



Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Hamburg University of Applied Sciences

Master-Arbeit

Department Fahrzeugtechnik und Flugzeugbau

Numerische und analytische Behandlung von Spannungsfeldern in gekrümmten Composite-Laminat-Strukturen

Paul Merkel

29. August 2011

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Fakultät Technik und Informatik
Department Fahrzeugtechnik & Flugzeugbau
Berliner Tor 9
20099 Hamburg

in Zusammenarbeit mit:
Sogeti High Tech GmbH
Hein-Sass-Weg 38
21129 Hamburg



Verfasser: Paul Merkel
Abgabedatum: 29.08.2011

1. Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Eckart Nast
2. Prüfer: Dr.-Ing. Christian Mittelstedt

Industrieller Betreuer: Dipl.-Ing. Fernando Weinbuch

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen der Prüfungsleistung der Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg und wurde in Kooperation mit Sogeti High Tech GmbH in Hamburg durchgeführt.

Mein ganz besonderer Dank gilt meinen beiden Prüfern Herrn Prof. Dr.-Ing. Eckart Nast und Herrn Dr.-Ing. Christian Mittelstedt. Ihre Hinweise, Anregungen und Ideen haben diese Arbeit wesentlich geprägt.

Ferner bedanke ich mich bei meinem industriellen Betreuer Herrn Fernando Weinbuch für die zahlreichen fachlichen Gespräche, die vielfältige Unterstützung und das große Interesse an meiner Arbeit.

Dank gebührt meinen Eltern, Tatiana und Johannes Merkel, für die Unterstützung meines Studiums. Ihr habt mir nicht nur die Möglichkeit dazu gegeben, zu wachsen und zu lernen. Ihr habt mich auch vorbereitet auf dieses Leben.

Mein liebster Dank gilt meiner Ehefrau Marina und meinem Sohn Daniel für Ihre Geduld und für Ihr großes Verständnis während der Entstehung meiner Arbeit. Sie motivierten mich, wenn ich träge wurde und rieten zur Pause, wenn es nötig war.

In Gedanken an Tamara und Pavel Iljin, die den Abschluss meines Studiums nicht mehr miterleben konnten.

Hamburg, August 2011

Paul Merkel

Erklärung

Ich versichere, dass ich diese Master-Arbeit ohne fremde Hilfe selbstständig verfasst und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Wörtlich oder dem Sinn nach aus anderen Werken entnommene Stellen sind unter Angabe der Quelle kenntlich gemacht.

Ort und Datum

Unterschrift des Verfassers

Inhaltsverzeichnis

Symbol- und Abkürzungsverzeichnis	VI
Abbildungsverzeichnis	IX
Tabellenverzeichnis	XII
1 Einleitung	1
1.1 Allgemeines	1
1.2 Themenstellung der Arbeit	3
2 Theoretische Grundlagen	4
2.1 Grundlagen der linearen Elastizitätstheorie	4
2.1.1 Betrachtung der ebenen Spannungsprobleme	4
2.1.2 Kinematik	6
2.1.3 Die Gleichgewichtsbedingungen	8
2.1.4 Das verallgemeinerte Hookesche Gesetz	9
2.2 Lösungsansatz der linearen Elastizitätstheorie	12
2.2.1 Herleitung der Bipotentialgleichung im kartesischen Koordinatensystem	12
2.2.2 Herleitung der Bipotentialgleichung im zylindrischen Koordinatensystem	13
2.3 Grundlagen und Prinzip der Methode der finiten Elemente	14
3 Modellierung	16
3.1 Idealisierung	16
3.2 Erstellen der Geometrie	17
3.3 Vernetzung	19
3.3.1 Erstellung einer Netzfacette	19
3.3.2 Auswahl der geeigneten Elementtypen	20
3.3.3 Definieren der Materialeigenschaften	22
3.4 Definition der Randbedingungen sowie der Lasten	24
3.5 Der Lösungsabschnitt	27
4 Die Konvergenzstudie	28
4.1 Konvergenzverhalten der Volumenelemente mit unterschiedlichen Ansatzfunktionen	28
4.2 Überprüfung der Tauglichkeit der Scheibenelemente zur Modellierung eines orthotropen L-Winkels	31
4.3 Konvergenzstudie zur Festlegung der Elementgröße	33

5	Parameterstudien mit dem numerischen Modell	37
5.1	Untersuchung der Auswirkung der Randstörung auf den Spannungshaushalt unter einer Momentenbelastung	37
5.2	Untersuchung der Auswirkung des Anisotropiewertes auf den Spannungshaushalt unter einer Momentbelastung	43
5.3	Untersuchung der Auswirkung des Krümmungsverhältnisses auf den Spannungshaushalt unter einer Momentenbelastung	47
5.4	Untersuchung der Auswirkung der Randstörung auf den Spannungshaushalt unter einer Querkraftbelastung	50
5.5	Untersuchung der Auswirkung des Anisotropiewertes auf den Spannungshaushalt unter einer Querkraftbelastung	53
5.6	Untersuchung der Auswirkung des Krümmungsverhältnisses auf den Spannungshaushalt unter einer Querkraftbelastung	58
5.7	Untersuchung des Spannungshaushaltes unter einer Normalkraftbelastung	61
6	Analytische Herleitung der Spannungs- und Verschiebungsfunktionen für gekrümmte orthotrope Scheiben	62
6.1	Der allgemeine Ansatz	62
6.2	Der orthotrope gekrümmte Balken unter einer Momentbelastung	62
6.3	Der orthotrope gekrümmte Balken unter einer Randlast	72
6.4	Der orthotrope geschichtete gekrümmte Balken unter einer Momentbelastung	81
7	Verifikation der Ergebnisse	85
7.1	Umrechnung der Materialkonstanten	85
7.2	Verifikation der Ergebnisse bei der Momentenbelastung	86
7.3	Verifikation der Ergebnisse bei der Querkraftbelastung	90
7.4	Verifikation der Ergebnisse bei der Normalkraftbelastung	93
7.5	Verifikation der Ergebnisse bei der Momentenbelastung eines Laminats	96
8	Zusammenfassung und Ausblick	101
8.1	Zusammenfassung	101
8.2	Ausblick	102
	Literaturverzeichnis	104
A	APDL-Skript zur Modellierung eines L-Winkels mit ANSYS 11.0	106
A.1	Modellierung	106
A.2	Berechnung	115
A.3	Auswertung	115
B	Parameterstudien mit dem numerischen Modell unter einer Normalkraftbelastung	117
B.1	Untersuchung der Auswirkung der Randstörung auf den Spannungshaushalt unter einer Normalkraftbelastung	117

B.2	Untersuchung der Auswirkung des Anisotropiewertes auf den Spannungshaushalt unter einer Normalkraftbelastung	119
B.3	Untersuchung der Auswirkung des Krümmungsverhältnisses auf den Spannungshaushalt unter einer Normalkraftbelastung	122
C	Zeitplan	126

Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

Symbole, Operatoren und Indices

∂	Symbol für partielle Differentiation
d	Symbol für die Differentiation einer Funktion mit einer Variable
Δ	Laplace-Operator
$,j$	Inkrement

Lateinische Buchstaben

a	Der innere Radius des Bauteils	mm
A_b	Querschnittfläche des Balkenelements	mm^2
b	Der äußere Radius des Bauteils	mm
E	isotroper Elastizitätsmodul	MPa
E_b	Elastizitätsmodul des Balkenelements	MPa
E_i	Elastizitätsmodul mit $i = x, y, z$ bzw. $i = r, \varphi, z$	MPa
$F(r, \varphi)$	Airysche Spannungsfunktion im zylindrischen Koordinatensystem	
$F(x, y)$	Airysche Spannungsfunktion im kartesischen Koordinatensystem	
f_i	Volumenkräfte	
F_{rel}	relativer Fehler	
G_{ij}	Schubmodul mit $i, j = x, y, z$ bzw. $i, j = r, \varphi, z$	MPa
h_b	Höhe des Balkenelements	mm
I_{zz}	Flächenträgheitsmoment bei Biegung um die z -Achse	mm^4
L	Länge des Gesamtbauteils	mm
l_1	Länge von Flansch 1	mm
l_2	Länge von Flansch 2	mm
M	Biegemoment	Nm
M_f	Biegemomentenfluss	$N \frac{mm}{mm}$

N	Normalkraft	N
n	Anisotropiewert bei der polarorthotropen Kreisbogenscheibe	—
n	Anzahl der Einzelschichten eines Laminats	—
N_f	Normalkraftfluss	$\frac{N}{mm}$
Q	Querkraft	N
Q_f	Querkraftfluss	$\frac{N}{mm}$
r	Radius	mm
r, φ, z	Koordinaten des zylindrischen Koordinatensystem	
r_m	mittlerer Radius	mm
s, k	Anisotropiewerte	—
t	Bauteildicke	mm
t^*	Relative Bauteildicke beginnend am inneren Radius	—
u	Verschiebung eines Punktes parallel zur x -Achse bzw. r -Achse	mm
v	Verschiebung eines Punktes parallel zur y -Achse bzw. φ -Achse	mm
w	Verschiebungen in z -Richtung	mm
x, y, z	Koordinaten des kartesischen Koordinatensystem	

Griechische Buchstaben

γ_{ij}	Schubverzerrungen mit $i, j = x, y, z$ bzw. $i, j = r, \varphi, z$	—
κ_φ	Dimensionsloser Beiwert bei der Normalspannung in Längsrichtung	—
$\kappa_{r\varphi}$	Dimensionsloser Beiwert bei der Schubspannung	—
κ_r	Dimensionsloser Beiwert bei der Normalspannung in Radialrichtung	—
ν	isotrope Querkontraktionszahl / Querdehnungszahl / Poisson-Zahl	—
ν_{ij}	Querkontraktionszahl mit $i, j = x, y, z$ bzw. $i, j = r, \varphi, z$	—
ψ	Der Öffnungswinkel des Bauteils	°
σ_{ii}	Normalspannungen mit $i = x, y, z$ bzw. $i = r, \varphi, z$	$\frac{N}{m^2}$
τ_{ij}	Schubspannungen mit $i, j = x, y, z$ bzw. $i, j = r, \varphi, z$	$\frac{N}{m^2}$
θ	Faserorientierungswinkel	°
ε_{ii}	Normalverzerrungen mit $i = x, y, z$ bzw. $i = r, \varphi, z$	—

Matrizen und Vektoren

$\underline{\underline{\varepsilon}}$	Symmetrischer Verzerrungstensor eines Volumenelements	—
$\underline{\underline{C}}$	Symmetrische Steifigkeitsmatrix	$\frac{N}{m^2}$
$\underline{\underline{K_e}}$	Elementsteifigkeitsmatrix	$\frac{N}{m^2}$
$\underline{\underline{K}}$	Gesamtsteifigkeitsmatrix	$\frac{N}{m^2}$
$\underline{\underline{Q}}$	Symmetrische reduzierte Steifigkeitsmatrix	$\frac{N}{m^2}$
$\underline{\underline{R}}$	Symmetrische reduzierte Nachgiebigkeitsmatrix im ebenen Verzerrungszustand	$\frac{m^2}{N}$
$\underline{\underline{S}}$	Symmetrische Nachgiebigkeitsmatrix	$\frac{m^2}{N}$
$\underline{\sigma}$	Spannungsvektor	$\frac{N}{m^2}$
$\underline{\varepsilon}$	Verzerrungsvektor	—
$\underline{F_e}$	Kraftvektor der Elemente	N
\underline{F}	Kraftvektor der Gesamtstruktur	N
$\underline{v_e}$	Verschiebungsvektor der Elemente	mm
\underline{v}	Verschiebungsvektor der Gesamtstruktur	mm

Abkürzungen und weitere Bezeichnungen

<i>ANSYS</i>	ANalysis SYStem
<i>APDL</i>	Ansys Parametric Design Language
<i>DGL</i>	Differenzialgleichung
<i>ESZ</i>	Ebener Spannungszustand
<i>EVZ</i>	Ebener Verzerrungszustand
<i>FEM</i>	Finite-Elemente-Methode
<i>FVK</i>	Faserverstärkte Kunststoffe
<i>KLT</i>	Klassische Laminattheorie
<i>UD</i>	Unidirektional

Abbildungsverzeichnis

1.1	Verkehrsflugzeug AIRBUS A350 XWB (Quelle: www.airbus.com)	1
1.2	Zusammenfügen von UD-Schichten zu einem Laminat [15]	2
1.3	Struktureller Aufbau einer Flugzeugrumpfschale [9]	2
2.1	Darstellung ebener Spannungsprobleme am Beispiel eines Clips	5
2.2	Kräfte am infinitesimalen Volumenelement [9]	8
3.1	Schematische Darstellung der eingeführten geometrischen Parameter und der Randbedingungen	17
3.2	Das gewählte Koordinatensystem zur Definition der Materialeigenschaften und Auswertung der Ergebnisse	19
3.3	Das Netz im Übergangsbereich	20
3.4	Die Plattenelemente: PLANE42 (links) und PLANE82 (rechts)	21
3.5	Die Volumenelemente: SOLID185 (links) und SOLID186 (rechts)	22
3.6	Darstellung der Elemente bezüglich ihrer Materialeigenschaften	22
3.7	Geometriemodell zur Einleitung der Lasten	26
3.8	Ebenes elastisches Balkenelement BEAM3	26
4.1	Verlauf der Normalspannung σ_{rr} an der Stelle $\varphi = 45^\circ$	29
4.2	Verlauf der Normalspannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ an der Stelle $\varphi = 45^\circ$	29
4.3	Verlauf der Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ an der Stelle $\varphi = 2^\circ$	30
4.4	Verlauf der Normalspannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ an der Stelle $\varphi = 2^\circ$	32
4.5	Verlauf der Normalspannung σ_{rr} an der Stelle $\varphi = 2^\circ$	32
4.6	Verlauf der Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ an der Stelle $\varphi = 2^\circ$	33
4.7	Verlauf der Normalspannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ an der Stelle $\varphi = 2^\circ$	34
4.8	Verlauf der Normalspannung σ_{rr} an der Stelle $\varphi = 2^\circ$	34
4.9	Verlauf der Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ an der Stelle $\varphi = 2^\circ$	35
5.1	Verlauf der Normalspannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ über dem gesamten Bogenbereich	38
5.2	Verlauf der Normalspannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ in Schnitten bei $\varphi = 45^\circ$ und $\varphi = 0^\circ$	38
5.3	Verlauf der Normalspannung σ_{zz}	39
5.4	Verteilung der Normalspannung σ_{rr} im gekrümmten Bereich	40
5.5	Verlauf der Normalspannung σ_{rr} in Schnitten bei $\varphi = 45^\circ$ und $\varphi = 0^\circ$	40
5.6	Verteilung der Normalspannung σ_{xx} im Flansch 1 im Übergangsbereich	41
5.7	Verteilung der Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ im gekrümmten Bereich	42
5.8	Verlauf der Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ im Schnitt bei 0°	42

5.9	Der dimensionslose Beiwert κ_φ an der Stelle $\varphi = 45^\circ$	44
5.10	Der dimensionslose Beiwert κ_φ an der Stelle $\varphi = 0^\circ$	45
5.11	Der dimensionslose Beiwert κ_r an der Stelle $\varphi = 0^\circ$	46
5.12	Der dimensionslose Beiwert κ_r an der Stelle $\varphi = 45^\circ$	46
5.13	Der dimensionslose Beiwert κ_φ an der Stelle $\varphi = 0^\circ$	48
5.14	Der dimensionslose Beiwert κ_φ an der Stelle $\varphi = 45^\circ$	49
5.15	Der dimensionslose Beiwert κ_r an der Stelle $\varphi = 0^\circ$	49
5.16	Der dimensionslose Beiwert κ_r an der Stelle $\varphi = 45^\circ$	50
5.17	Verlauf der Normalspannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ über dem gesamten Bogenbereich	51
5.18	Verlauf der Normalspannung σ_{rr} über dem gesamten Bogenbereich	52
5.19	Verlauf der Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ über dem gesamten Bogenbereich	52
5.20	Der dimensionslose Beiwert κ_φ an der Stelle $\varphi = 0^\circ$	54
5.21	Der dimensionslose Beiwert κ_φ an der Stelle $\varphi = 45^\circ$	54
5.22	Der dimensionslose Beiwert κ_r an der Stelle $\varphi = 0^\circ$	55
5.23	Der dimensionslose Beiwert κ_r an der Stelle $\varphi = 45^\circ$	55
5.24	Der dimensionslose Beiwert $\kappa_{r\varphi}$ an der Stelle $\varphi = 0^\circ$	56
5.25	Der dimensionslose Beiwert $\kappa_{r\varphi}$ an der Stelle $\varphi = 45^\circ$	57
5.26	Der dimensionslose Beiwert κ_φ an der Stelle $\varphi = 45^\circ$	58
5.27	Der dimensionslose Beiwert κ_r an der Stelle $\varphi = 0^\circ$	59
5.28	Der dimensionslose Beiwert κ_r an der Stelle $\varphi = 45^\circ$	59
5.29	Der dimensionslose Beiwert $\kappa_{r\varphi}$ an der Stelle $\varphi = 0^\circ$	60
5.30	Der dimensionslose Beiwert $\kappa_{r\varphi}$ an der Stelle $\varphi = 45^\circ$	60
6.1	Schematische Darstellung eines gekrümmten Balkens unter Momentbelastung	63
6.2	Schematische Darstellung eines gekrümmten Balkens unter Kraftbelastung	72
6.3	Schematische Darstellung eines gekrümmten Balkens unter Momentbelastung	82
7.1	Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Spannung $\sigma_{\varphi\varphi}$	86
7.2	Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Spannung σ_{rr}	87
7.3	Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Spannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ bei $s=3,67$	88
7.4	Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Spannung σ_{rr} bei $s=3,67$	88
7.5	Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Verschiebung u bei $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 45^\circ$	89
7.6	Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Verschiebung v bei $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 45^\circ$	89
7.7	Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Spannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ an den Stellen $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 45^\circ$ bei einer Querkraftbelastung	90
7.8	Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Spannung σ_{rr} an den Stellen $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 45^\circ$ bei einer Querkraftbelastung	91
7.9	Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ an den Stellen $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 45^\circ$ bei einer Querkraftbelastung	91
7.10	Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Verschiebung in die Radialrichtung u bei $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 45^\circ$	92

7.11	Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Verschiebung in die Umfangsrichtung v bei $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 45^\circ$	92
7.12	Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Spannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ an den Stellen $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 45^\circ$ bei einer Normalkraftbelastung	93
7.13	Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Spannung σ_{rr} an den Stellen $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 45^\circ$ bei einer Normalkraftbelastung	94
7.14	Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ an den Stellen $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 45^\circ$ bei einer Normalkraftbelastung	94
7.15	Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Verschiebung in die Radialrichtung u bei $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 45^\circ$	95
7.16	Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Verschiebung in die Umfangsrichtung v bei $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 45^\circ$	95
7.17	Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Normalspannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ bei $\varphi = 45^\circ$	99
7.18	Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Normalspannung σ_{rr} bei $\varphi = 45^\circ$	99
7.19	Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Verschiebung in die Radialrichtung u bei $\varphi = 45^\circ$	100
7.20	Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Verschiebung in die Umfangsrichtung v bei $\varphi = 45^\circ$	100
B.1	Verlauf der Normalspannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ über dem gesamten Bogenbereich	117
B.2	Verlauf der Normalspannung σ_{rr} über dem gesamten Bogenbereich	118
B.3	Verlauf der Normalspannung σ_{zz} über dem gesamten Bogenbereich	118
B.4	Verlauf der Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ über dem gesamten Bogenbereich	119
B.5	Der dimensionslose Beiwert κ_φ an der Stelle $\varphi = 0^\circ$	119
B.6	Der dimensionslose Beiwert κ_φ an der Stelle $\varphi = 45^\circ$	120
B.7	Der dimensionslose Beiwert κ_r an der Stelle $\varphi = 0^\circ$	120
B.8	Der dimensionslose Beiwert κ_r an der Stelle $\varphi = 45^\circ$	121
B.9	Der dimensionslose Beiwert $\kappa_{r\varphi}$ an der Stelle $\varphi = 0^\circ$	121
B.10	Der dimensionslose Beiwert $\kappa_{r\varphi}$ an der Stelle $\varphi = 45^\circ$	122
B.11	Der dimensionslose Beiwert κ_φ an der Stelle $\varphi = 45^\circ$	122
B.12	Der dimensionslose Beiwert κ_φ an der Stelle $\varphi = 0^\circ$	123
B.13	Der dimensionslose Beiwert κ_r an der Stelle $\varphi = 0^\circ$	123
B.14	Der dimensionslose Beiwert κ_r an der Stelle $\varphi = 45^\circ$	124
B.15	Der dimensionslose Beiwert $\kappa_{r\varphi}$ an der Stelle $\varphi = 0^\circ$	124
B.16	Der dimensionslose Beiwert $\kappa_{r\varphi}$ an der Stelle $\varphi = 45^\circ$	125

Tabellenverzeichnis

3.1	Materialdaten einer UD-Schicht	23
3.2	Materialdaten für das Gewebe	23
4.1	Lagenaufbau des Laminats bestehend aus Gewebe	31
4.2	Konvergenzverhalten der Normalspannung σ_{rr} an der Stelle $\varphi = 2^\circ$	35
4.3	Konvergenzverhalten der Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ an der Stelle $\varphi = 2^\circ$	35
5.1	Der innere Radius a in Abhängigkeit vom Krümmungsverhältnis α	48
7.1	Materialdaten einer UD-Schicht im EVZ	86
7.2	Anisotropiewerte im EVZ	86
7.3	Eingabedaten zum Auflösen des Gleichungssystems	98

1 Einleitung

1.1 Allgemeines

Im modernen Flugzeugbau, z.B. bei der Entwicklung der Airbus A350 (Abb. 1.1), werden vermehrt faserverstärkte Kunststoffe (FVK) eingesetzt. Faserverstärkte Kunststoffe bestehen im Wesentlichen aus den Verstärkungsfasern, die in ein Matrixmaterial aus duroplastischem oder thermoplastischem Kunststoff eingebettet werden. Dabei übernehmen die Fasern die Funktion der Aufnahme der Kräfte. Zu den wesentlichen Aufgaben der Matrix zählen die Gewährleistung der Formgebung, Krafteinleitung, Kraftübertragung zwischen den Fasern sowie Schutz der Fasern vor äußeren Einflüssen. Die beiden genannten Elemente (Faser, Matrix) stellen die Grundlage zur Herstellung einer sog. UD-Schicht (unidirektionale Schicht) dar. Aus diesen UD-Schichten werden dann unter der Berücksichtigung des gewünschten Faserorientierungswinkels die Mehrschichtverbunde, die auch als Laminat bezeichnet werden, zusammengesetzt (Abb. 1.2).



