    Tau_s=3.44; %Schubspannung für softening curve in MPa

    % Faser-Parameter
    E_r=72000; %E-Modul Faser in MPa
    A_r=3.14e-4; %Querschnittsfläche Faser in mm^2
    Rho_r=2.7*10^-9; %Dichte des Fasermaterials in t/mm^3
    a=6.28e-2; %Faserumfang in mm
    c_r=sqrt(E_r/Rho_r); %Schallgeschwindigkeit
    l=5; %Faserlänge in mm
    x=linspace(0,1,2501)'; %Vektor mit Positionen auf x-Koordinate
    %
    % Weitere Parameter
    ke1=(K0*a)/A_r;
    w_2=(ke1/E_r)-(lambda^2/c_r^2);
    w=sqrt(w_2);
    lambda_cut=c_r*sqrt(ke1/E_r);
    q02=(Tau_s*a)/A_r;
    ke2=ke1-(q02/s_m);
    Z2=(ke2*A_r)/a;
    w_2Strich_2=(abs(ke2)/E_r)+(lambda^2/c_r^2);
    w_2Strich=sqrt(w_2Strich_2);

    f=0*(xr0_alt)*(s_m-(q02/(E_r*w_2Strich_2)))*cos(w_2Strich*(l-xr0_alt))+(w_2Strich)*...
    s_m*tanh(w*xr0_alt).*sin(w_2Strich*(l-xr0_alt))-C_n+(q02/(E_r*w_2Strich_2))
    xr0=zero(f,1)
    [~,idx_xr0]=min(abs(x-xr0));
    Nr0=E_r*A_r*w*s_m*tanh(w*xr0);

    t_start=0; %Anfangszeit in s
```

```

t_end=(2*pi)/(2*lambda); %Zeitdauer in s
t=linspace(t_start,t_end,10); %Vektor mit Zeitpunkten

%Schadensfälle
if C_n<=s_m %unbeschädigtes Interface
    if w_2>0
        for i=1:length(t)
            s_Dach(:,i)=(cosh(w*x)/cosh(w*1))*C_n*exp(i*i*lambda*t(i)); %Schlupf
            Tau_Dach(:,i)=(cosh(w*x)/cosh(w*1))*K0*C_n*exp(i*i*lambda*t(i)); %Schubspannung in Interface
            N_r_Dach(:,i)=E_r*A_r*w*(sinh(w*x))/cosh(w*1))*C_n*exp(i*i*lambda*t(i)); %Normalkraft in Faser
            P_Dach(1,i)=E_r*A_r*w*tanh(w*1)*C_n*exp(i*i*lambda*t(i)); %Faserauszugskraft
        end
    elseif w_2<0
        for i=1:length(t)
            s_Dach(:,i)=(C_n/(2*cos(w*1)))*(exp(i*i*(w*x+lambda*t(i))) + exp(-i*i*(w*x-lambda*t(i)))); %Schlupf
            Tau_Dach(:,i)=((K0*C_n)/(2*cos(w*1)))*(exp(i*i*(w*x+lambda*t(i))) + exp(-i*i*(w*x-lambda*t(i)))); %Schubspannung in Interface
            N_r_Dach(:,i)=((E_r*A_r*i*w*C_n)/(2*cos(w*1)))*(exp(i*i*(w*x+lambda*t(i))) - exp(-i*i*(w*x-lambda*t(i)))); %Normalkraft in Faser
        end
    elseif w_2==0
        s_Dach=C_n*exp(i*i*lambda_cut*t); %Schlupf
        Tau_Dach=K0*C_n*exp(i*i*lambda_cut*t); %Schubspannung in Interface
        N_r_Dach=zeros(1,length(t)); %Normalkraft in Faser
    end
else %Beschädigtes Interface
    x_UDZ=x(1:idx_xr0,1); %Vektor mit beschädigter Zone
    x_DZ=x(idx_xr0+1:end,1); %Vektor mit unbeschädigter Zone

    %Unbeschädigte Zone
    for i=1:length(t)
        s_Dach_UDZ(:,i)=s_m*(cosh(w*x)/cosh(w*xr0))*exp(i*i*lambda*t(i));
        Tau_Dach_UDZ(:,i)=Tau_m*(cosh(w*x)/cosh(w*xr0))*exp(i*i*lambda*t(i));
        N_Dach_UDZ(:,i)=E_r*A_r*w*s_m*(sinh(w*x)/cosh(w*xr0))*exp(i*i*lambda*t(i));
    end

    %Beschädigte Zone
    for i=1:length(t)
        s_Dach_DZ(:,i)=((q02/(E_r*w_2Strich_2))+(s_m-(q02/(E_r*w_2Strich_2)))*cos(w_2Strich*...
(x-xr0))+(Nr0/(E_r*A_r*w_2Strich))*sin(w_2Strich*(x-xr0)))*exp(i*i*lambda*t(i));
        Tau_Dach_DZ(:,i)=(Z2*(q02/(E_r*w_2Strich_2))+Tau_s+Z2*(s_m-(q02/(E_r*w_2Strich_2)))*...
*cos(w_2Strich*(x-xr0))+Z2*(Nr0/(E_r*A_r*w_2Strich))*sin(w_2Strich*(x-xr0)))*exp(i*i*lambda*t(i));
        N_Dach_DZ(:,i)=E_r*A_r*w_2Strich*((- (s_m-q02/(E_r*w_2Strich_2)))*...
sin(w_2Strich*(x-xr0))+(Nr0/(E_r*A_r*w_2Strich))*cos(w_2Strich*(x-xr0)))*exp(i*i*lambda*t(i));
    end
    % figure(1)
    % axis=15;
    % font-size=15;
    % line-width=3;
    subplot(2,1,1)
    plot(x(1:idx_xr0,1),real(s_Dach_UDZ(1:idx_xr0,1)), 'r', 'LineWidth', 2)
    hold on
    plot(x(idx_xr0+1:end,1),real(s_Dach_DZ(idx_xr0+1:end,1)), 'r', 'LineWidth', 2)
    hold off
    xlabel('Position an der Stelle z in mm', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', font-size)
    ylabel('Schlupf $\hat{s}(z,t)$ in mm', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', font-size)
    axis;
    ax.FontSize=axsize
    grid on
    subplot(2,1,2)
    plot(x(1:idx_xr0,1),real(Tau_Dach_UDZ(1:idx_xr0,1)), 'r')
    hold on
    plot(x(idx_xr0+1:end,1),real(Tau_Dach_DZ(idx_xr0+1:end,1)), 'r')
    hold off
    xlabel('Position an der Stelle z in mm', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', font-size)
    ylabel('Schubspannung $\hat{\tau}(z,t)$ in MPa', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', font-size)
    axis;
    ax.FontSize=axsize
    grid on
end

%Shear-Lag-Modell nach Sridhar
elseif Fall==2
    %-----
    %Fall I: Pure Slip
    %Importparameter:
    %Materialparameter
    E_f=10000; %E-Modul Faser in MPa
    E_m=46296; %E-Modul Matrix in MPa
    nu_f=0.3; %Poissonsche Zahl Faser
    nu_m=0.25; %Poissonsche Zahl Matrix
    rho_f=3.3654E-08; %Dichte Faser in t/mm^3
    rho_m=1.3889E-07; %Dichte Matrix in t/mm^3
    R_f=0.01; %Radius Faser in mm
    l_f=0.4; %Länge Faser in mm
    z=linspace(0,l_f,201); %Vektor mit Positionen auf z-Koordinate

```

```

f=0.4; %Faservolumenanteil

E_f_Dach=(E_f*(1-nu_f))/((1+nu_f)*(1-2*nu_f));
E_m_Dach=(E_m*(1-nu_m))/((1+nu_m)*(1-2*nu_m));

c_f=sqrt(E_f_Dach/rho_f)
c_m=sqrt(E_m_Dach/rho_m)
t_end=2.85e-8 %Zeit in s

%-----
%Fall II: Slip-Stick

%Materialparameter
E_f=100000; %E-Modul Faser in MPa 40000
E_m=4.6296e+04; %E-Modul Matrix in MPa E_f/3
nu_f=0.3; %Poissonsche Zahl Faser
nu_m=0.25; %Poissonsche Zahl Matrix
rho_f=3.3654E-08; %Dichte Faser in t/mm^3
rho_m=1.3889e-09; %Dichte Matrix in t/mm^3
R_f=0.01; %Radius Faser in mm
l_f=0.4; %Länge Faser in mm
z=linspace(0,l_f,201); %Vektor mit Positionen auf z-Koordinate
f=0.4; %Faservolumenanteil 0.4

