

Hochschule für angewandte Wissenschaften Hamburg
Fakultät Wirtschaft und Soziales
Studiengang Bildung und Erziehung in der Kindheit
Prof. Dr. Andreas Voss, Erstprüfer
Prof. Dr. Dagmar Berge-Winkels, Zweitprüferin



Über die Entwicklung kognitiver Denkstrukturen unter besonderer Betrachtung der mathematischen Kompetenz im vorschulischen Alter

- Bachelor-Thesis -
zur Erlangung des akademischen Grades Bachelor of Arts (B.A.)
im Studiengang
“Bildung und Erziehung in der Kindheit“
an der Hochschule für angewandte Wissenschaften

vorgelegt von: Friedemann Wahl

Eingereicht am: 31. August 2011

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Mathematik: Der Versuch einer Definition	5
2.1	Bereiche der Mathematik	5
2.2	Arithmetik	6
2.2.1	Natürliche, ganze und rationale Zahlen	6
2.2.2	Arithmetische Operationen	7
3	Wie entsteht mathematisches Denken?	8
3.1	Entwicklung nach Piaget	8
3.1.1	Assimilation, Akkomodation und Äquilibration	9
3.1.2	Das sensomotorische Stadium	9
3.1.2.1	Stufe 1 (Geburt bis 1 Monat)	9
3.1.2.2	Stufe 2 (1 bis 4 Monat)	10
3.1.2.3	Stufe 3 (4 bis 8 Monate)	10
3.1.2.4	Stufe 4 (8 bis 12 Monate)	10
3.1.2.5	Stufe 5 (12 bis 18 Monate)	11
3.1.2.6	Stufe 6 (18 bis 24 Monate)	11
3.1.3	Das vor-operative Stadium (2 bis 7 Jahre)	12
3.1.4	Das konkret-operative (7 bis 12 Jahre) und das formal-operative Stadium (12 Jahre und älter)	13
3.1.5	Kritik an Piagets Theorie	14
3.2	Theorie der Informationsverarbeitung	14
3.2.1	Die Struktur der Informationsverarbeitung	16
3.2.2	Die Aufmerksamkeit	17
3.2.3	Das Gedächtnis	18
3.2.4	Die Kategorisierung	18
4	Neuere Untersuchungen der Entwicklung mathematischer Fähigkeiten in der frühen Kindheit	19
4.1	Das Zählen	20
4.1.1	Das Zählprinzip nach Gelman und Gallistel	21
4.2	Die Ordinalität	22
4.3	Die Arithmetik	23
5	Förderung mathematischer Kompetenz im institutionellen Kontext	24
5.1	Zahlenland	25
5.2	Mathe 2000	26
5.3	Ergebnisse der Evaluation von „Zahlenland“ und „Mathe 2000“	27
6	Mathematik und die kognitive Entwicklung	28
7	Literaturverzeichnis	30
8	Anhang	33

Über die Entwicklung kognitiver Denkstrukturen unter besonderer Betrachtung der
mathematischen Kompetenz im vorschulischen Alter

„Das Buch der Natur ist mit mathematischen Symbolen geschrieben. Genauer: Die Natur spricht die Sprache der Mathematik: die Buchstaben dieser Sprache sind Dreiecke, Kreise und andere mathematische Figuren.“

(Galileo Galilei)

1 Einleitung

„Heute beschäftigen wir uns mit Mathematik. Da zählen wir im Morgenkreis mal durch.“ Dieser sinngemäß bei der Vorbereitung des Kitaalltags gefallene Satz, blieb mir für lange Zeit in Erinnerung. Ich wage nicht zu behaupten, dass die Kompetenz des Zählens nicht von hoher Bedeutung für die Entwicklung der Kinder ist. Sie hat jedoch nur am Rande etwas mit Mathematik zu tun. Die Differenzierung zwischen dem was Mathematik von der Kunst des Zählens unterscheidet, stellt einen Aspekt der folgenden Arbeit dar.

Dafür werde ich in Kapitel 2 darstellen, wie Mathematik beschrieben wird und im Weiteren diese von der Arithmetik abgrenzen. Um diese Abgrenzung vornehmen zu können werde ich zunächst die Arithmetik kurz definieren.

Die Beschreibung dessen, was mathematisches Denken ausmacht, führt unweigerlich zur kognitiven Entwicklung. Diese werde ich in Kapitel drei beschreiben. Zwei Theorien, wie Kognition beim Menschen entsteht werde ich vorstellen. Zum einen die Theorie von Jean Piaget (1896 – 1980), die ausführlich beschreibt, wie sich kognitive Denkstrukturen bei Kindern ausbilden und zum anderen die Theorie der Informationsverarbeitung.

Die neueren Untersuchungen zur Entwicklung und Entstehung mathematischer Kompetenz werde ich in Kapitel 4 beschreiben. Der Fokus liegt dabei im Gegensatz zu den Forschungen Piagets nicht auf der allgemeinen kognitiven Entwicklung, sondern alleine auf der Herausbildung der mathematischen Kompetenz.

Diese Arbeit soll die theoretischen Betrachtung der Entwicklung kognitiver und mathematischer Kompetenzen im vorschulischen Alter zum Inhalt haben. Nichtsdestotrotz werde ich in Kapitel 5 auf zwei Förderprogramme hinweisen, die sich mit den mathematischen Kompetenzen in der frühen Kindheit beschäftigen. Dabei wird das Augenmerk auf der Evaluation einer Kurzzeitintervention liegen, während die detaillierte Beschreibung der einzelnen Konzepte in ihrer Gesamtheit nicht Gegenstand dieser Arbeit sein wird.

Im letzten Abschnitt werde ich die zuvor beschriebenen Erkenntnisse der Kognitionswissenschaften mit den Anforderungen zusammenführen, die die Mathematik an das Denken der Menschen stellt.

2 Mathematik: Der Versuch einer Definition

Viele Menschen der unterschiedlichsten Bildungsschichten sind sich in einer Sache einig. Sie verstünden nichts von Mathematik. Doch was verbirgt sich hinter diesem Begriff, der so selbstverständlich benutzt und mit ebenso viel Bewunderung wie Abscheu verwendet wird? Meist werden Ausdrücke wie Zahlen oder Rechnen damit verknüpft. In der Enzyklopädie Brockhaus wird die moderne Mathematik beschrieben, als „die Wissenschaft von den abstrakten Strukturen und logischen Folgerungen, die durch Festlegung von einigen Grundannahmen über Relationen und Verknüpfungen zwischen Elementen einer Menge beliebiger Größen bestimmt wird.“ (Brockhaus, 2006 Bd. 18, S. 5) Erstaunlicher Weise taucht weder der Begriff Rechnen noch Zahl darin auf. Gleichzeitig heißt es weiter, sei es umstritten, „ob diese Definition die volle Breite und Vielfalt der Mathematik widerspiegelt“ (Brockhaus, 2006 Bd. 18, S. 5)

Eine weitere Quelle auf der Suche nach einer Definition des mathematischen Begriffs stellt das Internet Lexikon wikipedia dar. Dort heißt es, Mathematik sei „die Wissenschaft, welche aus der Untersuchung von Figuren und dem Rechnen mit Zahlen entstand. Für Mathematik gibt es keine allgemein anerkannte Definition; heute wird sie üblicherweise als eine Wissenschaft beschrieben, die selbst geschaffene abstrakte Strukturen auf ihre Eigenschaften und Muster untersucht.“ (wikipedia 2011, Mathematik) In dieser Beschreibung erscheint der Begriff des Musters, der von vielen Mathematikern gerne verwendet wird. Der britische Mathematiker Kevin Devlin beschreibt die Mathematik als „die Wissenschaft von den Mustern“ (Devlin, 2003. S. 23), weist jedoch daraufhin, dass der Begriff auf den englischen Mathematiker Walter Sawyer und dessen Veröffentlichung „Prelude to Mathematics“ von 1955 zurückgeht (Devlin 2003. S. 95) Devlin geht noch einen Schritte weiter, da ihm der Begriff des Musters zuviel Raum für Missverständnisse bietet und bietet eine erweiterte Definition an: „Mathematik ist die Wissenschaft von Ordnung, Mustern, Strukturen und logischen Beziehungen.“ (Devlin 2003. S. 97)

2.1 Bereiche der Mathematik

Im Allgemeinen wird die Mathematik aus praktischen Gründen in zwei Hauptarme aufgeteilt. Die reine und die angewandte Mathematik. Die reine Mathematik umfasst dabei die Teilgebiete Arithmetik (als Vorstufe zur Algebra), Zahlentheorie, Analysis, Geometrie, Topologie, Mengenlehre und die Grundlagenforschung. Die angewandte Mathematik setzt die Erkenntnisse der reinen Mathematik um und umfasst die Wissenschaften der Physik, Chemie, Astronomie, Vermessungstechnik, Statistik, Versicherung, Geldlehre und andere. (vergl. Brockhaus, 1971 Bd. 12 S. 252)

2.2 Arithmetik

Die Arithmetik als Teilgebiet der reinen Mathematik stellt trotz ihrer theoretischen Zugehörigkeit zur reinen Mathematik einen Bereich dar, der sehr viele praktische Anwendungsmöglichkeiten beinhaltet. Sie stellt selbst wiederum nur einen Teil, beziehungsweise eine Vorstufe, der Algebra dar. Die Arithmetik beschränkt sich jedoch auf die Benutzung von Zahlen, während die Algebra deutlich komplexere Bereiche beinhaltet und sich „mit durch Verknüpfungen definierten Strukturen befasst“ (Meyers Lexikon 1969 Bd. 1 S. 90) Die klare Abgrenzung des Begriffs der Arithmetik von dem der Mathematik ist für das Verständnis des Entstehens mathematischer Strukturen bei Kindern von großer Bedeutung. Die Fähigkeit Mathematik betreiben zu können, setzt voraus, dass mathematische Logik, Muster und Strukturen erkannt werden können. Denn nur diese basalen Kompetenzen ermöglichen uns und damit unseren kognitiven Fähigkeiten einzelne Ziffern, Zahlen und Rechenoperationen in einen logischen und damit kausal sinnvollen Zusammenhang stellen zu können.

Diese Arbeit soll sich in ihrer Hauptsache dem Entstehen der kognitiven Strukturen im Allgemeinen und der mathematischen Fertigkeiten im Speziellen widmen, die als Basis für ein erfolgreiche Benutzung der Zahlen und damit der Arithmetik im weiteren Sinne unabdingbar sind. Nichtsdestotrotz soll an dieser Stelle eine kurze mathematische Definition der Arithmetik Eingang in die Arbeit finden, da sie die Muster und Strukturen verschriftlicht, die die gedanklichen mathematischen Strukturen erschaffen haben.

2.2.1 Natürliche, ganze und rationale Zahlen

Die natürlichen Zahlen sind definiert über:

$$\mathbb{N} = 1, 2, 3, \dots$$

Dieser Zahlenraum umfasst die Menge aller ganzen Zahlen > 0 . (nicht negative ganze Zahlen)

Die ganzen Zahlen sind definiert über:

$$\mathbb{Z} = \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

In diesem Zahlenraum befinden sich alle ganzen Zahlen.

