



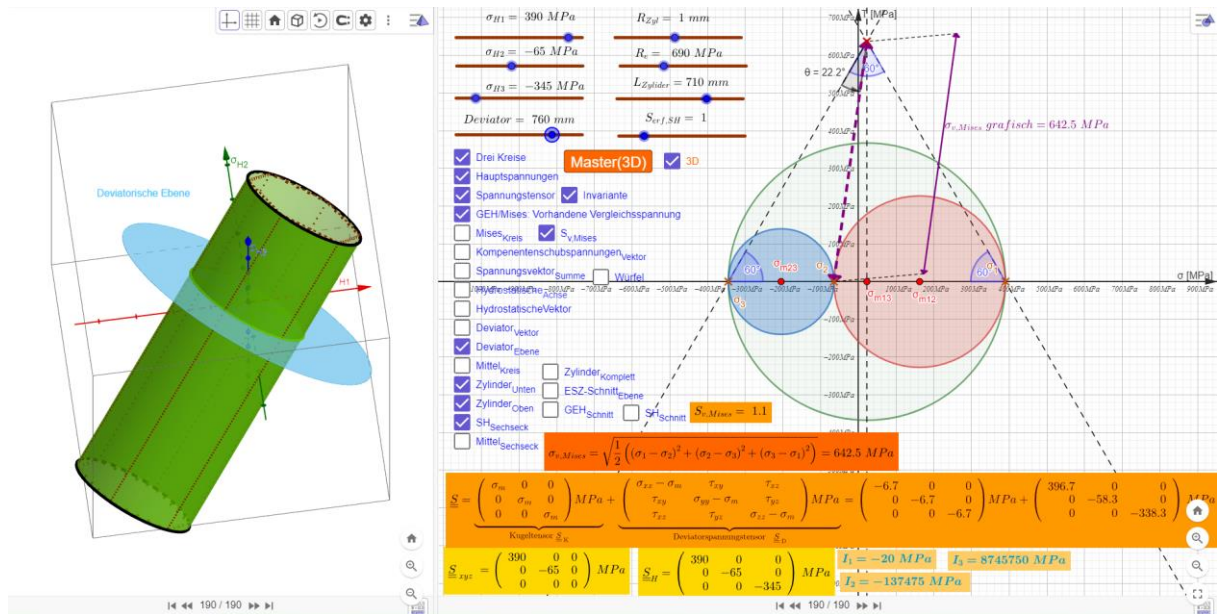
Bachelorarbeit

Amgad Al-Aswar

Mohrsche Spannungskreise und ihr Einsatz in der Festigkeitsberechnung

Amgad Al-Aswar

Mohrsche Spannungskreise und ihr Einsatz in der Festigkeitsberechnung



Bachelorarbeit eingereicht im Rahmen der Bachelorprüfung

im Studiengang Maschinenbau mit Schwerpunkt Entwicklung und Konstruktion

am Department Maschinenbau und Produktion

der Fakultät Technik und Informatik

der Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg

Erstprüfer: Professor Dr. Benjamin Kloss-Grote

Zweitprüfer : Professor Dr. Andreas Baumgart

Abgabedatum: 03.06.2025

Zusammenfassung

Name des Studierenden

Amgad Al-Aswar

Theme der Bachelorarbeit

Mohrsche Spannungskreise und ihr Einsatz in der Festigkeitsberechnung

Stichworte

Mohrsche Spannungskreise, Festigkeitsberechnung, Spannungstensoren, Vergleichsspannungen, GeoGebra, Visualisierung, Normalspannungshypothese, Schubspannungshypothese, Gestaltänderungsenergiehypothese

Kurzzusammenfassung

Diese Arbeit umfasst die theoretischen Grundlagen und praktischen Anwendungen der Mohrschen Spannungskreise in der Festigkeitsberechnung. Es werden historische Entwicklungen, der aktuelle Stand der Technik sowie die Konstruktion und Interpretation der Spannungskreise detailliert erläutert. Der Fokus liegt auf der Veranschaulichung der wesentlichen Zusammenhänge für Studierende. Mithilfe von GeoGebra werden verschiedene Visualisierungen entwickelt, darunter für Spannungstensoren, Mohrsche Spannungskreise (ESZ), Spannungswürfel und 3D-Spannungskreise. Zudem werden Vergleichsspannungshypothesen (NH, SH, GEH) analysiert und in den Mohrschen Spannungskreisen dargestellt. Die Arbeit präsentiert Anwendungsbeispiele sowie mögliche Lehrvideos zur Veranschaulichung der Konzepte.

Name of Student

Amgad Al-Aswar

Title of the Paper

Mohr's Stress Circles and Their Application in Strength Calculations

KeyWords

Mohr's stress circles, strength calculation, stress tensors, yield criteria, GeoGebra, visualization, principal stress hypothesis, Tresca yield criterion, von Mises yield criterion

Abstract

This paper explores Mohr's stress circles and their application in strength calculations. It provides a historical overview and examines the current state of the art. The construction and explanation of Mohr's stress circles are discussed in detail. The focus of this thesis lies in the illustration of the basic relationships for students. Various visualizations are developed in Geogebra, including stress tensors, Mohr's stress circles (plane stress state), stress cubes, strain states, and 3D stress circles. Additionally, several yield and failure criteria (max principal, max shear, von Mises) are represented within Mohr's stress circles. The paper also includes application examples and the potential development of instructional videos.

I. Vorwort

Ich möchte mich an dieser Stelle herzlich bei meinem Erstprüfer, Professor Dr. Benjamin Kloss-Grote, bedanken. Er hat mich während dieser Arbeit mit großem Engagement begleitet, war jederzeit ansprechbar und hatte stets ein offenes Ohr für meine Fragen. Seine klaren Rückmeldungen, motivierenden Worte und fachliche Unterstützung haben mir sehr geholfen sowohl inhaltlich als auch persönlich. Besonders dankbar bin ich für seine konstruktiven Anregungen und seine geduldige Art, die mich durch schwierige Phasen getragen hat. Ein ebenso großer Dank gilt auch meinem Zweitprüfer, Professor Dr. Andreas Baumgart, für die Bereitschaft, diese Arbeit zu begutachten und seine Zeit dafür zur Verfügung zu stellen.

Inhaltsverzeichnis

I.	Vorwort	3
II.	Abbildungsverzeichnis	7
III.	Tabellenverzeichnis	8
IV.	Symbolverzeichnis	9
1	Christian Otto Mohr und die Entdeckung des Mohrschen Kreises	11
2	Analyse des aktuellen Stands der Technik	13
2.1	Anwendung des Mohrschen Kreises	13
2.2	Moderne Alternativen (Finite-Elemente-Methode)	14
2.2.1	Grundprinzip	14
2.2.2	FEM-Beispiel & Ergebnisse	14
3	Spannungs- und Verzerrungszustand	17
3.1	Allgemeine Definition des Spannungszustand	17
3.2	Definition und Bedeutung von Spannungen	17
3.3	Spannungstensor	17
3.4	Zerlegung des Spannungstensors	18
3.4.1	Hydrostatischer Spannungsanteil	19
3.4.2	Deviatorischer Spannungsanteil	19
3.4.3	Invarianten des Spannungstensors	20
3.5	Verschiedene Spannungszustände mit eigenem Tensor	21
3.5.1	Eindimensionaler Spannungszustand & Spannungstensor	21
3.5.2	Ebener Spannungszustand (ESZ) & Spannungstensor	22
3.5.3	Räumlicher Spannungszustand (RSZ) & Spannungstensor	23
3.6	Verzerrungszustand	24
3.6.1	Grundlagen	24
3.6.2	Verzerrungstensor	25
3.6.3	Zusammenhang zwischen Spannung und Verzerrung (Hooke'sches Gesetz)	25
3.6.4	Einachsiger Verzerrungszustand	26
3.6.5	Ebener Verzerrungszustand (EVZ)	26
3.6.6	Räumlicher Verzerrungszustand (RVZ)	27
4	Vergleichsspannungen und Festigkeitsnachweise	28
4.1	Einführung in die Spannungshypothesen	28
4.2	Vergleichsspannungshypothesen im Überblick	29
4.2.1	Normalspannungshypothese (NH, Rankine)	30

4.2.2	Schubspannungshypothese (SH,Tresca)	31
4.2.3	Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH, von Mises)	32
4.2.4	Versagenshypothesen im Vergleich (ESZ)	34
4.3	Festigkeitsnachweise	34
5	GeoGebra	36
5.1	Einführung in GeoGebra	36
5.2	Ziel und Nutzen in dieser Arbeit	36
5.3	Tipps und Tricks für die Nutzung von GeoGebra	36
5.4	Erste Schritte und Einarbeitung in GeoGebra	37
6	Eigene Dateien und deren Inhalt	38
6.1	2D_Mohrsche_kreis_mit_Spannungswürfel_Final (GeoGebra)	38
6.2	3D_Deviator&Hydro_Final (GeoGebra)	39
6.3	GEH_Zylinder (Creo)	39
6.4	SH_Sechseck (Creo)	39
6.5	GEH_SH (Creo)	39
7	Konstruktion des Mohrschen Kreise für den ebenen Spannungszustand und Ableitung wichtiger Größen	40
7.1	Mohrscher Spannungskreis	40
7.2	Allgemein zu Zentriwinkel und Peripheriewinkel	40
7.2.1	Zentriwinkel	40
7.2.2	Peripheriewinkel	41
7.3	Grafische Konstruktion des Mohrschen Kreises für den ESZ	41
7.4	Sonderfälle Mohrscher Kreis	45
7.4.1	Einachsiger Zug	45
7.4.2	Reine Torsion	45
7.4.3	Zweiachsiger Zug	46
8	Detaillierte Darstellung der erstellten Dateien	47
8.1	2D_Mohrsche_kreis_mit_Spannungswürfel_Final	47
8.1.1	Übersicht über die Oberfläche	47
8.1.2	Schieberegler	48
8.1.3	Schalter	49
8.2	3D_Deviator&Hydro_Final	54
8.2.1	Übersicht über die Oberfläche	54
8.2.2	Schieberegler	54

8.2.3	Schalter	55
8.3	GEH_SH Creo	61
9	Anwendungsaufgabe	62
9.1	Erste Aufgabe	62
9.1.1	Lösung Rechnerisch	63
9.1.2	Lösung der Aufgabe 1 Grafisch GeoGebra	67
9.2	Aufgabe 2: Mehrachsige beanspruchte Bauteile aus Feinkornbaustahl und Grauguss	71
9.2.1	Position 1	73
9.2.2	Position 2	75
9.2.3	Position 3	77
9.2.4	Position 4	79
10	Fazit	81
11	Anhang	82
11.1	FEM-Berechnung und Ergebnisse	82
11.1.1	Grundprinzip	82
11.1.2	Exemplarische Berechnung	82
11.1.3	Verschiebungsfeld	82
11.1.4	Berechnung der Verzerrungen	83
11.1.5	Berechnung der Spannungen	84
11.1.6	Berechnung der Hauptspannungen	85
11.1.7	Hauptspannungsrichtungen	86
11.1.8	Vergleichsspannung nach von Mises	87
11.2	Lösung Aufgabe 1 und 2 vollständig	87
11.3	Einsatz von KI (ChatGPT/DeepSeek) zur Unterstützung von Teilproblemen in dieser Arbeit	87
11.3.1	Beispielhafte Vorgehensweise der Kommunikation mit ChatGPT:	87
12	Literaturverzeichnis	89

II. Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1 Friedrich Hebbel und Christian Otto Mohr (joergens.mi, 2014) (Wikipedia, 2024)	12
Abbildung 2 FEM Bauteil (Fixiert & Last) ANSYS	14
Abbildung 3 Berechnete Hauptspannungen & Vergleichsspannung durch (ANSYS).....	15
Abbildung 4 Darstellung der Hauptspannungsrichtungen als Vektorfeld ANSYS	15
Abbildung 5 Zoom Darstellung der Hauptspannungsrichtungen als Vektorfeld ANSYS.....	16
Abbildung 6 2X Zoom Darstellung der Hauptspannungsrichtungen als Vektorfeld ANSYS.....	16
Abbildung 7 Spannungsanalyse durch Zerlegung in infinitesimale Würfelemente (Spura, 2019)	17
Abbildung 8 Infinitesimaler Würfel und zugehörige Spannungskomponenten (Mittelstedt, Technische Mechanik 2: Elastostatik, 2022)	17
Abbildung 9 (Cauchy-) Spannungstensor	18
Abbildung 10 Gesamtspannungstensor.....	18
Abbildung 11 hydrostatischer Spannungszustand (Nasdala, 2022)	19
Abbildung 12 Beispiel Hydrostatischer Spannungszustand 2D.....	19
Abbildung 13 Hydrostatische Anteil (Kugeltensor)	19
Abbildung 14 Deviatorischer Spannungszustand (Nasdala, 2022) (Hofstetter, 2013).....	20
Abbildung 15 Deviatorische Spannungstensor	20
Abbildung 16 Einachsiger Spannungszustand (Arndt, Brüggemann, & Ihme, 2019)	21
Abbildung 17 Schräge Schnitt & Schubspannung (Mittelstedt, Technische Mechanik 2: Elastostatik, 2022)	21
Abbildung 18 Spannungstensor Einachsiger Spannung.....	21
Abbildung 19 Ebene Spannungszustand (Spura, 2019)	22
Abbildung 20 Ebener Spannungszustand Tensor	22
Abbildung 21 Räumlicher Spannungszustand (Spura, 2019)	23
Abbildung 22 Dreidimensionaler Spannungstensor	23
Abbildung 23 Anschaulicher Verzerrungszustand 2D (Gross.Hauger & Schröder.Wall, 2012)	24
Abbildung 24 Dehnung und Gleitungen Darstellung (Mittelstedt, Rechenmethoden des Leichtbaus, 2021)	24
Abbildung 25 Verzerrungstensor Allgemein	25
Abbildung 26 Ebene Verzerrungszustand (Spura, 2019).....	26
Abbildung 27 Ebener Verzerrungstensor	27
Abbildung 28 Räumliche Verzerrungszustand Würfel (Spura, 2019).....	27
Abbildung 29 Ablaufschema resultierende Spannung/Vergleichsspannungshypothesen für stabförmige Bauteile (Arndt, Brüggemann, & Ihme, 2019)	29
Abbildung 30 Spannungsraum und Fließbedingung (Huber, 2023).....	33
Abbildung 31 Versagenshypothesen (NH,SH,GEH) (Kloss-Grote, 2025)	34
Abbildung 32 Spannungs-Dehnungs-Diagramm (Spura, 2019)	35
Abbildung 33 Benutzeroberfläche von GeoGebra	37
Abbildung 34 2D_Mohrsche_kreis_mit_Spannungswürfel_Final (GeoGebra).....	38
Abbildung 35 3D_Deviator&Hydro_Final (GeoGebra)	39
Abbildung 36 Allgemein zu Zentriwinkel & Peripheriewinkel (Wikipedia, 2025)	40
Abbildung 37 Grafische Konstruktion des Mohrschen Kreises für den ESZ Schritte (1-7) GeoGebra	42
Abbildung 38 Grafische Konstruktion des Mohrschen Kreises für den ESZ Schritte (7-11) GeoGebra	43
Abbildung 39 Spannungswürfel im allgemeinen ebenen Spannungszustand GeoGebra	44
Abbildung 40 Spannungswürfel im Hauptspannungsebene GeoGebra	44
Abbildung 41 Mohrscher Kreis Einachsiger Zug GeoGebra	45
Abbildung 42 Mohrscher Kreis Reine Torsion GeoGebra.....	45
Abbildung 43 Mohrscher Kreis Zweiachsiger Zug GeoGebra	46
Abbildung 44 2D_Mohrsche_kreis_mit_Spannungswürfel_Final Oberfläche GeoGebra	47

Abbildung 45 2D_Mohrsche_kreis_mit_Spannungswürfel_Final Schieberegler GeoGebra	48
Abbildung 46 Sichtbarkeits-Schalter Mohrscher Kreis GeoGebra	49
Abbildung 47 Verzerrungswürfel(ESZ) GeoGebra.....	50
Abbildung 48 Schubspannungshypothese(SH) in GeoGebra	51
Abbildung 49 Normalspannungshypothese (NH) in GeoGebra	52
Abbildung 50 Gestaltsänderungsenergiehypothese (Mises) in GeoGebra	53
Abbildung 51 3D_Deviator&Hydro_Final Oberfläche GeoGebra	54
Abbildung 52 3D_Deviator&Hydro_Final Schieberegler GeoGebra	54
Abbildung 53 Dreidimensionaler Spannungskreise GeoGebra	55
Abbildung 54 Komp. Schubspannung , Spannungsvektor Summer & Würfel in GeoGebra.....	57
Abbildung 55 Darstellung der hydrostatischen und deviatorischen Spannungsanteile sowie deren Richtungen im 3D-Raum mit GeoGebra	58
Abbildung 56 Darstellung der Zylinder(GEH) & des Sechsecks(SH) in 3D-Raum GeoGebra	59
Abbildung 57 Schnitt-Ebene , GEH & SH schnitt in 3D Raum GeoGebra	60
Abbildung 58 GEH & SH schnitt in Ebene Spannungszustand Ansicht (ESZ) in GeoGebra.....	60
Abbildung 59 Darstellung von Zylinder und Sechseck in Creo	61
Abbildung 60 GEH & SH Schnitt in der Ebene Spannungszustand Ansicht (ESZ) in Creo.....	61
Abbildung 61 Labor Aufgabe (Kloss-Grote, 2025)	62
Abbildung 62 Aufgabe 1 Mohrsche Kreis und Spannungstensor GeoGebra	67
Abbildung 63 Aufgabe 1 Spannungswürfel nicht gedreht GeoGebra	68
Abbildung 64 Abbildung 39 Aufgabe 1 Spannungswürfel gedreht GeoGebra	68
Abbildung 65 Aufgabe 1 Verzerrungswürfel mit Dehnungstensor GeoGebra.....	69
Abbildung 66 Aufgabe 1 Sicherheiten GeoGebra.....	70
Abbildung 67 Aufgabe 1 Drei kreise GeoGebra.....	71
Abbildung 68 Labor Aufgabe 2 (Kloss-Grote, 2025).....	72
Abbildung 69 Aufgabe 2 Position1 Mohrsche Kreise & Tensoren & Varianten (GeoGebra)	73
Abbildung 70 Aufgabe 2 Position 1 im 3D.....	73
Abbildung 71 Aufgabe 2 Position 1 im Ebenen Spannungszustand	74
Abbildung 72 Aufgabe 2 Position 2 Mohrsche Kreise & Tensoren (GeoGebra)	75
Abbildung 73 Aufgabe 2 Position 2 im 3D.....	76
Abbildung 74 Aufgabe 2 Position 3 Mohrsche Kreise & Tensoren (GeoGebra)	77
Abbildung 75 Aufgabe 2 Position 3 im 3D.....	78
Abbildung 76 Aufgabe 2 Position 4 Mohrsche Kreise & Tensoren (GeoGebra)	79
Abbildung 77 Aufgabe 2 Position 4 im 3D.....	80
Abbildung 78 2D Darstellung eines ebenen Finite-Elements mit linearem Verschiebungsfeld (Grätsch, 2024).....	82
Abbildung 79 Hauptnormalspannungen Winkel (Spura, 2019)	86

III. Tabellenverzeichnis

Tabelle 1 Gegeben Aufgabe 1(Aufgabestellung).....	63
Tabelle 2 Ergebnis & Zusammenfassung der Aufgabe 1	67
Tabelle 3 Ergebnis & Zusammenfassung der Aufgabe 2.....	80

IV. Symbolverzeichnis

1) Grundgrößen & Spannungen

Symbol	Bedeutung	Einheit
F	Kraft	N
A	Fläche	mm ²
σ	Normalspannung (allgemein)	MPa
σ_{xx}	Normalspannung in x-Richtung	MPa
σ_{yy}	Normalspannung in y-Richtung	MPa
σ_{zz}	Normalspannung in z-Richtung	MPa
τ	Schubspannung (allgemein)	MPa
τ_{xy}	Schubspannung in xy-Ebene	MPa
τ_{xz}	Schubspannung in xz-Ebene	MPa
τ_{yz}	Schubspannung in yz-Ebene	MPa
σ_1	Hauptspannung 1 (sortiert, größte Hauptspannung)	MPa
σ_2	Hauptspannung 2 (sortiert, mittlere Hauptspannung)	MPa
σ_3	Hauptspannung 3 (sortiert, kleinste Hauptspannung)	MPa
σ_{H1}	Eine Hauptspannung (unsortiert)	MPa
σ_{H2}	Eine Hauptspannung (unsortiert)	MPa
σ_{H3}	Eine Hauptspannung (unsortiert)	MPa
r	Radius	mm
τ_{max}	Maximale Schubspannung	MPa
σ_m	Mittlere Normalspannung	MPa
I_1	1. Invariante des Spannungstensors	MPa
I_2	2. Invariante des Spannungstensors	MPa
I_3	3. Invariante des Spannungstensors	MPa
μ_H	Zentriwinkel der Hauptspannung	Rad/°
φ_H	Peripheriewinkel der Hauptspannung	Rad/°
$-\mu_{\tau max}$	Zentriwinkel der maximalen Schubspannung	Rad/°
$-\varphi_{\tau max}$	Peripheriewinkel der maximalen Schubspannung	Rad/°
$\underline{\underline{S}}$	Hauptspannungstensor	MPa
$\underline{\underline{S}}_D$	Deviatorischer Spannungstensor	MPa
$\underline{\underline{S}}_K$	Kugeltensor des Spannungstensors	MPa

2) Dehnungen & Materialkennwerte

Symbol	Bedeutung	Einheit
ε	Dehnung (allgemein)	1
ε_{xx}	Dehnung in x-Richtung	1
ε_{yy}	Dehnung in y-Richtung	1
ε_{zz}	Dehnung in z-Richtung	1
γ	Scherung (allgemein)	1
γ_{xy}	Scherung in xy-Ebene	1
γ_{xz}	Scherung in xz-Ebene	1
γ_{yz}	Scherung in yz-Ebene	1
E	Elastizitätsmodul	MPa
G	Schubmodul	MPa
ν	Querkontraktionszahl (Poisson-Zahl)	1
R_e	Streckgrenze (Fließgrenze)	MPa
R_m	Zugfestigkeit	MPa

3) Festigkeitshypothesen & Sicherheiten

Symbol	Bedeutung	Einheit
σ_v	Vergleichsspannung (allgemein)	MPa
$\sigma_{v,Mises}$	Gestaltänderungsenergiehypothese	MPa
$\sigma_{v,Tresca}$	Schubspannungshypothese	MPa
σ_{zul}	Zulässige Spannung	MPa
τ_{zul}	Zulässige Schubspannung	MPa
S	Sicherheit (allgemein)	1
S_{NH}	Sicherheit gegen Normalspannungshypothese	1
S_{SH}	Sicherheit gegen Schubspannungshypothese	1

1 Christian Otto Mohr und die Entdeckung des Mohrschen Kreises

Christian Otto Mohr wurde am 8. Oktober 1835 in Wesselburen in Schleswig-Holstein geboren (Institute for Materials, Technologies and Mechanics, 2020). Mohr begann 1851 im Alter von 16 Jahren sein Ingenieurstudium an der Polytechnischen Schule Hannover, wo er von renommierten Ingenieuren unterrichtet wurde, wie zum Beispiel Moritz Rühlmann, der Vorlesungen über die „Mechanik der Baukunst“ hielt. Diese Ingenieure hatten maßgeblich zur Entwicklung der Technik beigetragen. Durch diese Lehrer erlangte er frühzeitig Kenntnisse über die Arbeiten führender französischer Forscher in der Mechanik, wie Navier und Coulomb (Knittel, 1994).

Im Jahr 1855 wurde Mohr Ingenieurassistent und später Ingenieur sowie Baurat bei den Königlich Hannöverschen Staatseisenbahnen in Lüneburg (Wikipedia, 2024)& (Deutsche Biographie (ADB/NDB), 1994). Im Jahr 1860 veröffentlichte er eine bedeutende Arbeit über den kontinuierlichen Biegebalken, die eine zuverlässige Bemessung von Durchlaufträgern ermöglichte und in der Fachwelt auf großes Interesse stieß. Nach seiner Tätigkeit bei den Königlich Hannöverschen Staatseisenbahnen war er am Bau der Großherzoglich Oldenburgischen Staatseisenbahnen beteiligt, wo er eine der ersten Stahlbrücken Deutschlands entwarf. Diese Brücke wies ein klar ausgebildetes Dreieckfachwerk auf, und Mohr entwickelte eine Berechnungsmethode, die später von August Ritter weiterentwickelt und als Ritter-Schnittverfahren bekannt wurde (Knittel, 1994); (Stephen P. Timoshenko, 1953).

Im Jahr 1867 erhielt er im Alter von 32 Jahren eine Professur für Technische Mechanik, Trassieren und Erdbau am Polytechnikum Stuttgart (Stephen P. Timoshenko, 1953). Er war in der Lage, den theoretischen Stoff der Mechanik auf eine leicht verständliche Weise zu vermitteln, wodurch seine Vorlesungen sehr gut besucht waren und später sogar in autographierter Form veröffentlicht wurden. In der wissenschaftlichen Gemeinschaft erzielte er eine bedeutende Vereinfachung, indem er ein grafisches Verfahren, auch Mohrsche Analogie genannt, entwickelte, um die Biegelinie als Seilkurve zu ermitteln. Bis dahin war dies nur rechnerisch durch doppelte Integration möglich (Jahre, 2005).

Im Jahr 1873 erhielt Mohr einen Ruf an die spätere Technische Hochschule Dresden, wo er Eisenbahnbau, Wasserbau und Graphostatik lehrte. Während seiner Zeit dort veröffentlichte er wichtige Arbeiten, darunter zur Theorie der Bogenfachwerke, des Fachwerks sowie zu Holz und Eisenkonstruktionen (Institute for Materials, Technologies and Mechanics, 2020). Zu seinen bedeutendsten wissenschaftlichen Leistungen zählt das Verfahren zur Ermittlung der Biegelinie eines Balkens, das 1868 entwickelt wurde, sowie die anschauliche Darstellung des zweiachsigen Spannungszustands mittels des nach ihm benannten Spannungskreises, eine Methode, die 1882 eingeführt wurde. Das Biegelinienvorgehen beruht auf der Analogie zwischen Biegemoment, Querbelastrung und der resultierenden Durchbiegung und Verkrümmung (Knittel, 1994). Mohr veröffentlichte seine sämtlichen Arbeiten in den „Abhandlungen aus dem Gebiete der Technischen Mechanik“, einem Sammelwerk, das 1904 und posthum in 1928 erschien. Darin fasste er seine wesentlichen Gedanken zur Technischen Mechanik und Statik zusammen. Die letzte Arbeit, die er ein Jahr vor seinem Tod abschloss, behandelte die Planetenbewegung und ging über sein ursprüngliches Fachgebiet hinaus. Mohr starb im Jahr 1918 im Alter von 83 Jahren in Dresden (Knittel, 1994).

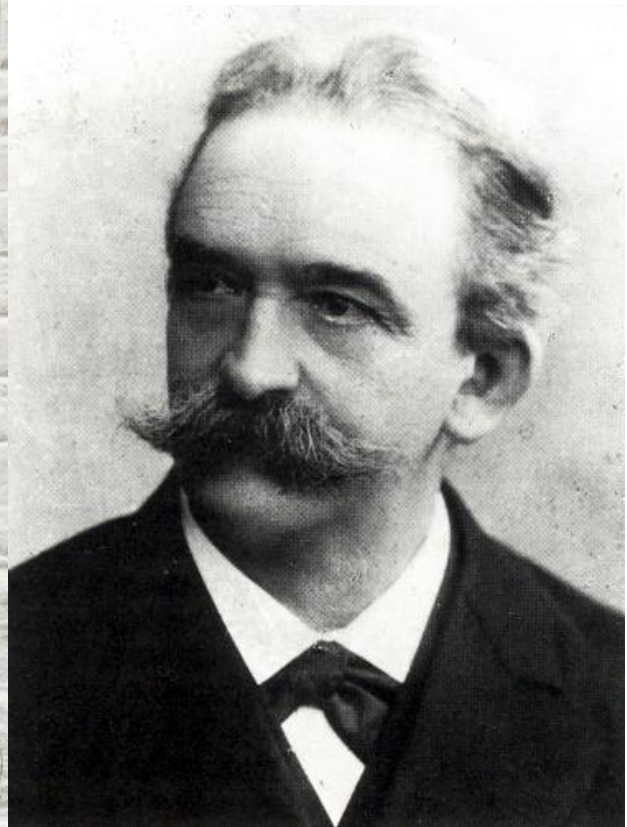
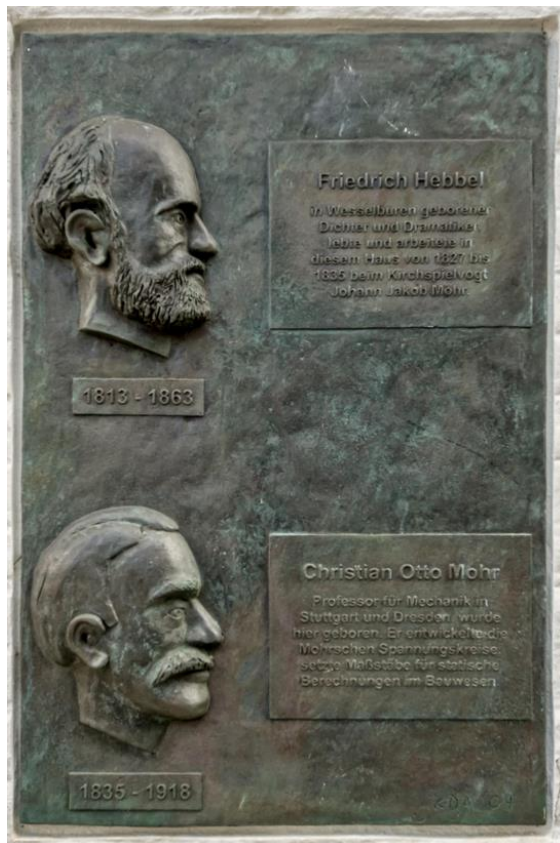


Abbildung 1 Friedrich Hebbel und Christian Otto Mohr (joergens.mi, 2014) (Wikipedia, 2024)

2 Analyse des aktuellen Stands der Technik

Der Mohrsche Kreis ist nach wie vor ein bedeutendes Werkzeug in der Festigkeitsberechnung, insbesondere zur Visualisierung und Analyse von Spannungszuständen in einem Materialpunkt. Trotz moderner Alternativen bleibt der Mohrsche Kreis ein zentrales Konzept in der Mechanik und Materialwissenschaft (Huber, 2023).

2.1 Anwendung des Mohrschen Kreises

Der Mohrsche Spannungskreis bleibt trotz der zunehmenden Dominanz numerischer Methoden wie der Finite-Elemente-Methode (FEM) ein wertvolles Instrument in der Ingenieurpraxis und insbesondere -ausbildung. Seine anschauliche Darstellung von Spannungszuständen ermöglicht in der Ausbildung einen visuellen Zugang und damit eine Veranschaulichung von solch komplexen Themen wie beispielsweise der Hauptachsentransformation eines Spannungstensors. Er ermöglicht in der Festigkeitsberechnung eine schnelle und effektive Analyse, insbesondere in Bereichen wie der Werkstoffprüfung und dem Maschinenbau. Zudem dient er in der Geotechnik zur Bestimmung von Bruchbedingungen in Böden und Gesteinen. Diese vielfältige Anwendung unterstreicht die anhaltende Relevanz des Mohrschen Spannungskreises in der technischen Mechanik.

- a) Klassische Festigkeitslehre und Werkstoffprüfung:
Ingenieure nutzen den Mohrschen Kreis zur schnellen Analyse von Spannungs- und Dehnungszuständen in Werkstoffen, beispielsweise bei Zug- und Druckversuchen (Arndt, Brüggemann, & Ihme, 2019).
- b) Mechanische Konstruktionen:
Im Maschinenbau wird der Mohrsche Kreis zur Bewertung von Spannungen in Bauteilen unter mehrachsiger Belastung eingesetzt (Gross.Hauger & Schröder.Wall, 2012).
- c) Geotechnik und Bauwesen:
In der Bodenmechanik dient der Mohrsche Kreis zur Bestimmung der Bruchbedingungen von Böden und Gesteinen. Er wird beispielsweise bei der Berechnung des Erddrucks auf Stützmauern oder der Stabilität von Hängen verwendet (Boley, 2012).
- d) Luft und Raumfahrttechnik:
Bei der Auslegung von Strukturen, die hohen Belastungen ausgesetzt sind, wird er zur schnellen Abschätzung von Materialspannungen genutzt (T.H.G.Megson, 2007).

2.2 Moderne Alternativen (Finite-Elemente-Methode)

Trotz der anhaltenden illustrativen Bedeutung des Mohrschen Kreises gibt es heute leistungsfähigere Alternativen, die ihn in *komplexen* Berechnungen weitgehend ersetzt haben (numpedia, 2025).

2.2.1 Grundprinzip

Diese numerische Methode ermöglicht eine detaillierte Berechnung von Spannungsverteilungen in komplexen Geometrien und wird in der modernen Ingenieurwissenschaft häufig verwendet (Huber, 2023). Die Finite-Elemente-Methode (FEM) liefert auf Basis eines vorgegebenen Verschiebungsfeldes die relevanten Spannungsgrößen, insbesondere die Hauptspannungen, die sich als Eigenwerte des Spannungstensors ergeben (Skrotzki, 2022).

Eine ausführliche Darstellung des Berechnungsablaufs sowie exemplarische FEM-Ergebnisse befinden sich im Abschnitt 11.1).

2.2.2 FEM-Beispiel & Ergebnisse

Ziel der durchgeführten Simulation war es, das Spannungsverhalten eines rechteckigen Bauteils mit einer Bohrung unter externer Last mithilfe der Finite-Elemente-Methode (FEM) in ANSYS zu untersuchen. Dabei wurde besonders darauf geachtet, wie sich Spannungsverteilungen, Hauptspannungen und Spannungsrichtungen (als Vektorfeld) grafisch darstellen und interpretieren lassen (siehe Abbildung 2).