E_f_Dach=(E_f*(1-nu_f))/((1+nu_f)*(1-2*nu_f));
E_m_Dach=(E_m*(1-nu_m))/((1+nu_m)*(1-2*nu_m));

c_f=sqrt(E_f_Dach/rho_f)
c_m=sqrt(E_m_Dach/rho_m)

E_f_Dach=(E_f*(1-nu_f))/((1+nu_f)*(1-2*nu_f));
E_m_Dach=(E_m*(1-nu_m))/((1+nu_m)*(1-2*nu_m));

c_f=sqrt(E_f_Dach/rho_f)
c_m=sqrt(E_m_Dach/rho_m)
t_end=2.86e-8 %Zeit in s

%-----
%Weitere Parameter
t0=5e-10; %Startzeit in s
t=linspace(t0,t_end,2); %Vektor mit Zeitpunkten
Tau0=100; %Reibungs-Schubspannung im Interface
sigma0=100; %Normalspannung am Faserende

%Normalisierungen
Z=(z/R_f);
T=(c_f*t)/R_f;
C=c_f/c_m; %Schallgeschwindigkeitsverhältnis
phi=(f*E_f)/((1-f)*E_m); %Modulverhältnis
tau=(2*Tau0)/E_f; %Normalisierte Interface-Schubspannung

p=(sigma0*t)/t0; %Zeitabhängige Normalspannung
k=(Tau0*c_f*t0)/(sigma0*R_f) %Inverse Lastrate
%-----
%Parameter wie im Paper
% C=sqrt(0.5) %Fall I: C=sqrt(1), Fall II C=sqrt(0.5)
% phi=2;
% k=0.05;
% tau=0.005;
% T=10;

%Ermittlung der Grenzen CU und CL
eta2=sqrt((1+phi)/(C^2+phi));
syms eta1_sym

eta1=double(solve(( (eta1_sym^2+2*k*eta1_sym-1)*(1+C^2*eta1_sym*eta2) + ...
2*k*phi*(1+eta1_sym*eta2)*eta1_sym==0,eta1_sym));
eta1(eta1<0)=[];

syms CU_sym CL_sym

CU=double(solve(((eta1^2+2*k*eta1-1)*(1-CU_sym^2))/(2*k*(eta1*(1-CU_sym^2)+...
(1-eta1^2)*sqrt((CU_sym^2+phi)*(1+phi))))==1,CU_sym));
CU(CU<0)=[];

CL=double(solve(((eta1^2+2*k*eta1-1)*(1-CL_sym^2))/(2*k*(eta1*(1-CL_sym^2)+...
(1-eta1^2)*sqrt((CL_sym^2+phi)*(1+phi))))==1,CL_sym));
CL(CL<0)=[];

%Regime-Fälle
if C>CU %Regime I: Pure Slip
    eta1=1/C;
    eta2=sqrt(1+k^2)-k;

```

```

Z=linspace(0,eta2*T(end),201)';
lim1=eta1*T(end);
lim2=eta2*T(end);
l2=eta2*c_2*t(end);
% eta1=7*T;
% eta2=9.5*T;
syms T_sym
%Faser Bereich I:
U_f_s=(tau*(-Z*T_sym*eta2).*(Z*(k+eta2)-T_sym*(1-k*eta2)))/(2*k*(1+eta2^2));
V_f_s=diff(U_f_s,T_sym);
V_f=double(subs(V_f_s,T_sym,T(end)));
%Matrix Bereich I
U_m_s_1=tau*phi*(Z.^2*(1+eta1^2*C^2-2*eta1*eta2*C^2)+T_sym^2*...
(eta2^2-2*eta1*eta2+eta1^2*eta2^2*C^2))/...
(2*(1+eta1^2*C^2)*(1-eta2^2*C^2));
V_m_s_1=diff(U_m_s_1,T_sym);
V_m_1=double(subs(V_m_s_1,T_sym,T(end)));
%Matrix Bereich II
U_m_s_2=((tau*phi)/(2*(1-eta2^2*C^2)))*(Z-eta2*T_sym).^2;
V_m_s_2=diff(U_m_s_2,T_sym);
V_m_2=double(subs(V_m_s_2,T_sym,T(end)));
[~,idx_1]=min(abs(Z-eta1*T(end)));
[~,idx_2]=min(abs(Z-eta2*T(end)));

figure(1)
axsize=30;
fontsize=35;
plot(Z,V_f,'k','LineWidth',1)
hold on
plot(Z(1:idx_1),V_m_1(1:idx_1),'--k','LineWidth',1)
hold on
plot(Z(idx_1:idx_2),V_m_2(idx_1:idx_2),'--k','LineWidth',1)
hold off
grid on
legend('Faser','Matrix','','Interpreter','latex','FontSize',fontsize,'Position',[.7 .7 .3 .1])
ylabel('Partikelgeschwindigkeit $\dot{u}(t)$','Interpreter','latex','FontSize',fontsize)
xlabel('Position an der Stelle Z','Interpreter','latex','FontSize',fontsize)
ax=gca;
ax.FontSize=axsize

elseif C>=CL && CU>=C %Regime II: Slip-Stick
eta2=eta2;
eta1=eta1;

Z=linspace(0,eta2*T(end),1000)';
lim1=eta1*T(end);
lim2=eta2*T(end);

[~,idx_1]=min(abs(Z-eta1*T(end)));
[~,idx_2]=min(abs(Z-eta2*T(end)));

syms T_sym
%Faser Bereich I
U_f_s_1=(tau*(-Z.^2*(2*k+eta1+eta2)+2*Z*T_sym*(1+eta1*eta2)+T_sym^2*...
(2*k*eta1*eta2-eta1-eta2))/(4*k*(1+eta1*eta2));
V_f_s_1=diff(U_f_s_1,T_sym);
V_f_1=double(subs(V_f_s_1,T_sym,T(end)));
%Faser Bereich II
U_f_s_2=(tau*(eta1^2+2*k*eta1-1)*(Z-eta2*T_sym).^2)/(4*k*(1+eta1*eta2)*(eta2-eta1));
V_f_s_2=diff(U_f_s_2,T_sym);
V_f_2=double(subs(V_f_s_2,T_sym,T(end)));
%Matrix Bereich I
U_m_s_1=(tau*(Z.^2*((eta1^2+2*k*eta1-1)*(eta2-eta1)*C^2+2*k*phi*(1+eta1*eta2))+T_sym^2*...
((eta1^2+2*k*eta1-1)*(eta2-eta1)-2*k*phi*eta1^2*(1+eta1*eta2)))/...
(4*k*(1+eta1*eta2)*(1+eta1^2*C^2));
V_m_s_1=diff(U_m_s_1,T_sym);
V_m_1=double(subs(V_m_s_1,T_sym,T(end)));
%Matrix Bereich II
U_m_s_2=(tau*((eta1^2+2*k*eta1-1)*(Z-eta2*T_sym).^2)/(4*k*(1+eta1*eta2)*(eta2-eta1));
V_m_s_2=diff(U_m_s_2,T_sym);
V_m_2=double(subs(V_m_s_2,T_sym,T(end)));

figure(1)
axsize=30;
fontsize=35;
plot(Z(1:idx_1),V_f_1(1:idx_1),'k','LineWidth',1)
hold on
plot(Z(idx_1+1:idx_2),V_f_2(idx_1+1:idx_2),'k','LineWidth',1)
hold on
plot(Z(1:idx_1),V_m_1(1:idx_1),'--k','LineWidth',1)
hold on
plot(Z(idx_1+1:idx_2),V_m_2(idx_1+1:idx_2),'--k','LineWidth',1)
hold off

```

