

BACHELORARBEIT

Spektrale Optimierung von Licht- und Pigmentfarbmischungen zur gezielten Er- zeugung von Metamerieeffekten

vorgelegt am 11.08.2025
von Malte Stiehl

Erstprüferin: Prof. Dr. Carolin Liedtke
Zweitprüfer: Fabian Oving

**HOCHSCHULE FÜR ANGEWANDTE
WISSENSCHAFTEN HAMBURG**

Department Medientechnik
Finkenau 35
20081 Hamburg

Zusammenfassung

Metamerie – das Phänomen, dass spektral unterschiedliche Materialien unter bestimmten Lichtbedingungen farbgleich erscheinen – wird in technischen Kontexten meist als zu vermeidendes Problem behandelt. Die Bachelorarbeit hingegen verfolgt einen entgegengesetzten Ansatz: das gezielte Herbeiführen von Metamerieeffekten im Zusammenspiel mit einer multispektralen Lichtquelle für künstlerische Zwecke. Dabei soll sich der Farbton der Beleuchtung nicht wahrnehmbar verändern.

Unter Verwendung eines achtkanaligen LED-Scheinwerfers wurden 17 verschiedene Lichtmischungen erzeugt. Mithilfe eines Optimierungsverfahrens wurden diese so berechnet, dass alle denselben Farbtort aufweisen, sich in ihrer spektralen Zusammensetzung jedoch deutlich unterscheiden. Anschließend wurden Pigmentkombinationen bestimmt, die unter einer dieser Lichtmischungen einen farblich übereinstimmen, unter den anderen jedoch möglichst große Abweichungen zeigen.

Die Berechnungen erfolgten auf Basis der Zwei-Konstanten-Theorie nach Kubelka-Munk. Die Ergebnisse wurden mit dem gewichteten Metamerie-Index nach Nimeroff-Yurow sowie dem Farbabstand ΔE_{00} bewertet. Ziel der Arbeit ist es, für verschiedene Farbbereiche exemplarische Metameriepaare zu entwickeln und deren Verhalten unter wechselnden spektralen Bedingungen messtechnisch zu analysieren. Die Arbeit leistet damit einen Beitrag zur Erforschung neuer künstlerischer Darstellungstechniken, bei denen Farbveränderung als gezieltes Gestaltungsmittel eingesetzt wird.

Abstract

Metamerism describes the phenomenon in which spectrally distinct materials appear identical in color under specific lighting conditions. In technical contexts, it is typically treated as an issue to be minimized. This bachelor's thesis, however, takes the opposite approach: it explores the intentional creation of metameric effects for artistic purposes, in conjunction with a multispectral light source. The objective is to induce perceptual color shifts in materials without any visible change in the illumination itself.

An eight-channel LED spotlight was used to generate 17 spectrally distinct light mixtures, based on dimmer values computed through nonlinear optimization. For these illuminations, pigment combinations were identified that match in appearance under one light spectrum but diverge significantly under others. The Two-constant Kubelka-Munk theory was used to predict the paint mixtures. The results were evaluated using the weighted metamerism index (Nimeroff-Yurow) and the CIEDE2000 color difference formula. This work aims to contribute to the development of novel artistic strategies using controlled colour shifts as an expressive medium.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	vii
1 Einleitung	8
2 Theoretische Grundlagen	9
2.1 Farbräume und Farbabstand	9
2.1.1 Farbräume	10
2.1.2 Farbabstand	16
2.2 Metamerie	18
2.2.1 Quantifizierung von Metamerie	19
2.2.2 Farbkonsistenz	21
2.3 Additive Farbmischung	21
2.3.1 Farbmischung mit n Lichtquellen	22
2.3.2 Lösungsansätze	23
2.4 Subtraktive Farbmischung	24
2.5 Mischung von Pigmentfarben	25
2.5.1 Gesetz von Kubelka und Munk	26
2.5.2 Saunderson- Korrektur	30
2.5.3 Farbrezepturberechnung	32
3 Konzepte	32
3.1 Anforderungsanalyse	32
3.2 Pigmentauswahl	34
3.3 Bestimmung der Lichtmischungen	36
3.3.1 Berechnung der Lichtfarbmischungen	37
3.4 Mischung von Metameren Pigmentfarben	38
3.4.1 Algorithmus zur Berechnung der metameren Farbpaare	39
3.4.2 Bestimmung der Referenzen	40
3.5 Implementierung in Python	42

3.5.1	Klassendefinitionen	42
3.5.2	Farbmetrik	42
3.5.3	Optimierung von Licht und Pigmentmischungen.....	43
4	Überprüfung der Konzepte	43
4.1	Teilversuch 1: Lichtmischungen.....	45
4.1.1	Messaufbau	45
4.1.2	Messung von Spektrum und Farbort der LEDs.....	46
4.1.3	Berechnung der Dimmerwerte für den Scheinwerfer.....	49
4.1.4	Ergebnis der Messung	50
4.2	Teilversuch 2: Erstellen der K und S Datenbank / Mischalgorithmus.....	54
4.2.1	Bestimmung der K- und S-Werte.....	54
4.2.2	Berechnung und Überprüfung der Mischung	56
4.3	Teilversuch 3: Farbortmessung von metameren Farbpaaren bei unterschiedlichen Beleuchtungsspektren	59
4.3.1	Berechnung und Korrektur des Rezeptes	59
4.3.2	Zwischenergebnis.....	62
5	Diskussion.....	63
5.1	Zusammenfassung der Ergebnisse	63
5.2	Reflexion und Fazit.....	64
5.3	Ausblick.....	65
	Literaturverzeichnis.....	67
	Anhang.....	69
	Eigenständigkeitserklärung	74

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 2.1	Normspektralwertfunktionendes CIE 1931 Standardbeobachter	12
Abbildung 2.2	CIE 1931 Normfarbtafel.....	14
Abbildung 2.3	Schematische Darstellung des CIELAB Farbraums.....	15
Abbildung 2.4	Zulässige Farbtoleranzen für Pulverbeschichtungen in der Architektur	17
Abbildung 2.5	Wahrnehmung von Farbdifferenzen	18
Abbildung 2.6	Farbmischung in Pigmentfarben.....	25
Abbildung 2.7	Nichtlinearität beim Mischen von Pigmentfarben.....	26
Abbildung 2.8	Mögliche Ereignisse für Photonen in einem trüben Medium.....	27
Abbildung 2.9	Vereinfachtes Modell des Lichtflusses durch eine Farbschicht	27
Abbildung 3.1	Aufnahme der Reflexionsspektren von Pigmentproben mit dem cm2500c	35
Abbildung 3.2	Pigmentauswahl-Orangetöne.....	36
Abbildung 3.3	Schema zur Berechnung von metameren Farbmischungen.....	40
Abbildung 4.1	Arbeitsschritte im Versuchsablauf.....	44
Abbildung 4.2	Messaufbau im Schwarzen Labor der HAW Hamburg.....	46
Abbildung 4.3:	Gemessene Spektren der Farbkanäle des ETC Source4 Lustr S3	47
Abbildung 4.4	Linearitätsprüfung des Rot-Kanals in Dimmerschritten von 10%	48
Abbildung 4.5	Abweichung vom Linearen Verhalten beim Amber-Kanal des Source4.	48
Abbildung 4.6	Berechnete Spektren der Lichtmischungen	50
Abbildung 4.7	Farborte der Lichtmischungen in der CIE x-y-Ebene.	51
Abbildung 4.8	Vergleich zwischen berechnetem und gemessenem Spektrum R_{min}	52
Abbildung 4.9	Abnahme der Lichtleistung verschiedener LEDs bei steigender Temperatur ..	53
Abbildung 4.10	Farbortverschiebung der Lichtmischung L_{max}	54
Abbildung 4.11	Anfertigen der Farbproben	55
Abbildung 4.12	Testmischungen mit und ohne Saunderson-Korrektur	56
Abbildung 4.13	Analyse fehlerhafter K- und S-Werte am Beispiel von Hokkaido Orange	57
Abbildung 4.14	Absorptionskoeffizient K als Funktion von (Rp) und (Rt)	58
Abbildung 4.15	Reflexionsspektren der Pigmentfarbmischungen	61

1 Einleitung

Farbe fasziniert und inspiriert. So alltäglich sie uns umgibt, so rätselhaft bleibt sie auch. Seit jeher ist Farbe ein wichtiger Bestandteil des menschlichen Lebens aller Kulturen – in Kunst, Religion und Wissenschaft trägt sie Symbolik, Emotionen und befördert neue Ideen. Über Jahrhunderte hinweg gehörten bestimmte Farbstoffe zu den begehrtesten Materialien der Welt. Philosophen wie Wittgenstein widmeten dem Thema ganze Bände. Farbe reizt zur Reflexion – gerade, weil sie sich zumeist der eindeutigen Beschreibung entzieht. Wer hat sich als Kind nicht gefragt, ob der blaue Himmel von anderen in der gleichen Farbe gesehen wird? Unsere Wahrnehmung von Farbe lässt sich keiner direkten physikalischen Größe zuordnen. Licht ist die Basis des (Farb)sehens – und dennoch ist Farbe nicht einfach messbares Licht. Der visuelle Eindruck entsteht erst in unserem Gehirn – als Zusammenspiel von physikalischem Reiz, physiologischer Verarbeitung und psychischer Interpretation. Wie schwierig es ist, das Phänomen Farbe messbar zu machen, zeigt die in Kapitel 2.1 beschriebene Evolution der wissenschaftlichen Modelle, die bis heute andauert.

Mein eigener Zugang zur Farbe ist stark durch die Malerei geprägt. Wie viele andere Maler beschäftigte mich früh die Frage, was Malerei im digitalen Zeitalter ausmacht. Während digitale Bilder abstrakt als Zahlen existieren, besitzt die Malerei eine unmittelbare physische Präsenz. Farben in der Malerei sind stoffliche Substanzen mit eigener Materialität – sie besitzen Transparenz, Körper und Struktur; sie trocknen, glänzen, altern – und verändern ihr Aussehen je nachdem, unter welchem Licht sie betrachtet werden.

Ein besonders interessantes Phänomen ist das der Metamerie: Zwei Farben erzeugen den gleichen Farbeindruck beim Betrachter, obwohl die spektrale Zusammensetzung des Farbreizes verschieden ist. In industriellen Zusammenhängen wird dies als Problem wahrgenommen, da in der Regel ein konstanter Farbeindruck unter allen Bedingungen erwünscht ist. Entsprechend behandeln die meisten wissenschaftlichen Publikationen das Thema, wie sich Metamerie minimieren lässt. In der Kunst hingegen eröffnen sich gerade in diesen Grenzbereichen neue Ausdrucksmöglichkeiten. Metamerie wirft ein Licht auf die Differenz zwischen physikalischem Reiz und subjektivem Farbeindruck und macht die Grenzen des Sichtbaren sinnlich erfahrbar. Damit hat es das Potential, das Verständnis von Farbe auf phänomenologischer Ebene zu erweitern und metaphorisch Fragen nach Wahrnehmung und Realität aufzuwerfen. Wissenschaftliche Forschung zur gezielten Erzeugung von metameren Effekten für künstlerische Zwecke gibt

es bislang recht wenig. Eine Ausnahme bildet die Arbeit von Miyazaki et al. (2013, 2015), die sich explizit mit den künstlerischen Anwendungen beschäftigt. Ihr Ansatz bezieht sich allerdings explizit auf die Beleuchtung mit monochromatischem Licht, während in der vorliegenden Arbeit mit verschiedenen Arten von Weißlicht gearbeitet wird.

Im Spannungsfeld zwischen künstlerischem Interesse und technischer Machbarkeit bewegt sich die vorliegende Arbeit. Ziel war es, die Möglichkeiten spektraler Farbmischung mit modernen LED-Systemen im Hinblick auf die gezielte Erzeugung von Metamerieeffekten zu untersuchen. Die folgenden Kapitel widmen sich den theoretischen Grundlagen, technischen Umsetzungen und der praktischen Erprobung eines experimentellen Systems zur Berechnung und Darstellung metamerer Farbmischungen. Aus Gründen der Umsetzbarkeit im Rahmen einer Bachelorarbeit im Fach Medientechnik wurde sich hier allein auf die technisch messbaren Aspekte des Themas beschränkt. Die Arbeit versteht sich also als Grundlage für weitere Entwicklungen und soll technische Machbarkeit und Bedingungen untersuchen.

2 Theoretische Grundlagen

Die in dieser Arbeit entwickelten Konzepte bauen auf grundlegenden Erkenntnissen der Farbmetriek auf, welche in diesem Kapitel dargelegt werden. Zunächst wird eine Übersicht über Farbräume gegeben und das Problem der Beurteilung von Farbdifferenzen erläutert. Danach wird das Prinzip der Metamerie vorgestellt und die Frage nach der Quantifizierung der Metamerie behandelt. Als Nächstes werden die gängigen Farbmischsysteme der additiven und subtraktiven Farbmischung vorgestellt. Die additive Farbmischung ist insbesondere für das Erstellen der Spektren von Bedeutung, weshalb dort genauer auf die Mischung von Lichtfarben mit mehr als 3 Kanälen eingegangen wird. Im nächsten Abschnitt werden die besonderen Schwierigkeiten bei der Mischung von Pigmentfarben aufgezeigt, und es wird genauer auf die Kubelka-Munk Theorie zur Beschreibung von Farbschichten sowie deren Anwendung in der Farbrezepturberechnung eingegangen.

2.1 Farbräume und Farbabstand

Das menschliche Farbsehen beruht auf den unterschiedlichen spektralen Empfindlichkeiten der für das Farbsehen zuständigen Sehzellen, den Zapfen. In der Retina befinden sich drei verschiedene Arten von Zapfen. Diese werden entsprechend ihrer maximalen

Empfindlichkeit S-, M- und L- Zapfen genannt (für Short, Medium und Long). Diese Form des Farbsehens mit drei Zapfen wird auch als *trichromatisches Sehen* bezeichnet. Aus dieser physiologischen Tatsache leitet sich ab, dass sich alle Farben in einem dreidimensionalen Koordinatensystem als Farbraum darstellen lassen. Als Farbort wird jener Punkt in einem Farbraum bezeichnet, der einen bestimmte Farbton repräsentiert. Der Abstand zwischen zwei Punkten im Farbraum wird Farbabstand genannt. Er bietet die Grundlage zur Bewertung von Farbdifferenzen. Von den ersten Ansätzen bis heute wurden Farbräume kontinuierlich weiterentwickelt, um dem Ziel der empfindungsgemäßen Gleichabständigkeit möglichst nahe zu kommen.

2.1.1 Farbräume

Die Wurzeln der modernen Dreifarbentheorie gehen zurück ins 19. Jahrhundert. Lange vor dem Nachweis der Farbsinneszellen mit drei unterschiedlichen spektralen Empfindlichkeiten in der Retina wurde von Young, Helmholtz, Maxwell und anderen Forschern bereits die Hypothese aufgestellt, dass drei verschiedene Lichtrezeptoren im Auge für das Farbsehen zuständig seien, deren spektrale Empfindlichkeiten jeweils im langwelligen (Rot) mittleren (Grün) und kurzen (Blau) Wellenlängenbereich liegen und deren relative Signalstärken im Gehirn als Farbe interpretiert werden. Damals wurde auch schon versucht, durch verschiedene Verfahren den Verlauf dieser Empfindlichkeitskurven zu bestimmen. Basierend auf diesen Forschungen entwickelte Graßmann um 1853 seine vier Gesetze der Farbmischung, die die Grundlage zur mathematischen Berechnung von Farben legen. Darin wird postuliert, dass jeder beliebige Farbton von drei unabhängigen Grundgrößen vollständig beschrieben wird (Malacara, 2002; Schanda, 2007).

CIE-Standardbeobachter

Im Jahre 1931 wurde von der CIE (Commission Internationale d'Eclairage) erstmals der Standardbeobachter festgelegt – ein durchschnittlicher theoretischer Beobachter mit festgelegten Bedingungen, auf den sich farbmetrische Angaben stützen sollten. Die Versuche, die in den „1931 Normalbeobachter“ mündeten, wurden von Guild und Wright mit einem 2° Blickfeld durchgeführt, da im Zentrum der Netzhaut nur die fürs Farbsehen zuständigen Zapfen in hoher Konzentration vorhanden sind. Durch die Beschränkung des Blickfeldes auf 2° sollte die Stimulation von Stäbchen ausgeschlossen werden. Weil das 2° Blickfeld im Hinblick auf viele praktische Anwendungen unrealistisch ist, wurde in 1964 mit dem 10° Beobachter von der CIE ein weiterer Normbeobachter eingeführt,

der aus den experimentellen Daten von Stiles, Burch and Speranskaja berechnet wurde. Trotzdem ist der 2° Normalbeobachter nach wie vor weit verbreitet.

Spektralwertfunktionen

Die Basis für die Beziehung zwischen einer spektralen Lichtverteilung und einer Farbvalenz bilden die Farbabgleichsfunktionen. Mit Hilfe von drei Farbabgleichsfunktionen lässt sich jede Wellenlänge im Spektrum als eine Kombination der drei Primärfarben darstellen. Durch Integration (Addition) über alle Wellenlängen erhält man 3 Koordinaten, mit denen sich eine Farbe definieren lässt. Die Spektralwertkurven für den CIE-Normalbeobachter wurden in einem Farbabgleichsexperiment gewonnen, in dem Versuchspersonen monochromatische Spektralfarben (Referenz) mit drei monochromatischen Primärfarben Rot = 700,0 nm, Grün (G) = 546,1 nm und Blau (B) = 435,8 nm nachmischen mussten. Zu Beginn wurde die Wellenlänge der Referenz auf 700 nm eingestellt und dann in 10 nm-Schritten reduziert. Die Strahlungsenergie blieb dabei gleich. Die Farbabgleichsfunktionen $\bar{r}(\lambda)$, $\bar{g}(\lambda)$ und $\bar{b}(\lambda)$ ergeben sich durch die Level der jeweiligen Primärfarben an jeder Wellenlänge – gemittelt über die 17 Versuchsteilnehmer. Weil sich nicht alle Spektralfarben mit Hilfe der Primärfarben mischen ließen, ergab es sich, dass die $\bar{r}(\lambda)$ Kurve negative Werte enthält. Bei Referenzwerten zwischen 435,8 nm und 546,1 nm wirkte der gemischte Farbton auch bei R=0 noch zu rot, weshalb der Referenz ein gewisser Anteil des Primär-Rot zugemischt wurde. Diese Anteile gingen als negative Werte in die rote Farbabgleichsfunktion mit ein.

Um die negative Werte zu eliminieren, wurden die Farbabgleichsfunktionen in die Spektralwertfunktionen $\bar{x}(\lambda)$, $\bar{y}(\lambda)$ und $\bar{z}(\lambda)$ transformiert. Weiterhin sollte aus praktischen Gründen $\bar{y}(\lambda)$ der Helligkeitsempfindungskurve $V(\lambda)$ entsprechen.

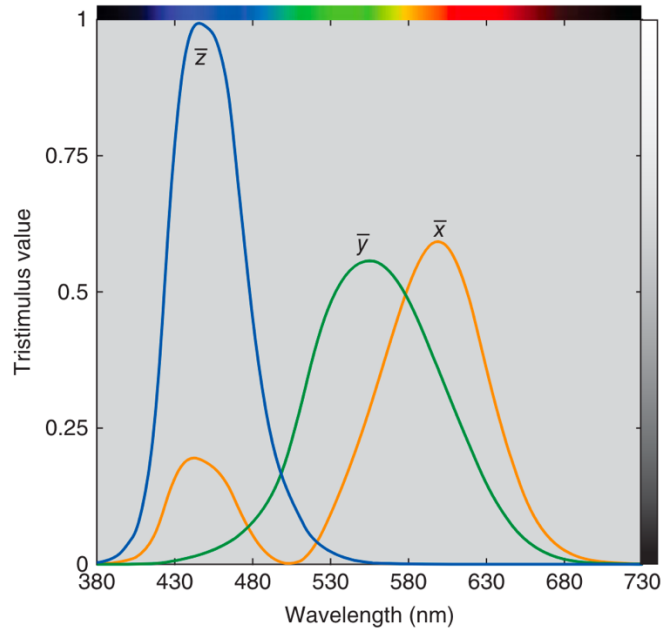


Abbildung 2.1 Normspektralwertfunktionendes CIE 1931 Standardbeobachter
(Quelle: Berns et al., 2019, S.59)

CIE Normvalenzsystem

Das Normvalenzsystem baut auf den CIE-Normalbeobachtern auf und bildet die Grundlage von vielen weiteren verbreiteten Farbsystemen. Als Grundlage dienen die Normvalenzen X, Y, und Z – virtuelle Primärvalenzen, die keinen reellen Farben entsprechen. Diese werden durch Integration über das Produkt des Farbreizes mit den Spektralwertfunktionen gewonnen. Die folgenden Formeln sind für Körperfarben bestimmt, für die sich der Farbreiz aus dem Produkt des Beleuchtungsspektrums S und dem Reflexionsspektrum R ergibt (Berns et al., 2019).

$$X = k \int_{\lambda} S_{\lambda} R_{\lambda} \bar{x}_{\lambda} d\lambda \quad (2.1)$$

$$Y = k \int_{\lambda} S_{\lambda} R_{\lambda} \bar{y}_{\lambda} d\lambda \quad (2.2)$$

$$Z = k \int_{\lambda} S_{\lambda} R_{\lambda} \bar{z}_{\lambda} d\lambda \quad (2.3)$$

$$k = 100 / \int_{\lambda} S_{\lambda} \bar{y} d\lambda \quad (2.4)$$

k ist ein Skalierungsfaktor, mit dem auf die Helligkeit der Beleuchtung normiert wird, sodass ein Objekt mit 100 % Reflexion über das sichtbare Spektrum den Y-Wert 100 erhält.

In der Praxis liegen die sowohl Messwerte als auch die Spektralwertfunktionen als diskrete Werte vor, sodass das Integral als Summe approximiert wird. Die so gewonnenen Variable X , Y und Z spannen ein dreidimensionales Koordinatensystem auf, mit dem Farben eindeutig spezifiziert werden können.

CIE-xyY

In vielen Fällen ist es sinnvoll, die Farbinformation von der Helligkeitsinformation zu trennen. Dafür eignen sich die Normfarbwertanteile x , y und z . Diese berechnen sich wie folgt:

$$x = \frac{X}{X + Y + Z} \quad (2.5)$$

$$y = \frac{Y}{X + Y + Z} \quad (2.6)$$

$$x + y + z = 1 \Leftrightarrow z = 1 - x - y \quad (2.7)$$

Dies entspricht einer zweifachen Projektion, zuerst auf die Ebene $X + Y + Z = 1$ und dann auf die xy -Ebene. Der Spektralfarbenzug, der so auf der xy -Ebene abgebildet wird (ergänzt um die sogenannte Purpurlinie, die Violett und Rot verbindet), ergibt die bekannte Schuhsohlenform der CIE-Normfarbtafel. Innerhalb dieser Form befinden sich alle möglichen Farben.