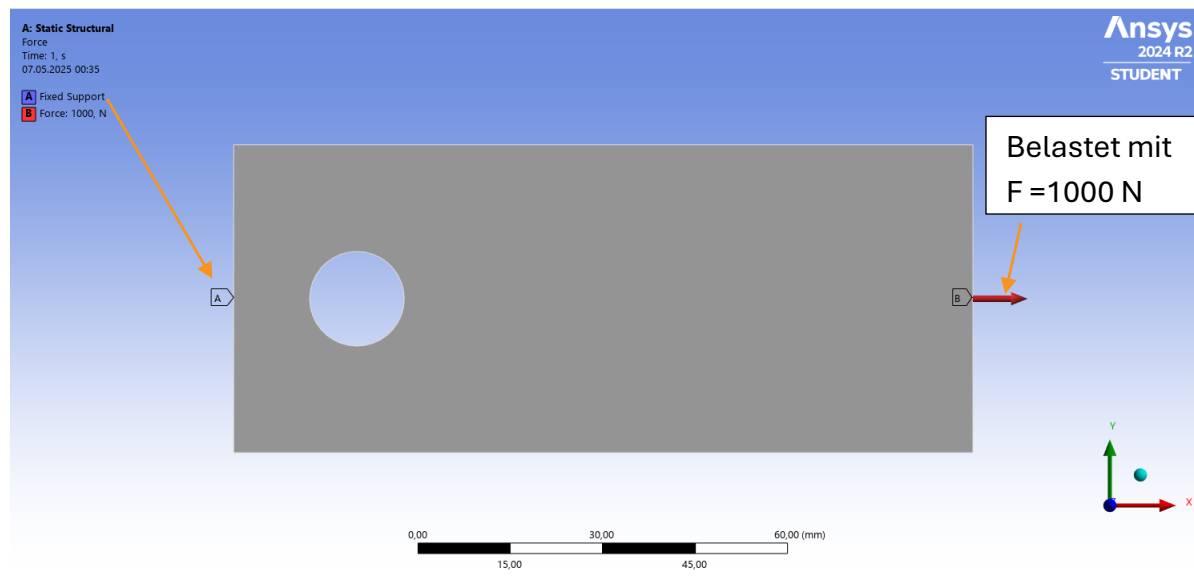


Abbildung 2 FEM Bauteil (Fixiert & Last) ANSYS

Das Bauteil wurde auf der linken Seite eingespannt und auf der rechten Seite mit einer Zugkraft von $F=1000\text{ N}$ belastet, wie in Abbildung 2 zu sehen ist.

a) Hauptspannungen ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) & Vergleichsspannung (σ_v):

Die Hauptspannungen wurden als Eigenwerte des Spannungstensors berechnet. Die farbliche Darstellung zeigt die Spannungsverteilung im Bauteil, wobei hohe Werte am Rand der Bohrung auftreten (Siehe Abbildung 3).

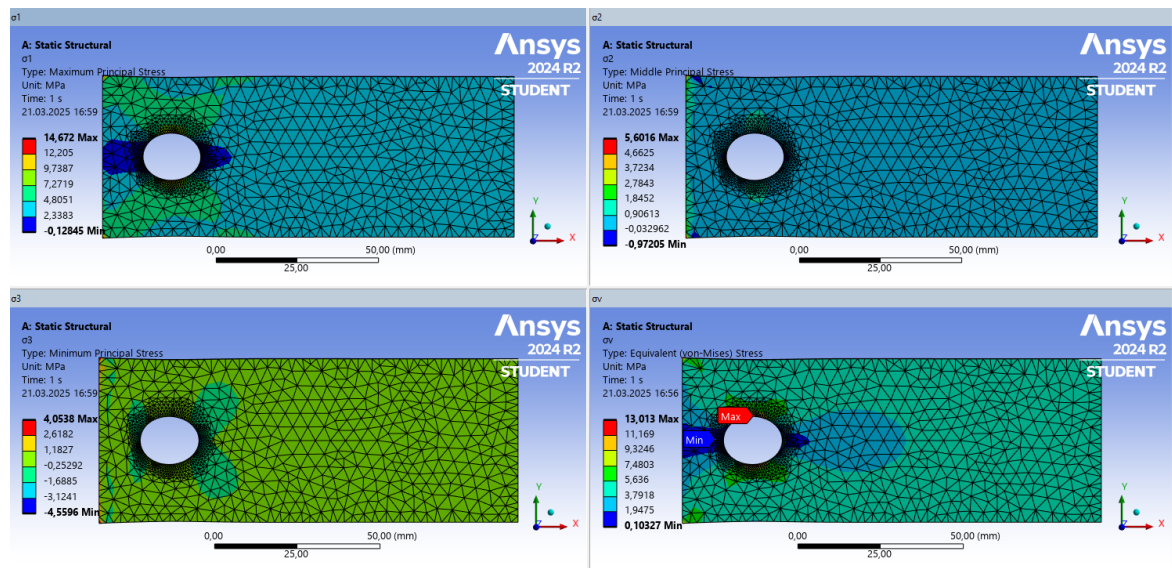


Abbildung 3 Berechnete Hauptspannungen & Vergleichsspannung durch (ANSYS)

b) Hauptspannungsrichtungen (Vektor-Prinzipalspannungen):

Die Hauptspannungsrichtungen wurden als Vektorfeld dargestellt, um die Orientierung der Spannungen innerhalb des Bauteils zu visualisieren.

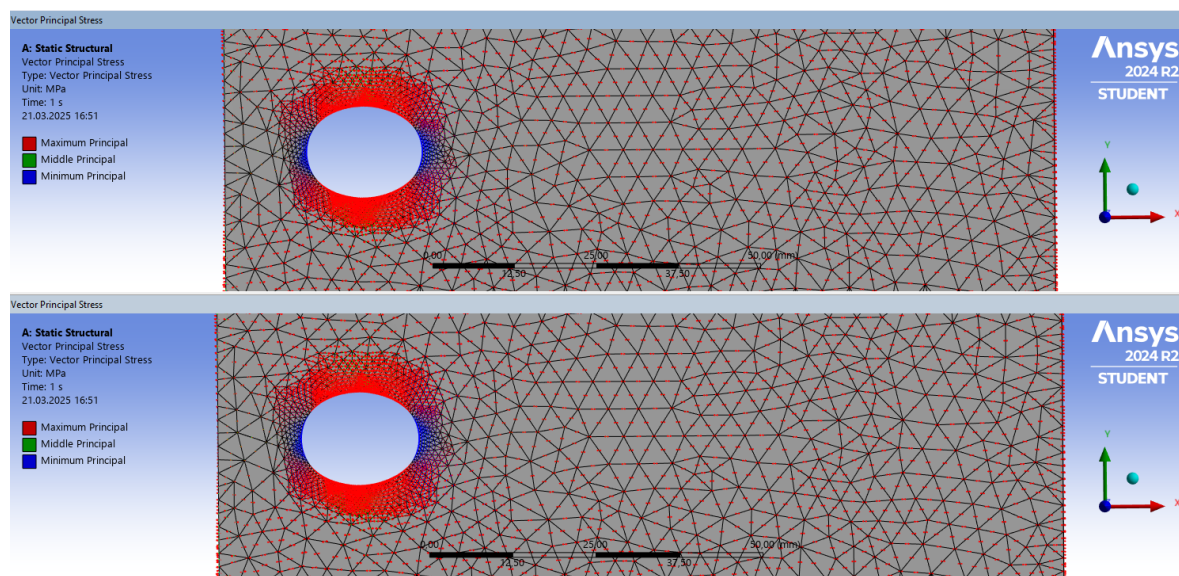


Abbildung 4 Darstellung der Hauptspannungsrichtungen als Vektorfeld ANSYS

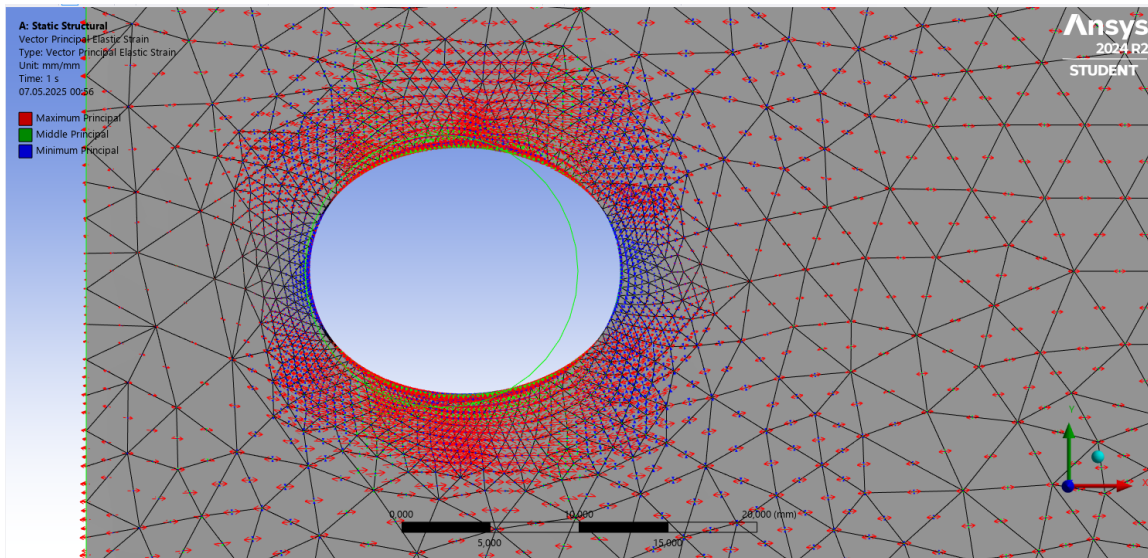


Abbildung 5 Zoom Darstellung der Hauptspannungsrichtungen als Vektorfeld ANSYS

Die Vektoren zeigen die Orientierung der Hauptspannungen in jedem Punkt des Bauteils. Sie geben dabei nicht nur die Richtung, sondern auch die Lage der maximalen und minimalen Normalspannungen an. Die Farben kennzeichnen die drei Hauptspannungen σ_1 , σ_2 und σ_3 : Rot steht für die maximale Hauptspannung (σ_1), Grün für die mittlere (σ_2) und Blau für die minimale Hauptspannung (σ_3) (Siehe Abbildung 5 & Abbildung 6).

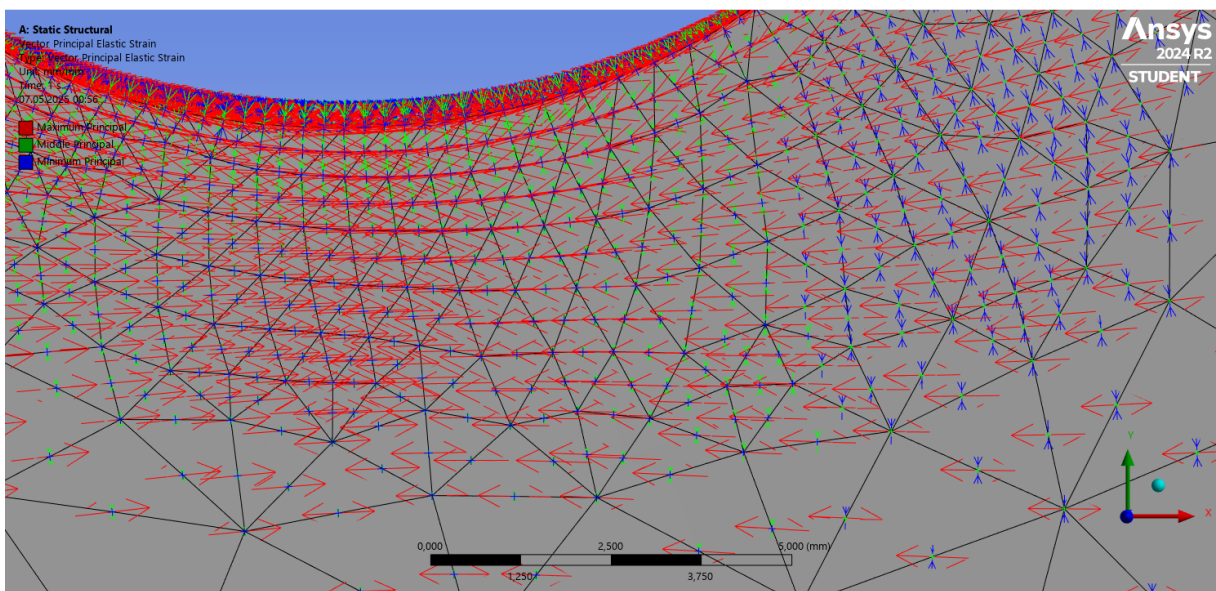


Abbildung 6 2X Zoom Darstellung der Hauptspannungsrichtungen als Vektorfeld ANSYS

3 Spannungs- und Verzerrungszustand

3.1 Allgemeine Definition des Spannungszustand

Um den Spannungszustand an einem Punkt besser zu verstehen, wird der betrachtete Körper in sehr kleine Volumenelemente (z. B. Würfel) unterteilt. Dadurch lässt sich analysieren, wie die inneren Kräfte im Material wirken, beispielsweise durch Einzel-, Strecken- oder Flächenlasten (Siehe Abbildung 7) (Spura, 2019).

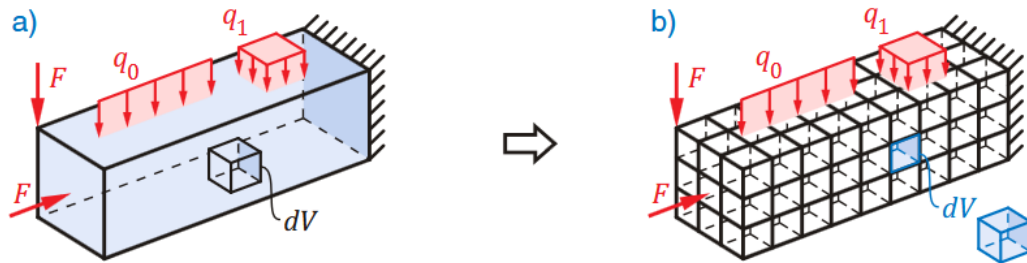


Abbildung 7 Spannungsanalyse durch Zerlegung in infinitesimale Würfелеlemente (Spura, 2019)

3.2 Definition und Bedeutung von Spannungen

Spannungen sind physikalische Größen, die die innere Beanspruchung eines Materials beschreiben. Sie geben an, welche Kräfte pro Flächeneinheit innerhalb eines Körpers wirken. Mathematisch wird die Zug- oder Druckspannung $\vec{\sigma}$ als Kraft $\vec{F}$ pro Flächeneinheit A definiert (Ferdinand P. Beer & E. Russell Johnston, 2015).

$$\vec{\sigma} = \frac{\vec{F}}{A} \quad (1)$$

3.3 Spannungstensor

Der (Cauchy-)Spannungstensor beschreibt alle Spannungskomponenten an einem Punkt im Material (siehe Abbildung 9). Er enthält sowohl Normal- als auch Schubspannungen auf den jeweiligen Koordinatenflächen.

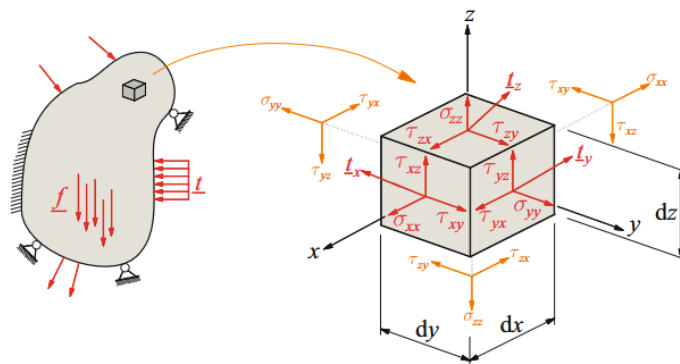


Abbildung 8 Infinitesimaler Würfel und zugehörige Spannungskomponenten (Mittelstedt, Technische Mechanik 2: Elastostatik, 2022)

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Abbildung 9 (Cauchy-) Spannungstensor

Normalspannungen: $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ (wirken senkrecht zur Fläche) .

Schubspannungen: $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ (wirken tangential zur Fläche)

3.4 Zerlegung des Spannungstensors

Für viele ingenieurwissenschaftliche Fragestellungen insbesondere bei plastischen Verformungen ist es hilfreich, den Spannungstensor in zwei Anteile zu zerlegen: einen hydrostatischen Anteil und einen deviatorischen Anteil (Kienzler.Schröder, 2009).

Die Zerlegung erfolgt nach folgender Beziehung (Mittelstedt, Rechenmethoden des Leichtbaus, 2021):

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}}_K + \underline{\underline{S}}_D \quad (2)$$

$\underline{\underline{S}}$ der Gesamtspannungstensor (Cauchy-Spannungstensor)

$\underline{\underline{S}}_K$ die Kugeltensor, auch als hydrostatischer Druck bezeichnet,

$\underline{\underline{S}}_D$ der deviatorische Spannungsanteil.

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}}_K + \underline{\underline{S}}_D = \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma_m \end{pmatrix}$$

Abbildung 10 Gesamtspannungstensor

σ_m ist die mittlere Normalspannung,

σ_1, σ_2 & σ_3 ergibt wie in Gl.(3).

3.4.1 Hydrostatischer Spannungsanteil

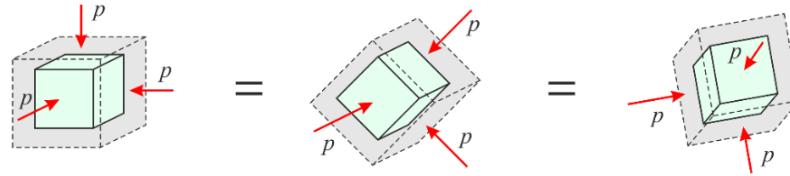


Abbildung 11 hydrostatischer Spannungszustand (Nasdala, 2022)

Ein hydrostatischer Spannungszustand liegt dann vor, wenn alle drei Normalspannungen gleich groß sind und keine Schubspannungen auftreten, also gilt: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0$. In einem solchen Fall wirkt in jede Raumrichtung derselbe Spannungswert unabhängig davon, wie ein Schnitt durch das Material gewählt wird. Dies führt dazu, dass keine Gestaltsänderung, sondern lediglich eine Volumenänderung stattfindet (Mittelstedt, Technische Mechanik 2: Elastostatik, 2022); (Wandigner, 2014); (Huber, 2023).

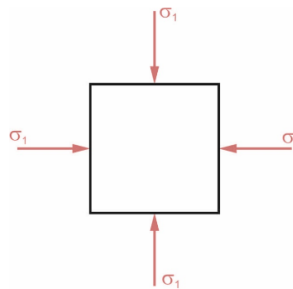


Abbildung 12 Beispiel Hydrostatischer Spannungszustand 2D

Der hydrostatische Spannungsanteil lässt sich über die mittlere Normalspannung σ_m beschreiben, wie folgt (Nasdala, 2022); (Mittelstedt, Rechenmethoden des Leichtbaus, 2021):

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (3)$$

$$S_K = \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix}$$

Abbildung 13 Hydrostatische Anteil (Kugeltensor)

3.4.2 Deviatorischer Spannungsanteil

Der Deviatorische Anteil beschreibt die Abweichung vom hydrostatischen Spannungszustand und ist entscheidend für plastische Formänderungen. Im reinen hydrostatischen Spannungszustand verschwindet dieser deviatorische Anteil vollständig (Mittelstedt, Rechenmethoden des Leichtbaus, 2021).

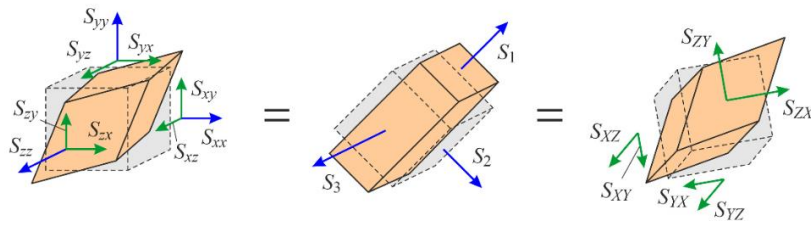


Abbildung 14 Deviatorischer Spannungszustand (Nasdala, 2022) (Hofstetter, 2013)

$$S_D = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma_m \end{pmatrix}$$

Abbildung 15 Deviatorische Spannungstensor

3.4.3 Invarianten des Spannungstensors

Die Invarianten eines Spannungstensors sind skalare Größen, die sich bei einer Änderung des Koordinatensystems nicht verändern. Sie beschreiben fundamentale Eigenschaften des Spannungszustands (Kienzler.Schröder, 2009); (Wandigner, 2014); (Skrotzki, 2022).

Für den Spannungstensor S ergeben sich drei Hauptinvarianten durch (Wandigner, 2014):

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (4)$$

$$I_2 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1 \quad (5)$$

$$I_3 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \quad (6)$$

σ_1 entspricht der maximale Hauptspannung

σ_2 entspricht der mittleren Hauptspannung

σ_3 entspricht der minimalen Hauptspannung

Die erste Invariante I_1 ist direkt mit dem hydrostatischen Spannungsanteil verknüpft (Mittelstedt, Technische Mechanik 2: Elastostatik, 2022):

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \cdot I_1 \quad (7)$$

3.5 Verschiedene Spannungszustände mit eigenem Tensor

3.5.1 Eindimensionaler Spannungszustand & Spannungstensor

In einem eindimensionalen Spannungszustand treten ausschließlich nur Normalspannungen auf, keine Schubspannungen (siehe Abbildung 16) (Spura, 2019).

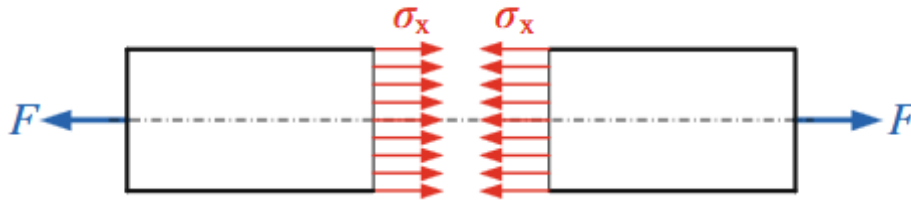


Abbildung 16 Einachsiger Spannungszustand (Arndt, Brüggemann, & Ihme, 2019)

Wenn man jedoch einen schrägen Schnitt durch das Bauteil legt, entstehen zusätzlich Schubspannungen, da sich die Normalspannung in Normal- und Schubanteile aufteilt. Das zeigt, dass auch in einem scheinbar einfachen Spannungszustand Schubspannungen vorhanden sein können, allerdings nur auf geneigten Schnittflächen (siehe Abbildung 17) (Mittelstedt, Technische Mechanik 2: Elastostatik, 2022).

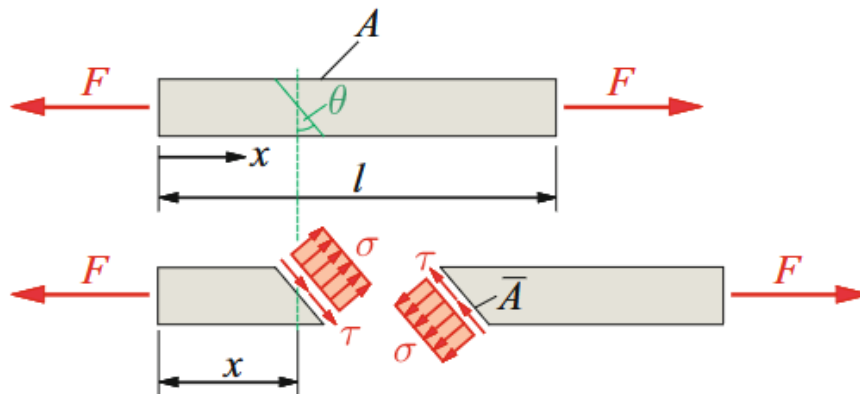


Abbildung 17 Schräge Schnitt & Schubspannung (Mittelstedt, Technische Mechanik 2: Elastostatik, 2022)

Für Eindimensionaler Spannungszustand gilt:

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbildung 18 Spannungstensor Einachsiger Spannung

In diesem Fall reduziert sich der Spannungstensor auf eine einzige nicht verschwindende Komponente, nämlich die Normalspannung σ_{xx} in x-Richtung. Alle übrigen Komponenten sowohl die anderen Normalspannungen als auch sämtliche Schubspannungen sind gleich null (siehe Abbildung 18) (Kloss-Grote, 2025).

3.5.2 Ebener Spannungszustand (ESZ) & Spannungstensor

Ein ebener Spannungszustand (ESZ) liegt vor, wenn in einem Körper nur Spannungen in einer Ebene existieren ($\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$) (Siehe Abbildung 19), und die Normalspannung senkrecht zur Ebene, (σ_{zz}) gleich null ist (Arndt, Brüggemann, & Ihme, 2019).

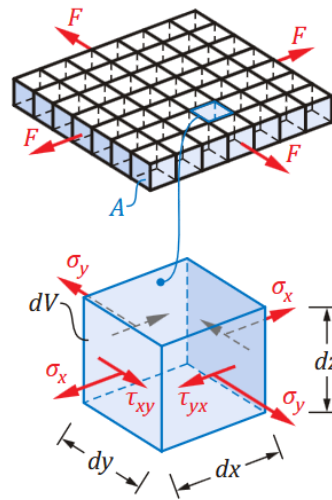


Abbildung 19 Ebene Spannungszustand (Spura, 2019)

Für einen ebenen Spannungszustand gilt:

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbildung 20 Ebener Spannungszustand Tensor

Normalspannungen: σ_{xx} (in x-Richtung) und σ_{yy} (in y-Richtung).

Schubspannung: τ_{xy} (in der xy-Ebene).

3.5.3 Räumlicher Spannungszustand (RSZ) & Spannungstensor

Ein räumlicher Spannungszustand liegt vor, wenn alle sechs unabhängigen Spannungsgrößen an einem Punkt im Material auftreten. Das bedeutet, dass in allen drei Raumrichtungen (x, y, z) sowohl Normalspannungen als auch Schubspannungen wirken. Solche Zustände treten typischerweise im Inneren von Körpern auf (siehe Abbildung 21) (Spura, 2019); (Mittelstedt, Rechenmethoden des Leichtbaus, 2021).

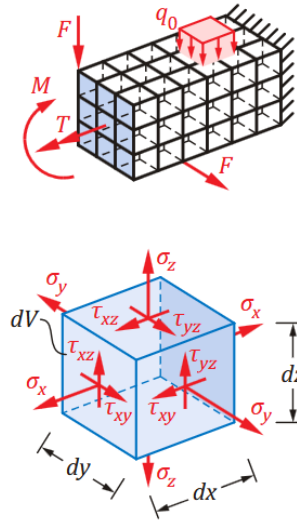


Abbildung 21 Räumlicher Spannungszustand (Spura, 2019)

Durch die Symmetriebedingung $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ reduziert sich die Anzahl der unabhängigen Schubspannungen von sechs auf drei. Somit hat der Tensor insgesamt sechs unabhängige Komponenten (3 Normalspannungen + 3 Schubspannungen) (siehe Abbildung 22).

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{xz} = \tau_{zx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Abbildung 22 Dreidimensionaler Spannungstensor

3.6 Verzerrungszustand

3.6.1 Grundlagen

Der Verzerrungszustand beschreibt die Formänderung eines Körpers, die infolge äußerer Belastungen auftritt. Während der Spannungszustand die im Material wirkenden inneren Kräfte pro Flächeneinheit charakterisiert, bezieht sich der Verzerrungszustand auf die dadurch hervorgerufenen geometrischen Veränderungen wie etwa Dehnung, Stauchung oder Scherung (Gross.Hauger & Schröder.Wall, 2012).

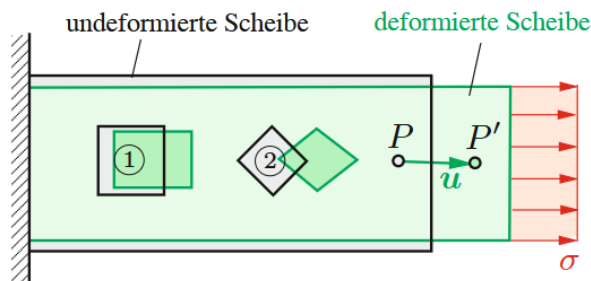


Abbildung 23 Anschaulicher Verzerrungszustand 2D (Gross.Hauger & Schröder.Wall, 2012)

Unter der Einwirkung äußerer Kräfte erfahren Punkte innerhalb eines Festkörpers Verschiebungen, die sich entlang der drei kartesischen Koordinatenachsen beschreiben lassen: u in x -Richtung, v in y -Richtung und w in z -Richtung. Diese Verschiebungen führen zu mechanischen Verzerrungen, die sich in normale Dehnungen (Längenänderungen) und Schubverzerrungen (Winkeländerungen, auch Gleitungen genannt) unterteilen lassen (siehe Abbildung 24) (Mittelstedt, Rechenmethoden des Leichtbaus, 2021) ; (Huber, 2023).

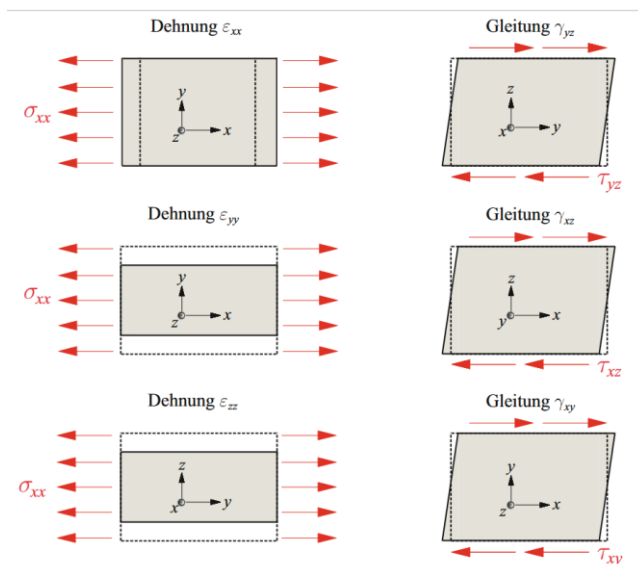


Abbildung 24 Dehnung und Gleitungen Darstellung (Mittelstedt, Rechenmethoden des Leichtbaus, 2021)

3.6.2 Verzerrungstensor

Zur mathematischen Beschreibung des Verzerrungszustands wird der symmetrische Verzerrungstensor verwendet. Dieser fasst sowohl die normalen Dehnungen als auch die Schubverzerrungen an einem Punkt des Körpers in tensorieller Form zusammen (Kienzler.Schröder, 2009); (Spura, 2019).

Der Verzerrungstensor im dreidimensionalen Fall lautet:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0,5 \cdot \gamma_{xy} & 0,5 \cdot \gamma_{xz} \\ 0,5 \cdot \gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0,5 \cdot \gamma_{yz} \\ 0,5 \cdot \gamma_{xz} & 0,5 \cdot \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

Abbildung 25 Verzerrungstensor Allgemein

Die Diagonalelemente $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ beschreiben die Dehnungen in den jeweiligen Richtungen, während die Nebenelemente wie $0,5 \cdot \gamma_{xy}$ die Schubverzerrungen darstellen. Aufgrund der Symmetrie $0,5 \cdot \gamma_{xy} = 0,5 \cdot \gamma_{yx}$ enthält der Tensor nur sechs unabhängige Komponenten (Kienzler.Schröder, 2009).

3.6.3 Zusammenhang zwischen Spannung und Verzerrung (Hooke'sches Gesetz)

Der Zusammenhang zwischen den Spannungen und den dadurch hervorgerufenen Verzerrungen in einem elastischen Festkörper wird durch das sogenannte Hooke'sche Gesetz beschrieben. Es bildet die Grundlage für die lineare Elastizitätstheorie und geht auf die Annahme zurück, dass Verformungen proportional zur Belastung sind, zumindest solange das Material im elastischen Bereich bleibt (Beckmann, 2013).

In seiner einfachsten Form, wie bei einachsiger Belastung, lautet das Hooke'sche Gesetz (Arndt, Brüggemann, & Ihme, 2019):

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma}{E} \quad (8)$$

Dabei ist ε die Dehnung, σ die Normalspannung und E der Elastizitätsmodul des Materials, der dessen Steifigkeit beschreibt. Diese Beziehung lässt sich jedoch auf den dreidimensionalen Fall erweitern, um auch Querverwirkungen durch die Querkontraktion (Poisson-Effekt) zu erfassen. In diesem Fall ergibt sich z. B. die Dehnung in x-Richtung durch (Huber, 2023):

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y - \nu \cdot \sigma_z) \quad (9)$$

Hierbei bezeichnet ν die Querkontraktionszahl (Poissonzahl), die das Verhältnis der Querdehnung zur Längsdehnung bei axialer Belastung beschreibt. Sie gibt an, wie stark ein Material in Querrichtung schrumpft, wenn es in Längsrichtung gedehnt wird. Typische Werte betragen für Stahl $\nu = 0,3$ und für Aluminium $\nu = 0,34$. Ähnliche Gleichungen gelten auch für ε_y und ε_z (Spura, 2019).

3.6.4 Einachsiger Verzerrungszustand

Beim einachsigen Verzerrungszustand wirkt die Belastung nur in einer Richtung, typischerweise in x-Richtung. Die anderen Verzerrungskomponenten werden vernachlässigt ($\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$). Ein klassisches Beispiel ist der Zug- oder Druckversuch an einem Probestab. Die resultierende Dehnung ε_x lässt sich über das Hooke'sche Gesetz einfach bestimmen (Beckmann, 2013) & (Kloss-Grote, 2025):

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (10)$$

3.6.5 Ebener Verzerrungszustand (EVZ)

Beim ebenen Verzerrungszustand handelt es sich um einen speziellen Fall, bei dem das betrachtete Bauteil lediglich in einer Ebene belastet wird. Infolgedessen werden nur die Dehnungen ε_x , ε_y sowie die Schubverzerrung γ_{xy} in dieser Ebene berücksichtigt, während die Verzerrung in Dickenrichtung (ε_z) sowie die Schubverzerrungen γ_{xz} und γ_{yz} null sind. Typischerweise treten in solchen Fällen sowohl Normal- als auch Schubverzerrungen gleichzeitig auf.

Wie in einer entsprechenden (Abbildung 26) eines allgemeinen ebenen Spannungszustands veranschaulicht wird, führen die wirkenden Normalspannungen σ_x und σ_y zu den Dehnungen ε_x , ε_y und $\varepsilon_z \neq 0$ während die Schubspannung τ_{xy} eine Schubverzerrung γ_{xy} am betrachteten Volumenelement dV verursacht (Spura, 2019); (Gross.Hauger & Schröder.Wall, 2012).