```

grid on
legend('Faser','','Matrix','','Interpreter','latex','FontSize',fontSize,'Position',[.7 .7 .3 .1])
ylabel('Partikelgeschwindigkeit $\dot{U}$','Interpreter','latex','FontSize',fontSize)
xlabel('Position an der Stelle Z','Interpreter','latex','FontSize',fontSize)
ax=gca;
ax.FontSize=axsize

elseif C<=CL %Regime III: Slip Reverse-Slip
eta2=1;

syms eta1_sym eta3_sym
equations= [eta3_sym-eta1_sym^2*eta3_sym*C^2+2*eta1_sym*(eta3_sym^2*C^2-1)==0 , ...
((eta1_sym-1)/(eta1_sym+1))+(1/(eta3_sym+1))-(phi*(eta3_sym^2-4*eta1_sym*eta3_sym+...
eta1_sym^2*eta3_sym^2*C^2+2*eta1_sym^2))/((1-eta1_sym^2*C^2)*(1+eta3_sym^2*C^2))==(1-eta1_sym)/(2*k)];
[eta1,eta3]=solve(equations,eta1_sym,eta3_sym);

eta1=double(eta1);
eta1(eta1<0)=[];
eta1=eta1(eta1==real(eta1));
eta1=sort(eta1,'ascend');
eta1=eta1(1);
eta3=double(eta3);
eta3(eta3<0)=[];
eta3=eta3(eta3==real(eta3));
eta3=sort(eta3,'ascend');
eta3=eta3(1);

Z=linspace(0,eta3*T,100);

syms T_sym
%Faser Bereich I
U_f_s_1=(tau*(Z.^2*(2*k*(eta1-2*eta3-1)-(1+eta1)*(1+eta3))...
-T_sym.^2*(1+eta1+2*k*eta3+eta1*(1+eta3-2*k*(eta3+2))...
+2*k*T_sym*(1+eta1)*(1+eta3))...
/(4*k*(1+eta1)*(1+eta3)));
V_f_s_1=diff(U_f_s_1,T_sym);
V_f_1=double(subs(V_f_s_1,T_sym,T));
%Faser Bereich II
U_f_s_2=(tau*(Z.^2*(1+eta3-eta1.^2*(1+eta3)+2*k*(eta1.^2-1-2*eta1*(1+eta3))...
+T_sym.^2*((eta1.^2-1)*(1+eta3)+4*k*eta1.^2+2*k*eta3*(eta1.^2+2*eta1-1))...
+2*k*T_sym*(eta1.^2+4*k*eta1-1)*(1+eta3))...
/(4*k*(eta1.^2-1)*(1+eta3)));
V_f_s_2=diff(U_f_s_2,T_sym);
V_f_2=double(subs(V_f_s_2,T_sym,T));
%Faser Bereich III
U_f_s_3=(tau*(Z-eta3*T_sym).^2)/(2*k*(1-eta3.^2));
V_f_s_3=diff(U_f_s_3,T_sym);
V_f_3=double(subs(V_f_s_3,T_sym,T));
%Matrix Bereich I
U_m_s_1=(tau*phi*(Z-eta3*T_sym)*(Z*(1-eta1.^2*C^2-4*eta1*eta3*C^2+2*eta3.^2*C^2)...
+T_sym.^2*(eta3.^2-4*eta1*eta3+2*eta1.^2*eta3.^2*C^2+2*eta1.^2))/...
(2*(1-eta1.^2*C^2)*(1+eta3.^2*C^2)));
V_m_s_1=diff(U_m_s_1,T_sym);
V_m_1=double(subs(V_m_s_1,T_sym,T));
U_m_1=double(subs(U_m_s_1,T_sym,T));
%Matrix Bereich II
U_m_s_2=(tau*phi*(Z-eta3*T_sym)*(Z*(1-eta1.^2*C^2+4*eta1*eta3*C^2)...
+T_sym.^2*(eta3-eta1.^2*eta3*C^2-4*eta1))/...
(2*(eta1.^2+C^2-1)*(eta3.^2+C^2+1));
V_m_s_2=diff(U_m_s_2,T_sym);
V_m_2=double(subs(V_m_s_2,T_sym,T));
U_m_2=double(subs(U_m_s_2,T_sym,T))

[~,idx_1]=min(abs(Z-eta1*T))
[~,idx_2]=min(abs(Z-eta2*T))
[~,idx_3]=min(abs(Z-eta3*T))

plot(Z(1:idx_1),V_f_1(1:idx_1),'k','LineWidth',3)
hold on
plot(Z(idx_1:idx_2),V_f_2(idx_1:idx_2),'r','LineWidth',3)
hold on
plot(Z(idx_2:idx_3),V_f_3(idx_2:idx_3),'r','LineWidth',3)
hold on
plot(Z(1:idx_1),V_m_1(1:idx_1),'--k','LineWidth',3)
hold on
plot(Z(idx_1:idx_3),V_m_2(idx_1:idx_3),'--k','LineWidth',3)
hold off
grid on
xlabel('Z')
ylabel('V')
legend('Faser','','Matrix','')
annotation('arrow', [0.55 0.75], [0.03 0.03], 'LineWidth', 3);
annotation('arrow', [0.075 0.075], [0.6 0.8], 'LineWidth', 3);

```

```

    ax=gca;
    ax.FontSize=30
  end
end

```

B. Anhang B

PYTHON-Skript für Rotationssymmetrisches Modell

```

# -*- coding: mbcs -*-
from part import *
from material import *
from section import *
from assembly import *
from step import *
from interaction import *
from load import *
from mesh import *
from optimization import *
from job import *
from sketch import *
from visualization import *
from connectorBehavior import *

#Ersteller: Alexander Jannsen Matrikelnummer: 2308580
#Parameter Kapitel 4.1: Azzam DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.09.030
#Parameter Kapitel 4.2: Sridhar et al. DOI:https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(03\)00035-8
#Parameter Kapitel 5: Scheffler et al. https://doi.org/10.1016/j.cemconcomp.2017.08.009

#Parameters
#Fälle
Interface=1 #1: Traction Separation Law bzw. Reibung mit Surface-Based Cohesive Behavior, 2: Reibung mit Shear-stress versus elastic slip
Loadcase=2 #1: Linear steigende Normalspannung, 2: Harmonische Weganregung, 3: Verschiebung mit konstanter Geschwindigkeit
BC=2 #1: Keine RB, 2: Einspannung, 3: x-Symmetrie Faser 4: Symmetrie und Einspannung

#Geometry
r_f=0.01 #Radius of fiber in mm
l_f=5 #Length of fiber in mm #Kapitel 4.1: l_f=5 #Kapitel 4.2: l_f=0.4 #Kapitel 5: l_f=0.4
t_r=0.00581 #Stärke der Matrix in mm
l_free=0.03 #Free length in mm #Kapitel 4.1: l_free=0.0 #Kapitel 4.2: l_free=0.0 #Kapitel 5: l_free=0.03
#Material
E_f=72000 #Youngs Modulus of fiber in MPa #Kapitel 4.1: E_f=72000 #Kapitel 4.2: E_f=100000 #Kapitel 5: E_f=78000
nu_f=0.33 #Poissons ratio #Kapitel 4.1: nu_f=0.33 #Kapitel 4.2: nu_f=0.3 #Kapitel 5: nu_f=0.17
rho_f=2.7e-9 #Density of fiber in t/mm^3 #Kapitel 4.1 rho_f=2.7e-9 Kapitel 4.2 rho_f=3.3654E-08 #Kapitel 5: rho_f=2.0e-9

E_m=72000*10 #Youngs Modulus of fiber in MPa #Kapitel 4.1: E_m=72000*10 #Kapitel 4.2: E_m=46296 #Kapitel 5: E_m=28000
nu_m=0.33 #Poissons ratio #Kapitel 4.1: nu_m=0.33 Kapitel 4.2: nu_m=0.25 #Kapitel 5: nu_m=0.2
rho_m=2.7e-9*10 #Density of fiber in t/mm^3 #Kapitel 4.1 rho_m=2.7e-9*10 Kapitel 4.2
#Fall I: rho_m=1.3889E-07 Fall II: rho_m=1.3889E-09 #Kapitel 5: rho_m=2.4e-9

#Step
t_period=1.57e-5 #time-period in s #Kapitel 4.1: t_period=1.57e-5 #Kapitel 4.2
#Fall I: t_period=2.85E-08 #Kapitel 4.2 Fall II: t_period=2.86E-08 Kapitel 5: t_period=1.1e-4