Abbildung 1.1: Verkehrsflugzeug AIRBUS A350 XWB (Quelle: www.airbus.com)

Aufgrund eines relativ niedrigen Gewichtes bei gleichzeitig hohen Werten für spezifische Steifigkeit und Festigkeit werden FVK in der Luft- und Raumfahrttechnik vermehrt den klassischen Metallwerkstoffen bevorzugt. Durch eine gerichtete Orientierung der Fasern lassen sich die genannten Eigenschaften einzelfallbezogen einstellen. Neben den zahlreichen Vorteilen gibt es allerdings auch eine Anzahl von materialtypischen Problemen. Dabei sind besonders die geringe Impacttoleranz sowie eine mögliche Trennung der Einzelschichten, sog. Delamination, zu nennen. Die genannten Schädigungsfälle können zu einem Versagen der Struktur führen und sind aus diesem Grund zu vermeiden.

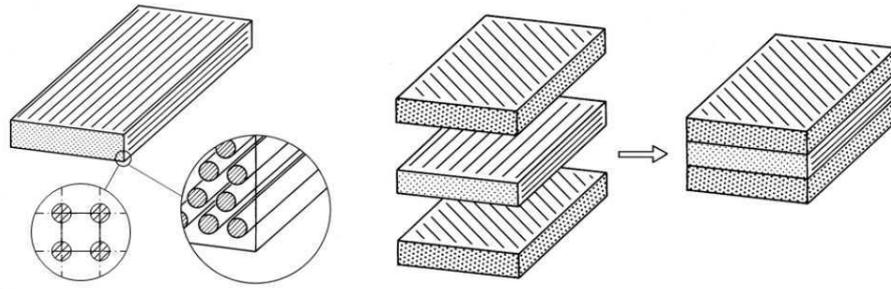


Abbildung 1.2: Zusammenfügen von UD-Schichten zu einem Laminat [15]

Bei der Herstellung eines Flugzeugrumpfes werden mehrere Rumpfsektionen, die wiederum aus mehreren Rumpfschalen bestehen, zusammengefügt. Die Rumpfschalen werden aus strukturgebenden, tragenden Bauteilgruppen zusammengesetzt, dies sind die Rumpfhaut, die Stringer und die Spante, vgl. Abb. 1.3. Die Stringer geben der Struktur die Stabilität in die Längsrichtung und die Spante die Stabilität quer dazu. Die Haut gewährleistet unter anderem das Erhalten des Kabineninnendruckes. Um die genannten Bauteile miteinander zu verbinden, werden Verbindungselemente (Schubwinkel, Clip) verwendet. Der moderne Flugzeugbau verwendet immer komplexere Verbindungselemente. Die Komplexität liegt in erster Linie in den verwendeten Faserverbundwerkstoffen und der Geometrie dieser Bauteile. Der dabei zunehmende Aufwand für die Auslegung, Berechnung und Fertigung rechtfertigt sich mit der steigenden Gewichtseffizienz. Das Gewicht ist eines der aussagekräftigsten Kriterien bei der Analyse der Leistungsfähigkeit eines Verkehrsflugzeuges. Dem Berechnungsingenieur stellt sich dabei die Aufgabe, für die genannten Bauteile bei einer bestimmten äußeren Belastung die Formänderung zu bestimmen. Aus den berechneten Verschiebungen lassen sich mithilfe der Kinematik der vorliegende Verzerrungs- und Spannungszustand bestimmen. Daraus lassen sich wiederum Rückschlüsse auf die Beanspruchung und das mögliche Versagen des Bauteils ziehen.

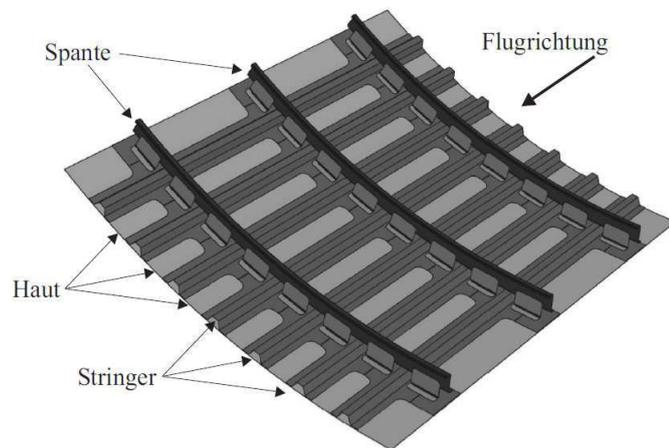


Abbildung 1.3: Struktureller Aufbau einer Flugzeugrumpfschale [9]

Sowohl die Schadensanalyse als auch die Vordimensionierung der Verbindungselemente setzen während der Konstruktionsphase eine genaue Spannungsberechnung voraus. Es existieren Ar-

beiten, die sich mit der analytischen Bestimmung des vorliegenden Spannungshaushaltes in gekrümmten Strukturen beschäftigen, die jedoch meistens ein isotropes Materialmodell voraussetzen. Dabei sind insbesondere die Bücher von Girkmann [4] und Timoshenko [16] zu nennen. Mit der analytischen Spannungsberechnung bei einer anisotropen Platte beschäftigte sich Lekhnitskii [7]. Lekhnitskii leitete für zahlreiche Grundgeometrien die Funktionen zur Bestimmung der Spannungskomponenten für Momenten-, Querkraft- und Normalkraftbelastung her. Die Herleitung der Verschiebungs- und Verzerrungsfunktionen findet jedoch in den meisten Fällen nicht statt. Eine weitere Arbeit auf diesem Gebiet lieferte Blumer [2]. Blumer bestimmte den Spannungshaushalt an Kreisbogenträgern aus Holz, dessen Materialverhalten auch als orthotrop angesehen wird. Bei dieser Ausarbeitung findet die Herleitung der Verschiebungsfunktionen ebenfalls nicht statt. Des Weiteren ist bezüglich dieser Thematik die Arbeit von Mittelstedt [8] zu nennen.

1.2 Themenstellung der Arbeit

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Behandlung von Spannungsfeldern in gekrümmten Composite-Laminat-Strukturen. Aufgrund der Breite des Themengebiets erfolgt eine Beschränkung auf die Betrachtung des zweidimensionalen Spannungszustandes in einem Schubwinkel. Im Wesentlichen ist die Arbeit in zwei Abschnitte zu unterteilen, einen numerischen und einen analytischen. Der Schwerpunkt der numerischen Untersuchung dient dem Aufbau des grundlegenden Verständnisses der Mechanik gekrümmter Strukturen mittels der Methode der finiten Elemente. Für diese Zwecke wird das Berechnungsprogramm ANSYS 11.0 (ANalysis SYStem) herangezogen [12]. Dazu wird der Einfluss unterschiedlicher Parameter auf den Spannungshaushalt untersucht. Des Weiteren werden diese Ergebnisse zur Verifizierung der analytischen Ergebnisse herangezogen. Der analytische Teil widmet sich der Herleitung der Spannungs- und der Verschiebungsfunktionen in gekrümmten orthotropen Strukturen. Dazu wird die Airysche Spannungsfunktion zur Lösung der Bipotentialgleichung herangezogen. Des Weiteren sind für den gekrümmten Bereich die Verschiebungsfunktionen herzuleiten.

Im ersten Kapitel des Hauptteils, vgl. Kap. 2, werden im Rahmen einer Einführung in die lineare Elastizitätstheorie die relevanten Grundlagen vorgestellt. Zusätzlich erfolgt eine Beschreibung der Grundprinzipien der Methode der finiten Elemente. Im Kapitel 3 ist die Beschreibung der Vorgehensweise dargestellt, die zur Modellierung eines Schubwinkels gewählt wurde. Im genannten Kapitel erfolgt des Weiteren die Beschreibung der getroffenen Idealisierung des mechanischen Problems. Anschließend, vgl. Kap. 4, wird die Konvergenzstudie durchgeführt. Das Ergebnis dieser Studie stellt unter anderem eine sinnvolle Relation zwischen dem Rechenaufwand und der Genauigkeit her. Das Kapitel 5 widmet sich der Untersuchung des numerischen Modells. Dabei sollen neben dem Aufbau des Grundverständnisses der Mechanik gekrümmter Strukturen, die Auswirkung unterschiedlicher Parameter auf den Spannungshaushalt untersucht werden. Danach, vgl. Kap. 6, folgt die analytische Herleitung der Spannungs- und Verschiebungsfunktionen gekrümmter orthotroper Lamine unter der Wirkung der Schnittlasten. Der abschließende Vergleich numerischer und analytischer Ergebnisse findet im Kapitel 7 statt.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Grundlagen der linearen Elastizitätstheorie

In diesem Kapitel wird eine Einführung in die Theorie elastischer¹ Strukturen gegeben. Es werden drei Bausteine der Elastizitätstheorie:

- **Kinematik,**
- **Materialgesetz,**
- **Gleichgewichtsbedingungen**

erläutert und deren Grundgleichungen zusammengestellt. Das Vorgehen richtet sich dabei nach [6] und [9] sowie [3], weitere Details sind bei den genannten Werken nachzulesen. Zu Beginn jedes einzelnen Abschnitts wird eine allgemeine dreidimensionale Betrachtung erfolgen. Anschließend erfolgt die Übertragung auf ebene Probleme (ebener Spannungs- bzw. Verzerrungszustand). Dabei werden die relevanten Grundgleichungen sowohl im kartesischen als auch im zylindrischen Koordinatensystem angegeben. Dafür wurden zusätzlich die Werke von [2], [4] und [7] herangezogen.

2.1.1 Betrachtung der ebenen Spannungsprobleme

Als Sonderfall des allgemeinen räumlichen Spannungszustandes ist eine Betrachtung der ebenen Spannungsprobleme möglich. Dabei wird zwischen einem ebenen Spannungszustand ESZ und einem ebenen Verzerrungszustand EVZ unterschieden. Damit schafft man den angesprochenen Übergang zum zweidimensionalen Spannungsproblem.

Ebener Spannungszustand

Als ein einfaches Beispiel des ESZ kann man sich ein ebenes dünnes Blech (Scheibe) vorstellen, welches folgende Kriterien erfüllt:

- die Dicke des Bauteils ist klein gegenüber seinen Abmessungen in der Ebene,
- die Wirkungslinie der Belastung liegt in der Ebene,
- die Spannungskomponenten sind nur von x und y abhängig.

Somit verschwinden (sind zumindest im Vergleich zu den anderen Spannungskomponenten zu vernachlässigen) die Spannungskomponenten σ_{zz} , τ_{xz} und τ_{yz}

$$\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (2.1)$$

¹Von einem elastischen Verhalten der Struktur spricht man, wenn die Verformung des Körpers bei der Entlastung reversibel ist

Aus dem Werkstoffgesetz, auf das zum späteren Zeitpunkt genauer eingegangen wird, folgt dann, dass eine Dehnung in z -Richtung ε_{zz} vorhanden sein kann, jedoch die Schubverzerrungen γ_{xz} und γ_{yz} verschwinden müssen

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0. \quad (2.2)$$

Es bleiben dann nur die Spannungskomponenten σ_{xx} , σ_{yy} und τ_{xy} . Diese sind folglich nur von den Koordinaten x und y abhängig.

Ebener Verzerrungszustand

Ein ebener Verzerrungszustand EVZ liegt dann vor, wenn die Verschiebungskomponente w in z -Richtung verschwindet und die beiden anderen Komponenten u und v nicht von z abhängen:

$$w = 0, \quad u = u(x, y), \quad v = v(x, y). \quad (2.3)$$

Es gilt dann, dass beim ebenen Verzerrungszustand die Verzerrungskomponenten ε_{zz} , γ_{xz} und

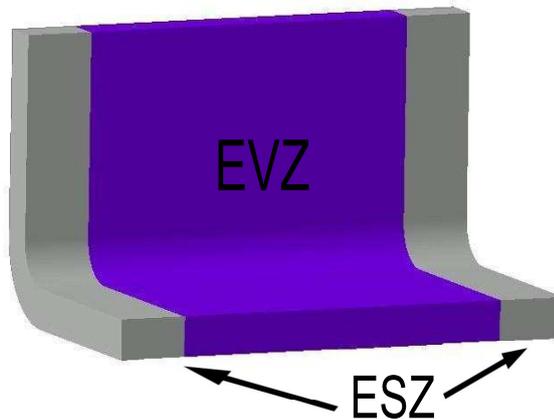


Abbildung 2.1: Darstellung ebener Spannungsprobleme am Beispiel eines Clips

γ_{yz} gleich null sind.

$$\varepsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (2.4)$$

Aus dem Werkstoffgesetz folgt, dass eine Normalspannung σ_{zz} vorhanden sein kann, jedoch die Schubspannungen τ_{xz} und τ_{yz} verschwinden müssen.

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (2.5)$$

Im betrachteten Bauteil tritt ein EVZ auf. Dieses wird infolge der getroffenen Vereinfachung ausschließlich in der XY -Ebene belastet. Des Weiteren wird durch Verklebung oder Vernietung oder auch durch Kombination der beiden gängigen Fügetechniken mit den benachbarten Strukturkomponenten (Stringer, Haut, Spant) die Verformung in z -Richtung annähernd verhindert. Berücksichtigt man die störenden Randeinflüsse, so tritt ein EVZ erst dann auf, wenn diese Einflüsse abgeklungen sind. Anderenfalls liegt ein ESZ vor. Die beschriebenen Zusammenhänge verdeutlicht die Abbildung 2.1.

2.1.2 Kinematik

Durch die kinematischen Beziehungen, welche die Verschiebungen und Verzerrungen verknüpfen, wird die Geometrie der Deformation festgelegt. Bei den Verzerrungen unterscheidet man zwischen den Dehnungen bzw. Stauchungen ε (Normalverzerrungen) und den Gleitungen γ (Schubverzerrungen). Dabei ist die Dehnung ein Maß der Verlängerung bzw. Verkürzung eines kleinen Linienelements im Körper. Bei einer Dehnung oder einer Stauchung ändert der betrachtete Körper demzufolge seine Abmessungen und somit sein Volumen, seine Gestalt bleibt jedoch erhalten. Die Gleitung ist dagegen ein Maß für die Änderung des Winkels zwischen zwei ursprünglich senkrecht aufeinander stehenden Linienelementen. Bei einer Gleitung ändert der Körper seine Gestalt, jedoch nicht sein Volumen.

Viele ingenieurtechnische Auslegungen umfassen Anwendungen, für die nur kleine Deformationen erlaubt sind. Unter dieser Festlegung erhält man im Rahmen der Linearisierung den infinitesimalen Verzerrungstensor $\underline{\underline{\varepsilon}}$ in folgender Darstellung:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Die darin enthaltenen Größen werden in der tensoriellen Schreibweise wie folgt ausgedrückt:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = x, y, z). \quad (2.7)$$

In der praktischen Anwendung ist für die Beziehung (2.6) die sog. Ingenieurschreibweise (2.8) üblich

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Des Weiteren sind in der Literatur verschiedene Schreibweisen für die Spannungen (2.9)

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

und für die Verzerrungen (2.10)

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

gebräuchlich. Bei der vorliegenden Ausarbeitung wird die Schreibweise verwendet, die jeweils der zweite Vektor angibt.

Über die Gleichung (2.7) sind 6 Verzerrungskomponenten mit drei Verschiebungsfunktionen gekoppelt. Im Fall, dass die Verschiebungen durch die gegebenen Verzerrungen bestimmt werden sollen, ist das System der partiellen Differentialgleichungen kinematisch überbestimmt. Damit die Verzerrungen eine eindeutige Verschiebungsfunktion liefern, müssen die so genannten Kompatibilitätsbedingungen oder Verträglichkeitsbedingungen erfüllt sein. Man gewinnt diese Bedingungen, indem die Verschiebungen in der Gleichung (2.7) nach der zweimaligen Differentiation derselben Gleichung durch die Verzerrungen eliminiert werden.

Die kinematischen Beziehungen im kartesischen Koordinatensystem im 2D-Fall

Im Falle des ESZ oder EVZ werden die kinematischen Beziehungen in kartesischen Koordinaten wie folgt angegeben:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.11)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (2.12)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.13)$$

Aus den kinematischen Beziehungen (2.11) bis (2.13) wird die Kompatibilitätsbedingung (2.14) hergeleitet

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2}. \quad (2.14)$$

Die kinematischen Beziehungen im zylindrischen Koordinatensystem im 2D-Fall

Die kinematischen Beziehungen im zylindrischen Koordinatensystem werden in den nachstehenden Gleichungen (2.15) bis (2.17) wiedergegeben:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad (2.15)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r}, \quad (2.16)$$

$$\gamma_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \quad (2.17)$$

Die Kompatibilitätsbedingung kann wie folgt angegeben werden:

$$\frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} (\gamma_{r\varphi} r) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \varphi^2} - \frac{r \partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} + 2r \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial r^2}. \quad (2.18)$$

2.1.3 Die Gleichgewichtsbedingungen

Eine der Möglichkeiten, die Gleichgewichtsbedingungen aufzustellen, besteht in der Gleichgewichtsbetrachtung an einem infinitesimalen Volumenelement, welches die Abbildung 2.2 darstellt.