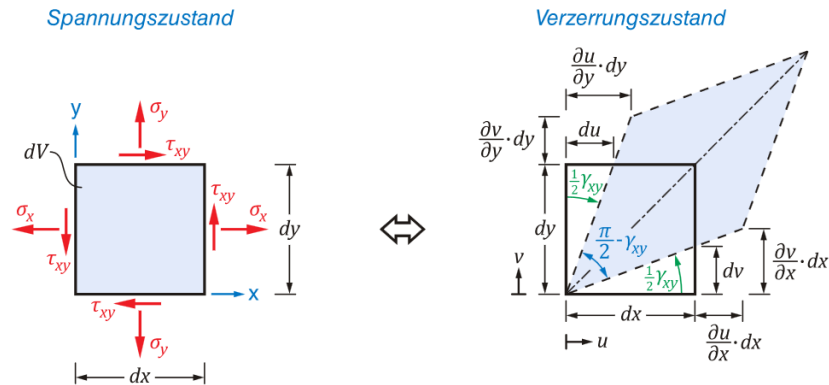


Abbildung 26 Ebene Verzerrungszustand (Spura, 2019)

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y - \nu \cdot \sigma_z) \quad (11)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x - \nu \cdot \sigma_z) \quad (12)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu \cdot \sigma_x - \nu \cdot \sigma_y) = 0 \quad (13)$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$$

$$\tau_{yz} = \gamma_{yz} = 0$$

$$\tau_{xy} = \gamma_{zx} = 0$$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0,5 \cdot \gamma_{yx} & 0 \\ 0,5 \cdot \gamma_{xy} & \varepsilon_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbildung 27 Ebener Verzerrungstensor

3.6.6 Räumlicher Verzerrungszustand (RVZ)

Der räumliche Verzerrungszustand stellt den allgemeinsten Fall der Verformung eines Körpers dar. Er tritt auf, wenn alle sechs unabhängigen Komponenten der Verzerrung gleichzeitig betrachtet werden müssen. Das bedeutet, dass sowohl drei Normalverzerrungen $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ als auch drei Schubverzerrungen $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ vorhanden sind. Ein solcher Zustand entsteht typischerweise in einem räumlich belasteten Körper (Kienzler.Schröder, 2009); (Mahnken, 2015).

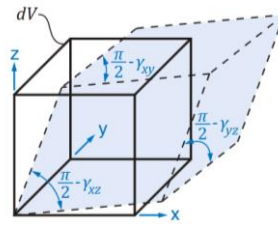


Abbildung 28 Räumliche Verzerrungszustand Würfel (Spura, 2019)

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y - \nu \cdot \sigma_z) \quad (14)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x - \nu \cdot \sigma_z) \quad (15)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu \cdot \sigma_x - \nu \cdot \sigma_y) \quad (16)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (17)$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}; \tau_{yz} = \gamma_{yz} = \gamma_{zy}; \tau_{xy} = \gamma_{zx} = \gamma_{xz}$$

4 Vergleichsspannungen und Festigkeitsnachweise

4.1 Einführung in die Spannungshypothesen

In der technischen Mechanik und Festigkeitslehre spielt die Frage, ob ein Bauteil den auf es einwirkenden Beanspruchungen standhält, eine zentrale Rolle. Ein statisches Versagen eines Bauteils kann im Wesentlichen auf zwei Arten erfolgen: entweder durch einen Trennbruch, wie er bei spröden Werkstoffen auftritt, oder durch plastisches Fließen, das vor allem bei duktilen Materialien beobachtet wird. Um ein solches Versagen zu verhindern, ist eine geeignete Dimensionierung der Bauteile erforderlich. Versagen durch Stabilitätsprobleme wie Knicken oder Beulen wird in dieser Arbeit nicht betrachtet (Spura, 2019) ; (Arndt, Brüggemann, & Ihme, 2019).

Die im Bauteil durch äußere Lasten entstehenden inneren Spannungen können rechnerisch bestimmt werden (vgl. Kapitel 3). Aus dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm des jeweiligen Werkstoffs (siehe Abbildung 32) lassen sich charakteristische Kennwerte wie die Streckgrenze (Beginn der plastischen Verformung) und die Zugfestigkeit (maximal ertragbare Spannung bis zum Bruch) ableiten. Diese Werte dienen als Grundlage für die Beurteilung der Bauteilsicherheit (Kienzler.Schröder, 2009) ; (Nasdala, 2022).

Da reale Spannungszustände meist mehrachsig sind, wurde eine Methode benötigt, um diese komplexen Zustände auf eine einfach zu beurteilende Form zu reduzieren. Hierzu dienen sogenannte Spannungshypothesen. Sie erlauben die Umrechnung eines mehrdimensionalen Spannungszustands in eine Vergleichsspannung, die dann mit dem Werkstoffkennwert aus einem eindimensionalen Zugversuch verglichen werden kann. Überschreitet die Vergleichsspannung die zulässige Werkstoffspannung, ist mit einem Versagen zu rechnen (Huber, 2023) ; (Beckmann, 2013).

In der Praxis haben sich mehrere Spannungshypothesen etabliert. Die Auswahl der geeigneten Hypothese hängt sowohl vom Werkstoffverhalten als auch von der Art der Beanspruchung ab. In maschinenbauingenieurtechnischen Anwendungen werden heute vor allem drei Hypothesen verwendet (Spura, 2019):

- 1) die Normalspannungshypothese (NH, Rankine),
- 2) die Schubspannungshypothese (SH, Tresca) sowie
- 3) die Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH, von Mises)

4.2 Vergleichsspannungshypothesen im Überblick

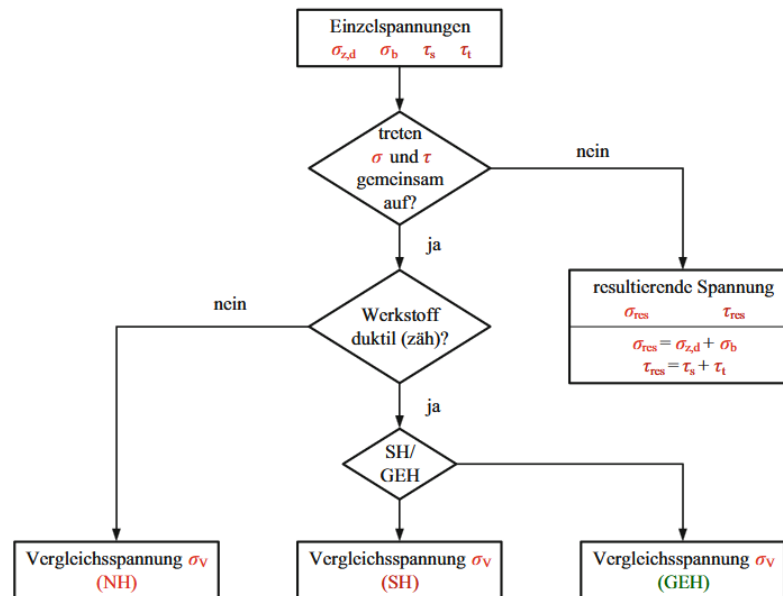


Abbildung 29 Ablaufschema resultierende Spannung/Vergleichsspannungshypothesen für stabförmige Bauteile (Arndt, Brüggemann, & Ihme, 2019)

Abbildung 29 zeigt ein Entscheidungsdiagramm zur Auswahl einer geeigneten Methode zur Berechnung der Vergleichsspannung σ_V , welche die für die Festigkeitsbewertung von Bauteilen unter mehrachsiger Beanspruchung erforderlich ist. Ausgangspunkt sind die gegebenen Einzelspannungen: die Normalspannungen $\sigma_{z,d}$, σ_b sowie die Schubspannungen τ_s , τ_t .

Im ersten Schritt wird geprüft, ob Normal- und Schubspannungen gleichzeitig auftreten. Ist dies nicht der Fall, ergibt sich die resultierende Spannung unmittelbar. bestimmt. Dabei ergeben sich die resultierende Normalspannung als Summe $\sigma_{res} = \sigma_{z,d} + \sigma_b$ bzw. die resultierende Schubspannung als $\tau_{res} = \tau_s + \tau_t$ (Huber, 2023); (Spura, 2019).

Treten hingegen sowohl Normal- als auch Schubspannungen gemeinsam auf, ist die Werkstoffeigenschaft hinsichtlich der Duktilität entscheidend für die Wahl des Vergleichsspannungskonzepts. Bei duktilem Werkstoffverhalten, wie es bei vielen Metallen der Fall ist, werden entweder die Schubspannungshypothese (SH) oder die Gestaltänderungshypothese (GEH) zur Anwendung. Für spröde Werkstoffe hingegen ist die Normalspannungshypothese (NH) vorgesehen.

4.2.1 Normalspannungshypothese (NH, Rankine)

Die Normalspannungshypothese basiert auf der Annahme, dass das Material versagt, sobald eine der Hauptspannungen den zulässigen Wert überschreitet. Sie ist besonders für spröde Materialien wie Eisenguss oder Keramik geeignet, welche dazu neigen, bei Überschreiten einer kritischen Zug- oder Druckspannung zu versagen (Mahnken, 2015) ; (Spura, 2019).

Mathematische Formulierung:

1) Allgemein:

Die Vergleichsspannung nach der NH ist die erste (größte) Hauptspannung, sofern diese eine Zugspannung ist.

$$\sigma_{v,NH} = \sigma_1, \text{ wenn } \sigma_1 > 0$$

2) Für den Fall, dass nur Biegung und Torsion als Belastung vorliegen, gilt: $\sigma_x = 0$; $\sigma_y = \sigma_b$ und $\tau_{xy} = \tau_t$ Daraus folgt (Arndt, Brüggemann, & Ihme, 2019):

$$\sigma_{v,NH} = \frac{\sigma_b + \sqrt{\sigma_b^2 + 4 \cdot \tau_t^2}}{2} \quad (18)$$

3) Ebener Spannungszustand:

$$\sigma_{v,NH} = \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (19)$$

(Voraussetzung : $\sigma_1 > 0$ das heißt Zug)

Die vorhandene Sicherheit in Bezug auf einen Bruch nach der NH S_{NH} berechnet sich aus

$$S_{v,NH} = S_B = \frac{R_m}{\sigma_{v,NH}} \quad (20)$$

4.2.2 Schubspannungshypothese (SH,Tresca)

Bei der Schubspannungshypothese (SH) wird angenommen, dass ein Werkstoff versagt, sobald die maximale auftretende Schubspannung einen kritischen Grenzwert erreicht. Diese Hypothese basiert auf der Vorstellung, dass die Beanspruchung des Materials durch die größte Schubspannung maßgeblich beschrieben werden kann (Mahnken, 2015) ; (Huber, 2023) (Kloss-Grote, 2025).

Die Vergleichsspannung nach der SH,(Tresca) berechnet sich wie folgt:

- 1) Für den allgemeineren Fall eines einachsigen Spannungszustands mit zusätzlicher Schubspannung (Mahnken, 2015):

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = 2 \cdot \sigma_{v,SH} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \quad (21)$$

- 2) Ebene Spannungszustand (ESZ):

$$\tau_{max} = \tau_F \quad (22)$$

$$\tau_F = \frac{R_e}{2} \quad (23)$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (24)$$

$$\sigma_{V,SH} = 2 \cdot \tau_{max} \quad (25)$$

$$\sigma_{V,SH} = 2 \cdot \tau_{max} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} \quad (26)$$

Diese Gl(26) gilt nur ,wenn σ_1 und σ_3 unterschiedliche Vorzeichen haben.

$$S_{SH,Flie\ddot{u}en} = S_F = \frac{R_e}{\sigma_{V,SH}} \quad (27)$$

Auch spröde Werkstoffe können bei Druckbelastung versagen und zwar nicht nur durch klassischen Bruch, sondern unter Umständen auch durch einen schubähnlichen Mechanismus. Rechnerisch unterscheidet sich die Betrachtung dabei kaum von der, wie man sie beim plastischen Fließen kennt. Der Unterschied liegt hauptsächlich darin, dass hier nicht die Streckgrenze maßgeblich ist, sondern die Druckfestigkeit σ_{dB} , gegen die abgesichert wird (Kloss-Grote, 2025).

$$S_{SH,Bruch} = \frac{\sigma_{dB}}{\sigma_{V,SH}} \quad (28)$$

4.2.3 Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH, von Mises)

Die Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH), auch bekannt als von-Mises-Hypothese, geht davon aus, dass das Versagen eines Bauteils auf plastische Verformungen zurückzuführen ist, ähnlich wie bei der Schubspannungshypothese. Diese plastischen Verformungen treten dann auf, wenn die im Material gespeicherte Gestaltänderungsenergie einen werkstoffspezifischen Grenzwert überschreitet (Nasdala, 2022) ; (Kloss-Grote, 2025)& (Hofstetter, 2013)& (Arndt, Brüggemann, & Ihme, 2019). Die Vergleichsspannung nach der GEH berechnet sich wie folgt:

- 1) In Deviatorinvarianten

$$\sigma_{v,Mises} = \sqrt{-3 \cdot I_2'} \quad (29)$$

- 2) In Invarianten

$$\sigma_{v,Mises} = \sqrt{I_1^2 - 3 \cdot I_2} \quad (30)$$

- 3) In Hauptspannungen

$$\sigma_{v,Mises} = \sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)} \quad (31)$$

- 4) In bel. Komponenten

$$\sigma_{v,Mises} = \sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2))} \quad (32)$$

- 5) Für den ebenen Spannungszustand (ESZ) gilt:

$$\sigma_{v,Mises} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \quad (33)$$

- 6) Sonderfall Biegung und Torsion:

$$\sigma_{v,Mises} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3 \cdot \tau_{xy}^2} \quad (34)$$

Die vorhandene Sicherheit in Bezug auf plastisches Fließen nach der Gestaltsänderungshypothese von Mises $S_{v,Mises}$ berechnet sich aus:

$$S_{v,Mises} = \frac{R_e}{\sigma_{v,Mises}} \quad (35)$$

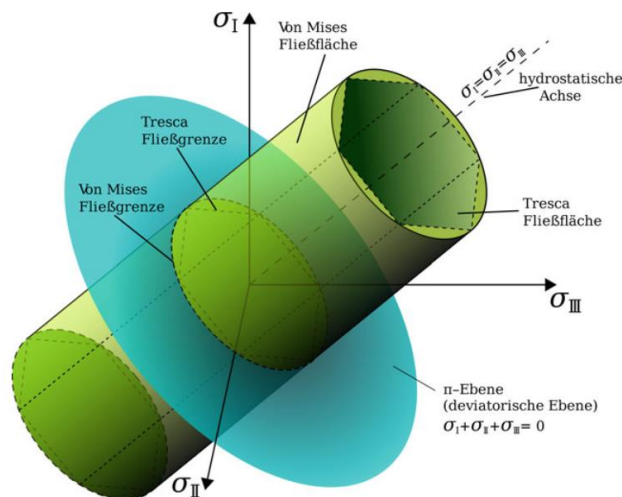


Abbildung 30 Spannungsraum und Fließbedingung (Huber, 2023)

Die Abbildung 30 zeigt die grafische Darstellung der Fließkriterien nach Tresca und von Mises im dreidimensionalen Hauptspannungsraum, der durch die Hauptspannungen σ_1 , σ_2 und σ_3 aufgespannt wird. Beide Fließkriterien beschreiben, unter welchen Spannungszuständen ein Material plastisch zu fließen beginnt, jedoch auf unterschiedlicher theoretischer Grundlage.

Die von-Mises-Fließfläche erscheint als rotationssymmetrisches Zylindergebilde, dessen Achse entlang der hydrostatischen Achse verläuft. Diese Achse ist durch den Zustand gekennzeichnet, bei dem alle drei Hauptspannungen gleich groß sind, also $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Die Fläche beruht auf der Gestaltänderungsenergiehypothese, nach der plastisches Fließen einsetzt, wenn die zweite deviatorische Spannungsinvariante einen kritischen Wert erreicht.

Im Gegensatz dazu beschreibt die Tresca-Fließfläche ein regelmäßiges Prisma mit sechseckigem Querschnitt, das ebenfalls um die hydrostatische Achse rotiert. Dieses Modell basiert auf der Schubspannungshypothese, wonach plastisches Fließen eintritt, sobald die maximale Schubspannung einen materialspezifischen Grenzwert überschreitet.

Die sogenannte deviatorische Ebene, die sich senkrecht zur der hydrostatischen Achse befindet, schneidet beide Fließflächen. In dieser Ebene lassen sich die Unterschiede zwischen den Fließkriterien besonders gut erkennen. Die von-Mises-Fläche bildet in dieser Ebene einen Kreis, während die Tresca-Fläche ein regelmäßiges Sechseck zeigt.

4.2.4 Versagenshypothesen im Vergleich (ESZ)

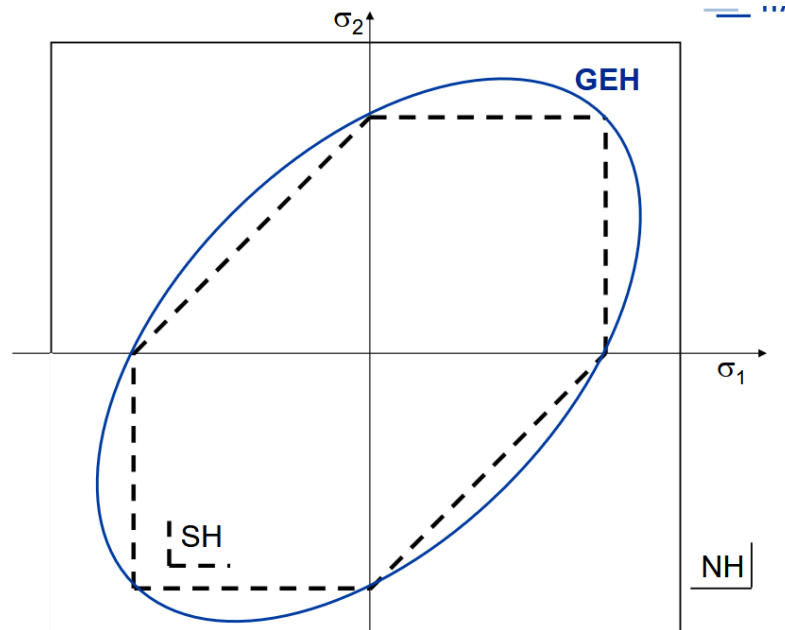


Abbildung 31 Versagenshypothesen (NH,SH,GEH) (Kloss-Grote, 2025)

Die Abbildung 31 zeigt einen Vergleich der zulässigen Spannungsbereiche nach drei unterschiedlichen Festigkeitshypothesen: der Normalspannungshypothese (NH), der Schubspannungshypothese (SH) und der Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH) für den ebenen Spannungszustand (ESZ, $\sigma_3 = 0$). Die Darstellung erfolgt im Hauptspannungs-Diagramm.

Die NH, dargestellt durch das rechtwinklige, schwarze, äußere Rechteck, geht davon aus, dass das Bauteil versagt, sobald eine der Hauptspannungen den zulässigen Spannungswert überschreitet. Die SH beschreibt den zulässigen Bereich durch eine schwarze Strichlinie und basiert auf der maximal auftretenden Schubspannung als Versagenskriterium. Die GEH hingegen berücksichtigt die gesamte Gestaltänderungsenergie im Material und beschreibt einen elliptischen Spannungsbereich, welcher in der in der Abbildung 31 durch die blaue Linie dargestellt ist (Kloss-Grote, 2025) ; (Spura, 2019).

4.3 Festigkeitsnachweise

Festigkeitsnachweise dienen der Überprüfung, ob ein Bauteil den im Betrieb auftretenden Beanspruchungen dauerhaft standhält, ohne dass es zu plastischer Verformung oder Versagen kommt. Dabei wird die im Bauteil wirkende vorhandene Vergleichsspannung berechnet anhand einer geeigneten Spannungshypothese und mit einer zulässigen Spannung verglichen, die sich aus den Werkstoffkennwerten (z. B. Streckgrenze oder Zugfestigkeit) und einem Sicherheitsbeiwert ergibt (Arndt, Brüggemann, & Ihme, 2019).

Ein Bauteil gilt als sicher, wenn die Vergleichsspannung kleiner als die zulässige Spannung ist (Mahnken, 2015)& (Kloss-Grote, 2025):

$$\sigma_{vorh} \leq \sigma_{zul} = \frac{\sigma_{ertr}}{S_{erf}} \quad (36)$$

$$S_{erf} = \frac{\sigma_{ertr}}{\sigma_{zul}} \quad (37)$$

$$S_{vorh} = \frac{\sigma_{ertr}}{\sigma_{vorh}} \quad (38)$$

Dabei ist:

σ_{vorh} : Vergleichsspannung (nach NH, SH oder GEH).

σ_{ertr} : Ertragbare Spannung je nachdem ob gegen Fließen oder Bruch (z. B. Streckgrenze R_e oder Zugfestigkeit R_m) ausgelegt werden muss.

σ_{zul} : zulässige Spannung, die im sicheren Betrieb nicht überschritten werden darf

S_{vorh} : Vorhandene Sicherheit zeigt, wie viel Sicherheit das Bauteil in der aktueller Situation noch hat

S_{erf} : Erforderliche Sicherheit ist der Sicherheit, der notwendig ist, um das Bauteil unter den gegebenen Bedingung als sicher zu betrachten

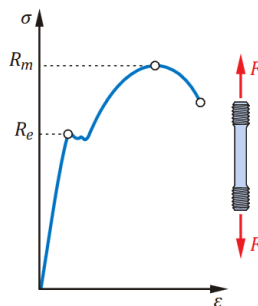


Abbildung 32 Spannungs-Dehnungs-Diagramm (Spura, 2019)

Das Spannungs-Dehnungs-Diagramm in Abbildung 32 beschreibt das mechanische Verhalten eines Baustahls (d.h. eines duktilen Werkstoffs) unter Zugbelastung. Es zeigt, wie sich die Spannung in Abhängigkeit von der Dehnung entwickelt. Wichtige Kennwerte sind dabei:

Streckgrenze (R_e): die Spannung, ab der der Werkstoff dauerhaft plastisch verformt wird.

Zugfestigkeit (R_m): die maximale Spannung, die der Werkstoff im Versuch aushält, bevor die Festigkeit abnimmt und der Bruch eintritt (Arndt, Brüggemann, & Ihme, 2019) ; (Kloss-Grote, 2025).

5 GeoGebra

5.1 Einführung in GeoGebra

GeoGebra ist eine dynamische Mathematiksoftware, die verschiedene Bereiche wie Geometrie, Algebra, Statistik und Analysis in einer Anwendung vereint. Sie richtet sich an alle Bildungsstufen und ermöglicht durch ihre interaktive Oberfläche eine anschauliche Darstellung mathematischer und physikalischer Zusammenhänge. Die Software eignet sich daher auch für technische Anwendungsfelder wie die Festigkeitslehre. Besonders hilfreich ist dabei die Möglichkeit, mathematische Objekte dynamisch zu verändern und deren Einfluss unmittelbar zu beobachten (GeoGebra, 2025).

Die erste Version von GeoGebra wurde zwischen 2001 und 2002 von Markus Hohenwarter im Rahmen seiner Diplomarbeit an der Universität Salzburg im Fachbereich Didaktik der Mathematik und Informatik entwickelt. Heute wird GeoGebra von der GeoGebra GmbH mit Sitz in Österreich weiterentwickelt und ist Teil der BYJU'S-Gruppe. Die Software ist weltweit im Bildungsbereich verbreitet und steht weiterhin kostenfrei zur Verfügung (WikiPedia, 2025).

GeoGebra ist sowohl als Web-Version als auch als Desktop-Anwendung verfügbar. Beide Varianten bieten ähnliche Funktionen, unterscheiden sich jedoch hinsichtlich Leistungsfähigkeit und Offline-Nutzbarkeit (GeoGebra, 2025).

5.2 Ziel und Nutzen in dieser Arbeit

GeoGebra wurde in dieser Arbeit umfassend eingesetzt, um zentrale Konzepte der Festigkeitslehre interaktiv und verständlich darzustellen. Neben klassischen Darstellungen wie dem Mohrschen Spannungskreis und den Fließflächen nach Tresca und von Mises wurden auch weiterführende Modelle mit GeoGebra realisiert. Dazu gehören unter anderem die grafische Darstellung der Hauptspannungen, Spannungs- und Verzerrungswürfel, Sicherheitsanalysen mit Kennzeichnung unzulässiger Bereiche sowie die Veranschaulichung der drei Spannungshypothesen.

Darüber hinaus wurden auch räumliche Modelle entwickelt, beispielsweise 3D-Darstellungen zylindrischer und sechseckiger Fließflächen sowie Schnittdarstellungen im Hauptspannungszustand. Mithilfe interaktiver Elemente wie Schieberegler konnten Spannungswerte gezielt verändert werden, um deren Einfluss auf das Bauteilverhalten nachvollziehbar zu machen. GeoGebra diente somit nicht nur der Visualisierung, sondern war ein zentrales Werkzeug zur Analyse und didaktischen Aufbereitung der behandelten Inhalte.

5.3 Tipps und Tricks für die Nutzung von GeoGebra

1) Einfach Starten

Erst mit Grundformen wie Punkten oder Vektoren beginnen, dann Schritt für Schritt erweitern.

2) Klare Benennung & Farben

Einheitliche Namen und Farben helfen bei der Übersicht besonders bei komplexeren Spannungszuständen.

3) Vorplanung lohnt sich

Eine kurze Skizze oder Idee vor dem Start spart Zeit und vermeidet Chaos.

4) Modular bleiben

Insbesondere bei dreidimensionalen Darstellungen oder vielen verknüpften Objekten kann die Software an ihre Grenzen stoßen. Hier lohnt sich ein modularer Aufbau: Zuerst Teilbereiche erstellen, testen und erst danach komplexer verknüpfen.

5.4 Erste Schritte und Einarbeitung in GeoGebra

Die Benutzeroberfläche von GeoGebra, auch als Arbeitsbereich oder Workbench bezeichnet, ist übersichtlich strukturiert und ermöglicht einen intuitiven Einstieg. In Abbildung 33 ist ein typischer Aufbau dargestellt: Auf der linken Seite befindet sich die Algebra-Ansicht, in der alle erstellten Objekte wie Punkte, Vektoren oder Gleichungen gelistet und bearbeitet werden können. Darunter befindet sich die Eingabezeile, über die mathematische Ausdrücke direkt eingegeben werden können.

Auf der rechten Seite wird in der Grafik-Ansicht (2D oder 3D) angezeigt, was konstruiert wurde. Änderungen, die über die Eingabezeile oder per Maus vorgenommen werden, wirken sich direkt visuell aus. Die einzelnen Ansichten lassen sich über das Menü (oben rechts mit grünen Kreis in Abbildung 33 markiert) ein- und ausblenden, sodass man je nach Bedarf zwischen Grafik, Algebra, Tabelle oder CAS wechseln kann.

Diese strukturierte Oberfläche war besonders hilfreich bei der schrittweisen Konstruktion komplexer Modelle wie dem Mohrschen Kreis, Spannungswürfeln oder Fließflächen in 3D. Der Arbeitsbereich lässt sich flexibel anpassen, z. B. durch Zoom, Drehung im 3D-Modus oder die Anpassung von Farben und Beschriftungen, was die Übersicht bei umfangreichen Modellen verbessert.

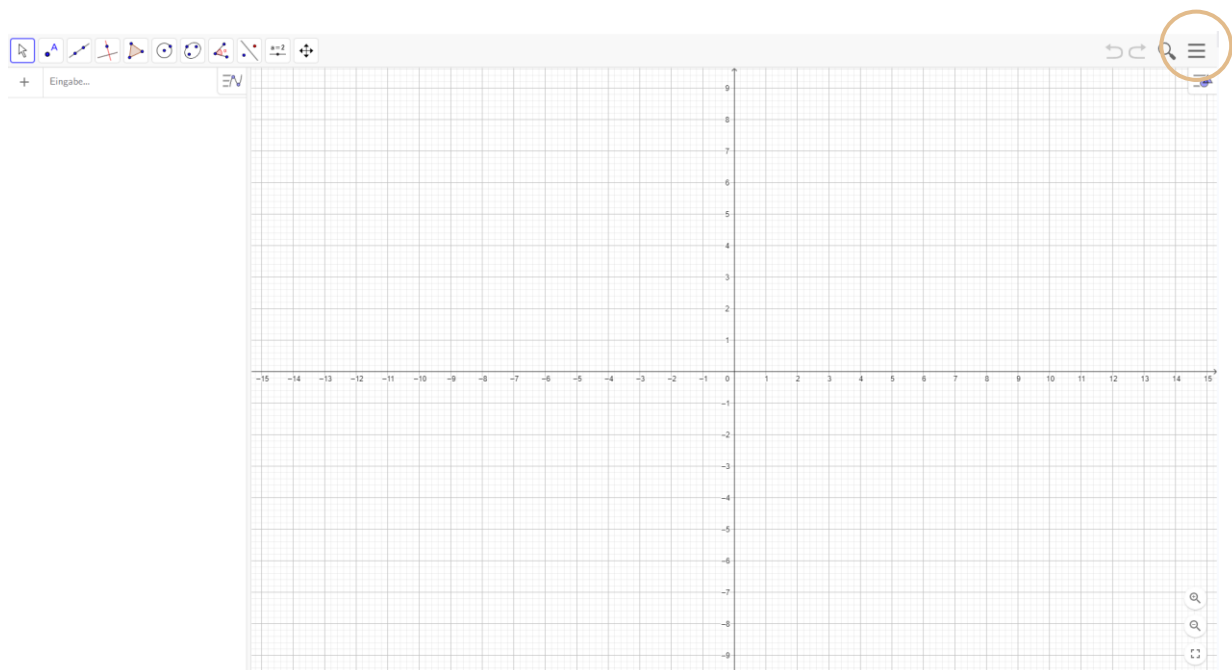


Abbildung 33 Benutzeroberfläche von GeoGebra

6 Eigene Dateien und deren Inhalt

Im Rahmen dieser Arbeit wurden mehrere Dateien in GeoGebra und Creo erstellt, um verschiedene Aspekte der Festigkeitslehre anschaulich und interaktiv darzustellen. Im Folgenden werden die zentralen Dateien kurz beschrieben.

6.1 2D_Mohrsche_kreis_mit_Spannungswürfel_Final (GeoGebra)

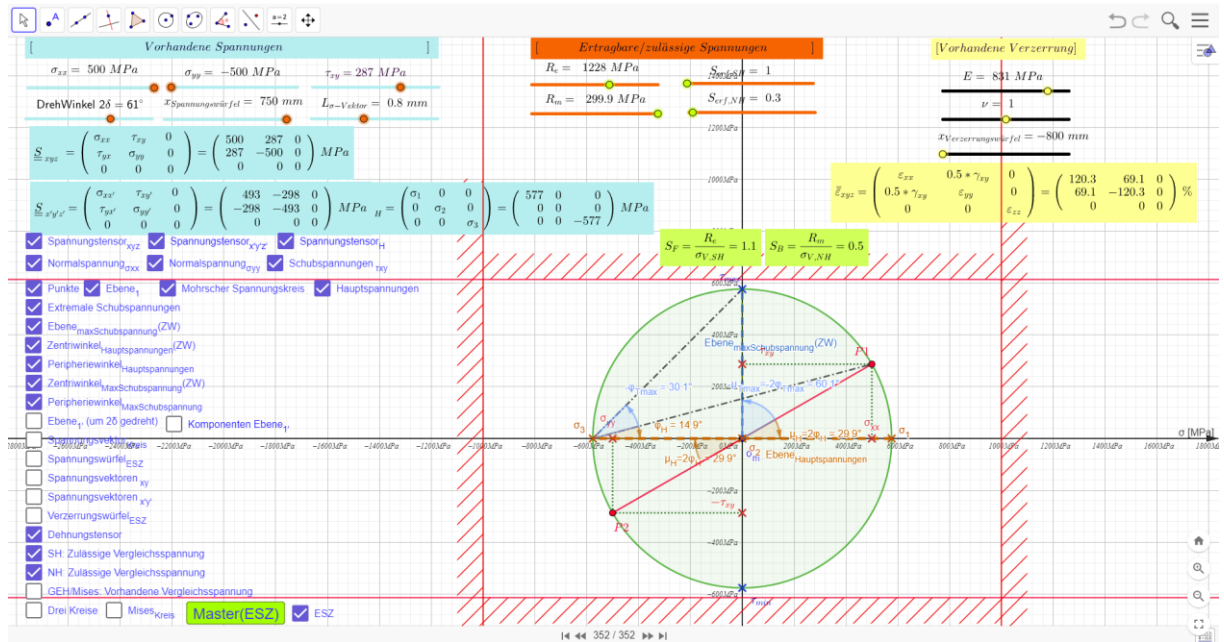


Abbildung 34 2D_Mohrsche_kreis_mit_Spannungswürfel_Final (GeoGebra)

Diese Datei bildet den Schwerpunkt der Arbeit. Sie behandelt umfassend den ebenen Spannungszustand und den einachsigen Spannungszustand. Enthalten sind:

- der Mohrsche Spannungskreis mit interaktiver Steuerung,
- ein Spannungswürfel sowie ein Verzerrungswürfel,
- die drei Spannungshypothesen (Normalspannungshypothese, Schubspannungshypothese, Gestaltänderungshypothese nach von Mises),
- die zugehörigen Sicherheitsnachweise,
- sowie alle relevanten Tensoren wie Hauptspannungstensor, Dehnungstensor u. a.

Die Datei erlaubt eine ganzheitliche und flexible Analyse dieser Zustände und ist durch Schieberegler vollständig interaktiv steuerbar.

6.2 3D_Deviator&Hydro_Final (GeoGebra)

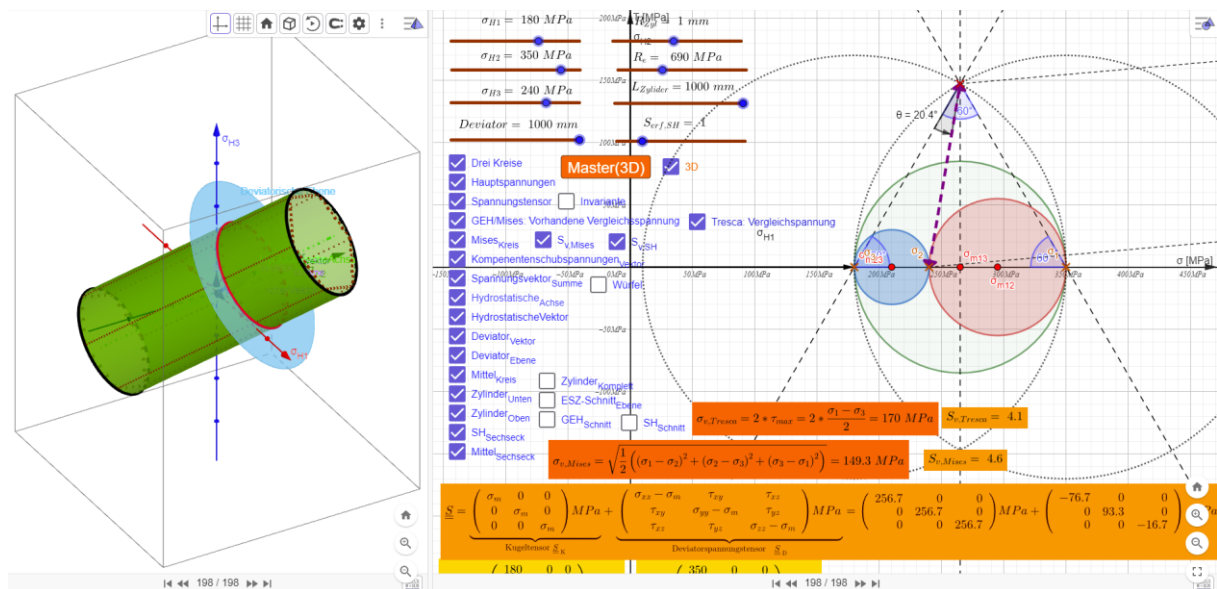


Abbildung 35 3D_Deviator&Hydro_Final (GeoGebra)

In dieser Datei werden dreidimensionale Spannungszustände behandelt. Enthalten sind:

- die drei Mohrschen Spannungskreise für den räumlichen Fall,
- eine 3D-Darstellung der Fließflächen nach Gestaltänderungs- und Schubspannungshypothese,
- die Zerlegung des Spannungstensors in seinen deviatorischen und hydrostatischen Anteil,
- sowie eine interaktive Schnittansicht im Hauptspannungssystem zur Analyse der Fließbedingungen.