Die natürlichen und ganzen Zahlen sind aus dem Bedürfnis heraus entstanden Objekte abzuzählen und zu ordnen. Sie sind beide unendlich.

Die rationalen Zahlen sind definiert über:

$$\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{p}{q} \text{ mit } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \text{ und } q \neq 0\}$$

Dieser Zahlenraum umfasst neben allen ganzen Zahlen auch gebrochenen Zahlen zwischen zwei nebeneinander liegenden ganzen Zahlen. Das Taschenbuch der Mathematik von Bronstein et al. formuliert die Definition wie folgt:

- „Die Menge der rationalen Zahlen ist unendlich.
- Die Menge ist geordnet, d.h., für je zwei verschiedene rationale Zahlen a und b kann man angeben, welche von beiden kleiner als die andere ist.
- Die Menge ist überall dicht, d. h., zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen a und b ($a < b$) existiert wenigstens eine rationale Zahl c ($a < c < b$). Daraus folgt, dass zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen unendlich viele weitere rationale Zahlen liegen.“ (Bronstein 2008, S. 1)

Diese drei Zahlenräume sind diejenigen mit denen Arithmetik betrieben wird. Mit diesen unendlich vielen einzelnen Zahlen lassen sich sämtliche arithmetischen Operationen durchführen.

2.2.2 Arithmetische Operationen

„Die arithmetischen Operationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) mit zwei beliebigen rationalen Zahlen sind stets möglich und liefern im Ergebnis wieder eine rationale Zahl. Eine Ausnahme davon ist die Division durch Null, die unmöglich ist. . . . Wenn sich der Nenner Null nähert, wächst der Quotient absolut genommen über alle Grenzen.“ (Bronstein, 2008. S. 1)

Diese in abstrakter mathematischer Weise ausgedrückte Beschreibung, dessen was sich hinter den oft simplen Berechnungen des Alltags verbirgt, zeigt, dass hinter all den praktischen Dingen eine präzise definierte Mathematik steht, die es uns ermöglicht alltägliche Berechnungen anzustellen. Gleichzeitig sind es die Symbole und arithmetischen Operationen, diejenigen Mittel, die es uns ermöglichen mathematische Gedanken nach exakt definierten und allgemein anerkannten Regeln ausdrücken und festhalten zu können. Somit kann die Arithmetik als ein Instrument beschrieben werden, das uns hilft einen Teilbereich der Mathematik zu verschriftlichen und im folgenden durch dieses Instrument alltägliche Dinge zu berechnen. Sie sind jedoch nicht gleichzusetzen mit Mathematik.

Das Prinzip des Zählens – was der arithmetischen Operation der Addition, und zwar wiederholt um den Wert 1 entspricht – ist erlernbar. Es folgt einem fortwährenden Prozess.

Über Sinn für Anzahlen oder, wie Kristin Krajewski es ausdrückt, „eine unscharfe Mengenbewusstheit, die sich in der Wahrnehmung und Unterscheidung kontinuierlicher Größen zeigt“ (Krajewski, 2005, S. 52) verfügen Kinder bereits von Geburt an. Zahlen und Zählen jedoch wird erlernt. Dies verdeutlicht das Beispiel der Unendlichkeit. Es mag auch für Schimpansen erlernbar sein Anzahlen zu unterscheiden. Aber die Fähigkeit „die Reihe der Zahlen bis beliebig weit fortzusetzen und beliebig große Mengen von Objekten zu zählen“ (Devlin, 2003, S. 26) ist nur für den Menschen möglich. Doch welche kognitiven Strukturen ermöglichen es uns die Reihe der Zahlen bis zur Unendlichkeit weiter zu denken?

Genau diese Strukturen sind es die Mathematik von der Arithmetik unterscheiden. Es ist eine arithmetische Aufgabe zu Zählen, aber die abstrakte Denkleistung der Unendlichkeit ist eine mathematische.

3 Wie entsteht mathematisches Denken?

Welche Denkstrukturen sind es, die es uns ermöglichen mathematisch zu denken? Und wann entstehen diese? Zum Verständnis dessen, wie sich das Denken entwickelt und welche Prozesse wann von unserem Gehirn leistbar sind, hat Jean Piaget Mitte des 20. Jahrhunderts Grundlagenforschung betrieben und gilt bis heute als der bedeutendste Forscher in diesem Bereich. Auch wenn heutzutage einige seiner Erkenntnisse nicht mehr allen neueren Untersuchungen standhalten, sind seine Veröffentlichungen zur Entwicklung des kognitiven Denkens nach wie vor von Bedeutung. Neben der Theorie Piagets möchte ich eine weitere Theorie zur Entwicklung der kognitiven Entwicklung bei Kindern erläutern; die Theorie der Informationsverarbeitung.

3.1 Entwicklung nach Piaget

Die Theorie Jean Piagets ist geprägt von zwei Säulen. Die eine stellt die Art und Weise der Wissensaneignung und die andere die Stufentheorie dar. Die Erlangung neuen Wissens erfolgt nach den Prinzipien der Assimilation, Akkomodation und der Äquilibration. Die Stufentheorie beschreibt vier Stadien der kognitiven Entwicklung: das sensumotorische Stadium, (0 – 2 Jahre) das vor-operatorische Stadium, (2 – 7 Jahre) das konkret-operatorische Stadium (7 – 12 Jahre) und das formal-operatorische Stadium (ab 12 Jahre). Das erste Stadium unterteilt er, ob der Menge der einzelnen in dieser Phase sich vollziehenden Entwicklungsschritte in sechs Unterstufen.

Die beiden letzten Stadien sollen in dieser Arbeit nur kurz beschrieben werden, da der Kern dieser Arbeit die Entwicklung bis zum Eintritt in die Schule erläutern soll.

3.1.1 Assimilation, Akkomodation und Äquilibration

Piaget beschreibt die Assimilation als denjenigen Prozess der einen neues Objekt in ein bekanntes Schema einordnet. Als Beispiel kann es passieren, dass ein Kind, das ganz klar Frauen mit langen und Männer mit kurzen Haaren verknüpft, eine Frau mit kurzen Haaren als Mann bezeichnen. Die Frau wurde somit aufgrund der Kategorisierung nach der Länge der Haare in das Mann-Konzept eingefügt.

Die Akkomodation ist der Prozess, der alte Konzepte aufgrund neuer Erkenntnisse „überarbeitet“ und dem neuen Wissensstand anpasst. Um bei obigem Beispiel zu bleiben, würde dies bedeuten, dass, nach einer Erklärung seitens eines anderen Kindes oder eines Erwachsenen, das Kind erkennt, dass es auch Frauen mit kurzen Haaren gibt. Das Bild des Kindes von einer Frau und die Kategorien nach denen es in Zukunft den Begriff Frau identifizieren wird, haben sich nun geändert.

Somit ist es das Zusammenspiel von Assimilation und Akkomodation das den Erkenntnishorizont der Kinder erweitert. Diese Kombination bezeichnet Piaget als Äquilibration. „Äquilibration . . . ist der Prozess, durch den Kinder (und andere Menschen) Assimilation und Akkomodation ausbalancieren, um stabile Verstehensprozesse zu schaffen“ (Siegler, 2005, S. 182) Stellt ein Kind nach einer neuen Erfahrung fest, dass diese nicht in den vorhandenen Erkenntnisstand passt befindet sich in einem Zustand des Disäquilibriums, einem Zustand der Unausgewogenheit. „Schließlich entwickeln Kinder ein differenzierteres Verständnis, das die Unzulänglichkeiten der bisherigen Verstehensstrukturen überwindet. Dieses neue Verstehen ermöglicht ein stabiles Äquilibrium in dem Sinne, dass damit nun ein weiterer Bereich neuer Erfahrungen richtig eingeordnet werden kann. (Siegler, 2005, S. 183)

3.1.2 Das sensomotorische Stadium

Die Verhaltensforschung verdankt es Jean Piaget, dass bereits Kindern im Alter von unter zwei Jahren Intelligenz zugesprochen wird. Er begriff als einer der ersten Kinder als aktive Gestalter ihrer Umwelt. Er interpretierte viele typische Verhaltensmuster der Kinder neu und gestand ihnen von Beginn ihres Lebens an eine Selbstbildungskompetenz zu. In Anbetracht der Tatsache, dass sich das Denken in den ersten zwei Lebensjahren derart rasant entwickelt, unterteilte Piaget das sensomotorische Stadium in 6 einzelne Stufen.

3.1.2.1 Stufe 1 (Geburt bis 1 Monat)

Im ersten Monat reagieren Kinder reflexartig auf viele äußere Reize. Sie folgen mit den Augen Objekten, die sich durch in Sichtbereich bewegen, saugen mit dem Mund an Objekten die sie zu fassen bekommen, greifen nach Dingen oder drehen den Kopf in die entsprechende Richtung, wenn sie Geräusche wahrnehmen. All diese einfachen Reflexe und Wahrnehmungsfähigkeiten verstand Piaget als Werkzeuge für den Aufbau der Intelligenz. (Siegler, 2005)

Bereits innerhalb des ersten Monats beginnen die Kinder damit diese Reflexe den Gegebenheiten anzupassen. Sie saugen an ihren Fingern anders als an der Brustwarze der Mutter und zeigen damit bereits die Fähigkeit auf die Veränderungen der Umwelt zu reagieren und die neuen Erkenntnisse in ihre Erfahrungen einzugliedern.

3.1.2.2 Stufe 2 (1 bis 4 Monat)

Die zweite Stufe ist geprägt, von einer Differenzierung der Reflexe und Zusammenfassung derselben zu größeren Einheiten.

„so werden z. B. auch im Bereich des Saugens die Reflexschemata durch neue Bewegungen bereichert, derart, dass z. B. der Daumen systematisch in den Mund gesteckt wird. Genauso ist es, wenn reflexartiges Schreien sich differenziert in Geschrei und Lalllaute, die für sich selbst reproduziert werden, wenn das Sehen sich weiter entwickelt zu Akkomodation an die Bewegung der Objekte usw.“ (Piaget, 1975a, S. 26)

3.1.2.3 Stufe 3 (4 bis 8 Monate)

In dieser Phase, die Piaget auch als die Zwischenstufe zur Objektpermanenz¹ bezeichnet, beginnen sich die Kinder zusehends für Dingen zu interessieren, die sich in ihrer unmittelbaren Umwelt befinden. Er beschreibt Verhaltensweisen, die in dieser Stufe notwendigerweise erlernt werden müssen, um in der folgenden 4. Stufe die kognitive Leistung der Objektpermanenz erbringen zu können.