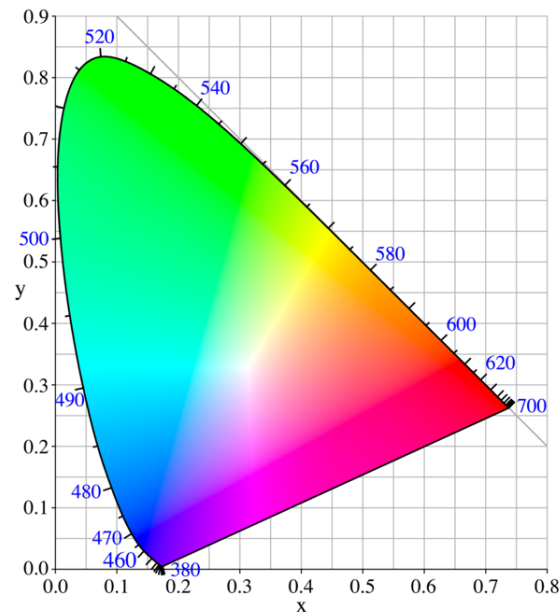


Abbildung 2.2 CIE 1931 Normfarbtafel
(Quelle: Wikipedia ☺)

Wie man sieht, kann z direkt aus x und y berechnet werden – damit gibt es lediglich zwei unabhängige Variablen. Um aus einem xy -Farbort wieder einen XYZ-Wert zu erhalten, muss der Helligkeitswert Y bekannt sein. XYZ und xyY eignen sich gut zur Beschreibung von Farbreizen, haben aber zwei Defizite: Erstens sind XYZ unintuitiv in der, da die Achsen keinen realen Farben entsprechen. Zweitens entsprechen die Abstände in den Farbräumen nicht den tatsächlich wahrgenommenen Farbunterschieden.

MacAdam-Ellipsen

David MacAdam konnte in seiner Arbeit von 1942 zeigen, dass die Schwelle des geringsten wahrnehmbaren Farbabstands in der CIE-Farbtafel die Form einer Ellipse hat. Diese Ellipse variiert in Größe und Ausrichtung je nach Farbort. Daran zeigt sich anschaulich, dass die Abstände nicht der Empfindung entsprechen. Noch immer werden in der Beleuchtungsindustrie Farbabweichungen von LEDs in Vielfachen von MacAdam-Ellipsen angegeben.

CIE $L^*a^*b^*$ / $L^*u^*v^*$

Als Reaktion darauf entwickelte die CIE annähernd gleichabständigen Farbräume $L^*a^*b^*$ und $L^*u^*v^*$, wobei ersterer für Körperfarben und letzterer für Lichtfarben optimiert wurde. Beide entstehen durch eine nichtlineare Transformation des XYZ-Raumes und sind sowohl mit dem 2° als auch mit dem 10° Beobachter verwendbar. Im CIE $L^*a^*b^*$ -Farbraum steht L^* für die Helligkeit (Luminanz), a^* für die Grün–Rot-

Achse und b^* für die Blau–Gelb-Achse. Dieses Koordinatensystem basiert auf der Gegenfarbtheorie und bildet farbliche Gegensätze in physiologisch relevanter Weise ab.

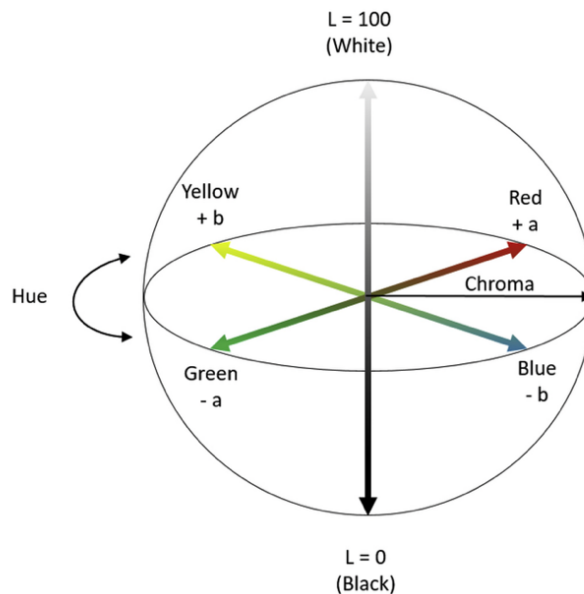


Abbildung 2.3 Schematische Darstellung des CIELAB Farbraums.
(Quelle: Datacolor, 2019)

Während bei CIELAB sowie bei CIELUV die angestrebte Gleichabständigkeit bei größeren Farbabständen gut gegeben ist, ist sie für kleine Farbabstände trotz der erzielten Verbesserungen nicht ausreichend. Trotz dieser Unzulänglichkeiten sind beide Farbräume nach wie vor in Gebrauch und für viele Anwendungen der Standard.

DIN99

Der DIN99-Farbraum ist eine Weiterentwicklung, die Gleichabständigkeit für kleine bis mittlere Farbabstände gut annähert. Die Anwendung wird für kleine Farbabstände bis $5 \Delta E_{ab}$, wie sie in der Qualitätssicherung und in der Rezeptberechnung vorkommen, empfohlen. Ein Nachteil ist die geringe internationale Verbreitung des Farbraums und eine relativ komplizierte Berechnung.

Kartesische vs. Polarkoordinaten

Grundsätzlich lassen sich alle Farbräume in kartesischen oder in Polarkoordinaten darstellen. Der Vorteil von Polarkoordinaten besteht darin, dass sie die gebräuchlichen Parameter Farbtonwinkel, Buntheit / Sättigung und Helligkeit repräsentieren, was ihre intuitive Nutzung erleichtert.

Bekannte Beispiele sind HSL (Hue, Saturation, Lightness) und HSV (Hue, Saturation, Value), die auf dem RGB-Farbraum beruhen und in der Computergrafik Anwendung finden. Eine Transformation des L*a*b* Farbraums in Polarkoordinaten ist unter den Namen LCh (Luminance, Chroma, Hue) bekannt.

Farberscheinungsmodelle

Während klassische Farbräume lediglich den physikalischen Farbreiz beschreiben, berücksichtigen Farberscheinungsmodelle zusätzlich Umgebungsfaktoren, die die Farbwahrnehmung beeinflussen. Dazu zählen insbesondere die chromatische Adaption des Auges an das Umgebungslicht, der Einfluss der Hintergrundfarbe sowie Effekte wie der Simultankontrast. CIECAM16, veröffentlicht im Jahr 2022 als Nachfolger von CIECAM02, ist derzeit der offizielle Standard für Farberscheinungsmodelle. Es beschreibt Farben anhand von sechs wahrnehmungsbezogenen Attributen: Helligkeit (L), Leuchtdichte (Q), Buntheit (C), Sättigung (s), Buntton (H) und Farbigkeit (M) (Greule, 2021; CIE 248:2022, 2022).

2.1.2 Farbabstand

Der Farbabstand ist ein Maß dafür, wie sehr sich zwei Farben voneinander unterscheiden. Er bezieht sich immer auf den verwendeten Farbraum.

In einem Raum mit 3 Dimensionen ist der Abstand zwischen zwei Punkten gegeben durch

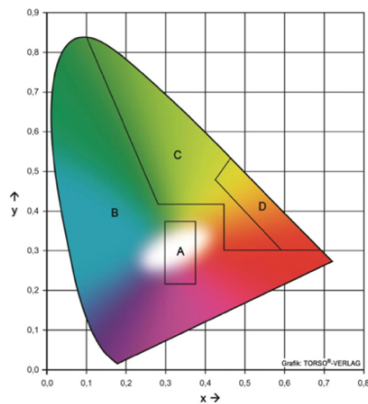
$$d(p, q) = \|p - q\| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2}, \quad (2.8)$$

wobei $p_1 \dots p_3$ und $q_1 \dots q_3$ die Koordinaten der zwei Punkte sind. Auf diese Weise lässt sich auch in den unterschiedlichen Farbräumen die Distanz zwischen zwei Farbtönen bestimmen.

CIE ΔE_{74}

Da L*a*b* und L*u*v* von der CIE als gleichabständig konzipiert waren, beruhte die erste Empfehlung zur Berechnung von ΔE einfach auf der Anwendung der euklidischen Norm der Einzeldifferenzen. Wie bereits erwähnt zeigte sich jedoch schnell, dass die er-

reichten Verbesserungen in der Praxis nicht ausreichen. Abbildung 2.4 zeigt anschaulich an einem Praxisbeispiel aus der Industrie, wie unterschiedlich die akzeptablen Farbtoleranzen unter Verwendung von ΔE_{74} beurteilt werden.



Bereich	Maximaler Abstand zur Vorlage ΔE^* gemäß CIELab	Chargenkonstanz ¹ ΔE^* gemäß CIELab
A L-Wert > 85	$\leq 0,8$	$\leq 0,5$
A L-Wert 60 - 85	$\leq 1,0$	$\leq 0,7$
A L-Wert < 60	$\leq 1,4$	$\leq 1,0$
B	$\leq 2,0$	$\leq 1,5$
C	$\leq 2,8$	$\leq 2,0$
D	$\leq 3,6$	$\leq 2,5$

Abbildung 2.4 Zulässige Farbtoleranzen für Pulverbeschichtungen in der Architektur
Die Richtlinie legt unterschiedliche Toleranzen für verschiedene Bereiche fest. Farbabstandsformel: ΔE_{74} . Zu beachten ist die Verwendung zweier verschiedener Farbräume für die Definition der Bereiche (xy) und der Farbabstände ($L^*a^*b^*$). (Quelle: Verband der deutschen Lack- und Druckfarbenindustrie e.V., 2013)

CIE ΔE_{00}

Nachdem die zuvor eingeführte CIE ΔE_{94} -Formel keine breite Akzeptanz in der Industrie fand, wurde diese durch neue Datensätze verbessert und durch die Formel CIE2000 ersetzt. Die neue Formel beinhaltet insgesamt Gewichtungsfunktionen:

- Ein Bunttonrotationswert (R_T), um zur Korrektur von Blautönen
- Kompensation für neutrale Farben
- Kompensation für Helligkeit (S_L)
- Kompensation für Sättigung (S_C)
- Kompensation für Buntton (S_H)

Damit kommt sie dem Ziel, gleiche Farbabstände für alle Farbtöne zu bekommen sehr nahe. Außerdem lässt sich die Formel mit den Korrekturfaktoren k_L , k_C und k_H auf die jeweilige Anwendung anpassen (Datacolor, 2019).

Welche Farbunterschiede als akzeptabel gelten, unterscheidet sich je nach Anwendungsbereich und verwendeter Technologie. So werden Lichtfarben anders wahrgenommen als Körperfarben, für Autolacke gelten strengere Akzeptanzschwellenwerte als für Textilien und so fort (Kettler et al., 2016).

Tabelle 6.1 Farbdifferenzschwellen ΔE

Farbdifferenzschwelle ΔE	Wahrnehmung
bis 0,2	nicht wahrnehmbar
0,2 – 0,5	sehr gering
0,5 – 1,5	gering
1,5 – 3	deutlich
3 – 6	sehr deutlich
6 – 12	stark
>12	sehr stark

Abbildung 2.5 Wahrnehmung von Farbdifferenzen
(Quelle: Greule, 2021)

2.2 Metamerie

Das trichromatische Farbsehen hat zur Folge, dass Lichtspektren unterschiedlicher Zusammensetzungen beim Beobachter den gleichen Farbeindruck hervorrufen können. Die CIE gibt in ihrer Veröffentlichung die folgende Definition für Metamerie:

Two specimens having identical tristimulus values (object colors X, Y, Z) for a given reference illuminant and reference observer are metameric if their spectral radiance (reflexion) distributions differ within the visible spectrum.

(CIE 15:2004, 2004)

Metamerie ermöglicht es, farbliche Übereinstimmung mit unterschiedlichen Materialien zu erzielen – und bildet damit die Grundlage für Farbmischung überhaupt. Auf der anderen Seite bedeutet das, dass metamere Farbpaare nur unter bestimmten Bedingungen gleich aussehen (Berns et al., 2019). Ändern sich diese – etwa durch eine andere Lichtquelle oder einen anderen Beobachter – kann sich der Farbeindruck deutlich verändern. Je nach Art der sich ändernden Bedingung lassen sich verschiedene Arten von Metamerie unterscheiden. Die wichtigste und zugleich am häufigsten behandelte ist die Beleuchtungsmetamerie, bei der sich das Spektrum der Lichtquelle ändert. Ein weiteres Beispiel ist die Beobachtermetamerie, die auf Unterschiede in der physiologischen Wahrnehmung zweier Personen zurückgeht. Ähnlich verhält es sich mit der Messgerätemetamerie, die auf Geräte mit unterschiedlichen Spektralen Empfindlichkeiten zurückgeht. Ein eher spezieller Fall ist die Beobachtergeometriemetamerie, die sich auf Unterschiede im Gesichtsfeld des Betrachters bezieht. Diese entstehen etwa durch die ungleichmäßige Verteilung von Zapfen und Stäbchen zwischen dem Zentrum und der Peripherie des Sichtfeldes. Im Rahmen dieser Arbeit wird ausschließlich die Beleuchtungsmetamerie

betrachtet. Wird im Folgenden von „Metamerie“ gesprochen, so ist stets die Beleuchtungsmetamerie gemeint.

Begriffsabgrenzung Metamerie – Paramerie

Streng genommen trifft der Begriff der Metamerie nur auf Farbpaare zu, die unter der Referenzbedingung die absolut gleiche Farbvalenz besitzen. In der Praxis gibt es aber auch unter der Referenzbedingung immer geringfügige Abweichungen. Diese Farbpaare werden als Paramerie bezeichnet (ISO/DIS-18314-4:2018, 2018). Aus Gründen der Vereinfachung werden im Rahmen dieser Arbeit jedoch alle Farbpaare, die unter der Referenzbedingung eine visuell weitgehende Übereinstimmung zeigen, einheitlich als metamer bezeichnet – auch wenn eine minimale Farbdifferenz besteht.

2.2.1 Quantifizierung von Metamerie

In vielen industriellen Anwendungen ist es von großer Bedeutung, die Metamerie von Farbmischungen zu minimieren. Um die Metamerie einer Farbmischung zu bewerten, gibt es verschiedene Möglichkeiten. Allgemein lassen sich diese Ansätze unterscheiden in spezielle Indizes, die auf dem Farbabstand unter Testbedingungen beruhen, und generelle Indizes, die auf der Basis von spektralen Unterschieden berechnet werden. Aufgrund ihrer Einfachheit sind spezielle Metamerieindizes in der Anwendung weit verbreitet. Wie in Berns (2008) dargestellt, sind spezielle Metamerie-Indizes jedoch problematisch bei parameren Farben, d.h. wenn der Farbabstand unter der Referenzbeleuchtung zu groß ist. Allgemeine Metamerieindizes haben den Vorteil, dass sie auch bei parameren Farbpaaren und ohne Kenntnis der Lichtart anwendbar sind – ihre Interpretation ist allerdings weniger intuitiv.

Spezielle Metamerie-Indizes

Spezielle Metamerie-Index beruhen auf dem Farbabstand ΔE . Dazu wird eine Referenzbedingung (Lichtart, Standard-Beobachter) definiert, unter der zwei Farbproben gleich erscheinen. Weiterhin wird eine Testbedingung definiert, für der Grad an Metamerie angegeben wird. Der Farbabstand zwischen den Proben unter der Testbedingung ist dann der Metamerie-Index. In der Regel wird Normlichtart D65 als Bezugslichtart gewählt und die Testlichtart je nach Anwendungszweck festgelegt. Der CIE spezielle Metamerieindex für Beleuchtungsmetamerie findet in der Industrie weithin Anwendung und ist u.a. in der Norm ISO/DIS-18314-4:2018 standardisiert.

Allgemeine Metamerie-Indizes

Da Metamerie der Definition nach durch spektrale Differenzen hervorgerufen wird, lässt sich ein Maß für Metamerie über den Quadratischen Mittelwert der spektralen Differenzen zweier Farbproben definieren:

$$MI_{allg} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{\lambda=1}^n \Delta R_{\lambda}^2} \quad (2.9)$$

$$\Delta R_{\lambda} = R_{1\lambda} - R_{2\lambda}$$

$R_{1\lambda}$ und $R_{2\lambda}$ stellen dabei die Reflexionsgrade der Proben als Funktion der Wellenlänge dar. In Formel (2.9) gehen jedoch alle Wellenlängen gleich stark ein, was nicht der Wahrnehmung entspricht. Deshalb ist es sinnvoll, die Reflexionsgrade mit einer Funktion w_{λ} zu gewichten.

$$MI_{allg,w} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{\lambda=1}^n (w_{\lambda} \Delta R_{\lambda})^2} \quad (2.10)$$

Es gibt verschiedene Vorschläge, wie diese Gewichtung vorgenommen werden kann. Die einfachste wäre eine Gewichtung mit der Hellempfindlichkeitskurve V_{λ} . Diese ist jedoch problematisch, da die Empfindlichkeit für Chromatizität nicht beachtet wird (Berns et al., 2019). Eine weithin bekannte Gewichtungsfunktion ist die von Nimeroff und Yurow (1965):

$$w_{\lambda} = \sqrt{\bar{x}_{\lambda}^2 + \bar{y}_{\lambda}^2 + \bar{z}_{\lambda}^2} \quad (2.11)$$

$\bar{x}_{\lambda}, \bar{y}_{\lambda}, \bar{z}_{\lambda}$: Spektralwertfunktionen des CIE-Normalbeobachters

Weitere, deutlich komplexere Berechnungen für die Gewichtungen sind von Viggiano (2002) vorgeschlagen worden und werden in Berns et al. (2019) ausführlich beschrieben. Diese haben jedoch den Nachteil, dass die Gewichte für jede Farbe und Lichtart neu berechnet werden müsse.

Für allgemeine Metamerie-Indizes gibt es keine standardisierten Verfahren und sie findet weit weniger häufig Anwendung. Eine Art allgemeiner Metamerie-Index für Beleuchtungsspektren ist mit dem *Spectral Similarity Index* (SSI) eingeführt worden; dieser bewertet die *Ähnlichkeit* und nicht die *Metamerie* zweier Spektren, funktioniert aber ansonsten ähnlich wie die oben beschriebenen Methoden.

2.2.2 Farbinkonsistenz

Während Metamerie eine Eigenschaft von *Farbpaaren* ist, beschreibt Farbinkonsistenz die Farbänderung *desselben* Materials unter veränderter Beleuchtung. Nur Farbmittel mit nichtselektiven Reflexionsspektren (konstanter Reflexionsgrad über alle Wellenlängen) haben konstante Farbeigenschaften. Die Veränderung des Farbortes fällt jedoch bei verschiedenen Farbmitteln unterschiedlich stark aus. Dies ist für die Wahl von Farbmitteln für Referenzmischungen relevant. Metamere Objektfarben lassen sich in diesem Rahmen als Farben mit unterschiedlicher Farbinkonsistenz beschreiben. Berns et al. (2019) schlagen einen Farbinkonsistenzindex auf Basis des Farbabstandes einer Farbprobe unter zwei verschiedenen Beleuchtungen vor.

2.3 Additive Farbmischung

Wie im vorherigen Abschnitt erläutert, bildet die Metamerie die Grundlage für alle Farbmischungen. Grundsätzlich lassen sich dabei zwei Prinzipien unterscheiden: Bei der subtraktiven Farbmischung werden bestimmte Spektralanteile aus einem breitbandigen Lichtspektrum (z. B. weißem Licht) durch Absorption oder Filterung entfernt. Bei der Additiven Farbmischung hingegen addieren sich die Spektralanteile mehrerer Lichtquellen. Die Grundfarben der additiven Farbmischung sind Rot, Grün und Blau. Mit ihnen lassen sich alle Farben des RGB-Gamuts darstellen. Werden die additiven Grundfarben zu gleichen Teilen gemischt, entsteht weiß. Mit $\phi_{e\lambda}$ als Bezeichnung für die spektrale Strahlungsleistung ergibt sich nach Greule (2021) die Formel:

$$\phi_{e\lambda} = \phi_{e\lambda 1} + \phi_{e\lambda 2} + \phi_{e\lambda 3} \quad (2.12)$$

2.3.1 Farbmischung mit n Lichtquellen

In diesem Abschnitt wird die Berechnung des Farbortes der Mischung mehrerer Lichtquellen behandelt.

Die X, Y und Z-Werte der Mischung ergeben sich aus der Addition der Tristimuluswerte der Einzellichtquellen:

$$X_{mix} = \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y_i} Y_i \quad (2.13)$$

$$Y_{mix} = \sum_{i=1}^n Y_i \quad (2.14)$$

$$Z_{mix} = \sum_{i=1}^n Z_i = \sum_{i=1}^n \frac{1 - x_i - y_i}{y_i} Y_i \quad (2.15)$$

Mit der Definition der xy-Transformation laut Formeln (2.5) bis (2.7) und einigen Umformungen erhält man:

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Y_{mix} \end{bmatrix} \\ A \end{array} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \frac{x_1 - x_{mix}}{y_1} & \dots & \frac{x_n - x_{mix}}{y_n} \\ \frac{y_1 - y_{mix}}{y_1} & \dots & \frac{y_n - y_{mix}}{y_n} \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \\ B \end{array} \times \begin{array}{c} \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \\ I \end{array} \quad (2.16)$$

Durch diese Gleichung wird es möglich, die Helligkeiten von den Farborten zu trennen (Michel, K., 2022). Eine detaillierte Herleitung findet sich im Anhang.

Für drei Lichtfarben lassen sich die Helligkeiten Y_i anhand des gegebenen Farbortes und Helligkeit der Mischung mit folgender Formel berechnen:

$$I = A^{-1} \times B \quad (2.17)$$

Dieses Gleichungssystem ist speziell für drei Ausgangslichtfarben formuliert, da in diesem Fall die Zeilenzahl mit der Spaltenzahl der Matrix B übereinstimmt. Wird jedoch mit mehr als drei Lichtfarben gearbeitet, ist das System unterbestimmt, d.h. es existiert eine unendlich große Lösungsmenge für die Variablen Y_i . Zudem ist Matrix B in diesem Fall nicht quadratisch und somit nicht direkt invertierbar. Im Folgenden werden verschiedene methodische Ansätze vorgestellt, mit denen sich dieses Problem umgehen lässt, um trotzdem zu einer sinnvollen Lösung zu gelangen.

2.3.2 Lösungsansätze

Reduktion der Variablen

Es gibt verschiedene Methoden, den Lösungsraum zu begrenzen. Dabei wird die Anzahl der Variablen so reduziert, dass schließlich mit Formel (2.17) eine Lösung berechnet werden kann. Ein einfacher Weg wäre, alle Variablen bis auf drei (willkürlich) festzulegen und nur die übrig gebliebenen zu berechnen – was aber nur wenig hilfreich ist.