6.3 GEH_Zylinder (Creo)

Diese Datei enthält eine dreidimensionale Visualisierung der Gestaltänderungshypothese (GEH) anhand eines Zylindermodells.

6.4 SH_Sechseck (Creo)

Diese Datei zeigt die Schubspannungshypothese (SH), grafisch als Sechseck in der Hauptspannungsebene umgesetzt.

6.5 GEH_SH (Creo)

Diese Datei ist ein Zusammenbau der beiden vorherigen Modelle (GEH_Zylinder und SH_Sechseck).

Hinweis zur Verwendung von Creo: Die Idee hinter der Umsetzung in Creo war, eine realistischere räumliche Darstellung der Fließflächen zu ermöglichen. In GeoGebra sind Schnittansichten in einem dreidimensionalen Körper nur eingeschränkt möglich, insbesondere fehlt die Möglichkeit, Körper vollständig ein- und auszublenden. Deshalb wurden ergänzende 3D-Modelle in Creo erstellt.

7 Konstruktion des Mohrschen Kreise für den ebenen Spannungszustand und Ableitung wichtiger Größen

7.1 Mohrscher Spannungskreis

Man benötigt den Mohrschen Spannungskreis, um einen räumlichen, oder auch ebenen Spannungszustand mit den Hauptspannungen (Spannungen, an denen die Schubspannungen in jeder Richtung Null sind) zeichnerisch ermitteln zu können (Huber, 2023).

7.2 Allgemein zu Zentriwinkel und Peripheriewinkel

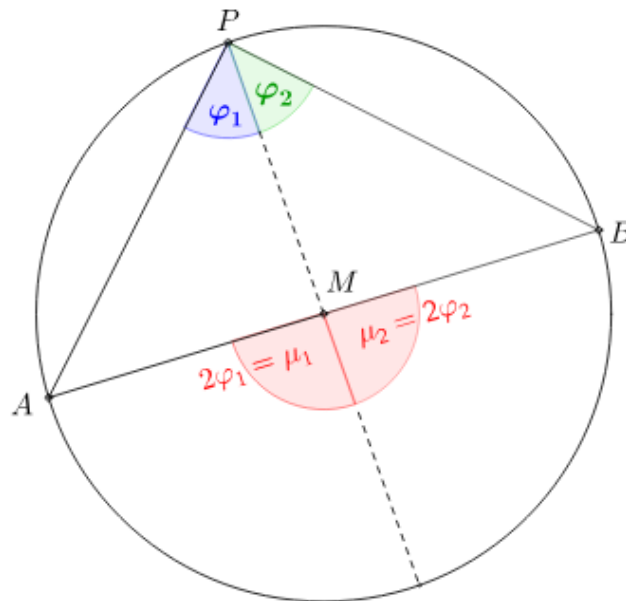


Abbildung 36 Allgemein zu Zentriwinkel & Peripheriewinkel (Wikipedia, 2025)

In der Geometrie spielen Zentriwinkel und Peripheriewinkel eine zentrale Rolle beim Verständnis von Kreisen und deren Eigenschaften. Sie werden insbesondere verwendet, um Winkelverhältnisse im Kreis zu analysieren und geometrische Zusammenhänge zu erkennen (siehe Abbildung 36).

7.2.1 Zentriwinkel

Ein Zentriwinkel ist ein Winkel, dessen Scheitelpunkt im Mittelpunkt eines Kreises liegt. Seine Schenkel verlaufen durch zwei Punkte (z. B. A und B) auf dem Kreisumfang. Der Zentriwinkel überstreicht somit den Kreisbogen zwischen diesen beiden Punkten (siehe Abbildung 36). Ein zentrales Merkmal des Zentriwinkels ist, dass er doppelt so groß ist wie jeder zugehörige Peripheriewinkel, der denselben Kreisbogen überstreicht. Dies lässt sich durch die folgende Beziehung ausdrücken (Österreicher, 2014) ; (Wikipedia, 2025):

$$\mu = 2 \cdot \varphi \quad (39)$$

7.2.2 Peripheriewinkel

Ein Peripheriewinkel (auch Umfangswinkel genannt) ist ein Winkel, dessen Scheitelpunkt (z. B. P) auf dem Kreisrand liegt, während seine Schenkel ebenfalls durch zwei Punkte auf dem Kreisumfang verlaufen (z. B. A und B). Der Peripheriewinkel überstreicht denselben Bogen wie der entsprechende Zentriwinkel, ist jedoch immer halb so groß (Österreicher, 2014) ; (Wikipedia, 2025).

Zusammenhang in der Abbildung 36

In der Abbildung 36 sind die Winkelbeziehungen wie folgt visualisiert:

- Die Winkel φ_1 und φ_2 sind Peripheriewinkel, gebildet am Punkt P auf dem Kreisrand.
- Die zugehörigen Zentriwinkel μ_1 und μ_2 liegen an den Punkten A und B, wobei gilt:

$$\mu_1 = \varphi_1, \mu_2 = \varphi_2,$$

Diese Beziehungen sind hilfreich für viele geometrische Beweise und werden auch bei der Konstruktion des Mohrschen Kreises verwendet, bei dem Winkelbeziehungen zwischen Normal- und Schubspannungen aufgetragen werden.

7.3 Grafische Konstruktion des Mohrschen Kreises für den ESZ

In diesem Kapitel wird exemplarisch dargestellt, wie der Mohrsche Spannungskreis im ebenen Spannungszustand (ESZ) konstruiert wird. Ergänzend dazu wird der zugehörige Spannungswürfel gezeigt. Die verwendeten Parameter wurden bewusst so gewählt, dass alle Details der Konstruktion anschaulich und nachvollziehbar sichtbar sind.

1) Zeichnung des Koordinatensystems

Erstellen Sie ein Koordinatensystem, wobei die Normalspannung σ entlang der Horizontalachse (x-Achse) und die Schubspannung τ entlang der Vertikalachse (y-Achse) mit Einheiten [MPa] abgetragen wird. Siehe Abbildung 37.

2) Platzierung der Normalspannungen

Tragen Sie die Werte der Normalspannungskomponenten σ_x und σ_y auf der Horizontalachse ein. Diese Werte repräsentieren die Normalspannungen in den entsprechenden Richtungen. Siehe Abbildung 37.

3) Platzierung der Schubspannung

Tragen Sie die Schubspannungen auf der Vertikalachse ein, die den Wert der Schubspannung τ an den relevanten Punkten darstellt. Siehe Abbildung 37.

4) Schnittpunkte von Normalspannungen und Schubspannung

Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Normalspannungen σ_x und σ_y mit der Schubspannung τ : $P_1=(\sigma_x|\tau)$ und $P_2=(\sigma_y|\tau)$ auf dem Beispiel $P_1=(140|75)$ und $P_2=(-60|-75)$. Siehe Abbildung 37.

5) Zeichnung der Verbindungslinie zwischen der Punkten P_1 und P_2

Ziehen Sie eine Linie von Punkt P_1 zu Punkt P_2 . Diese Linie repräsentiert die Ebene, die die Normalspannungen und Schubspannungen miteinander verbindet. Siehe Abbildung 37.

6) Bestimmung des Mittelpunkts σ_m

Markieren Sie den Mittelpunkt σ_m auf der Normalspannungsachse σ , σ_m ergibt sich grafisch als Schnittpunkt der Linie $P_1 - P_2$ mit der σ -Achse. Siehe Abbildung 37.

7) Zeichnung des Mohrschen Spannungskreises

Zeichnen Sie einen Kreis um den Mittelpunkt σ_m mit dem Radius r , der dem maximalen Schubspannungswert entspricht. Dieser Kreis stellt den Mohr'schen Spannungskreis dar und veranschaulicht die Beziehungen zwischen Normal- und Schubspannungen in einem beliebigen Punkt (siehe Abbildung 37) (Spura, 2019).

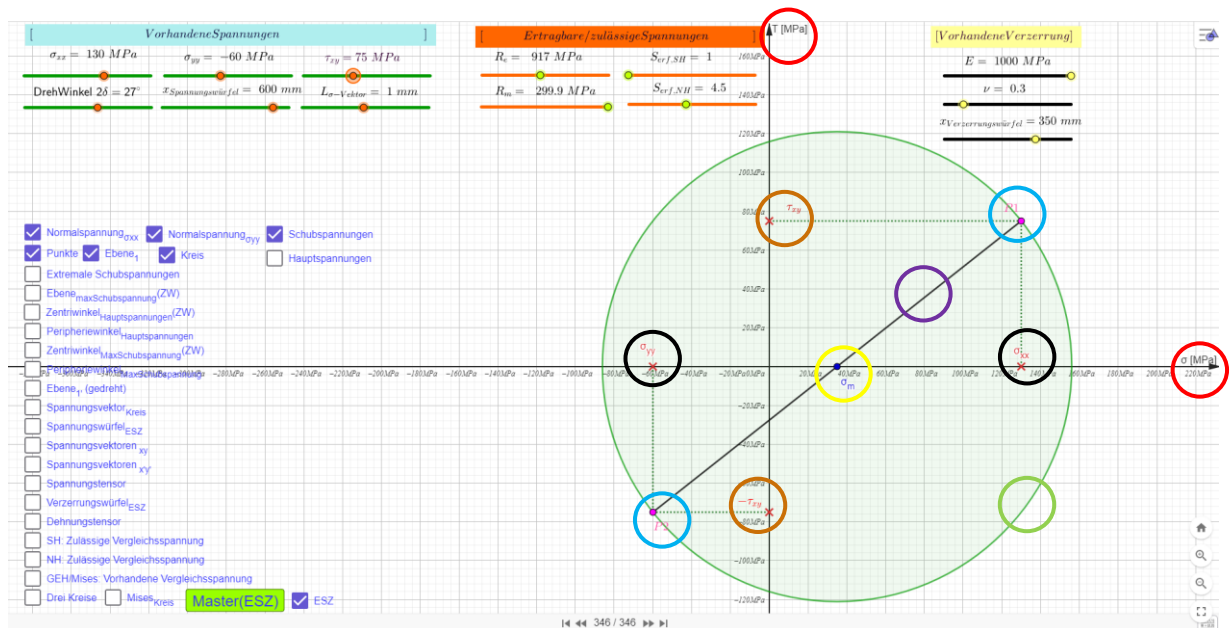
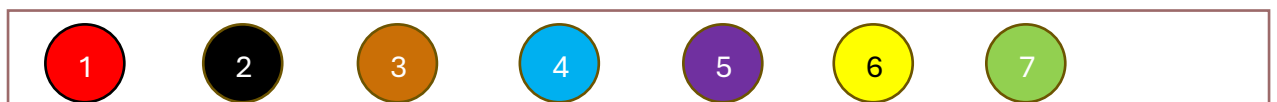


Abbildung 37 Grafische Konstruktion des Mohrschen Kreises für den ESZ Schritte (1-7) GeoGebra



Die Kreise sind nach Schritt-Nummern sortiert und farblich gekennzeichnet, um die Darstellung zu verbessern.

8) Hauptspannungen

Die Hauptspannungen sind die Schnittpunkte des Mohrschen Kreises mit der Normalspannungsachse σ . Sie sind nach Größe sortiert, wobei σ_1 die größte Hauptspannung (maximal) und σ_3 die minimale Hauptspannung darstellt. Siehe Abbildung 38.

9) Ebene der Hauptspannungen

Die Ebene der Hauptspannungen entspricht der Ebene, auf der die Hauptspannungen wirken. Siehe Abbildung 38.

10) Extreme Schubspannungen

Die extremen Schubspannungen (maximal und minimal) entsprechen dem Radius des Mohrschen Kreises und befinden sich auf der Linie, die durch den Mittelpunkt des Kreises verläuft. Siehe Abbildung 38.

11) Ebene der maximalen Schubspannung

Die Ebene der maximalen Schubspannung liegt auf der Linie, die den Radius des Mohrschen Kreises zur maximalen Schubspannung darstellt. Siehe Abbildung 38.

12) Alle Winkel kennen zeichnen

Siehe Abbildung 38. Zentriwinkel der Hauptspannungen, Peripheriewinkel der Hauptspannungen, Zentriwinkel der maximalen Schubspannung und Peripheriewinkel der maximalen Schubspannung. Weitere Info findet man in Abbildung 36.

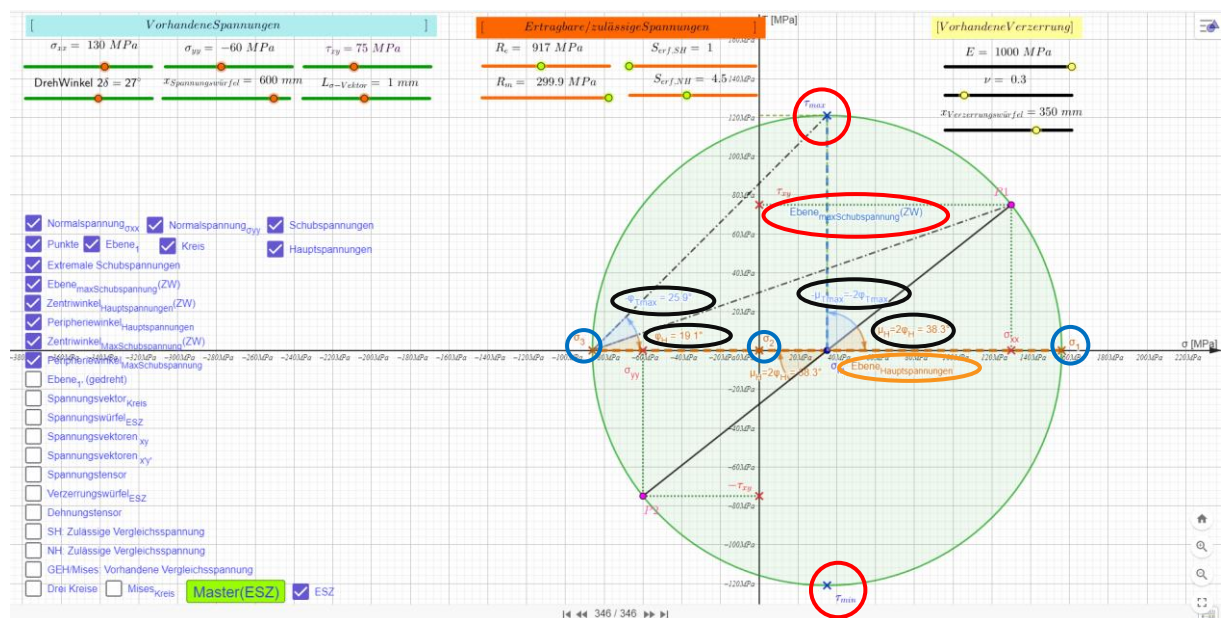
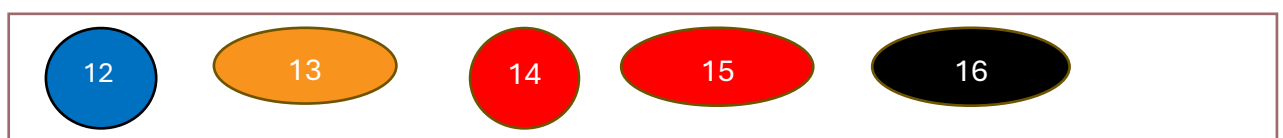


Abbildung 38 Grafische Konstruktion des Mohrschen Kreises für den ESZ Schritte (7-11) GeoGebra



Die Kreise und Ellipse sind nach Schritt-Nummern sortiert und farblich gekennzeichnet, um die Darstellung zu verbessern.

13) Spannungswürfel in Ebene Spannungszustand(ESZ)

Zeichne einen quaderförmigen Spannungswürfel und trage die Spannungskomponenten als Pfeile auf die jeweiligen Flächen ein (siehe Abbildung 39).

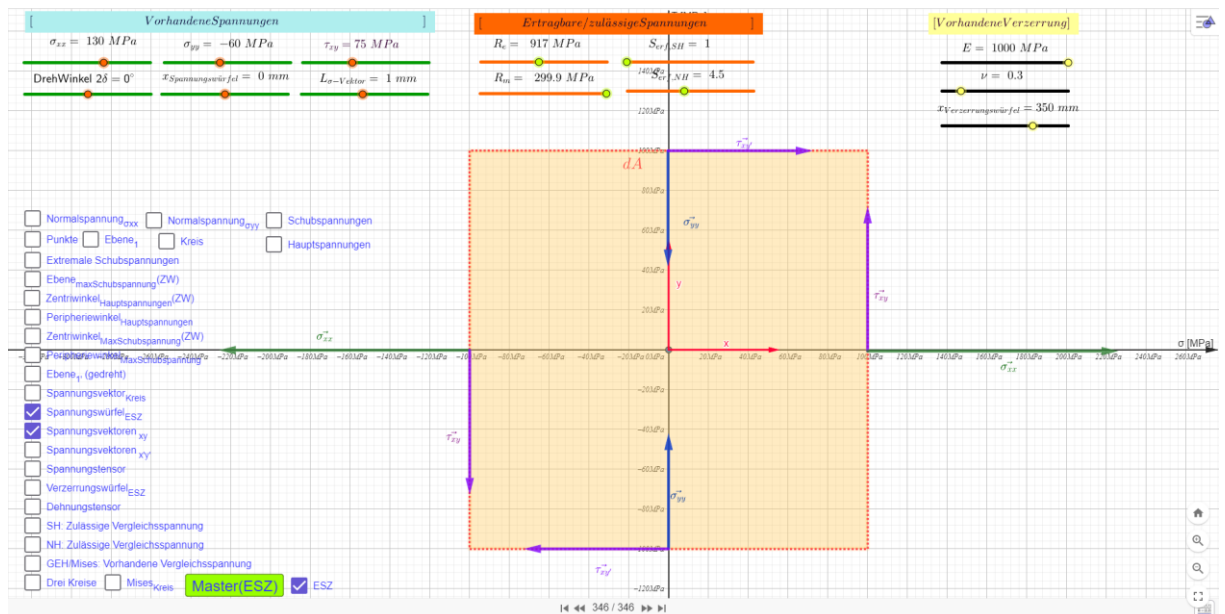


Abbildung 39 Spannungswürfel im allgemeinen ebenen Spannungszustand GeoGebra

14) Spannungswürfel umdrehen ins Hauptspannungseben

Drehe den Spannungswürfel um den Winkel zur Hauptspannungsebene, sodass nur die Hauptspannungen (σ_1, σ_2) ohne Schubspannungen sichtbar sind (siehe Abbildung 40).

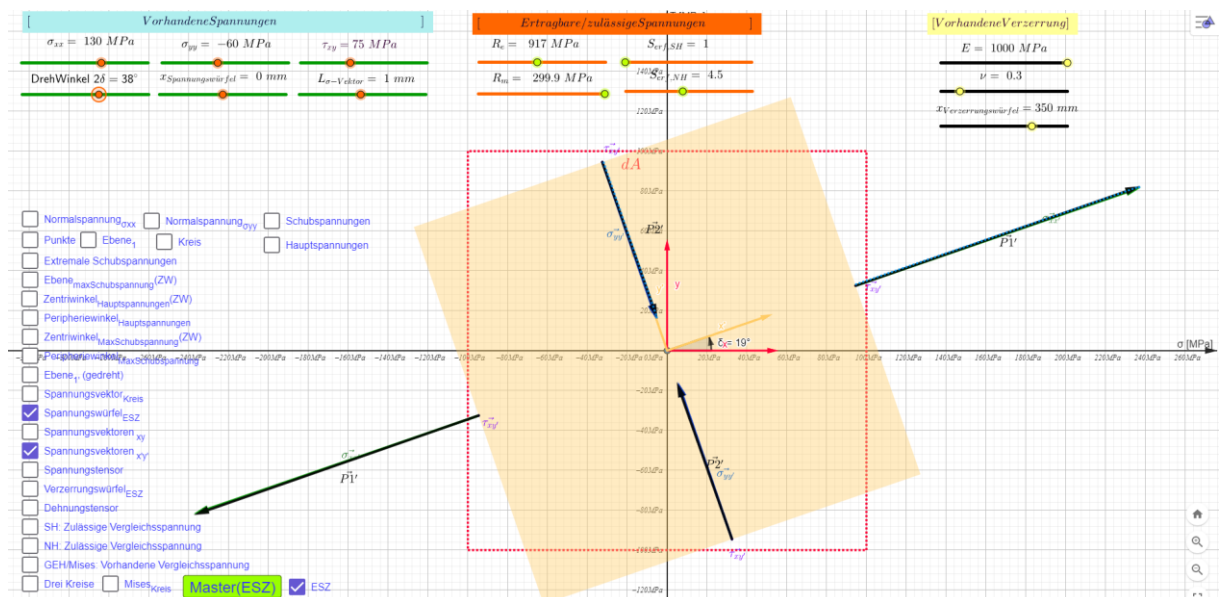


Abbildung 40 Spannungswürfel im Hauptspannungsebene GeoGebra

7.4 Sonderfälle Mohrscher Kreis

7.4.1 Einachsiger Zug

Es liegt nur eine Normalspannung $\sigma_x > 0$ vor, alle anderen Spannungen sind null. Der Mohrsche Kreis hat seinen Mittelpunkt σ_m bei $\frac{\sigma_x}{2}$ und einen r von $\frac{\sigma_x}{2}$ (Siehe Abbildung 41).

Hauptspannung: $\sigma_1 = \sigma_x, \sigma_2 = 0$

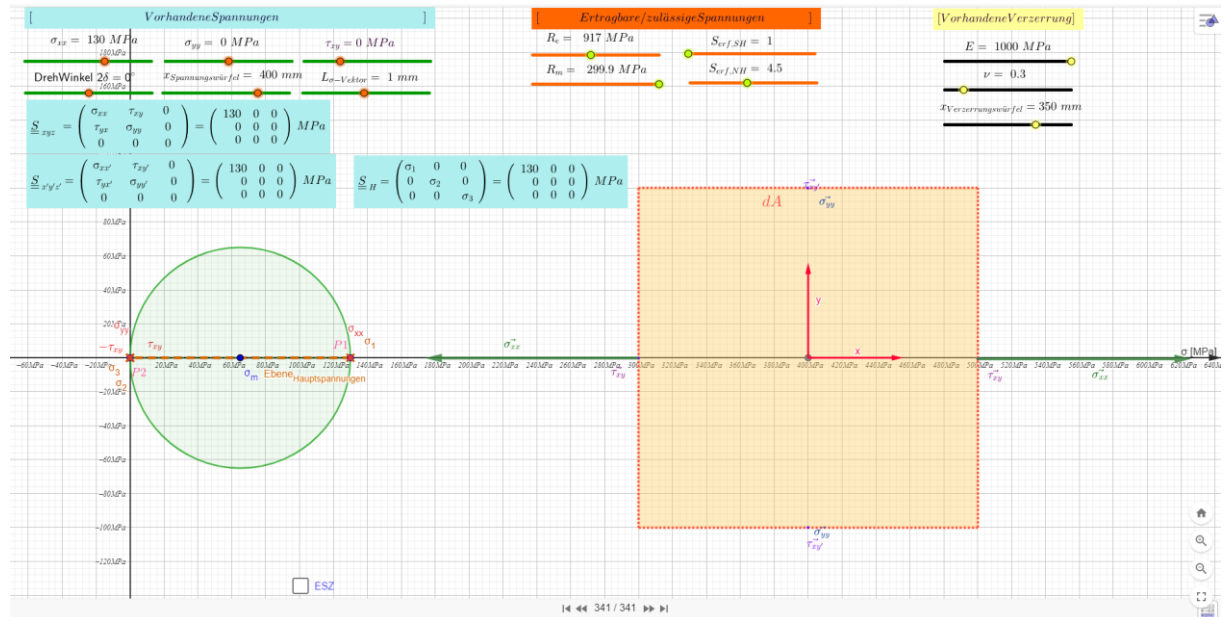


Abbildung 41 Mohrscher Kreis Einachsiger Zug GeoGebra

7.4.2 Reine Torsion

Es wirkt ausschließlich eine Schubspannung τ_{xy} , während $\sigma_x = \sigma_y = 0$ sind. Der Mohrsche Kreis liegt symmetrisch zur y-Achse. Hauptspannungen: $\pm \tau_{xy}$ (Siehe Abbildung 42).

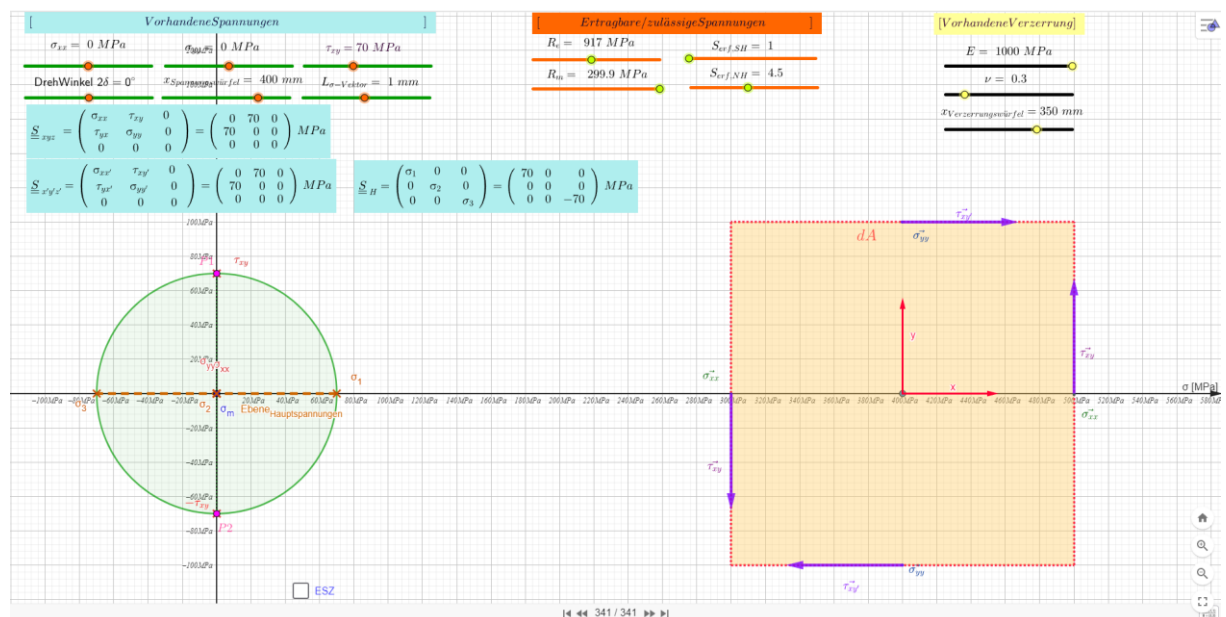


Abbildung 42 Mohrscher Kreis Reine Torsion GeoGebra

7.4.3 Zweiachsiger Zug

Beim zweiachsigen Zug liegt ein ebener Spannungszustand mit zwei positiven Normalspannungen σ_x und σ_y sowie ohne Schubspannung vor $\tau_{xy} = 0$. Der Mohrsche Kreis liegt vollständig im positiven Bereich der Normalspannung.

Handelt es sich jedoch um einen Spezialfall, bei dem $\sigma_x = \sigma_y$ (z. B. $\sigma_x = \sigma_y = 60 \text{ MPa}$), entsteht kein sichtbarer Kreis, sondern lediglich ein Punkt auf der σ -Achse (siehe Abbildung 43). Das liegt daran, dass der Radius des Mohrschen Kreises in diesem Fall null ist:

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{60 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} - 60 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}{2}\right)^2 + \left(0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right)^2} = 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

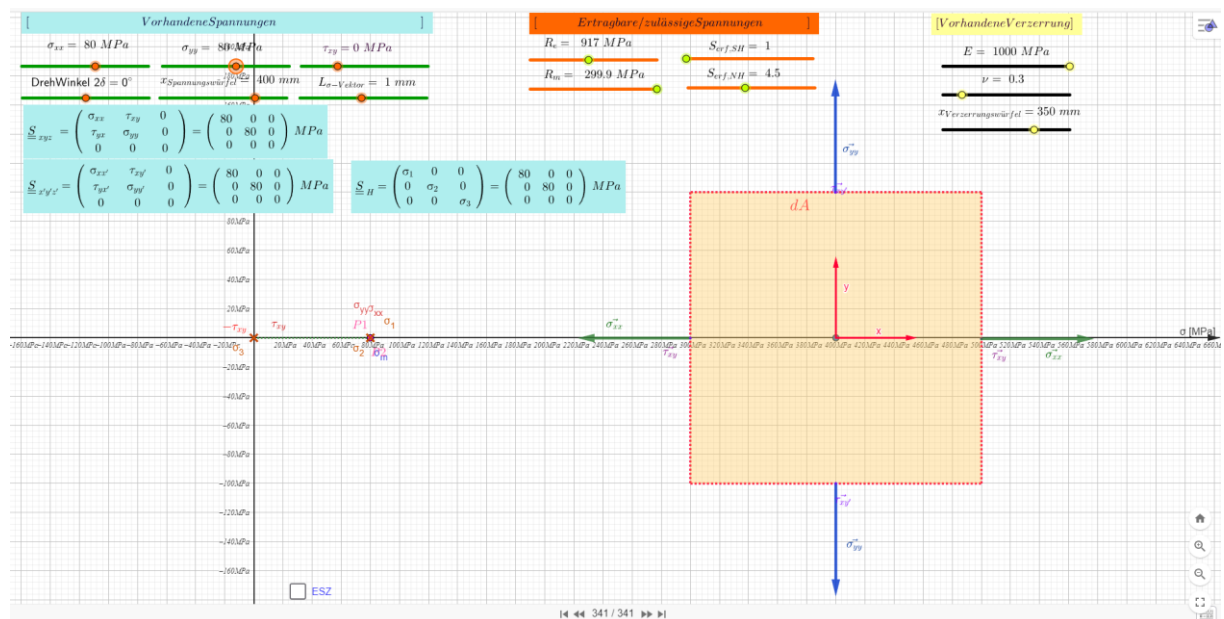


Abbildung 43 Mohrscher Kreis Zweiachsiger Zug GeoGebra

8 Detaillierte Darstellung der erstellten Dateien

In diesem Kapitel werden die im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Dateien im Detail vorgestellt. Der Schwerpunkt liegt dabei auf den enthaltenen Funktionen und der Vielzahl an interaktiven Elementen. Es wird gezeigt, wie die jeweiligen Dateien genutzt werden können, um komplexe Spannungszustände, Festigkeitshypothesen und weitere mechanische Konzepte anschaulich zu visualisieren.

8.1 2D_Mohrsche_kreis_mit_Spannungswürfel_Final

8.1.1 Übersicht über die Oberfläche

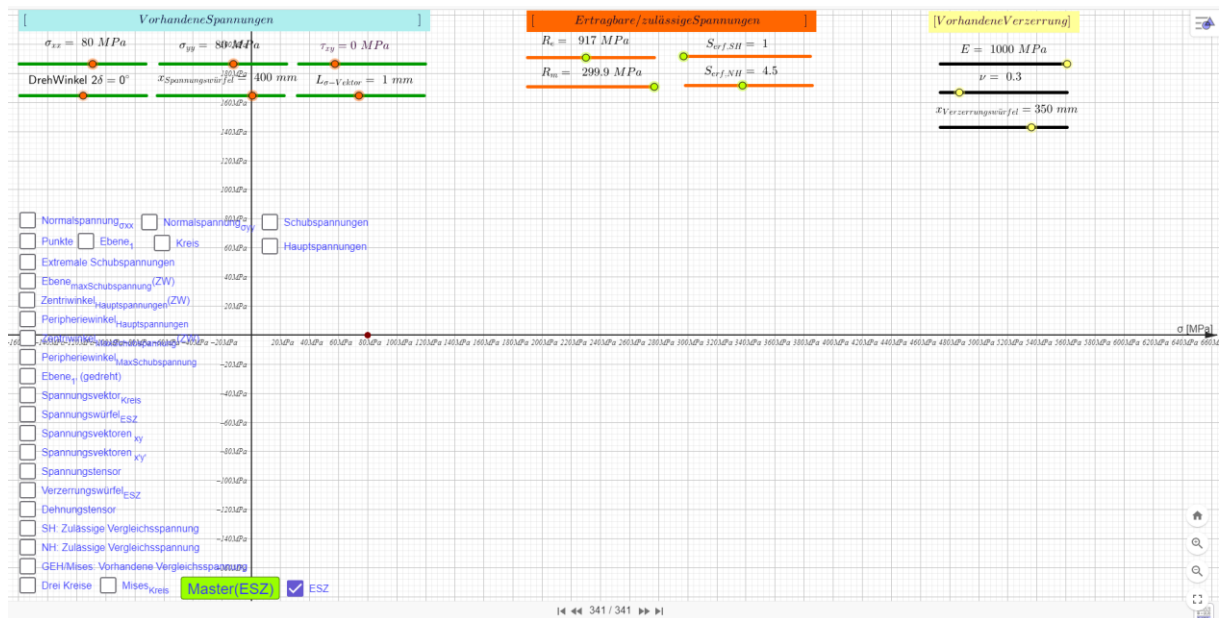


Abbildung 44 2D_Mohrsche_kreis_mit_Spannungswürfel_Final Oberfläche GeoGebra

Wie in der Abbildung 44 zu erkennen ist, wurde die GeoGebra-Oberfläche durch den Einsatz zahlreicher Schieberegler so gestaltet, dass eine flexible und interaktive Bearbeitung der Aufgabenstellungen möglich ist. Die Schieberegler befinden sich im oberen Bereich der Arbeitsfläche und die sind in drei Gruppen untergeteilt: Vorhandene Spannungen, ertragbare/zulässige Spannungen und vorhandene Verzerrungen.

Im linken Bereich der Benutzeroberfläche findet man zahlreiche von Schalter (Funktionen), mit denen sich gezielt bestimmte Darstellungen ein- oder ausblenden lassen, etwa Spannungszustände, Hauptspannungsrichtungen oder Sicherheiten. Alle Schalter wurden dabei selbstsprechend benannt, um die Orientierung und Bedienung zu erleichtern.