„1. die 'visuelle Akkomodation an schnellen Bewegungen', 2. das 'unterbrochene Greifen', 3. die 'differenzierte Zirkulärreaktion', 4. die 'Wiederherstellung eines unsichtbaren Ganzen von einem sichtbaren Teil aus', 5. die 'Beseitigung von Hindernissen, die die Wahrnehmung behindern'.“ (Piaget, 1975a, S. 24)

3.1.2.4 Stufe 4 (8 bis 12 Monate)

Zum Ende ihres ersten Lebensjahres begreifen Kinder, dass die Dinge nicht „aus den Augen, aus dem Sinn“ sind, sondern, auch wenn sie ihrem Gesichtsfeld entschwunden

¹ „Objektpermanenz: Das Wissen darüber, dass Objekte auch dann weiter existieren, wenn sie sich außerhalb des Wahrnehmungsfeldes befinden.“ (Siegler, 2005 S. 187)

sind, nach wie vor existent sind. Um dies zu zeigen führte Piaget eine A-/nicht-B-Suchaufgabe durch. Hierfür wurde ein Spielzeug zuerst in dieselbe von zwei auf dem Tisch befindlichen Vertiefungen gelegt und verdeckt. Hatte Kinder wiederholt das Spielzeug darin gefunden, suchten sie es auch dann noch dort, wenn es vor ihren Augen in das andere Fach gelegt und verdeckt wurde. „Erst ab ihrem ersten Geburtstag etwa suchen Kinder durchgängig am aktuellen Ort des Objektes.“ (Siegler, 2005, S. 188)

3.1.2.5 Stufe 5 (12 bis 18 Monate)

Diese Phase ist ein Versuchstadium. Es geht darum alle Möglichkeiten auszuprobieren und Dinge auf ihre Eigenarten zu testen. Dabei gehen die Kinder mit wissenschaftlichem Eifer zu Werke und versuchen auch zu den ungünstigsten Zeitpunkten Experimente durchzuführen. Als Beispiel sei hier der Versuch auf dem Hochstuhl beim Essen genannt, wenn mit dem vollen Löffel auf alles geklopft wird, um, zum einen die Reaktion der Gegenstände als auch die Geräusche, die dieses „Umsichschlagen“ hervorruft, auszuprobieren. Piaget sah darin keinerlei böse Absicht den verzweifelten Eltern gegenüber, sondern einen Lernprozess, der auf schlichtem Versuchen basiert. Diese Handlungen bezeichnete Piaget als „tertiäre Zirkulärreaktion“². Auf obiges Beispiel des Essens bezogen, bedeutet dies, dass das Kind ein Verhaltensmuster, das es mit anderen Objekten in einer anderen Umgebung vollzogen hat, in eine neue Umgebung transferiert. Damit einhergehend ist ein Verständnis für die Räumlichkeit und der Kausalität. Dies bedeutet, dass die Kausalität dabei ist, „sich wirklich zu vergegenständlichen und zu verräumlichen. Sie ist im Begriff der Loslösung von der Handlung selbst, um sich ins Universum der Wahrnehmungen nach außen zu verlagern, und dafür wird sie nicht mehr auf die sichtbaren Aspekte der eigenen Handlung angewendet.“ (Piaget, 1975a, S. 262)

3.1.2.6 Stufe 6 (18 bis 24 Monate)

Die letzte Stufe des sensomotorischen Stadiums kann mit dem Erreichen der Fähigkeit zur zeitlich verzögerten Nachahmung beschrieben werden. Die Kindern sind nun in der Lage Verhaltensmuster von anderen Menschen zu beobachten und zu übernehmen. Und dies mit der zeitlichen Verzögerung über eine oder mehrere Nächte. Piaget beschreibt eine Situation, in der seine Tochter Jacqueline bei einem sie besuchenden Jungen, in einer Frustsituation einen Wutausbruch beobachten durfte. Am nächsten Tag, als ihr wiederum Beschränkungen auferlegt werden, reagiert sie auf ähnliche Art

² Die dritte Stufe (tertiäre Zirkulärreaktion) liegt dann vor, wenn das Kind die Handlung in einer anderen Umgebung mit anderen Gegenständen ausführt, um gezielt den angestrebten Effekt zu erzielen. Das Kind spielt aktiv mit dem Objekt und kann zwischen Objekt, Handlung und sich selbst unterscheiden. Das Objekt bekommt substantiellen Dingcharakter (Objektpermanenz). (Das Kind sucht die Rassel und kombiniert das Geräusch mit dem Objekt. Auch wenn die Rassel nicht sichtbar ist, existiert sie für das Kind trotzdem)

und Weise. Sie übernimmt sogar das wütenden aufstampfen mit dem Fuß. Derartige Reaktionen konnte Piaget bei seiner Tochter bisher nicht erleben. (vergl. Piaget, 1975b S. 85) Gleichzeitig beinhaltet dies einen Begriff von Ursache und Wirkung bekommen haben zu müssen, da in beschriebenem Fall nicht nur über Nacht ein Verhaltensmuster gespeichert wurde, sondern auch das Verhalten im richtigen Zusammenhang gezeigt wurde.

3.1.3 Das vor-operative Stadium (2 bis 7 Jahre)

Das vor-operative Stadium ist gekennzeichnet durch den Erwerb einer Menge an neuen kognitiven Fähigkeiten. Gleichzeitig zählt Piaget einige Verhaltenseigenschaften auf, die er als Schwächen deklariert: den Egozentrismus und die Zentrierung.

Ein bemerkenswerter Entwicklungsschritt ist „die Fähigkeiten zur symbolischen Repräsentation“. (Siegler, 2005, S. 190) Dabei nimmt ein Gegenstand, als Ersatz für ein nicht greifbares Original, diese Funktion ein. Als Beispiel sei die zur Pistole umfunktionierte Banane genannt. Neben der greifbaren Welt hält dieses Phänomen auch in der malarischen Darstellung Einzug. So werden in diesem Stadium vermehrt Konventionen übernommen. Fliegende Vögel nehmen häufig die Form eines flachen V an und Gesichter werden vermehrt durch zwei Strichen und zwei Punkten in einem Kreis dargestellt. In der vor-operativen Phase sind die Kinder dabei den Egozentrismus zu überwinden. Diese Fähigkeit einen Perspektivwechsel vornehmen zu können, stellt sich nach Piaget erst ab dem 7 Lebensjahr ein. (vergl. Piaget, 1975c, S. 249 - 290) Gleiches gilt für die Zentrierung. Dies bedeutet, dass Kinder zu diesem Zeitpunkt noch nicht in der Lage sich auf mehrere Aspekt eines Ereignisses zu konzentrieren. Beipielhaft hierfür ist Piagets Zug-Aufgabe. Fahren gleichzeitig zwei Züge los, halten gleichzeitig, wobei einer weiter gefahren ist als der andere, ist es für Kinder noch nicht möglich die Frage zu beantworten, welcher Zug länger (zeitlich) gefahren ist. Sie beantworteten die Frage, welcher Zug länger gefahren sei mit dem Zug der weiter gefahren ist. Dauer der Fahrt, Geschwindigkeit und zurückgelegte Strecke können noch nicht kognitiv kombiniert werden. Es bleibt bei der Konzentration auf eine der drei Größen. (vergl. Piaget, 1975d, S. 163 - 187)

Dass Piaget nicht zuletzt den Egozentrismus als Schwäche, die es zu überwinden gilt beschreibt, ist fragwürdig, da es in meinen Augen für Entwicklung der Fähigkeit des Perspektivwechsels unvermeidbar ist, erst die eigene Perspektive hinreichend untersucht und verinnerlicht zu haben.

3.1.4 Das konkret-operative (7 bis 12 Jahre) und das formal-operative Stadium (12 Jahre und älter)

Das konkret-operative Stadium ist der Zeitraum, in dem das logische Denken ausgeprägt wird. Piaget macht dies am Invarianzkonzept¹ deutlich. Ein bekanntes Beispiel ist das unter Abbildung 1 beschriebene Prinzip der Mengenerhaltung.

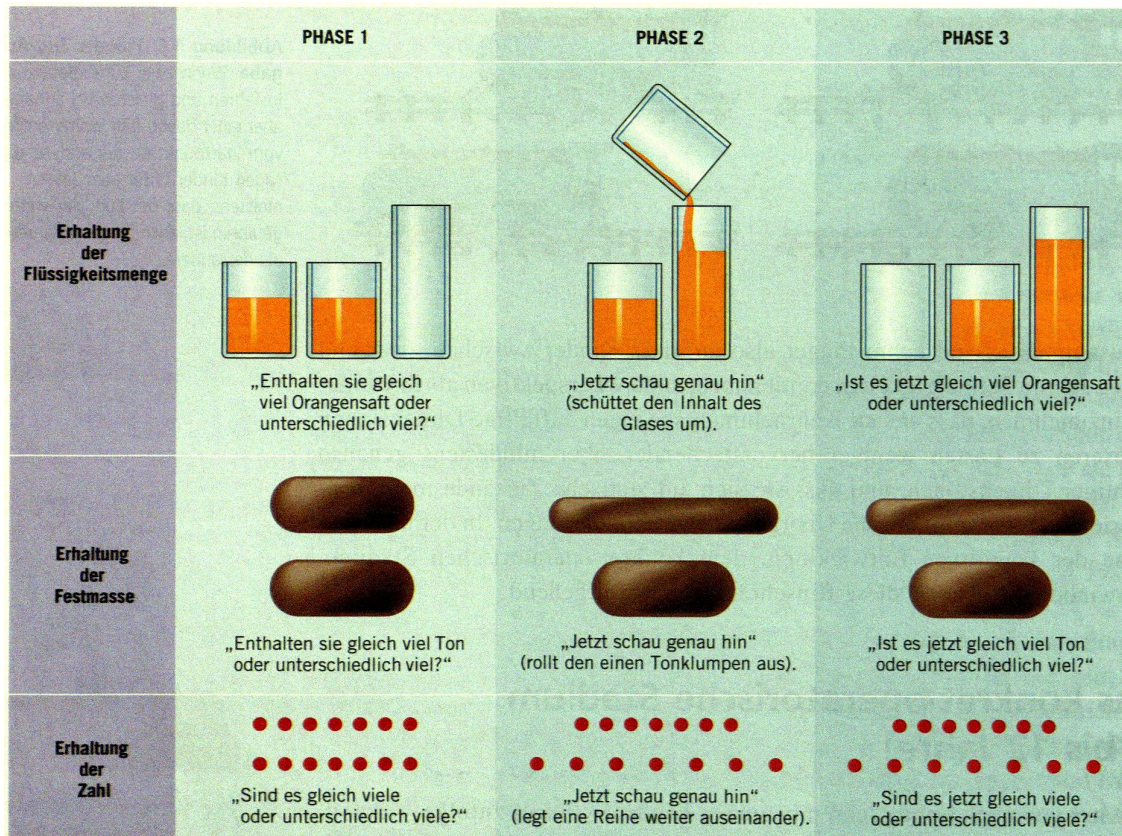


Abbildung 1: Verfahren zur Prüfung der Invarianzkonzepte von Flüssigkeitsmenge, fester Masse und Anzahl (Siegler, 2005, S. 194)

„All die Schwierigkeiten, die Piaget im vor-operativen Denken ausmachte, scheinen zu ihren Schwierigkeiten mit den Erhaltungsaufgaben beizutragen. Sie zentrieren ihre Aufmerksamkeit auf die eine, in der Wahrnehmung auffällige Dimension der Höhe oder der Länge und lassen die andere Dimension außer Acht. Sie reagieren auf das Erscheinungsbild und nicht auf die dahinter liegende Wirklichkeit, und sie können nicht verstehen, das ihre eigene Perspektive irreführend sein kann. Sie konzentrieren sich auf den statischen Zustand und ignorieren die Transformationen.“ (Siegler, 2005, S. 194)

Die Errungenschaft der Fähigkeit die Invarianz trotz einer Transformation zu erkennen, beschränkt sich bis zu einem Alter von 12 Jahren auf konkrete Situationen. Erst

im formal-operativen Stadium sind Menschen in der Lage abstrakte Denkvorgänge zu bewältigen und hypothetische Schlussfolgerungen zu ziehen. Darüber hinaus gibt es eine Vielzahl an Schritten und Fähigkeiten, die in diesen Stadien erreicht werden, aber hier keine weitere Erwähnung finden sollen.