#Traction Separation Law properties
K_nn=0 #Interface Stiffness in MPa
K_ss=0 #Interface Stiffness in MPa
K_tt=652 #Interface Stiffness in MPa/mm #Kapitel 4.1 K_tt=652 Kapitel 4.2 K_tt=160000 Kapitel 5: K_tt=151400

t_n=3.26 #Traction at Damage Initiation #Kapitel 4.1 t_n=3.26 Kapitel 4.2 t_n=1e6 Kapitel 5: t_n=3.26
t_s=3.26 #Traction at Damage Initiation #Kapitel 4.1 t_s=3.26 Kapitel 4.2 t_s=100 Kapitel 5: t_s=3.26
t_t=3.26 #Traction at Damage Initiation #Kapitel 4.1 t_t=3.26 Kapitel 4.2 t_t=100 Kapitel 5: t_t=75.7

s_f=0.0941 #Maximum separation in mm #Kapitel 4.1: s_f=0.0941 Kapitel 4.2: s_f=1e8 Kapitel 5: s_f=0.0011

#Friction Law properties
fric_coeff=1
Tau_lim=100
K_slip=160000

#Load properties
#Harmonische Weganregung
C_n=6.125e-2 #Load amplitude in mm #Kapitel 4.1 C_n=6.125e-2 Kapitel 5: C_n=0.0009
omega=1e5 #Circular frequency in 1/s #Kapitel 4.1 omega=1e5 Kapitel 5: omega=14280
#Linear steigende Normalspannung
t_start=5e-10
traction_mag=-5700 #Zugspannung am Faserende in MPa :Kapitel 4.2 Fall I: traction_mag=-5700 Fall I: traction_mag=-5720
pressure_mag=-150
#Verschiebung mit konstanter Geschwindigkeit
U_2=0.0011 #Verschiebung in mm

```

```

#Geometry
mdb.models['Model-1'].ConstrainedSketch(name='__profile__', sheetSize=0.1)
mdb.models['Model-1'].sketches['__profile__'].sketchOptions.setValues(
    decimalPlaces=3, viewStyle=AXISYM)
mdb.models['Model-1'].sketches['__profile__'].ConstructionLine(point1=(0.0,
    -0.05), point2=(0.0, 0.05))
mdb.models['Model-1'].sketches['__profile__'].FixedConstraint(entity=
    mdb.models['Model-1'].sketches['__profile__'].geometry[2])
mdb.models['Model-1'].sketches['__profile__'].rectangle(point1=(0.0, 0.0),
    point2=(r_f, 1_f+1_free))
mdb.models['Model-1'].sketches['__profile__'].CoincidentConstraint(
    addUndoState=False, entity1=
        mdb.models['Model-1'].sketches['__profile__'].vertices[0], entity2=
        mdb.models['Model-1'].sketches['__profile__'].geometry[2])
mdb.models['Model-1'].Part(dimensionality=AXISYMMETRIC, name='Fiber', type=
    DEFORMABLE_BODY)
mdb.models['Model-1'].parts['Fiber'].BaseShell(sketch=
    mdb.models['Model-1'].sketches['__profile__'])
del mdb.models['Model-1'].sketches['__profile__']
mdb.models['Model-1'].ConstrainedSketch(name='__profile__', sheetSize=0.1)
mdb.models['Model-1'].sketches['__profile__'].sketchOptions.setValues(
    decimalPlaces=3, viewStyle=AXISYM)
mdb.models['Model-1'].sketches['__profile__'].ConstructionLine(point1=(0.0,
    -0.05), point2=(0.0, 0.05))
mdb.models['Model-1'].sketches['__profile__'].FixedConstraint(entity=
    mdb.models['Model-1'].sketches['__profile__'].geometry[2])
mdb.models['Model-1'].sketches['__profile__'].rectangle(point1=(r_f, 0.0),
    point2=(r_f+1_r, 1_f))
mdb.models['Model-1'].Part(dimensionality=AXISYMMETRIC, name='Matrix', type=
    DEFORMABLE_BODY)
mdb.models['Model-1'].parts['Matrix'].BaseShell(sketch=
    mdb.models['Model-1'].sketches['__profile__'])
del mdb.models['Model-1'].sketches['__profile__']

mdb.models['Model-1'].parts['Fiber'].Surface(name='Surf-Fiber', side1Edges=
    mdb.models['Model-1'].parts['Fiber'].edges.getSequenceFromMask(([#2 ], ),
    ))
mdb.models['Model-1'].parts['Matrix'].Surface(name='Surf-Matrix', side1Edges=
    mdb.models['Model-1'].parts['Matrix'].edges.getSequenceFromMask(([#8 ], ),
    ))

#Material
mdb.models['Model-1'].Material(name='Material-Fiber')
mdb.models['Model-1'].materials['Material-Fiber'].Density(table=((rho_f, ),
    ))
mdb.models['Model-1'].materials['Material-Fiber'].Elastic(table=((E_f,
    nu_f), ))
mdb.models['Model-1'].Material(name='Material-Matrix')
mdb.models['Model-1'].materials['Material-Matrix'].Density(table=((rho_m, ),
    ))
mdb.models['Model-1'].materials['Material-Matrix'].Elastic(table=((E_m,
    nu_m), ))
mdb.models['Model-1'].HomogeneousSolidSection(material='Material-Fiber', name=
    'Section-Fiber', thickness=None)
mdb.models['Model-1'].parts['Fiber'].SectionAssignment(offset=0.0, offsetField=
    '', offsetType=MIDDLE_SURFACE, region=Region(
        faces=mdb.models['Model-1'].parts['Fiber'].faces.getSequenceFromMask(mask=(
            '#1 ', ), )), sectionName='Section-Fiber', thicknessAssignment=
    FROM_SECTION)
mdb.models['Model-1'].HomogeneousSolidSection(material='Material-Matrix', name=
    'Section-Matrix', thickness=None)
mdb.models['Model-1'].parts['Matrix'].SectionAssignment(offset=0.0,
    offsetField='', offsetType=MIDDLE_SURFACE, region=Region(
        faces=mdb.models['Model-1'].parts['Matrix'].faces.getSequenceFromMask(
            mask=('#1 ', ), )), sectionName='Section-Matrix', thicknessAssignment=
    FROM_SECTION)
mdb.models['Model-1'].rootAssembly.DatumCsysByThreePoints(coordSysType=
    CYLINDRICAL, origin=(0.0, 0.0, 0.0), point1=(1.0, 0.0, 0.0), point2=(0.0,
    0.0, -1.0))
mdb.models['Model-1'].rootAssembly.Instance(dependent=ON, name='Fiber-1', part=
    mdb.models['Model-1'].parts['Fiber'])
mdb.models['Model-1'].rootAssembly.Instance(dependent=ON, name='Matrix-1',
    part=mdb.models['Model-1'].parts['Matrix'])

#Step
mdb.models['Model-1'].ExplicitDynamicsStep(improvedDtMethod=ON, name=
    'Dynamic_ Explicit', previous='Initial', timePeriod=t_period)
mdb.models['Model-1'].fieldOutputRequests['F-Output-1'].setValues(variables=(
    'S', 'SVAVG', 'PE', 'PEVAVG', 'PEEQ', 'PEEQVAVG', 'LE', 'U', 'V', 'A',
    'RF', 'CSTRESS', 'CSDMG', 'EVF'))