Besonders hervorzuheben sind zwei zentrale Schalter im unteren linken Bereich:

Master (ESZ): Dieser Hauptschalter dient zur globalen Steuerung der Visualisierungen im ebenen Spannungszustand (ESZ). Mit nur einem Klick können alle relevanten Elemente gleichzeitig ein oder ausgeblendet werden, was eine erhebliche Zeitersparnis bei der Arbeit mit dem Modell bedeutet.

ESZ: Dieser Schalter bietet die Möglichkeit, alle anderen Schalter ein- oder auszublenden, um Platz zu schaffen und die Darstellung zu vereinfachen, beispielsweise bei Präsentationen oder beim Export von Grafiken.

8.1.2 Schieberegler

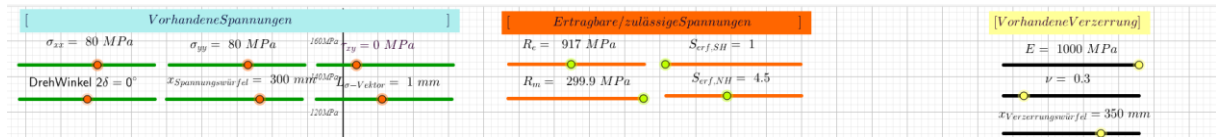


Abbildung 45 2D_Mohrsche_kreis_mit_Spannungswürfel_Final Schieberegler GeoGebra

1) $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$:

Diese Schieberegler steuern die Komponenten des allgemeinen ebenen Spannungszustands. Durch ihre Anpassung ändern sich sowohl der Mohrsche Spannungskreis als auch die grafische Darstellung am Spannungswürfel und am Verzerrungswürfel dynamisch in Echtzeit (Siehe Abbildung 45).

2) DrehWinkel 2δ :

Dieser Regler ermöglicht es, den Schnittwinkel der Schnittebene zu drehen. Dabei dreht sich die Betrachtungsebene im Mohrschen Kreis im Uhrzeigersinn, während sich die Schnittebene des Spannungswürfels gleichzeitig gegen Uhrzeigersinn sich dreht, z.B. mit dem Ziel, die Hauptspannungsebene darzustellen (Siehe Abbildung 45).

3) Spannungswürfel:

Durch diesen Regler kann der Spannungswürfel optisch entlang der Spannungsachse verschoben werden (Siehe Abbildung 45) (Dieser Regler hat keine physikalische Bedeutung).

4) Verzerrungswürfel:

Analog zum Spannungswürfel lässt sich auch der Verzerrungswürfel ebenfalls optisch auf der Spannungsachse verschieben (Siehe Abbildung 45).

5) L_{vektor} :

Dieser Regler beeinflusst die Länge der dargestellten Spannungspfeile am Spannungswürfel. Ein Wert von 1 bedeutet eine maßstabsgetreue Darstellung (1:1). Diese Funktion dient der besseren Visualisierung, falls die Pfeile sonst zu lang oder zu kurz erscheinen (Siehe Abbildung 45) (Dieser Regler hat keine physikalische Bedeutung).

6) Weitere Parameter:

Zusätzlich können zentrale Werkstoffkennwerte wie der Elastizitätsmodul, die Streckgrenze, die Zugfestigkeit sowie die Poissonzahl individuell eingestellt werden, sowie erforderliche Sicherheitsfaktoren. Dadurch lassen sich verschiedene Festigkeitshypothesen (Normalspannungshypothese, Schubspannungshypothese, Gestaltänderungshypothese) nachvollziehen (Siehe Abbildung 45).

8.1.3 Schalter

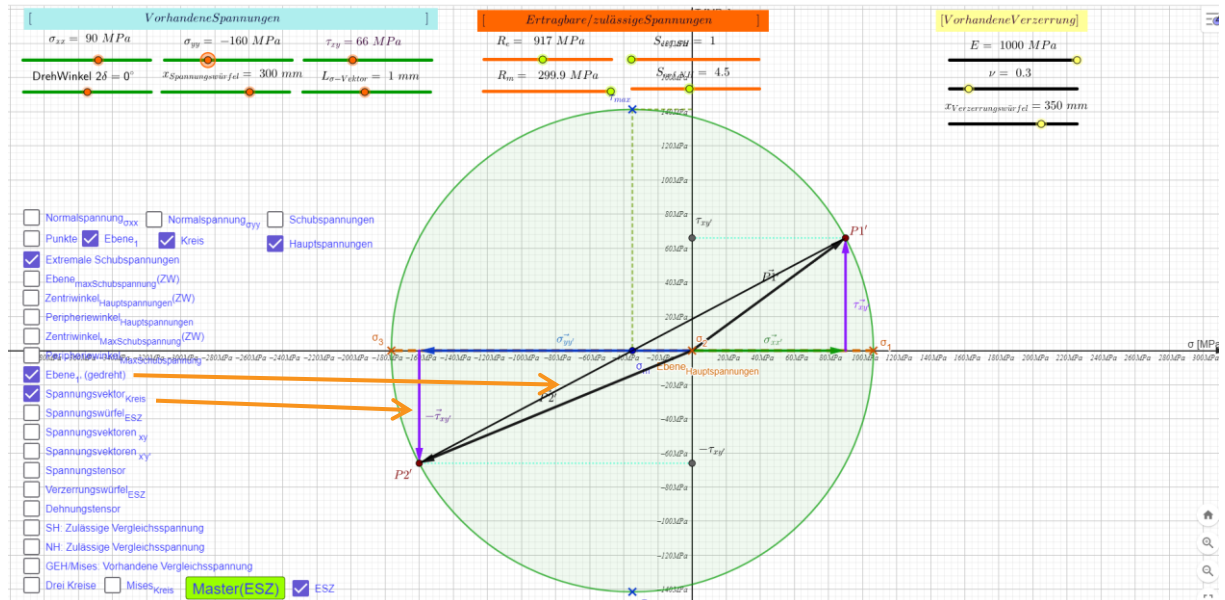


Abbildung 46 Sichtbarkeits-Schalter Mohrscher Kreis GeoGebra

Hinweis: Einige Schalter wurden ausgebildet, um die Darstellung anschaulicher zu gestalten, von dem Schalter Normalspannung bis Spannungsvektor_{Würfel} (Siehe Kapitel 7.3).

1) Ebene₁(gedreht):

Diese Ebene kann, wie der Name bereits andeutet, mithilfe des Schiebereglers (*DrehWinkel* 2δ) gedreht werden. Dadurch wird sie schrittweise in die Hauptspannungsebene überführt und veranschaulicht so die Transformation des Spannungszustands und die zugehörige Punkte als P'_1 und P'_2 bezeichnet (Siehe Abbildung 46).

2) Spannungsvektor_{Kreis}:

Dabei werden die Spannungskomponenten als Vektoren dargestellt, die sich gemeinsam mit dem Schieberegler (*DrehWinkel* 2δ) drehen. So lässt sich gut nachvollziehen, wie sich die Richtung der Spannungen im gedrehten System verändert (Siehe Abbildung 46).

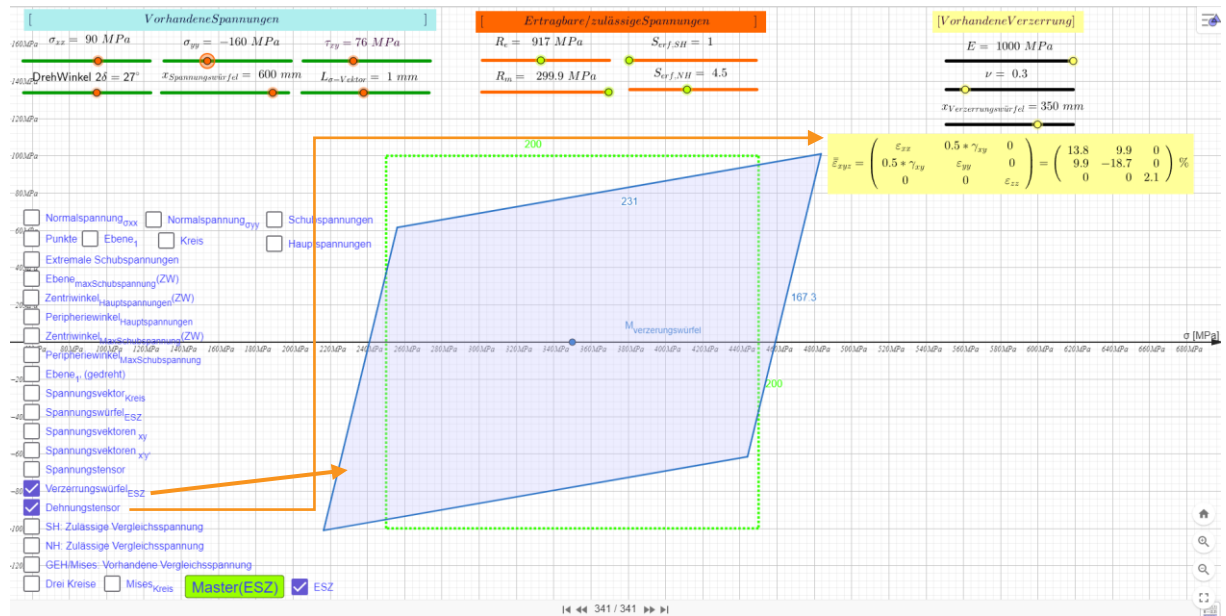


Abbildung 47 Verzerrungswürfel(ESZ) GeoGebra

In Abbildung 47 wurde Ein Verzerrungswürfel samt zugehörigem Verzerrungstensor ebenfalls in GeoGebra erstellt. Die Darstellung orientiert sich dabei an den realen physikalischen Gegebenheiten. Für den Elastizitätsmodul wurden zur Besseren Visualisierung $E = 1000 \text{ MPa}$ sowie Streckgrenze $R_e = 690 \text{ MPa}$ und Zugfestigkeit $R_m = 300 \text{ MPa}$ und $\sigma_{xx} = 50 \text{ MPa}$, $\sigma_{yy} = -70 \text{ MPa}$ und $\tau_{xy} = 77 \text{ MPa}$ angenommen.

Zur besseren Visualisierung wurden zwei Zustände gegenübergestellt:

- Die grüne Punktlinie zeigt den Würfel im unverformten Ausgangszustand (vor Belastung),
- Die blaue Linie stellt den verzerrten Zustand im belasteten Zustand dar

Der Würfel verformt sich unter Belastung nicht nur durch Stauchung oder Dehnung, sondern auch durch eine charakteristische Gleitung infolge auftretender Schubverzerrungen.

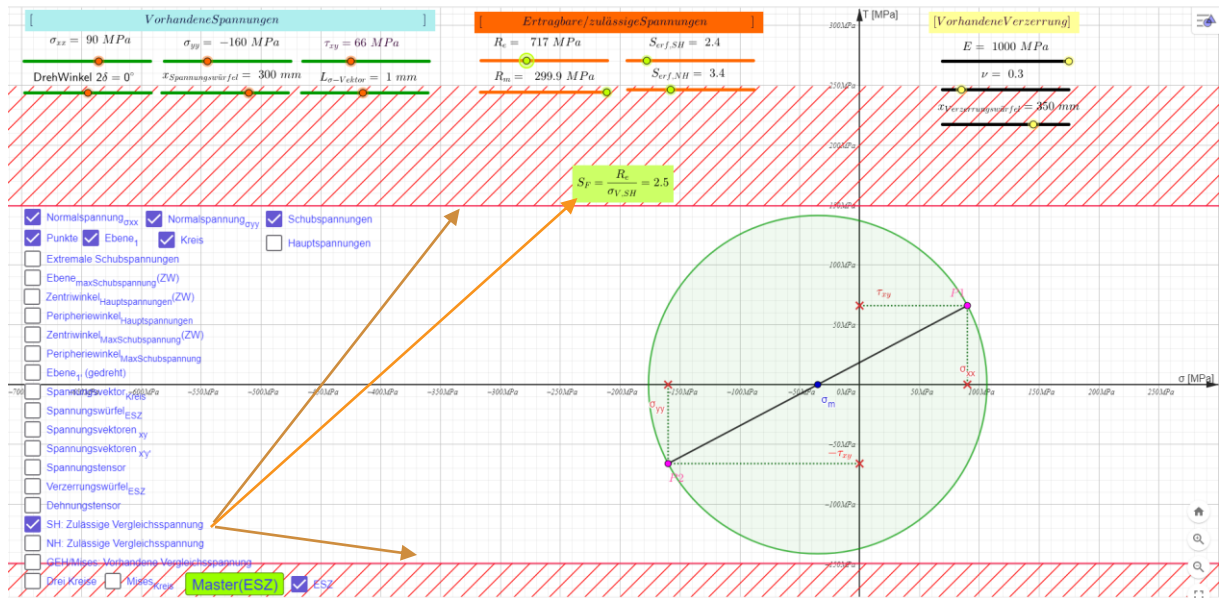


Abbildung 48 Schubspannungshypothese(SH) in GeoGebra

Wie in der Abbildung 48 dargestellt, ist die zulässige Vergleichsspannung nach der Schubspannungshypothese (SH, Tresca-Kriterium) in GeoGebra visualisiert. Überschreitet der Mohrsche Kreis die eingezeichnete rote Linie, wird die Fließgrenze überschritten und plastisches Fließen tritt ein. Die rote Grenzlinie entspricht der zulässigen Schubspannung, definiert durch:

$$\tau_{zul,SH} = \frac{\tau_F}{S_{erf,SH}} \quad (40)$$

wobei

- $\tau_{zul,SH}$ die zulässige Schubspannung ist,
- τ_F die Fließschubspannung des Werkstoffs darstellt. Siehe Gl.(23),
- $S_{erf,SH}$ der erforderliche Sicherheitsfaktor ist, der in GeoGebra interaktiv über einen Schieberegler angepasst werden kann.

Zusätzlich wird der Sicherheitsfaktor $S_{SH,Fließen} = S_F$ auch direkt als Text im GeoGebra-Modell angezeigt.

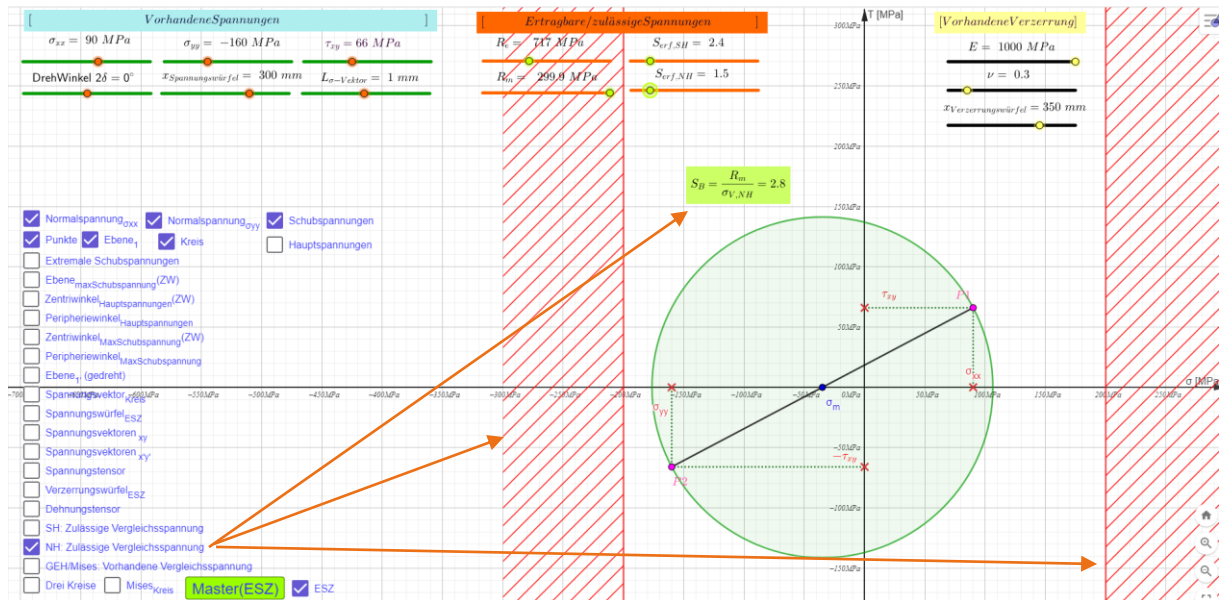


Abbildung 49 Normalspannungshypothese (NH) in GeoGebra

Wie in der Abbildung 49 dargestellt, ist die zulässige Vergleichsspannung nach der Normalspannungshypothese (NH) in GeoGebra visualisiert. Überschreitet der Mohrsche Kreis die eingezeichnete rote Linie, wird die Vergleichsspannung überschritten, was zu einem Bruch des Bauteils führen kann. Die rote Grenzlinie entspricht der zulässigen Vergleichsspannung(NH), definiert durch:

$$\sigma_{zul,NH} = \frac{R_m}{S_{erf,NH}} \quad (41)$$

wobei

- $\sigma_{zul,NH}$ die zulässige Vergleichsspannung nach der Normalspannungshypothese ist,
- R_m die Zugfestigkeit des Werkstoffs darstellt, die in durch Schieberegler angepasst werden kann,
- $S_{erf,NH}$ die erforderliche Sicherheit ist, die in GeoGebra interaktiv über einen Schieberegler angepasst werden kann.

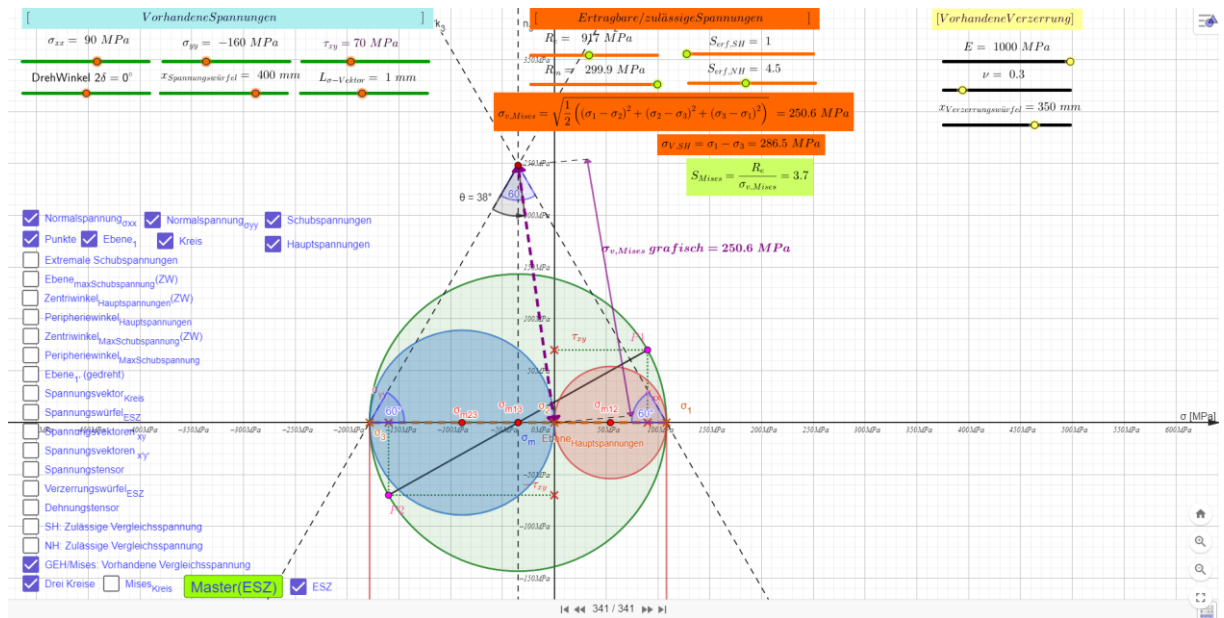


Abbildung 50 Gestaltsänderungsenergiehypothese (Mises) in GeoGebra

Wie in der Abbildung 50 dargestellt, wurde die Vergleichsspannung nach der Gestaltsänderungshypothese (Mises-Hypothese) sowohl rechnerisch als auch grafisch in GeoGebra dargestellt. Diese Hypothese basiert auf der Annahme, dass plastisches Fließen einsetzt, wenn die Gestaltsänderungsenergie im Material einen kritischen Wert erreicht.

Die von-Mises-Vergleichsspannung wurde in GeoGebra mit folgender Formel berechnet (Siehe Gl.(33)).

Die vorhandene Sicherheit gegenüber plastischem Fließen nach der Mises-Hypothese wurde nach folgender Gleichung berechnet (siehe Gl.(35)).

Darüber hinaus wurde in GeoGebra die Möglichkeit geschaffen, zusätzlich zum bereits erläuterten Spannungskreis für den ebenen Spannungszustand (ESZ) auch die beiden fehlenden Spannungskreise darzustellen (siehe Abbildung 50).

8.2 3D_Deviator&Hydro_Final

8.2.1 Übersicht über die Oberfläche

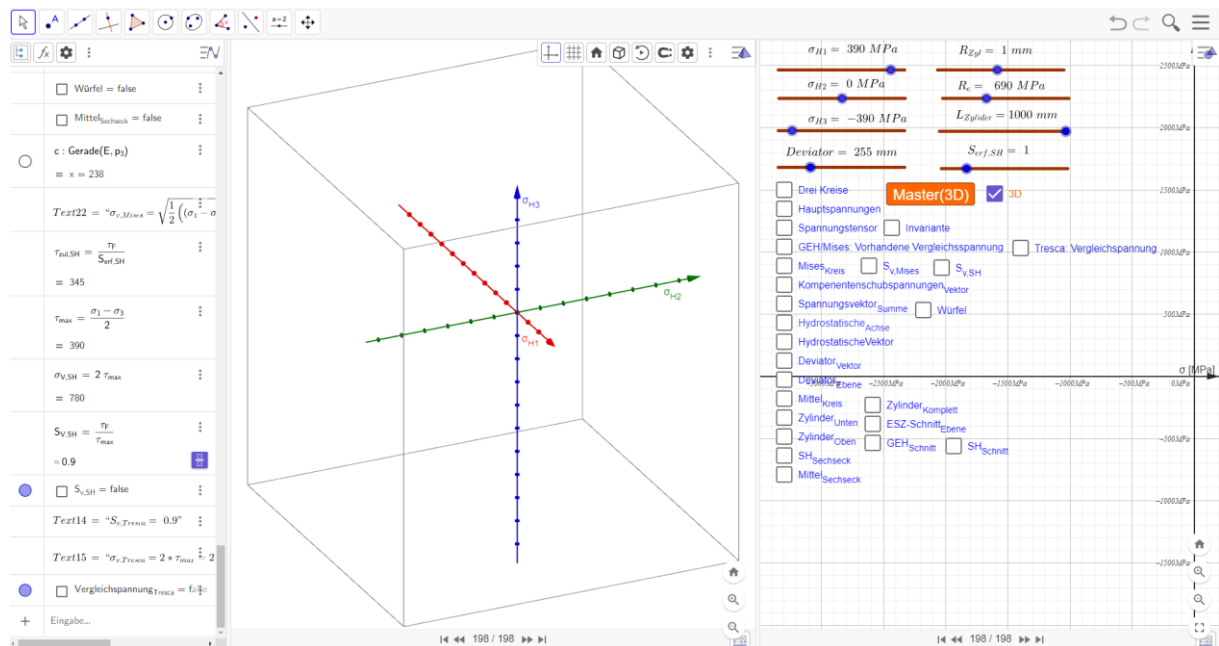


Abbildung 51 3D_Deviator&Hydro_Final Oberfläche GeoGebra

In dieser Datei ist es erforderlich, den 3D-Modus über die drei Striche oben rechts zu aktivieren. In der Mitte des Fensters finden sich den 3D-Raum, in dem die grafische Darstellung erfolgt. Auf der linken Seite befinden sich wieder die Algebra-Eingabe sowie die Formeln, während auf der rechten Seite die Schieberegler und Schalter zur Interaktion bereitgestellt werden (siehe Abbildung 51).

8.2.2 Schieberegler

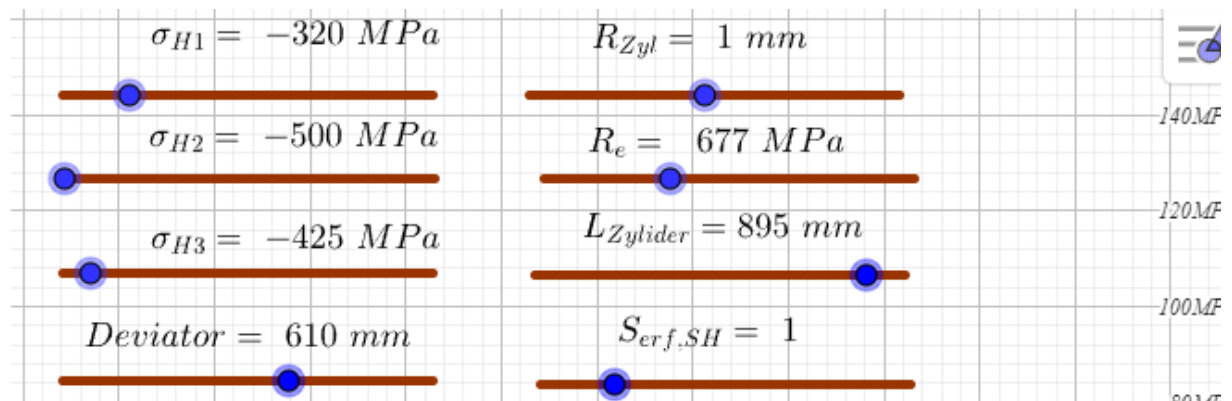


Abbildung 52 3D_Deviator&Hydro_Final Schieberegler GeoGebra

- $\sigma_{H1}, \sigma_{H2}, \sigma_{H3}$:

Diese repräsentieren die Hauptspannungen (unsortiert).

- **Deviator:**

Dieser Regler ermöglicht es, den dargestellten Radius einer angedeuteten Deviatorebene optisch zu ändern (keine physikalische Bedeutung).

- **R_Zyl:**

Der optische Radius des Zylinders. Wenn er auf 1 gesetzt wird, bedeutet dies einen Maßstab von 1:1. Der Radius des Zylinders kann so optisch verkleinert oder vergrößert werden. Keine physikalische Bedeutung.

- **Re:**

Die Streckgrenze des Materials.

- **L_Zyl:**

Dieser Regler stellt die optisch Länge des Zylinders ein. Keine physikalische Bedeutung.

- **S_erf,SH:**

Erforderlichen Sicherheitsfaktor nach der Schubspannungshypothese (SH).

8.2.3 Schalter

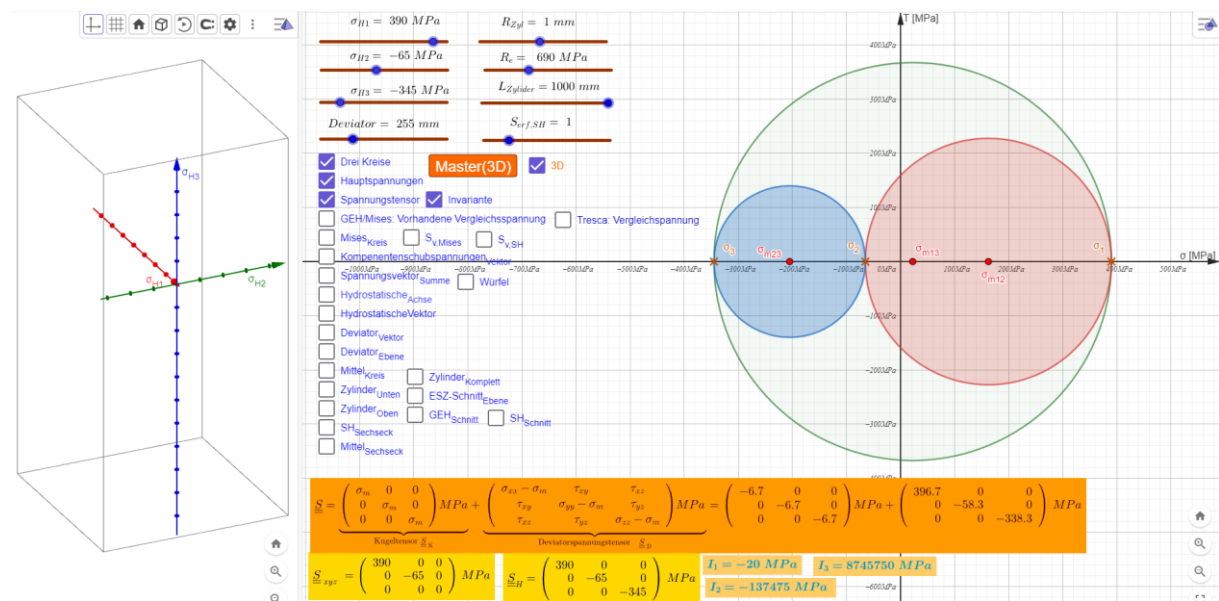


Abbildung 53 Dreidimensionaler Spannungskreise GeoGebra

Wie in der Abbildung 53 zu sehen, ermöglicht der Schalter „Drei Kreise“ das Einblenden der drei Kreise, die jeweils ihre Mittelpunkte darstellen. Diese Mittelpunkte werden wie folgt berechnet:

1. **Mittelpunkt des ersten Kreises (Kreis 1):**

Der Mittelpunkt des ersten Kreises entspricht dem Mittelwert der ersten und zweiten Hauptspannung σ_1 und σ_2 wird durch folgende Formel berechnet:

$$\sigma_{m12} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad (42)$$

2. Mittelpunkt des zweiten Kreises (Kreis 2):

Der Mittelpunkt des zweiten Kreises entspricht dem Mittelwert der zweiten und dritten Hauptspannung σ_2 und σ_3 wird durch folgende Formel berechnet:

$$\sigma_{m23} = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \quad (43)$$

3. Mittelpunkt des dritten Kreises (Kreis 3):

Der Mittelpunkt des dritten Kreises entspricht dem Mittelwert der ersten und dritten Hauptspannung σ_1 und σ_3 wird durch folgende Formel berechnet:

$$\sigma_{m13} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad (44)$$

Weitere Schalter und deren Funktionen:

1. Tensor

Wenn dieser Schalter aktiviert wird, werden sowohl der Kugel-Tensor als auch der Deviatorische Tensor angezeigt (Siehe Abbildung 53). Die Berechnungen erfolgen wie in Kapitel (3.4) beschrieben.

2. Hauptspannungstensor

Aktiviert man diesen Schalter, wird der Hauptspannungstensor angezeigt, der die Normalspannungen und Schubspannungen beschreibt und auch sortiert nach Größe (Siehe Abbildung 53).

3. Invarianten

Dieser Schalter zeigt die Invarianten des Spannungstensors an (Siehe Abbildung 53). Die Berechnungen erfolgen wie in Kapitel (3.4) beschrieben.

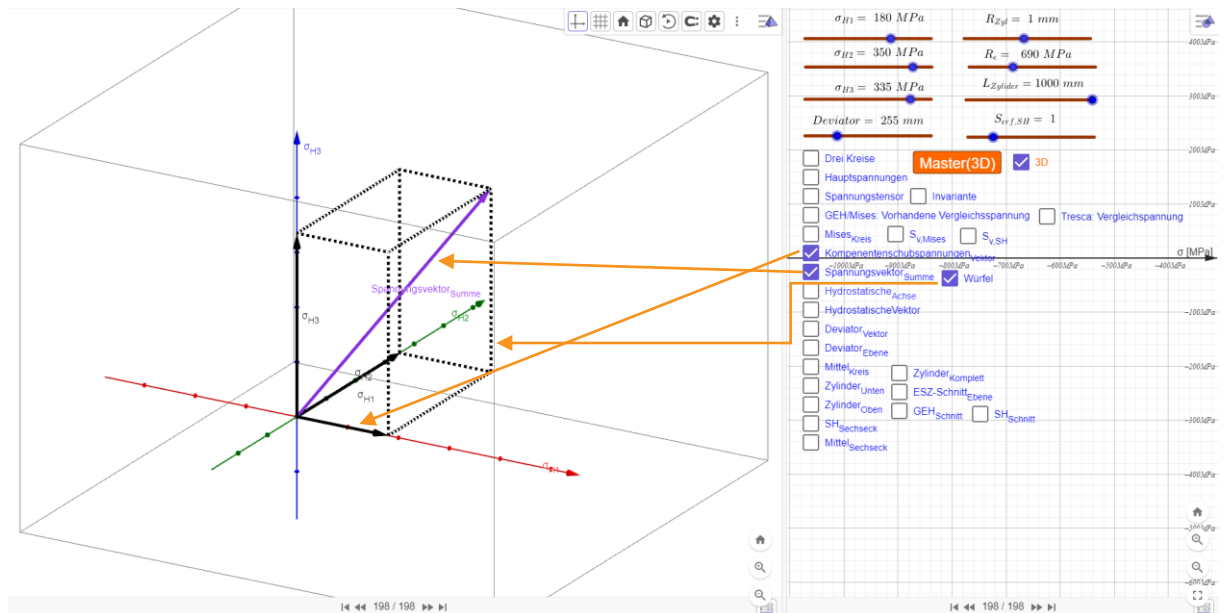


Abbildung 54 Komp. Schubspannung, Spannungsvektor Summe & Würfel in GeoGebra

4. Komponentenschubspannungenvektor

Dieser Schalter zeigt die Hauptspannungen σ_{H1} , σ_{H2} und σ_{H3} jeweils als einzelne Vektoren im Raum. Jeder Vektor repräsentiert die Richtung und Stärke einer der Hauptspannungen (siehe Abbildung 54).

5. Spannungsvektor Summe

Bei Aktivierung dieses Schalters wird die Vektorsumme der drei Hauptspannungsvektoren als ein gemeinsamer Vektor dargestellt (siehe Abbildung 54).

6. Würfel

Dieser Schalter blendet einen Referenzwürfel ein, der zur Orientierung im Raum dient. Er zeigt die Raumrichtungen an und hilft, die Ausrichtung der Spannungsvektoren zu interpretieren (siehe Abbildung 54).