Eine Methode, die in der Lichttechnik zur Anwendung kommt, wird in Gulati (2014) beschrieben. Dabei werden nacheinander alle möglichen Dreierkombinationen von Farbkanälen berechnet. Wenn der Zielfarbbort außerhalb des Gamuts der drei Lichtquellen liegt, treten negative Werte für die Helligkeit auf, und die Lösungen werden verworfen. Die berechneten Dreierkombinationen mit positiver Lösung lassen sich nun wiederum untereinander frei kombinieren, da sie alle den Zielfarbbort erreichen.

Eine weitere Möglichkeit ist es, die Farbkanäle vor der Berechnung zu virtuellen Kanälen zusammenzufassen und die Einzelfarben Gewichtungen zu versehen. Dabei werden in der Regel nahe beieinanderliegende Farben gruppiert. Durch die Wahl der Gewichtung der Einzelkanäle können verschiedene Qualitätsparameter wie Energieeffizienz oder Farbwiedergabe optimiert werden. Diese Methode wird in Eissfeldt & Khanh (2022) und Michel, Katharina (2022) beschrieben.

Pseudoinverse

Ein anderer Ansatz stellt die Pseudoinverse nach Moore und Penrose dar. Die Pseudoinverse oder auch verallgemeinerte Inverse einer Matrix lässt sich auch für nicht-quadratische Matrizen bilden. Die bekannteste ist die Moore-Penrose Pseudoinverse, die wie folgt gebildet wird:

$$A^+ = A^T(AA^T)^{-1} \quad (2.18)$$

Hiermit wird die Lösung berechnet, die die kleinste euklidische Norm besitzt, was wiederum keine Kontrollmöglichkeiten zulässt.

Optimierung

Eine weitere Gruppe von Verfahren basiert auf dem Prinzip der mathematischen Optimierung. Das zu lösende Problem wird dabei als Zielfunktion formuliert, von der das Minimum oder Maximum gefunden werden soll. Gleichzeitig gilt es, verschiedene Nebenbedingungen einzuhalten, die physikalische, technische oder normative Beschränkungen darstellen (Burkard & Zimmermann, 2012). Auf diese Weise lassen sich sehr genaue Eigenschaften der Lichtmischung realisieren. So lassen sich spektrale Verteilungen finden, die sich einem vorgegebenen Idealspektrum annähern, Lichtausbeute oder Qualitätsparameter wie Farbwiedergabe maximieren. Als Beschränkung können beispielsweise die Einhaltung eines bestimmter Farborte oder Helligkeiten angegeben werden. Solche Optimierungsprobleme können mit verschiedenen numerischen Algorithmen gelöst werden. Die Auswahl des konkreten Verfahrens hängt dabei von der Art des Problems – etwa Linearität, Konvexität oder Dimensionszahl – ab. Gängige Methoden sind unter anderem Innere-Punkte-Methoden (Goudjil et al., 2023) oder evolutionäre Algorithmen (Zhang et al., 2017).

2.4 Subtraktive Farbmischung

Subtraktive Farbmischung findet statt, wenn Spektralanteile aus einem breitbandigen Lichtspektrum entfernt werden. Dies geschieht in der Regel durch Absorption (Pigmente), Auslöschung (Interferenzfarben) oder selektive Reflexion (Dichroitische Filter). Am einfachsten lässt sich die subtraktive Farbmischung durch drei hintereinander platzierte Filter beschreiben, die jeweils verschiedene Spektralanteile wegfiltern. Der Gesamttransmissionsgrad ergibt sich aus der Multiplikation der Transmissionsgrade der einzelnen Filter (Greule, 2021):

$$\tau_{\lambda} = \tau_{1\lambda} \cdot \tau_{2\lambda} \cdot \tau_{3\lambda}$$

τ_{λ} : Gesamttransmissionsgrad in Abhängigkeit von der Wellenlänge

Die Grundfarben der subtraktiven Farbmischung, Gelb, Cyan und Magenta, sind komplementär zu den Grundfarben der additiven Farbmischung.

2.5 Mischung von Pigmentfarben

Die Mischung von zwei Pigmenten oder Farbstoffen lässt sich nicht allein durch das additive oder subtraktive Farbmischsystem beschreiben. In der Praxis findet eine Kombination der beiden Prozesse statt.

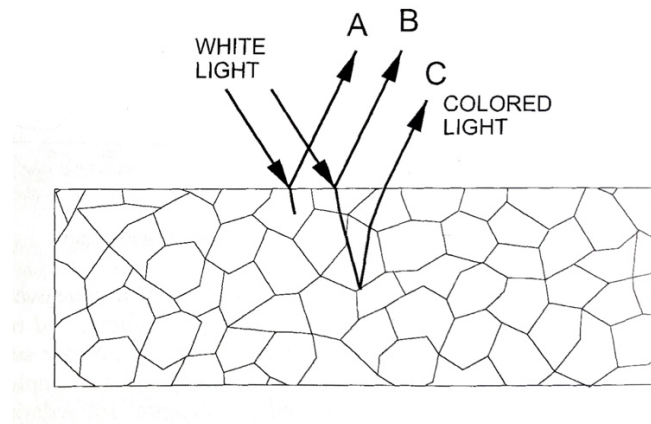


Abbildung 2.6 Farbmischung in Pigmentfarben
(Quelle: Malacara, 2002, S. 112)

Die reflektierten Farbspektren zweier nebeneinander liegenden Farbpartikel werden im Auge additiv gemischt (Lichtstrahlen A+B+C in Abbildung 2.6). Wenn das Licht nacheinander auf die Partikel trifft oder die Partikel teilweise transparent sind, wie es oft der Fall ist, finden subtraktive Prozesse statt (Lichtstrahl C).

Inwiefern eine Farbe deckend oder transparent wirkt, hängt von der Fähigkeit der Pigmentpartikel ab, eintreffendes Licht zu streuen. Diese wiederum wird wesentlich von der Korngröße des Pigments sowie vom Unterschied des Brechungsindex zwischen Pigment und Bindemittel beeinflusst. Je höher die Differenz der Brechungsindizes, desto stärker die Streuung und desto opaker wirkt die Farbe. Dies ist der Grund, warum einige Pigmente in manchen Medien transparenter sind als in anderen. Sowohl Absorption als auch Streuung sind abhängig von der Wellenlänge des Lichts (Berns et al., 2019).

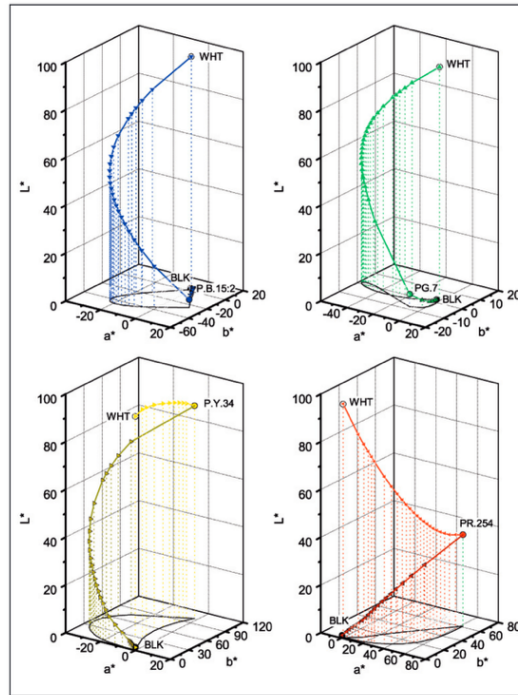


Abbildung 2.7 Nichtlinearität beim Mischen von Pigmentfarben
(Quelle: Kettler et al., 2016)

Aufgrund dieser Vielzahl von Faktoren lässt sich die Mischung von Pigmentfarben nicht als lineares System beschreiben, wie es bei der rein additiven oder subtraktiven Farbmischung der Fall ist. Abbildung 2.7 zeigt diese Nichtlinearität anschaulich am Beispiel von ausgewählten Pigmenten in gleichmäßigen Schritten von Weiß- und Schwarzausmischungen. Die dargestellten Kurvenzüge im $L^*a^*b^*$ Farbraum zeigen anschaulich, dass eine Mischung mit neutralen Pigmenten (Schwarz / Weiß) zumeist nicht nur zu einer Aufhellung oder Abdunklung, sondern auch zu einer Änderung des Farbtonwinkels führt. Ein System zur akkuraten Vorhersage von Mischungen verschiedener Pigmentfarben muss alle diese Faktoren berücksichtigen.

2.5.1 Gesetz von Kubelka und Munk

Beim Durchqueren einer Farbschicht kann ein Lichtstrahl viele verschiedene Wege nehmen. Trifft er auf ein Pigmentpartikel, wird ein Teil des Lichts absorbiert und ein Teil des Lichts umgelenkt – oft mehrere Male, bis es wieder aus der Farbschicht austritt.

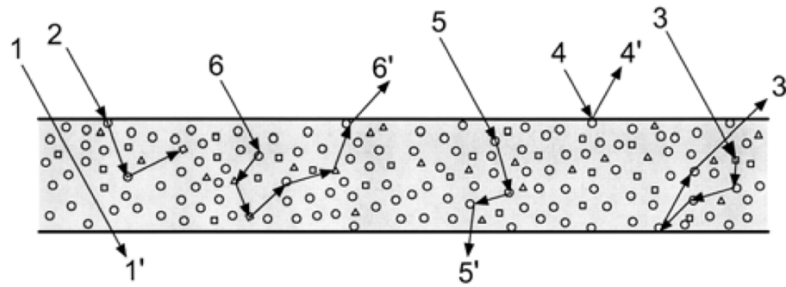


Abbildung 2.8 Mögliche Ereignisse für Photonen in einem trüben Medium
(Quelle: Džimbeg-Malčić et al., 2011)

Da dieses komplexe Verhalten schwer zu greifen ist, wurden von Kubelka und Munk in ihrem 1931 entwickelten Modell zur Berechnung von Farbmischungen einige Vereinfachungen eingeführt. Neben einigen naheliegenden einschränkenden Annahmen (Vernachlässigung von Randeffekten, Beschränkung auf diffus einfallendes Licht und Vernachlässigung von Oberflächenglanz, Annahme der Homogenität der Farbschicht etc.) liegt die wesentliche Vereinfachung darin, die Bewegungsrichtung des Lichts modellhaft auf zwei Richtungen senkrecht zur Oberfläche zu beschränken. Aufgrund dieser Vereinfachung wird auch von einer 2-Flux Theorie gesprochen. Andere, präzisere Modelle mit 4 oder mehr berücksichtigten Richtungen existieren, jedoch ist die Kubelka- Munk Theorie aufgrund ihrer relativen Simplität nach wie vor beliebt. Abbildung 2.9 veranschaulicht das vereinfachte Modell. $i(x)$ die Intensität des Lichts, was von der Oberseite der Farbschicht Richtung Untergrund, während $j(x)$ das gesamte Licht ist, welches vom Untergrund reflektiert wird und von der entgegengesetzten Richtung die Farbschicht durchquert.

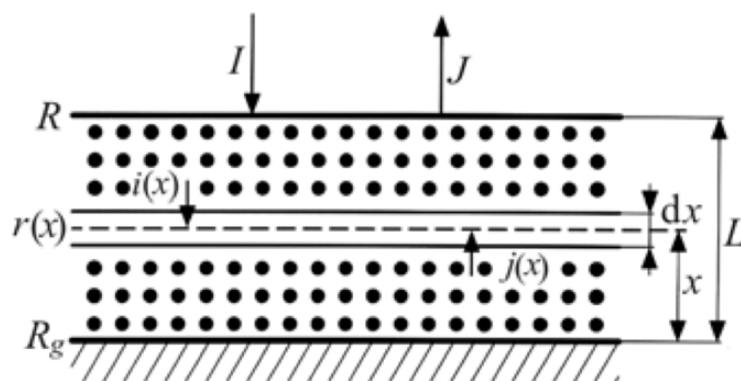


Abbildung 2.9 Vereinfachtes Modell des Lichtflusses durch eine Farbschicht
(Quelle: (Džimbeg-Malčić et al., 2011)

Sowohl durch Absorption als auch durch Streuung (Umlenkung des Lichts) gehen Anteile von $i(x)$ verloren, gleichzeitig addieren sich hierzu die Anteile von $j(x)$, die umgelenkt wurden. Das Gleiche gilt in umgekehrter Richtung für $j(x)$. Für eine infinitesimal dünne Farbschicht dx lässt sich die Änderung wie folgt zusammenfassen:

$$\begin{aligned} -\frac{di}{dx} &= -(K + S)i + Sj \\ \frac{dj}{dx} &= -(K + S)j + Si \end{aligned} \quad (2.19)$$

Die x-Achse verläuft in positiver Richtung vom Untergund Richtung Oberfläche der Farbschicht, deshalb hat $\frac{di}{dx}$ ein negatives Vorzeichen. Die Lösung dieser Gleichungen ist detailliert in Nobbs (1985) und Okumura (2005) beschrieben. Im speziellen Fall der ausreichenden Schichtdicke (Wenn die Remission des Untergrundes nicht mehr in Gewicht fällt) lässt sich für die Differentialgleichung eine Lösung berechnen, die sich in der folgenden Formel niederschlägt, die weithin in der Literatur zu finden ist (z.B. Berger-Schunn, 1994):

$$\left(\frac{K}{S}\right)_\lambda = \frac{(1 - R_\lambda)^2}{2R_\lambda} \quad (2.20)$$

Die Inverse ist durch folgende Formel gegeben:

$$R_\lambda = 1 + \left(\frac{K}{S}\right)_\lambda - \sqrt{2 * \left(\frac{K}{S}\right)_\lambda + \left(\frac{K}{S}\right)_\lambda^2} \quad (2.21)$$

Die beiden Koeffizienten K und S sind in dem Modell proportional zu der Konzentration des Pigmentes. Die K - und S - Koeffizienten einer Mischung aus mehreren Pigmenten lassen sich demzufolge als Linearkombination aus den Koeffizienten der Einzelpigmente und ihren jeweiligen Konzentrationen darstellen:

$$\left(\frac{K}{S}\right)_{\lambda, mix} = \frac{c_1 k_{\lambda,1} + c_2 k_{\lambda,2} + \dots + c_n k_{\lambda,n}}{c_1 s_{\lambda,1} + c_2 s_{\lambda,2} + \dots + c_n s_{\lambda,n}} \quad (2.22)$$

Mithilfe von Formel (2.23) und Formel (2.21) lässt sich also das Spektrum von Farbmischungen berechnen, wenn die K- und S- Ko-effizienten der Ausgangspigmente bekannt sind. Für Farbsysteme, in denen es nur einen starken Streuer gibt, und alle anderen Farbmittel geringe Streuung aufweisen (z.B. farbiges Papier, gefärbte Textilien), lässt sich die Formel zur sogenannten Single-Constant Kubelka Munk-Methode vereinfachen, bei der nur mit dem Quotienten K/S und nicht mit den Einzelkoeffizienten gerechnet wird. Da diese Methode in dieser Arbeit keine Verwendung findet, wird darauf an diese Stelle nicht weiter eingegangen. Im Folgenden wird die umfänglichere 2-Konstanten-Kubelka-Munk Theorie verwendet.

Um also Pigmentmischungen berechnen zu können, müssen zunächst die Koeffizienten ermittelt werden. Zwei Methoden zur Berechnung der K und S Konstanten werden in der Norm ISO-18314-2:2023 dargestellt. Beide Berechnungswege sind auf eine definierte Schichtdicke h angewiesen. Da ich keine Möglichkeit habe, die Schichtdicke präzise genug zu bestimmen, kommen diese Methoden für mich nicht in Frage. In Berns & Mohammadi (2007) wird eine alternative Methode vorgestellt, bei der die Konstanten aus zwei separaten Messungen pro Farbmittel berechnet werden. Dabei wird in einer Probe der Vollton und in der anderen Probe eine Weißausmischung verwendet, die jeweils in einer vollständig deckenden Farbschicht aufgetragen sind. Zur Berechnung von k und s werden die Formeln genannt:

$$k_{\lambda} = \frac{1 - c_{tint}}{c_{tint}} s_{\lambda,0} \left(\frac{K}{S} \right)_{\lambda, Vollton} \quad (2.23)$$

$$s_{\lambda} = \frac{1 - c_{tint}}{c_{tint}} s_{\lambda,0} \quad (2.24)$$

$$s_{\lambda,0} = \frac{\left(\left(\frac{K}{S} \right)_{\lambda, tint} \times s_{\lambda, w} \right) - k_{\lambda, w}}{\left(\frac{K}{S} \right)_{\lambda, Vollton} - \left(\frac{K}{S} \right)_{\lambda, tint}} \quad (2.25)$$

Die Variable $s_{\lambda,0}$ ist ein Zwischenwert, der für die Berechnung gebraucht wird.

Der Streukoeffizient des Weißpigments wird nicht absolut bestimmt, sondern vereinfachend als 1 über das gesamte Spektrum angenommen. Aus dieser Festlegung mit

$$s_{\lambda,w} = 1 \quad (2.26)$$

ergibt sich

$$k_{\lambda,w} = \left(\frac{K}{S} \right)_{\lambda,w}. \quad (2.27)$$

2.5.2 Saunderson- Korrektur

Die im vorigen Kapitel beschriebene Kubelka-Munk-Theorie berücksichtigt nur die innere Reflexion des Farbmittels. Dabei unberücksichtigt bleiben Oberflächeneffekte, die von dem Unterschied im Brechungsindex zwischen Luft und Medium hervorgerufen werden. Um Fehler aufgrund der Oberflächenreflexionen zu kompensieren, wird die Saunderson-Korrektur angewendet. Die Berechnung hängt von der Messgeometrie des Instrumentes sowie von dem Brechungsindex des Mediums ab. In ISO-18314-2:2023 wird die Formel für eine Geometrie mit 45° Einfallswinkel und 0° Beobachtungswinkel wie folgt angegeben:

$$R_{\lambda,i} = \frac{n^2 R_{\lambda,m}}{1 - r_0 - \bar{r}_0 + r_0 \bar{r}_0 + n^2 r_2 R_{\lambda,m}} \quad (2.28)$$

r_0 : Reflexionskoeffizient für gerichtetes Licht im Rechten Winkel von Außen

$\bar{r}_0$: Reflexionskoeffizient für gerichtetes Licht unter 45° von Außen

r_2 : Reflexionskoeffizient für diffuses Licht aus dem Inneren der Farbe

In der Norm finden sich Werte für den Brechungsindex $n=1,5$, der als Standardwert für Lacke Anwendung findet. Für andere Brechungsindizes können die Koeffizienten aus den Fresnel-Gleichungen berechnet werden (Okumura, 2005).

Für Senkrecht auf die Fläche auftreffendes Licht gilt nach den Fresnel Formeln:

$$r_0 = \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2} \quad (2.29)$$

Für Einfallswinkel unter 45° wird für unpolarisierte Strahlung der Mittelwert der Reflexionskoeffizienten für s- und p-polarisierte Anteile bei einem Einfallswinkel von 45° verwendet:

$$\bar{r}_0 = \frac{R_s(\theta) + R_p(\theta)}{2} \quad (2.30)$$

mit

$$R_s(\theta) = \left(\frac{\cos \theta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{\cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \right)^2 \quad (2.31)$$

und

$$R_p(\theta) = \left(\frac{n^2 \cos \theta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{n^2 \cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \right)^2. \quad (2.32)$$

Für die interne Reflexion muss, da das Licht was aus dem Farbmittel selbst reflektiert wird, als diffus angesehen wird, über alle möglichen Einfallswinkel von 0 bis 180° integriert werden:

$$r_2 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{R_s(\theta) + R_p(\theta)}{2} \right] \cos \theta \sin \theta \, d\theta \quad (2.33)$$

Das dabei entstehende Integral ist analytisch unlösbar und muss numerisch gelöst werden. In der Praxis macht man sich oft nicht die Mühe, die Koeffizienten genau zu bestimmen. Es wird einfach vom Standardwert $n = 1,5$ ausgegangen oder r_2 empirisch durch Optimierungsverfahren angenähert (Berns et al., 2019). Einschränkend ist hinzuzufügen, dass dieses Verfahren für ideal glatte Oberflächen, ideale Deckung und ideal diffuse Streuung innerhalb der Farbschicht gilt. Während die letzte Voraussetzung in meinen Versuchen in guter Näherung erfüllt werden, kann von den ersten beiden nicht ohne Weiteres ausgegangen werden.

2.5.3 Farbrezepturberechnung

Generell lassen sich bei der Farbrezepturberechnung zwei verschiedene Ansätze verfolgen: Anpassung an den Farbort (XYZ oder $L^*a^*b^*$) oder Anpassung an das Reflexionsspektrum. Die Farbortanpassung hat den Vorteil, dass der Farbort der Referenz genau getroffen werden kann – wenn sich der Zielfarbort im Gamut der Ausgangsfarben befindet, ist ΔE immer gleich Null. Dabei könne sich aber stark metamere Farbmischungen ergeben. Daher wird in der Industrie, wo es auf Vermeidung von Metamerie ankommt, oft die spektrale Anpassung bevorzugt. Diese hat den Nachteil, dass das Ergebnis nicht notwendigerweise die Lösung mit dem geringsten Farbabstand ist (Kettler et al., 2016). Gerade weil Metamerie, d.h. spektrale Unterschiede, in meinem Versuch explizit erwünscht sind, wurde mit der Minimierung von ΔE weitergearbeitet.

Die Bestimmung von Pigmentkonzentrationen zu einem vorgegebenen Farbort erfolgt über ein Optimierungsverfahren, das ähnlich funktioniert, wie bei der Lichtfarbmischung. Die zu minimierende Zielfunktion ist hier der Farbabstand zwischen Vorlage und Mischung bzw. im Fall der spektralen Anpassung die Differenz zwischen den Reflexionsspektren. Nebenbedingungen sind die ausschließliche Verwendung von positiven Konzentrationen, die in der Summe 1 ergeben.

3 Konzepte

Nachdem im vorherigen Kapitel die allgemeinen farbwissenschaftlichen Grundlagen zur Mischung und Messung von Farben dargelegt wurden, werden in dem folgenden Kapitel Konzepte vorgestellt, die besondere Relevanz für die Zielsetzung dieser Arbeit haben oder speziell dafür entwickelt wurden. Es umfasst eine Anforderungsanalyse, die Auswahl geeigneter Pigmente sowie die Berechnung spektraler Lichtmischungen. Zudem werden Verfahren zur gezielten Erzeugung metameren Pigmentfarbpaare vorgestellt und die softwareseitige Implementierung der Konzepte in Python erläutert.