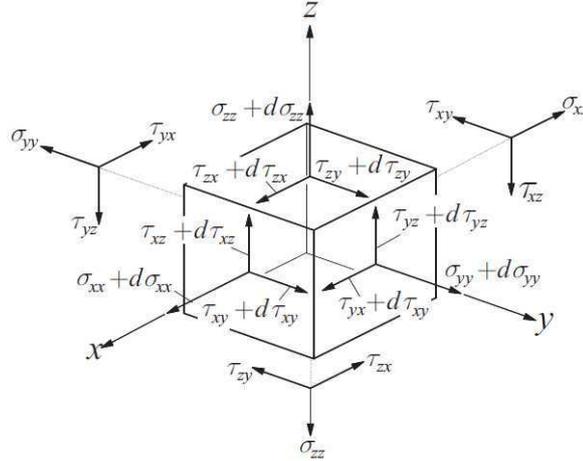


Abbildung 2.2: Kräfte am infinitesimalen Volumenelement [9]

An diesem freigeschnittenen Volumenelement müssen die Spannungen im Gleichgewicht bleiben. Die daraus resultierenden drei Gleichgewichtsbedingungen lassen sich wie folgt in der Indexnotation zusammenfassen:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0. \quad (2.19)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen im kartesischen Koordinatensystem im 2D-Fall

Für eine ebene Betrachtung des Gleichgewichtes im kartesischen Koordinatensystem und bei Vernachlässigung der Volumenkräfte ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0, \quad (2.21)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}. \quad (2.22)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen im zylindrischen Koordinatensystem im 2D-Fall

Für eine ebene Betrachtung des Gleichgewichtes ergeben sich im zylindrischen Koordinatensystem die folgenden Beziehungen:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = 0, \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + r \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + 2\tau_{r\varphi} = 0, \quad (2.24)$$

$$\tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi r}. \quad (2.25)$$

2.1.4 Das verallgemeinerte Hookesche Gesetz

Das Hookesche Gesetz beschreibt das lineare Materialverhalten unter Belastung stehender Körper. Dieses Gesetz besagt, dass eine elastische Deformation ε eines Körpers proportional zur anliegenden Spannung σ ist. Im Allgemeinen kann eine Spannung durch eine Kraft, eine Temperaturänderung oder auch Feuchtigkeit hervorgerufen werden. Im Rahmen dieser Ausarbeitung sollen die beiden zuletzt genannten Einflüsse vernachlässigt werden.

Im allgemeinen Fall wird das Hookesche Gesetz ausgedrückt durch eine lineare Tensorgleichung

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad (2.26)$$

mit dem Tensor 4. Stufe C_{ijkl} , den man als Elastizitätstensor bezeichnet. Der Spannungstensor σ_{ij} , sowie der Verzerrungstensor ε_{kl} sind Tensoren 2. Stufe mit jeweils 9 Komponenten. Es ist üblich, für diese Tensorgleichung eine kondensierte Vektor-Matrix-Notation zu verwenden wie folgt: (2.27):

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j \quad (i, j = 1, \dots, 6). \quad (2.27)$$

Diese Beziehung lässt sich in der matriziellen Form schreiben als

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}}\underline{\underline{\varepsilon}}, \quad (2.28)$$

worin die Matrix $\underline{\underline{C}}$ die sog. Steifigkeitsmatrix ist. Durch deren Inversion lassen sich unter Vorgabe der Verzerrungen die Spannungskomponenten bestimmen:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{S}}\underline{\underline{\sigma}}. \quad (2.29)$$

Die dadurch entstandene Matrix $\underline{\underline{S}}$ wird als Nachgiebigkeitsmatrix bezeichnet. Zwischen den beiden Matrizen $\underline{\underline{S}}$ und $\underline{\underline{C}}$ gilt somit folgender Zusammenhang:

$$\underline{\underline{C}}^{-1} = \underline{\underline{S}} \quad (2.30)$$

bzw.

$$\underline{\underline{S}}^{-1} = \underline{\underline{C}} \quad (2.31)$$

Bei einem anisotropen Material sind die Matrizen $\underline{\underline{S}}$ und $\underline{\underline{C}}$ vollbesetzt. Damit wird ein anisotropes Materialverhalten durch 36 voneinander unabhängigen Konstanten beschrieben. In [9] findet sich der Beweis, dass die genannten Matrizen symmetrisch sind. Sie besitzen folglich 21 unabhängige Konstanten.

Die Berechnung unter der Berücksichtigung der allgemeinen Anisotropie ist sehr kompliziert und für die Faserverbundtechnik nur von untergeordneter Bedeutung. Aus diesem Grund beschränkt sich die vorliegende Arbeit auf einen Sonderfall der Anisotropie, nämlich auf die sog. Orthotropie. Bei den unidirektional verstärkten Einzelschichten, die als orthotrop angenommen werden können, existieren in jedem Punkt drei Symmetrieebenen. Bezüglich dieser Ebenen sind die Materialeigenschaften symmetrisch: eine Ebene, zu der die Fasern parallel

ausgerichtet sind, sowie zwei weitere Ebenen senkrecht dazu. Damit erfolgt bei dem Hoo-keschen Gesetz für orthotrope Werkstoffe eine Entkopplung zwischen den Dehnungen und Gleitungen. Demnach bewirken die Normalspannungen σ_{xx} , σ_{yy} und σ_{zz} ausschließlich die Dehnungen in alle drei Koordinatenrichtungen. Gleichzeitig bewirken die Schubspannungen τ_{xy} , τ_{xz} und τ_{yz} nur die ihnen zugeordneten Schubverzerrungen. Demnach enthalten die Nachgiebigkeitsmatrix $\underline{\underline{S}}$ und die Steifigkeitsmatrix $\underline{\underline{C}}$ bei diesem allgemeinen Fall zwölf von Null verschiedene Konstanten. Diese sind von den zwölf Materialkennwerten: je ein Elastizitätsmodul E_i , ein Schubmodul G_{ij} sowie eine Querdehnungszahl ν_{ij} bezüglich jeder Koordinatenrichtung $i, j = 1, 2, 3$. Zwischen den Elastizitätsmodulen und den Querdehnungszahlen gilt jedoch die Beziehung (2.32):

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j}. \quad (2.32)$$

Somit verbleiben nur neun der zwölf Parameter, die voneinander unabhängig sind. Mit diesen Angaben schreibt sich die Nachgiebigkeitsmatrix für orthotropes Material in kartesischen Koordinaten als:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & -\frac{\nu_{zx}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{zy}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xz}}{E_x} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{zx}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Die Steifigkeitsmatrix ergibt sich durch Inversion der Nachgiebigkeitsmatrix.

Betrachtet man nun den ESZ, so reduziert sich die Anzahl der Terme der Nachgiebigkeitsmatrix. Die Beziehung (2.33) lautet dann in der reduzierten Form:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

und in der Matrix-Schreibweise:

$$\tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \tilde{\underline{\underline{S}}} \cdot \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}. \quad (2.35)$$

In der Matrix-Schreibweise soll die Tilde darauf hinweisen, dass es sich um die reduzierten Vektoren bzw. Matrizen handelt.

Das Gleichungssystem (2.34) kann durch Umformen und Inversion nach (2.31) in die Form gebracht werden

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_x}{1-\nu_{yx}\nu_{xy}} & \frac{\nu_{yx}E_x}{1-\nu_{yx}\nu_{xy}} & 0 \\ \frac{\nu_{xy}E_y}{1-\nu_{yx}\nu_{xy}} & \frac{E_y}{1-\nu_{yx}\nu_{xy}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

anschließend kann man den angegebenen Zusammenhang in der Matrix-Schreibweise darstellen

$$\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} = \underline{\underline{\tilde{S}}}^{-1} \underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}} = \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}. \quad (2.37)$$

Die in der Beziehung (2.37) enthaltene Matrix $\underline{\underline{Q}}$ wird als reduzierte Steifigkeitsmatrix bezeichnet. Die reduzierte Steifigkeitsmatrix findet den Eingang in die Rechnung z.B. bei der Betrachtung von Laminaten.

In Anlehnung an die Beschreibung des EVZ und des ESZ im Kapitel 2.1.1 ist eine eindeutige Korrelation der beiden Zustände zu erkennen. Die Verschiebungen sind von der Koordinate z absolut unabhängig. Dem zufolge hängen auch die auftretenden Spannungen und Verzerrungen nur von den restlichen beiden Koordinaten x und y ab. Im Bezug auf die Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie besteht der einzige Unterschied bei den Konstanten des Materialgesetzes. Demnach kann man die Ergebnisse eines im ESZ berechneten Problems in den EVZ übertragen und umgekehrt. Die Terme der reduzierten Nachgiebigkeitsmatrix im EVZ können mit R_{ij} abgekürzt werden. Zwischen den Termen der Nachgiebigkeitsmatrix im ESZ S_{ij} und den Termen derselben Matrix im EVZ gilt laut [8] der Zusammenhang:

$$R_{ij} = S_{ij} - \frac{S_{iz}S_{jz}}{S_{zz}}. \quad (2.38)$$

Bei dem isotropen Materialverhalten erfolgt die Umrechnung des Elastizitätsmoduls nach (2.39) und der Querkontraktionszahl nach (2.40).

$$E' = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \quad (2.39)$$

$$\nu' = \frac{\nu}{(1 - \nu)} \quad (2.40)$$

Dabei weist der Apostroph darauf hin, dass es sich um die Größen im ESZ handelt [6].

Einführung des Anisotropiewertes

Bei der Untersuchung der Bauteile mit anisotropem Materialverhalten ist es sinnvoll, einige dimensionslose Parameter einzuführen. Diese werden bei dem Materialgesetz in die Rechnung Eingang finden. Der Grad der Anisotropie wird sowohl für das kartesische (2.41) als auch für das zylindrische (2.42) Koordinatensystem wie folgt definiert:

$$s = \sqrt{\frac{E_y}{E_x}}; k = \sqrt{\frac{E_y}{G_{xy}}}, \quad (2.41)$$

$$s = \sqrt{\frac{E_\varphi}{E_r}}; k = \sqrt{\frac{E_\varphi}{G_{r\varphi}}}. \quad (2.42)$$

Ein weiterer Anisotropiewert wird bei den polarorthotropen Kreisbogenscheiben benutzt und ist bei Blumer [2] wie folgt angegeben:

$$n = \sqrt{1 + s^2 + k^2 - 2\nu_{\varphi r}}. \quad (2.43)$$

Hookesches Materialgesetz im kartesischen Koordinatensystem

Das Hookesche Materialgesetz lässt sich unter Berücksichtigung der Anisotropiewerte (2.41) und der Beziehung (2.32) in folgender Darstellung angeben:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E_y} (\sigma_{xx} - \nu_{xy}\sigma_{yy}), \quad (2.44)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E_y} (s^2\sigma_{yy} - \nu_{xy}\sigma_{xx}), \quad (2.45)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{E_y} k^2 \tau_{xy}. \quad (2.46)$$

Hookesches Materialgesetz im zylindrischen Koordinatensystem

Bei dem zylindrischen Koordinatensystem unter Berücksichtigung der Anisotropiewerte (2.42) und der Beziehung (2.32) gelten folgende Zusammenhänge:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E_\varphi} (s^2\sigma_{rr} - \nu_{r\varphi}\sigma_{\varphi\varphi}), \quad (2.47)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{E_\varphi} (\sigma_{\varphi\varphi} - \nu_{r\varphi}\sigma_{rr}), \quad (2.48)$$

$$\gamma_{r\varphi} = \frac{1}{E_\varphi} k^2 \tau_{r\varphi}. \quad (2.49)$$

2.2 Lösungsansatz der linearen Elastizitätstheorie

Zur Herleitung der Bipotentialgleichung, die auch als Scheibengleichung bezeichnet wird, werden die Volumenkräfte, die Eingang in die Gleichgewichtsbedingungen fanden, zu Null gesetzt. Unter dieser Voraussetzung wird in [3] gezeigt, dass für die beiden ebenen Zustände (EVZ und ESZ) dieselbe Bipotentialgleichung gilt.

2.2.1 Herleitung der Bipotentialgleichung im kartesischen Koordinatensystem

Zur Herleitung der Scheibengleichung wird anstatt der kinematischen Beziehungen die Kompatibilitätsbedingung herangezogen. Ersetzt man in (2.14) gemäß (2.11) bis (2.13) die Verzerrungen durch die Spannungen, so bekommt man folgende Beziehung:

$$k^2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} - \nu_{xy} \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + s^2 \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} - \nu_{xy} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2}. \quad (2.50)$$

Die Anzahl der Unbekannten lässt sich durch Einführen der Airyschen ² Spannungsfunktion $F(x, y)$ reduzieren. Diese Spannungsfunktion hängt mit den Spannungskomponenten wie folgt zusammen:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad (2.51)$$

²Sir George Airy, engl. Mathematiker 1801-1892

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad (2.52)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (2.53)$$

Damit wird das ebene Problem auf eine einzige partielle homogene Differentialgleichung vierter Ordnung, die für eine orthotrope Scheibe gilt, zurückgeführt

$$0 = s^2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + (k^2 - 2\nu_{xy}) \frac{\partial^4 F}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4}. \quad (2.54)$$

Beim Vorliegen eines isotropen Materialverhaltens liefern die Ausdrücke (2.41) für die Anisotropiewerte folgende Werte bzw. Beziehungen:

$$s^2 = 1, \quad (2.55)$$

$$k^2 = 2(1 + \nu_{xy}). \quad (2.56)$$

Werden diese Werte in die Gleichung 2.54 eingesetzt, so vereinfacht sich diese zu:

$$0 = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4}. \quad (2.57)$$

Mit dem sog. Laplace-Operator für kartesische Koordinatensysteme

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.58)$$

lässt sich die Gleichung (2.57) zu

$$\Delta \Delta F = 0 \quad (2.59)$$

vereinfachen.

Zurückgehend auf die Beziehungen (2.51) bis (2.53) lassen sich mithilfe der Airyschen Spannungsfunktion F die Spannungskomponenten bestimmen. Die mit der Airyschen Spannungsfunktion ermittelten Spannungen erfüllen sowohl die Gleichgewichtsbedingungen als auch die Kompatibilitätsbedingung. Diese Gleichung besitzt unendlich viele Lösungen. Die größte Schwierigkeit besteht im Auffinden einer Lösung, die auch den geltenden Randbedingungen genügt. Eine allgemeine Lösung der Bipotentialgleichung ist nicht bekannt. Es wurden jedoch einige Ansätze hergeleitet, die in [4] oder [6] aufgelistet sind.

2.2.2 Herleitung der Bipotentialgleichung im zylindrischen Koordinatensystem

Im zylindrischen Koordinatensystem ist die Airysche Spannungsfunktion von den Variablen r und φ abhängig: $F(r, \varphi)$. Die Spannungskomponenten sind wie folgt definiert:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}, \quad (2.60)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad (2.61)$$

$$\tau_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right). \quad (2.62)$$

Für das zylindrische Koordinatensystem gilt der folgende Laplace-Operator:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}. \quad (2.63)$$

Nach [2] lautet mit dem Laplace-Operator aus (2.63) die Bipotentialgleichung für orthotrope Werkstoffe im zylindrischen Koordinatensystem dann:

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\partial^4 F}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 F}{\partial r^3} - \frac{s^2}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{s^2}{r^3} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{s^2}{r^4} \frac{\partial^4 F}{\partial \varphi^4} \\ & + \frac{(k^2 - 2\nu_{\varphi r})}{r^2} \frac{\partial^4 F}{\partial \varphi^2 \partial r^2} - \frac{(k^2 - 2\nu_{\varphi r})}{r^3} \frac{\partial^3 F}{\partial \varphi^2 \partial r} + \frac{(k^2 + 2s^2 - 2\nu_{\varphi r})}{r^4} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

2.3 Grundlagen und Prinzip der Methode der finiten Elemente

In der technischen Anwendung erfolgt die Beschreibung eines physikalischen Modells mithilfe der Differentialgleichungen (*DGL*). Es ist zu beachten, dass für eine vollständige Beschreibung alle Randbedingungen herangezogen werden müssen. Bei den Randbedingungen unterscheidet man zwischen den geometrischen und denen, die durch äußere Lasten vorgegeben sind. Zur Lösung dieser Differentialgleichungen stehen analytische (vgl. Kap. 2.2) und numerische Lösungsmethoden zur Verfügung. Analytische Methoden zur Lösung einer Differentialgleichung sind auf wenige spezielle Fälle beschränkt. Die Bestimmung einer solchen Lösung erfordert oftmals eine große Anzahl von Annahmen und Vereinfachungen. Von dieser Lösung wird jedoch erwartet, dass sie die realen Verhältnisse möglichst nah beschreibt. Für die in der Realität vorkommenden komplexen Geometrien und dreidimensionalen Spannungszustände werden numerische Methoden herangezogen. Von diesen Methoden hat sich die Methode der finiten Elemente FEM als allgemeines Verfahren in vielen Anwendungen durchgesetzt. Die FEM beschränkt sich nicht nur auf den Anwendungsfall der Strukturberechnung, sondern ist auf weitere physikalische Probleme übertragbar. Dabei sind z.B. die Simulation der Strömungsvorgänge, Elektromechanik und weitere Anwendungsfälle zu nennen. Für den Anwendungsfall Strukturberechnung mittels FEM ist nach [10] der nachstehende Ablauf typisch:

1. Preprocessing:

- Erzeugen der Geometrie,
- Festlegen des Elementtyps,
- Zuweisen der Materialdaten,
- Vernetzen der Struktur,
- Definieren der Randbedingungen und Aufbringen der Lasten.

2. Aufbau und Lösen des Gleichungssystems:

- Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix,

- Zusammenbau der Elementsteifigkeitsmatrizen zu einer Gesamtsteifigkeitsmatrix,
 - Lösen des Gleichungssystems,
 - Berechnen der gesuchten Verschiebungen und den daraus resultierenden Spannungen.
3. Postprocessing
- graphische Darstellung der Ergebnisse,
 - Ergebnisauswertung.

Das allgemeine Prinzip der FEM ist, das meist sehr komplizierte Bauteil in eine bestimmte Anzahl endlich kleiner Teile, die finiten Elemente, zu zerlegen. Dieser Vorgang wird auch als Diskretisierung bezeichnet. Die im Sinne der Idealisierung vereinfachte Gesamtgeometrie wird durch die Elemente bzw. deren Knoten beschrieben. An diesen Knoten werden dann die Beziehungen, die einen Zusammenhang zwischen den angreifenden Kräften \underline{F}_e und den Verschiebungen \underline{v}_e darstellen, in Form einer sog. Elementsteifigkeitsmatrix \underline{K}_e formuliert. Den beschriebenen Zusammenhang beschreibt das folgende Gleichungssystem (2.65):

$$\underline{K}_e \underline{v}_e = \underline{F}_e. \quad (2.65)$$

Durch das Assemblieren der Elementsteifigkeitsmatrizen erhält man eine Gesamtsteifigkeitsmatrix \underline{K} des gesamten Bauteils. Durch diese Vorgehensweise geht (2.65) in folgende Form über:

$$\underline{K} \underline{v} = \underline{F}. \quad (2.66)$$

Worin die Größe \underline{F} den Kraftvektor und die Größe \underline{v} den Verschiebungsvektor der gesamten Struktur darstellen.

An dieser Stelle ist es zu erwähnen, dass die komplette Berechnung heutzutage vom Rechner automatisch durchgeführt wird und somit nur wenig beeinflusst werden kann. Eine weiterführende und ausführliche Behandlung dieser Thematik ist in [1] und [17] beschrieben.

3 Modellierung

Die wichtigste Aufgabe bei der Durchführung einer Strukturanalyse mithilfe eines Berechnungsprogrammes ist die Erstellung eines Modells mit dem Preprozessor. In diesem Arbeitsschritt wird das reale Bauteil in ein Rechenmodell so überführt, dass die geforderte Übereinstimmung mit der Realität und damit die erforderliche Genauigkeit der Ergebnisse erreicht wird.

Um die unterschiedlichen Gestaltungsvariationen eines Bauteils numerisch schneller zu analysieren und miteinander zu vergleichen, ist es sinnvoll, ein voll-parametrisches Modell aufzubauen. Durch eine einmalige Programmierung der für eine vollständige Berechnung relevanten Schritte, lässt sich beispielsweise auf die zeitraubende Erstellung eines neuen Modells verzichten. Damit wird eine einzelfallbezogene Änderung der gewünschten Parameter und die anschließende Berechnung schnell vollzogen. Die Modellierung des zu untersuchenden L-Winkels erfolgt in der APDL-Sprache (Ansys Parametric Design Language), die zur Erstellung eines Skriptes benutzt wird. Das Skript wird als Vorlage für die Berechnung mittels ANSYS benutzt. Die für die Modellierung relevanten Schritte werden im weiteren Verlauf dieses Kapitels beschrieben und erläutert. Eine ausführliche Beschreibung der elementaren APDL-Befehle findet nicht statt. Dafür wird der interessierte Leser an die Fachliteratur [10], sowie auf die Programmdokumentation [12] verwiesen.