3.1.5 Kritik an Piagets Theorie

Ein gewichtiges Argument mit dem Piagets Erkenntnisse immer wieder in Frage gestellt wurden, ist die Tatsache, dass eine Hauptteil seiner Arbeiten – allem voran die Untersuchungen zur sensomotorischen Entwicklung bis zum vollendeten 2. Lebensjahr – auf der Beobachtung seiner drei Kinder basiert. So verständlich dies aus wissenschaftlicher Sicht ist, so wenig beweist es jedoch das Gegenteil. Einzelne Forscher haben Studien zur Überprüfung der einzelnen Entwicklungsschritte durchgeführt und sind zum Teil zu anderen Ergebnissen gekommen. Diese verschieben in einigen Fällen das Alter in dem Kinder kognitive Leistungen erbringen, zu der sie nach Piaget erst zu einem späteren Zeitpunkt in der Lage sein sollten, nach vorne. Daraus lässt sich nicht ohne Weiteres schlussfolgern, dass Piaget zu falschen Ergebnissen kam, sondern vielmehr liegt es nahe, dass sich in den letzten 80 Jahren sowohl die Umwelteinflüsse verändert haben, die auf die Entwicklung der Kinder einwirken, als auch eine Akzeleration stattgefunden hat, die eine frühere Entwicklung der Kinder zu Folge hat. Es wurde im auch unterstellt, dass beispielsweise die Frage bei der Invarianzuntersuchung nach der Menge der nun enthaltenen Flüssigkeit für Kinder keinen Sinn ergeben würde, da sie diese Frage ja bereits beantwortet haben. Somit handele es sich dabei um eine suggestiv Frage deren Antwort 'nein' sein müsse. (Donaldson, 1978)

Bei all diesen Kritikpunkten, bleibt Piagets Theorie doch die umfassendste Darstellung der kognitiven Entwicklung im Kindesalter. Er beschrieb dazu eine intuitiv nachvollziehbare Theorie, die ein Balance zwischen Anlage und Umwelt ausstrahlt und daher insbesondere für die Darstellung von pädagogischen Bildungsprozessen fruchtbar ist.

3.2 Theorie der Informationsverarbeitung

Die Informationsverarbeitung bietet anders als Piaget keine vollständige entwicklungspsychologische Theorie an. Sie stimmen mit Piaget dahingehend überein, dass Kinder aktive und explorative Gestalter ihrer Entwicklung sind. Bei der Beschreibung der kognitiven Entwicklung der Kinder konzentrieren sie sich auf einzelne „Aspekte des Denkens, angefangen von Aufmerksamkeit, Gedächtnisleistung und Fähigkeit der Kategorisierung bis zum komplexen Problemlösen.“ (Berk, 2005, S. 206). Neben der Struktur der Informationsverarbeitung werde ich die drei Hauptbereiche *Aufmerksamkeit*, *Gedächtnis* und die *Kategorisierung* genauer beleuchten.

Eine von David Klahr beschriebene Situation und ihre Auswertung zeigt beispielhaft die Herangehensweise der Vertreter dieser Theorie:

„Szene: Tochter und Vater sind im Garten. Eine Freundin kommt mit dem Fahrrad angefahren.

Kind: Papa, schließt Du mir die Kellertür auf?

Vater: Warum?

Kind: Weil ich Fahrrad fahren möchte.

Vater: Dein Fahrrad ist in der Garage.

Kind: Aber meine Socken sind im Trockner.

Welche gedankliche Schlussfolgerung könnten diesen rätselhaften Kommentar der Tochter 'Aber meine Socken sind im Trockner' hervorgebracht haben? David Klahr, ein bekannter Informationsverarbeitungstheoretiker, formulierte das folgende Modell des Gedankenprozesses, der zu dieser Äußerung führte:

Oberziel: Ich will Fahrrad fahren.

Präferenz: Ich brauche Schuhe um angenehm Fahrrad fahren zu können.

Tatsache: Ich bin barfuß.

Unterziel 1: Meine Turnschuhe holen.

Tatsache: Sie tragen sich ohne Schuhe nicht angenehm.

Unterziel 2 : Meine Socken holen.

Tatsache: Meine Sockenschublade war heute morgen leer.

Schluß: Wahrscheinlich sind die Socken im Trockner.

Unterziel 3: Hol die Socken aus dem Trockner.

Tatsache: Der Trockner ist im Keller.

Unterziel 4: Geh in den Keller.

Faktum: Durch den Hofeingang geht es schneller.

Faktum: der Hofeingang ist immer geschlossen.

Unterziel 5: Öffne die Tür zum Keller.

Tatsache: Väter haben Schlüsse für alles.

Unterziel 6: Bitte Papa, die Türe aufzuschließen.“

(Siegler, 2005, S. 201; zit. nach Klahr, 1978)

Die an diesem Beispiel deutlich werdende Herangehensweise ist die der absolut logischen Analyse dessen, was das Kind in einer bestimmten Situation für Schlüsse gezogen hat, um zu einer – möglicherweise – vordergründig schleierhaften Aussage zu kommen. Es geht darum die genauen kognitiven Verarbeitungsprozesse des Gehirns nachzuvoll-

ziehen und nicht mittels „allgemeine Konzepte wie Assimilation und Akkomodation“ (Berk 2005, S. 207) zu beschreiben, wie Kinder denken.

3.2.1 Die Struktur der Informationsverarbeitung

Die Theorie der Informationsverarbeitung geht davon aus, dass das menschliche Gehirn Informationen durch drei Prinzipien verarbeitet. Durch den sensorischen Speicher, durch das Arbeits- und Kurzzeitgedächtnis und durch das Langzeitgedächtnis. Der Mensch sei in der Lage innerhalb dieser drei Verarbeitungsschritte durch die Anwendung mentaler Strategien Informationen zu selektieren und damit zu entscheiden, was wichtig genug ist, dass es sich lohnt „es sich zu merken“.

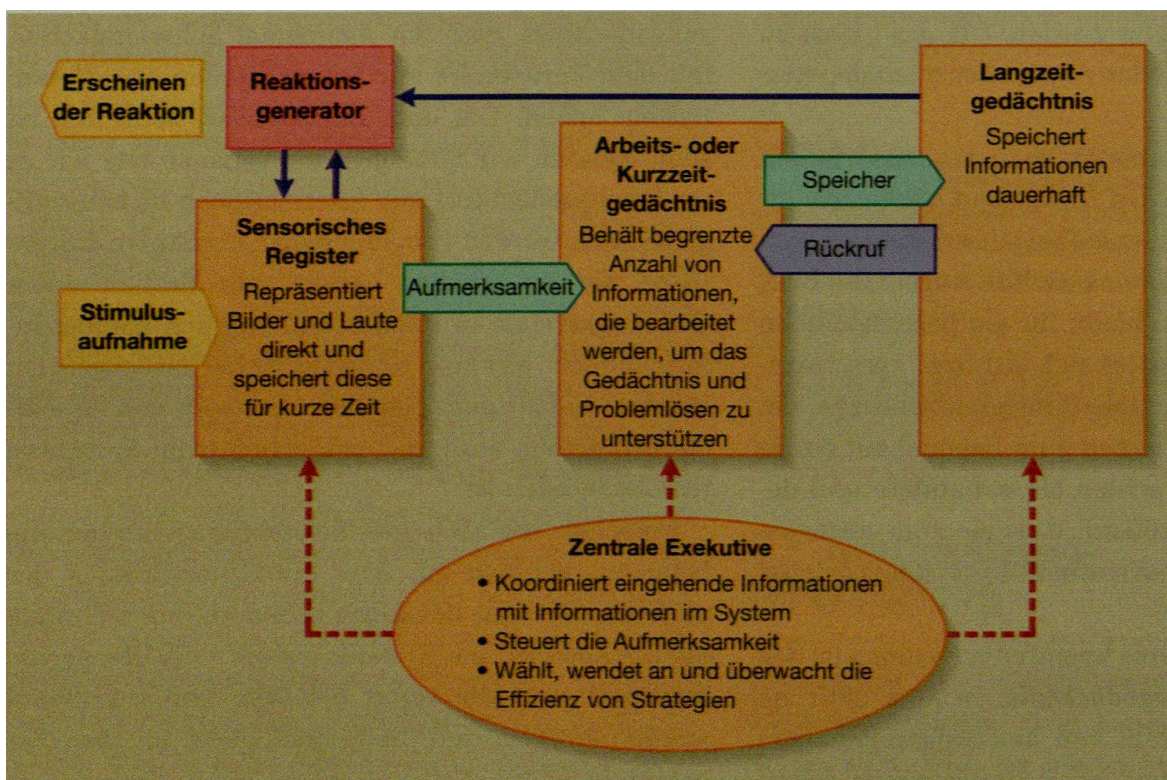


Abbildung 2: **Speichermodell des menschlichen Informationsverarbeitungssystems.** Informationen fließen bereits durch drei Bereiche des mentalen Systems: den *sensorischen Speicher*, *Arbeits- oder Kurzzeitgedächtnis* und das *Langzeitgedächtnis*. In jedem Bereich können mentale Strategien benutzt werden, um Informationen zu handhaben und damit die Wirksamkeit des Denkens und die Chance, Informationen zu behalten, zu vergrößern. Strategien erlauben uns auch, flexibel zu denken, d.h., Informationen sich verändernden Umständen anzupassen. Die *zentrale Exekutive* ist der bewusste, reflektierende Teil des Arbeitsgedächtnisses. Sie koordiniert eingehende Informationen, die schon im System sind, worauf zu achten ist und überwacht den Gebrauch der Strategien. (Berk, 2005. S. 208)

Der sensorische Speicher bildet dabei den ersten Kontakt mit Informationen (auditiv, visuell, taktil olfaktorisch...) Diese Eindrücke verblassen jedoch relativ schnell. Erschei-

nen jedoch einzelnen Wahrnehmungen wichtiger als andere, steigt die Wahrscheinlichkeit, dass sie längere Zeit erhalten bleiben.