#Interface-----

```

```

#mdb.models['Model-1'].ContactProperty('FakeProp')
#mdb.models['Model-1'].interactionProperties['FakeProp'].NormalBehavior(
#    allowSeparation=ON, constraintEnforcementMethod=DEFAULT,
#    pressureOverclosure=HARD)
#mdb.models['Model-1'].ContactProperty('CohesiveProp')
#mdb.models['Model-1'].interactionProperties['CohesiveProp'].CohesiveBehavior(
#    defaultPenalties=OFF, table=((K_nn, K_ss, K_tt), ))
#mdb.models['Model-1'].interactionProperties['CohesiveProp'].Damage(evolTable=(((
#    s_f, ), ), initTable=((t_n, t_s, t_t), ), useEvolution=ON)
#mdb.models['Model-1'].ContactExp(createStepName='Dynamic, Explicit', name=
#    'Cohesive-Interaction')
#mdb.models['Model-1'].interactions['Cohesive-Interaction'].includedPairs.setValuesInStep(
#    stepName='Dynamic, Explicit', useAllstar=ON)
#mdb.models['Model-1'].interactions['Cohesive-Interaction'].contactPropertyAssignments.appendInStep(
#    assignments=((GLOBAL, SELF, 'FakeProp'), (
#        mdb.models['Model-1'].rootAssembly.instances['Fiber-1'].surfaces['Surf-Fiber'],
#        mdb.models['Model-1'].rootAssembly.instances['Matrix-1'].surfaces['Surf-Matrix'],
#        'CohesiveProp')), stepName='Dynamic, Explicit')

if Interface==1:
    mdb.models['Model-1'].ContactProperty('Normal-Contact')
    mdb.models['Model-1'].interactionProperties['Normal-Contact'].NormalBehavior(
        allowSeparation=ON, constraintEnforcementMethod=DEFAULT,
        pressureOverclosure=HARD)
    mdb.models['Model-1'].ContactProperty('Traction Separation Law')
    mdb.models['Model-1'].interactionProperties['Traction Separation Law'].CohesiveBehavior(
        defaultPenalties=OFF, table=((K_nn, K_ss, K_tt), ))
    mdb.models['Model-1'].interactionProperties['Traction Separation Law'].Damage(
        evolTable=((s_f, ), ), initTable=((t_n, t_s, t_t), ), useEvolution=
        ON)
    mdb.models['Model-1'].ContactExp(createStepName='Dynamic, Explicit', name=
        'Traction Separation Law')
    mdb.models['Model-1'].interactions['Traction Separation Law'].includedPairs.setValuesInStep(
        stepName='Dynamic, Explicit', useAllstar=ON)
    mdb.models['Model-1'].interactions['Traction Separation Law'].contactPropertyAssignments.appendInStep(
        assignments=((GLOBAL, SELF, 'Normal-Contact'), (
            mdb.models['Model-1'].rootAssembly.instances['Fiber-1'].surfaces['Surf-Fiber'],
            mdb.models['Model-1'].rootAssembly.instances['Matrix-1'].surfaces['Surf-Matrix'],
            'Traction Separation Law')), stepName='Dynamic, Explicit')

elif Interface==2:
    mdb.models['Model-1'].ContactProperty('Friction')
    mdb.models['Model-1'].interactionProperties['Friction'].NormalBehavior(
        allowSeparation=ON, constraintEnforcementMethod=DEFAULT,
        pressureOverclosure=HARD)
    mdb.models['Model-1'].interactionProperties['Friction'].TangentialBehavior(
        dependencies=0, directionality=ISOTROPIC, elasticSlipStiffness=k_slip,
        formulation=PENALTY, fraction=0.005, maximumElasticSlip=FRACTION,
        pressureDependency=OFF, shearStressLimit=Tau_lim, slipRateDependency=OFF,
        table=((fric_coeff, ), ), temperatureDependency=OFF)
    mdb.models['Model-1'].SurfaceToSurfaceContactExp(clearanceRegion=None,
        createStepName='Dynamic, Explicit', datumAxis=None, initialClearance=0.0,
        interactionProperty='Friction', main=
        mdb.models['Model-1'].rootAssembly.instances['Fiber-1'].surfaces['Surf-Fiber'],
        , mechanicalConstraint=PENALTY, name='Friction', secondary=
        mdb.models['Model-1'].rootAssembly.instances['Matrix-1'].surfaces['Surf-Matrix'],
        , sliding=FINITE)

#mdb.models['Model-1'].ContactProperty('Normal-Contact')
#mdb.models['Model-1'].interactionProperties['Normal-Contact'].NormalBehavior(
#    allowSeparation=ON, constraintEnforcementMethod=DEFAULT,
#    pressureOverclosure=HARD)
#mdb.models['Model-1'].ContactProperty('Friction Law')
#mdb.models['Model-1'].interactionProperties['Friction Law'].TangentialBehavior(
#    dependencies=0, directionality=ISOTROPIC, elasticSlipStiffness=k_slip,
#    formulation=PENALTY, fraction=0.005, maximumElasticSlip=FRACTION,
#    pressureDependency=OFF, shearStressLimit=Tau_lim, slipRateDependency=OFF,
#    table=((fric_coeff, ), ), temperatureDependency=OFF)
#mdb.models['Model-1'].ContactExp(createStepName='Dynamic, Explicit', name='Friction Law')
#mdb.models['Model-1'].interactions['Friction Law'].includedPairs.setValuesInStep(
#    # stepName='Dynamic, Explicit', useAllstar=ON)
    mdb.models['Model-1'].interactions['Friction Law'].contactPropertyAssignments.appendInStep(
        # assignments=((GLOBAL, SELF, 'Normal-Contact'), (
        #     mdb.models['Model-1'].rootAssembly.instances['Fiber-1'].surfaces['Surf-Fiber'],
        #     mdb.models['Model-1'].rootAssembly.instances['Matrix-1'].surfaces['Surf-Matrix'],
        #     'Friction Law')), stepName='Dynamic, Explicit')

#Load-----
if Loadcase==1:
    mdb.models['Model-1'].TabularAmplitude(data=((t_start, t_start/t_period), (t_period, 1.0)), name=
        'Ramp', smooth=SOLVER_DEFAULT, timeSpan=STEP)
    mdb.models['Model-1'].Pressure(amplitude='Ramp', createStepName='Dynamic, Explicit',
        distributionType=UNIFORM, field='', magnitude=traction_mag, name='Fiber stress'
        , region=Region)
    sideEdges=mdb.models['Model-1'].rootAssembly.instances['Fiber-1'].edges.getSequenceFromMask(

```

```

        mask=('[#1 ], ), )))
mdb.models['Model-1'].Pressure(amplitude=UNSET, createStepName='Dynamic, Explicit',
    distributionType=UNIFORM, field='', magnitude=pressure_mag, name=
    'Normal stress on Interface', region=
    mdb.models['Model-1'].rootAssembly.instances['Matrix-1'].surfaces['Surf-Matrix'])
elif Loadcase==2:
    mdb.models['Model-1'].PeriodicAmplitude(a_0=0.0, data=((0.0, 1.0), ),
        frequency=omega, name='Harmonic', start=0.0, timeSpan=STEP)
    mdb.models['Model-1'].DisplacementBC(amplitude='Harmonic', createStepName=
        'Dynamic, Explicit', distributionType=UNIFORM, fieldName='', fixed=OFF,
        localCsys=None, name='Load', region=Region(
            edges=mdb.models['Model-1'].rootAssembly.instances['Fiber-1'].edges.getSequenceFromMask(
                mask=('[#1 ], ), )), u1=UNSET, u2=c_n, ur3=UNSET)
elif Loadcase==3:
    mdb.models['Model-1'].TabularAmplitude(data=((0, 0), (t_period, 1.0)), name=
        'Ramp', smooth=SOLVER_DEFAULT, timeSpan=STEP)
    mdb.models['Model-1'].DisplacementBC(amplitude='Ramp', createStepName=
        'Dynamic, Explicit', distributionType=UNIFORM, fieldName='', fixed=OFF,
        localCsys=None, name='Load', region=Region(
            edges=mdb.models['Model-1'].rootAssembly.instances['Fiber-1'].edges.getSequenceFromMask(
                mask=('[#4 ], ), )), u1=UNSET, u2=U_2, ur3=UNSET)