3.1 Idealisierung

Der Arbeitsschritt der Idealisierung umfasst das ingenieurmäßige Durchdenken der Aufgabenstellung und deren technische Umsetzung in ein numerisches Modell des zu analysierenden Bauteils.

Die zu betrachtende Aufgabe wird mit einer statischen linearen strukturmechanischen Berechnung durchgeführt. Für die Minimierung der Rechenzeit und der erforderlichen Rechen- sowie Speicherkapazitäten muss das Ziel verfolgt werden, mit möglichst wenig Elementen und Knoten eine möglichst große Genauigkeit zu erreichen. Aus den genannten Gründen wird das Modell ein zweidimensionaler Schnitt durch einen dreidimensional ausgedehnten L-Winkel sein. In der Realität herrscht in einem Kontinuum der ebene Verzerrungszustand, vgl. Kap. 2.1.1. Diese Tatsache wird berücksichtigt, indem die entsprechenden Freiheitsgrade der relevanten Knoten miteinander gekoppelt bzw. gesperrt werden. Damit entsteht ein „unendlich“ langes Bauteil. Des Weiteren wird das Bauteil nur in seiner Ebene belastet. Aufgrund dieser Beschaffenheit kann das Bauteil mit Volumenelementen als auch mit den Plattenelementen modelliert werden. Bei der Auswahl der Elemente ist zusätzlich zu beachten, dass diese die orthotropen Materialeigenschaften abbilden können.

3.2 Erstellen der Geometrie

Festlegen der Parameter

Da bei der folgenden Strukturanalyse viele Parameter verändert werden können, wird zur Vereinfachung folgendes festgelegt:

- eine konstante Anzahl der UD-Schichten konstanter Dicke über dem gesamten Bauteilquerschnitt und daraus resultierende konstante Bauteildicke,
- Festeinspannung an einem Ende,
- Einleitung der Lasten als Reaktionskräfte N, Q bzw. als Reaktionsmoment M ,
- konstanter Radius r im gekrümmten Bereich.

Zusätzlich müssen folgende Parameter zur vollständigen Beschreibung des Modells definiert werden:

- Lagenaufbau und damit verbundene Anzahl der Schichten,
- Länge der Flansche l_1 und l_2 ,
- Öffnungswinkel ψ ,
- der innere Radius a und der äußere Radius b ,
- Breite des Bauteils L ,
- Werkstoffparameter.

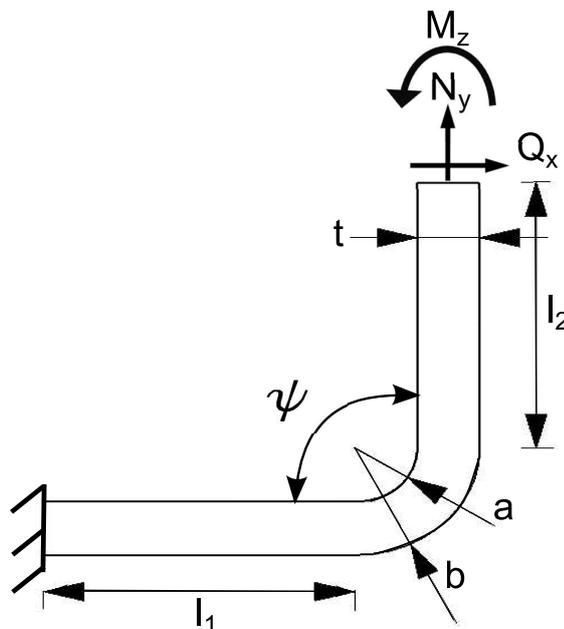


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung der eingeführten geometrischen Parameter und der Randbedingungen

Die Abbildung 3.1 stellt den Querschnitt des betrachteten Bauteils mit der Beschriftung der geometrischen Parameter und der geltenden Randbedingungen dar. Zusätzlich sind die Ränder gekennzeichnet, an denen die Lasteneinleitung und die Festeinspannung erfolgen.

Konsistentes Einheitensystem

Bei der Anwendung von ANSYS existiert keine Festlegung auf ein bestimmtes vom Programm vorgegebenes Einheitensystem. Genauso wie alle Finite-Elemente-Programme rechnet auch ANSYS mit dimensionslosen Zahlen. Aus diesem Grund ist es erforderlich für die Angabe von physikalischen Größen konsistent zu bleiben. Die gewählten Einheiten werden auch für die Ausgabe der Ergebnisse durchgängig eingehalten. Bei der Strukturberechnung ist eine Festlegung von mindestens drei Einheiten zu treffen. Die drei physikalischen Größen sind hierbei Masse, Zeit und Länge. Die restlichen Einheiten werden daraus abgeleitet. Die unterschiedlichen Variationen der Grundeinheiten und der Umrechnungen sind in [10] aufgelistet.

Für die Durchführung der Berechnung wird in der vorliegenden Arbeit das System „mm-t-s“ verwendet. Dieses System ermöglicht die Eingabe und Ausgabe von Kräften, Spannungen und Verschiebungen in den gewohnten Einheiten, diese sind $[N]$, $[MPa]$ und $[mm]$. Die Eingabe und Ausgabe von Momenten erfolgt jedoch in der Einheit $[Nmm]$.

Koordinatensysteme

Zusätzlich zum vordefinierten globalen Koordinatensystem bietet ANSYS die Möglichkeit, lokale Koordinatensysteme zu definieren. Ein lokales Koordinatensystem kann in allen drei Arten (kartesisch, zylindrisch und sphärisch) erzeugt werden. Diese Möglichkeit erleichtert die Erstellung der Geometrie und die Auswertung der Ergebnisse wesentlich. Für den gekrümmten Bereich wird ein zylindrisches Koordinatensystem mit der Koordinate in Umfangsrichtung φ und einer radialen Koordinate r definiert. Zusätzlich werden diese Koordinatensysteme zur Rotation der Elementkoordinatensysteme verwendet, um deren einheitliche Ausrichtung zu erreichen. Diese Maßnahme ist bei den orthotropen Werkstoffeigenschaften sogar notwendig. Die Ausrichtung der Koordinaten über dem L-Winkel zeigt die Abbildung 3.2. Mit MP ist zusätzlich der Koordinatenursprung des zylindrischen Koordinatensystems angegeben. Im gekrümmten Bereich korrespondieren die Koordinaten r mit x und φ mit y . Die Koordinate z weist bei beiden Koordinatensystemen dieselbe Ausrichtung auf.

Das Koordinatensystem der Knoten bestimmt die Richtung der Freiheitsgrade eines einzelnen Knotens. Jeder Knoten besitzt sein eigenes Koordinatensystem, dessen Ursprung im Knoten selber liegt. Man kann das Koordinatensystem der einzelnen Knoten in das aktivierte Koordinatensystem rotieren. Diese Möglichkeit wird genutzt um die Reaktionslasten in alle gewünschten Richtungen zu definieren.

Vorgehensweise bei der Geometrierstellung

Zuerst werden die Geometriepunkte an beiden Rändern des Bauteils, sowie Rändern des Bogens generiert. Die Generierung erfolgt mithilfe einer DO-Schleife. Eine DO-Schleife wiederholt eine Kommandosequenz so lange, wie eine Laufbedingung gültig ist. Eine vollständige Laufbedingung beinhaltet den Laufparameter (z.B. i), den Anfangs- und Endwert, sowie das Inkrement. Zusätzlich wird die Möglichkeit der Benennung der Punkte ausgenutzt. Damit

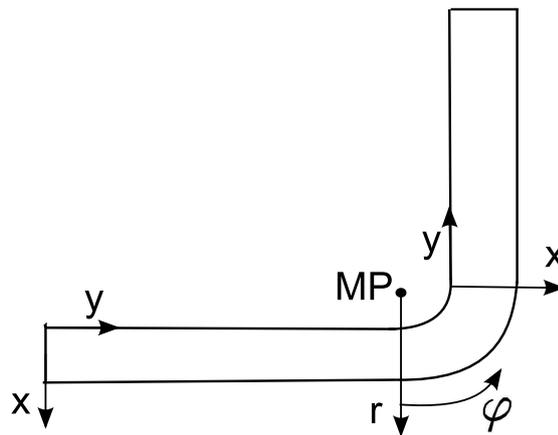


Abbildung 3.2: Das gewählte Koordinatensystem zur Definition der Materialeigenschaften und Auswertung der Ergebnisse

weist die Punktnummerierung an diesem Rand eine Regelmäßigkeit auf, was bei den nächsten Arbeitsschritten eine Benutzung der DO-Schleife ermöglicht. Die darauf folgende Erstellung der Linien und der Flächen erfolgt nach demselben Muster.

3.3 Vernetzung

Nach dem Erzeugen des Geometriemodells wird dieses vernetzt. Vor der Generierung eines Netzes werden zuerst einige vorbereitende Maßnahmen getroffen. Zusätzlich müssen die Materialeigenschaften, der Elementtyp und die Profileigenschaften festgelegt werden.

3.3.1 Erstellung einer Netzfacette

Die Feinheit der Diskretisierung¹ hat maßgeblichen Einfluss auf die Genauigkeit der Ergebnisse der Näherungsrechnung. Durch die Vorgabe des Parameters, welcher die Anzahl der Lagen in einem Laminat festlegt, wurde bereits eine Maßnahme bezüglich der Netzfeinheit getroffen. Um weiteren Einfluss auf die Elementgröße zu nehmen, wird ein Parameter definiert, welcher die Anzahl der Elemente pro Lage in Dickenrichtung bestimmt. Dieser Parameter wird bei der Konvergenzstudie festgelegt und stellt eine sinnvolle Relation zwischen Rechenaufwand und Ergebnisgenauigkeit dar. Die Konvergenzstudie wird in dieser Ausarbeitung im Anschluss an die Modellierung durchgeführt.

Bei der Vernetzung wird ein möglichst gleichförmiges Netz mit etwa gleich großen Elementen angestrebt. ANSYS bietet dabei die Möglichkeit die erzeugten Linien mit der zuvor definierten Elementgröße zu unterteilen. Diese Unterteilung dient als Muster für die Vernetzung und wird auf jedem Fall eingehalten. Bei den rechtwinkligen Geometrien werden die erzeugten Elemente aufgrund der gleichen Länge der gegenüberliegenden Linien dieselbe Größe aufweisen. Bei gekrümmter Geometrie sind die gegenüberliegenden Linien hingegen unterschiedlich lang.

¹ Einteilung in eine endliche Anzahl endlich großer Elemente

Das führt dazu, dass diese Bereiche entlang der unterschiedlich langen Linien entweder mit der gleichen Anzahl der Elemente oder mit der gleichen Elementgröße unterteilt werden müssen. In der vorliegenden Arbeit wurde eine Entscheidung zu Gunsten der ersten Möglichkeit getroffen. Es wurde über dem Querschnitt eine Elementgröße in Abhängigkeit vom Radius r definiert. Die tatsächliche vordefinierte Elementgröße weisen dabei nur die Elemente bei dem mittleren Radius r_m auf. Die nachstehende Abbildung 3.4 stellt das vernetzte Bauteil im Übergangsbereich dar.

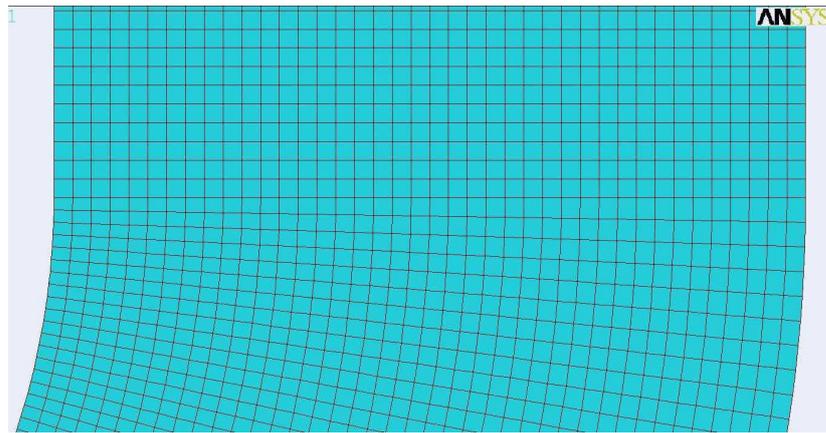


Abbildung 3.3: Das Netz im Übergangsbereich

Vor der eigentlichen Vernetzung mit den Volumenelementen wird eine Netzfacette mit dem definierten Muster aufgebaut. Die Generierung erfolgt mithilfe der Oberflächenelemente (MESH200). Eigentlich kann diese Netzfacette in Verbindung mit allen bei ANSYS zur Verfügung stehenden Elementen benutzt werden. Die gewählte Methode zur Geometrierzeugung ist jedoch nur für Volumenelemente notwendig. Es ist zu beachten, dass die Knotenanzahl des Elementes MESH200 mit der Knotenanzahl der Volumenelemente korrespondieren muss. Daher muss eine Anpassung der MESH200-Elemente an die gewünschten Elemente erfolgen. Das geschieht über die Einstellung der Optionen bei dem Elementtyp MESH200. Im Gegensatz zu allen anderen Elementen erfordert dieser Elementtyp keine weiteren Angaben bezüglich der Materialeigenschaften usw.

3.3.2 Auswahl der geeigneten Elementtypen

In diesem Abschnitt erfolgt eine Beschreibung der relevanten Elemente. Alle Informationen diesbezüglich wurden der ANSYS Dokumentation [12] entnommen.

In Anlehnung an die Idealisierung, vgl. Kap. 3.1, sind Elemente erforderlich, die in der Lage sind die orthotropen Materialeigenschaften abzubilden. Zwar stellt ANSYS spezielle Verbundelemente (layered shell, layered solid) zur Verfügung, die aber für das vorliegende Problem keine sinnvolle Modellierung ermöglichen. Für eine realitätsnahe Abbildung der Gesamtstruktur sind die Elementtypen PLANE42, PLANE82, SOLID185 sowie SOLID186 besonders gut geeignet. Bei den genannten Elementen unterscheiden sich sowohl PLANE- als auch SOLID-Elemente untereinander hauptsächlich in ihrer Ansatzfunktion. Eine lineare Ansatzfunktion wird bei den Elementen PLANE42 sowie SOLID185 und eine quadratische Ansatzfunktion bei

den Elementen PLANE82 sowie SOLID186 benutzt. Dabei sind die Elemente mit den quadratischen Ansatzfunktionen zum Modellieren von gekrümmten Rändern besonders gut geeignet. Würde man das Problem rein mathematisch betrachten, so wird eine gekrümmte Geometrie mit steigender Ordnung der Ansatzfunktion besser approximiert. Verwendet man dagegen eine lineare Ansatzfunktion, so ist mit Einbußen bezüglich der Genauigkeit zu rechnen. Um die gewünschte Genauigkeit dennoch zu erreichen, muss der zu untersuchende Bereich „feiner“ unterteilt werden, was mit einem steigenden Rechenaufwand verbunden ist.

PLANE42- und PLANE82-Elemente

Die PLANE-Elemente sind ebene 4-Knoten (PLANE42) bzw. 8-Knoten (PLANE82) Viereck-Elemente, vgl. Abb. 3.4. An jedem Knoten hat das Element zwei translatorische Freiheitsgrade: Verschiebung in X- und Y-Richtung des Knotenkoordinatensystems. Mit diesen Elementen werden die strukturmechanischen Eigenschaften eines Kontinuums repräsentiert und mithilfe einer Einstellung ein ebener Verzerrungszustand abgebildet. Die Elementeingaben enthalten die orthotropen Materialeigenschaften. Bei der Modellierung mit den PLANE-Elementen sind keine Angaben bezüglich der Profileigenschaften, darunter auch der Elementdicke, erforderlich.

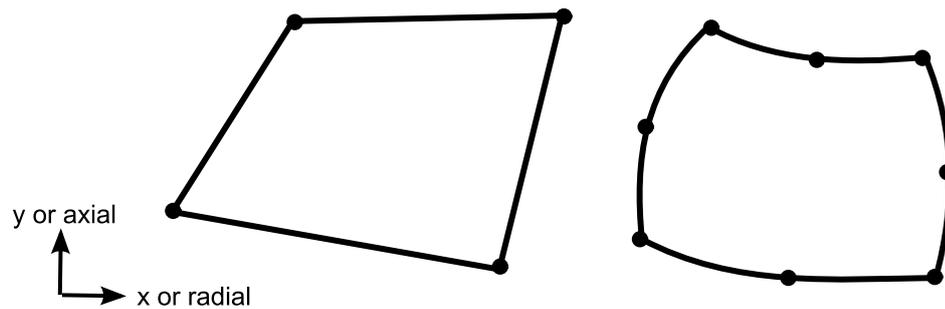


Abbildung 3.4: Die Plattenelemente: PLANE42 (links) und PLANE82 (rechts)

SOLID185- und SOLID186-Elemente

Die Elementtypen SOLID185 und SOLID186 sind dreidimensionale Volumenelemente. Das Element SOLID185 ist durch acht Knoten und das Element SOLID186 durch zwanzig Knoten definiert, vgl. Abb. 3.5. An jedem Knoten haben die Elemente drei translatorische Freiheitsgrade. Neben den Angaben der Materialeigenschaften ist die Ausdehnung in die dritte Dimension zu definieren.

Über die letztendliche Auswahl des Elementtyps wird bei der Auswertung der Konvergenzstudie entschieden. Dabei wird neben der Elementgröße das Konvergenzverhalten der vorgestellten Elementtypen und die Erfüllung der geltenden Randbedingungen betrachtet.

Modifikation der Elemente

Beim Vernetzen wurde den Elementen und den Knoten ein Koordinatensystem zugewiesen, das mit den zu vernetzenden Flächen gleich ist. Die richtungsabhängigen Materialeigenschaften der Faserverbundwerkstoffe erfordern eine durchgehende Ausrichtung der Koordinatensysteme der Elemente über das gesamte Bauteil. Dafür werden die Koordinatensysteme der Elemente und damit der Knoten in das jeweilige Koordinatensystem transformiert. Nach die-

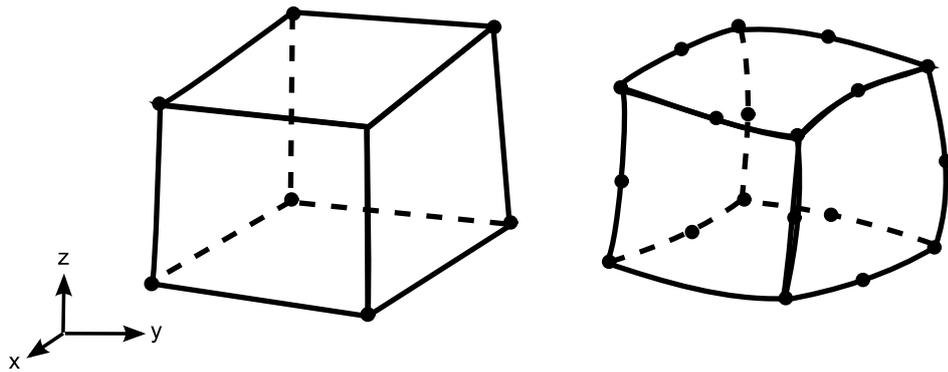


Abbildung 3.5: Die Volumenelemente: SOLID185 (links) und SOLID186 (rechts)

sem Schritt werden die Elemente, die einer UD- bzw. Gewebeschicht zugehörig sind, selektiert und bezüglich ihrer Materialeigenschaften modifiziert. Den Elementen zugehörige Materialeigenschaften des Lagenaufbaus nach Tab. 4.1 stellt die Abbildung 3.6 dar.