Das Arbeits- und Kurzzeitgedächtnis ist in seiner Art nicht vergleichbar mit dem sensorischen Speicher. Es ist nicht in der Lage eine dermaßen große Menge an Informationen zu verarbeiten. Um das Arbeitsgedächtnis sinnvoll einsetzen zu können, sind Menschen dazu genötigt anhand von Strategien die Informationen zu strukturieren. Bei der Bearbeitung eines komplexen wissenschaftlichen Textes machen wir dies beispielsweise durch exzerpieren. Damit legen wir Daten an einem bewusst gewählten Ort ab und schaffen Platz und nicht zuletzt Konzentration für neue. Diese Sortierung nimmt „spezieller Teil des Arbeitsgedächtnisses, die zentrale Exekutive genannt“ (Berk, 2005, S. 207) wahr.

Den letzten Schritt in der Informationsverarbeitung stellt das Langzeitgedächtnis dar. Darüber was ins Langzeitgedächtnis übernommen wird, entscheidet die Dauer des „Aufenthalts“ im Arbeitsgedächtnis. Mit der Zeit nehmen wir derart viele Informationen auf, dass wir Schwierigkeiten haben diese wieder in das Arbeitsgedächtnis zurück zu holen. Dafür hat jeder Mensch andere Strategien und doch ist das Phänomen des Suchens im Gedächtnis bekannt. Einem strukturierten System, mit einer Unzahl an einzelnen Verknüpfungen gleich, erinnert das Gedächtnis an einen Computer. Im Gegensatz zum Computer folgt der Mensch im Geiste einer Assoziationskette bis er die Verbindung zur gewünschten Information erlangt hat und diese abrufen kann. Über die Menge der gespeicherten Informationen und die Geschwindigkeit mit der diese abgerufen werden können, entscheiden viele Faktoren. Die Entwicklung des Gehirns ebenso wie die erlernten Strategien sich Dinge zu merken und zurückholen zu können. „Die Entwicklung dieser Strategien beginnt bereits in den ersten beiden Lebensjahren.“ (Berk, 2005, S. 208)

3.2.2 Die Aufmerksamkeit

Die Beschreibung der Entwicklung der Aufmerksamkeit hat durch die Habituerungsversuche eine besondere Genauigkeit bekommen. So ist durch diese Untersuchungen bekannt, dass sich die Dauer bis sich Kinder an einen Reiz gewöhnt haben, schon nach vier bis fünf Monaten, von drei Minuten auf wenige Sekunden reduziert hat. Frick, Colombo und Saxon haben in einer Studie zur Aufmerksamkeit 1999 nachgewiesen, dass dieses längere Verweilen an einem visuellen Reiz bei Kinder mit zwei Monaten, abhängig ist von der Fähigkeit die Aufmerksamkeit zu regulieren. D.h. es ist nachweislich so, dass nicht die kognitive Fähigkeit die Kinder daran hindert sich schnell an einen Reiz zu gewöhnen und damit als bekannt einzustufen, sondern es ist vielmehr so, dass die Unfähigkeit die Aufmerksamkeit von einem Reiz zu lösen, die längeren Habituationszeiten begründet. (vergl. Frick, Colombo, Saxon 1999. In: Berk 2005, S

208)

Mit zunehmendem Alter erlernen die Kinder eine zielgerichtete Aufmerksamkeit. Diese sich verändernde Aufmerksamkeit ist erkennbar an einfachen Spielen, bei denen Kinder über einen längeren Zeitraum die Konzentration auf eine Tätigkeit richten. Beispiele sind das Errichten von Türmen mit Bauklötzen oder das Stecken von Dingen in Gefäße.

3.2.3 Das Gedächtnis

Auch die Gedächtnisleistung von Kleinstkindern lässt sich anhand der Habituforschung untersuchen. Dabei wurde festgestellt, dass selbst Kinder mit drei Monaten sich für 24 Stunden an Reize erinnern. Handelt sich bei diesen Reizen um menschliche Gesichter behalten Kinder die Bilder sogar für Wochen im Gedächtnis. Betrachtet man das operative Konditionieren bleiben den Säuglingen Erkenntnisse über mehrere Wochen in Erinnerung. Caroly Rovee-Collier brachte zwei bis drei Wochen alten Kindern bei mittels einer am Fuß angebrachten Schnur ein Mobile zu bewegen. Hatten die Kinder das Prinzip verstanden, erinnerten sie sich eine Woche daran, wie sie das Mobile in Bewegung versetzen konnten. Stubste eine Helfer das Mobile kurz an, wussten die Säuglinge durch diesen Trigger noch nach vier Wochen wie sie das Mobile in Bewegung setzen konnten. (Rovee-Collier, 1999) Ähnlich Untersuchungen mit 18 Monate alten Kindern zeigten ein Erinnerungsvermögen von 13 Wochen.

In der Habituforschung spricht man bis zum Ende des ersten Lebensjahres von Wiedererkennen und danach von Erinnerung. Davor erkennen Kinder bestimmte Reize wieder bzw. sie wissen, wenn sie etwas bekanntes Sehen wieder, wie sie es manipulieren können. Ab einem Jahr wird beispielsweise an der Suche nach versteckten Spielsachen oder an der Nachahmung der Verhaltensweisen anderer Menschen noch Tage nach dem Erleben deutlich, dass sie sich *erinnern*. (Berk, 2005)

3.2.4 Die Kategorisierung

Neben der Aufmerksamkeit und dem Gedächtnis ist die Kategorisierung der erlebten Eindrücke, Reize und Informationen von entscheidender Bedeutung für die Theorie der Informationsverarbeitung. Hierfür wurde untersucht, ab wann Säuglinge Reize nach bestimmten Kategorien ordnen. „In der Tat kategorisieren Säuglinge Reize auf der Grundlage von Form, Größe und anderen physischen Eigenschaften in einem so frühen Alter, dass die Kategorisierung als sehr starker Beleg dafür gelten kann, dass die Gehirne von Babys gleich von Beginn an dafür geschaffen sind, Erfahrungen auf eine den Erwachsenen ähnliche Weise zu repräsentieren und zu organisieren.“ (Berk, 2005. S. 209. zit. nach Mandler 1998)

Neben physischen Kategorien wie Nahrungsmittel, Tiere, Fahrzeuge, Pflanzen u. ä.

sortieren Säuglinge auch auf der sozial-emotionalen Ebene Menschen nach Stimmen oder nach Alter.

Aber gerade die Strukturierung und Sortierung der Dinge nach ihren Gemeinsamkeiten, wie Kugeln nach rund oder Quadern nach eckig, lassen auf das Erkennen von Mustern schließen und genau diese sind es, die bei der Definition der Mathematik in Kapitel 1 schon als bedeutendes Merkmal beschrieben wurde.

Es gibt viele Beispiele wie schnell Kinder im frühen Alter ihre Kategorisierung verfeinern. Eines dafür ist eine Situation in der ein Kind einem Spielzeughund, in einer klassischen Als-ob-Spielsituation, etwas zu trinken gibt. Als diesem Kind eine Kaninchen und ein Motorrad gereicht wurde, gab es nur dem Kaninchen etwas zu trinken. Es wurden verschiedene Unterscheidungen durch das Kind durch geführt: nach lebendig / nicht lebendig; durstig / nicht durstig.

4 Neuere Untersuchungen der Entwicklung mathematischer Fähigkeiten in der frühen Kindheit

Nicht zuletzt durch die internationalen Vergleichsstudien PISA und TIMMS (Third International Mathematics and Science Study) wurden in den letzten Jahren neuere Untersuchungen angestrengt, die die Entwicklung der kognitiven im Allgemeinen und der mathematischen Fertigkeiten im Speziellen zum Inhalt hatten. Es konnte vielerorts nachgewiesen werden, dass bereits im vorschulischen Alter von den Heranwachsenden mit Zahlen und Mengen in spielerischer Form umgegangen werden konnte und diese Art der kognitiven Verarbeitung mathematischer Vorgänge nicht nur möglich sondern auch praktiziert wird. Nicole Hirschmann, Ursula Kastner-Koller und Pia Deimann (2008) haben in ihrer Arbeit „Entwicklung und Diagnostik mathematischer Fähigkeiten in der frühen Kindheit“ die Entwicklungsschritte der mathematischen Kompetenzen, wie sie nach neuesten Forschungen ablaufen beschrieben. Dabei betrachten sie die Teilgebiete *Zählen, Ordinalität* und *Arithmetik*.

Im Unterschied zu der zuvor beschriebenen Theorie nach Piaget beziehungsweise der Theorie der Informationsverarbeitung, geht es dabei jedoch nicht um einen generelle Betrachtung der kognitiven Entwicklung in der frühen Kindheit, sondern um eine gezielte Betrachtung der Entstehung und Entwicklung mathematischer Kompetenzen. Jedoch sind diese Ergebnisse im Vergleich zu den Forschungen Piagets reliabel, da sie neuesten wissenschaftlichen Forschungsstandards genügen.

4.1 Das Zählen

Unter anderen konnten Xu und Spelke in ihrer Arbeit „large number discrimination in 6-month old infants“ (Xu, Spelke 2000) anhand des Habituerungsparadigmas zeigen, dass bereits Kleinstkinder in der Lage sind unterschiedliche Anzahlen zu unterscheiden. Es bleibt jedoch zweifelhaft, ob es sich dabei um Zählen beziehungsweise ein Mengenverständnis im engeren Sinne handelt, da nicht auszuschließen ist, dass lediglich eine Mehr an schwarzer Farbe auf einem weißen Papier die Kinder messbaren Reaktionen zeigen ließ. (Feigenson, Carey, Spelke 2002)

Um diesem Umstand Rechnung zu tragen, schreiben auch Hirschmann et al. in oben erwähntem Artikel mit Verweis auf eine Studie von K. Wynn (Wynn, 1992): „Um effektiv zählen zu können, müssen Kinder die Zahlwörter ihrer Kultur auswendig lernen. Bereits mit zwei Jahren beginnen Kinder Zahlwörter von anderen Wörtern zu unterscheiden, auch wenn sie deren Bedeutung noch nicht in vollem Umfang kennen.“ (Hirschmann, Kastner-Koller, Deimann; 2008)

Studien konnten zeigen, dass Kinder bereits in einem Alter von 3,6 Jahren die Zahlen bis 10 erlernt haben und Kinder bis 4,6 die Zahlwörter bis 20 kennen. Gleichzeitig ist auffällig, dass Kinder zwischen 4,6 und 6 Jahren Schwierigkeiten mit den Zahlwörtern zwischen 10 und 20 haben, aber gleichzeitig die Zahlen zwischen 20 und 70 zu bilden in der Lage sind.