3.1 Anforderungsanalyse

Lichttechnik

Für die Lichttechnik wird eine Lichtquelle benötigt, welche die Lichtfarbe additiv aus möglichst schmalbandigen LEDs zusammensetzt. Je mehr und besser aufgelöst das Spektrum ist, desto genauer lässt sich das Spektrum beeinflussen. Umso interessanter

sind potentiell die dann auftretenden metameren Effekte. Von 6 im Lichtlabor der HAW zur Verfügung stehenden Scheinwerfern mit multispektralen Engines wurde der ETC Source4 LED Lustr Serie 3 ausgewählt, da dieser mit 8 Farbkanälen die meisten Variationsmöglichkeiten bietet.

Farb- und Bindemittel

Farbmittel ist der Überbegriff für alle farbgebenden Materialien, er beinhaltet Farbstoffe und Pigmente. Farbstoffe sind im Medium löslich, während Pigmente im Medium nicht löslich sind und als Feststoffpartikel in einer Dispersion vorliegen. In der vorliegenden Arbeit wird mit Pigmenten gearbeitet, die in Pulverform vorliegen und mit einem Bindemittel angemischt werden. Dies ermöglicht das genaue Abwiegen der reinen Pigmente und bietet Unabhängigkeit von Rezepturen der Farbenhersteller.

Typisch Bindemittel für Künstlerfarben sind trocknende Öle (insbesondere Leinöl), pflanzliche Harze wie Dammar, Kunstharze, Acrylbinder und Gummi Arabicum (für Aquarell- und Gouachetechniken). Als Bindemittel für die Pigmente wurde Gummi Arabicum verwendet. Gouachefarben aus Gummi Arabicum haben den Vorteil, dass sie relativ matt sind, schnell trocknen und auch nach dem Trocknen wasserlöslich bleiben. In der Literatur finden sich sehr unterschiedliche Angaben zum Brechungsindex, die zwischen 1,16 - 1,47 liegen, wobei nicht immer zu entnehmen ist, ob es sich um Werte für den Feststoff oder als Lösung handelt. (Dafam et al., o. J.), (Elbadawi et al., 2018) (*CRC Handbook Of Chemistry And Physics 97th Edition*, 2016)

Messtechnik

Im Verlauf der Arbeit müssen an mehreren Stellen Reflexionsspektren von Pigmenten / Farbmischungen aufgenommen werden. Des Weiteren werden die Spektren der zur Beleuchtung verwendeten Scheinwerfer sowohl als einzelne LEDs, als auch als additive Mischung aufgenommen. Als letztes müssen die $L^*a^*b^*$ Farborte der Farbmischungen unter verschiedenen Beleuchtungen gemessen werden. Daraus ergeben sich unterschiedliche Anforderungen an die Messtechnik. Für die Reflexionsspektren müssen sehr viele Farbproben von geringer Größe erfasst werden. Für diesen Zweck eignet sich besonders ein Handheld-Gerät mit eingebauter Lichtquelle, das sich automatisch kalibriert und nur die Reflexionswerte in Prozent ausgibt. Das im Labor befindliche Konica Minolta CM-2500c wurde für die Messung der Pigmentspektren verwendet. Es erfasst das Lichtspektrum in einem Bereich von 360-740 nm im Abstand von 10 nm. Es hat eine $45^\circ/0^\circ$ Messgeometrie mit einem Lichteinfall von 45° und einem Beobachtungswinkel von 0° .

Für die Messung der Beleuchtungsspektren sowie zur Erfassung der Farborte der finalen Mischungen unter verschiedenen Beleuchtungen wurde das Spektroradiometer JETI specbos 1201 zusammen mit einem Weißstandard der Firma PRC Krochmann verwendet.

Das Abwiegen der Pigmente sollte idealerweise unter Verwendung einer Waage mit Genauigkeit im Milligrammbereich erfolgen. Die verwendete Digitalwaage der Firma Dipse erreicht jedoch nur eine Genauigkeit von ± 10 mg. Daraus ergibt sich, dass besonders in komplexeren Mischungen wie in Teilversuch 3 große Mengen an Farbe angemischt werden müssen.

Richt- und Grenzwerte

Damit die Metamerie auch als solche Wahrgenommen werden kann, müssen gewisse Grenzwerte für die Farbdifferenzen eingehalten werden. Damit die Farbdifferenzen untereinander vergleichbar sind, wurde mit CIEDE2000 (ΔE_{00}) ein Farbabstand gewählt, der für geringe Werte annähernd Gleichabständig ist. Für die metameren Pigmentfarbmischungen wurden ein maximaler Farbabstand von $\Delta E_{00} < 2$ festgelegt. Da die Vergleichbarkeit bei den Lichtmischungen nicht notwendig ist, wurde hier im xy-Farbraum gearbeitet. Als Lichtfarbe sollte ein möglichst neutraler Weißton gelten. Ich habe mich für eine ähnlichste Farbtemperatur von 4000 K entschieden, da dies als Standard-Neutralweißton in der Architektur- und Ausstellungsbeleuchtung üblich ist. Aufgrund von Temperaturbedingten Schwankungen des Farbortes, war es nicht möglich, hier eine genaue Akzeptanzgrenze zu definieren. Da die Lichtfarbmischungen jedoch nicht direkt nebeneinander betrachtet werden, sind hier gewisse Abweichungen vertretbar.

3.2 Pigmentauswahl

Für die Auswahl der Pigmente wurden mir von der Firma Kremer Pigmente freundlicherweise Bögen mit Farbproben bereitgestellt. Die Farbproben sind mit Gummi Arabicum als Bindemittel im Siebdruckverfahren gedruckt. Aus den bereitgestellten Bögen wurden Reflexionsspektren von insgesamt 156 Farbproben mit dem Fotospektrometer cm25000c aufgenommen. Diese wurden nach Farbtönen gruppiert und der Verlauf der Spektralkurven geplottet. Dabei wurden auch die Peak-Wellenlängen der LEDs des ETC Source Four Scheinwerfers zur Orientierung mit in den Plot aufgenommen.



Abbildung 3.1 Aufnahme der Reflexionsspektren von Pigmentproben mit dem cm2500c (Quelle: Eigene Aufnahme)

Durch visuellen Vergleich der Kurven wurden Pigmente mit besonders interessanten spektralen Eigenschaften ausgewählt. Dabei wurde auf folgende Kriterien geachtet:

1. Gibt es Spektren, bei denen zwischen zwei LED-Peaks eine starke Veränderung auftritt?
2. Gibt es Pigmente mit ähnlichem Farbton, die deutlich unterschiedliche Spektren aufweisen?
3. Gibt es sonst irgendwelche Auffälligkeiten, wie z.B. ein Grünton, der auch stark im tiefroten Bereich reflektiert?

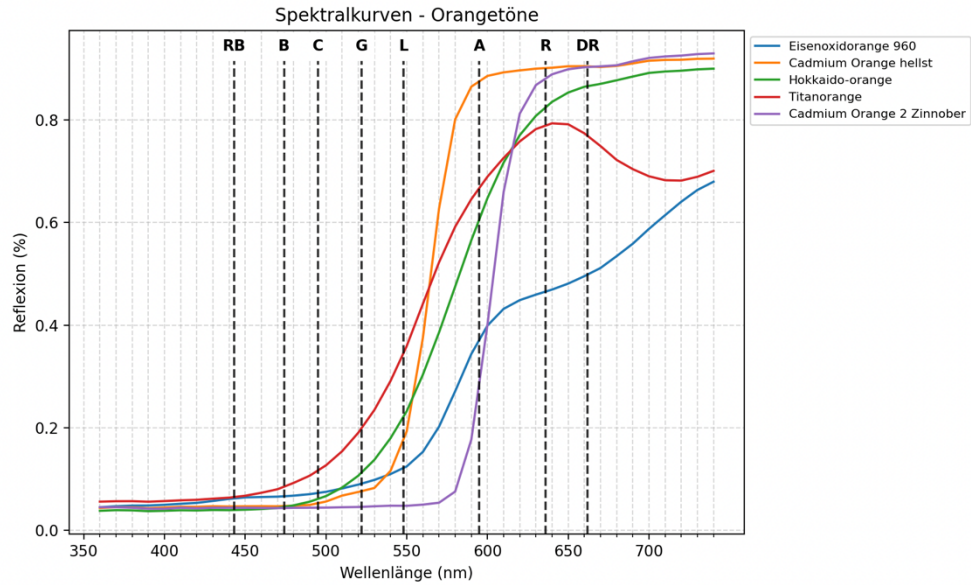


Abbildung 3.2 Pigmentauswahl-Orangetöne
(Quelle: Eigene Darstellung)

Im Zweifel wurden Mineralische Pigmente bevorzugt, da diese sich in der Regel leichter anmischen lassen, sowie Pigmente, die auch im Vollton ausreichende Helligkeit aufweisen, da bei zu dunklen Pigmenten der Fehler bei der Bestimmung der K- und S- Werte zu stark ins Gewicht fällt (Kettler et al., 2016). Da die Farbproben zumeist nicht in deckender Schicht aufgetragen sind, dienen diese Messungen nur zur Vorauswahl. Für die Berechnung der K- und S- Werte wurden zusätzliche Messungen der ausgewählten Pigmente vorgenommen. Insgesamt wurden 32 Pigmente ausgewählt. Eine vollständige Liste aller verwendeten Pigmente findet sich im Anhang.

3.3 Bestimmung der Lichtmischungen

Um metamere Farbpaare zu definieren, müssen zuerst die Beleuchtungsspektren definiert werden, für die Farbübereinstimmung gelten soll. Dazu suchte ich nach Lichtspektren, die sich in spezifischen Punkten möglichst stark unterscheiden, dabei aber die zugleich die Bedingung der gleichen Lichtfarbe erfüllen. In Abschnitt 2.3.2 werden verschiedene Verfahren vorgestellt, wie ein gewünschter Zielfarbart aus mehr als 3 Lichtquellen gemischt werden kann. Da in unserem Falle möglichst gezielte Manipulationen des Spektrums ermöglicht werden sollen, wird für die Berechnung der Spektren die Optimierungsmethode, die in 2.3.2 vorgestellt wurde, verwendet.

3.3.1 Berechnung der Lichtfarbmischungen

Mit Hilfe der Optimierungsmethode kann das Zielspektrum der Beleuchtung an ein ideales Wunschspektrum angepasst werden. Dabei findet der Algorithmus diejenige Mischung, die dem idealen Spektrum am nächsten kommt, unter der Bedingung, dass die vorgegebene Farbtemperatur (bzw. der xy- Farbart) eingehalten wird. Das hier angewandte Optimierungsverfahren ist aus (Goudjil et al., 2023) entlehnt. Grundlage ist eine vereinfachte Version des in Formel (2.16) dargestellten Gleichungssystems zur Mischung von n Lichtquellen:

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} x_{mix} \\ y_{mix} \\ 1 \end{bmatrix} \\ c \end{array} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ y_1 & \dots & y_n \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \\ M \end{array} \times \begin{array}{c} \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \\ f \end{array} \quad (3.1)$$

Da hier auf die Gesamtleistung normiert wurde, stehen im letzten Vektor nicht mehr die Helligkeiten Y , sondern die Faktoren f_i mit

$$f_i = \frac{X_i + Y_i + Z_i}{X_{mix} + Y_{mix} + Z_{mix}}. \quad (3.2)$$

In der Quelle werden sie etwas irreführend als „... factors representing the proportion of the illuminance that must be generated by each LED to achieve the desired color point.“ bezeichnet; tatsächlich sind sie proportional zur radiometrischen Leistung.

Der Vektor f wird durch die Optimierung so bestimmt, dass die Distanz zu dem vorgegebenen Idealspektrum, ausgedrückt als Vektor f_{opt} , möglichst klein wird. mathematisch bedeutet dies, das Minimum der Funktion $\Gamma(Y) = \|f - f_{opt}\|$ zu finden, wo bei mit $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm bezeichnet wird. Neben der Einhaltung des Farbortes (x_{mix}, y_{mix}) , wie von Gleichung(3.1) vorgegeben, muss eine weitere Bedingung erfüllt sein. Alle Werte von f müssen größer oder gleich Null sein, damit sie sich physisch realisieren lassen.

Formalisiert lässt sich das Optimierungsproblem so zusammenfassen:

$$\begin{cases} \min_f \Gamma(f) \\ Mf - c = 0 \\ -f \leq 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

In unserem konkreten Fall bestehen die Vektoren f und f_{opt} aus 8 Zahlen zwischen 0 und 1, die die Anteile der LED-Farbkanäle repräsentieren – geordnet von der kürzesten zur längsten Peak-Wellenlänge. Da alle mischbaren Spektren des Scheinwerfers als Linearkombination der Spektren der Einzel-LEDs beschrieben werden können, ist f_{opt} für die Definition des Idealspektrums hinreichend. Insgesamt sind beliebig viele Vorgaben vorstellbar. Wenn man sich nur auf die maximale oder minimale Verwendung eines Farbkanals beschränkt, erhält man einen Vektor aus Nullen und Einsen.

So ergibt z.B. der Vektor

$$f_{opt} = [0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]$$

die Vorgabe, die Farbmischung mit dem höchsten Anteil der Cyan-LED zu finden.

Dazu lässt sich komplementär mit

$$f_{opt} = [1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1]$$

die Lösung mit dem niedrigsten Cyananteil finden. Auf diese Art und Weise lassen sich metamere Lichtmischungen bestimmen, die sich in genau einem Farbkanal größtmöglich unterscheiden. Wenn man nun Pigmentfarbmischungen findet, die in genau diesen Bereichen signifikante spektrale Unterschiede aufweisen, ist davon auszugehen, dass sich damit gezielt Farbwechseleffekte erzielen lassen.

Durch dieses Verfahren ergibt sich eine Auswahl an 16 verschiedenen Lichtspektren, die in der Folge als Referenzlicht für die Erstellung von Pigmentfarbmischungen dienen können.

3.4 Mischung von Metameren Pigmentfarben

Die Mischung von Pigmentfarben ist, wie in Kapitel 0 beschrieben wird, recht komplex. Im Gegensatz zu der Berechnung der Lichtmischungen lässt sich der Mischvorgang nicht als Lineares Gleichungssystem lösen, sondern muss zunächst durch Optimierung gefun-

den werden. Die zu minimierende Zielfunktion hierfür ist ΔE_{00} zwischen den $L^*a^*b^*$ Farbborten der Vorgabe und der Mischung. Da aber die gesuchte Variable der Vektor c mit den Konzentrationen der Pigmente in der Mischung ist, geht in diese Funktion die komplette Rückberechnung des Spektrums aus den K- und S-Werten der Pigmente mit Formel (2.22) und (2.21) ein. Zusätzlich müssen aus den 32 Pigmenten eine Auswahl getroffen und die Mischungen nach ihrer Metamerie bewertet werden. Das geschieht in einem zweistufigen Algorithmus, der im Folgenden erläutert wird.

3.4.1 Algorithmus zur Berechnung der metameren Farbpaare

In einer Schleife wird zunächst eine Mischung aus N Pigmenten durch Optimierung auf den Referenzfarbort berechnet und die Ergebnisse der Optimierung zwischengespeichert. Wenn ΔE nicht Null erreicht, bedeutet dies, dass der Zielfarbort nicht im Gamut der N Pigmente liegt. Durch eine festgelegte Farbabstandsschwelle wird entschieden, ob die Mischung beibehalten oder verworfen wird. Ein Schwellenwert von > 0 kann nützlich sein, um ausgefalleneren Mischungen zu finden. Im Anschluss wird der gewichtete Nimeroff-Yurow-Metamerieindex (MI) nach den Formeln (2.10) und (2.11) zwischen dem Reflexionsspektrum der Referenz der Mischung berechnet und alle Mischungen nach MI geordnet in einer Datenstruktur abgespeichert. Theoretisch könnte an dieser Stelle auch der spezielle Metamerieindex mit Bezug auf eine Testbeleuchtung angewandt werden. Das hätte den Vorteil, dass immer die Mischung bestimmt würde, die den größten Effekt im Sinne einer Farbänderung erzielt. Die implementierte Variante wurde gewählt, weil allgemeinere Aussagekraft und erhöhte Flexibilität mit sich bringt – so muss man sich bei der Berechnung nicht schon für das Beleuchtungsspektrum entscheiden und es besteht die Möglichkeit, ohne Änderung im Code auch Mischungen mit minimaler Metamerie zu berechnen.

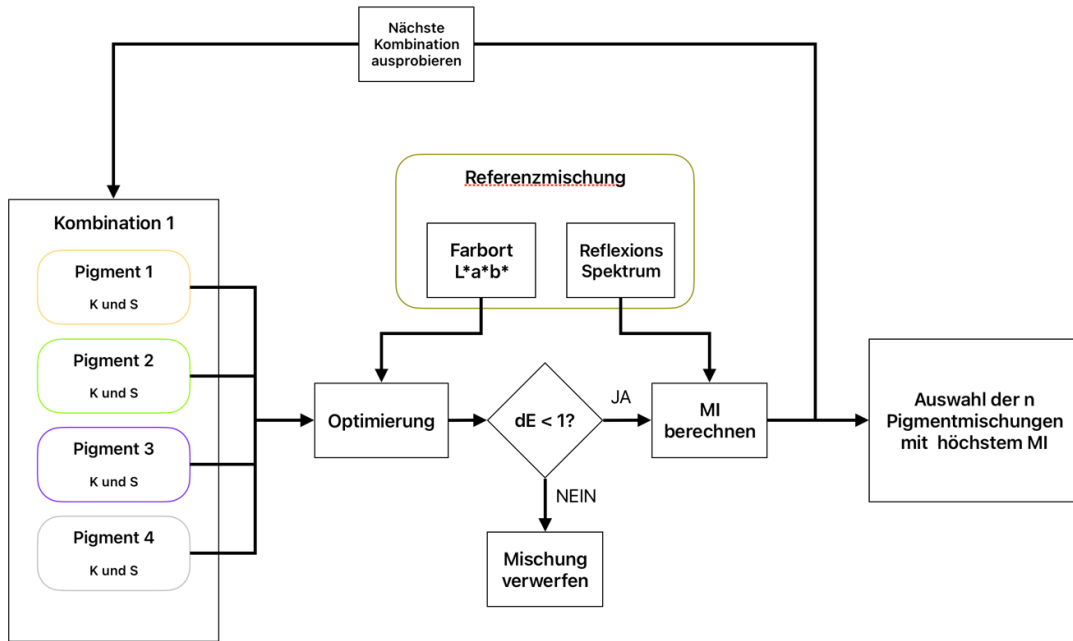


Abbildung 3.3 Schema zur Berechnung von metameren Farbmischungen
(Quelle: Eigene Darstellung)

Um die Mischung mit den besten Eigenschaften zu finden, wurden alle möglichen Pigmentkombinationen nacheinander durchgerechnet. Die Anzahl der Pigmente in einer Mischung wurde auf $N = 4$ begrenzt. Die Anzahl zur Auswahl stehenden Pigmenten beträgt $n = 32$. Die Anzahl der sich ergebenden möglichen Kombinationen errechnet sich mit dem Binomialkoeffizienten

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{(N-n)!n!} \quad (3.4)$$

zu 35.960 mögliche Kombinationen. Da davon auszugehen ist, dass die allermeisten infrage kommenden Mischungen einen gewissen Anteil Weiß enthalten, wurde Titanweiß als obligatorische Komponente festgesetzt (Mischungen ohne Weiß sind dennoch möglich, in dem die Konzentration von Weiß mit $c = 0$ angegeben wird). Dadurch reduzierte sich die Anzahl der möglichen Kombinationen auf 4.495, was die Rechenzeit erheblich verkürzt.

3.4.2 Bestimmung der Referenzen

Um den zuvor beschriebenen Algorithmus anwenden zu können, braucht es eine Referenzmischung von Pigmentfarben und ein definiertes Beleuchtungsspektrum, zu welchem der $L^*a^*b^*$ Farbort angenähert werden kann. Im Prinzip kann jede Pigmentmischung und Beleuchtung als Ausgangspunkt verwendet werden, jedoch gibt es einige Dinge zu beachten. So lassen sich für Farborte, die am Rand des Gamuts der 32 Pigmente liegen, mit

hoher Wahrscheinlichkeit keine metameren Matches mischen. Ein voll gesättigtes Blau etwa ließe sich nur durch das reine Pigment oder vielleicht spektral sehr ähnliche Pigmente erreichen. In ihrem Paper *Counting Metameric Object Colors* untersuchten Stiles & Wyszecki (1962) die Anzahl von möglichen metameren Matches für einen gegebenen Farbart. Sie kommen zu dem Schluss, dass diese in der Nähe der neutralen Farben am höchsten sind. Ihre Überlegungen hierzu sind komplex und finden in dieser Arbeit keine Anwendung. An dieser Stelle soll aber auf die Möglichkeit hingewiesen werden, in erweiterten Untersuchungen den Bereich der Ausgangsfarben sinnvoll einzugrenzen.

Auf der Seite der Beleuchtungsspektren ist anzunehmen, dass auch hier die Wahl der Referenz eine Rolle spielt. Ziel sollte dabei sein, eine Lichtmischung auszuwählen, die das Metameriepotential der Pigmentmischung aktiviert.

Die Referenzen wurden nach folgenden Kriterien ausgewählt:

1. Es sollten Vorlagen sein, die eine eindeutige Chromatizität aufweisen, d.h. sich deutlich von den neutralen Farben unterscheiden.
2. Verschiedene Farbbereiche sollten vertreten sein.
3. Es sollten einfachen Mischungen aus maximal einem Pigment, Schwarz und Weiß verwendet werden.
4. Es soll sichergestellt werden, dass für Referenzmischung und Beleuchtungsspektrum metamere Mischungen gefunden werden können, die sich ausreichend stark spektral unterscheiden.

Hinsichtlich der Wahl der Pigmente war meine Überlegung, ausgehend von dem Konzept der Farbinkonsistenz die in Abschnitt 2.2.2 beschrieben wurde, dass Metameriefekte auftreten würden, wenn für die Referenzmischungen Ausgangspigmente mit niedriger Farbinkonsistenz und für die Matches Pigmente mit hoher Farbinkonsistenz verwendet würden. Auf Basis dieser Überlegungen habe ich Konzept zur Bestimmung der Referenzmischungen und -beleuchtungen entwickelt, das sich in der praktischen Anwendung allerdings als nur eingeschränkt geeignet erwies. Der Lesbarkeit halber wurden die Details der Methode in den Anhang verschoben.

3.5 Implementierung in Python

Der Code für die Berechnungen der Farbmischungen und die Analyse der Messungen wurde in der Programmiersprache Python umgesetzt und ist auf dem beigelegten USB-Stick zu finden. Die Datei `Farbmetrik_Funktionen` enthält alle Funktions- und Klassendefinitionen. Im Folgenden werden die wichtigsten Klassen und Funktionen kurz erläutert. Die vollständige Dokumentation des Codes erfolgt auf beiliegenden USB Stick. Teile des Codes wurden mit Hilfe von generativer KI (ChatGPT Version GPT-4).