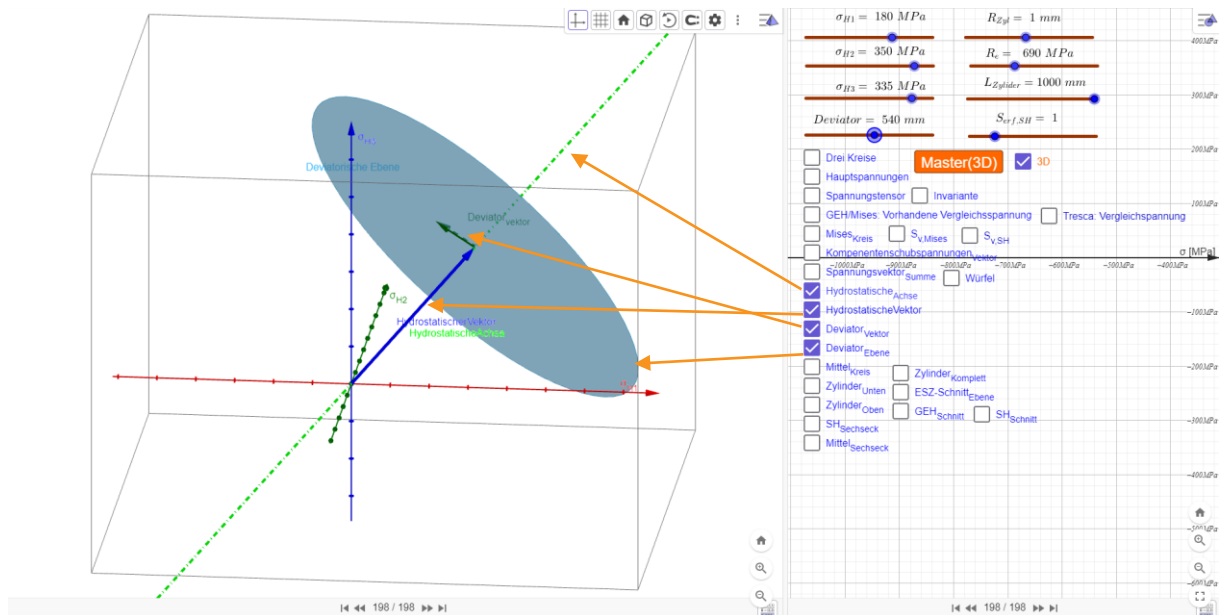


Abbildung 55 Darstellung der hydrostatischen und deviatorischen Spannungsanteile sowie deren Richtungen im 3D-Raum mit GeoGebra

7. **Hydrostatische**_{Achse}

Dieser Schalter aktiviert die Anzeige der hydrostatischen Achse im Raum. Diese Achse stellt die Richtung dar (Siehe Abbildung 55). Die Berechnungen erfolgen wie in Kapitel (3.4) beschrieben.

8. **Hydrostatischer**_{Vektor}

Wenn dieser Schalter aktiviert wird, wird der zum Spannungsvektor (5.) passende hydrostatische Vektor angezeigt. Der Vektor beginnt am Ursprung des Koordinatensystems und endet an der Spannungskomponente σ_m , die entlang der hydrostatischen Achse verläuft (Siehe Abbildung 55).

9. **Deviatorischer**_{Vektor}

Bei Aktivierung dieses Schalters wird der deviatorische Vektor angezeigt. Dieser Vektor beschreibt den deviatorischen Anteil der Spannung (Siehe Abbildung 55).

10. **Deviatorische**_{Ebene}

Der Schalter „Deviatorische_Ebene“ zeigt die deviatorische Ebene, die senkrecht zur hydrostatischen Achse verläuft (Siehe Abbildung 55). Die Berechnungen erfolgen wie in Kapitel (3.4) beschrieben.

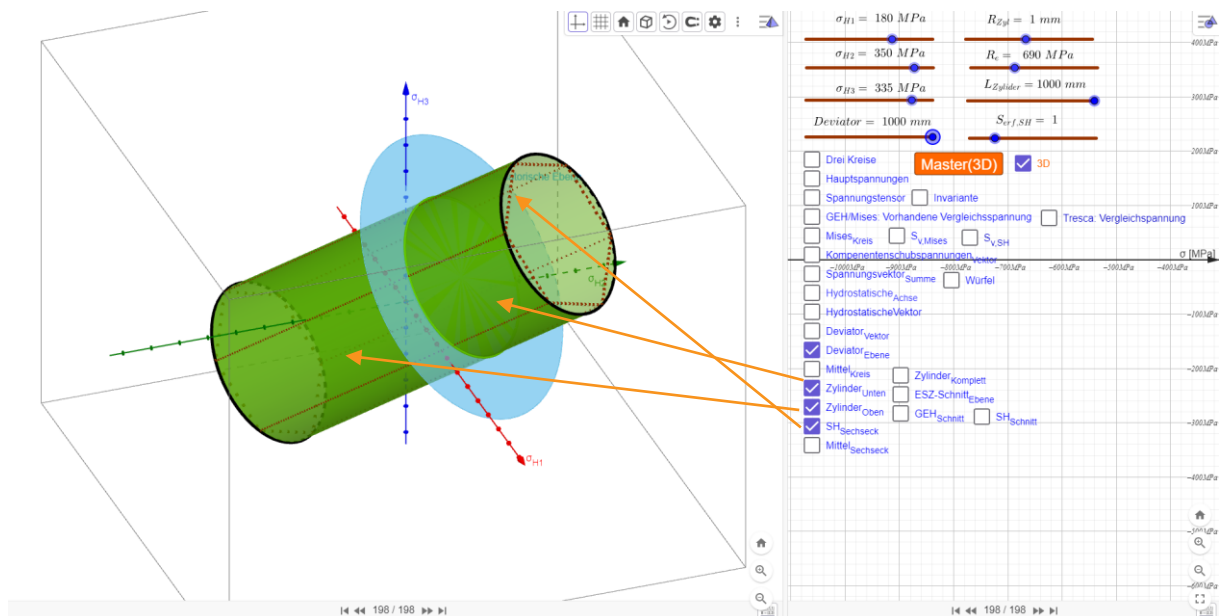


Abbildung 56 Darstellung der Zylinder(GEH) & des Sechsecks(SH) in 3D-Raum GeoGebra

In Abbildung 56 sind Zylinder und Sechseck im 3D-Raum dargestellt, die um die hydrostatische Achse angeordnet sind. Die Zylinder sind dabei entlang der Achse verteilt, wobei der obere und der untere Zylinder im deviatorischen Raum auf der Ebene der hydrostatischen Spannung σ_m positioniert sind. Der Radius des Zylinders entspricht dem zulässigen Schubspannungswert im deviatorischen Raum und beträgt:

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}} R_e \quad (45)$$

Herleitung der Formel (siehe Kapitel 11.3.1).

11. Zylinder_{unten}

Wird dieser Schalter aktiviert, erscheint der untere Zylinder im 3D-Raum. Dieser Zylinder befindet sich entlang der hydrostatischen Achse und teilt sich in der deviatorischen Ebene (Siehe Abbildung 56).

12. Zylinder_{oben}

Durch Aktivierung dieses Schalters wird der obere Zylinder sichtbar, der ebenfalls entlang der hydrostatischen Achse positioniert ist (Siehe Abbildung 56).

13. SH_{Sechseck}

Der Schalter „SH_Sechseck“ zeigt das Sechseck im 3D-Raum an. Es ist entlang der hydrostatischen Achse angeordnet und dient als geometrische Veranschaulichung der Spannungsverhältnisse, die in Beziehung zu den Zylindern und der SH (Schubspannungshypothese) stehen (Siehe Abbildung 56).

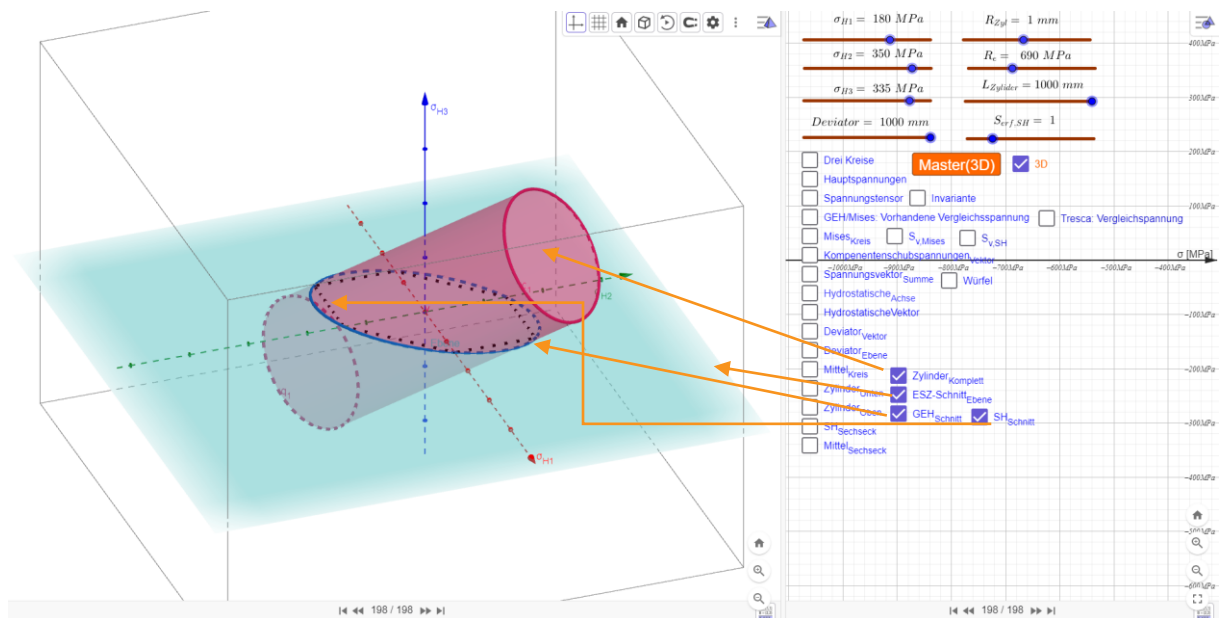


Abbildung 57 Schnitt-Ebene , GEH & SH schnitt in 3D Raum GeoGebra

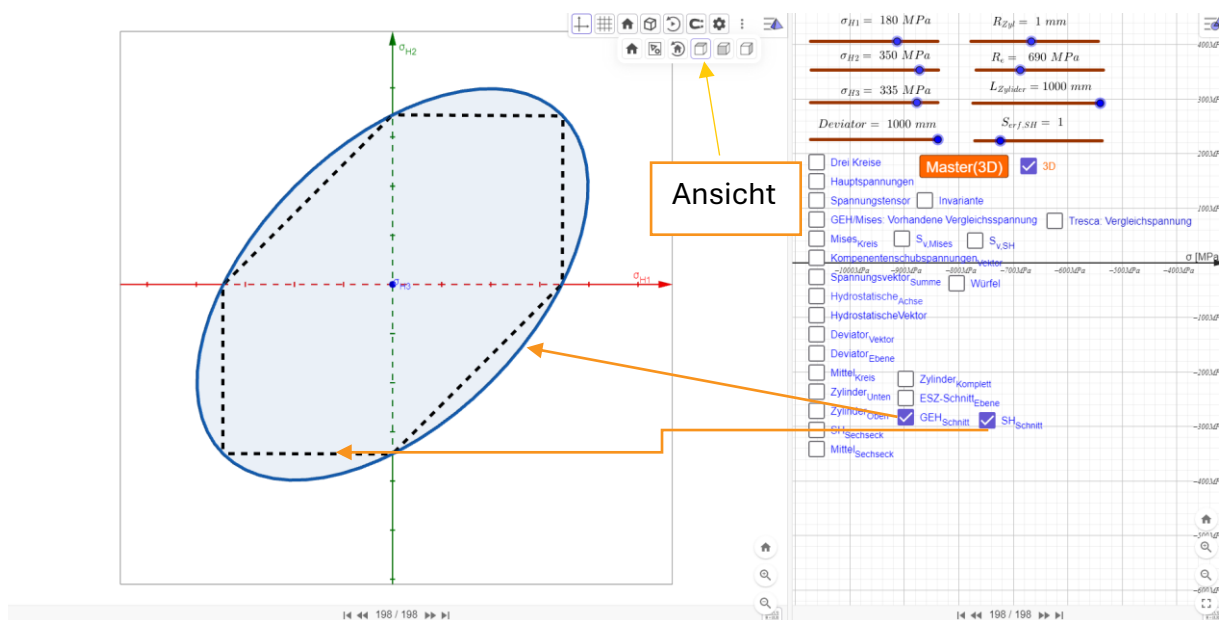


Abbildung 58 GEH & SH schnitt in Ebene Spannungszustand Ansicht (ESZ) in GeoGebra

In Abbildung 57 wird ein Schnitt im Ebene-Spannungszustand gezeigt. Dieser Schnitt veranschaulicht die Spannungsverhältnisse in der Ebene $\sigma_{H3} = 0$. Um von der dreidimensionalen Ansicht in die Ebene-Spannungs-Ansicht zu wechseln, sind die in der Abbildung 58 gezeigten Ansicht Wechsel erforderlich. Weitere Erläuterungen zur Abbildung 58 finden Sie in Kapitel 4.2.4).

8.3 GEH_SH Creo

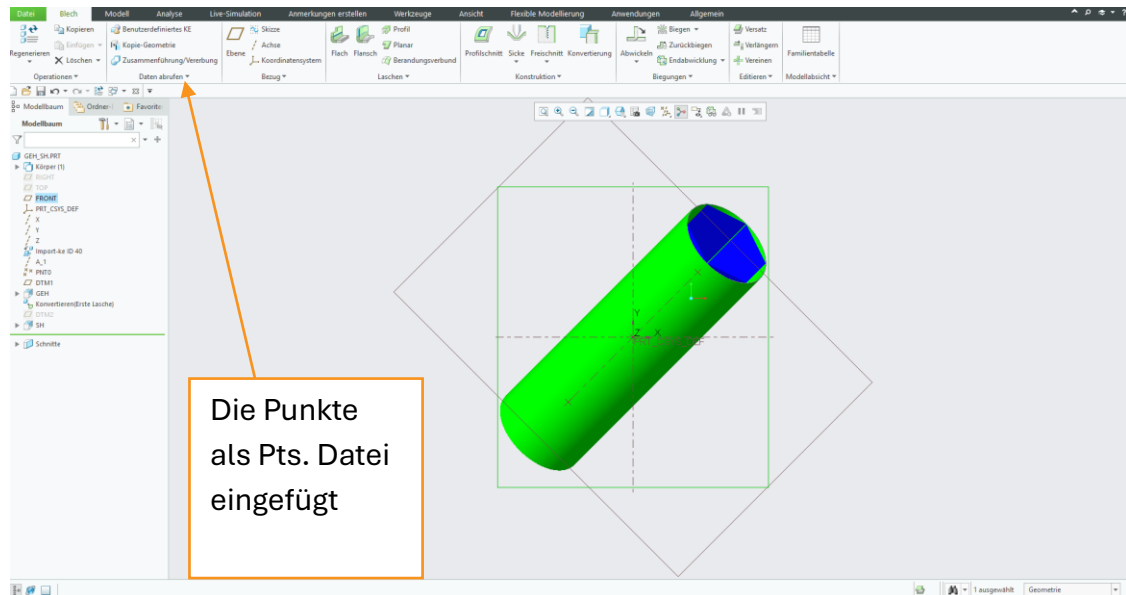


Abbildung 59 Darstellung von Zylinder und Sechseck in Creo

In dieser Abbildung 59 sind erneut die Mises'sche Fließfläche (Gestaltänderungsenergiehypothese) in Form eines Zylinders und die Tresca'sche Fließfläche (Schubspannungshypothese) in Form eines Sechseck-Prismas zu sehen, diesmal in der 3D-Modellierungsumgebung von Creo erstellt. Auf der linken Seite befindet sich die Modellstruktur, in der auch die erstellten Schnitte aufgeführt sind. Es wurden zwei Schnitte definiert: einer durch die Mitte des Bauteils und ein weiterer in der Ebene des ebenen Spannungszustands.

Um diese Schnitte vorzubereiten, wurde zunächst eine neue Achse definiert. Diese basiert auf zwei Punkten im Raum mit den Koordinaten (200, 200, 200) und (-200, -200, -200). Anschließend wurde eine Ebene senkrecht zur definierten Achse erstellt. Entlang dieser Ebene wurden sowohl der Zylinder als auch das Sechseck modelliert (Siehe Abbildung 60).

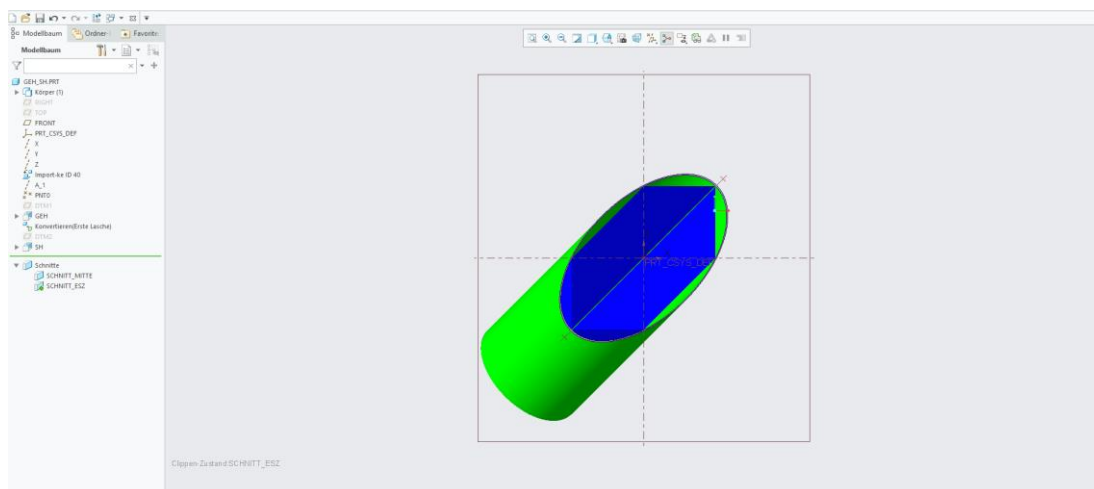


Abbildung 60 GEH & SH Schnitt in der Ebene Spannungszustand Ansicht (ESZ) in Creo

9 Anwendungsaufgabe

Zur Illustration sei hier eine Übungsaufgabe durchgerechnet:

9.1 Erste Aufgabe

In einem Bauteil aus den folgenden Werkstoffen tritt der folgende ebene Spannungszustand auf. Siehe Abbildung 61 :

1. **Feinkornbaustahl S690QL** (Streckgrenze: $R_{p0,2} = 690 \frac{N}{mm^2}$)
2. **Grauguss EN-GJL-200 (ehemals GG-20)** (Zugfestigkeit: $R_m = 300 \frac{N}{mm^2}$, zulässige Druckbeanspruchung: $\sigma_{dB} = 1000 \frac{N}{mm^2}$)

Der Spannungszustand ist wie folgt gegeben:

$$\bullet \quad \sigma_x = 120 \frac{N}{mm^2}, \quad \sigma_y = -40 \frac{N}{mm^2}, \quad \tau_{xy} = 75 \frac{N}{mm^2}, \quad S_{erf} \geq 1$$

Aufgabenstellung:

1) Beurteilen Sie die Sicherheiten:

Verwenden Sie für den Feinkornbaustahl die Schubspannungshypothese sowie die Mises-Hypothese und für den Grauguss die Normal- und Schubspannungshypothese (für Zug bzw. Druck).

2) Kommentieren Sie Ihre Ergebnisse:

Kommentieren Sie die Ergebnisse der Berechnungen. Erläutern Sie dabei die Bedeutung der berechneten Sicherheitsfaktoren und bewerten Sie, ob das Bauteil aufgrund der berechneten Spannungen zu Fließen oder zu einem Bruchversagen neigt.

3) Berechnen Sie die Lage der Ebenen maximaler Beanspruchung:

Bestimmen Sie den Winkel der Hauptspannungsachsen und berechnen Sie die darin wirkenden Schnittspannungen.

4) Kennzeichnen Sie die Ergebnisse im Mohrschen Spannungskreis:

Zeichnen Sie den Mohrschen Spannungskreis und markieren Sie die Hauptspannungen sowie die maximalen Schubspannungen. Achten Sie darauf, alle relevanten Größen wie die Hauptspannungen, den maximalen Schub, sowie die Versagensgrenzen je nach Hypothese (Schubspannungshypothese und Normalspannungshypothese) korrekt darzustellen.

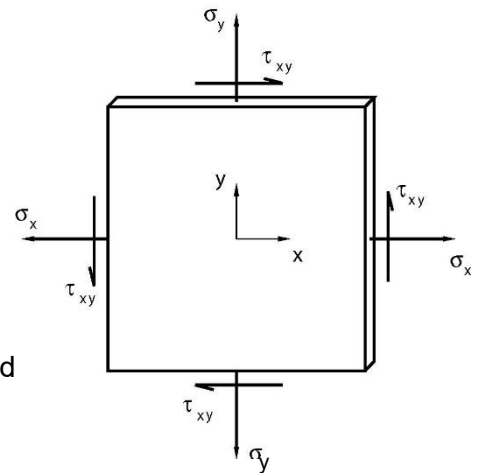


Abbildung 61 Labor Aufgabe (Kloss-Grote, 2025)

Parameter	Wert	Einheit
σ_x	120	$\frac{N}{mm^2}$
σ_y	-40	$\frac{N}{mm^2}$
τ_{xy}	75	$\frac{N}{mm^2}$
Feinkornbaustahl S690QL		
$R_{p0,2}$	690	$\frac{N}{mm^2}$
Grauguss EN-GJL-200		
R_m	300	
σ_{dB}	1000	$\frac{N}{mm^2}$

Tabelle 1 Gegeben Aufgabe 1 (Aufgabestellung)

9.1.1 Lösung Rechnerisch

1) Hauptspannungen

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_1 = \frac{120 \frac{N}{mm^2} - 40 \frac{N}{mm^2}}{2} + \sqrt{\left(\frac{120 \frac{N}{mm^2} + 40 \frac{N}{mm^2}}{2}\right)^2 + \left(75 \frac{N}{mm^2}\right)^2} = 150 \frac{N}{mm^2}$$

$$(\sigma_2 = 0 \text{ (ESZ)})$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_3 = \frac{120 \frac{N}{mm^2} - 40 \frac{N}{mm^2}}{2} - \sqrt{\left(\frac{120 \frac{N}{mm^2} + 40 \frac{N}{mm^2}}{2}\right)^2 + \left(75 \frac{N}{mm^2}\right)^2} = -70 \frac{N}{mm^2}$$

2) Mittlerer Spannung

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{120 \frac{N}{mm^2} + (-40 \frac{N}{mm^2})}{2} = 40 \frac{N}{mm^2}$$

3) Radius

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{120 \frac{N}{mm^2} + 40 \frac{N}{mm^2}}{2}\right)^2 + \left(75 \frac{N}{mm^2}\right)^2} = 110 \frac{N}{mm^2}$$

4) Hauptspannungswinkel

$$\varphi_H = \frac{\mu_H}{2} = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{75 \frac{N}{mm^2}}{\frac{120 \frac{N}{mm^2} + 40 \frac{N}{mm^2}}{2}}\right) = 21,57^\circ$$

5) Festigkeitsnachweis für den Stahl nach der Mises-Hypothese

a. Vergleichsspannung nach Mises

$$\sigma_{v,Mises} = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y^2 + 3 \cdot \tau_{xy}^2}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{v,Mises} &= \sqrt{\left(120 \frac{N}{mm^2}\right)^2 - 120 \frac{N}{mm^2} \cdot \left(-40 \frac{N}{mm^2}\right) + \left(-40 \frac{N}{mm^2}\right)^2 + 3 \cdot \left(75 \frac{N}{mm^2}\right)^2} \\ &= 194 \frac{N}{mm^2} \end{aligned}$$

b. Vorhandene Sicherheit

$$S_{Mises,vorh} := \frac{R_{p0.2}}{\sigma_{v,Mises}} = \frac{690 \frac{N}{mm^2}}{194 \frac{N}{mm^2}} = 3.55$$

6) Festigkeitsnachweis für den Stahl nach der Schubspannungshypothese

a. Maximaler Schubspannung (vorhanden)

$$\tau_{max} := \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{150 \frac{N}{mm^2} - \left(-70 \frac{N}{mm^2}\right)}{2} = 110 \frac{N}{mm^2}$$

b. Ertragbare Schubspannung $\tau_{ertr} = \tau_F$

$$\tau_F := \frac{R_{p0.2}}{2} = \frac{690 \frac{N}{mm^2}}{2} = 345 \frac{N}{mm^2}$$

c. Sicherheitsfaktor S_{SH}

$$S_{SH,vorh} := \frac{\tau_F}{\tau_{max}} = \frac{345 \frac{N}{mm^2}}{220 \frac{N}{mm^2}} = 3.14$$

7) Festigkeitsnachweis für den Grauguss nach der SH

a. Ertragbare Schubspannung τ_{ertr}

$$\tau_{ertr} := \frac{\sigma_{db}}{2} = \frac{1000 \frac{N}{mm^2}}{2} = 500 \frac{N}{mm^2}$$

b. Sicherheitsfaktor S_{SH}

$$S_{SH,vorh,Druck} := \frac{\tau_{ertr}}{\tau_{max}} = \frac{500 \frac{N}{mm^2}}{110 \frac{N}{mm^2}} = 4.56$$

8) Festigkeitsnachweis für den Grauguss mit der Normalespannungshypothese

a. Vergleichsspannung nach der NH

$$\sigma_{V,NH} = \sigma_1 = 150 \frac{N}{mm^2}$$

b. Sicherheitsfaktor S_{NH}

$$S_{NH,vorh} := \frac{R_m}{\sigma_{V,NH}} = \frac{300 \frac{N}{mm^2}}{150 \frac{N}{mm^2}} = 2.0$$

σ_m	40	$\frac{N}{mm^2}$
r	110	$\frac{N}{mm^2}$
σ_1	150	$\frac{N}{mm^2}$
σ_2	0	$\frac{N}{mm^2}$
σ_3	-70	$\frac{N}{mm^2}$
φ_H	21,5	°
Festigkeitsnachweis für den Stahl nach der Mises-Hypothese		
$\sigma_{V,Mises}$	194	$\frac{N}{mm^2}$
$S_{Vorh,Mises}$	3.55	1
Nach der Mises-Hypothese wird das Bauteil aus dem Werkstoff S690QI den Belastungen standhalten, da $S_{Vorh,Mises} > 1, S_{erf}$		
Festigkeitsnachweis für den Stahl nach der Schubspannungshypothese		
τ_{max}	109	$\frac{N}{mm^2}$
τ_F	345	$\frac{N}{mm^2}$
$\sigma_{SH,vorh}$	3.14	1
Nach der Schubspannungshypothese wird das Bauteil aus dem Werkstoff S690QI unter den Belastungen nicht zu fließen beginnen. Das Bauteil hält den Belastungen stand, da $S_{Vorh,SH} > 1, S_{erf}$		
Festigkeitnachweis für den Grauguss nach der NH		
$\sigma_{V,NH} = \sigma_1$	150	$\frac{N}{mm^2}$
$S_{NH,vorh}$	2.0	1
Nach der Normalespannungshypothese wird das Bauteil aus Werkstoff EN-GJL-200 den Belastungen standhalten, da $S_{NH,vorh} > 1, S_{erf}$		

Festigkeitsnachweis für den Grauguss nach der SH		
τ_{zul}	500	$\frac{N}{mm^2}$
$S_{Vorh,SH}$	4.56	1
Der berechnete Sicherheitsfaktor $S_{Vorh,SH} > 1$, sodass unter Druckbeanspruchung kein Schubbruchversagen zu erwarten ist. Da Grauguss ein spröder Werkstoff ist, tritt bei Überschreitung der zulässigen Spannung kein Fließen, sondern sofortiger Bruch auf.		
Tabelle 2 Ergebnis & Zusammenfassung der Aufgabe 1		

9.1.2 Lösung der Aufgabe 1 Grafisch GeoGebra

1) Mohrsche Kreis und Spannungstensor

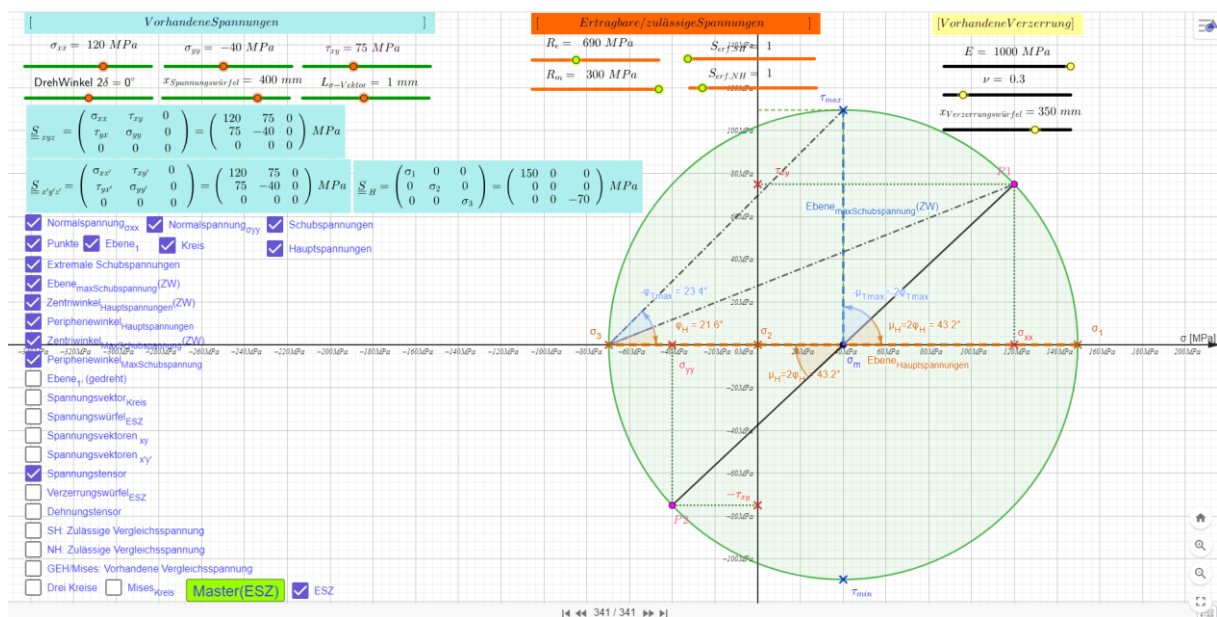


Abbildung 62 Aufgabe 1 Mohrsche Kreis und Spannungstensor GeoGebra

Die Visualisierung in Abbildung 62 zeigt, dass die Ergebnisse mit den rechnerisch ermittelten Werten der Hauptspannungen auch mit dem Spannungstensor übereinstimmen. Zudem wurden hier auch die Hauptspannungen des Spannungstensors automatisch der Größe nach sortiert, das heißt: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Darüber hinaus lassen sich mit der Darstellung auch weitere wichtige mechanische Größen direkt ablesen:

Zum Beispiel ist die maximale Schubspannung als der größte Abstand zwischen dem Mittelpunkt des Mohrschen Kreises und dem Kreisrand erkennbar. Sie gibt an, wie stark das Material an einer bestimmten Stelle durch Schub beansprucht wird. Außerdem sind der Zentriwinkel und der Peripheriewinkel zu sehen. Der Zentriwinkel zeigt an, um welchen Winkel das reale Bauteil (bzw. das Koordinatensystem) gedreht werden müsste, damit nur noch Hauptspannungen wirken also keine Schubspannungen mehr auftreten. Der Peripheriewinkel entspricht der Hälfte des Zentriwinkels.

2) Spannungswürfel

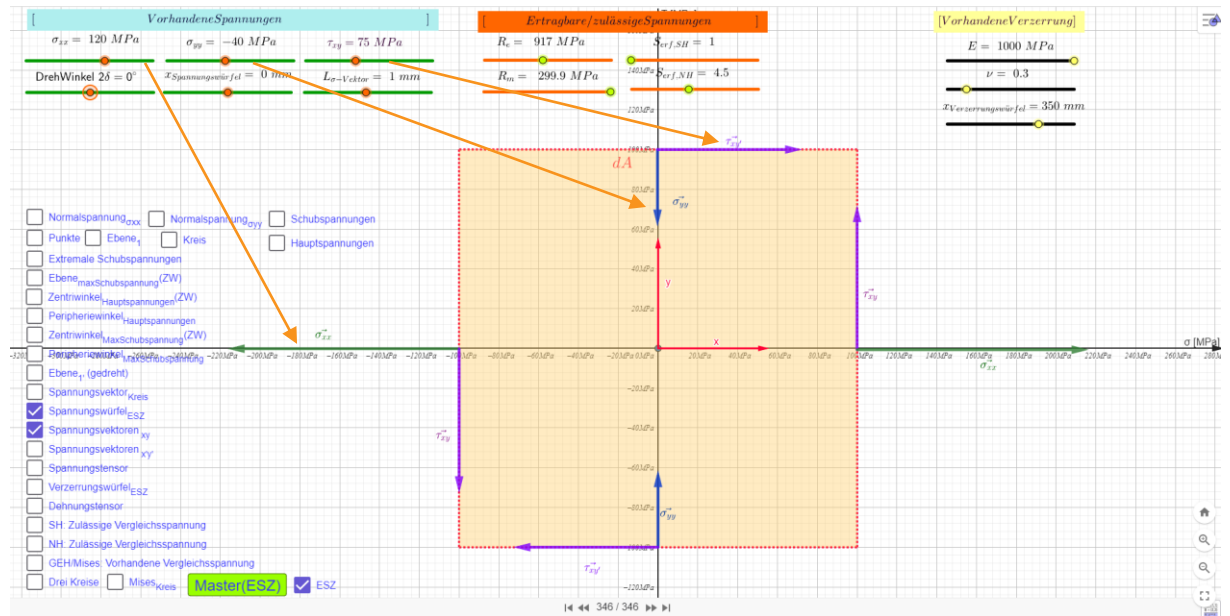


Abbildung 63 Aufgabe 1 Spannungswürfel nicht gedreht GeoGebra

Passend zum Spannungszustand kann in der Datei eine weitere Visualisierung eingeblendet werden, die Spannungen am Schnittwürfel (vgl. Abbildung 63) Dabei wurden die Spannungsvektoren (Pfeile) so modelliert, dass sie sowohl in ihrer Größe als auch in ihrer Richtung den realen physikalischen Verhältnissen entsprechen.

So zeigt die Richtung der Pfeile an, ob es sich um Zug oder Druckspannungen handelt. Zugspannungen werden nach außen gerichtet dargestellt, während Druckspannungen nach innen zeigen. Die Länge der Pfeile ist dabei proportional zur jeweiligen Spannungsgröße.