Bei einer weiteren Betrachtung der verwendeten Zahlwörter läßt sich zudem eine Unterschiedlichkeit feststellen, die abhängig ist von der jeweils gesprochenen Sprache. So konnten eine im zweisprachigen Kanada durchgeführte Studie mit Kindern in einem Alter von 45 bis 64 Monaten zeigen, dass 60% der englischsprachigen Kinder bis 20 zählen konnten aber nur 30% der französischsprachigen. (Lefevre, Clarke, Stringer; 2002. zit. nach Hirschmann, Kastner-Koller, Deimann. 2008) Einen mit österreichischen Kindern gleichen Alters durchgeführte Untersuchung zeigte, dass 80% der Kinder bis 10, aber nur 20% bis 20 zählen konnten. (Hirschmann, Kastner-Koller, Deimann, 2008)

Dies liegt in den Eigenständigkeiten der Bildung von Zahlwörtern begründet, die nicht zuletzt zwischen 10 und 20 nach sehr unterschiedlichen Prinzipien gebildet werden. So wird beispielsweise das Wort für elf in vielen westlichen Sprachen nach einem anderen Prinzip gebildet als 21 oder 31. Die chinesische Sprache bildet 11, 21 oder 31 nach dem jeweils gleichen Muster. Dieses ist somit für Kinder – und nicht nur für diese - leichter zu erkennen.

Die oben erwähnte Diskrepanz zwischen den Ergebnissen der englisch- und der französischsprachigen Kindern läßt sich nachvollziehen, wenn man betrachtet, dass im Englischen lediglich eleven und twelve eigenständige Wortbildungen sind, bevor mit thirteen eine kongruentes Prinzip der Zahlwortbildung einsetzt. In der französischen Sprache

setzt dieses übereinstimmende Prinzip erst mit der Zahl dis-sept ein. Eine Studie konnte folglich zeigen, dass „chinesische Kinder bereits ab einem Alter von 4 Jahren weiter zählen als gleichaltrige US-amerikanische Kinder“ (Hirschmann et al., 2008; S. 180. zit. nach Miller, Smith, Zhu, Zhang, 1995)

4.1.1 Das Zählprinzip nach Gelman und Gallistel

Zwischen dem Erlernen der Zahlen und dem Erlernen des Zählens befindet sich noch ein großer Sprung, der von den Kindern verstanden sein muss. Gelman und Gallistel (1978) stellten fünf Prinzipien auf, deren Verinnerlichung Voraussetzung dafür ist das Zählen zu beherrschen:

- Demnach muss es dem Kind möglich sein eine **Eins-zu-Eins Zuordnung** von zu zählendem Objekt und Zahlwort durchzuführen. Dabei stellt die Einteilung in bereits gezählte und noch zu zählende Objekte die größte Schwierigkeit für die Kinder dar.
- Das **Prinzip der stabilen Reihenfolge** der Zahlwörter, d.h. jede Zahl kommt nur einmal vor und immer an der gleichen Stelle. Es ist jedoch nicht von Bedeutung, dass die Zahlwörter in der richtigen Reihenfolge verwendet werden. Es ist lediglich wichtig, dass sie immer in der gleichen Reihenfolge benutzt werden. Oft verwenden Kinder noch eine falsche Sequenz der Zahlwörter (eins, zwei, drei, fünf...), haben aber begriffen, dass jedes Zahlwort nur einmal verwendet werden darf.
- Das **Kardinalitätsprinzip**. Die letzte Zahl gibt die Gesamtzahl der gezählten Objekte an. Können Kinder die Antwort auf die Frage „Wieviele?“ beantworten, nachdem sie eine Anzahl an Objekten gezählt haben, haben sie das Prinzip der Kardinalität verstanden. Es muss jedoch berücksichtigt werden, dass Kindern das letzte Zahlwort der Zählsequenz in Erinnerung geblieben sein kann oder sie es nennen, da die Erwachsenen, sollten sie mitgezählt haben, die letzte Zahl der Sequenz - oft unbewusst - lauter und betonter aussprechen und damit den Kindern die Antwort in den Mund gelegt haben. (Wynn, 1990)
- Das **Abstraktionsprinzip**. Jedes Objekt kann unabhängig von seiner Qualität gezählt werden. Dabei wird das Prinzip bei physischen Objekten wie Bausteinen schneller angewandt als bei nicht physischen wie Tönen oder Sprüngen.
- Die **Beliebigkeit der Anordnung**. Die Reihenfolge in der die Objekte gezählt werden ist irrelevant. Dieses Prinzip ist grundlegend für die Mathematik. Es wird auch das Kommutativgesetz der Addition genannt.

<p>1. Eins-zu-Eins-Zuordnung, jedem zu zählenden Objekt des einen Bereichs wird genau ein Objekt des anderen Bereichs zugeordnet (das können auch Zahlworte sein)</p> <p style="text-align: center;">• • • ... eins zwei drei ...</p>	Wie wird gezählt
<p>2. Stabile Reihenfolge der Zahlwörter, jede Zahl kommt genau einmal vor und stets an der selben Stelle der Zahlenfolge; (die Reihenfolge der Zahlworte muss nicht korrekt, aber stabil sein)</p> <p>eins, zwei, fünf,... eins, zwei, fünf,...</p>	
<p>3. Kardinalität, die letzte Zahl beim Zählen gibt die Anzahl an</p> <p>eins, zwei, drei, vier ⇒ vier Kinder</p>	
<p>4. Abstraktionsprinzip, alle Objekte können gezählt werden, die Art der Objekte (Qualität) spielt keine Rolle</p> <p>Ball Auto Roller eins zwei drei</p>	Voraussetzungen um Prinzipien 1. bis 3. Anwenden zu können
<p>5. Beliebigkeit der Anordnung, Anordnung und Reihenfolge beim Zählen spielt keine Rolle</p> <p>Ball Auto Roller Roller Auto Ball eins zwei drei eins zwei drei</p>	

Abbildung 3: Das Zählprinzip nach Gelmann und Gallistel

4.2 Die Ordinalität

Ordinalität beschreibt das Prinzip der Zu- beziehungsweise Abnahme von Mengen. Gleichzeitig ermöglicht die Ordinalität Anzahlen zu vergleichen. Mit Relationen wie „größer als“, „kleiner als“ oder „gleich“ können Mengen zu einander in Beziehung gesetzt werden. Brannon (2002) konnte zeigen, dass sich ein Verständnis von Ordinalität bei Säuglingen bereits zwischen dem 9. und 11. Monat ausbildet:

„A critical question in cognitive science concerns how numerical knowledge develops. One essential component of an adult concept of number is ordinality: the greater than and less than relationships between numbers. Here it is shown in two experiments that 11-month-old infants successfully discriminated, whereas 9-month-old infants failed to discriminate, sequences of numerosities that descended in numerical value from sequences that increased in numerical value. These results suggest that by 11 months of age infants possess the ability to appreciate the greater than and less than relations between numerical values but that this ability develops between 9 and 11 months of age. In an additional experiment 9-month-old infants succeeded at discriminating the ordinal direction of sequences that varied in the size of a single square rather than in number, suggesting that a capacity for non-numerical ordinal judgments may develop before a capacity for ordinal

numerical judgments. These data raise many questions about how infants represent number and what happens between 9 and 11 months to support ordinal numerical judgments.“ (Brannon, 2002. S. 223)

Andere Studien konnten jedoch zeigen, dass die Ergebnisse abhängig sind von den verwendeten Stimuli. Bei auditiv durchgeführten Experimenten konnten erst die 4-jährigen Kinder einschätzen, ob die gehörten Stimuli gleich waren oder nicht. Dies bedeutet, dass von der intuitiven Entwicklung der Ordinalität, die Brannon nachweisen konnte und einer tatsächlichen Benennung der Unterschiede ein großer zeitlicher Sprung besteht. Es soll an dieser Stelle kurz auf widersprüchliche Studien von Starkey, Spelke und Gelman (1990) verwiesen werden, die nachgewiesen hatten, dass Kinder bereits zu einem früheren Zeitpunkt „Äquivalenzen zwischen auditiven und visuell dargebotenen Stimuli wahrnehmen können.“ (Hirschmann et al., 2002. S. 181)

Es zeigt sich, dass es schwierig nachzuweisen ist, ab welchem Zeitpunkt Ordinalität von Kleinstkindern erlernt wird. Dies mag an den vielen verschiedene Faktoren liegen, die Einfluß auf die Versuchsanordnung haben: Einige Faktoren sind

- die Anzahl der Objekte. Sollen zwei mit drei Stimuli verglichen werden oder sechs mit zehn.
- das Verhältnis der Anzahl. So ist es sicherlich einfacher bei einem größeren Verhältnis wie 1:2 die die Unterschiedlichkeit zu erkennen, als bei einem Verhältnis von 7:8.
- die Art der Stimuli. Handelt es sich um visuelle, auditive oder taktile Reize.
- die Fläche auf der die Reize sich befinden. Nimmt mit der Anzahl der Stimuli bei visuellen Reizen auch die Fläche zu oder nicht.

4.3 Die Arithmetik

Karen Wynn (1992; siehe Anhang) untersuchte bei erst 5 Monate alten Kinder anhand von Habituerungsversuchen die Fähigkeit Anzahlen zu addieren. Sie stellte fest, dass bereits in diesem frühen Alter auf das zu erwartenden (richtige) Ergebnis eine andere Reaktion erfolgte als bei unerwartetem (falschem) Ergebnis. Auch hier wurde seitens der Kritiker angeführt, dass diese Reaktionen nicht auf eine richtige Addition zurückzuführen sei, sondern auf die kumulative Oberfläche.

Die Fähigkeit zu arithmetischen Operationen wurde von Kerstin Krajewski (2005; in Anlehnung an Aebli, 1976) untersucht und von ihr in vier Phasen der Aneignung eingeteilt:

- In der ersten Phase des schrittweisen Übergangs von vom Zahlenverständnis zur Rechenoperation geht es darum mit realen dreidimensionalen, realen Objekten Additionoperationen durchzuführen.
- In der zweiten Phase geht es um die Abstraktion vom drei- in den zweidimensionalen Raum. Die erste Abstrahierung ist damit vollzogen, indem von einer realen Handlung auf symbolische, wenn auch noch mit gemalten Objekten wie Äpfeln, umgegangen wird. Der Schritt vom Objekt zum Ziffernsymbol ist noch nicht gegangen worden.
- Die Abstraktion vom gemalten Symbol zur Ziffer stellt einen entscheidenden Schritt dar und ist erst dann möglich, wenn die beiden ersten Phasen vollständig durchdrungen sind. Der Schritt beispielsweise einem realen Ball über einen zweidimensionalen gemalten Ball und eine Strich als Ersatz für einen Ball eine Ziffer zuzuordnen, setzt voraus, dass eine Mengenbewußtheit seitens des Kindes entwickelt wurde. In diesem „Stadium findet sich also in diesem Modell die Verschmelzung des Zahlenwissens mit dem Wissen um die Menge und Mengenbeziehungen“ (Krajewski, 2005. S. 57) wieder, die eine Voraussetzung für arithmetische Operationen sind.
- Die abschließende Phase stellt der automatisierte Umgang mit den Ziffern dar. Dies beinhaltet sowohl das „deklarative Wissen (Faktenwissen wie das Einspluseins und das Einmaleins) als auch das prozedurale Wissen (Algorithmen für Rechenverfahren)“ (Krajewski, 2005. S. 58)

Der beschriebene Ablauf der Entstehung arithmetischer Fertigkeit oder das Erlernen des Zählprinzips nach Gelmann und Gallistel wären nicht Gegenstand immer intensiverer Forschung, wenn es nicht im Bezug auf die mathematische Kompetenz im frühen Kindesalter Defizite gäbe. In einer immer technischeren Gesellschaft, in der dem schnellen Austausch von Informationen und der dazugehörige Technologie ein immer höherer Stellenwert beigemessen wird, wächst die Bedeutung mathematisch-naturwissenschaftlicher Berufe. Und damit die gesellschaftliche Beachtung der dafür erforderlichen Kompetenzen. Die Frage danach inwieweit sich der institutionelle Alltag im frühkindlichen Alter ändern muss, wird immer häufiger gestellt.