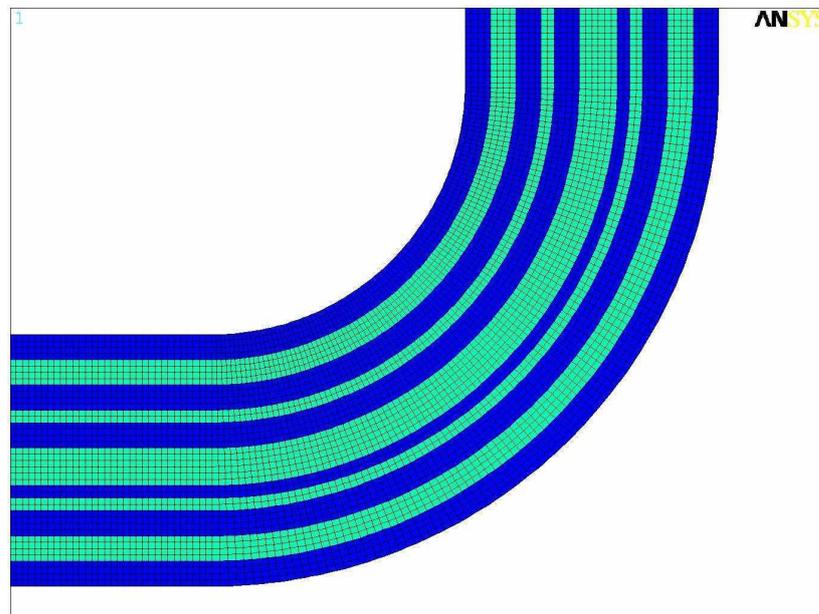


Abbildung 3.6: Darstellung der Elemente bezüglich ihrer Materialeigenschaften

3.3.3 Definieren der Materialeigenschaften

Zum Modellaufbau gehört weiterhin die Definition der Materialeigenschaften.

Isotropes Materialmodell

Um einen Einstieg in die Analyse vom Strukturverhalten eines Bauteils mittels der Methode der finiten Elemente zu schaffen, wurde zunächst ein isotropes Materialverhalten zur Betrachtung herangezogen. Zur vollständigen Beschreibung eines isotropen Materialverhaltens werden mindestens 2 Materialparameter benötigt z.B. der Elastizitätsmodul und die Querkontraktionszahl. Für die folgende Berechnung wird als Werkstoff Aluminium verwendet. Für Aluminium wurden folgende Werkstoffdaten angenommen:

- $E = 70000\text{MPa}$,
- $\nu = 0,33$.

Dieses Materialmodell wird auch bei der überschlägigen Handrechnung benutzt.

Orthotropes Materialmodell

Bei einem orthotropen Material sind neun Materialparameter zu definieren. Die gewählten Materialparameter einer UD-Schicht sind in der Tabelle 3.1 wiedergegeben. Die angegebenen Daten entsprechen der durchgeführten Modifikation bezüglich der gewählten Koordinaten, vgl. Abb. 3.2.

Materialparameter	Wert
E_y	135000 [MPa]
$E_x = E_z$	10000 [MPa]
$G_{xy} = G_{yz}$	5000 [MPa]
G_{xz}	4000 [MPa]
$\nu_{yx} = \nu_{xz} = \nu_{yz} = \nu_{zx}$	0,27
$\nu_{xy} = \nu_{zy}$	0,02

Tabelle 3.1: Materialdaten einer UD-Schicht

Das Gewebe stellt laminattheoretisch einen Kreuzverbund dar. Somit kann das Gewebe in der klassischen Laminattheorie *KLT* als ein Laminat, bestehend aus zwei orthogonal zueinander geschichteten UD-Schichten modellieren. Bei der vorliegenden Arbeit wurde zur Ermittlung der Materialwerte eine Excel-Programmierung herangezogen. Diese wurde vom industriellen Betreuer und weiteren Mitarbeitern der Firma Sogeti Hightech GmbH in Zusammenhang mit einem Projekt erstellt. Bezüglich dieser Thematik kann das Vorlesungsmanuskript [11] hilfreich sein. Bei der Ermittlung der Materialparameter ist bei dieser Methode zu beachten, dass die Welligkeit der Faser auf die Steifigkeitswerte abmindert wirkt. Die Forschung auf diesem Gebiet hat in den letzten Jahren einige theoretische Modelle hervorgebracht. Sinnvoll ist aber nach wie vor diesen Einfluss im Rahmen eines Experiments zu ermitteln. Bei der ersten Abschätzung kann man diesen Einfluss mit 10% annehmen [15].

Materialparameter	Gewebe 0°	Gewebe 45°
E_x	10000 [MPa]	10000 [MPa]
$E_y = E_z$	72793 [MPa]	15393 [MPa]
$G_{xy} = G_{xz}$	4444 [MPa]	4500 [MPa]
G_{yz}	5000 [MPa]	15504 [MPa]
$\nu_{xy} = \nu_{xz}$	0,037	0,175
$\nu_{zy} = \nu_{yz}$	0,037	0,539
$\nu_{zx} = \nu_{yx}$	0,27	0,27

Tabelle 3.2: Materialdaten für das Gewebe

Bei der Eingabe der Querkontraktionszahlen ist bei ANSYS zu beachten, dass die Querkon-

traktionszahlen ν_{xy} , ν_{xz} , ν_{yz} als PRXY, PRXZ, PRYZ und ν_{yx} , ν_{zx} , ν_{zy} als NUXY, NUXZ, NUYZ angegeben werden. Die Zuweisung der Querkontraktionszahlen erfolgt nach der Gleichung (2.32).

Bei der Verformung eines Körpers wird Arbeit verrichtet. Pestel und Wittenburg [14] zeigen, dass diese Arbeit der potentiellen Energie entspricht, die in diesem Körper gespeichert wird. Diese Energie wird Formänderungsenergie genannt und mit dU abgekürzt. Durch die Integration von dU über dem gesamten Volumen kann die Formänderungsenergie U bestimmt werden. Somit gilt folgender mathematischer Zusammenhang:

$$U = \frac{1}{2} \int \int \int_V \underline{\sigma} \underline{\varepsilon} dV. \quad (3.1)$$

Setzt man für den Spannungstensor $\underline{\sigma}$ die Beziehung (2.28) ein, erhält man für die Formänderungsenergie eine modifizierte Gleichung, die wie folgt lautet:

$$U = \frac{1}{2} \int \int \int_V \underline{C} \underline{\varepsilon}^2 dV. \quad (3.2)$$

Da ein lineares Materialverhalten vorausgesetzt wird, muss die Formänderungsenergie positiv sein. Betrachtet man die Komponente aus Beziehung (3.2), ist diese Anforderung nur dann erreicht, wenn die Steifigkeitsmatrix \underline{C} positiv ist. Bei Verletzung dieser Bedingung meldet das Berechnungsprogramm ANSYS einen Fehler. In [12] ist folgende Beziehung zur Überprüfung der angegebenen Materialdaten gegeben:

$$0 \geq 1 - (\nu_{xy})^2 \frac{E_y}{E_x} - (\nu_{yz})^2 \frac{E_z}{E_y} - (\nu_{xz})^2 \frac{E_z}{E_x} - 2\nu_{xy}\nu_{yz}\nu_{xz} \frac{E_z}{E_x} \quad (3.3)$$

Möchte man den Extremwert für den Anisotropiewert s bestimmen, so modifiziert man zuerst die Gleichung (3.3) mithilfe der Beziehung (2.41). Anschließend setzt man die modifizierte Gleichung gleich null. Mit den, in der Tabelle 3.1 angegebenen Materialdaten, kommt man dabei auf ein Verhältnis von $s = 48$. Bei dieser Betrachtung wurde nur der Elastizitätsmodul E_y als variabel vorausgesetzt, die restlichen Werte wurden als konstant angenommen. Zur Probe wurden mit diesem Wert einige Rechnungen durchgeführt, deren Ergebnisse im weiteren Verlauf dieser Arbeit vorgestellt werden. Bei einer Rechnung mit $s = 50$ wurde dagegen eine Fehlermeldung ausgegeben.

3.4 Definition der Randbedingungen sowie der Lasten

Nachdem das komplette Modell erstellt und vernetzt wurde, werden nun die Lasten und Randbedingungen definiert. Es ist zu beachten, dass das Antragen der Randbedingungen und Lasten am FEM-Modell über die Knoten und Elemente erfolgen kann, oder aber auch über ein vorhandenes Geometriemodell.

Definition der Randbedingungen

Als Randbedingung wird die Einspannung an einem Rand des Bauteils definiert. An diesem Rand werden alle relevanten Freiheitsgrade (unterschiedliche Elementtypen weisen eine unterschiedliche Anzahl von Freiheitsgraden auf) der Knoten gesperrt.

Aus der Beschreibung der Elemente, vgl. Kap. 3.3.2, geht hervor, dass bei den PLANE-Elementen der ebene Verzerrungszustand durch eine entsprechende Einstellung realisierbar ist. Die SOLID-Elemente haben dagegen keine vergleichbare Einstellung. Bei diesen Elementen muss der ebene Verzerrungszustand durch die Koppelung der entsprechenden Freiheitsgrade eingestellt werden. Bei der Vernetzung mit den Volumenelementen wurden zwei Elementreihen modelliert. So müssen die Verschiebungen u_x sowie u_y der Knoten, die sich gegenüber an äußeren Rändern der beiden Elementreihen liegen, gleichgesetzt werden. Des Weiteren wird bei allen genannten Knoten die Verschiebung u_z gesperrt. Durch diese Art der Koppelung entsteht eine „unendlich“ lange Konstruktion, bei der der EVZ herrscht. Bedingt durch eine äußerst ungünstige Nummerierung der Elemente, die durch ANSYS automatisch stattfindet, war es nur mit einem enormen Aufwand gelungen die Koppelung zu realisieren. Des Weiteren ist diese Methode mit einem enormen Modellierungs- und Rechenaufwand verbunden. Alternativ kann man dem Bauteil eine Länge und damit eine vordefinierte Anzahl der Elementreihen zuweisen. Ab einer bestimmten Anzahl der Elementreihen wird der Randeinfluss abklingen. Diese Anzahl der Elementreihen kann im Rahmen einer Konvergenzstudie festgelegt werden. Die beschriebene Methode ist aber wesentlich intensiver in Hinsicht auf die Rechenzeit.

Definition der Lasten

Zur Einleitung der Lasten wird am freien Rand ein Geometriemodell aufgebaut. Die Notwendigkeit dieses Schrittes wird wie folgt erklärt:

- es ist erwünscht die Lasten möglichst gleichmäßig über den zu belastenden Rand zu verteilen,
- die Knoten, die den gewählten Elementtypen zugehörig sind, besitzen keine rotatorischen Freiheitsgrade und können damit keine Momentbelastung aufnehmen.

Zur Generierung des sog. Spinnennetzes, vgl. Abb. 3.7, wird zuerst ein zusätzlicher Knoten, über den das Antragen der Lasten erfolgt, generiert. Dieser liegt mittig in einem ganz geringen Abstand zum freien Rand des Bauteils. Damit wird die störende Wirkung dieser Methode sehr klein gehalten. Anschließend wird dieser Zusatzknoten mit allen Knoten am freien Rand verbunden. Die so entstandene Geometrie, bestehend aus den Linien, wird letztendlich mit den Balkenelementen vernetzt. Zur Vernetzung werden die Balkenelemente BEAM3 herangezogen.

BEAM3-Balkenelement

Das Balkenelement BEAM3 ist ein ebenes, geradliniges Element mit Zug-, Druck- und Biegeverhalten. Das Element wird durch zwei Knoten, Abb. 3.8, mit drei Freiheitsgraden an jedem Knoten festgelegt:

- Translation in die X- und Y-Richtung,
- Rotation um die Z-Achse.

Zu den Eingabedaten gehören zusätzlich die Material- und Profileigenschaften. Zu den letzteren gehören die Angaben der Querschnittsfläche, des Flächenträgheitsmoments und der Höhe des Elementes. Die genannten Größen wurden wie folgt festgelegt:

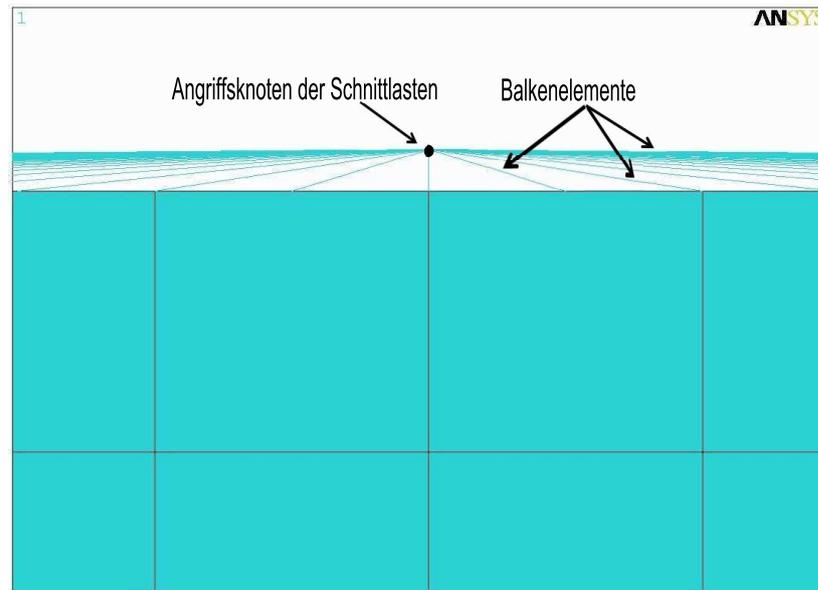


Abbildung 3.7: Geometriemodell zur Einleitung der Lasten

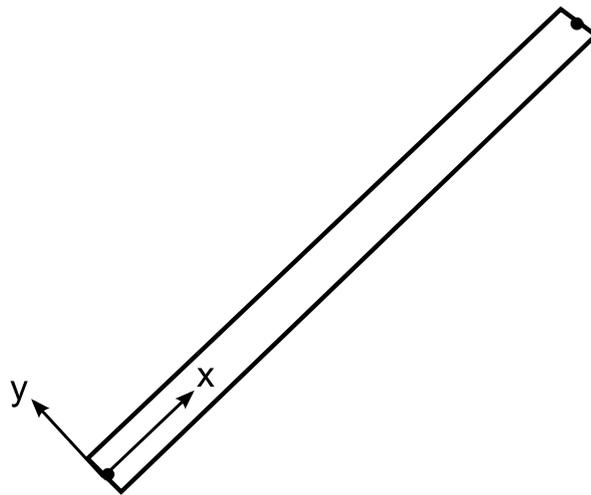


Abbildung 3.8: Ebenes elastisches Balkenelement BEAM3

- $E_b = 10^8 \text{ MPa}$,
- $\nu = 0,3$,
- $A_b = 0,01 \text{ mm}^2$,
- $I_{zz} = 8,3^{-6} \text{ mm}^4$,
- $h_b = 0,1 \text{ mm}$.

Bei der Kombination der Elemente muss darauf geachtet werden, dass die Verträglichkeit zwischen den benachbarten Elementen gewahrt bleibt. Damit ist die Kontinuität der Verschiebungsverläufe gewährleistet. Da die Balkenelemente im Vergleich zu den Volumen- und den Plattenelementen einen zusätzlichen rotatorischen Freiheitsgrad aufweisen, kann die Biegung des Balkens nicht übertragen werden. Der Balken ist damit an den Bauteil gelenkig ange-

geschlossen. Um die Biegung des Balkens zu unterbinden, kann dieser als sehr steif modelliert werden. Das erklärt die Angabe eines ungewöhnlich hohen Elastizitätsmoduls.

3.5 Der Lösungsabschnitt

Nachdem die Lasten und Randbedingungen definiert sind, ist das Bauteil vollständig modelliert. Die abschließenden Vorgaben zur Berechnungsphase beinhalten nur die Angaben bezüglich der Analyseoption. Diese wird, wie bereits im Kap.3.1 erwähnt, eine statische lineare strukturmechanische Berechnung sein.

Abschließend ist zu erwähnen, dass im Anhang A ein vollständiges APDL-Script zur Modellierung eines L-Winkels angegeben ist.

4 Die Konvergenzstudie

Die Genauigkeit der FEM-Berechnung ist unter anderem von der Anzahl und von der Art der verwendeten Elemente abhängig. Mit steigender Anzahl der Elemente nähern sich die Ergebnisse einem bestimmten Wert an. Dieses Verhalten wird als Konvergenz bezeichnet. Am Verlauf der Konvergenzkurve lässt sich dann erkennen, ab welchem Punkt die steigende Anzahl der Elemente nur eine geringfügige Veränderung des Kurvenverlaufs bewirkt. Mithilfe einer Konvergenzstudie lässt sich zudem abschätzen, wie nahe die Ergebnisse der analytischen Überschlagsrechnung kommen.

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der Berechnungen mit unterschiedlichen Elementen bzw. unterschiedlichen Elementgrößen untereinander verglichen. Daraus wird eine Schlussfolgerung bezüglich der Auswahl des Elementtyps und der Anzahl der Elemente pro Lage gezogen.

4.1 Konvergenzverhalten der Volumenelemente mit unterschiedlichen Ansatzfunktionen

Zuerst wird das Konvergenzverhalten der Volumenelemente mit linearen und quadratischen Ansatzfunktionen untereinander untersucht. Das gesamte Modell wird aus orthotropen UD-Schichten gleicher Ausrichtung aufgebaut. Die Materialdaten sind in der Tabelle 3.1 aufgelistet. Die geometrischen Größen sind dem Anhang A zu entnehmen. Das Bauteil wird durch einen Normalkraftfluss N_f belastet. Des Weiteren wurde die Entscheidung getroffen den ebenen Spannungszustand abzubilden. Zum einen beruht diese Entscheidung auf der Tatsache, dass man die Spannungen aus dem ESZ in den EVZ umrechnen kann. Den entsprechenden Zusammenhang geben die Gleichungen (2.39) und (2.40) wieder. Zum anderen erweist sich die Modellierung mit den Volumenelementen und die anschließende Berechnung des Bauteils im EVZ als sehr zeit- und speicherplatzraubend. Beispielsweise beträgt die komplette Rechenzeit bei der Modellierung mit zwei Elementen pro Lage ca. vier Stunden, was im Rahmen dieser Arbeit nicht akzeptabel ist.

Die Abbildungen 4.1 bis 4.3 zeigen die Spannungsverläufe an verschiedenen Stellen des gekrümmten Bereichs. Aus diesen Abbildungen geht hervor, dass mit beiden Elementtypen, SOLID185 und SOLID186, die errechneten Spannungen annähernd den gleichen Verlauf über der gesamten Bauteildicke aufweisen. Die Elemente mit linearen Ansatzfunktionen verletzen jedoch an den äußeren Rändern bei ($r = a$) und bei ($r = b$) die dort geltenden Randbedingungen. An diesen Stellen müssen sowohl die Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ als auch die Normalspannung σ_{rr} verschwinden. Erst mit Steigerung des numerischen Aufwandes nähern sich die Span-

nungswerte dem Wert null an.