3.5.1 Klassendefinitionen

Zentrales Element sind die Klassen `Pigment` und `PigmentMix`. Die `Pigment`-Objekte enthalten als Attribute eine ID, den Pigmentnamen, Farbbereich, Bestellcode, sowie die Spektraldaten von R , K und S . Mit der Funktion `calc_KandS()` lässt sich aus einer CSV-Datei, die die Reflexionsspektren von Vollton- und Weißausmischungen sowie die Konzentrationen enthält, direkt eine Liste von `Pigment`-Objekten erstellen. Wenn bereits eine CSV-Datei mit K - und S -Spektren existiert, kann mit der Funktion `get_pigments()` nach ID, Name oder Farbbereich gefiltert werden.

Die Klasse `PigmentMix` hat zusätzlich zu den oben genannten Attributen das Attribut `components`, welches ein Dictionary mit den enthaltenen `Pigment`-Objekten und den korrespondierenden Konzentrationen enthält. Sie enthält die Konstruktor-Methode `from_components()`, mit der sich eine Instanz über ein Dictionary der gleichen Form erstellen lässt. Die R -, K - und S -Spektren der Mischung werden damit automatisch berechnet. Alternativ lassen sich `PigmentMix` Objekte mit der Funktion `get_pigment_mixtures()` aus einer Tabelle mit gemessenen Reflexionsspektren erstellen.

Beide Klassen enthalten eine Klassenmethode `lab()`, die den $L^*a^*b^*$ Farbart des `Pigments/` der Mischung zu einem der im Ordner `Lichtarten` gespeicherten Beleuchtungsspektrum zurückgibt. Die Spektren müssen als `np.ndarray` gespeichert werden und Spektraldaten von 360nm – 740nm im Abstand von 5nm enthalten. Zusätzlich enthalten ist eine Methode `plot()`, mit der sich die R -, K -, oder S -Spektren direkt plotten lassen.

3.5.2 Farbmetrik

Neben den zwei zentralen Klassen gibt es zahlreiche selbstgeschriebene Funktionen, die elementare farbmetrische Berechnungen durchführen. Dazu gehören die Berechnung von CIE $L^*a^*b^*$, CIE XYZ und CIE xyY . Für die Berechnung von CIEDE2000 wurde die Bibliothek `colour` verwendet.

3.5.3 Optimierung von Licht und Pigmentmischungen

Die Optimierung der Lichtmischungen wird von der Funktion `light_mix_opt()` übernommen, der als Argumente ein 1-D Numpy-Array mit den Werten für f_{opt} sowie der Ziel-farbort in der Form `[x, y, 1]` als Liste übergeben werden. Die Farborte der LEDs des ETC Source4 sind fest im Code verankert. Der Rückgabewert der Funktion enthält das Ergebnis der Optimierung und ist ein Objekt vom Typ `scipy.optimize.OptimizeResult`. Die Funktion `search_metamers()` findet metamere Mischungen von Pigmentfarben zu einer Referenzmischung, die als `PigmentMix`-Objekt übergeben wird. Weitere Argumente sind eine Liste mit `Pigment`-Objekten, die für die Mischung zur Verfügung stehen. Optionale Parameter sind ein String mit der Lichtart, die Farbabstandsschwelle, Anzahl der Komponenten im Mix, obligatorische und zu ignorierende Pigmente.

Für die Optimierungen wurde in beiden Fällen die Funktion `minimize()` aus der Bibliothek `scipy.optimize` mit der Methode SLSQP (Sequential Least Squares Programming) verwendet..

4 Überprüfung der Konzepte

Diese Versuchsreihe beabsichtigt, mit Hilfe eines computergestützten Algorithmus metamere Lichtspektren einer multispektralen Lichtquelle und metamere Mischungen von Pigmentfarben so aufeinander abzustimmen, dass sich die Farborte unter einer Beleuchtung möglichst angleichen, während sich unter anderen Lichtmischungen deutliche wahrnehmbare Farbunterschiede ergeben. Als Ergebnis soll eine Palette mit sechs metameren Farbpaaren entstehen. Für die Übereinstimmung der Farborte wurde ein maximaler Farbstand von $\Delta E_{00} < 2$ angestrebt. Für die Farbunterschiede wurde ein Farbabstand von mindestens $\Delta E_{00} > 6$ zum Ziel gesetzt. Als Nebenbedingung gilt ein konstanter Farbort der Beleuchtungsspektren bei $x, y \approx 0,38$.

Das übergeordnete Ziel wird dabei in verschiedene Teilaufgaben unterteilt.

1. Algorithmus zur Berechnung von Lichtmischungen
2. Erstellen einer Datenbank von Pigmenten mit K- und S-Werten sowie eines Mischalgorithmus zur Berechnung von Farbmischungen
3. Algorithmus, der zu einem vorgegebenen Referenzfarbort, Reflexionsspektrum und Beleuchtungsspektrum die passenden Pigmente aus der Datenbank aussucht und die Farbrezeptur mit der maximalen Metamerie für zur Referenz berechnet.

Alle farbmétrischen Berechnungen wurden auf Basis des CIE 1964 10° Beobachters durchgeführt. Die nachfolgende Grafik veranschaulicht den Versuchsablauf.

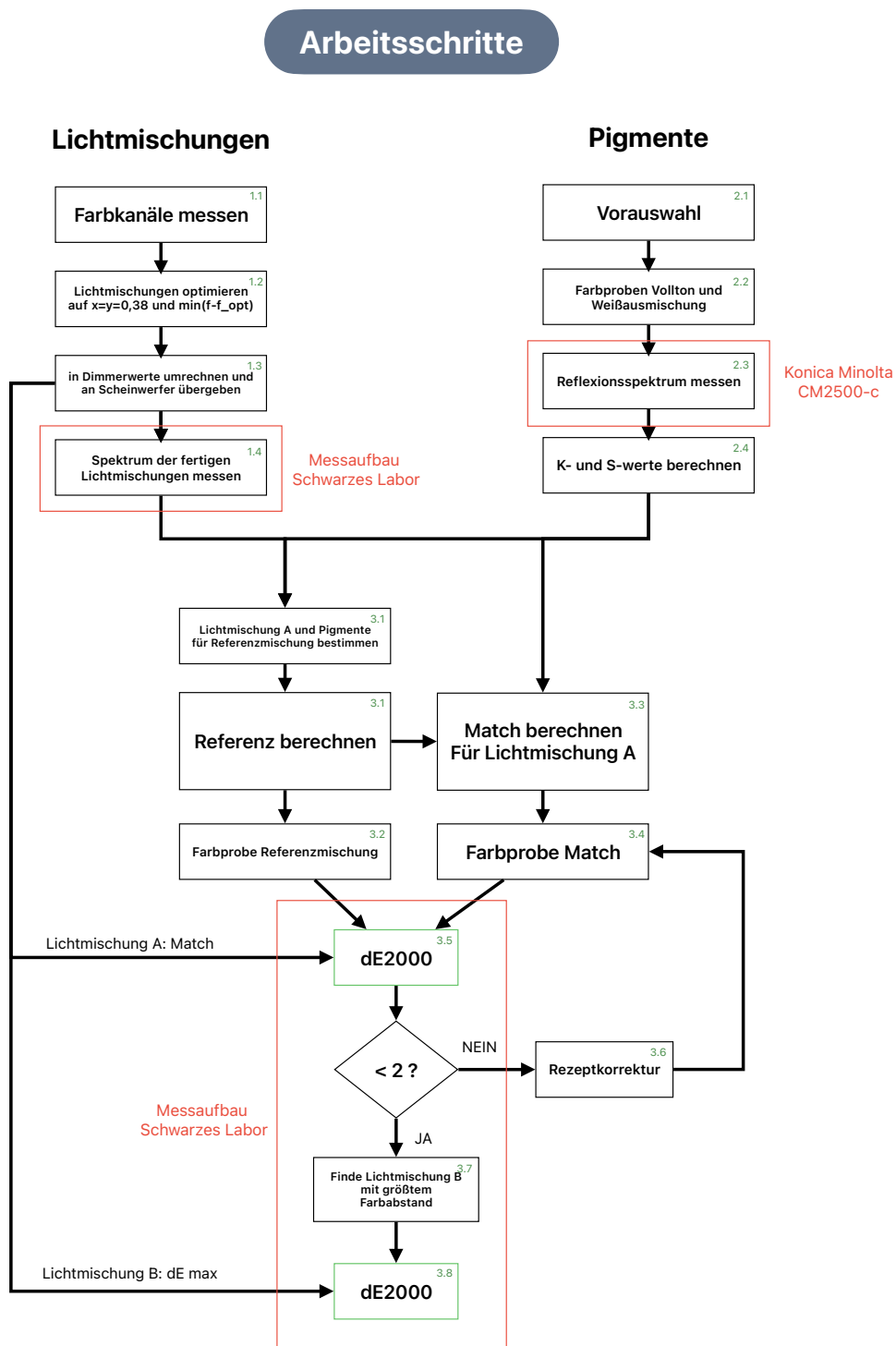


Abbildung 4.1 Arbeitsschritte im Versuchsablauf
(Quelle: Eigene Darstellung)

4.1 Teilversuch 1: Lichtmischungen

In diesem Teilversuch geht es um die Überprüfung des Konzeptes zur Erstellung der metameren Lichtmischungen. Dazu werden mehrere Messungen durchgeführt. Zunächst müssen, um die Optimierung überhaupt durchführen zu können, die Spektren der Farbkanäle des Scheinwerfers einzeln gemessen werden. Im Anschluss daran werden unter Verwendung der gemessenen Spektren und des in Kapitel 3.3 vorgestellten Konzeptes Dimmerwerte für 16 verschiedene Lichtmischungen berechnet. Diese wurden daraufhin überprüft, indem sie an den Scheinwerfer übergeben und die resultierenden Lichtspektren mit dem Photospektrometer gemessen wurden. Dabei wurde verglichen, ob der gemessene Farbwert und das gemessene Spektrum mit den berechneten Werten bzw. den Zielvorgaben übereinstimmen.

4.1.1 Messaufbau

Materialien und Geräte:

Lichtquelle: ETC Source Four Series 3 Lustr

Spektroradiometer: JETI specbos 1201, S/N9608096

Reflexionsstandard: Weißreferenz (BaSO_4) PRC Krochmann, S/N 030733

Der Versuchsaufbau besteht aus dem Scheinwerfer, auf einem Stativ montiert. Davor ist im Abstand von ca. 3m der Weißstandard auf der Messchiene angebracht. Das Spektrophotometer befindet sich auf einer Linie zwischen Scheinwerfer und Weißstandard. Der Weißstandard ist in einem Winkel von ca. 30° aus der Normalen herausgedreht, um eventuell auftretende Glanzlichter von der Messung auszuschließen. Die Ansteuerung des Scheinwerfers erfolgt über DMX vom Computer des Schwarzen Labors mit Software dot2onPC unter Verwendung eines ArtNET DMX Interfaces.

Vor Beginn der Messungen wurde die Leuchte eine Stunde lang mit allen Dimmerkanälen auf Maximalwert warmlaufen lassen, um die Verringerung der Lichtleistung durch Wärmeentwicklung zu berücksichtigen. Zwischen den einzelnen Messungen wurde der Vorgang für jeweils 5 Minuten wiederholt, um gleiche Bedingungen für alle Messungen zu erzielen. Diese Überlegung sollte sich jedoch als fehlerhaft erweisen, wie weiter unten dargestellt.

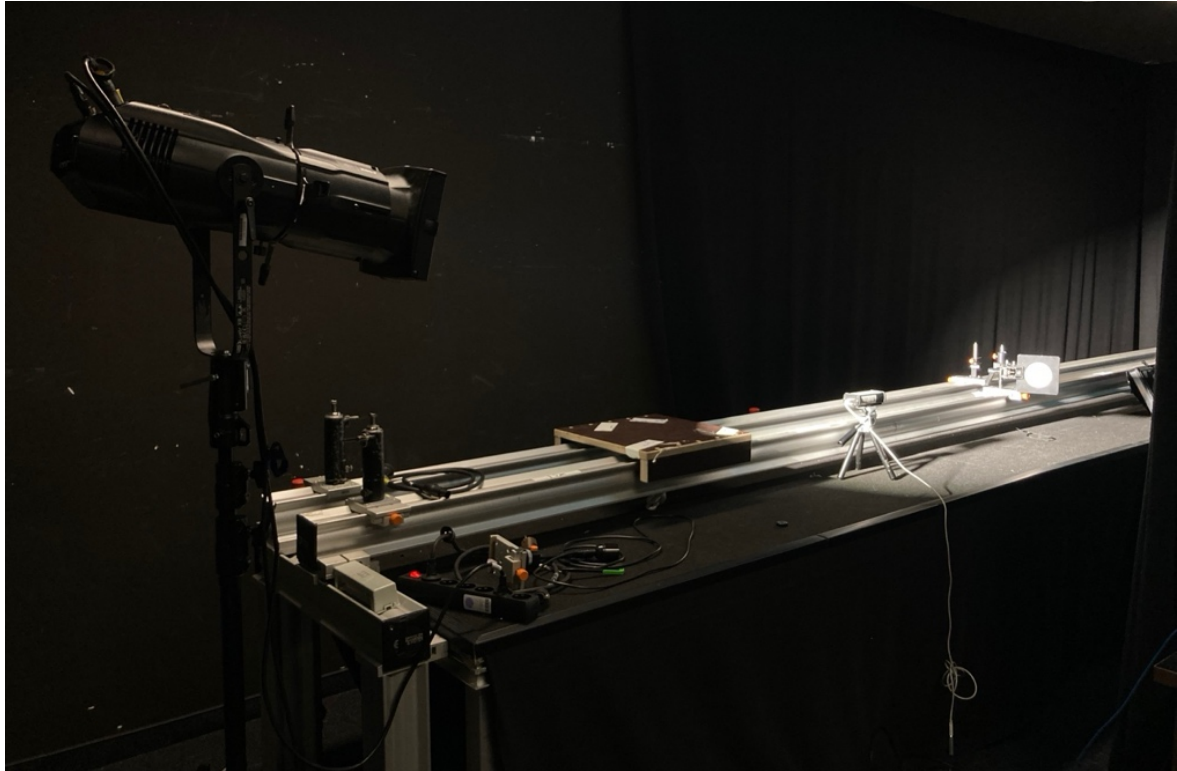


Abbildung 4.2 Messaufbau im Schwarzen Labor der HAW Hamburg
(Quelle: Eigene Aufnahme)

4.1.2 Messung von Spektrum und Farbort der LEDs

Für die Berechnung der Lichtfarbmischungen ist es essenziell, die genauen x,y- Farborte der 8 einzelnen Farbkanäle des ETC Source4 Lustr zu kennen. Zur Skalierung der Optimierungsergebnisse auf Dimmerwerte sowie für die Berechnung der Lichtmischungen aus Dimmerwerten werden die relativen spektralen Energieverteilungen der einzelnen LEDs benötigt. Das Messgerät nimmt das Leuchtdichtespektrum auf, das vom Weißstandard reflektiert wird. Die zugehörige Software ermöglicht die automatische Berechnung des xy-Farborts sowie den Export der Daten in Tabellenform. Da nur die relativen Werte von Interesse sind, spielt der genaue Abstand und Winkel des Weißstandards zum Scheinwerfer keine Rolle – wichtig ist lediglich, dass die Messbedingungen für die einzelnen Kanäle gleich sind.

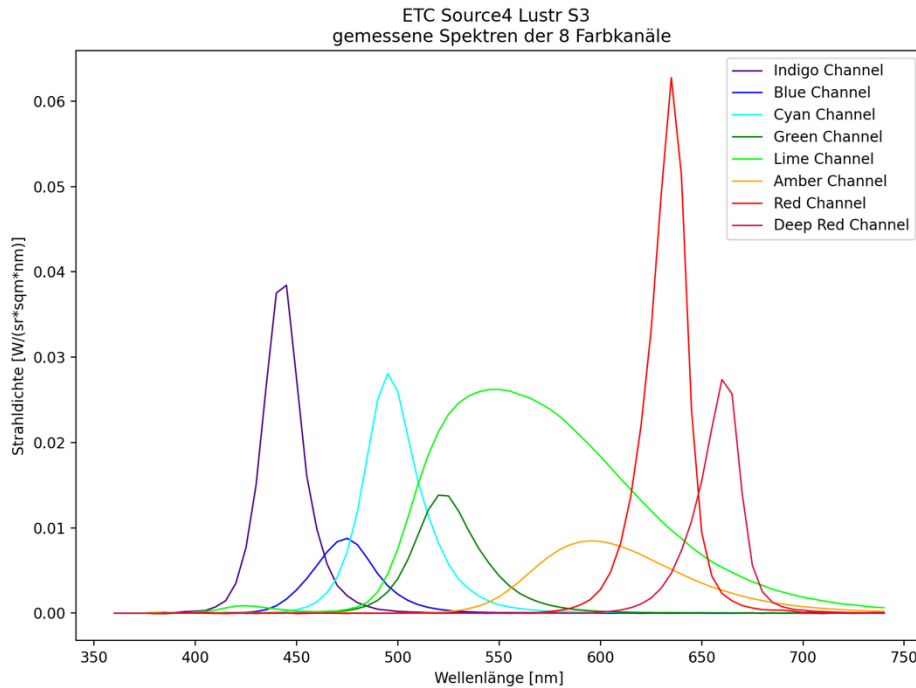


Abbildung 4.3: Gemessene Spektren der Farbkanäle des ETC Source4 Lustr S3
(Quelle: Eigene Darstellung)

Prüfung der Linearität der Dimmerkanäle

Die Anwendung des entwickelten Mischkonzepts erfordert, dass die Addition der Lichtkanäle linear erfolgt. Grundlage der Berechnungen ist jeweils das Spektrum sowie der xy-Farbort der maximal ausgesteuerten Einzelkanäle. Es wird dabei angenommen, dass sich die spektrale Zusammensetzung der Kanäle bei Helligkeitsreduktion nicht signifikant verändert und die resultierende Lichtleistung proportional zur Ansteuerung ist. Zur Überprüfung der Linearität der Dimmerkanäle erfolgte eine spektrale Analyse in Dimmerschritten von jeweils 10 %.

Die gemessenen Spektren wurden mit den theoretisch erwarteten Werten bei Annahme linearen Verhaltens verglichen. Zu dem Zweck wurden die Spektralwerte bei voller Aussteuerung mit den Prozentwerten des Dimmerkanals multipliziert und gemeinsam mit den gemessenen Werten in einem Graph geplottet. Bei linearem Verhalten der Dimmerkanäle sollten beide Graphen exakt übereinander liegen.

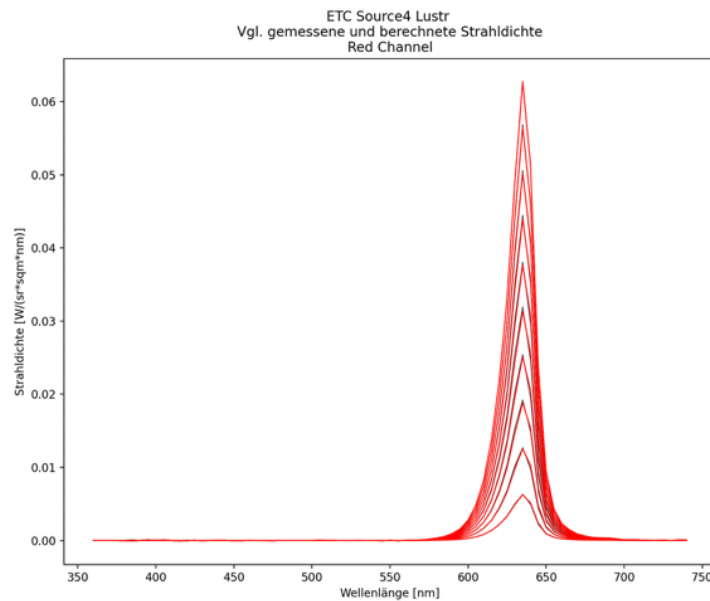


Abbildung 4.4 Linearitätsprüfung des Rot-Kanals in Dimmerschritten von 10%
Gemessene (rot) und berechnete Spektren(Schwarz) liegen exakt übereinander
(Quelle: Eigene Darstellung)

Wie in den Abbildungen oben beispielhaft für den Rot-Kanal zu sehen, stimmen die Werte für die meisten Farbkanäle des S4 gut überein, sodass hier von einem linearen Verhalten ausgegangen werden kann. Lediglich beim Amber-Kanal bestehen deutliche Abweichungen. Deswegen wurden die Messungen für den Amber-Kanal wiederholt, um Messfehler auszuschließen. Auch die zweite Messung zeigte die gleiche Abweichung vom linearen Verhalten wie die erste Messung.

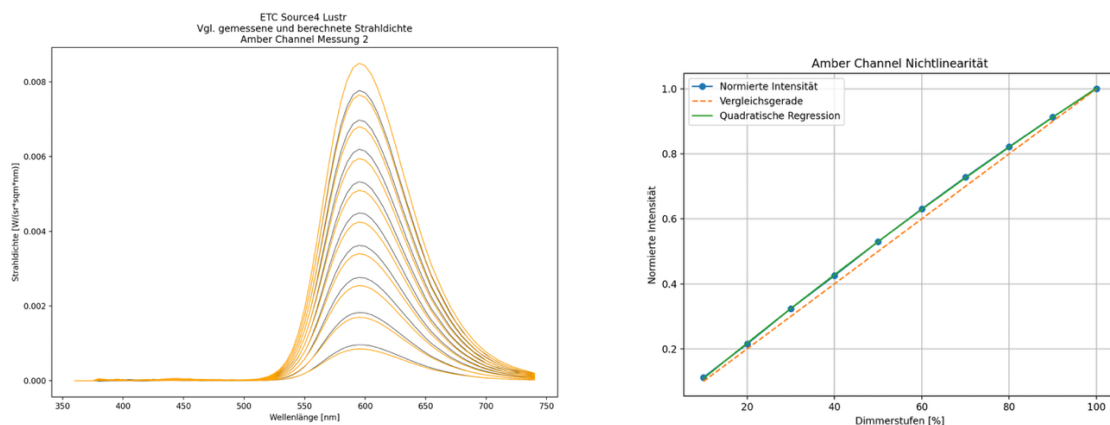


Abbildung 4.5 Abweichung vom Linearen Verhalten beim Amber-Kanal des Source4.
(Quelle: Eigene Darstellung)

Eine angedachte Korrektur des Amber-Kanals mittels einer quadratischen Vorentzerrungsfunktion wurde aus Zeitgründen, und weil der Einfluss im Vergleich zu anderen Faktoren wie dem Temperaturdrift als gering eingeschätzt wurde, nicht umgesetzt.