5 Förderung mathematischer Kompetenz im institutionellen Kontext

Sabina Pauen und Janna Pahnke (2008) haben zwei Konzepte zur Förderung mathematischer Kompetenz evaluiert und dabei feststellen könne, dass selbst eine Kurzzeit-

intervention von nur 10 Wochen ausreicht das mathematische Verständnis signifikant zu steigern. Es wurde zum einen das Programm „Zahlenland“ (Friedrich, De Galgóczy, Schindelhauer, 2006) und zum anderen das Konzept „Mathe 2000“ (Müller, Wittman, 2004) untersucht.

5.1 Zahlenland

Das Programm Zahlenland legt eine starke Gewichtung auf das Zählen. Darüber hinaus widmet es sich dem Anzahlaspekt, den Ordnungsaspekten, der Zahlzerlegung, der Ziffernbildung und den geometrischen Grundformen. Die Vermittlung folgender mathematischer Aspekte werden Barbara Schindelhauer (2006) genauer erläutert:

- „Der **Anzahlaspekt** (Kardinalaspekt) bezeichnet die Mächtigkeit einer Menge. Er spiegelt die im Alltag gängigste Auffassung von Zahlen wider: 3 Birnen, 2 Katzen, 5 Häuser usw.
- Der **Ordnungsaspekt** (ordinaler Zahlaspekt) weist durch die Vorgänger- und Nachfolgebeziehung jeder Zahl eindeutig einen bestimmten Platz in der Zahlenreihe zu: Das Haus mit der Nummer 4 bezeichnet einen Platz, der nach Nummer 3 und vor der Nummer 5 kommt.
- Beim **Rechenaspekt** charakterisiert die Zahl das Ergebnis einer mathematischen Verknüpfung: Ich stehe auf dem Zahlenweg auf der 2, gehe drei Schritte weiter und erhalte als Ergebnis die 5.
- Der **Operatoraspekt** kennzeichnet eine Zahl als das Vielfache eines Vorgangs: drei mal hüpfen, vier mal eine Kniebeuge machen usw.
- **Geometrische Formen** (Kreis, Ellipse, regelmäßiges Dreieck, Viereck usw. bis hin zum regelmäßigen Zehneck) sind wertvolle Vorstellungsbilder beim Aufbau des Zahlbegriffs.
- **Eins-zu-eins-Zuordnungen**: Die Fähigkeit des Zuordnens von Elementen aus einer Menge zu Elementen einer anderen ist eine wichtige Fähigkeit für das Erkennen mathematischer Strukturen. Beim Vorgang des „Einrichtens“ der Zahlengärten handelt es sich um solche Zuordnungen. Wird jeweils genau ein Gegenstand auf eine Ecke der Vielecke gelegt, so sprechen wir von einer Eins-zu-eins-Zuordnung.
- **Unveränderlichkeit** (Invarianz): Unter Invarianz einer Menge versteht man deren Eigenschaft, ihre Anzahl an Elementen unverändert zu lassen, wenn sich die Form oder die räumliche Anordnung ändert. Ein Beispiel: 6 Äpfel bleiben 6 Äpfel,

egal ob sie sich auf der Verkaufstheke oder bereits im Einkaufskorb befinden. Der Aufbau des Zahlenlandes ist bewusst so gewählt, dass vielfältige Möglichkeiten des Erfahrens der Mengeninvarianz bestehen.

- **Zahlzerlegung:** $5 = 1+1+1+1+1 = 3+2 = 4+1$. Die Zahlzerlegung ist eine wichtige Voraussetzung für das spätere Rechnen über 10 hinaus.
- **Umkehrbarkeit** (Reversibilität) Eine Handlung gedanklich rückgängig machen zu können ist eine wichtige Fähigkeit mathematischen Denkens. Auf dem Zahlenweg könnte eine konkrete Erfahrung der Reversibilität so aussehen: Zwei Schritte vor (Addition) und zwei Schritte zurück (Subtraktion) bringen mich wieder zur Ausgangszahl“ (Schindelhauer, 2006)

Diese einzelnen Ziele werden durch ein ganzheitliches Prinzip spielerisch den Kindern vermittelt. In der einmal wöchentlich stattfindenden „Reise ins Zahlenland“ werden innerhalb von 10 Wochen alle Zahlen von 1 bis 10 einmal „besucht“ und anhand phantasievoller Aktivitäten, wie dem Zahlenweg, den Zahlenhäusern, -gärten und -türmen behandelt. Dabei werden die Kinder mit märchenhaften Geschichten an die Zahlen herangeführt. Zusätzlich werden Bewegungsspiele, Abzählreime und Lieder mit eingebunden. Dabei ist den Initiatoren wichtig, dass die Kinder - gemäß einer ganzheitlichen Herangehensweise – alle Sinne benutzen um dem Geheimnis der Zahlen auf die Spur zu kommen.

5.2 Mathe 2000

Der Hauptunterschied zum „Zahlenland“ liegt darin, dass es sich nicht ausschließlich um ein Programm für den vorschulischen Bereich handelt, sondern „Bestandteil eines Gesamtkonzeptes von Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Abitur“ (Pauen, Pahnke, 2008, S. 196) ist. Desweiteren geht es nicht um des Erlernen des Zählens allein, sondern darum die Idee von Mathematik als „lebendiger Wissenschaft von Mustern“ (Wittmann, 2006, S. 210) zu transportieren. Gerade der Teil des Konzeptes der auf die Arbeit im Kindergartenalter zugeschnitten ist, soll den Kindern eine mathematische Grundvorstellung dessen vermitteln, was Formen, Zahlen oder Muster sind. Im Vergleich zu den Zielen die das Programm „Zahlenland“ verfolgt, die eine primäre Vermittlung des Handwerks der Arithmetik beinhaltet, geht es bei „Mathe 2000“ in der Hauptsache um die Vermittlung der mathematischen Vorstellung im eigentlichen Sinne, deren Definition ich in Kapitel 2 beschrieben habe.

In den Zielen und Leitlinien der Initiatoren heißt es auf der Homepage:

„Mathematik wird als lebendige 'Wissenschaft von Mustern' (Keith Devlin) verstanden. Als Vorbild dienen weniger systematisch ausgearbeitete fertige

Muster, die leicht ein falsches Verständnis von Mathematiklernen suggerieren, sondern mehr Muster in statu nascendi. Leitend sind dementsprechend das Erforschen, Fortsetzen, Verändern und Erfinden von Mustern im Forschungsprozess. Dieser Prozess hat der Natur der Mathematik entsprechend einen spielerischen Charakter: Mathematik ist eine Art Spiel. Zwei Aspekte von Mathematik sind dabei untrennbar verbunden: der „reine Aspekt“, bei dem es ausschließlich auf innermathematische Beziehungen ankommt und bei dem die Ästhetik schöner Muster die entscheidende Rolle spielt, sowie der „angewandte“ Aspekt, bei dem Bezüge zur Realität und die Lösung praktischer Probleme im Vordergrund stehen. Die Stärke der Mathematik kann sich nur entfalten, wenn beide Aspekte aufeinander bezogen werden. Ihr maximaler praktischer Nutzen hängt von einem Vorrat von Mustern ab, die aus 'spielerischem Interesse' und nach innermathematischen Beweggründen entwickelt worden sind.“ (Wittmann, Müller, 2009)

Während das „Zahlenland“ verstärkt auf einen märchenhaften Zugang setzt, steht bei „Mathe 2000“ die Eigenaktivität anhand von Denkspielen im Vordergrund. „inhaltlich werden teils übereinstimmende, teils unterschiedliche Aspekte mathematischer Kompetenz gefördert: Dabei scheint das „Zahlenland“ besonders stark auf verbale Teilkompetenzen wie Zahlenkenntnis und Zählfertigkeiten zu fokussieren, während „Mathe 2000“ in besonderem Maß auf Kompetenzen wie logisches Denken und Mustererkennung abhebt.“ (Pauen Pahlke, 2008, S.197)

5.3 Ergebnisse der Evaluation von „Zahlenland“ und „Mathe 2000“

Der Erhebung wurde mittels des M-Einstein-Tests und wurde in einem Prä-Posttest-Design durchgeführt. Die Stichprobe betrug $N=199$ ($n=99$ Mathe 2000; $n=100$ Zahlenland). Beide Teilgruppen hatten auch eine nahezu gleiche Alterstruktur mit 4.5 Jahren und einer Standardabweichung von $SD = 0.7$ (Mathe 2000) beziehungsweise $SD = 0.5$ (Zahlenland) und sind somit vergleichbar. Die Ergebnisse lassen sich dahingehend zusammenfassen, dass ein signifikanten Anstieg der messbaren mathematischen Kompetenz zu verzeichnen war und dass bis auf einen Punkt die Ergebnisse von „Zahlenland“ und „Mathe 2000“ die gleiche Tendenzen hatten. Lediglich beim Punkt „Messinstrumente“ konnte ausschließlich bei den Kindern die das Programm Mathe 2000 mitgemacht hatten ein Lernzuwachs nachgewiesen werden. Dies lag daran, dass die meisten der Kitas, die mit „Mathe 2000“ gearbeitet hatten, sich für die Einrichtung einer Lernwerkstatt entschieden, in der vermehrt mit Meßinstrumenten hantiert worden war. (Für die genauen Ergebnisse siehe Anhang 3)

Leider gibt es zu keinem der Programme eine Längsschnittstudie anhand derer die Nachhaltigkeit der einzelnen Konzepte untersucht werden könnte, da es wichtig zu wissen wäre, ob es sich bei dem Anstieg der mathematischen Kompetenzen um einen kurzzeitigen Effekt handelt oder um tiefgreifendere Verinnerlichung mathematischer Strukturen.

6 Mathematik und die kognitive Entwicklung

In Kapitel 2 über die Theorien zur kognitiven Entwicklung konnte deutlich gezeigt werden nach welchen Verläufen Kognition beim Menschen ausgebildet wird bzw. entsteht. Im Gegensatz zu Piaget der seine Theorie auf Stufen aufbaut, die nacheinander durchlaufen werden müssen, konzentriert sich die Informationsverarbeitung darauf welche Bereiche von Bedeutung sind um von Kognition sprechen zu können. Es konnte auch gezeigt werden, dass losgelöst von der starren Betrachtung Piagets, Säuglinge und Kinder häufig kognitive Leistungen zu einem Zeitpunkt erbringen, derer sie nach Piagets Theorie an diesem Punkt ihrer Entwicklung noch nicht in der Lage sein sollten. Wie im Kapitel zur Kritik an Piaget bereits erläutert, kann dies auch sicherlich mit den neueren diagnostischen Methoden erklärt werden.