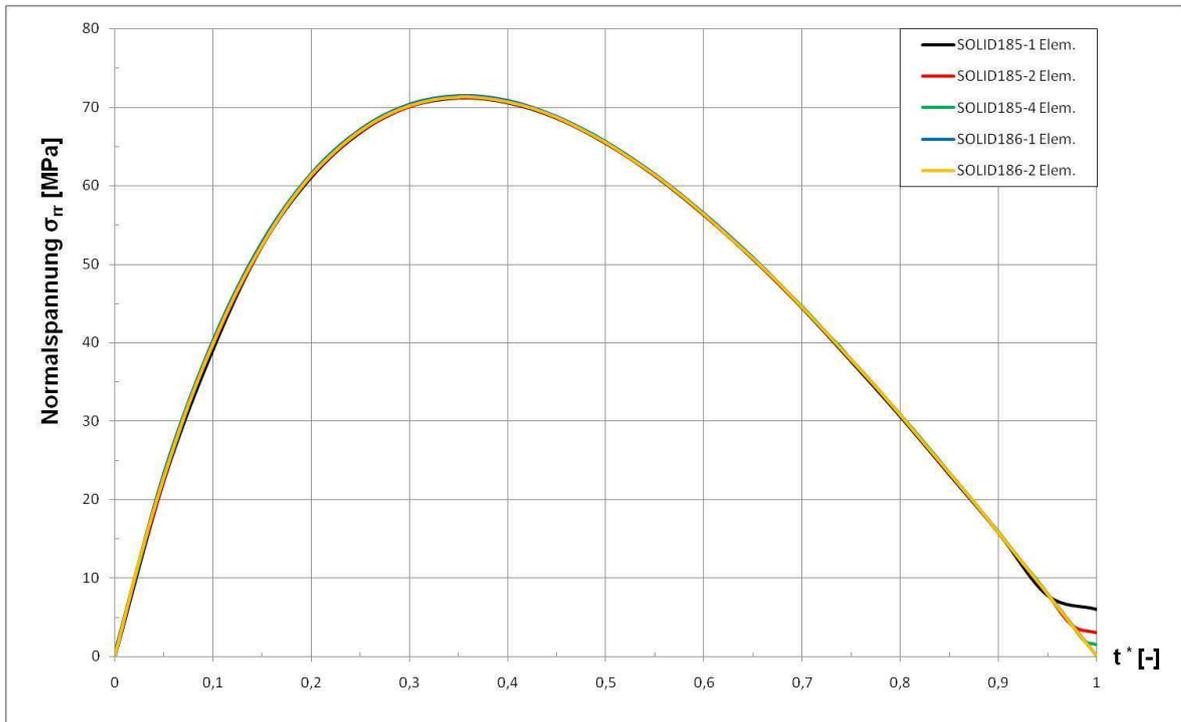


Abbildung 4.1: Verlauf der Normalspannung σ_{rr} an der Stelle $\varphi = 45^\circ$

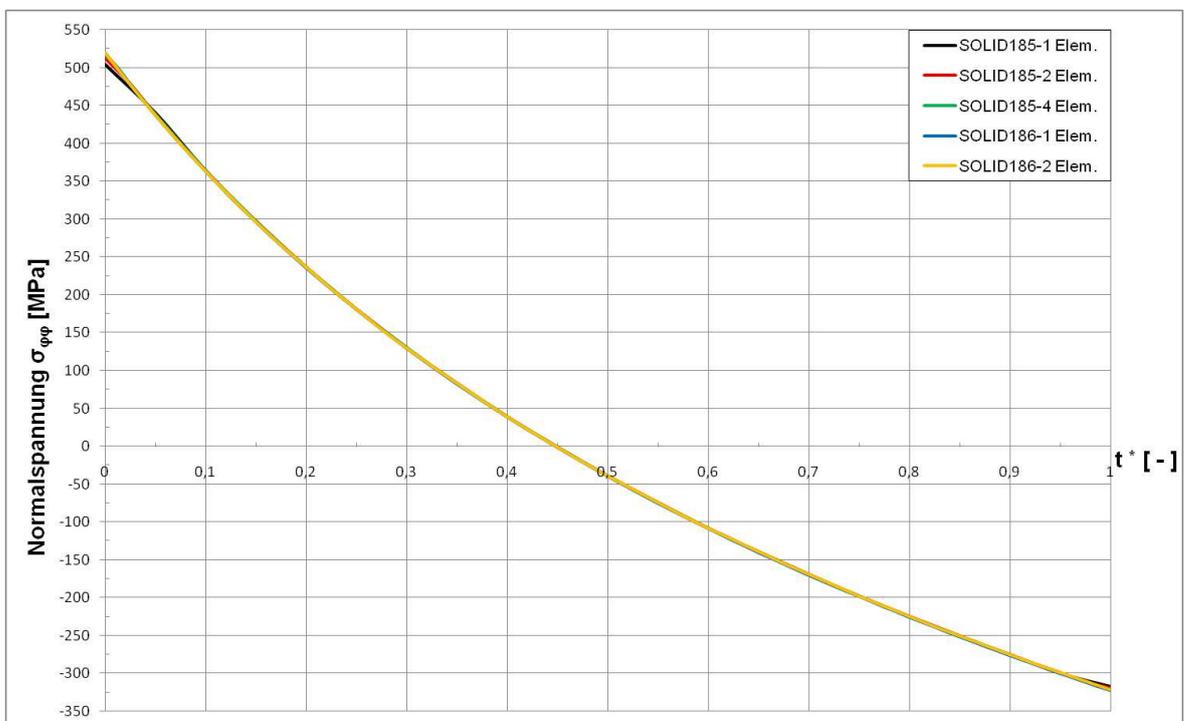


Abbildung 4.2: Verlauf der Normalspannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ an der Stelle $\varphi = 45^\circ$

Die Abbildung 4.3 zeigt den Verlauf der Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ an der Stelle $\varphi = 2^\circ$. Beim vorliegenden Belastungsfall existiert eine äußerst geringe Querkraftkomponente an dieser Stelle. Theoretisch gesehen darf es an dieser Stelle auch eine kleine Schubspannung geben, was jedoch nicht mit den berechneten Ergebnissen übereinstimmt. Das Vorhanden dieser Schubspannung ist durch eine Störung, die durch den Übergang aus dem gekrümmten in den geraden Bereich vorliegt, zu erklären. Der Geometrieinfluss auf den Spannungshaushalt wird im späteren Verlauf dieser Ausarbeitung genauer untersucht. Analysiert man die beiden Flächeninhalte oberhalb und unterhalb der waagerechten Achse t^* , so kommt man zum Ergebnis, dass diese annähernd gleich groß sind. Somit ist notwendige Gleichgewichtsbedingung

$$\int_a^b \tau_{r\varphi} dr = Q \approx 0$$

annähernd erfüllt.

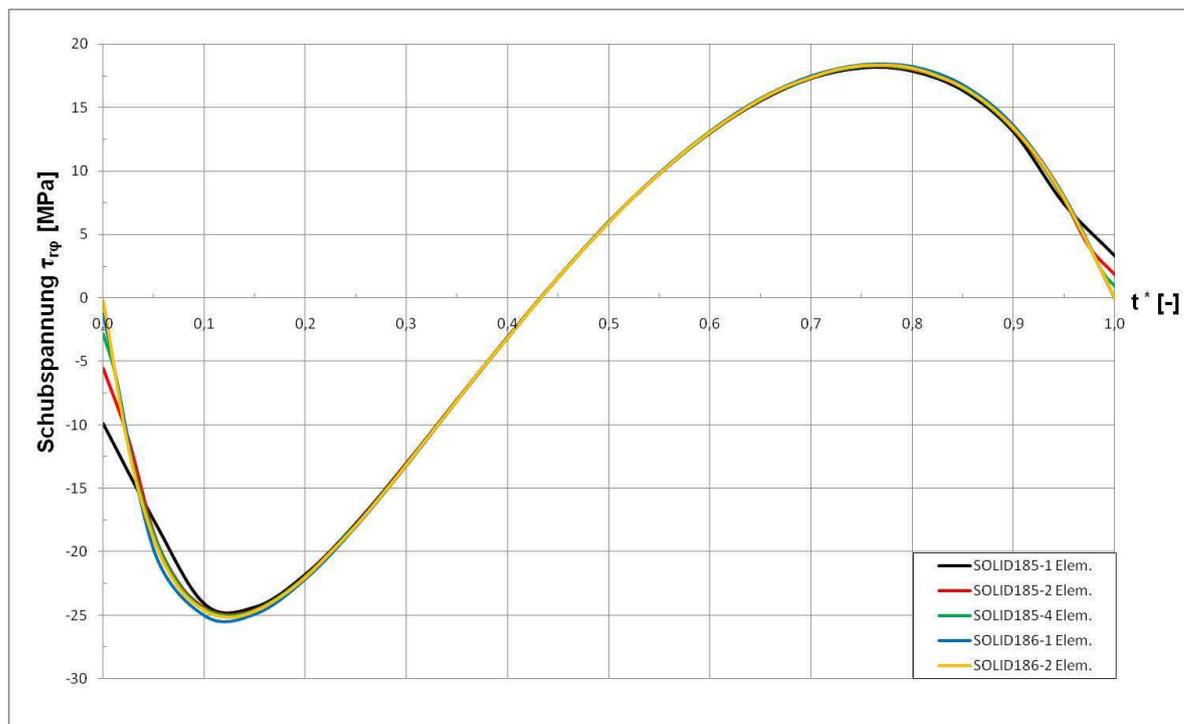


Abbildung 4.3: Verlauf der Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ an der Stelle $\varphi = 2^\circ$

Die Diskussion der Ergebnisse

Die Hauptaufgabe dieser Konvergenzbetrachtung war das Konvergenzverhalten der Volumenelemente mit quadratischen und linearen Ansatzfunktionen. Die Ergebnisse zeigen deutliche Vorteile zu Gunsten der Elemente mit quadratischen Ansatzfunktionen. Damit werden im weiteren Verlauf dieser Arbeit die Elemente mit quadratischen Ansatzfunktionen verwendet. Des Weiteren wird aufgrund der genannten hohen Rechenzeiten nach Alternativen für die Volumenelemente gesucht.

4.2 Überprüfung der Tauglichkeit der Scheibenelemente zur Modellierung eines orthotropen L-Winkels

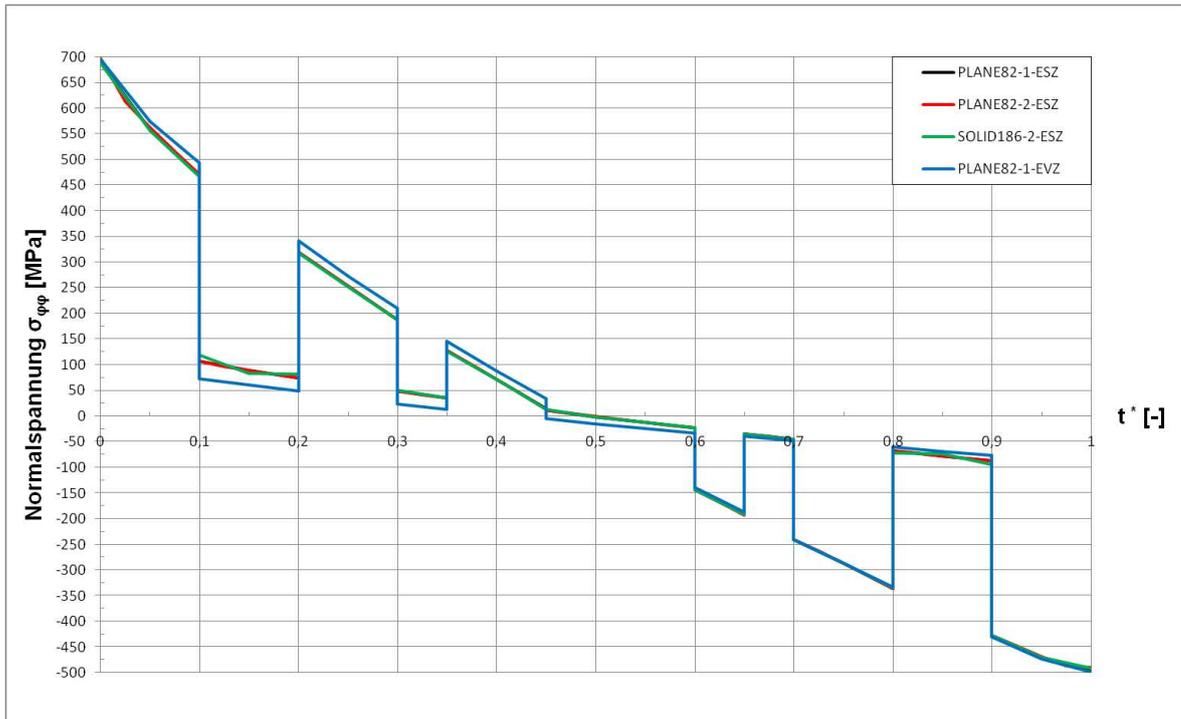
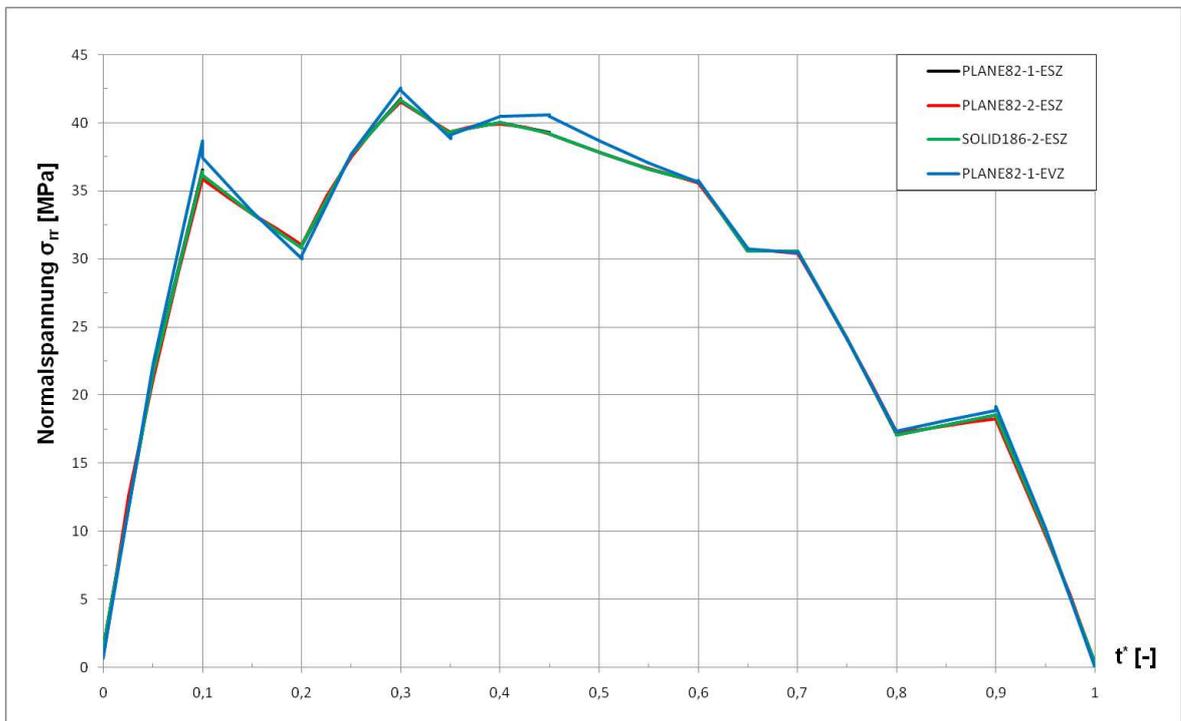
Die Hauptaufgabe dieses Abschnitts besteht darin, die Ergebnisse der Berechnungen mit Volumen- und Scheibenelementen untereinander zu vergleichen. Wie bereits im Kapitel 3.3.2 beschrieben wurde, stellen die Elemente PLANE82 bzw. PLANE42 mögliche Alternativen für die Volumenelemente dar. Basierend auf den Ergebnissen in Kapitel 4.1 werden aber die Elemente PLANE42 zur weiteren Betrachtung nicht mehr herangezogen. Ausgehend von der Beschreibung der Plattenelemente existieren einige Bedenken bezüglich der Simulation der gewählten Idealisierung. So wurde ein in der Mitte herausgeschnittener Streifen in der XY -Ebene modelliert. In dieser Ebene liegen auch die Plattenelemente. Nun soll aber ein Laminat in der YZ -Ebene aufgebaut werden. Somit liegen z.B. die 90° -Schichten parallel der Z -Achse und damit senkrecht auf die Elementebene. Damit ist es fraglich, ob diese Elemente die Anforderungen bezüglich der Genauigkeit erfüllen.

Im vorangegangenen Kapitel wurde das Modell aus orthotropen UD-Schichten gleicher Ausrichtung aufgebaut. In der Realität bilden aber Laminats mit einer unterschiedlichen Ausrichtung der Faserhalbzeuge eine Grundlage für Faserverbundkonstruktionen. Für die folgende Untersuchung soll das Laminat aus Gewebelagen aufgebaut werden, den Laminataufbau gibt die Tabelle 4.1 wieder. Dieses Materialmodell entspricht der gängigen Methode zur Herstellung der Clips bei dem Flugzeughersteller Airbus. Die Materialdaten sind in der Tabelle 3.2 angegeben.

0	0	45	45	0	0	45	0	0	45	45	45	0	45	0	0	45	45	0	0
---	---	----	----	---	---	----	---	---	----	----	----	---	----	---	---	----	----	---	---

Tabelle 4.1: Lagenaufbau des Laminats bestehend aus Gewebe

Die Abbildungen 4.4 bis 4.6 zeigen die Spannungsverläufe der beiden Normalspannungen σ_{rr} und $\sigma_{\varphi\varphi}$ sowie den Verlauf der Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ an der Stelle $\varphi = 2^\circ$. Im Rahmen der Auswertung der Ergebnisse wurde festgestellt, dass die Bereiche, die dem Übergangsbereich nahe liegen, am kritischsten bezüglich der Erfüllung der Randbedingungen sind. Aus diesem Grund werden auch im späteren Verlauf der Konvergenzstudie diese Bereiche gesondert behandelt. Es ist eine deutliche Übereinstimmung der Verläufe festzustellen. Bei der Betrachtung der Randbedingungen gelten die gleichen Überlegungen wie im vorangegangenen Abschnitt.

Abbildung 4.4: Verlauf der Normalspannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ an der Stelle $\varphi = 2^\circ$ Abbildung 4.5: Verlauf der Normalspannung σ_{rr} an der Stelle $\varphi = 2^\circ$

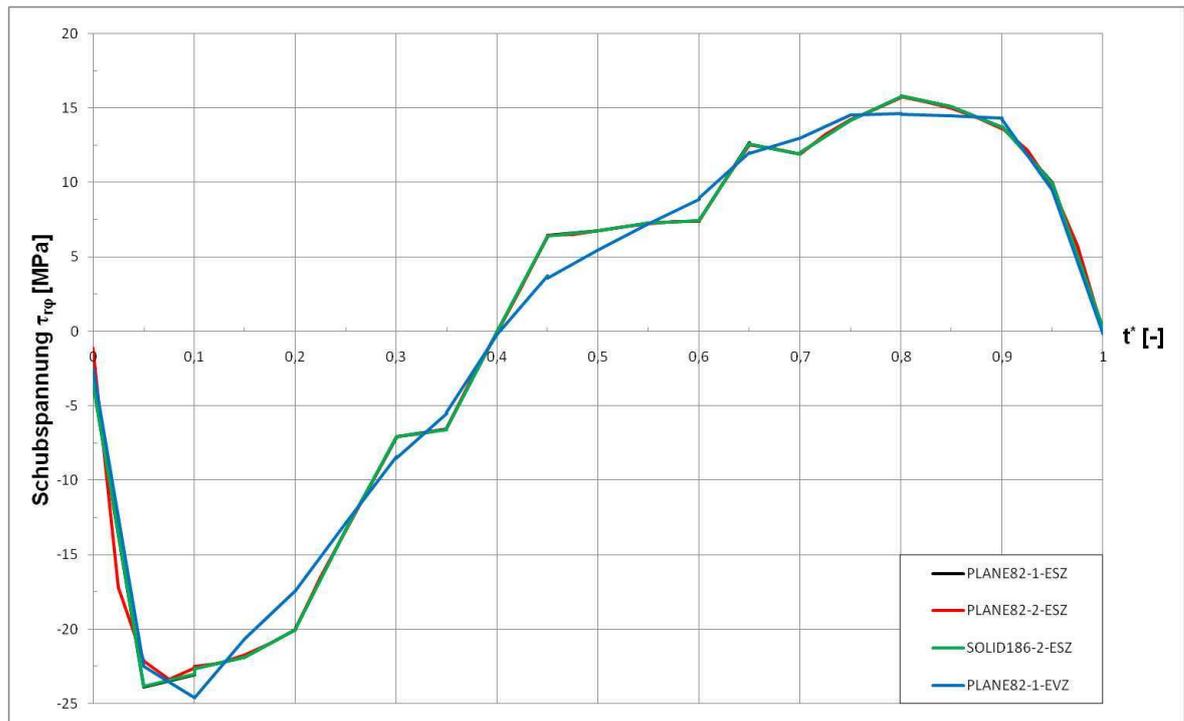


Abbildung 4.6: Verlauf der Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ an der Stelle $\varphi = 2^\circ$