4.1.3 Berechnung der Dimmerwerte für den Scheinwerfer

Mit den zuvor gemessenen Spektren wurden die Lichtmischungen nach der in 3.3 beschriebenen Methode berechnet. Die Benennung der Lichtmischungen erfolgte nach dem Farbkanal (z.B. *DR* für *Deep Red*) und *max* oder *min*, je nachdem der maximale oder minimale Anteil des Kanals angestrebt wurde. Die berechneten Werte des Optimierungsergebnisses beziehen sich auf den Anteil des Farbkanals an der Gesamtmischung. Diese Werte können nicht direkt an den Dimmer übergeben werden, da die Farbkanäle des Scheinwerfers alle eine unterschiedliche maximale Strahlungsleistung und Helligkeit haben. Daher muss das Ergebnis der Optimierung f_{res} erst gewichtet werden. Die korrekte Normierung erfolgt mit der Summe der XYZ-Werte des jeweiligen Kanals in maximaler Aussteuerung:

$$f_{g,i} = \frac{f_{res,i}}{X_{i,max} + Y_{i,max} + Z_{i,max}} \quad (4.1)$$

Hierbei muss angemerkt werden, dass ich zunächst nicht in der Lage war, die korrekte Normierung zu finden. Nachdem die Gewichtung mit den gemessenen Leuchtdichten L_v der Kanäle sowie mit den Strahldichten L_e in der Rückrechnung der Mischspektren nicht das korrekte Ergebnis erzielten, lieferte die Normierung mit dem Integral der mit w_λ (Formel (2.11)) gewichteten Spektren eine akzeptable Annäherung an das erwartete Ergebnis. Die korrekte Normierung konnte erst im Nachhinein durch die detaillierte Herleitung von Formeln (3.1) und (3.2) ermittelt werden (siehe Anhang).

Im Anschluss wurden die Ergebnisse so skaliert, dass der Kanal mit größtem Wert auf 100 % gesetzt wird, um den verfügbaren Helligkeitsbereich der Farbmischung voll auszunutzen. Die Dimmerwerte, die schließlich dem Scheinwerfer übergeben werden, ergeben sich damit zu:

$$f_{Dimmer} = 100 \cdot \frac{f_g}{f_{g,max}} \quad (4.2)$$

Die so berechneten Dimmerwerte finden sich in einer Tabelle im Anhang.

4.1.4 Ergebnis der Messung

Zur Überprüfung der Ergebnisse des Optimierungsalgorithmus wurden unter Verwendung der berechneten Dimmerwerte sowie der in Abbildung 4.3 dargestellten Einzelspektren der Farbkanäle die Spektren der Mischungen und deren Farborte berechnet.

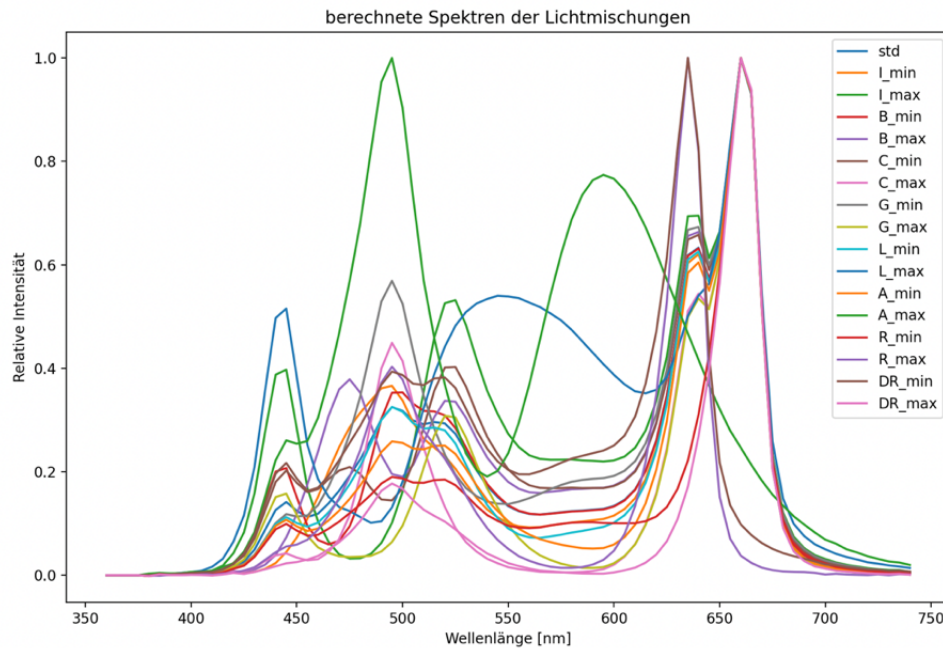


Abbildung 4.6 Berechnete Spektren der Lichtmischungen
(Quelle: Eigene Darstellung)

Wie in Abbildung 4.6 zu sehen, ergeben sich eine Vielzahl von Spektren mit deutlich abweichenden Energieverteilungen – ein deutliches Zeichen für starke Metamerie. Andererseits lässt sich aus den geplotteten Spektren bereits erahnen, dass sich diverse Gruppen von Spektren mit ähnlichen Eigenschaften bilden. Am deutlichsten heben sich die Spektren von $L_{\max}$ und $A_{\max}$ von den restlichen Spektren ab. Wie Abbildung 4.7 zu sehen ist, zeigen die berechneten Lichtmischungen geringfügige Abweichungen im Farbort, aufgrund der weiter oben beschriebenen inkorrekten Normierung. Mit der korrekten Normierung treffen alle berechneten Spektren exakt den Zielfarbort. Der hierdurch entstandene Fehler ist aber im Vergleich zum LED-Drift eher gering.

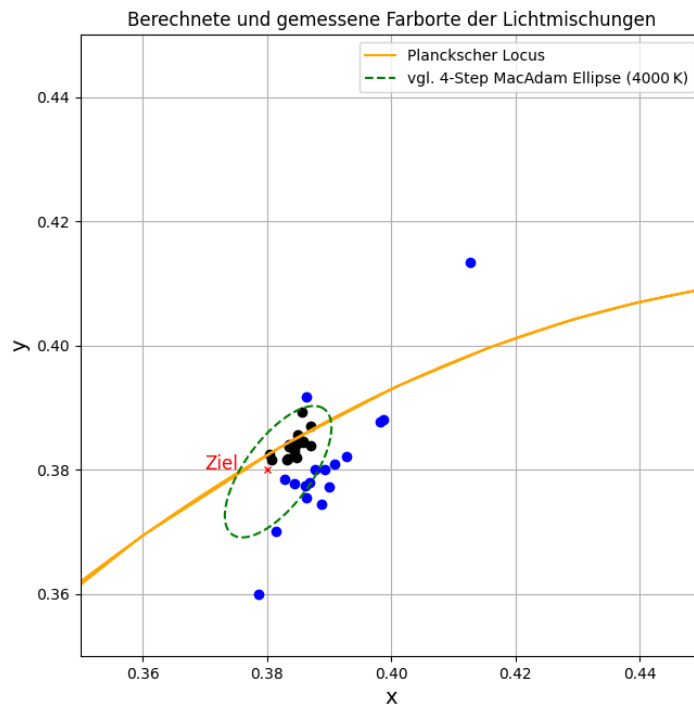


Abbildung 4.7 Farborte der Lichtmischungen in der CIE x-y-Ebene. Schwarze Punkte repräsentieren berechnete, blaue Punkte gemessene Werte. Zur Orientierung wurde der plancksche Kurvenzug und eine 4-Step Macadam-Ellipse nach ANSI C78.377 (Daten entnommen aus LUXEON S Datasheet (2013)) mit in das Diagramm eingezeichnet. (Quelle: Eigene Darstellung)

Zusätzlich wurden die Dimmerwerte mithilfe der Software dot2onpc über DMX an den Scheinwerfer gesendet. Da die erzeugten Lichtmischungen in den Helligkeiten stark abweichen, wurden alle Lichtmischungen mit dem Master-Dimmer auf eine annähernd gleiche Helligkeit skaliert. Dann wurden für jede Lichtmischung das Spektrum und der Farbort gemessen. Hierfür wurde wieder der in 4.1.1 bereits beschriebene Messaufbau verwendet. Wie zu erwarten, zeigen hier die Farbort eine deutlich weitere Streuung, da Faktoren wie Temperatureinflüsse, ungenaue Skalierung der Dimmerwerte und Messungenauigkeiten hinzutreten. Hier liegt die mittlere Abweichung Δ_{xy} vom Zielfarbort bei 0,013 mit Ausreißern von bis zu 0,047. Die Messungen der Farborte sind allerdings nur bedingt aussagekräftig, da sie infolge von Temperaturdrift starken Schwankungen unterliegen können. Generell lässt sich jedoch feststellen, dass die Ergebnisse im Großen und Ganzen mit den Erwartungen übereinstimmen.

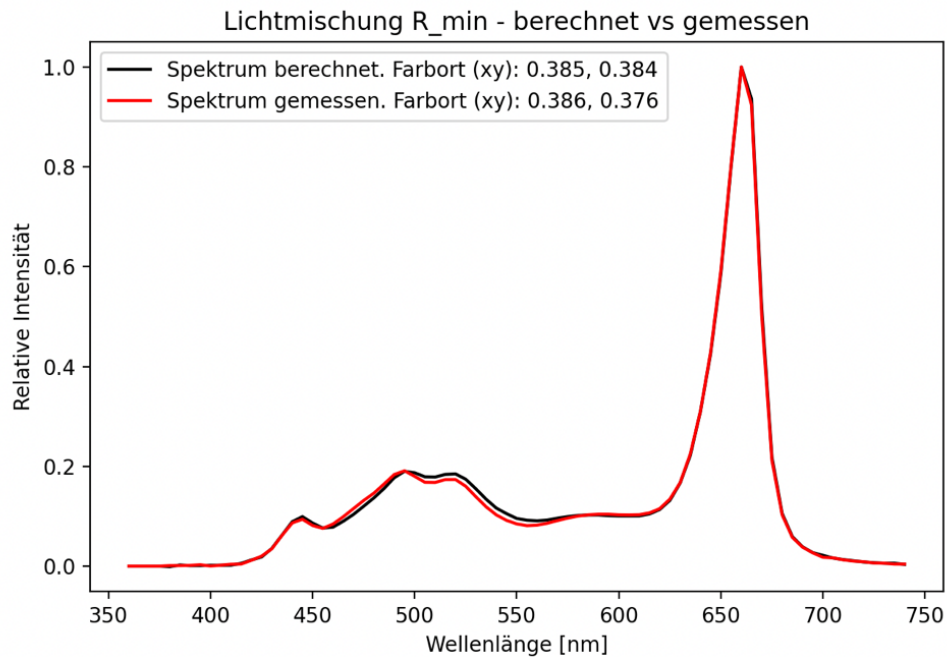


Abbildung 4.8 Vergleich zwischen berechnetem und gemessenem Spektrum R_{min}
(Quelle: Eigene Darstellung)

Fehleranalyse

Ein bekanntes Problem mit signifikantem Einfluss auf das Ergebnis ist der Drift der LED-Engine des Scheinwerfers unter Wärmeeinfluss. Mit steigender Temperatur geht der emittierte Lichtstrom einer LED deutlich zurück. Bei unterschiedlichen LED-Farben zeigt sich der Rückgang dabei unterschiedlich stark ausgeprägt. Zusätzlich zum Rückgang der Intensität kann zudem eine Verschiebung des Farbortes auftreten. Diese Faktoren erschweren die Aufgaben, ein konsistent reproduzierbares Spektrum mit gleichbleibenden Eigenschaften zu erzeugen. LEDs verfügen normalerweise über eine aktive Messung und Regelung, um dem entgegenzuwirken. Wie genau die Regelung des Scheinwerfers funktioniert, ist Herstellerwissen und kann nicht nachvollzogen werden.

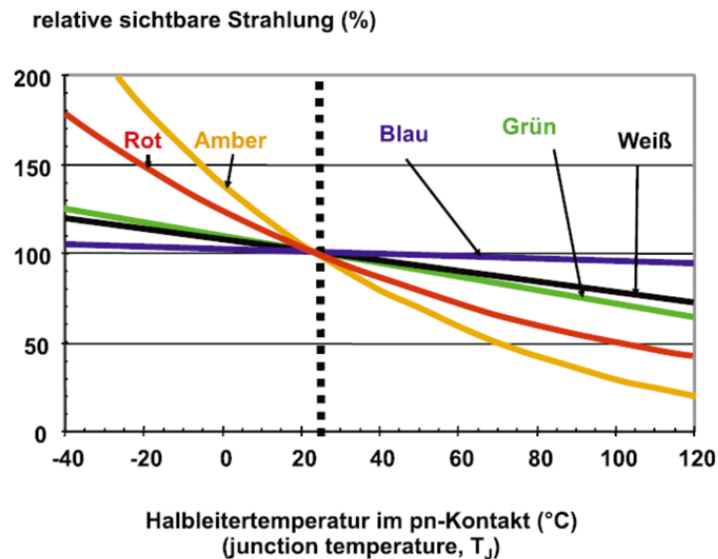


Abbildung 4.9 Abnahme der Lichtleistung verschiedener LEDs bei steigender Temperatur (Quelle: Greule, 2021)

Aus den oben genannten Gründen sollten die Spektren unter vergleichbaren thermischen Bedingungen aufgenommen werden, welche sich jedoch nur grob abschätzen lassen. Generell lässt sich jedoch sagen, dass mit einer Messung einer Lichtquelle gewartet werden sollte, bis diese sich thermisch stabilisiert hat. Dies ist in diesem Teilversuch nur unzureichend berücksichtigt worden. Zwar wurde der Scheinwerfer – entsprechend der Empfehlung – vor Beginn der Messreihe auf voller Leistung vorgewärmt, jedoch wurden die einzelnen Lichtmischungen anschließend ohne ausreichende Wartezeit zur thermischen Stabilisierung direkt gemessen. Dies ist problematisch, da die einzelnen LEDs nach dem Umschalten unterschiedlich stark abkühlen und sich dadurch die Gewichtung der Kanäle verschiebt.

Ursprünglich war vorgesehen, die jeweils gemessene Mischung unmittelbar nach dem Aufwärmen als Referenz zu verwenden (Vorgehen: Scheinwerfer auf 100 %, 30 Sekunden warten, dann Referenzmessung). Dieses Verfahren erwies sich jedoch als unpraktisch, da in Teilversuch 3 verschiedene Proben unter gleichen Bedingungen gemessen werden müssen und die dafür benötigte Zeit zu lange ist. Im weiteren Verlauf wurde daher das Verfahren angepasst, und die Messungen erfolgten erst nach einer thermischen Einlaufzeit von ca. 10 Minuten. Dies führte zwar zu stabileren Messbedingungen, jedoch wich der resultierende Farbort teilweise deutlich von diesen ersten Messungen ab, die als Grundlagen für alle weiteren Berechnungen verwendet wurden.

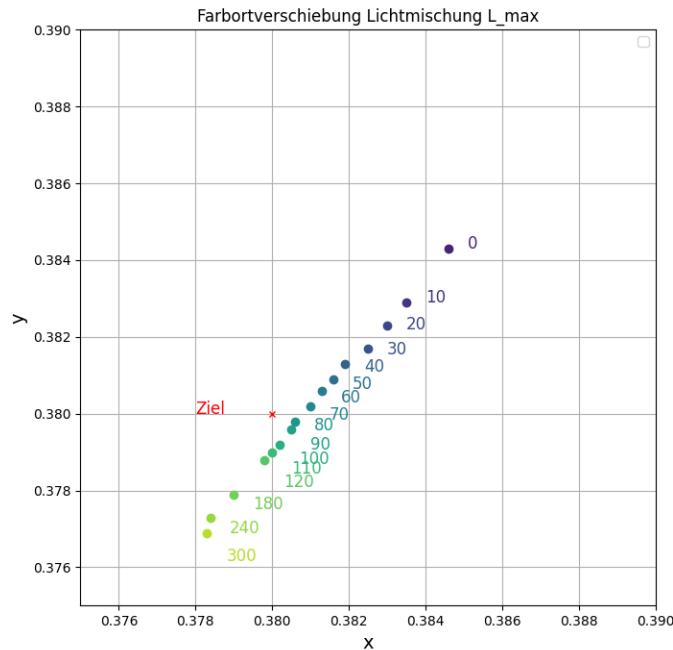


Abbildung 4.10 Farbortverschiebung der Lichtmischung L_{max}
 Die Beschriftung gibt die Zeit in Sekunden nachdem Umschalten von voller Leistung auf L_{max} an. (Quelle: Eigene Darstellung)

4.2 Teilversuch 2: Erstellen der K und S Datenbank / Mischalgorithmus

In diesem Abschnitt wird dargestellt, wie die Absorptions- und Streukoeffizienten für die 32 Pigmente ermittelt wurden und die Limitationen der verwendeten Methode analysiert

4.2.1 Bestimmung der K- und S-Werte

Für die Bestimmung der K- und S- Werte wurden von jedem der verwendeten Pigmente zwei Proben, einmal im Vollton und einmal als Weißausmischung, hergestellt und mit dem Konica Minolta das Reflexionsspektrum aufgenommen. Für die Proben wurden die Pigmente mit der Digitalwaage abgewogen, mit Gummi Arabicum angespachtelt und mit dem Glasläufer auf der Marmorplatte angerieben. Die angemischte Farbe wurde mit einem feinen Kunsthaarpinsel auf Kontrastkarton aufgetragen. Dabei ist auf einen gleichmäßigen Farbauftrag und gute Deckung zu achten. Auf dem Kontrastkarton wurde Name und Konzentration des chromatischen Pigments notiert. Welche Konzentration für die Weißausmischung verwendet wird ist grundsätzlich unerheblich, wichtig ist jedoch, dass ein ausreichend großer Farbunterschied zwischen Weißausmischung und Vollton besteht. Entsprechend der Empfehlung von Berns & Mohammadi (2007) wurde ein Farbton nahe der maximalen Buntheit angestrebt. In der Regel wurde mit einer

Konzentration von 50 % gearbeitet. Bei Pigmenten mit hoher Färbekraft wie Eisen-oxidschwarz oder Phtaloblau, wurde eine Konzentration von 25% angesetzt.



Abbildung 4.11 Anfertigen der Farbproben
(Quelle: Eigene Darstellung)

Saunderson-Korrektur

Wie in Kapitel 2.5.2 beschrieben, ist es üblich, bei der Bestimmung der K und S- Werte die Saunderson-Korrektur zur Kompensierung der Oberflächeneffekte der Farbschicht anzuwenden. Dabei treten jedoch einige Schwierigkeiten auf:

- Angaben zum Brechungsindex von Gummi Arabicum in der verfügbaren Literatur variieren erheblich.
- Die Bestimmung der Konstanten lässt sich nicht ohne größeren Aufwand berechnen. Eine Anpassung der Konstanten mittels Optimierungsalgorithmen ist prinzipiell möglich (siehe Okumura, 2005), stellt aber im Zusammenhang mit dieser Arbeit einen unverhältnismäßigen Aufwand dar.

Zudem basieren die Formeln für die Saunderson-Korrektur gemäß ISO-18314-2:2023 auf der Annahme einer idealen Oberfläche, einer vollständig deckenden Schicht sowie einer vollkommen diffusen Lichtstreuung innerhalb der Farbschicht. Die Verfasser legen deshalb nahe, dass Abweichungen von den o.g. Bedingungen den Nutzen der Korrekturen beeinträchtigen. In meinem Versuch ist jedoch nur die Bedingung der deckenden Schicht in guter Näherung erfüllt.

4.2.2 Berechnung und Überprüfung der Mischung

Zur Überprüfung des Mischalgorithmus wurden zwei Mischungen präpariert. Die zugegebenen Pigmente wurden präzise abgewogen und das Mischverhältnis dokumentiert. Die Auswahl der Pigmente für diese Testmischungen erfolgte willkürlich. Farbproben dieser Mischungen wurden auf Kontrastkarton aufgetragen und das Reflexionsspektrum wurde erfasst. Die notierten Mischverhältnisse / Konzentrationen und die K- und S-Spektren der Pigmente dienten als Grundlage für die Berechnung der Reflexionsspektren, einmal mit und einmal ohne Saunderson Korrektur. Für die Saunderson-Korrektur wurde die in der (ISO-18314-2:2023, 2023) angegebene Formel für Messgeräte mit 45°/0° Messgeometrie verwendet. Für Reflexionskoeffizienten wurden die in der Literatur angegebenen Standardwerte für Lacke mit Brechungsindex $n = 1,5$ verwendet:

$$r_0 = 0,04 \quad \bar{r}_0 = 0,05 \quad r_2 = 0,596$$

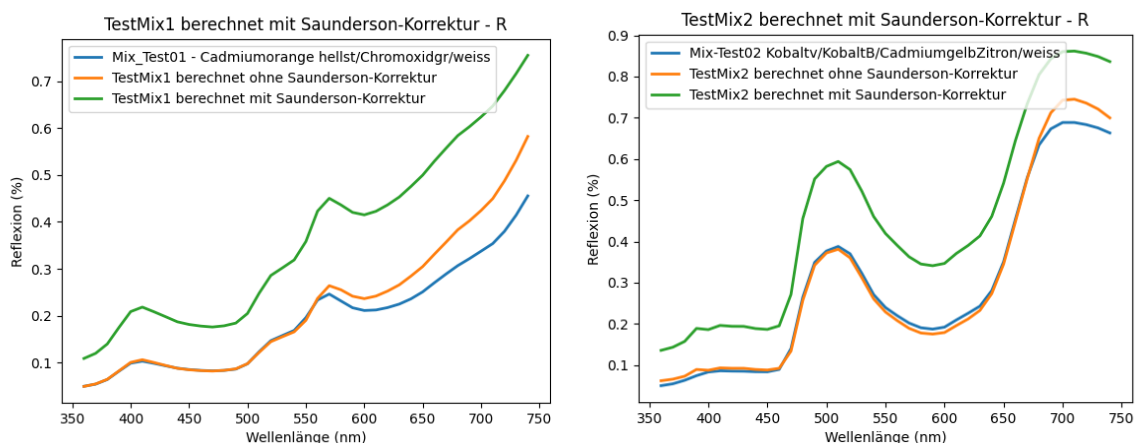
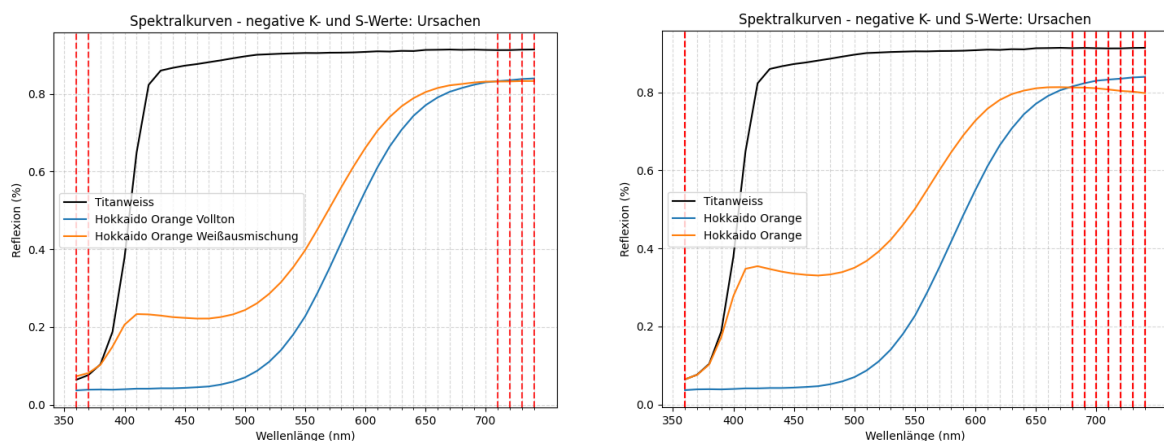


Abbildung 4.12 Testmischungen mit und ohne Saunderson-Korrektur
(Quelle: Eigene Darstellung)

Der Vergleich zwischen berechneten und gemessenen Reflexionsspektren zeigt sehr gute bis befriedigende Übereinstimmung für die Berechnungen ohne Saunderson Korrektur. Bei den Berechnungen unter Anwendung der Saunderson-Korrektur wurde die Helligkeit beider Proben deutlich überschätzt. Gründe hierfür könnten eine deutliche Abweichung des tatsächlichen Brechungsindex des verwendeten Mediums im Vergleich zum Literaturwert von 1,5 sowie Abweichungen von den zuvor beschriebenen Nebenbedingungen sein. Da die Berechnung ohne Saunderson-Korrektur im Test bereits gut Ergebnisse lieferte, wurde für alle folgenden Berechnungen mit den unkorrigierten K- und S-Werten gearbeitet.