Im Bezug auf das Verständnis der Ausbildung mathematisch-kognitiver Fähigkeiten eignet sich die Theorie der Informationsverarbeitung besser, da ihr eine sehr analytische logische Herangehensweise zu eigen ist. Dies zeigt deutlich das Beispiel der Analyse des Gesprächs über die vermutlich im Trockner befindlichen Socken.

Doch welcher Teil der kognitiven Entwicklung lässt sich den mathematischen Vorläuferfähigkeiten zuschreiben. Die Beantwortung dieser Frage, kann keine kurze und einfache sein, da es sicherlich bereits bei der Definition des Begriffs mathematische Vorläuferfähigkeiten eine lebhafte Diskussion darüber ergeben wird, was Vorläuferfähigkeiten sind und was bereits "richtige" mathematische Fähigkeiten sind. Desweiteren sind die unterschiedlichen Bereiche, die zusammengenommen die kognitiven Denkstrukturen ausmachen, nicht trennscharf zu separieren. Teilbereiche der Kognition wie Aufmerksamkeit, Lernen, Vorstellungsvermögen, Kreativität, Orientierung oder Erinnerungsvermögen gehen fließend in einander über ohne, dass es einzelne Fertigkeiten gäbe, die ausschließlich und eindeutig zugeordnet werden könnten.

Und doch gibt es Fertigkeiten, die wenn auch nicht ausschließlich, so doch im besonderen für ein mathematisches Vorstellungsvermögen wichtig sind. Wie im Kapitel zur Definition der Mathematik beschrieben sind der intuitive Umgang mit Mustern, Reihen, Folgen oder Wiederholungen für eine mathematisches Verständnis von hoher Bedeutung. Ein schon von der Habtuierungsforschung verwandtes Beispiel ist das Erkennen von erwartetem beziehungsweise nicht erwartetem Ereignis. Diese Fähigkeit

ist sicherlich bereits als logische zu bewerten, auch dann wenn Säuglinge diese unter Beweis stellen können. Das Sortieren von Gegenständen nach Gemeinsamkeiten, das Einordnen in Kategorien - nicht nur von Gegenständen, sondern auch von Stimmen zu Personen und dergleichen mehr – oder das Durchspielen von Wiederholungen sind Verhaltensmuster, die nicht nur der Entwicklung mathematischer Denkstrukturen zuträglich sind. Sie wurden schon immer von Kindern durch intrinsisches Verhalten probiert. Nichtsdestotrotz sind es genau diese Dinge, die ein intuitives Verständnis der Mathematik fördern, wie sie zu Beginn dieser Arbeit beschrieben wurde.

Die in Kapitel 4 betrachtete Entstehung der konkreten mathematischen Kompetenzen zeigt, auch wenn die Ergebnisse strittig sind, dass es schon ab einem Alter von 6 Monaten (Wynn, 1992) eine messbare Erwartung eines Ereignisses gibt. Diese Resultate der Habituationversuche verdeutlichen, dass es ein intrinsisches Gefühl für Mengen gibt. Ich halte eine Förderung dieses Gespürs für einen entscheidenden Punkt in der Arbeit mit Kindern im vorschulischen Bereich, da sie eine Voraussetzung für die Kompetenzen sind, die die Basis von Mathematik darstellen. Diese Herangehensweise deckt sich mit der in Kapitel 4.3 beschriebenen Entwicklung hin zur Fähigkeit mit arithmetische Operationen umzugehen, da die Grundlage für die genannten Abstraktionen ein bewusster und spielerischer Umgang mit Mengen und nicht zuletzt eine Mengenbewußtheit ist. Krajewski schreibt: „Die Verschmelzung des Zahlenwissens mit dem Wissen um Menge und Mengenbeziehungen... [stellen] ...eine bedeutende Notwendigkeit für den Erwerb echter mathematischer Kompetenz“ (Krajewski, 2005, S. 57) dar.

Die Ergebnisse der Evaluation von von “Mathe 2000” und ”Zahlenland“ lassen, zeigen, dass es unterschiedliche Herangehensweisen in der Förderung der mathematischen Kompetenzen im institutionellen Kontext gibt. Beide Kurzzeitinterventionen sorgten für einen signifikanten Wissenszuwachs bei den Kindern. Es wäre sehr interessant zu wissen, ob die Ergebnisse dieser beiden Konzepte auch in einer Längsschnittstudie ähnlich bleiben. Meiner Überzeugung stellt der Ansatz die Konzentration auf das Verständnis der Strukturen und Muster der Mathematik, die das Programm ”Mathe 2000“ verfolgt, den nachhaltigeren dar. Ob dies tatsächlich so ist müssen zukünftige Studien zeigen. Dies soll jedoch nicht bedeuten, dass in der alltäglichen Arbeit mit Kindern der Förderung der mathematischen Kompetenz keine weitere Beachtung geschenkt werden soll. Es gilt diese und eine Vielzahl weiterer einzelner Fähigkeiten zu unterstützen und zu fördern, wenn Kinder auf die Schule und das Leben vorbereitet werden sollen. Hierfür ist sicherlich auch der Arbeit mit Zahlen Bedeutung beizumessen. Die Fertigkeit und auch die Geschicklichkeit im Umgang mit Zahlen ist wichtig, jedoch bildet ein mathematisches Verständnis die Basis dafür, dass Zahlen für Kinder mit Leichtigkeit erlernbar sind.

7 Literaturverzeichnis

- Berk, L., (2005): Entwicklungspsychologie. Pearson Studium: München.
- Brannon, E.M.(2002): The development of ordinal numerical knowledge in infancy. In: Cognition, 83, 223 - 240.
- Brockhaus-Enzyklopädie (1971): Der große Brockhaus. Bd, 12. Brockhaus-Verlag: Wiesbaden.
- Bronstein, I., Semendjajew, K. (2008): Taschenbuch der Mathematik. Wissenschaftlicher Verlag Harry Deutsch GmbH: Frankfurt.
- Devlin, K. (2003): Das Mathe-Gen oder Wie sich das mathematische Denken entwickelt + Warum Sie Zahlen ruhig vergessen können. dtv: München.
- Donaldson, M., (1978): Children's mind. New York: Norton.
- Feigenson, L., Carey, S. Spelke, E. (2002): Infants' discrimination of number vs. continuous extent. In: Cognitive Psychology, 44, 33-66.
- Friedrich, G., de Galgóczy, V. Schindelhauer, B. (2006): Zahlenspiel und Zahlenspaß. Freiburg: Herder.
- Gelman, R. Gallistel, C.R. (1978): The child's understanding of number. Cambridge, MA:Harvard University Press.
- Hirschmann, N., Kastner-Koller, U. Deimann, P. (2008): Entwicklung und Diagnostik mathematischer Fähigkeiten in der frühen Kindheit. In: Roux, S., Fried, L. MKammermeyer.G. (Hrsg.) Empirische Pädagogik - 2008. Sozial-emotionale und mathematische Kompetenzen in Kindergarten und Grundschule - eine Einführung.
- Klahr, D., (1978). Goal formation, planning, and learning by preschool problem solvers or: "My socks are in zhe dryer." In R. Siegler (Hrsg.) Children' thinking: What develops? S. 181 - 212. Erlbaum: Hillsdale NJ.
- Krajewski, K. (2005): Vorschulische Mengenbewusstheit von Zahlen und ihre Bedeutung für die Früherkennung von Rechenschwäche. In: M.Hasselhorn, H. Marx, W. Schei-

der (Hrsg.), Diagnostik von Mathematikleistungen (S. 49 – 70). Hogrefe: Göttingen.

Mandler, J. (1998): Representation. In: D. Kuhn, R. S. Siegler (Hrsg.), Handbook of child psychology; Bd. 2. Cognition, perception and language. S. 255 – 308. Wiley: New York.

Meyers Lexikon (1969): Technik und exakte Naturwissenschaften. Bd. 1. Bibliographisches Inst.: Mannheim .

Müller, G.N. Wittmann, E.C. (2002/2004): Das kleine Zahlenbuch. Vol. 1: Spielen und Zählen. Bd. 2: Schauen und Zählen. Seelze: Kallmeyer.

Pauen, S. Pahnke, J., (2008): Mathematische Kompetenz im Kindergarten: Evaluation der Effekte einer Kurzzeitintervention. In: Roux, S., Fried, L. MKammermeyer.G. (Hrsg.) Empirische Pädagogik - 2008. Sozial-emotionale und mathematische Kompetenzen in Kindergarten und Grundschule - eine Einführung.

Piaget, J. (1975a): Gesammelte Werke Band 2: Der Aufbau der Wirklichkeit beim Kinde. Klett: Stuttgart.

Piaget, J. (1975b): Gesammelte Werke Band 5: Nachahmung, Spiel und Traum. Klett: Stuttgart.

Piaget, J. (1975c): Gesammelte Werke Band 6: Die Entwicklung des räumlichen Denken beim Kinde. Klett: Stuttgart.

Piaget, J. (1975d): Gesammelte Werke Band 7: Die natürliche Geometrie des Kindes. Klett: Stuttgart.

Rovee-Collier, C. (1999). The development of infant memory. In: Current Directions in Psychological Science. S. 80 – 85.

Siegler R., DeLoache, J., Eisenberg, N. (2005): Entwicklungspsychologie im Kindes- und Jugendalter. Elsevier: München.

Starkey, P., Spelke, E.S. Gelman, R. (1990): Numerical abstraction by human infants. In Cognition, 36, S. 97 - 127.

Wynn, K. (1992). Addition and subtraction by human infants. In: Nature Nr. 358, S. 749 - 750.

Xu, F. Spelke, E.S. (2000): large number discrimination in 6-month-old infants. In: Cognition, 74, B1 - B11.

Internetquellen:

<http://de.wikipedia.org/wiki/Mathematik>

Schindelhauer, B. (2006): Die vermittelten mathematischen Kenntnisse. <http://www.ifvl.de/Lernziele.html>

Wittmann, E.C. Müller, G. N. (2009): <http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/mathe2000/ziele.html>

8 Anhang

Anhang 1: Eidesstattliche Erklärung

Anhang 2: Brannon, E.M.(2002): The development of ordinal numerical knowledge in infancy.

Anhang 3: Pauen, S. Pahnke, J., (2008): Mathematische Kompetenz im Kindergarten: Evaluation der Effekte einer Kurzzeitintervention.

Anhang 4: Wynn, K. (1992). Addition and subtraction by human infants.

Anhang 5: Xu, F. Spelke, E.S. (2000): large number discrimination in 6-month-old infants.

Anhang 1

Eidesstattliche Erklärung

Erklärung:

Ich erkläre, dass ich die Bachelor-Arbeit ohne fremde Hilfe selbstständig verfasst und nur die angegebenen Hilfsmittel und Quellen benutzt habe.

Hamburg, den 31. August 2011

Friedemann Wahl