Die Diskussion der Ergebnisse

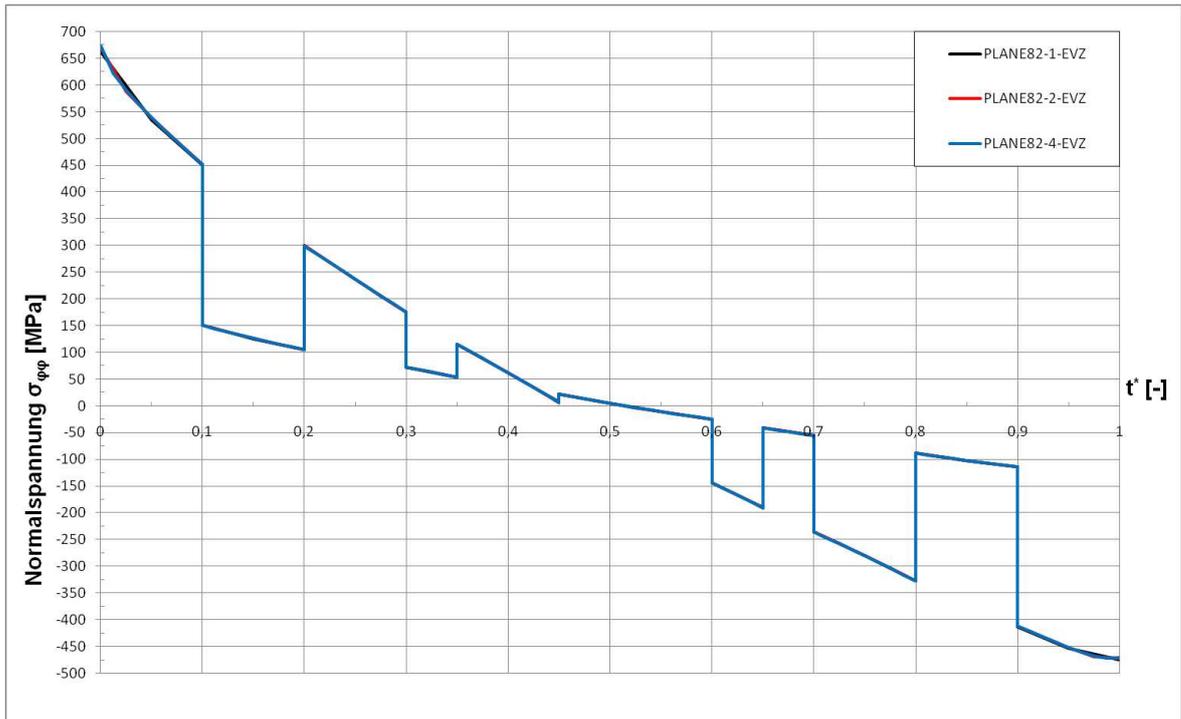
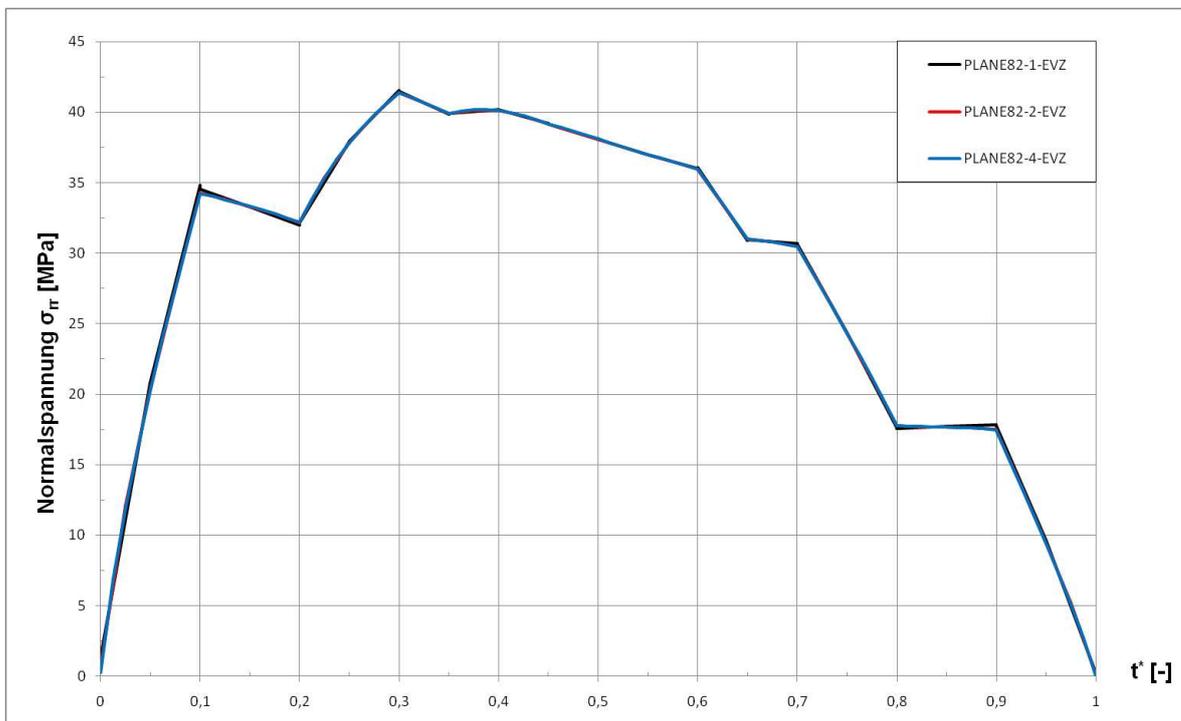
Aus den Verläufen ist deutlich zu erkennen, dass bei den Berechnungen mit den Elementen PLANE82 dieselben Ergebnisse wie mit den Elementen SOLID186 erreicht werden. Zudem wurde eine deutliche Reduktion der Rechenzeit sowie der erforderlichen Speicherplatzkapazitäten festgestellt. Beispielsweise dauert die Modellierung und anschließende Berechnungsphase mit diesem Elementtyp ca. 5 Minuten.

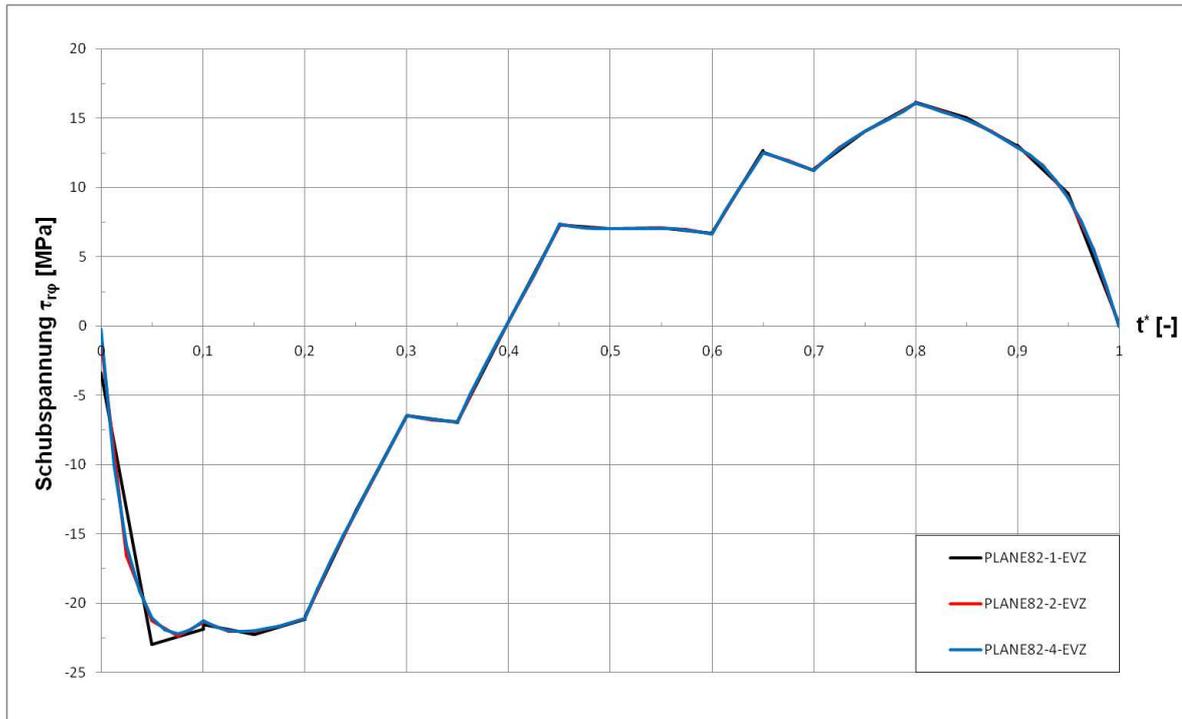
Die weitere Modellierung und Berechnung erfolgt mit den Elementen PLANE82.

4.3 Konvergenzstudie zur Festlegung der Elementgröße

Nachdem der Elementtyp festgelegt wurde, wird eine abschließende Untersuchung bezüglich der Elementgröße, bzw. der Anzahl der Elemente pro Lage angestellt. Auch wie bei dem vorangegangenen Abschnitt wird dasselbe Materialmodell verwendet.

Die Abbildungen 4.7 bis 4.9 stellen die Spannungsverläufe der drei unterschiedlichen Rechnungen dar. Der Unterschied liegt in der Anzahl der Elemente pro Lage, siehe Legende der genannten Abbildungen. Genauso wie in den vorangegangenen Untersuchungen weisen die Graphen identische Verläufe der Spannungen auf. Es sind jedoch geringfügige Unterschiede an den Rändern zu erkennen. An diesen Stellen erfüllen nicht alle Berechnungsvariationen die dort herrschenden Randbedingungen.

Abbildung 4.7: Verlauf der Normalspannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ an der Stelle $\varphi = 2^\circ$ Abbildung 4.8: Verlauf der Normalspannung σ_{rr} an der Stelle $\varphi = 2^\circ$

Abbildung 4.9: Verlauf der Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ an der Stelle $\varphi = 2^\circ$

Die nachstehenden Tabellen 4.2 und 4.3 zeigen die Spannungskomponenten σ_{rr} und $\tau_{r\varphi}$ am inneren Rand ($r = a$) bei einem Schnitt an der Stelle $\varphi = 2^\circ$. Zusätzlich sind die maximalen Spannungen bei diesem Schnitt angegeben. Mit diesen Angaben wurde dann der relative Fehler F_{rel} nach folgender Formel ausgerechnet:

$$F_{rel(\sigma_{rr})} = \frac{\sigma_{rr}}{\sigma_{rr(max)}} \cdot 100\%, \quad (4.1)$$

bzw.

$$F_{rel(\tau_{r\varphi})} = \frac{\tau_{r\varphi}}{\tau_{r\varphi(max)}} \cdot 100\%. \quad (4.2)$$

Anzahl der Elemente pro Lage	1	2	4
σ_{rr} in [MPa] bei ($r = a$)	1,39	0,66	0,25
$\sigma_{rr(max)}$ in [MPa]	41,56	40,12	41,36
$F_{rel(\sigma_{rr})}$ in [%]	3,35	1,65	0,61

Tabelle 4.2: Konvergenzverhalten der Normalspannung σ_{rr} an der Stelle $\varphi = 2^\circ$

Anzahl der Elemente pro Lage	1	2	4
$\tau_{r\varphi}$ in [MPa] bei ($r = a$)	-3,33	-1,1	-0,24
$\tau_{r\varphi(max)}$ in [MPa]	-22,23	-22,01	-22,2
$F_{rel(\tau_{r\varphi})}$ in [%]	14,99	4,98	1,07

Tabelle 4.3: Konvergenzverhalten der Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ an der Stelle $\varphi = 2^\circ$

Schlussfolgerung der Konvergenzstudie

Betrachtet man nur die Ergebnisse aus den Tabellen 4.2 und 4.3, so stellt man fest, dass mit steigender Verfeinerung des Netzes eine deutliche Verbesserung der Ergebnisse erreicht wird. Verknüpft man aber die Ergebnisse mit der Rechenzeit, so stellt die Modellierung mit zwei Elementen pro Lage eine sinnvolle Relation zwischen dem Rechenaufwand und der Genauigkeit her. Die Abweichung von der absoluten Erfüllung der Randbedingung:

$$\tau_{r\varphi}(r = a) = 0$$

beträgt nur 5% und liegt damit im Toleranzbereich .

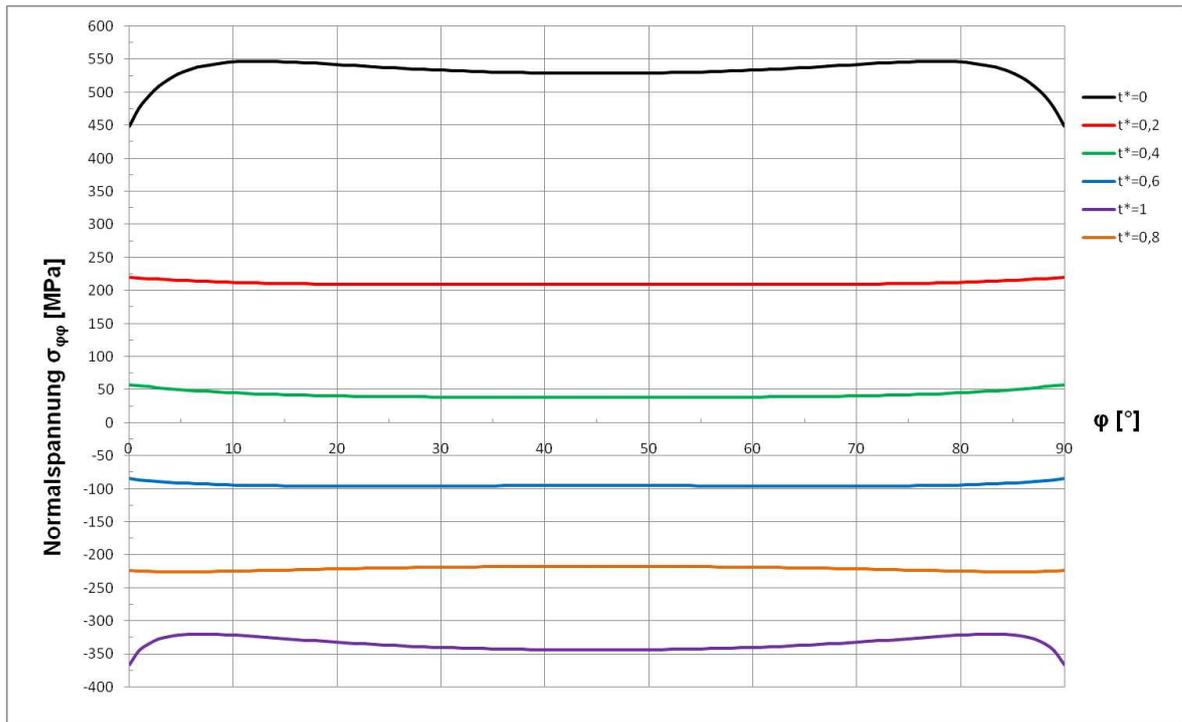
5 Parameterstudien mit dem numerischen Modell

Die Größe und die Verteilung der Spannungskomponenten werden durch unterschiedliche Parameter beeinflusst. Dazu gehören im Wesentlichen die Materialeigenschaften, der Lagenaufbau, die Bauteilgeometrie, die Randbedingungen sowie die Art der Belastung. Mit der Auswirkung dieser Parameter auf den Spannungshaushalt beschäftigt sich das vorliegende Kapitel.

5.1 Untersuchung der Auswirkung der Randstörung auf den Spannungshaushalt unter einer Momentenbelastung

In diesem Abschnitt werden die Spannungsverläufe, die sich aufgrund einer Momentenbelastung ergeben, dargestellt. Mit dieser Darstellung soll das grundlegende Verständnis der Mechanik der gekrümmten Bauteile aufgebaut werden. Des Weiteren wird der Einfluss der vorliegenden Störung im Übergangsbereich untersucht. Betreffend der Geometrie wurden zur Durchführung der Berechnung die im Anhang A angegebenen Parameter herangezogen. Die Materialwerte gibt die Tabelle 3.1 wieder. Alle Lagen weisen dieselbe Orientierung auf, damit liegt ein orthotropes Materialverhalten für die gesamte Struktur vor. Der Anisotropiewert bei dieser Betrachtung liegt bei $s = \sqrt{13,5} \approx 3,7$.

Die von der Geometrieänderung erzeugte Störung hat einen Einfluss auf die Entwicklung der Spannungsverteilung über der Bogenlänge. Dies lässt sich am Verlauf der Spannungen ablesen. In Abbildung 5.1 ist die Verteilung der Normalspannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ in Abhängigkeit des Winkels φ für unterschiedliche Werte der relativen Bauteildicke t^* dargestellt. Bezogen auf den jeweiligen Wert für t^* kann der Verlauf über einen breiten Bereich als annähernd konstant angesehen werden. In der Nähe der Übergangsbereiche sind jedoch Abweichungen vorhanden, die insbesondere an den äußeren Rändern deutlich ausfallen. Im Allgemeinen ist die Abweichung des Spannungsverlaufs durch das Vorliegen einer Störung, die sich aus der Geometrieänderung ergibt, zu erklären. Beginnend mit einem leichten Anstieg vom Verlauf der Spannung bei $t^* = 0$ ist in unmittelbarer Nähe zum Übergangsbereich eine deutliche Reduktion des Spannungsniveaus festzustellen. Diese kann mit ungefähr 100MPa beziffert werden, was einem prozentualen Abfall von ca. 20% entspricht. Am äußeren Rand bei $t^* = 1$ ist tendenziell derselbe Verlauf zu beobachten. Es wird aber ein betragsmäßiger Spannungszuwachs festgestellt, der jedoch mit 50MPa deutlich kleiner ausfällt. Die genannten Veränderungen im Spannungshaushalt finden in einem kleinen Bereich statt. Die Umrechnungen an beiden Rändern ergeben einen Abstand zum Übergangsbereich von $d \approx 0,4mm$ bei einer Bauteildicke von $t = 2,5mm$.

Abbildung 5.1: Verlauf der Normalspannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ über dem gesamten BogenbereichAbbildung 5.2: Verlauf der Normalspannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ in Schnitten bei $\varphi = 45^\circ$ und $\varphi = 0^\circ$

Die Abbildung 5.2 stellt den Spannungsverlauf an zwei unterschiedlichen Stellen des gekrümmten Bereichs dar. Aus den Verläufen ist eine eindeutige Abweichung der Verteilung vom linearen Verlauf zu erkennen. Damit ist der Beweis erbracht, dass die Krümmung einen direkten Einfluss auf den Spannungshaushalt hat. Der Einfluss der Krümmung wird im späteren Verlauf

dieser Ausarbeitung genauer untersucht.

Betrachtet man die Normalspannung σ_{zz} , vgl. Abb. 5.3, so sind bezüglich der Verläufe Ähnlichkeiten mit der Normalspannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ festzustellen. Somit hat die Randstörung ebenfalls einen Einfluss auf die Entwicklung der Normalspannungsverteilung σ_{zz} .