#Randbedingungen-----
if BC==2:
    mdb.models['Model-1'].EncastreBC(createStepName='Dynamic, Explicit', localCsys=None, name=
        'Encastre', region=Region(
            edges=mdb.models['Model-1'].rootAssembly.instances['Matrix-1'].edges.getSequenceFromMask(
                mask=('[#2 ], ), )))
elif BC==3:
    mdb.models['Model-1'].XsymmBC(createStepName='Dynamic, Explicit', localCsys=None, name=
        'x-symm', region=Region(
            faces=mdb.models['Model-1'].rootAssembly.instances['Fiber-1'].faces.getSequenceFromMask(
                mask=('[#1 ], ), )))
elif BC==4:
    mdb.models['Model-1'].EncastreBC(createStepName='Dynamic, Explicit', localCsys=None, name=
        'Encastre', region=Region(
            edges=mdb.models['Model-1'].rootAssembly.instances['Matrix-1'].edges.getSequenceFromMask(
                mask=('[#2 ], ), )))
    mdb.models['Model-1'].XsymmBC(createStepName='Dynamic, Explicit', localCsys=None, name=
        'x-symm', region=Region(
            faces=mdb.models['Model-1'].rootAssembly.instances['Fiber-1'].faces.getSequenceFromMask(
                mask=('[#1 ], ), )))
#Mesh-----
mdb.models['Model-1'].parts['Matrix'].seedPart(deviationFactor=0.1,
    minSizeFactor=0.1, size=r_f/5)
mdb.models['Model-1'].parts['Matrix'].generateMesh()
mdb.models['Model-1'].parts['Fiber'].seedPart(deviationFactor=0.1,
    minSizeFactor=0.1, size=(r_f/30))
mdb.models['Model-1'].parts['Fiber'].generateMesh()
mdb.models['Model-1'].rootAssembly.regenerate()

#Job
mdb.Job(activateLoadBalancing=False, atTime=None, contactPrint=OFF,
    description='', echoPrint=OFF, explicitPrecision=SINGLE, historyPrint=OFF,
    memory=90, memoryUnits=PERCENTAGE, model='Model-1', modelPrint=OFF,
    multiprocessingMode=DEFAULT, name='Job-1', nodalOutputPrecision=SINGLE,
    numCpus=1, numDomains=1, numThreadsPerMpIProcess=1, queue=None,
    resultsFormat=ODB, scratch='', type=ANALYSIS, userSubroutine='', waitHours=
    0, waitMinutes=0)

```

C. Anhang C

PYTHON-Skript für VierTELmodell

```

# -*- coding: mbcs -*-
from part import *
from material import *
from section import *
from assembly import *
from step import *
from interaction import *
from load import *
from mesh import *
from optimization import *
from job import *
from sketch import *
from visualization import *
from connectorBehavior import *

#Ersteller: Alexander Jannsen Matrikelnummer: 2308580
#Parameter Kapitel 4.1: Azzam DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.09.030

```

```

#Parameter Kapitel 4.2: Sridhar et al. DOI:https://doi.org/10.1016/S0022-5096(03)00035-8
#Parameter Kapitel 5: Scheffler et al. https://doi.org/10.1016/j.cemconcomp.2017.08.009

#Parameters
#Fälle
Interface=1 #1: Traction Separation Law bzw. Reibung mit Surface-Based Cohesive Behavior, 2: Reibung mit Shear-stress versus elastic slip
Loadcase=2 #1: Linear steigende Normalspannung, 2: Harmonische Weganregung, 3: Verschiebung mit konstanter Geschwindigkeit
BC=2 #1: Keine RB, 2: Einspannung, 3: x-Symmetrie Faser 4: Symmetrie und Einspannung

#Geometry
r=0.01 #Radius of fiber in mm
l_f=8 #Length of fiber in mm #Kapitel 4.1: l_f=5 #Kapitel 4.2: l_f=0.4 #Kapitel 5: l_f=0.4
t_r=0.00581 #Stärke der Matrix in mm
l_free=0.0 #Free length in mm #Kapitel 4.1: l_free=0.0 #Kapitel 4.2: l_free=0.0 #Kapitel 5: l_free=0.03
#Material
E_f=72000 #Youngs Modulus of fiber in MPa #Kapitel 4.1: E_f=72000 #Kapitel 4.2: E_f=100000 #Kapitel 5: E_f=78000
nu_f=0.33 #Poissons ratio #Kapitel 4.1: nu_f=0.33 #Kapitel 4.2: nu_f=0.3 #Kapitel 5: nu_f=0.17
rho_f=2.7e-9 #Density of fiber in t/mm³ #Kapitel 4.1 rho_f=2.7e-9 Kapitel 4.2 rho_f=3.3654E-08 #Kapitel 5: rho_f=2.0e-9
E_m=72000*10 #Youngs Modulus of fiber in MPa #Kapitel 4.1: E_m=72000*10 #Kapitel 4.2: E_m=46296 #Kapitel 5: E_m=28000
nu_m=0.33 #Poissons ratio #Kapitel 4.1: nu_m=0.33 Kapitel 4.2: nu_m=0.25 #Kapitel 5: nu_m=0.2
rho_m=2.7e-9 #Density of fiber in t/mm³ #Kapitel 4.1 rho_m=2.7e-9*10 Kapitel 4.2
#Fall I: rho_m=1.3889E-07 Fall II: rho_m=1.3889E-09 #Kapitel 5: rho_m=2.4e-9

#Step
t_period=1.57e-5 #time-period in s #Kapitel 4.1: t_period=1.57e-5 #Kapitel 4.2
#Fall I: t_period=2.85E-08 #Kapitel 4.2 Fall II: t_period=2.86E-08 Kapitel 5: t_period=1.1e-4

#Traction Separation Law properties
K_nn=0 #Interface Stiffness in MPa
K_ss=0 #Interface Stiffness in MPa
K_tt=652 #Interface Stiffness in MPa/mm #Kapitel 4.1 K_tt=652 Kapitel 4.2 K_tt=160000 Kapitel 5: K_tt=151400

t_n=3.26 #Traction at Damage Initiation #Kapitel 4.1 t_n=3.26 Kapitel 4.2 t_n=1e6 Kapitel 5: t_n=3.26
t_s=3.26 #Traction at Damage Initiation #Kapitel 4.1 t_s=3.26 Kapitel 4.2 t_s=100 Kapitel 5: t_s=3.26
t_t=3.26 #Traction at Damage Initiation #Kapitel 4.1 t_t=3.26 Kapitel 4.2 t_t=100 Kapitel 5: t_t=75.7

s_f=0.0941 #Maximum separation in mm #Kapitel 4.1: s_f=0.0941 Kapitel 4.2: s_f=1e8 Kapitel 5: s_f=0.0011

#Friction Law properties
fric_coeff=1
Tau_lim=100
K_slip=160000

#Load properties
#Harmonische Weganregung
C_n=6.125e-2 #Load amplitude in mm #Kapitel 4.1 C_n=6.125e-2 Kapitel 5: C_n=0.0009
omega=1e5 #Circular frequency in 1/s #Kapitel 4.1 omega=1e5 Kapitel 5: omega=14280
#Linear steigende Normalspannung
t_start=5e-10
traction_mag=-5700 #Zugspannung am Faserende in MPa :Kapitel 4.2 Fall I: traction_mag=-5700 Fall II: traction_mag=-5720
pressure_mag=-150
#Verschiebung mit konstanter Geschwindigkeit
U_2=0.0011

#Geometrie
mdb.models['Model-1'].ConstrainedSketch(name='__profile__', sheetSize=0.001)
mdb.models['Model-1'].sketches['__profile__'].sketchOptions.setValues(
    decimalPlaces=5)
mdb.models['Model-1'].sketches['__profile__'].rectangle(point1=(0.0, 0.0),
    point2=(-r, r))
mdb.models['Model-1'].sketches['__profile__'].FilletByRadius(curve1=
    mdb.models['Model-1'].sketches['__profile__'].geometry[4], curve2=
    mdb.models['Model-1'].sketches['__profile__'].geometry[3], nearPoint1=(-
    0.000101352095953189, 3.43709980370477e-05), nearPoint2=(-
    5.91968127992004e-05, 9.86200175248086e-05), radius=r)
mdb.models['Model-1'].Part(dimensionality=THREE_D, name='Fiber', type=
    DEFORMABLE_BODY)
mdb.models['Model-1'].parts['Fiber'].BaseSolidExtrude(depth=l_f+l_free, sketch=
    mdb.models['Model-1'].sketches['__profile__'])
del mdb.models['Model-1'].sketches['__profile__']
mdb.models['Model-1'].ConstrainedSketch(name='__profile__', sheetSize=0.001)
mdb.models['Model-1'].sketches['__profile__'].sketchOptions.setValues(
    decimalPlaces=5)
mdb.models['Model-1'].sketches['__profile__'].rectangle(point1=(0.0, 0.0),
    point2=(-(r+t_r), r+t_r))
mdb.models['Model-1'].sketches['__profile__'].FilletByRadius(curve1=
    mdb.models['Model-1'].sketches['__profile__'].geometry[4], curve2=
    mdb.models['Model-1'].sketches['__profile__'].geometry[3], nearPoint1=(-
    0.000406043254770339, 0.000142564589623362), nearPoint2=(-
    0.000187569530680776, 0.000398847740143538), radius=r+t_r)
mdb.models['Model-1'].sketches['__profile__'].CircleByCenterPerimeter(center=(
    0.0, 0.0), point1=(-r, 0.0))
mdb.models['Model-1'].sketches['__profile__'].CoincidentConstraint(

```