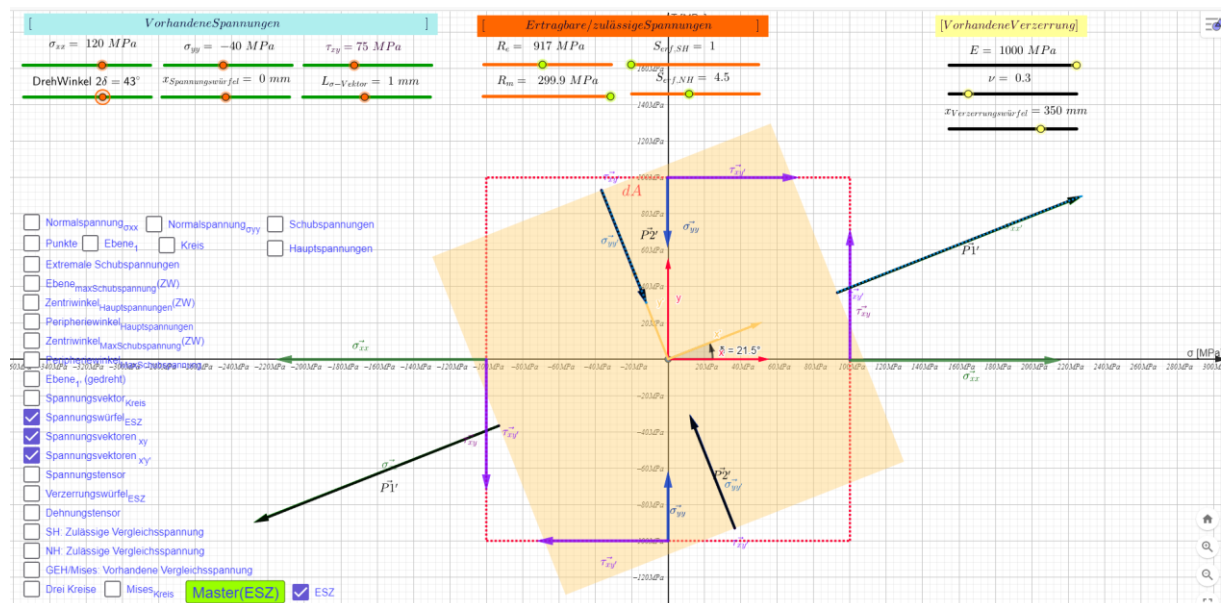


Abbildung 64 Abbildung 39 Aufgabe 1 Spannungswürfel gedreht GeoGebra

Um in die Hauptspannungsebene zu gelangen, wurde ein Schieberegler implementiert, der den Spannungswürfel um den gewünschten Winkel $\varphi_H = \frac{\mu_H}{2} = 21,6^\circ$ gegen den Uhrzeigersinn

dreht (vgl. Abbildung 64) . Durch diese Rotation werden die Koordinatenachsen so ausgerichtet, dass nur noch Normalspannungen auftreten und die Schubspannungen verschwinden in diesem Zustand vollständig.

Im Mohrschen Spannungskreis entspricht diese physikalische Drehung um $\varphi_H = 21,6^\circ$ einer Drehung des Spannungszustands um $2 \cdot \varphi_H = \mu_H = 43,2^\circ$, allerdings im Uhrzeigersinn (vgl. Abbildung 62)

Diese Visualisierung macht die Transformation des Spannungszustands besonders anschaulich und unterstützt das Verständnis dafür, wie die Hauptspannungen entstehen und unter welchem Winkel sie auftreten.

3) Verzerrungswürfel

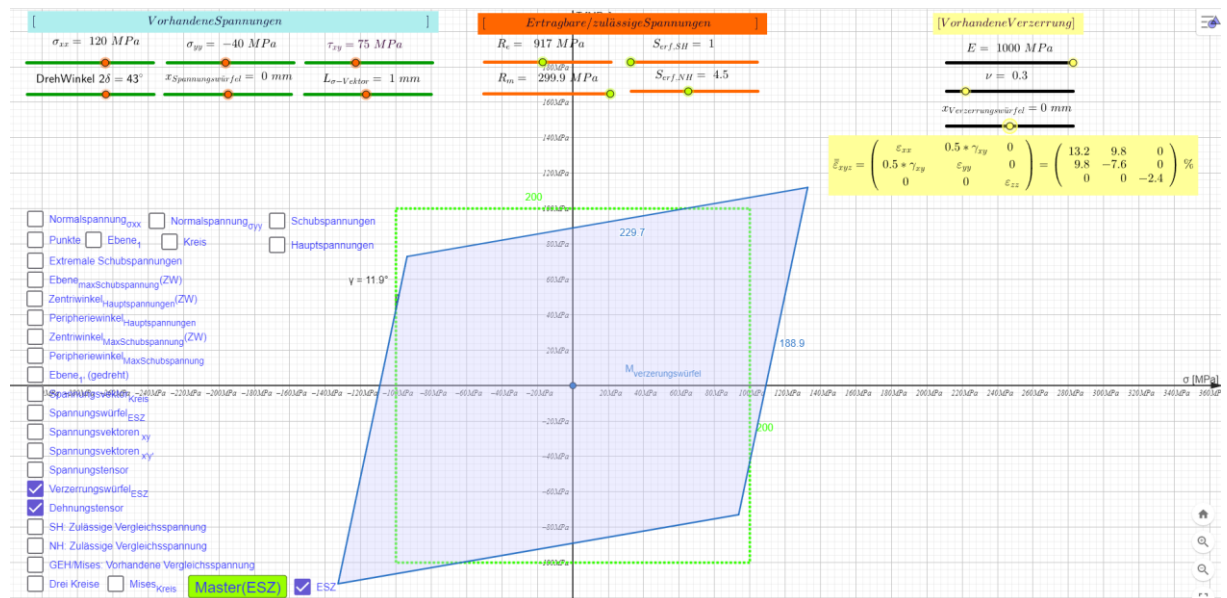


Abbildung 65 Aufgabe 1 Verzerrungswürfel mit Dehnungstensor GeoGebra

Ein Verzerrungswürfel samt zugehörigem Verzerrungstensor wurde ebenfalls in GeoGebra erstellt. Für den Elastizitätsmodul wurden zur Besseren Visualisierung $E = 1000 \text{ MPa}$ angenommen sowie Streckgrenze $R_e = 690 \text{ MPa}$ und Zugfestigkeit $R_m = 690 \text{ MPa}$ aus der Aufgabestellung.

Er zeigt ausschließlich die direkte Verformung infolge der vorliegenden Spannungen sowohl in Form von Längenänderungen durch Normalspannungen als auch in Form von Winkeldrehungen infolge auftretender Schubverzerrungen (vgl. Abbildung 65). Verzerrungswinkel wurde in (Abbildung 47) erläutert.

4) Sicherheiten

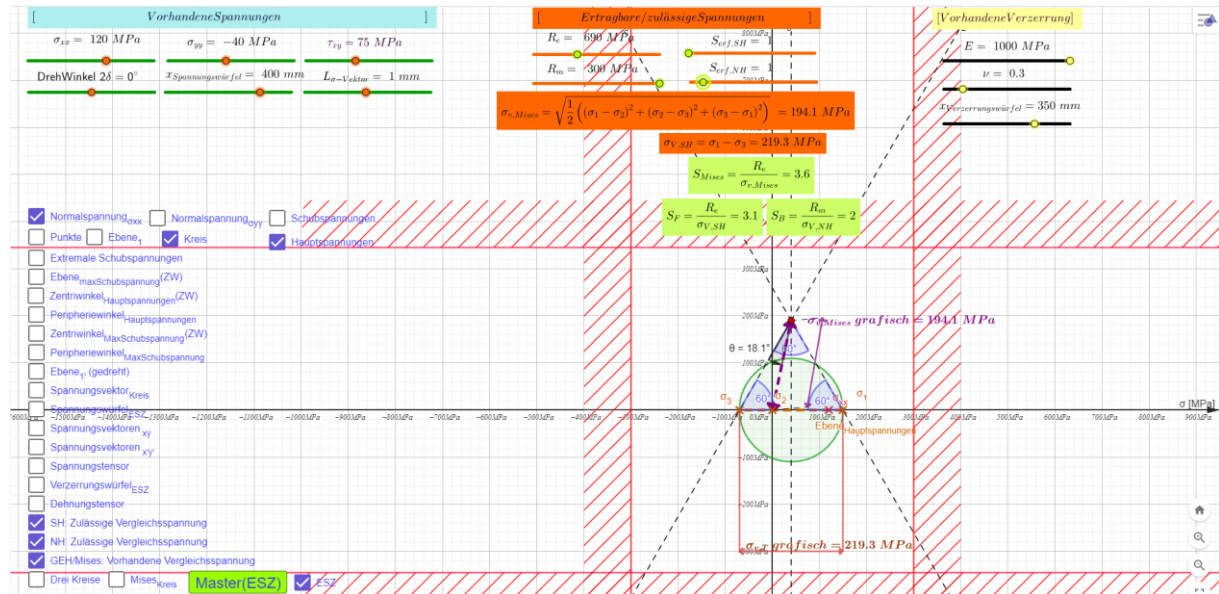


Abbildung 66 Aufgabe 1 Sicherheiten GeoGebra

Wie in der Abbildung 66 ist der Mohrsche Spannungskreis dargestellt, ergänzt durch die Grenzlinien der zulässigen Spannungen gemäß der Normalspannungshypothese (NH) und der Schubspannungshypothese (SH). Die Visualisierung zeigt deutlich, dass der Spannungskreis vollständig innerhalb der zulässigen Grenzbereiche liegt. Dies bedeutet, dass die vorhandenen Spannungen deutlich unterhalb der kritischen Werte bleiben, was auf eine ausreichende Sicherheit gegenüber Versagen hinweist.

Die grafische Auswertung stimmt mit den zuvor rechnerisch bestimmten Sicherheitsfaktoren überein. Für weiterführende Informationen zur Visualisierung der Sicherheitsfaktoren sowie zur Bedeutung der roten Begrenzungslinien wird auf die Abbildung 48 und Abbildung 49 verwiesen.

5) Dreikreise (ESZ)

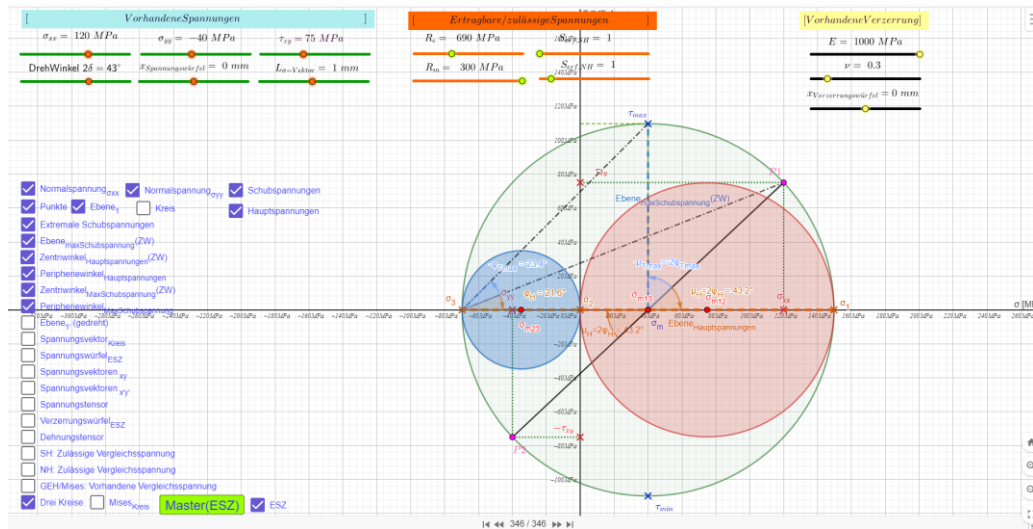


Abbildung 67 Aufgabe 1 Drei kreise GeoGebra

Darüber hinaus werden neben dem bereits im Detail erläuterten Spannungskreis für den ESZ auch die beiden noch fehlenden Spannungskreise dargestellt.

9.2 Aufgabe 2: Mehrachsig beanspruchte Bauteile aus Feinkornbaustahl und Grauguss

Eine Spezialkonstruktion eines Rohres mit Rippen (Bild 1 in Abbildung 68) soll im Betrieb durch einen statisch wirkenden Innendruck $p = 65 \text{ MPa}$ und ein ebenfalls statisch wirkendes Biegemoment $M_b = 770 \text{ Nm}$ beansprucht werden. Für das Rohr kommen Werkstoff in Frage: Feinkornbaustahl S690QL ($R_{p0,2} = 690 \text{ N/mm}^2$).

Die Hauptspannungen an den vier relevanten Stellen gegeben wie folgt:

Position 1:

$$\underline{\underline{S_1}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 390 & 0 & 0 \\ 0 & 390 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

Position 2:

$$\underline{\underline{S_2}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 390 & 0 & 0 \\ 0 & 335 & 0 \\ 0 & 0 & -65 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

Position 3:

$$\underline{\underline{S_3}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 390 & 0 & 0 \\ 0 & -65 & 0 \\ 0 & 0 & -335 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

Position 4:

$$\underline{\underline{S_4}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 390 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -390 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

- Stellen Sie Ihrer Abgabe eine Ergebniszusammenfassung voran (inkl. einer Tabelle aller wichtigen Ergebnisse und einer kurzen Bewertung).
- Zeichnen Sie für jede der Stellen 1 bis 4 den Mohrschen Spannungskreis, und zwar: (quantitativ, alle Größen einzeichnen und beschriften, alle Maßstäbe gleich!)
- Stellen Sie den Spannungstensor für jede Stelle in Matrixform dar, und berechnen Sie:
 - Den hydrostatischen (Kugel-)Spannungstensor,
 - Den Deviatorspannungstensor,
 - Die Spannungsinvarianten I_1, I_2, I_3 .
- Beurteilen Sie grafisch die Tragfähigkeit der Spannungszustände an allen vier Stellen: Verwenden Sie die Vergleichsspannung nach von Mises (GEH) sowie die Schubspannungshypothese (Tresca). Dazu nutzen Sie die Ellipse (für GEH) und das Sechseck (für SH) im Ebenspannungszustand.
- Bewerten Sie anhand der grafischen Darstellung, ob das Bauteil den Spannungszustand an den jeweiligen Stellen sicher ertragen kann oder nicht.

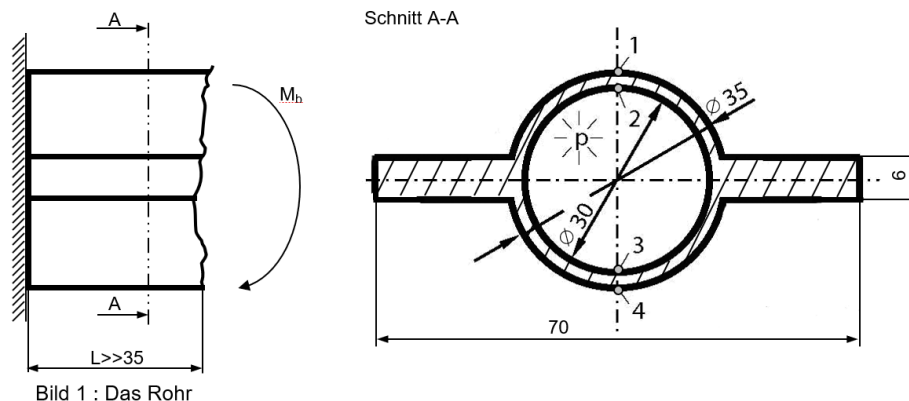


Abbildung 68 Labor Aufgabe 2 (Kloss-Grote, 2025)

Diese Aufgabe wird vollständig mit der Datei *3D_Deviator&Hydro_Final* bearbeitet. Eine ähnliche Aufgabe, die vollständig rechnerisch mit zwei Werkstoffen gelöst wurde, finden Sie im Anhang (Kapitel 11.2).

9.2.1 Position 1

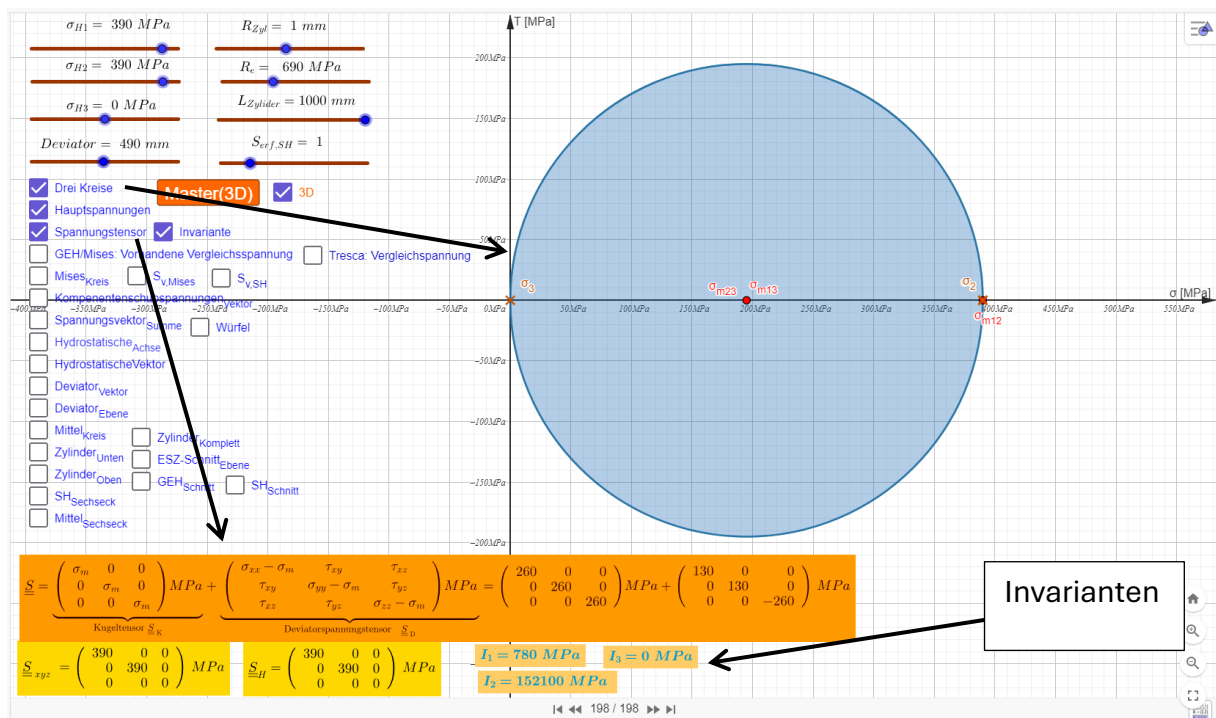


Abbildung 69 Aufgabe 2 Position1 Mohrsche Kreise & Tensoren & Varianten (GeoGebra)

Wie in Abbildung 69 erkennbar ist, erscheint lediglich ein Mohrscher Kreis, obwohl drei Hauptspannungen vorliegen. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Hauptspannungen $\sigma_{H1} = \sigma_1$ und $\sigma_{H2} = \sigma_2$ identisch sind und somit denselben Punkt im Spannungskreis darstellen. Weitere Informationen zum Spannungstensor finden Sie in Kapitel (3.4).

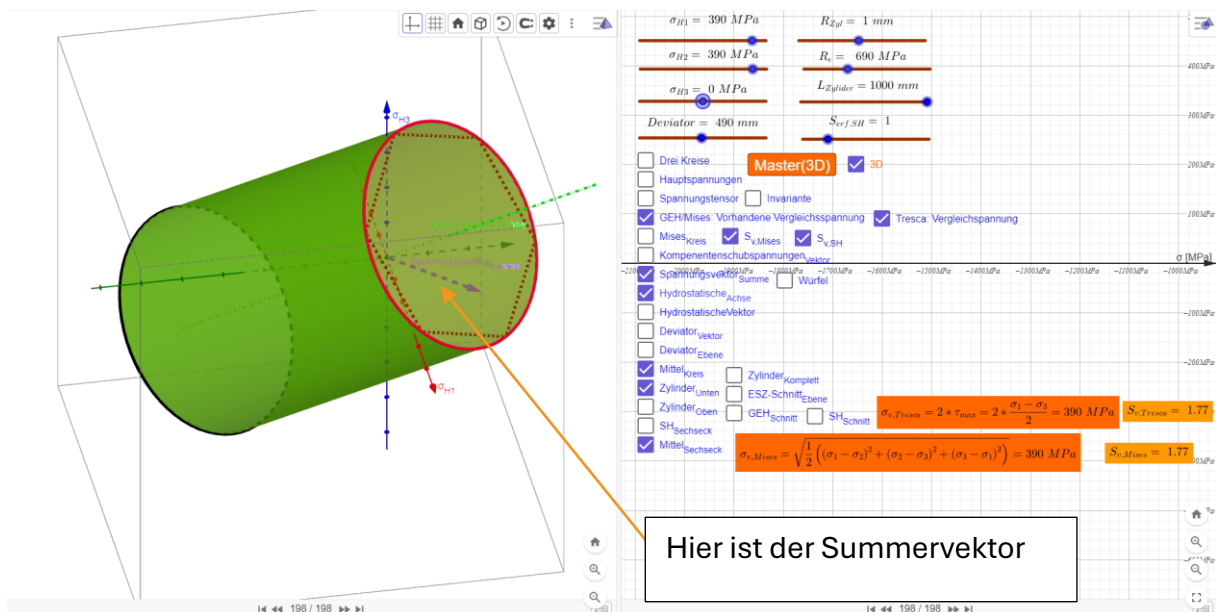


Abbildung 70 Aufgabe 2 Position 1 im 3D

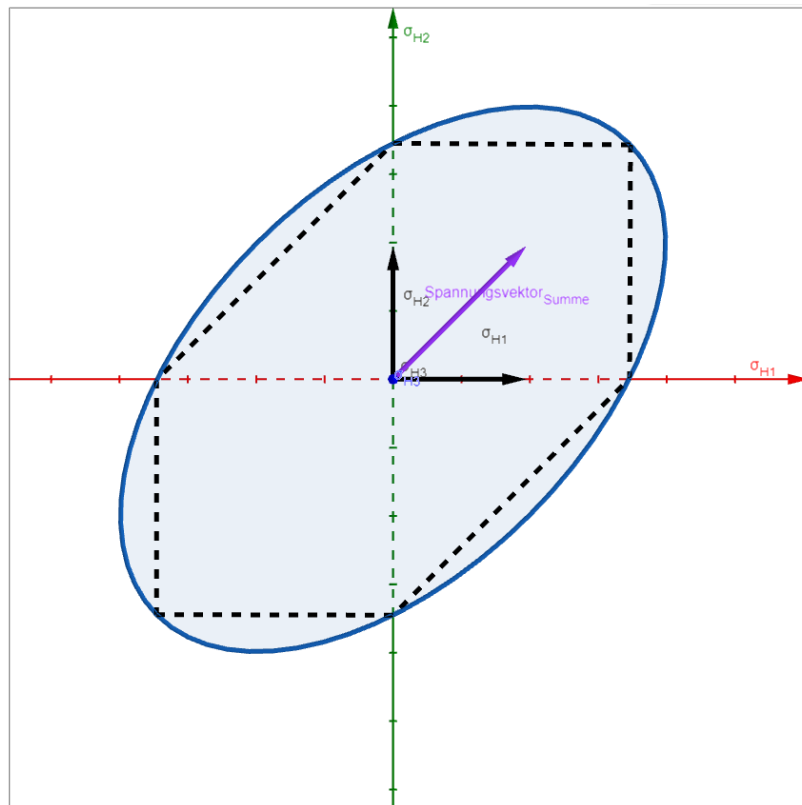


Abbildung 71 Aufgabe 2 Position 1 im Ebenen Spannungszustand

In der Auswertung nach Abbildung 70 & Abbildung 71 liegen die berechneten Spannungszustände innerhalb der Grenzflächen sowohl der von-Mises-Hypothese (GEH) als auch der Tresca-Hypothese (SH). Dies bedeutet, dass weder die Vergleichsspannung nach von Mises noch die maximale Schubspannung nach Tresca die Fließgrenze des Materials überschreiten.

Sicherheitsfaktor nach Tresca: $S_{v,Tresca} = 1.7 > 1$

Sicherheitsfaktor nach von Mises: $S_{v,Mises} = 1.7 > 1$

Da beide Kriterien einen Sicherheitsfaktor > 1 liefern, ist Position 1 sicher gegen plastische Verformung (Fließen).

Diese Aussage wird auch durch die Visualisierung in Abbildung 70 & Abbildung 71 bestätigt: Der Summenvektor der Hauptspannungen überschreitet weder die Tresca-Sechseckgrenze noch die von-Mises-Ellipse.

Hinweis: Abbildung 71 wurde verwendet, da eine der Hauptspannungen null ist. Bei dieser Auswertung im ebenen Schnitt wurden die Hauptspannungen nach ihrer Größe geordnet und mit Hilfe der Schiebregel angepasst.

9.2.2 Position 2

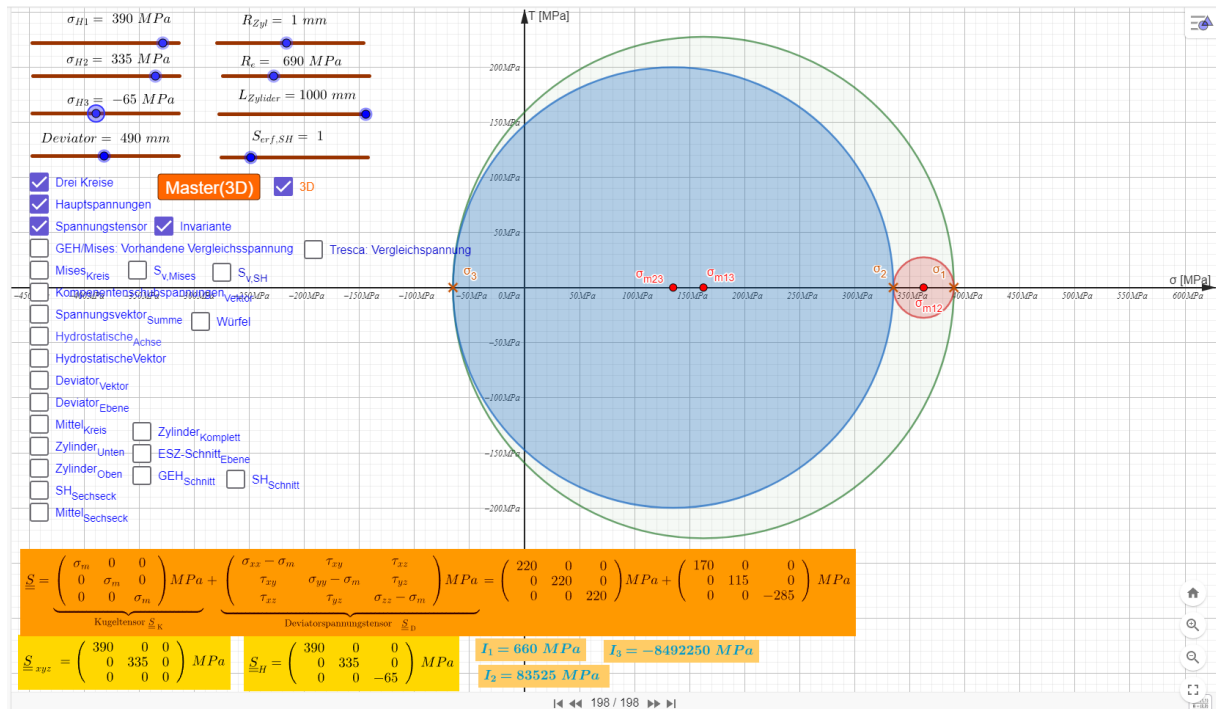


Abbildung 72 Aufgabe 2 Position 2 Mohrsche Kreise & Tensoren (GeoGebra)

In Abbildung 72 sind die Mohrschen Spannungskreise für Position 2 dargestellt. Die drei Hauptspannungen $\sigma_1 = 390 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = 335 \text{ MPa}$ und $\sigma_3 = -65 \text{ MPa}$.

Die Kreise bilden sich entsprechend zwischen den Hauptspannungswerte (σ_1, σ_2) , (σ_2, σ_3) und (σ_1, σ_3) . Die Analyse zeigt, dass zwei der drei Hauptspannungen positive Werte aufweisen, während eine negativ ist. Dies deutet auf einen mehrachsigen Spannungszustand hin, der sowohl Zug- als auch Druckspannungen umfasst.

Die beiden Zugspannungen σ_1 und σ_2 liegen relativ dicht beieinander, was sich in einem kleineren inneren Kreis widerspiegelt. Der größte Kreis entsteht zwischen σ_1 und σ_3 und bildet die maximale Spannungsdifferenz ab.

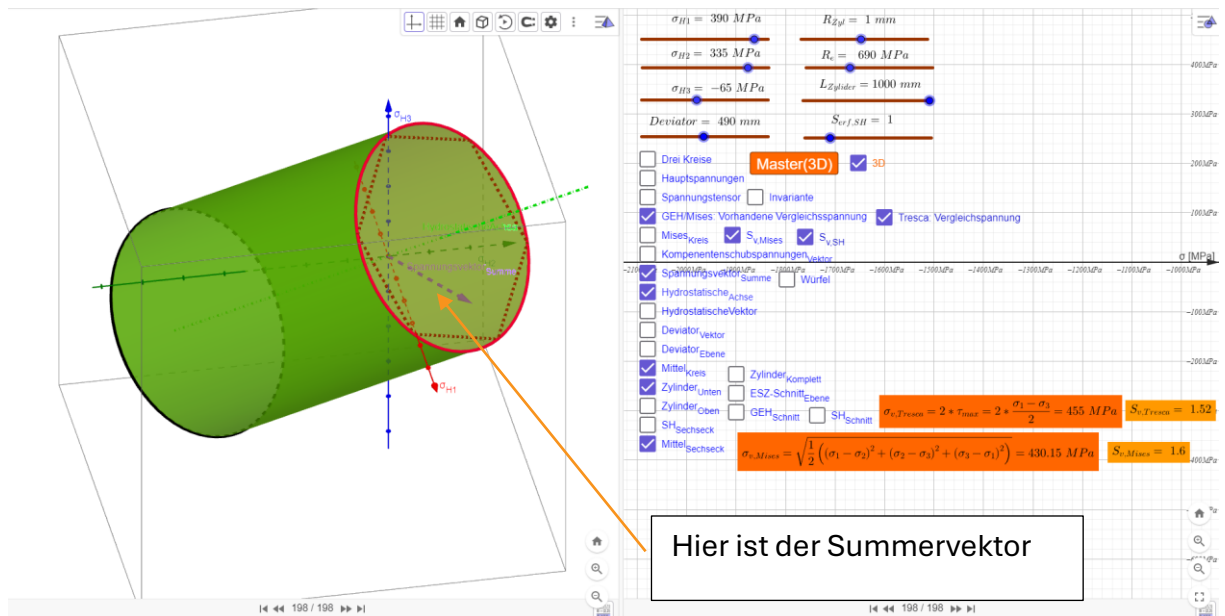


Abbildung 73 Aufgabe 2 Position 2 im 3D

In der Auswertung nach Abbildung 73 liegen die berechneten Spannungszustände innerhalb der Grenzflächen auch.

Sicherheitsfaktor nach Tresca: $S_{v,Tresca} = 1.5 > 1$

Sicherheitsfaktor nach von Mises: $S_{v,Mises} = 1.6 > 1$

Da beide Kriterien einen Sicherheitsfaktor > 1 liefern, ist Position 2 sicher gegen plastische Verformung (Fließen).

Diese Aussage wird auch durch die Visualisierung in Abbildung 71 bestätigt: Der Summenvektor der Hauptspannungen überschreitet weder die Tresca-Sechseckgrenze noch die von-Mises-Ellipse.

9.2.3 Position 3

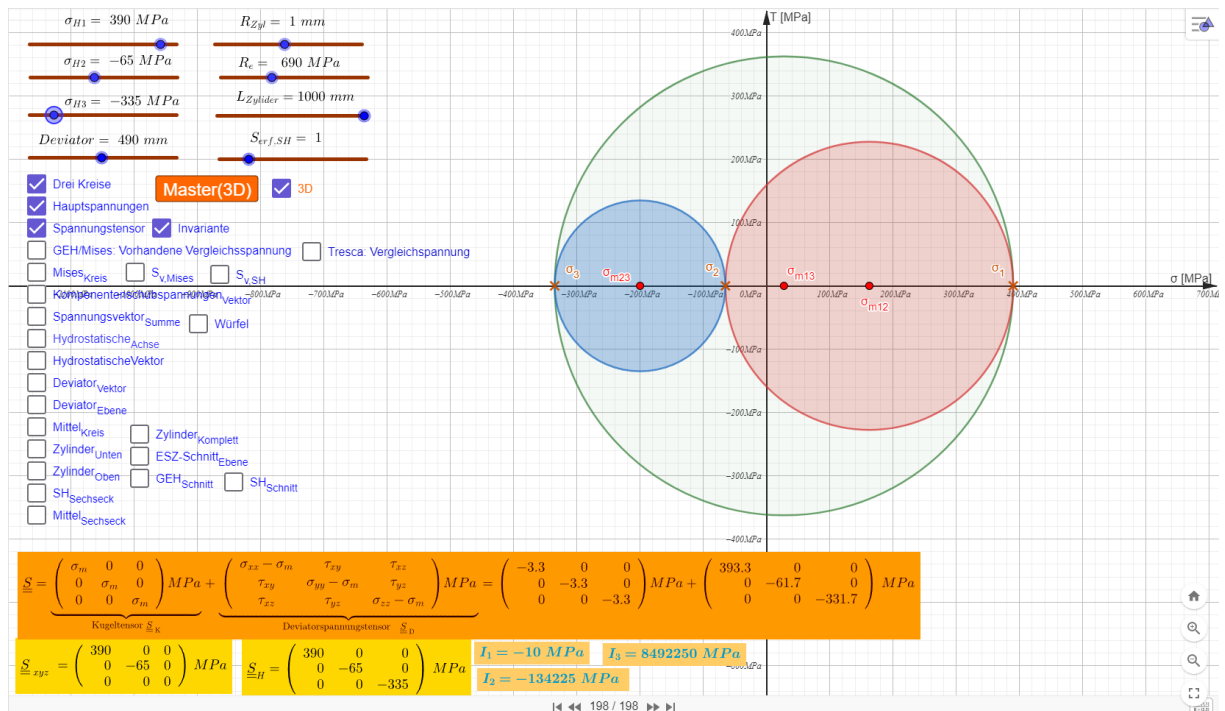


Abbildung 74 Aufgabe 2 Position 3 Mohrsche Kreise & Tensoren (GeoGebra)

In Abbildung 74 sind die Mohrschen Spannungskreise für die dritte Position dargestellt. Man erkennt, dass die drei Hauptspannungen $\sigma_1 = 390 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = -65 \text{ MPa}$ (Druck) und $\sigma_3 = -335 \text{ MPa}$ (starker Druck) sehr weit auseinander liegen. Der größte Kreis spannt sich zwischen σ_1 und σ_3 auf, was bedeutet, dass hier die maximalen Schubspannungen auftreten. Auch die Kreise zwischen σ_1 und σ_2 sowie zwischen σ_2 und σ_3 sind deutlich sichtbar, wobei insbesondere der Unterschied zwischen σ_1 und σ_2 die mittleren Schubspannungen zeigt.