Systematischer Fehler: negative / verzerrte K und S

Den zunächst positiven Ergebnissen aus Testmischungen 1 und 2 zum Trotz, wurden im weiteren Verlauf bei einigen Pigmenten signifikante systematische Fehler bei den K- und S-Koeffizienten festgestellt. Besonders auffällig sind dabei stark verzerrte oder sogar negative Werte für K und S, die physikalisch keinen Sinn ergeben. Diese negativen Koeffizienten führen nicht nur zu mathematischen Problemen – etwa bei der Rückrechnung des Reflexionsspektrums aus K- und S-Werten, wo dadurch die Wurzel negativ werden kann – sondern untergraben auch die Plausibilität der Ergebnisse. Die Auffälligkeiten beschränken sich jedoch nicht nur auf negative Werte. Auch positive Ausreißer mit unrealistisch hohen Koeffizienten deuten auf systematische Fehler in dem Modell hin. Die Grenzen der angewendeten Methode sind bekannt und in der Literatur dokumentiert. In der vereinfachten Berechnung wird angenommen, dass das Weißpigment einen konstanten, idealen Streukoeffizienten von $S=1$ über das gesamte Spektrum aufweist. Diese Annahme ist insbesondere im kurzwelligen Bereich unter ca. 410 nm nicht haltbar, da Titanweiß dort stark absorbierend ist. Weiterhin weist Hempelmann (in Kettler et al., 2016) darauf hin, dass bei sehr hellen Pigmenten, insbesondere Gelb und Orangetönen, die Differenz zwischen Vollton und Weißausmischung zu gering ist, um eine robuste Berechnung der K- und S-Werte zu ermöglichen. In diesen Fällen empfiehlt er die Abmischung mit Schwarz. Eine praktische Anleitung zur Berechnung von Koeffizienten mit Schwarzabmischung habe ich jedoch nicht finden können. Abbildung 4.13 zeigt beide Fälle deutlich.



a) 50% Buntpigment in Weißausmischung

b) 25% Buntpigment in Weißausmischung

Abbildung 4.13 Analyse fehlerhafter K- und S-Werte am Beispiel von Hokkaido Orange (Zinn-Zink rutil). Der Plot zeigt die zur Berechnung relevanten Spektralkurven. Stellen mit negativen K- oder S-Werten sind mit einer rot gestrichelten Linie gekennzeichnet. (Quelle: Eigene Darstellung)

Jedoch ist die visuelle Helligkeit eines Pigments allein kein guter Indikator dafür, ob Probleme auftreten. So wird z.B. *Cadmiumgelb zitron*, eines der hellsten und brillantesten Pigmente vom Weiß sehr gut aufgehellt und auch in der Mischung korrekt vorhergesagt, während das sehr dunkle *Cadmiumrot dunkel* Probleme bereitet.

Generell treten also Probleme auf, wenn die Reflexionswerte der Weißausmischung R_t oder des Weißstandards R_w niedriger sind als die des Volltons R_p . Doch auch wenn diese Werte lediglich dicht beieinander liegen, können sich Schwierigkeiten ergeben. In Formel (2.25) zur Berechnung des Zwischenwertes s_0 befindet sich im Nenner die Differenz zwischen Vollton und Weißausmischung – woraus sich in der Konsequenz $R_p = R_t$ eine Polstelle ergibt, in dessen Nähe die Funktion stark divergiert und zu unplausiblen Werten führt. Es wäre also sinnvoll, einen Minimalabstand zwischen R_t und R_p zu definieren, der nicht unterschritten werden darf.

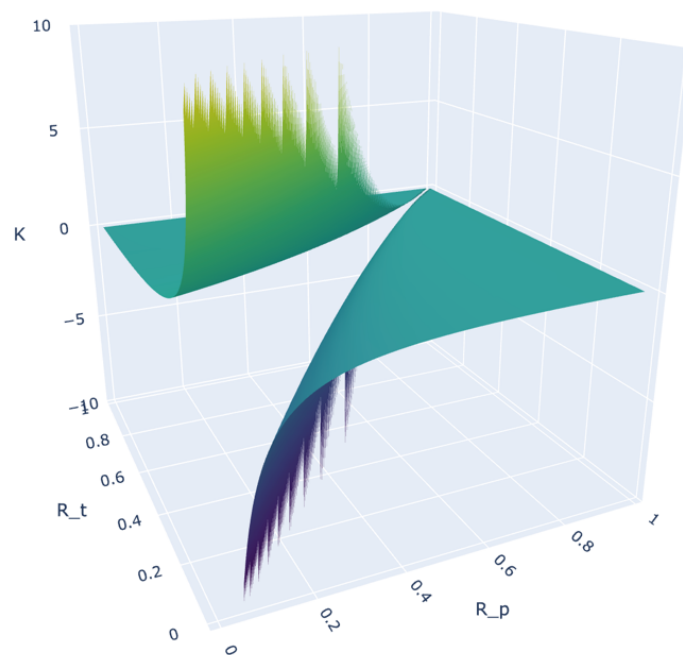


Abbildung 4.14 Absorptionskoeffizient K als Funktion von (R_p) und (R_t)

Nur die linke Hälfte des Plots mit $K > 0$ ist physikalisch bedeutsam. In der Nähe der Polstelle bei $R_t = R_p$ divergiert die Funktion stark.

(Quelle: Eigene Darstellung)

Insgesamt waren 13 von 32 Pigmenten von den Ausreißern bei den K/S Werten betroffen. Bei den meisten zeigten sich die Abweichungen lediglich im weiter oben beschriebenen Absorptionsbereich von Titanweiß mit Wellenlängen < 410 nm. Da dieser Bereich nur

noch wenig zum Farbsehen beiträgt, kann davon ausgegangen werden, dass die Abweichungen für die Berechnungen keine größere Rolle spielen. Als pragmatische Lösung des Problems und zur Vermeidung mathematischer Fehler, wurden diese Koeffizienten aus den Werten um 420 und 440 nm linear extrapoliert. Nur vier der Pigmente zeigten Abweichungen im Wellenlängenbereich von > 410 nm. Bei diesen stellte sich das Problem als schwerwiegender dar, da die fehlerhaften Stellen bis weit in die Mitte des sichtbaren Bereichs hineinwirken. In diesen Fällen wurde versucht, durch eine Wiederholung der Weißausmischung mit niedrigerer Pigmentkonzentration das Ergebnis zu verbessern. Dies war nur in einem der 4 Fälle erfolgreich. Bei den anderen führte das angepasste Mischverhältnis zu keiner Veränderung oder sogar zu einer Verschlechterung der Werte (vgl. Abbildung 4.13). Diese Pigmente wurden verworfen und nicht für die Farbrezeptierung berücksichtigt.

4.3 Teilversuch 3: Farbortmessung von metameren Farbpaa- ren bei unterschiedlichen Beleuchtungsspektren

Die in Abschnitt 3.4 beschriebenen, berechneten metameren Matches wurden gemäß den ermittelten Rezepturen angemischt. Zur Bewertung der Farbgenauigkeit wurden die Erstmischungen im Labor mittels eines JETI-Spektrometers analysiert. Unter der entsprechenden Referenzlichtmischung wurden die $L^*a^*b^*$ -Farborte der Referenz- und der Match-Mischung gemessen und miteinander verglichen. Um die Vergleichbarkeit sicherzustellen, wurde vor jeder Messung die Weißreferenz mit einer Kalibrierscheibe neu bestimmt. Die Messungen wurden unmittelbar jeweils nacheinander durchgeführt. Im Gegensatz zu Teilversuch 1, wo das Weißnormal nur einmal befestigt wurde, mussten hier Weißnormal, Referenz- Farbprobe und Match- Farbprobe mehrfach ausgewechselt werden. Dadurch ließ sich in der ursprünglichen Konstellation der Winkel schlecht kontrollieren. Aus diesem Grund wurde der Aufbau im Labor noch einmal leicht abgeändert: Die Probe wurde in der Normalenachse zum Messgerät angebracht, der Scheinwerfer im maximal möglichen Winkelaus der Achse geschwenkt.

4.3.1 Berechnung und Korrektur des Rezeptes

Generell lässt sich feststellen, dass berechnete Farbrezepturen – selbst unter Anwendung industriell etablierter Verfahren – lediglich eine Näherung darstellen. Eine Nachkorrektur der Erstmischung ist in der Regel erforderlich (Kettler et al., 2016). Zur möglichst genauen Annäherung an den Farbort der Referenz wurde das berechnete Erstre-

zept als Grundlage verwendet, um durch Anpassung der Konzentrationen weitere Verbesserungen zu erzielen. Dabei wurden die Farbproben unter dem Testlicht visuell verglichen. Das Erstrezept wurde angemischt und durch Hinzufügen zusätzlicher Mengen der schon verwendeten Pigmente verändert, bis sich der visuelle Eindruck verbessert hatte. Nach jedem Anpassungsschritt wurde erneut ΔE_{00} gemessen. Aus praktischen Erwägungen wurde die Anzahl der Korrekturschritte auf maximal drei begrenzt. Wenn die Schwelle $\Delta E_{00} < 2$ im dritten Durchgang nicht unterschritten werden konnte, wurde der Vorgang abgebrochen.

Das manuelle Korrigieren der Mischungen erwies sich als schwieriger als ursprünglich angenommen. Das lag insbesondere daran, dass das Schwarze Labor sich nicht gut zum Anmischen der Farben eignet, weshalb ich die Proben bei mir zuhause herstellen musste. Durch den Transport zwischen beiden Orten vergrößerte sich der Zeitaufwand für jede Korrektur erheblich. Eine weitere Schwierigkeit beim Anmischen, das bei manchen Mischungen auftrat und das sich schwer unter Kontrolle bringen lässt, ist das sogenannte Aufschwimmen von Pigmenten. Dieses Problem tritt auf, wenn Pigmente mit deutlich verschiedenen spezifischen Gewichten gemischt werden. Das Pigment mit der geringeren Dichte sammelt sich dann vermehrt an der Oberfläche der Farbschicht und verfälscht den Farbton.

Die Vorhersage der Mischungen mithilfe der Kubelka-Munk Theorie lieferte sehr unterschiedliche Ergebnisse. In einem Fall – dem Match für die grüne Referenzmischung – war überhaupt keine Nachkorrektur nötig. Das angemischten Erstrezept erreichte direkt einen Farbabstand von $\Delta E_{00} = 1,53$. In anderen Fällen, wie der blauen und roten Mischung, wurde die Helligkeit schlecht vorhergesagt. Beide Mischungen waren zunächst deutlich zu dunkel, konnten aber durch Erhöhen des Weißanteils schnell in die Nähe des Zielfarbartes gebracht werden. Die gelbe Referenzmischung wiederum konnte durch die berechneten Rezepte auch nach wiederholter Anpassung der Konzentrationen nicht im Farbort angepasst werden, d.h. der Referenzfarbort liegt außerhalb des Gamuts der vorgeschlagenen Pigment-Komponenten. Um den Farbton der gelben Referenzmischung befriedigend anzunähern, musste ein Rotpigment mit einem Blau- oder Grünpigment ausgetauscht werden. Bei der violetten Mischung wurde der Farbton nach der 2. Iteration bereits recht gut angenähert, aber durch den erhöhten Weißanteil so stark entsättigt, dass weder eine Veränderung der Konzentrationen noch ein Zumischen anderer Pigmente das Ergebnis weiter verbessern konnte.

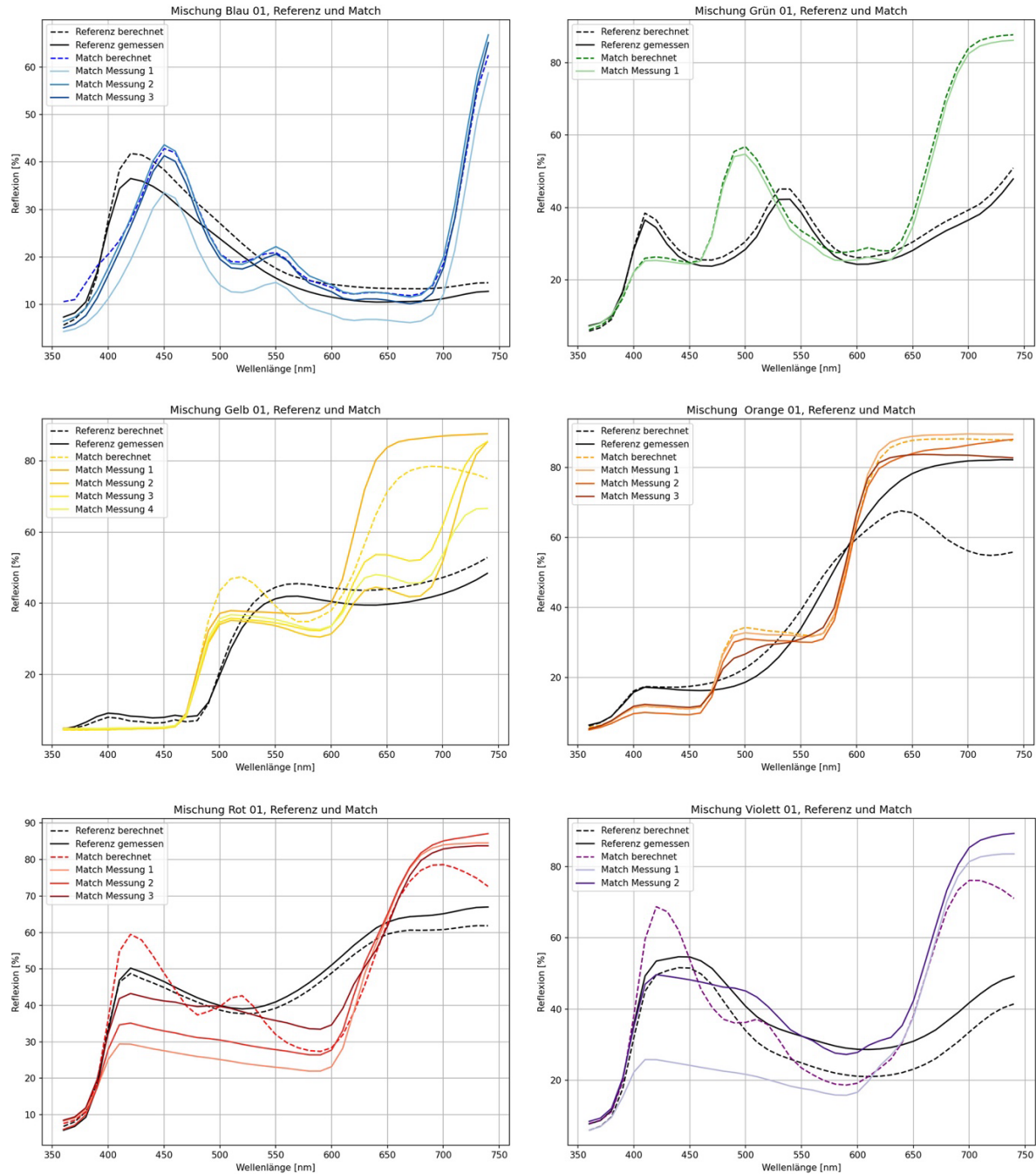


Abbildung 4.15 Reflexionsspektren der Pigmentfarbmischungen
(Quelle: Eigene Darstellung)

4.3.2 Zwischenergebnis

Das selbst gesetzte Ziel für die Matches, einen Farbabstand von $\Delta E_{00} < 2$ zu erzielen, wurde nur bei 3 von 6 Mischungen erreicht. Orange und Gelb sind mit 2,07 und 2,55 noch recht nahe dran – der visuelle Eindruck erscheint bedeutend schlechter als bei Grün oder Blau. Violett ist sowohl messtechnisch als auch visuell unbefriedigend. Insgesamt ließ sich beobachten, dass in allen Mischungen, die das Pigment *Cadmiumrot dunkel* beinhalten, der Anteil dessen an der Gesamtmischung deutlich nach unten korrigiert werden musste. Diese Beobachtungen legen nahe, dass bestimmte Pigmente besser treffende Berechnungen zulassen als andere.

Wie aus den Plots der Reflexionsspektren der Pigmentfarbmischungen ersichtlich wird, konnten metamere (bzw. paramere) Farbpaare erzeugt werden, die sich spektral deutlich unterscheiden. Doch schlagen sich diese spektralen Unterschiede im Zusammenspiel mit den verfügbaren Beleuchtungsspektren auch in sichtbaren Farbdifferenzen nieder? Um dieser Frage nachzugehen, wurden rechnerisch diejenigen Lichtmischungen bestimmt, für die sich der höchste Farbabstand zwischen Referenzfarbmischung und Match ergibt. Mit dem gleichen Messaufbau und -verfahren wie zuvor wurde ΔE_{00} ermittelt und in einer Tabelle zusammengefasst. Der höchste Farbstabstand wurde für das grüne Farbpaar mit $\Delta E_{00} = 17,8$ erreicht.

Tabelle 4.1: Ergebnisse des 3. Teilversuchs

Metameres Paar	Blau	Grün	Gelb	Orange	Rot	Violett
Geringster Farbabstand (Match)						
Lichtmischung	L_{max}	L_{max}	L_{max}	A_{max}	DR_{max}	A_{max}
dE2000	1.7	1.53	2.55	2.07	0.83	3.65
Maximaler Farbabstand						
Lichtmischung	C_{max}	G_{max}	A_{max}	G_{max}	A_{max}	DR_{max}
dE2000	6.41	17.8	8.14	7.81	11.4	16.4

5 Diskussion

Die im vorherigen Kapitel beschriebenen Versuchsreihen zielten darauf ab, metamere Lichtspektren und metamere Pigmentmischungen so aufeinander abzustimmen, dass unter einer Referenzbeleuchtung eine maximale visuelle Übereinstimmung („Match“) und unter einer zweiten Lichtart ein maximaler Farbunterschied („Mismatch“) erzielt werden kann.

Dabei zeigte sich, dass der Erfolg des Projekts vom Zusammenspiel vieler unterschiedlicher Einzelfaktoren abhängt. Abweichungen in einzelnen Teilschritten setzen sich in den darauf aufbauenden Schritten fort. Aufgrund der Limitationen der verwendeten Methoden, der Komplexität der physikalischen Zusammenhänge sowie der Toleranzen der technischen Systeme sind Abweichungen vom Ideal nicht zu vermeiden. Umso wichtiger ist es daher, die Einflüsse dieser Abweichungen einordnen und bewerten zu können. Gleichzeitig ist es bei der Vielzahl der Schritte weder möglich noch zielführend, eine umfassende Fehleranalyse für alle Einflussfaktoren vorzunehmen. Stattdessen werden nur einzelne relevante Aspekte genauer behandelt.

Im Folgenden werden zunächst die wichtigsten Ergebnisse zusammengefasst. Anschließend erfolgt eine übergreifende Bewertung der Methode sowie ein Ausblick auf mögliche Weiterentwicklungen und Anwendungen.

5.1 Zusammenfassung der Ergebnisse

Der erste Teilversuch diente der Erzeugung spektral möglichst unterschiedlicher Lichtmischungen mit konstantem Weißpunkt (~ 4000 K, $x=y=0,38$). Durch Optimierung der LED-Anteile konnten 16 verschiedene Mischungen berechnet werden, von denen fünf für die weiteren Experimente verwendet wurden. Die gemessenen Farbwerte wichen zwar etwas vom Ziel ab, bestätigten aber die grundsätzliche Validität des Ansatzes. Im Laufe der weiteren Versuche zeigte sich, die Varianten mit minimalem Anteil eines Farbkanales nicht benötigt wurden. Die Optimierung auf Maximalwerte genügte zur Erzeugung der spektralen Unterschiede. Von den 16 berechneten Lichtmischungen kamen 5 tatsächlich zum Einsatz.

Für die Bewertung im Gesamtkontext der Arbeit ist zu betonen, dass ein genaues Einhalten des Zielfarbwertes nicht entscheidend war. Wichtiger ist eine nicht zu große Farbdifferenz der Lichtmischungen *zueinander*. Noch entscheidender ist jedoch die Reproduzierbarkeit des Referenzbeleuchtungsspektrums. Gerade hier aber zeigt sich der limitierende Einfluss des LED-drifts auf die Präzision der Match-Bedingungen.

Zur Berechnung von Farbmischungen wurde eine Datenbank von K- und S-Spektren aus Vollton- und Weißausmischungen von 32 Pigmenten erstellt. Der entwickelte Algorithmus zur Vorhersage von Mischspektren zeigte in Stichproben eine gute Übereinstimmung zwischen Berechnung und Messung, allerdings nicht bei allen Pigmenten. Die Abweichungen haben zwei Hauptursachen: Schwierigkeiten bei der Bestimmung der K/S-Koeffizienten sowie die generellen Einschränkungen der Kubelka-Munk-Theorie. Diese beschreibt nicht in allen Fällen die Beziehung zwischen Konzentration und Absorptions- bzw. Streuverhalten korrekt.

Im dritten Teilversuch wurden die Resultate der ersten beiden Teilversuche zusammengeführt, um metamere Farbmischungen zu berechnen, anzumischen und farbmetrisch zu evaluieren. Bei drei von sechs Mischungen wurde die Zielvorgabe von $\Delta E_{00} < 2$ erreicht. Die maximalen Farbdifferenzen („Mismatch“) lagen zwischen $\Delta E_{00} = 6.4$ für Blau und $\Delta E_{00} = 17.8$ für Grün. Damit wurde das Ziel, deutlich wahrnehmbare Farbunterschiede unter Wechsel der Beleuchtung zu erzeugen, insgesamt erreicht.