```

    addUndoState=False, entity1=
    mdb.models['Model-1'].sketches['__profile_'].vertices[6], entity2=
    mdb.models['Model-1'].sketches['__profile_'].geometry[5])
mdb.models['Model-1'].sketches['__profile_'].autoTrimCurve(curve1=
    mdb.models['Model-1'].sketches['__profile_'].geometry[7], point1=(

    -1.61092029884488e-05, -9.84801154118031e-05))
mdb.models['Model-1'].sketches['__profile_'].autoTrimCurve(curve1=
    mdb.models['Model-1'].sketches['__profile_'].geometry[5], point1=(

    -4.79122973047197e-05, -4.27872873842716e-06))
mdb.models['Model-1'].sketches['__profile_'].autoTrimCurve(curve1=
    mdb.models['Model-1'].sketches['__profile_'].geometry[2], point1=(

    -3.66446329280734e-06, 6.63723039906472e-05))
mdb.models['Model-1'].Part(dimensions=THREE_D, name='Matrix', type=
    DEFORMABLE_BODY)
mdb.models['Model-1'].parts['Matrix'].BaseSolidExtrude(depth=l_f,
    sketch=mdb.models['Model-1'].sketches['__profile_'])
del mdb.models['Model-1'].sketches['__profile_']
mdb.models['Model-1'].parts['Fiber'].Surface(name='Surf-Fiber', side1Faces=
    mdb.models['Model-1'].parts['Fiber'].faces.getSequenceFromMask(('[#1'], ))
)
mdb.models['Model-1'].parts['Matrix'].Surface(name='Surf-Matrix',
    side1Faces=
    mdb.models['Model-1'].parts['Matrix'].faces.getSequenceFromMask((
    '[#4]', ), ))
#Materialien
mdb.models['Model-1'].Material(name='Material-Fiber')
mdb.models['Model-1'].materials['Material-Fiber'].Density(table=((rho_f, ),

))
mdb.models['Model-1'].materials['Material-Fiber'].Elastic(table=((E_f,
    nu_f), ))
mdb.models['Model-1'].Material(name='Material-Matrix')
mdb.models['Model-1'].materials['Material-Matrix'].Density(table=((rho_m, ),

))
mdb.models['Model-1'].materials['Material-Matrix'].Elastic(table=((E_m,
    nu_m), ))
mdb.models['Model-1'].HomogeneousSolidSection(material='Material-Fiber', name=
    'Section-Fiber', thickness=None)
mdb.models['Model-1'].HomogeneousSolidSection(material='Material-Matrix', name=
    'Section-Matrix', thickness=None)
mdb.models['Model-1'].parts['Fiber'].SectionAssignment(offset=0.0, offsetField=
    '', offsetType=MIDDLE_SURFACE, region=Region(
    cells=mdb.models['Model-1'].parts['Fiber'].cells.getSequenceFromMask(mask=

    '[#1'], ), ), sectionName='Section-Fiber', thicknessAssignment=
    FROM_SECTION)
mdb.models['Model-1'].parts['Matrix'].SectionAssignment(offset=0.0,
    offsetField='', offsetType=MIDDLE_SURFACE, region=Region(
    cells=mdb.models['Model-1'].parts['Matrix'].cells.getSequenceFromMask(
    mask=('[#1'], ), ), sectionName='Section-Matrix', thicknessAssignment=
    FROM_SECTION)
#Assembly
mdb.models['Model-1'].rootAssembly.DatumCsysByDefault(CARTESIAN)
mdb.models['Model-1'].rootAssembly.Instance(dependent=ON, name='Fiber-1', part=
    mdb.models['Model-1'].parts['Fiber'])
mdb.models['Model-1'].rootAssembly.Instance(dependent=ON, name=
    'Matrix-1', part=mdb.models['Model-1'].parts['Matrix'])

#Step
mdb.models['Model-1'].ExplicitDynamicsStep(improvedDtMethod=ON, name=
    'Dynamic_Explicit', previous='Initial', timePeriod=t_period)
mdb.models['Model-1'].fieldOutputRequests['F-Output-1'].setValues(variables=(

    'S', 'SVAVG', 'PE', 'PEWAVG', 'PEEQ', 'PEEQWAVG', 'LE', 'U', 'V', 'A',
    'RF', 'CSTRESS', 'CSDMG', 'EVF))
#Interaction
if Interface==1:
    mdb.models['Model-1'].ContactProperty('Cohesive')
    mdb.models['Model-1'].interactionProperties['Cohesive'].CohesiveBehavior(
        defaultPenalties=OFF, table=((0.0, 0.0, 652.0), ))
    mdb.models['Model-1'].interactionProperties['Cohesive'].Damage(evolTable=((

        0.0941, ), ), initTable=((3.26, 3.26, 3.26), ), useEvolution=ON)
    mdb.models['Model-1'].ContactProperty('Normal Contact')
    mdb.models['Model-1'].interactionProperties['Normal Contact'].NormalBehavior(
        allowSeparation=ON, constraintEnforcementMethod=DEFAULT,
        pressureOverclosure=HARD)
    mdb.models['Model-1'].ContactExp(createStepName='Dynamic_Explicit', name=
        'Cohesive')
    mdb.models['Model-1'].interactions['Cohesive'].includedPairs.setValuesInStep(
        stepName='Dynamic_Explicit', useAllstar=ON)
    mdb.models['Model-1'].interactions['Cohesive'].contactPropertyAssignments.appendInStep(
        assignments=((GLOBAL, SELF, 'Normal Contact'), (
        mdb.models['Model-1'].rootAssembly.instances['Fiber-1'].surfaces['Surf-Fiber'],
        mdb.models['Model-1'].rootAssembly.instances['Matrix-1'].surfaces['Surf-Matrix'],
        'Cohesive'))), stepName='Dynamic_Explicit')

```

```

    elif Interface==2:
        mdb.models['Model-1'].ContactProperty('Friction')
        mdb.models['Model-1'].interactionProperties['Friction'].NormalBehavior(
            allowSeparation=ON, constraintEnforcementMethod=DEFAULT,
            pressureOverclosure=HARD)
        mdb.models['Model-1'].interactionProperties['Friction'].TangentialBehavior(
            dependencies=0, directionality=ISOTROPIC, elasticSlipStiffness=K_slip,
            formulation=PENALTY, friction=0.005, maximumElasticSlip=FRACTION,
            pressureDependency=OFF, shearStressLimit=Tau_lim, slipRateDependency=OFF,
            table=((fric_coeff, ), ), temperatureDependency=OFF)
        mdb.models['Model-1'].SurfaceToSurfaceContactExp(clearanceRegion=None,
            createStepName='Dynamic, Explicit', datumAxis=None, initialClearance=0.0,
            interactionProperty='Friction', main=
        mdb.models['Model-1'].rootAssembly.instances['Fiber-1'].surfaces['Surf-Fiber']
            , mechanicalConstraint=PENALTY, name='Friction Law', secondary=
        mdb.models['Model-1'].rootAssembly.instances['Matrix-1'].surfaces['Surf-Matrix']
            , sliding=FINITE)