Diese Verteilung zeigt, dass an dieser Stelle ein sehr komplexer dreiachsiger Spannungszustand herrscht. In eine Richtung wirkt eine starke Zugspannung, in den beiden anderen Richtungen herrscht Druck. Es ist kein einfacher ebener Spannungszustand mehr, sondern eine mehrachsige Beanspruchung mit einer deutlichen Überlagerung von Zug und Druck.

Solche Spannungszustände können für bestimmte Materialien problematisch sein, insbesondere für spröde Werkstoffe wie Grauguss, da dieser Zugspannungen nicht gut aufnehmen kann. Die grafische Darstellung der Mohr-Kreise hilft dabei, die Spannungsverhältnisse anschaulich zu verstehen, und macht deutlich, dass eine intensive Beanspruchung in mehreren Richtungen vorliegt. Die genaue Bewertung erfolgt über die Vergleichsspannungen nach Mises und Tresca, um beurteilen zu können, ob diese Belastung tragfähig ist oder zum Versagen führen kann.

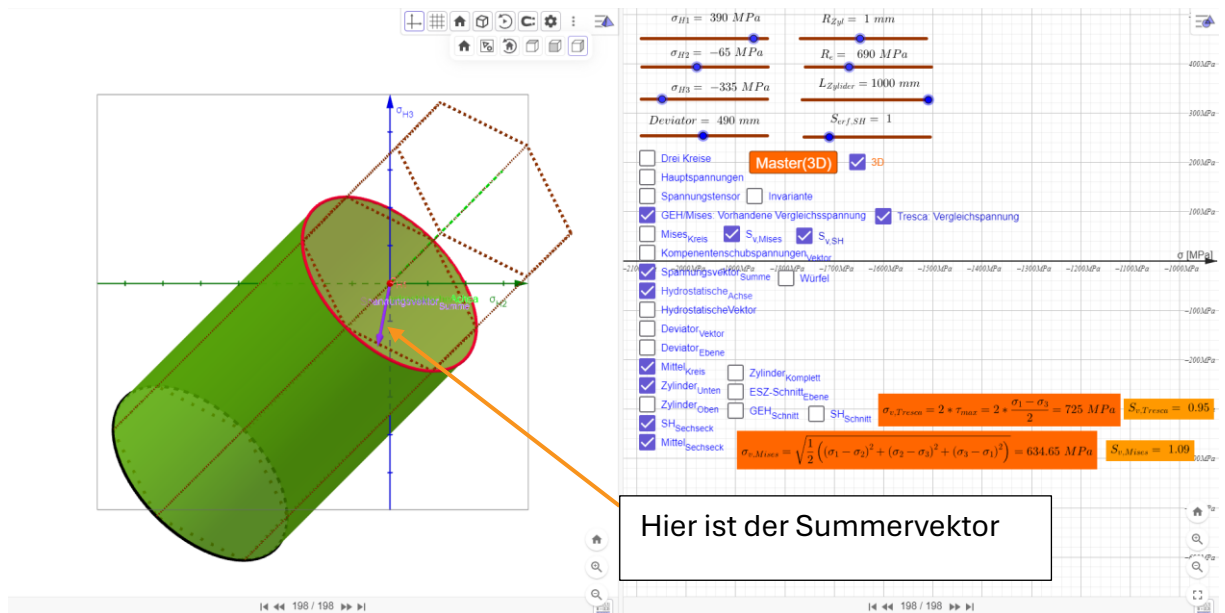


Abbildung 75 Aufgabe 2 Position 3 im 3D

Die Spannungsanalyse für Position 3 zeigt eine unterschiedliche Bewertung je nach Fließkriterium (siehe Abbildung 75):

Sicherheitsfaktor nach Tresca: $S_{v,Tresca} = 0.9 < 1$

Sicherheitsfaktor nach von Mises: $S_{v,Mises} = 1.0 > 1$

Das bedeutet:

Nach dem Tresca-Kriterium (SH) würde das Material bereits fließen, während es nach dem von-Mises-Kriterium (GEH) noch nicht.

Diese Aussage wird durch die Visualisierung in Abbildung 75 bestätigt: Der Summenvektor der Hauptspannungen überschreitet die Tresca-Sechseckgrenze, bleibt (knapp) jedoch innerhalb der von-Mises-Ellipse.

9.2.4 Position 4

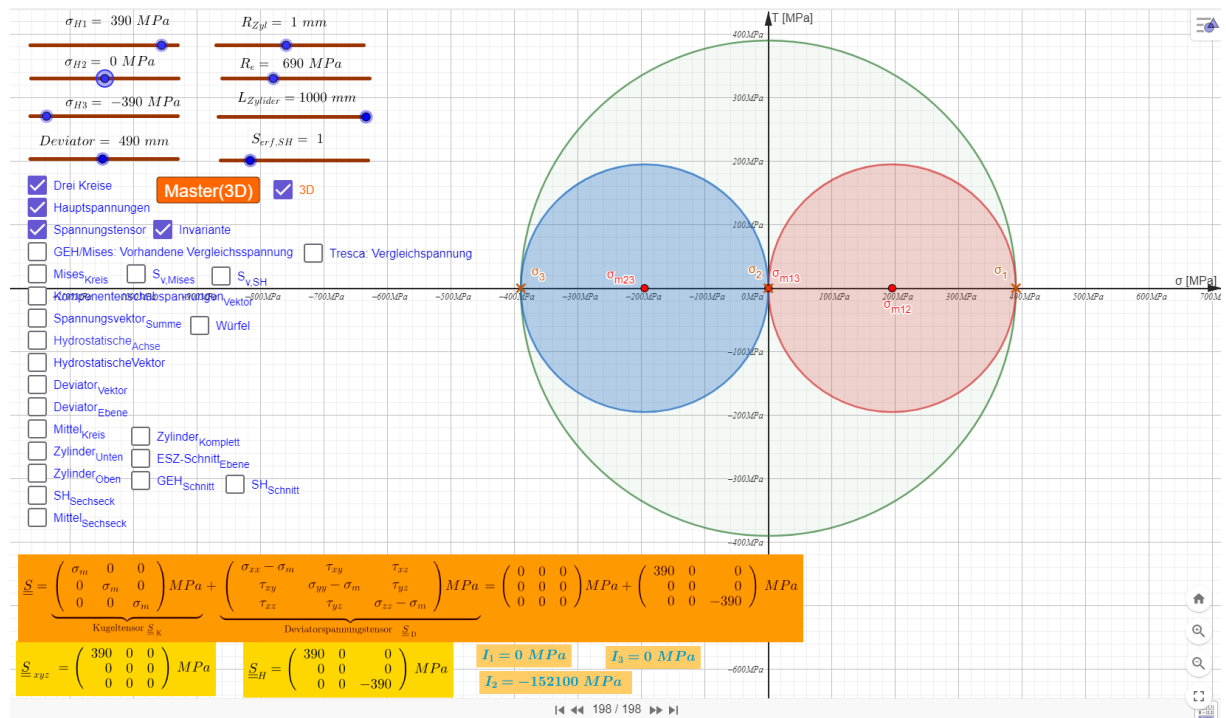


Abbildung 76 Aufgabe 2 Position 4 Mohrsche Kreise & Tensoren (GeoGebra)

In Abbildung 74 sind die Mohrschen Spannungskreise für Position 4 dargestellt. Die drei Hauptspannungen $\sigma_1 = 390 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = 0 \text{ MPa}$ und $\sigma_3 = -390 \text{ MPa}$.

Auffällig ist, dass σ_1 und σ_3 exakt gegensätzlich sind, wodurch sich ein besonders großer Hauptkreis ergibt. Dieser verläuft symmetrisch um die Null-Linie und zeigt eine sehr starke Beanspruchung in entgegengesetzten Richtungen, typisch für einen ausgeprägten Zug-Druck-Zustand. σ_2 liegt genau dazwischen bei 0 MPa , was bedeutet, dass die zweite Richtung zwar eine Rolle spielt, aber nicht zur Extrembelastung beiträgt.

Insgesamt ergibt sich hier ein sehr deutlicher dreiachsiger Spannungszustand mit einer Kombination aus starker Zug- und Druckspannung

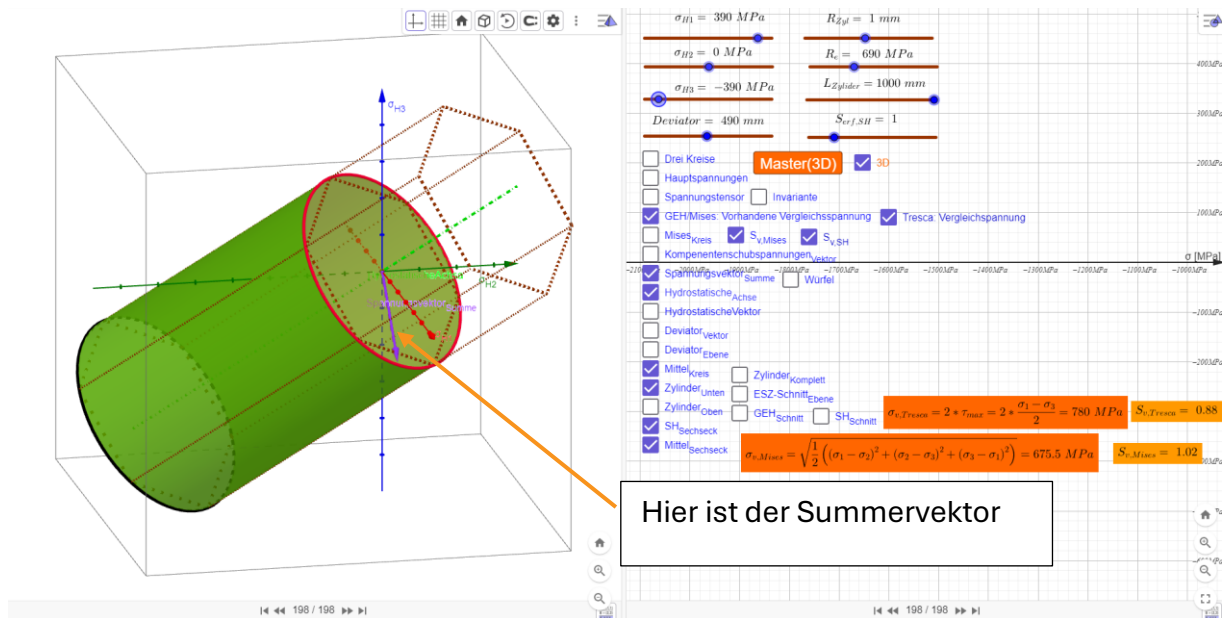


Abbildung 77 Aufgabe 2 Position 4 im 3D

Die Spannungsanalyse für Position 4 zeigt eine unterschiedliche Bewertung je nach Fließkriterium (siehe Abbildung 77) :

Sicherheitsfaktor nach Tresca: $S_{v,Tresca} = 0.8 < 1$

Sicherheitsfaktor nach von Mises: $S_{v,Mises} = 1.0 > 1$

Das bedeutet:

Nach dem Tresca-Kriterium (SH) würde das Material bereits fließen, während es nach dem von-Mises-Kriterium (GEH) noch nicht.

Diese Aussage wird durch die Visualisierung in Abbildung 77 bestätigt: Der Summenvektor der Hauptspannungen überschreitet die Tresca-Sechseckgrenze, bleibt (knapp) jedoch innerhalb der von-Mises-Ellipse.

Position	Abbildung	Sicherheitsfaktor (von Mises)	Sicherheitsfaktor (Tresca)	Beurteilung
1	Abbildung 71	$S_{v,Mises} = 1.7 > 1$	$S_{v,Tresca} = 1.7 > 1$	Spannungszustand liegt innerhalb der zulässigen Grenzen nach beiden Kriterien
2	Abbildung 73	$S_{v,Mises} = 1.6 > 1$	$S_{v,Tresca} = 1.5 > 1$	Spannungszustand liegt innerhalb der zulässigen Grenzen nach beiden Kriterien
3	Abbildung 75	$S_{v,Mises} = 1.0 \geq 1$	$S_{v,Tresca} = 0.9 < 1$	Spannungszustand überschreitet Grenzwert nach Tresca, liegt aber noch innerhalb des Grenzwerts nach von Mises
5	Abbildung 77	$S_{v,Mises} = 1.0 \geq 1$	$S_{v,Tresca} = 0.8 < 1$	Spannungszustand überschreitet Grenzwert nach Tresca, liegt aber noch innerhalb des Grenzwerts nach von Mises

Tabelle 3 Ergebnis & Zusammenfassung der Aufgabe 2

10 Fazit

Die vorliegende Bachelorarbeit verbindet die theoretischen Grundlagen der Spannungsanalyse mit einer interaktiven digitalen Umsetzung in GeoGebra. Der Mohrsche Spannungskreis wurde dabei nicht nur klassisch analysiert, sondern entsprechend den bekannten theoretischen Grundlagen vollständig in GeoGebra visualisiert.

Ein wesentliches Ergebnis ist, dass sich die mit GeoGebra erstellten Modelle als technisch korrekt und didaktisch wertvoll erwiesen haben. Die grafischen Darstellungen stimmen mit den rechnerisch ermittelten Werten überein, was die Zuverlässigkeit der Visualisierung bestätigt. Insbesondere die Abbildung der verschiedenen Vergleichsspannungshypothesen (Normalspannungshypothese, Schubspannungshypothese, Gestaltänderungshypothese) ermöglichte eine präzise und nachvollziehbare Darstellung der theoretischen Konzepte.

Die entwickelten interaktiven GeoGebra-Elemente fördern das Verständnis der Spannungsmechanik und ermöglichen eine unmittelbare Verknüpfung zwischen mathematischer Theorie und grafischer Interpretation. Sie sind nicht nur für das Selbststudium geeignet, sondern bieten auch in der Lehre eine wertvolle Unterstützung.

Herausforderungen traten insbesondere bei der dreidimensionalen Darstellung auf, etwa bei der Visualisierung von Schnittflächen oder Fließflächen. Diese Einschränkungen konnten durch den ergänzenden Einsatz von Creo überwunden werden.

Insgesamt zeigt die Arbeit, wie sich etablierte theoretische Inhalte der Spannungslehre mithilfe digitaler Werkzeuge exakt visualisieren und überprüfen lassen. Dadurch entsteht ein vertieftes Verständnis für komplexe Spannungszustände und ein wertvoller Beitrag zur technischen Ausbildung.

Rückblickend hat mir die Bearbeitung dieser Arbeit nicht nur fachlich, sondern auch methodisch viel gebracht. Besonders die Verbindung zwischen Theorie und interaktiver Darstellung in GeoGebra hat mein eigenes Verständnis deutlich vertieft. Es war spannend zu erleben, wie sich komplexe Zusammenhänge visuell und anschaulich überprüfen lassen. Trotz mancher Herausforderung, etwa im 3D-Bereich, bin ich mit dem Ergebnis sehr zufrieden und sehe in den entwickelten Modellen einen echten Mehrwert für Lehre und Lernen in der Festigkeitslehre.

11 Anhang

11.1 FEM-Berechnung und Ergebnisse

11.1.1 Grundprinzip

In der Finite-Elemente-Methode folgt die Berechnung von Spannungen einem systematischen Ablauf: Ausgehend vom Verschiebungsfeld werden zunächst Verzerrungen und daraus Spannungen berechnet. Die Hauptspannungen, die für die Bauteilbewertung entscheidend sind, ergeben sich als Eigenwerte des Spannungstensors (Skrotzki, 2022).

Basic equations of 2D linear elasticity

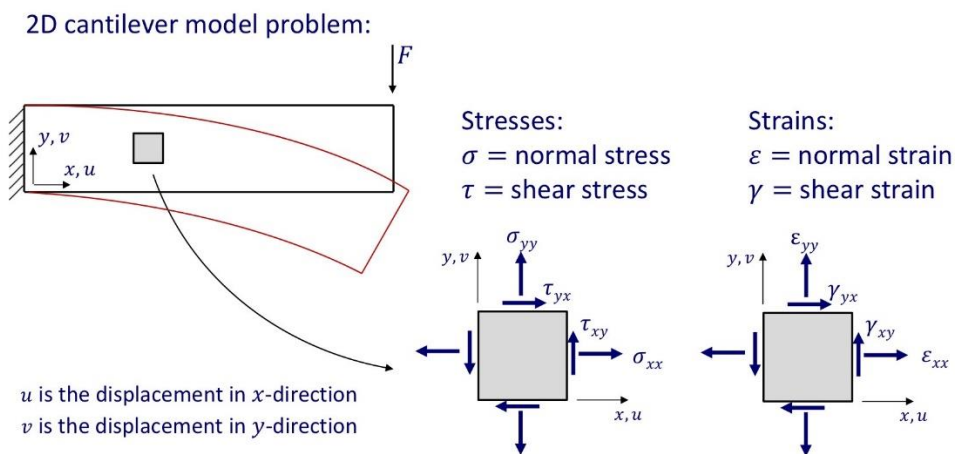


Abbildung 78 2D Darstellung eines ebenen Finite-Elements mit linearem Verschiebungsfeld (Grätsch, 2024)

11.1.2 Exemplarische Berechnung

Betrachten wir ein ebenes Finite Element mit einem linearen Verschiebungsansatz.

11.1.3 Verschiebungsfeld

Das Verschiebungsfeld wird durch folgende Ansatzfunktionen beschrieben (numpedia, 2025); (Klein, 2015); (Reck, 2018).

$$u(x, y) = u_0 + e_{x,x} \cdot x + e_{x,y} \cdot y \quad (46)$$

$$v(x, y) = v_0 + e_{y,x} \cdot x + e_{y,y} \cdot y \quad (47)$$

Dieses beschreibt, wie sich jeder Punkt (x, y) im Element in x-Richtung (u) und y-Richtung (v) verschiebt. Die Koeffizienten haben folgende Bedeutung:

$u(x, y)$: Verschiebung in x-Richtung an einem Punkt (x, y) .

$v(x, y)$: Verschiebung in y-Richtung an einem Punkt (x, y) .

u_0, v_0 : Starrkörperverschiebung (nicht relevant für Spannungsberechnung)

$e_{x,x}, e_{y,y}$: Dehnungskoeffizienten in x- bzw. y-Richtung

$e_{x,y}$, $e_{y,x}$: Koeffizienten der Schubverzerrung.

Mit den korrigierten Koeffizienten (Baumgart, 2025).

$$\begin{aligned}e_{x,x} &= \frac{1}{800} \\e_{y,y} &= -\frac{1}{800} \\e_{x,y} &= -\frac{\sqrt{3}}{500} \\e_{y,x} &= \frac{e_{x,y}}{4} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{500}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2000}\end{aligned}$$

11.1.4 Berechnung der Verzerrungen

Aus dem gegebenen Verschiebungsfeld **Gl.Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.** und **Gl.Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.** lassen sich die Komponenten des Verzerrungstensors ε ableiten. Die Verzerrungen werden durch die partiellen Ableitungen der Verschiebungen nach den Koordinatenrichtungen bestimmt. Die allgemeine Formel für die Verzerrungskomponenten lautet (Huber, 2023) .

$$\varepsilon_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{du_i}{dx_j} + \frac{du_j}{dx_i} \right) \quad (48)$$

Hierbei handelt es sich um den linearen Verzerrungstensor, der die Dehnungen und Scherungen in einem Material beschreibt. Die Verzerrungen sind in diesem Fall konstant, da mit speziellen linearen Verschiebungsansätzen gearbeitet wird (Mittelstedt, Technische Mechanik 2: Elastostatik, 2022).

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{x,x} & \frac{\varepsilon_{x,y} + \varepsilon_{y,x}}{2} \\ \frac{\varepsilon_{x,y} + \varepsilon_{y,x}}{2} & \varepsilon_{y,y} \end{pmatrix} \quad (49)$$

Umsortieren liefert die Dehnungs als Spaltenmatrix (Reck, 2018).

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{x,x} \\ \varepsilon_{y,y} \\ \frac{\varepsilon_{x,y} + \varepsilon_{y,x}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{800} \\ 1 \\ -\frac{1}{800} \\ -\frac{5\sqrt{3}}{2000} \\ \frac{2000}{2} \end{pmatrix} \quad (50)$$

11.1.5 Berechnung der Spannungen

Mit den Materialparametern $E = 100000 \text{ MPa}$ (Elastizitätsmodul) und $\nu = 0,25$ (Poisson-Zahl) gilt für den ebenen Spannungszustand folgende Beziehung (Reck, 2018).

$$\sigma = \bar{E} \cdot \varepsilon \quad (51)$$

Hierbei ist $\bar{E}$ die reduzierte Steifigkeitsmatrix, die wie folgt definiert ist (Reck, 2018).

$$\bar{E} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu) \end{pmatrix} \quad (52)$$

Die Spannungskomponenten werden dann durch Multiplikation der reduzierten Steifigkeitsmatrix mit den Verzerrungskomponenten berechnet (Klein, 2015)

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu) \end{pmatrix} \cdot \varepsilon_{x,x} \quad (53)$$

$$\sigma_{xx} = \left(\frac{100000 \text{ MPa}}{1 - 0,25^2} \cdot (1 - 0,25) \right) \cdot \frac{1}{800} = 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu) \end{pmatrix} \cdot \varepsilon_{y,y} \quad (54)$$

$$\sigma_{yy} = \left(\frac{100000 \text{ MPa}}{1 - 0.25^2} \cdot (1 - 0.25) \right) \cdot \frac{-1}{800} = -100 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu) \end{pmatrix} \cdot \frac{\varepsilon_{x,y} + \varepsilon_{y,x}}{2} \quad (55)$$

$$\tau_{xy} = \left(\frac{100000 \text{ MPa}}{1 - 0.25^2} \cdot (1 - 0.25) \right) \cdot \frac{-5\sqrt{3}}{2000} = -100 \cdot \sqrt{3} \text{ MPa}$$

Der Spannungstensor ergibt sich somit zu:

$$\sigma = 100 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

11.1.6 Berechnung der Hauptspannungen

Die Hauptspannungen (σ_1, σ_2) sind die Eigenwerte des Spannungstensors σ . Diese erhält man durch Lösen der charakteristischen Gleichung (Skrotzki, 2022) (Wikipedia, Cauchy stress tensor, 2025).

$$|\sigma - \lambda I| = 0 \quad (56)$$

Die Eigenwerte λ ergeben sich aus der Lösung der quadratischen Gleichung:

$$\begin{vmatrix} 100 \text{ MPa} - \lambda & -173.2 \text{ MPa} \\ -173.2 \text{ MPa} & -100 \text{ MPa} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$(100 \text{ MPa} - \lambda)(-100 \text{ MPa} - \lambda) - ((173.2 \text{ MPa}) \cdot (-173.2 \text{ MPa})) = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 40000 \text{ MPa} = 0$$

Lösung nach λ

$$\lambda = \pm \sqrt{40000} \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = +\sqrt{40000} = +200 \text{ MPa (Zug spannung)}$$

$$\sigma_2 = -\sqrt{40000} = -200 \text{ MPa (Druck spannung)}$$

Die dritte Hauptspannung ist in diesem Fall - für den ebenen Spannungszustand

$$\sigma_3 = 0$$

11.1.7 Hauptspannungsrichtungen

Die Hauptspannungsrichtungen sind die Eigenvektoren des Spannungstensors und ergeben sich durch Lösen des Gleichungssystems :

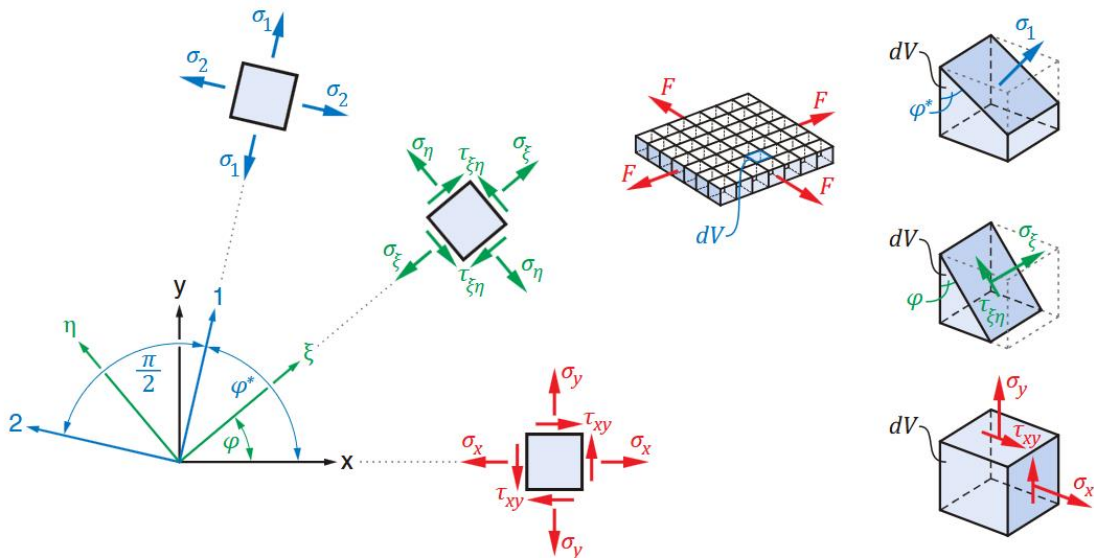


Abbildung 79 Hauptnormalspannungen Winkel (Spura, 2019)

$$(\sigma - \lambda I)v = 0 \quad (57)$$

Für beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 200 \text{ MPa}$ und $\lambda_2 = -200 \text{ MPa}$

$$\begin{pmatrix} 100 \text{ MPa} - \lambda & -173,2 \text{ MPa} \\ -173,2 \text{ MPa} & -100 \text{ MPa} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

11.1.8 Vergleichsspannung nach von Mises

Die von-Mises-Vergleichsspannung wird zur Bewertung der Bauteilbeanspruchung verwendet und berechnet sich aus den Hauptspannungen (Arndt, Brüggemann, & Ihme, 2019).

$$\sigma_v = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (58)$$

$$\sigma_v \approx 350 \text{ MPa}$$

11.2 Lösung Aufgabe 1 und 2 vollständig



Acrobat-Dokument

11.3 Einsatz von KI (ChatGPT/DeepSeek) zur Unterstützung von Teilproblemen in dieser Arbeit

In dieser Arbeit wurde KI verwendet, um komplexe technische Probleme besser zu analysieren wie z.B. den Radius der Misesschen Fließfläche.

11.3.1 Beispielhafte Vorgehensweise der Kommunikation mit ChatGPT:

(1) Klare Aufgabenstellung formulieren:

Ich habe die Hauptspannungen $\sigma_1 = 390 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = 0 \text{ MPa}$, $\sigma_3 = -390 \text{ MPa}$. In GeoGebra habe ich einen Zylinder entlang der hydrostatischen Achse modelliert, dessen Radius dem zulässigen Schubspannungswert $\tau_{\text{zul,SH}}$ entspricht. Zusätzlich habe ich ein Sechseck mit einer maximalen Vergleichsspannung von $\text{Re} = 690 \text{ MPa}$ im Inneren konstruiert. Daraus ergeben sich $\sigma_{v,\text{Mises}} = 675.5 \text{ MPa}$, woraus sich ein Sicherheitsfaktor $S_{v,\text{Mises}} = 1$ ergibt. Gleichzeitig ergibt sich aus dem Schubspannungsansatz $S_{v,\text{SH}} = 0.8$ bei einem zulässigen Wert von 780 MPa . Nun frage ich mich: Liegt der Spannungsvektor außerhalb des Sechsecks, aber noch innerhalb des Zylinders, oder ist auch der Zylinder überschritten? In der grafischen Darstellung in GeoGebra scheint der Spannungsvektor den Zylinder ebenfalls zu durchdringen, obwohl das laut σ_v nicht der Fall sein sollte.

Zur Modellierung der hydrostatischen Achse wurden folgende Punkte definiert:

$$A_{\text{hydroachse}} = \text{Punkt}(\{\sigma_m - L_{\text{Zylinder}} - 100, \sigma_m - L_{\text{Zylinder}} - 100, \sigma_m - L_{\text{Zylinder}} - 100\})$$

$$B_{\text{hydroachse}} = \text{Punkt}(\{\sigma_m + \frac{L_{\text{Zylinder}}}{2} + 100, \sigma_m + \frac{L_{\text{Zylinder}}}{2} + 100, \sigma_m + \frac{L_{\text{Zylinder}}}{2} + 100\})$$

Dabei ist L_{Zylinder} eine frei wählbare Skalierungslänge zur Definition der Zylinderhöhe entlang der hydrostatischen Achse.

(2) Antwort der KI:

ChatGPT/DeepSeek konnte zunächst erklären, dass der scheinbare Widerspruch zwischen einem Sicherheitsfaktor $S_v = 1$ und einer grafischen Durchdringung des Von-Mises-Zylinders auf zwei mögliche Ursachen zurückzuführen ist:

- Der Radius des Zylinders wurde nicht korrekt als $r = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot R_e$ berechnet.
- Die hydrostatische Achse wurde eventuell nicht korrekt durch den Mittelspannungspunkt σ_m geführt, was zu einer fehlerhaften Ausrichtung im 3D-Raum führt

(3) Zweite Frage an die KI:

Ich habe bestätigt, dass die hydrostatische Achse korrekt durch den Mittelspannungspunkt σ_m geführt wurde und habe dann eine Frage gestellt (Ich brauche die vollständige Herleitung der Formel $r = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot R_e$)

Antwort:

Die KI konnte die Herleitung mathematisch korrekt und schrittweise liefern. Es wurde nachvollziehbar erklärt.

(4) Dritte Frage an die KI:

Wenn die bisherigen Ergebnisse korrekt sind, bitte ich darum, mir einen zusammenfassenden Bericht im Word-Format zu erstellen, der folgende Punkte enthält:

Was war das Problem?

Wie wurde es gelöst?

Erläuterung der Formel-Herleitung für $r = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot R_e$

(5) Antwort:

Daraufhin erstellte die KI einen strukturierten Bericht in Form eines Word-Dokuments mit klarer Problemstellung, Lösungsschritten, relevanten Herleitungen (siehe Anfang)



Acrobat-Dokument

12 Literaturverzeichnis

- A.Lagace, P. (2008). *Unit M2.3 (All About) Strain*. Unified Engineering” Department of Aeronautics and Astronautics Massachusetts Institute of Technology.
- Arndt, K.-D., Brüggemann, H., & Ihme, J. (2019). *Festigkeitslehre für Wirtschaftsingenieure*. Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, German.
- Baumgart, A. (27. 02 2025). *Numpedia*. Von https://numpedia.rzbt.haw-hamburg.de/index.php?title=Gel%C3%B6ste_Aufgaben/T401 abgerufen
- Beckmann, K. Z. (2013). *Grundlagen des Bauingenieurwesens*. Berlin Heidelberg.
- Boley, C. (2012). *Handbuch Geotechnik*. Springer Fachmedien Wiesbaden.
- Deutsche Biographie (ADB/NDB)*. (1994). Von <https://daten.digital-sammlungen.de/0001/bsb00016335/images/index.html?seite=718> abgerufen
- Ferdinand P. Beer & E. Russell Johnston, J. T. (2015). *Mechanics of Materials*. New York.
- GeoGebra. (2025). *GeoGebra*. Von <https://www.geogebra.org/about> abgerufen
- Grätsch, T. (2024). *FEM*. HAW Hamburg.
- Gross.Hauger, & Schröder.Wall. (2012). *Technische Mechanik2*. pringer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Hofstetter, H. A. (2013). *Festigkeitslehre*. Berlin Heidelberg .
- Huber, A. (2023). *Technische Mechanik2-Elastostatik*. Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany.
- Institute for Materials, Technologies and Mechanics*. (31. 01 2020). Abgerufen am 14. 03 2025 von <https://journals.ub.ovgu.de/index.php/techmech/article/view/1667/1632>
- joergens.mi. (29. 07 2014). *WIKIMEDIA COMMONS*. Abgerufen am 14. 03 2025 von https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wesselburen_jm21085.jpg
- juhre, D. (2005). *Technische MECHANIK*. Magdeburg.
- Kienzler.Schröder. (2009). *Einführung in die Höhere Festigkeitslehre*. Berlin Heidelberg.
- Klein, B. (2015). *FEM Grundlagen und Anwendungen der Finite-Element-Methode im Maschinen-und Fahrzeugbau*. Calden, Deutschland.
- Kloss-Grote, B. (2025). *Konstruktive Festigkeit*. Skript Hamburg-HAW.
- Knittel, G. (1994). *Deutsche Biographie*. Abgerufen am 14. 03 2025 von https://www.deutsche-biographie.de/sfz64204.html#ndbcontent_zitierweise
- Mahnken. (2015). *Lehrbuch der Technischen mechanik*. Berlin Heidelberg.

- Mittelstedt, C. (2021). *Rechenmethoden des Leichtbaus*. Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany.
- Mittelstedt, C. (2022). *Technische Mechanik 2: Elastostatik*. Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany.
- Nasdala, L. (2022). *Festigkeitslehre Verständnisaufgaben*. Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany.
- numpedia*. (27. 02 2025). Von https://numpedia.rzbt.haw-hamburg.de/index.php?title=Gel%C3%B6ste_Aufgaben/T401 abgerufen
- O.C. Zienkiewicz, R. T. (2014). *Isoparametric Finite Element*. USA.
- Österreicher, F. (2014). *GEOMETRIE FÜR LEHRAMT*. Salzburg.
- R.C.HIBBELER. (2014). *Mechanics of Materials*. Manufactured in the United States of America.
- Reck, M. H. (2018). *Kompaktkurs Finite Elemente für Einsteiger*. Wiesbaden, Germany.
- Skrotzki, M. H. (2022). *Grundlagen des Maschinenbaus und ergänzende fächer für Ingenieure*. Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany.
- Spura, C. (2019). *Technische Mechanik 2. Elastostatik*. Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany.
- Stephen P.Timoshenko. (1953). *History of strength of materials*. United States of America.
- Sudert, B. (2022). *Baustatik*. Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany.
- T.H.G.Megson. (2007). *Aircraft Structures for engineering students*.
- Technikermathe.de*. (kein Datum). Abgerufen am 03 2025 von https://technikermathe.de/tm2-mohrscher-spannungskreis-hauptspannungen?utm_source=chatgpt.com
- Wandigner. (2014). *Höhere festigkeitslehre*.
- Wikipedia* , *Cauchy stress tensor*. (24. 02 2025). Von https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy_stress_tensor#Principal_stresses_and_stress_invariants abgerufen
- Wikipedia*. (15. November 2024). Von https://de.wikipedia.org/wiki/Christian_Otto_Mohr abgerufen
- Wikipedia*. (26. 04 2024). Abgerufen am 03 2025 von https://de.wikipedia.org/wiki/Mohrscher_Spannungskreis?utm_source=chatgpt.com

Wikipedia. (08. 4 2025). *Wikipedia*. Von <https://de.wikipedia.org/wiki/Kreiswinkel> abgerufen

WikiPedia, G. (04. April 2025). *WikiPedia*. Von https://de.wikipedia.org/wiki/GeoGebra#cite_note-3 abgerufen