5.2 Reflexion und Fazit

Die vorliegende Arbeit verfolgte einen explorativen Ansatz, bei dem alle notwendigen Schritte und Konzepte erarbeitet und experimentell bewertet wurden. Aufgrund des thematischen Umfangs und der Vielfalt relevanter Teilbereiche war es mir nicht möglich, jede eingesetzte Methode in der gewünschten Tiefe zu behandeln. In diesem Sinne liegt auch der Fokus der Bewertung nicht auf der Präzision der Einzelschritte, sondern auf deren genereller Verwendbarkeit und ihrem Entwicklungspotential. Insgesamt bestätigen die Versuche die prinzipielle Funktionsweise der Ansätze und zeigen zugleich auf, wo noch Verbesserungspotenzial besteht. Die entwickelten Python-Routinen zur Berechnung der Mischungen sowie die begonnene Pigmentdatenbank liefern eine solide Grundlage für eine weiterführende Beschäftigung mit dem Thema.

Mit der Optimierung der Lichtspektren wurde eine leistungsfähige und vielseitig einsetzbare Methode getestet, die verdeutlicht, auf wie viele unterschiedliche Arten sich ein weißes Lichtspektrum zusammensetzen lässt. Die wesentliche Einschränkung liegt hier in der Physik der LED-Technik. Da für eine detaillierte Analyse letztlich die Zeit fehlte, lässt sich derzeit nicht abschließend beurteilen, wie stark der LED-Drift die Zielsetzung tatsächlich beeinträchtigt.

Die Pigmentmischungen eröffnen eine neue Sichtweise auf die Vielfalt von Farben und Lichtwirkungen. Die gemessenen Mischungsspektren zeigen, dass auch hier viele interessante metamere Kombinationen möglich sind. Der Algorithmus zur Rezeptkalkulation erwies sich dabei in jedem Fall als große Hilfe beim Finden und Anmischen geeigneter Mischungen – auch wenn meist Nachkorrekturen erforderlich waren. Mit etwas Feintuning und Ausschluss der unberechenbaren Pigmente sind sehr brauchbare Vorhersagen zu erwarten.

Ein kritischer Punkt ist die Qualität der verwendeten Referenzmischungen. Das hier angewandte Verfahren zur Bestimmung dieser Mischungen erwies sich als unzureichend. Die Einteilung in Farbbereiche und das Entsättigen der Pigmente für bessere Mischbarkeit war zwar praktikabel, aber nur ungenau definiert und bot keine gute Kontrolle über die resultierenden Farbtöne. Ein sinnvollerer Ansatz wäre, die Bestimmung der Referenzmischungen mit derselben Methode wie für die Berechnung der metameren Matches vorzunehmen. In dem Falle könnte ein Pigment mit dem gewünschten Farbton gewählt und ein Match mit maximalem MI unter Verwendung eines großzügigen Schwellenwertes von z.B. $\Delta E_{00} = 10$ angenähert werden. Bei Bedarf kann der Schwellenwert weiter angehoben oder abgesenkt werden. Auf diese Weise ist es möglich, zwischen genauer Vorgabe des Farbtons und guter Mischbarkeit abzuwägen.

Da es sich bei diesem Versuch letztlich um wahrnehmungsbezogene Phänomene handelt, liefert die Farbmessung nur eine grobe, wenn auch hilfreiche Annäherung. Wie der Farbabstand von einem menschlichen Beobachter wahrgenommen wird, hängt von vielen Faktoren, wie Adaption / Gewöhnungszeit, Beobachtermetamerie, Einfluss von Glanzeffekten sowie Struktur und Weichheit des Farbübergangs ab (siehe Berns, 2016).

5.3 Ausblick

Die in dieser Arbeit vorgeschlagene Methode zur Erzeugung von metameren Farbmischungen zielt auf einen sehr eingegrenzten künstlerischen Anwendungsbereich ab. Ob der erzielte Effekt diesen Aufwand rechtfertigt, lässt sich erst abschließend erörtern, wenn die Ergebnisse unter realen Bedingungen angewandt und von beurteilt werden. Da die jetzigen Ansätze nur auf Messungen beruhen, die sich nur bedingt auf echte menschliche Betrachter übertragen lassen, wäre es sicherlich lohnend, eine vergleichende Studie mit visuellen Wahrnehmungstests durchzuführen. Obwohl die Inspiration für dieses Projekt aus der Bildenden Kunst kommt, wäre das Theater ein interessanter Einsatzort für Metamerieeffekte. Im Gegensatz zur Malerei oder zu Museen sind hier die

Werke auf einen festen Ort mit kontrollierten Lichtverhältnissen ausgelegt. Zudem verfügen Theater über entsprechende Lichttechnik, wodurch sich der Aufwand in Grenzen hält. Durch Abstimmung der Farben des Bühnenbildes und der Kostüme auf das Beleuchtungsspektrum könnte so eine weitere Erzählebene eingeführt werden.

Abgesehen von der intendierten kreativen Verwendung ist die Weiterentwicklung von Einzelaspekten dieser Arbeit auch für andere Zwecke denkbar. Die spektrale Optimierung von Beleuchtungsspektren unter Beschränkung der Lichtfarbe ließe sich beispielsweise nutzen, um Beleuchtungsanlagen auf nichtvisuelle Aspekte hin zu optimieren. Diese können im Sinne von Human Centric Lighting dazu dienen, Gesundheit und Wohlbefinden zu fördern. Forschung in diese Richtung wurde unter anderem von (Zandi et al., 2022) unternommen.

Auch das Berechnen von Farbrezepturen lässt sich ohne wesentliche Änderungen des Codes für klassische Anwendungen nutzen: Verwendet man anstelle der höchsten Metamerie eine Mischung mit minimalem Index, lassen sich Formulierungen mit besonders guter spektraler Übereinstimmung erzeugen. Dank der relativen Einfachheit und Zugänglichkeit der Methode eignet sie sich insbesondere für Menschen, die kein spezialisiertes Labor sowie Software zur Verfügung haben. So könnte beispielsweise – wie von Berns & Mohammadi vorgeschlagen – Restauratoren dabei geholfen werden, die geeigneten Pigmente auszuwählen, wenn die Originalfarbmittel nicht bekannt sind.

Ein nicht zu unterschätzender Wert der Metamerie liegt auch in ihrem didaktischen Potenzial, das Verständnis für die Farbwissenschaften zu fördern. Mit Hilfe der metameren Mischungen und einer steuerbaren Lichtquelle lassen sich interaktive Installationen entwickeln, die Kontext von Museen oder anderen Bildungskontexten das Phänomen Farbe eindrucksvoll erlebbar machen.

Literaturverzeichnis

- Berger-Schunn, A. (1994). *Praktische Farbmessung: Ein Buch für Anfänger, eine Gedächtnisstütze für Könner* (2., überarb. Aufl). Muster-Schmidt.
- Berns, R. S. (2008). The proper use of indices of metamerism. *Color Research & Application*, 33(6), 509–512. <https://doi.org/10.1002/col.20450>
- Berns, R. S., Billmeyer, F. W., & Saltzman, M. (2019). *Billmeyer and Saltzman's principles of color technology* (Fourth edition). Wiley.
- Berns, R. S., & Mohammadi, M. (2007). Evaluating Single- and Two-Constant Kubelka-Munk Turbid Media Theory for Instrumental-Based Inpainting. *Studies in Conservation*, 52(4), 299–314.
- Burkard, R. E., & Zimmermann, U. T. (2012). *Einführung in die Mathematische Optimierung* (Bd. 5045). Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-28673-5>
- CIE 15:2004. (2004). *Technical Report-Colorimetry*. <http://archive.org/details/gov.law.cie.15.2004>
- CIE 248:2022. (2022). *The CIE 2016 Colour Appearance Model for Colour Management Systems: CIECAM16* (CIE 248:2022). International Commission on Illumination CIE). <https://doi.org/10.25039/TR.248.2022>
- CRC Handbook Of Chemistry And Physics 97th Edition*. (2016).
- Dafam, D. G., Abubakar, M. S., Nuhu, H., Ajima, U., & Okwori, V. (2013). Quantitative Evaluation of Some Physical and Chemical Properties of the Gum-Mucilage of Anacardium Occidentale L (Anacardiaceae). *International Journal of Pharmaceutical Science Invention*, 2(9), 46-48
- Datacolor. (2019). *Farbmanagement, Buch 4- Farbabstände, Metamerie und Toleranzberechnung*.
- Džimbeg-Malčić, V., Barbarić-Mikočević, Ž., & Itrić, K. (2011). *Kubelka-Munk theory in describing optical properties of paper (i)*.
- Eissfeldt, A., & Khanh, T. (2022). Algorithm for real-time colour mixing of a five-channel LED system while optimising spectral quality parameters. *Lighting Research & Technology*, 54(6), 563–575. <https://doi.org/10.1177/14771535211058096>
- Elbadawi, A. A., Alsabah, Y. A., & Abuelhassan, H. H. (2018). 7—Physical and Electrical Properties of Gum Arabic. In A. A. Mariod (Hrsg.), *Gum Arabic* (S. 75–91). Academic Press. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-812002-6.00007-5>
- Goudjil, A., Pigeon, E., Pouliquen, M., Menard, T., Gehan, O., Girard, S., Dufay, B., & Boudjelal, A. (2023). An interior-points algorithm for color and CCT control of multichannel LED lighting system using a Smart 18-Channel Spectral Sensor. *Energy and Buildings*, 298, 113541. <https://doi.org/10.1016/j.enbuild.2023.113541>
- Greule, R. (2021). *Licht und Beleuchtung im Medienbereich* (2. Aufl.). Hanser.
- Gulati, A. (2014). *Multi Channel Color Mixing Using HB LEDs*.
- ISO-18314-2:2023. (2023). *Analytical colorimetry—Saunderson correction, solutions of the Kubelka-Munk equation, tinting strength, depth of shade and hiding power* (ISO-18314-2:2023). <https://www.iso.org/standard/81971.html>

- ISO/DIS-18314-4:2018. (2018). *Analytical colorimetry—Part 4: Metamerism index for pairs of samples at change of illuminant* (ISO/DIS-18314-4).
<https://www.iso.org/obp/ui#iso:std:iso:18314:-4:dis:ed-1:v1:en>
- Kettler, W., Binder, M., Franz, W., Gabel, P., Gauss, S., Hempelmann, U., Henning, R., Kremitzl, H.-J., Weixel, S., & Wilker, G. (2016). *Colour Technology of Coatings*. Vincentz Network.
<https://doi.org/10.1515/9783748600282>
- LUXEON S Datasheet (DS80 20130907). (2013). Philips Lumileds Lighting Company.
- Malacara, D. (2002). *Color vision and colorimetry: Theory and applications*. SPIE Optical Engineering Press.
- Michel, Katharina. (2022). *Videobasierte Anpassung von Multicolor LED-Scheinwerfern zur Verringerung von farblichen Unterschieden* [Masterarbeit]. HAW Hamburg.
- Miyazaki, D., Saneshige, T., Baba, M., Furukawa, R., Aoyama, M., & Hiura, S. (2015). Metamerism-based shading illusion. *2015 14th IAPR International Conference on Machine Vision Applications (MVA)*, 255–258. <https://doi.org/10.1109/MVA.2015.7153179>
- Miyazaki, D., Takahashi, K., Baba, M., Aoki, H., Furukawa, R., Aoyama, M., & Hiura, S. (2013). Mixing Paints for Generating Metamerism Art under 2 Lights and 3 Object Colors. *2013 IEEE International Conference on Computer Vision Workshops*, 874–882.
<https://doi.org/10.1109/ICCVW.2013.120>
- Nobbs, J. H. (1985). Kubelka—Munk Theory and the Prediction of Reflectance. *Review of Progress in Coloration and Related Topics*, 15(1), 66–75.
<https://doi.org/10.1111/j.1478-4408.1985.tb03737.x>
- Okumura, Y. (2005). *Developing a spectral and colorimetric database of artist paint materials* [Masterarbeit, Rochester Institute of Technology]. <https://repository.rit.edu/theses/4892>
- Schanda. (2007). *Colorimetry* (1. Aufl.). John Wiley & Sons, Ltd.
<https://doi.org/10.1002/9780470175637>
- Stiles, W. S., & Wyszecki, G. W. (1962). Counting Metameric Object Colors. *JOSA*, 52(3), 313–328. <https://doi.org/10.1364/JOSA.52.000313>
- Verband der deutschen Lack- und Druckfarbenindustrie e.V. (2013). *Richtlinie Zulässige Farbtoleranzen für unifarbene Pulverlacke bei Architekturanwendungen*.
- Viggiano, J. A. S. (2002). *Perception-referenced method for comparison of radiance ratio spectra and its application as an index of metamerism* (R. Chung & A. Rodrigues, Hrsg.; S. 701).
<https://doi.org/10.1117/12.464650>
- Zandi, B., Stefani, O., Herzog, A., Schlangen, L. J. M., Trinh, Q. V., & Khanh, T. Q. (2022). Optimising metameric spectra for integrative lighting to modulate the circadian system without affecting visual appearance. *Scientific Reports*.
<https://doi.org/10.26083/tuprints-00021246>
- Zhang, F., Xu, H., & Wang, Z. (2017). Optimizing spectral compositions of multichannel LED light sources by IES color fidelity index and luminous efficacy of radiation. *Applied Optics*, 56(7), 1962–1971. <https://doi.org/10.1364/AO.56.001962>

Anhang

Sämtliche Messreihen, Plots sowie der Code finden sich auf dem beigelegten USB-Stick

A1 Herleitung der Matrixgleichungen aus 2.3.1 und 3.4.1

Herleitung der Formel in Michel (2022)

Für die erste Zeile des Gleichungssystems:

Formeln (2.13) bis (2.15) einsetzen in die Definition der xy-Transformation (Formel (2.5)):

$$x_{mix} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y_i} Y_i}{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y_i} Y_i + \sum_{i=1}^n Y_i + \sum_{i=1}^n \frac{1 - x_i - y_i}{y_i} Y_i}$$

Der Term im Nenner kann vereinfacht werden:

1. Summe zusammenfassen und Y_i ausklammern:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{y_i} + 1 + \frac{1 - x_i - y_i}{y_i} \right) Y_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{y_i} + \frac{y_i}{y_i} + \frac{1 - x_i - y_i}{y_i} \right) Y_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{y_i} \right) Y_i \end{aligned}$$

Vereinfachten Term einsetzen in Formel für x_{mix} :

$$\begin{aligned} x_{mix} &= \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y_i} Y_i}{\sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{y_i}} \\ \Leftrightarrow x_{mix} \sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{y_i} &= \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y_i} Y_i \\ \Leftrightarrow 0 &= \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y_i} Y_i - x_{mix} \sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{y_i} \\ \Leftrightarrow 0 &= \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y_i} Y_i - \sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{y_i} x_{mix} \\ \Leftrightarrow 0 &= \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y_i} Y_i - \sum_{i=1}^n \frac{x_{mix}}{y_i} Y_i \\ \Leftrightarrow 0 &= \sum_{i=1}^n \frac{x_i - x_{mix}}{y_i} Y_i \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Y_{mix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1 - x_{mix}}{y_1} & \dots & \frac{x_n - x_{mix}}{y_n} \\ \frac{y_1 - y_{mix}}{y_1} & \dots & \frac{y_n - y_{mix}}{y_n} \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

Herleitung für das vereinfachte Gleichungssystem aus Goudjil et al.

Für die erste Zeile des Gleichungssystems:

$$x_{mix} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y_i} Y_i}{\sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{y_i}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{Y_i}{y_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{y_i}}$$

Die Summe $\sum_{i=1}^n x_i$ kann aus dem Bruch herausgezogen werden:

$$x_{mix} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{\frac{Y_i}{y_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{y_i}}$$

Mit der Definition:

$$f_i = \frac{\frac{Y_i}{y_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{y_i}} = \frac{X_i + Y_i + Z_i}{\sum_{i=1}^n X_i + Y_i + Z_i} = \frac{X_i + Y_i + Z_i}{X_{mix} + Y_{mix} + Z_{mix}}$$

erhalten wir:

$$x_{mix} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot f_i$$

Komplette Matrixgleichung:

$$\begin{bmatrix} x_{mix} \\ y_{mix} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ y_1 & \dots & y_1 \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

A2 Scheinwerferdaten und Lichtmischungen

Tabelle A2.1 Gemessene Farborte und Leuchtdichten der Farbkanäle des S4 bei einer Aussteuerung von 100%.

Kanal	Indigo	Blue	Cyan	Green	Lime	Amber	Red	DR
x	0.1545	0.1136	0.0881	0.2245	0.4403	0.5785	0.6869	0.7068
y	0.0381	0.1682	0.5153	0.7000	0.5308	0.4165	0.3127	0.2931
L_v [cd/m ²]	57.5	59.3	327.4	310.5	1499	279.1	275.8	45.8

Tabelle A2.2 Berechnete Dimmerwerte für 17 Lichtmischungen

Lichtmischung	Dimmerwerte der Farbkanäle [%]							
	I	B	C	G	L	A	R	DR
std	8.6	39.6	24.5	35.9	5.8	24.7	18.0	100.0
I_min	0.0	70.8	26.5	22.4	4.5	21.4	17.6	100.0
I_max	30.3	0.0	0.0	93.4	12.2	41.3	20.0	100.0
B_min	15.2	0.0	31.8	36.2	5.8	24.4	17.9	100.0
B_max	0.0	100.0	0.0	43.5	6.8	26.4	15.3	80.8
C_min	12.4	63.9	0.0	68.5	8.9	31.1	18.7	100.0
C_max	2.7	0.0	44.4	0.0	0.0	0.0	15.1	100.0
G_min	6.5	46.8	52.3	0.0	10.7	35.4	19.2	100.0
G_max	11.0	6.7	0.0	61.5	0.0	0.0	14.5	100.0
L_min	6.6	33.5	25.4	41.2	0.0	25.8	18.1	100.0
L_max	39.6	31.5	0.0	0.0	63.6	0.0	7.5	100.0
A_min	6.3	29.2	18.9	30.4	5.3	0.0	17.8	100.0
A_max	5.3	42.2	33.7	7.1	0.0	100.0	0.0	0.0
R_min	6.0	25.3	13.5	21.7	4.5	21.9	0.0	100.0
R_max	5.5	70.0	77.2	54.0	0.0	0.0	100.0	0.0
DR_min	24.2	100.0	50.5	81.3	17.8	88.5	72.3	0.0
DR_max	0.9	12.9	14.8	11.2	0.0	0.0	0.0	100.0

A3 Pigmente

Tabelle A3.1 Verwendete Pigmente

ID	Name	Farbbereich	Kremer Farbcode/ sonst. Hersteller
0	Eisenoxidschwarz neutral	n	48401
1	Titanweiss	n	46200
2	Kobaltblau mittel	b	45710
3	Kobaltblau dunkel	b	45700
4	Phtaloblau rotstichig	b	23070
5	Kupferblau	b	45346
6	Zirkon-Coelinblau	b	45400
7	Anthrachinonblau	b	23100
8	Phtalogruen blaustichig	g	23000
9	Chromoxidgruen	g	44200
10	Viridian Genuine	g	Gamblin
11	Victoriagruen	g	44190
12	Kobalttuerkis	g	45750
13	Malachit synthetisch	g	44400
14	Cadmiumgelb zitron	y	21010
15	Gelb gruenstichig	y	23330
16	Hansagelb Studio	y	23850
17	Cadmiumgelb mittel	y	21040
18	Cadmiumgelb dunkel	y	21060
19	Wismuthgelb mittel	y	43918
20	Cadmiumorange hellst	o	21080
21	Titanorange	o	43330
22	Hokkaido Orange	o	43340
23	Cadmiumrot mittel	r	Gamblin
24	Nelkenfarbe	r	10150
25	Heliosrot	r	Gamblin
26	Cadmiumorange Zinnober	r	21110
27	Cadmiumrot dunkel	r	21140
28	Kobaltviolett dunkel	v	45800
29	Ultramarinviolett	v	Sennelier
30	Manganviolett	v	Gamblin
31	Chinacridonviolett	v	23710
32	Ultramarinrot Altrosa	v	42605

A4 Methode zur Bestimmung der Referenzen

Die Pigmente wurden im Vorhinein den Farbbereichen Blau, Grün, Gelb, Orange, Rot und Violett zugeordnet. Die Zuordnung erfolgte nach der Einteilung des Herstellers und ist nicht farbmétrisch definiert. Als nächstes wurden für alle ausgewählten Pigmente die $L^*a^*b^*$ - Farbwerte zu jedem der 16 in 3.3.1 beschriebenen Lichtspektren berechnet. Mithilfe der berechneten $L^*a^*b^*$ Farbwerte und der Farbabstandsformel CIEDE2000 wurde für jedes einzelne Pigment und für jede Kombination von Lichtarten der Farbstand, also eine Art Farbkonsistenzindex berechnet. Für jede Kombination von Lichtarten wurde das Pigment mit der niedrigsten und der höchsten Farbkonsistenz ausgewählt sowie die Differenz der jeweiligen Farbabstände gebildet – nennen wir es den *Kontrastindex*. Pro Farbbereich wurde anschließend die Kombination aus Lichtmischungen und Pigmenten mit dem betragsmäßig höchsten Kontrastindex gewählt. Für die Referenzmischungen wurde jeweils das Pigment mit der niedrigeren Farbkonsistenz verwendet. Als Referenz-Lichtmischung wurde diejenige Lichtmischung gewählt, bei der beide Pigmente den geringsten Farbabstand zeigen.

Tabelle A3 Bestimmung der Referenzen - Ergebnisse

Farbbereich	Violett	Blau	Grün	Gelb	Orange	Rot
Kombination	A_max DR_max	C_max L_max	('L_max', 'R_max')	('C_max', 'L_max')	('G_max', 'A_max')	('DR_min', 'DR_max')
Kontrast Index	21.62	24.93	12.11	26.72	6.42	13.06
Pigment FI max	Kobalt violett dunkel	Kobaltblau mittel	Kobalt- türkis	Cadmium- gelb mittel	Cadmium- orange hellst	Cadmium- rot dunkel
FI max (ΔE_{00})	24.16	30.69	15.03	35.12	14.09	20.92
Pigment FI min	Ultrama- rinviolett	Anthrachi- nonblau	Chro- moxid- grün	Gelb gru- enstichig	Titan- orange	Nelken- farbe
FI min (ΔE_{00})	2.54	5.76	2.93	8.40	7.66	7.86

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit mit dem Titel:

„Spektrale Optimierung von Licht- und Pigmentfarbmischungen zur gezielten Erzeugung von Metamerieeffekten“

selbständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln verfasst habe. Alle Passagen, die ich wörtlich aus der Literatur oder aus anderen Quellen wie z. B. Internetseiten übernommen habe, habe ich deutlich als Zitat mit Angabe der Quelle kenntlich gemacht.

Ort, Datum

Malte Stiehl