#Load-----
if Loadcase==1:
    mdb.models['Model-1'].TabularAmplitude(data=((t_start, t_start/t_period), (t_period, 1.0)), name=
        'Ramp', smooth=SOLVER_DEFAULT, timeSpan=STEP)
    mdb.models['Model-1'].Pressure(amplitude='Ramp', createStepName=
        'Dynamic, Explicit', distributionType=UNIFORM, field='', magnitude=traction_mag,
        name='Fiber stress', region=Region(
            sideFaces=mdb.models['Model-1'].rootAssembly.instances['Fiber-1'].faces.getSequenceFromMask(
                mask=('[#10 ]', ), )))
    mdb.models['Model-1'].Pressure(amplitude=UNSET, createStepName='Dynamic, Explicit',
        distributionType=UNIFORM, field='', magnitude=pressure_mag, name=
        'Normal stress on Interface', region=
        mdb.models['Model-1'].rootAssembly.instances['Matrix-1'].surfaces['Surf-Matrix'])

elif Loadcase==2:
    mdb.models['Model-1'].PeriodicAmplitude(a_0=0.0, data=((0.0, 1.0), ),
        frequency=omega, name='Harmonic', start=0.0, timeSpan=STEP)
    mdb.models['Model-1'].DisplacementBC(amplitude='Harmonic', createStepName=
        'Dynamic, Explicit', distributionType=UNIFORM, fieldName='', fixed=OFF,
        localCsys=None, name='Load', region=Region(
            faces=mdb.models['Model-1'].rootAssembly.instances['Fiber-1'].faces.getSequenceFromMask(
                mask=('[#8 ]', ), )), u1=UNSET, u2=UNSET, u3=C_n, ur1=UNSET, ur2=UNSET,
        ur3=UNSET)

elif Loadcase==3:
    mdb.models['Model-1'].TabularAmplitude(data=((0, 0), (t_period, 1.0)), name=
        'Ramp', smooth=SOLVER_DEFAULT, timeSpan=STEP)
    mdb.models['Model-1'].DisplacementBC(amplitude='Ramp', createStepName=
        'Dynamic, Explicit', distributionType=UNIFORM, fieldName='', fixed=OFF,
        localCsys=None, name='Load', region=Region(
            faces=mdb.models['Model-1'].rootAssembly.instances['Fiber-1'].faces.getSequenceFromMask(
                mask=('[#8 ]', ), )), u1=UNSET, u2=UNSET, u3=U_2, ur1=UNSET, ur2=UNSET,
        ur3=UNSET)

#Randbedingungen-----
mdb.models['Model-1'].XsymmBC(createStepName='Dynamic, Explicit', localCsys=None
    , name='x_symm', region=Region(
        faces=mdb.models['Model-1'].rootAssembly.instances['Fiber-1'].faces.getSequenceFromMask(
            mask=('[#2 ]', ), )+\
    mdb.models['Model-1'].rootAssembly.instances['Matrix-1'].faces.getSequenceFromMask(
        mask=('[#2 ]', ), )))
mdb.models['Model-1'].YsymmBC(createStepName='Dynamic, Explicit', localCsys=None
    , name='y_symm', region=Region(
        faces=mdb.models['Model-1'].rootAssembly.instances['Fiber-1'].faces.getSequenceFromMask(
            mask=('[#4 ]', ), )+\
    mdb.models['Model-1'].rootAssembly.instances['Matrix-1'].faces.getSequenceFromMask(
        mask=('[#8 ]', ), )))
if BC==2:
    mdb.models['Model-1'].EncastreBC(createStepName='Dynamic, Explicit', localCsys=
        None, name='Encastre', region=Region(
            faces=mdb.models['Model-1'].rootAssembly.instances['Matrix-1'].faces.getSequenceFromMask(
                mask=('[#1 ]', ), )))
elif BC==3:
    mdb.models['Model-1'].XsymmBC(createStepName='Dynamic, Explicit', localCsys=
        None, name='x-symm-Fiber', region=Region(
            faces=mdb.models['Model-1'].rootAssembly.instances['Fiber-1'].faces.getSequenceFromMask(
                mask=('[#1 ]', ), )))
    mdb.models['Model-1'].YsymmBC(createStepName='Dynamic, Explicit', localCsys=
        None, name='y-symm-Fiber', region=Region(
            faces=mdb.models['Model-1'].rootAssembly.instances['Fiber-1'].faces.getSequenceFromMask(
                mask=('[#1 ]', ), )))
elif BC==4:
    mdb.models['Model-1'].EncastreBC(createStepName='Dynamic, Explicit', localCsys=
        None, name='Encastre', region=Region(
            faces=mdb.models['Model-1'].rootAssembly.instances['Matrix-1'].faces.getSequenceFromMask(
                mask=('[#1 ]', ), )))
    mdb.models['Model-1'].XsymmBC(createStepName='Dynamic, Explicit', localCsys=
        None, name='x-symm-Fiber', region=Region(

```

```
faces=mdb.models['Model-1'].rootAssembly.instances['Fiber-1'].faces.getSequenceFromMask(
    mask='[#1 ]', ))
mdb.models['Model-1'].YsymmBC(createStepName='Dynamic, Explicit', localCsys=
    None, name='y-symm-Fiber', region=Region(
        faces=mdb.models['Model-1'].rootAssembly.instances['Fiber-1'].faces.getSequenceFromMask(
            mask='[#1 ]', )))
#Mesh-----
mdb.models['Model-1'].parts['Matrix'].seedPart(deviationFactor=0.1,
    minSizeFactor=0.1, size=r/5)
mdb.models['Model-1'].parts['Matrix'].generateMesh()
mdb.models['Model-1'].parts['Fiber'].seedPart(deviationFactor=0.1,
    minSizeFactor=0.1, size=(6*r)/30)
mdb.models['Model-1'].parts['Fiber'].generateMesh()
mdb.models['Model-1'].rootAssembly.regenerate()

#Job
mdb.Job(activateLoadBalancing=False, atTime=None, contactPrint=OFF,
    description='', echoPrint=OFF, explicitPrecision=SINGLE, historyPrint=OFF,
    memory=90, memoryUnits=PERCENTAGE, model='Model-1', modelPrint=OFF,
    multiprocessingMode=DEFAULT, name='Job-1', nodalOutputPrecision=SINGLE,
    numCpus=1, numDomains=1, numThreadsPerMpIProcess=1, queue=None,
    resultsFormat=ODB, scratch='', type=ANALYSIS, userSubroutine='', waitHours=
    0, waitMinutes=0)
```



Erklärung zur selbstständigen Bearbeitung einer Abschlussarbeit

Gemäß der Allgemeinen Prüfungs- und Studienordnung ist zusammen mit der Abschlussarbeit eine schriftliche Erklärung abzugeben, in der der Studierende bestätigt, dass die Abschlussarbeit „– bei einer Gruppenarbeit die entsprechend gekennzeichneten Teile der Arbeit [§ 18 Abs. 1 APSO-TI-BM bzw. § 21 Abs. 1 APSO-INGI] – ohne fremde Hilfe selbstständig verfasst und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt wurden. Wörtlich oder dem Sinn nach aus anderen Werken entnommene Stellen sind unter Angabe der Quellen kenntlich zu machen.“

Quelle: § 16 Abs. 5 APSO-TI-BM bzw. § 15 Abs. 6 APSO-INGI

Dieses Blatt, mit der folgenden Erklärung, ist nach Fertigstellung der Abschlussarbeit durch den Studierenden auszufüllen und jeweils mit Originalunterschrift als letztes Blatt in das Prüfungsexemplar der Abschlussarbeit einzubinden.

Eine unrichtig abgegebene Erklärung kann -auch nachträglich- zur Ungültigkeit des Studienabschlusses führen.

Erklärung zur selbstständigen Bearbeitung der Arbeit

Hiermit versichere ich,

Jannsen

Name:

Alexander

Vorname:

dass ich die vorliegende -bitte auswählen- bzw. bei einer Gruppenarbeit die entsprechend gekennzeichneten Teile der Arbeit – mit dem Thema:

Untersuchung numerischer Modelle hinsichtlich ihrer Eignung zur
Beschreibung des dynamischen Faserauszuges

ohne fremde Hilfe selbstständig verfasst und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Wörtlich oder dem Sinn nach aus anderen Werken entnommene Stellen sind unter Angabe der Quellen kenntlich gemacht.

- die folgende Aussage ist bei Gruppenarbeiten auszufüllen und entfällt bei Einzelarbeiten -

Die Kennzeichnung der von mir erstellten und verantworteten Teile der -bitte auswählen- ist erfolgt durch:

Hamburg

Ort

13.03.2025

Datum

Unterschrift im Original