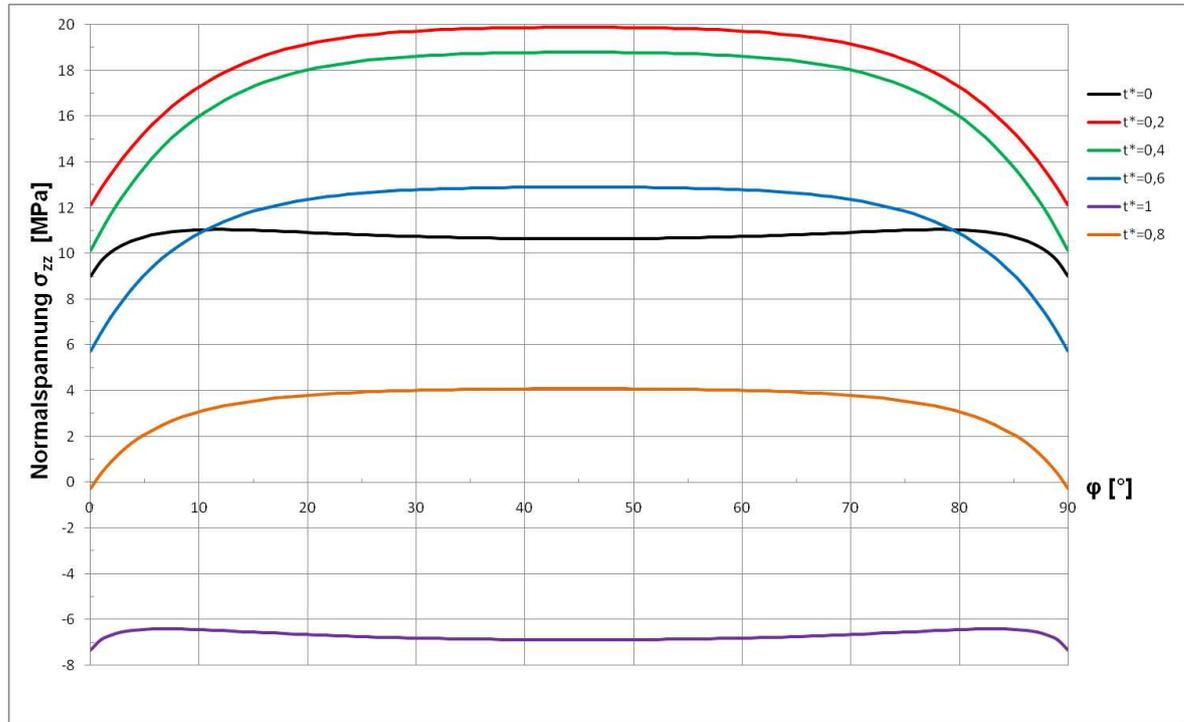
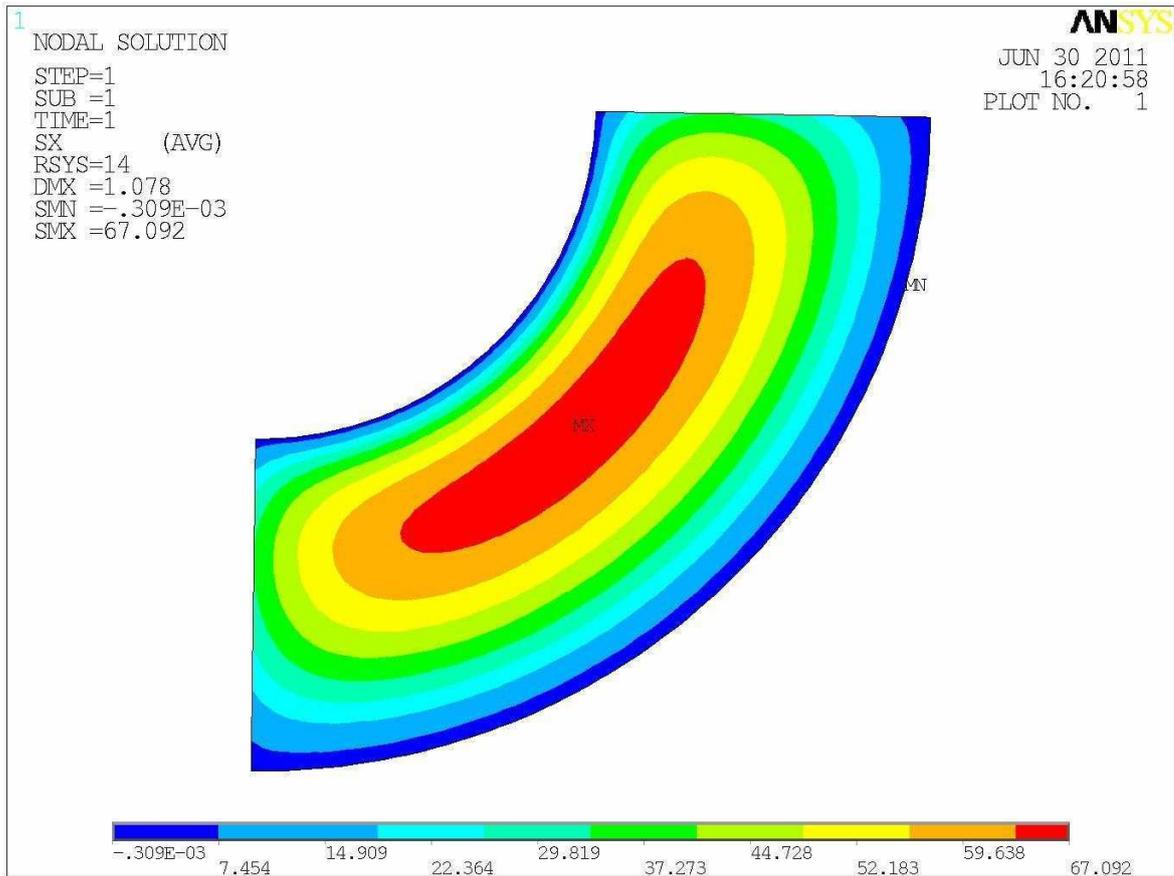
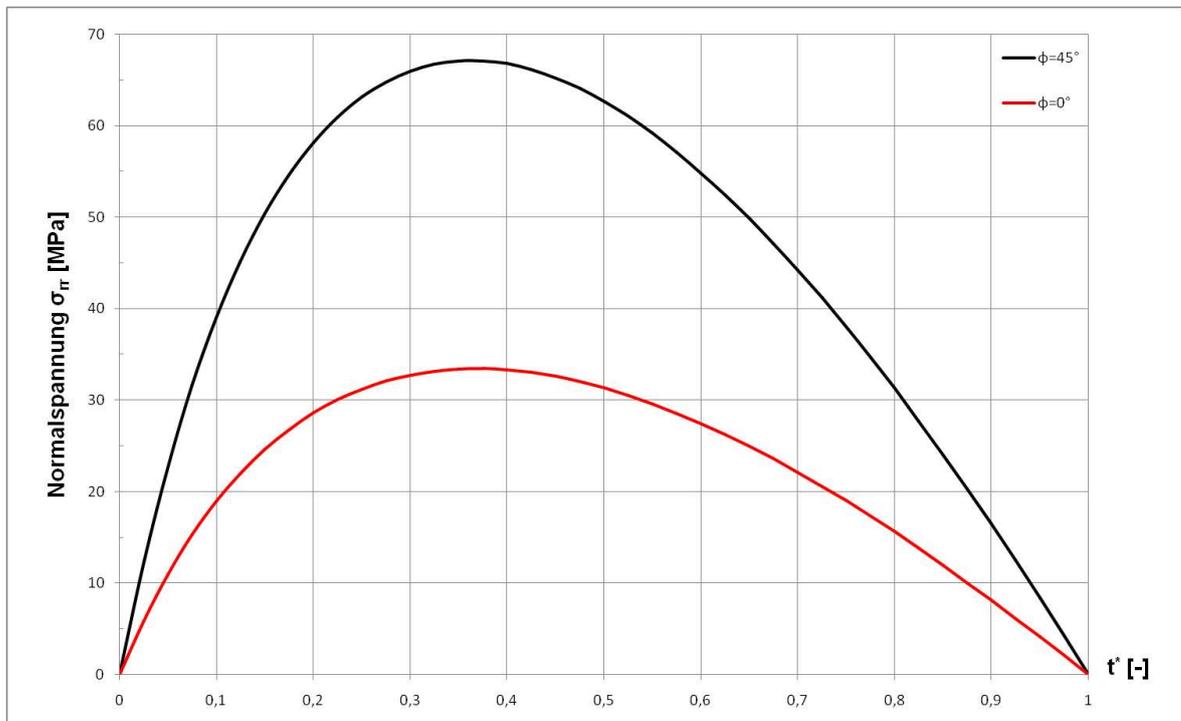


Abbildung 5.3: Verlauf der Normalspannung σ_{zz}

Bei der Verteilung der Normalspannung σ_{rr} vgl. Abb. 5.4 fällt auf, dass der Spannungshaushalt über einen breiten Bereich ähnlich der Spannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ eine Konstanz aufweist und nur nahe der Übergangsbereiche davon abweicht. Der Maximalwert der Spannung in Radialrichtung liegt bei $\sigma_{rr(max)} = 67MPa$. Bezieht man diese Spannung auf den Maximalwert der Längsspannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ an der Stelle $\varphi = 45^\circ$, so gilt folgender Zusammenhang:

$$\frac{\sigma_{rr(max)}}{\sigma_{\varphi\varphi(max)}} = \frac{67MPa}{528MPa} \hat{=} 13\%.$$

Das Vorhandensein dieser Spannungskomponente hat einen maßgeblichen Einfluss auf die Delaminationsneigung, die ihrerseits zum Versagen des Bauteils führen kann. Aus diesem Grund muss die genannte Spannung möglichst klein gehalten werden. Wie bereits erwähnt, fällt das Spannungsniveau der Normalspannung σ_{rr} in der Nähe der Übergangsbereiche herab. So beträgt z.B. die Maximalspannung beim Schnitt an der Stelle $\varphi = 0^\circ$ die Hälfte des Maximalwertes im ganzen dargestellten Bereich.

Abbildung 5.4: Verteilung der Normalspannung σ_{rr} im gekrümmten BereichAbbildung 5.5: Verlauf der Normalspannung σ_{rr} in Schnitten bei $\varphi = 45^\circ$ und $\varphi = 0^\circ$

Zusätzlich erfolgt die Darstellung der Spannung σ_{xx} im Flansch 1 direkt am Übergangsbereich, vgl. Abbildung 5.6. Die Spannung σ_{xx} entspricht der Normalspannung σ_{rr} für den geraden Bereich (kartesisches Koordinatensystem). Es wurde nicht der gesamte Flansch, sondern ein Bereich dargestellt, welcher der Bauteildicke entspricht. Die genannte Abbildung zeigt deutlich, dass die Spannungskomponente bereits bei einem Abstand $d = 1,2\text{mm}$ verschwindet. Somit ist der Einfluss der Störung bereits nach wenigen Millimetern abgeklungen. Dieser Abstand, bezogen auf die Bauteildicke, entspricht einem Wert von ungefähr 0,5.

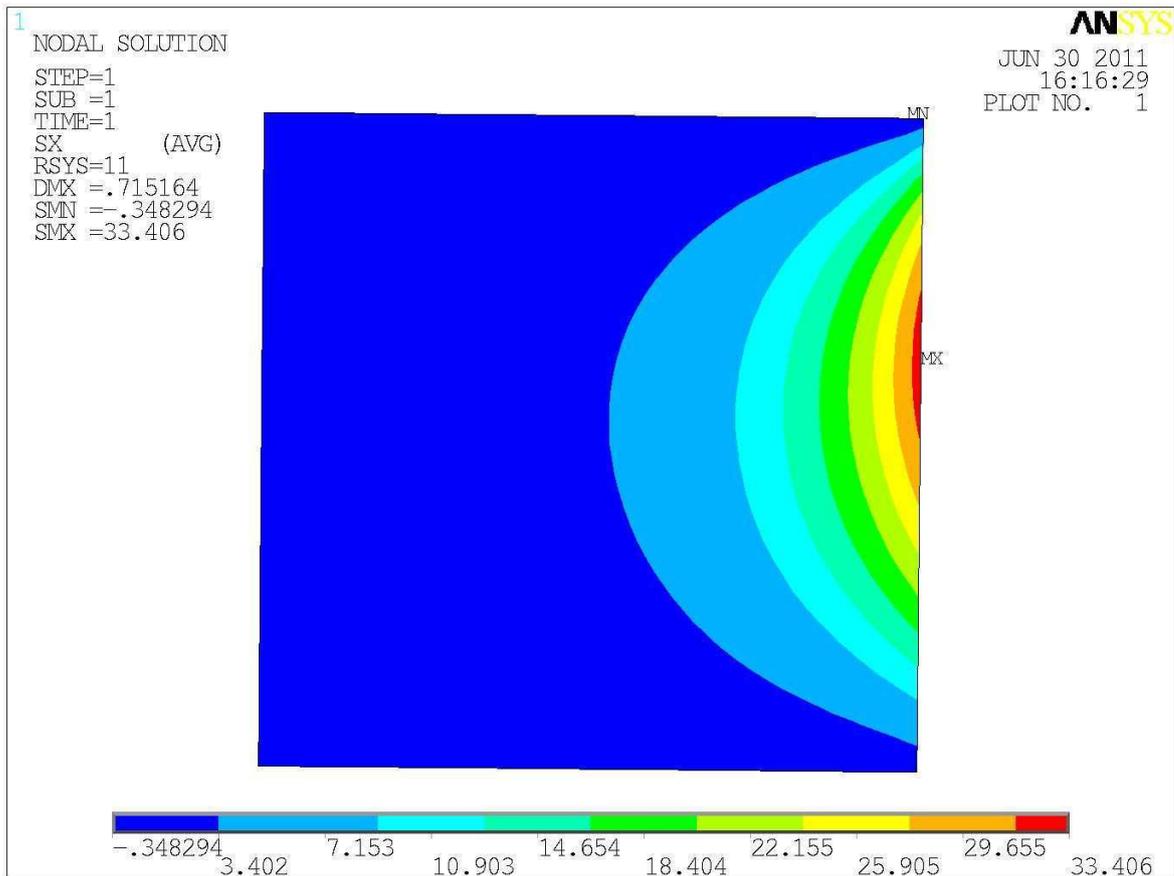


Abbildung 5.6: Verteilung der Normalspannung σ_{xx} im Flansch 1 im Übergangsbereich

Die Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ wird allgemein durch die Querkraft hervorgerufen. Bei der vorhandenen Belastung existiert diese Kraft in keinem der Schnitte des Bauteils. Somit darf auch keine Resultierende der Schubspannung auftreten. Diese an das Bauteil gestellte Randbedingung ist bis auf die Übergangsbereiche erfüllt. Bestätigung dafür liefert die Abbildung 5.7. Im Rahmen der Konvergenzstudie wurde gezeigt, dass die Randbedingung

$$\int_a^b \tau_{r\varphi} dr = Q \approx 0$$

auch in den Übergangsbereichen erfüllt bleibt. Das Vorhandensein der Schubspannung beansprucht das Laminat zusätzlich. Bei den Verläufen ist eine Punktsymmetrie bezüglich der Stelle

$$\tau_{r\varphi}(\varphi = 45^\circ) = 0$$

festzustellen.

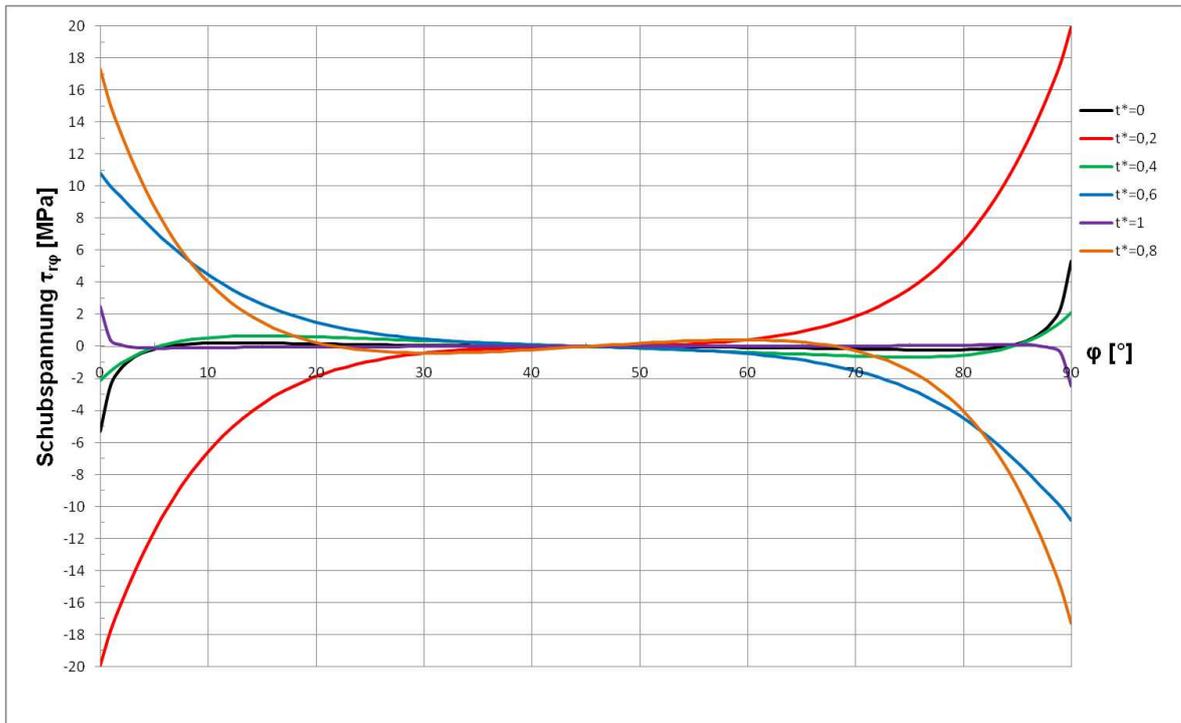


Abbildung 5.7: Verteilung der Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ im gekrümmten Bereich

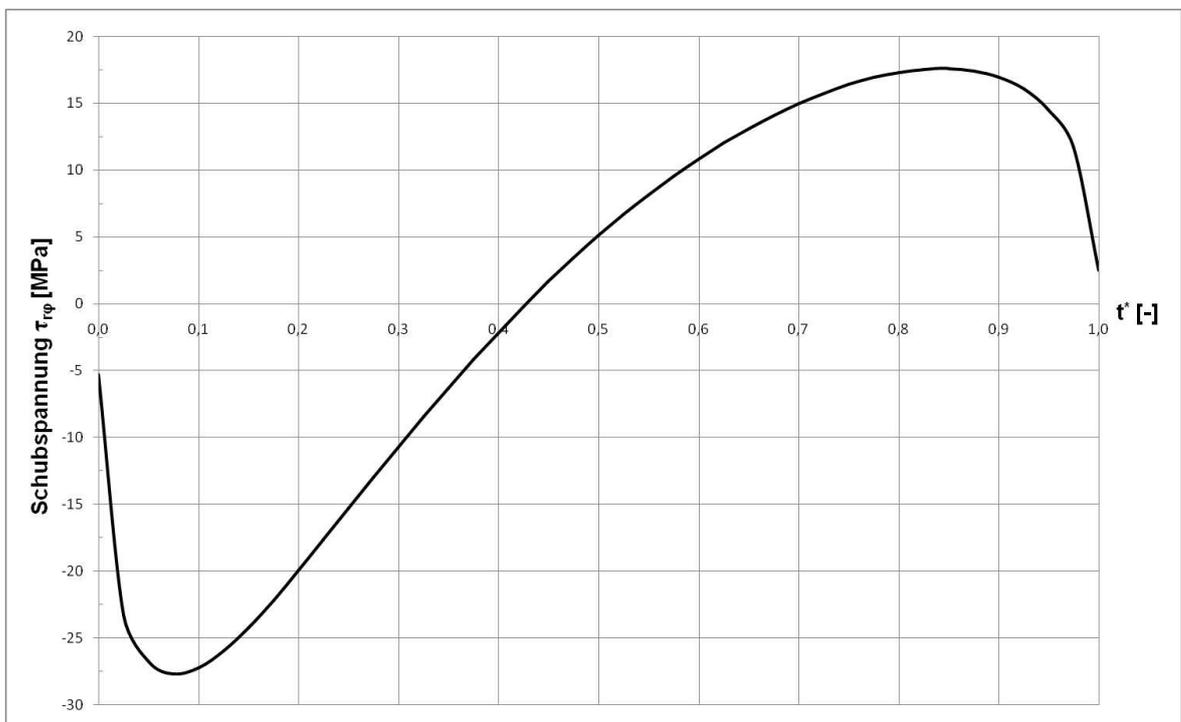


Abbildung 5.8: Verlauf der Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ im Schnitt bei 0°

Die Diskussion der Ergebnisse

Die Störung, die durch die Geometrieänderung vorliegt, hat einen maßgeblichen Einfluss auf den Spannungshaushalt. Mit einer wachsenden Entfernung zu dieser Stelle nimmt deren Wir-

kung aber ab. Mit dem beschriebenen Einfluss hat sich de Saint-Venant befasst, nach dem auch dieses Prinzip genannt wird. Girkmann [4] gibt für diese Entfernung einen Erfahrungswert an, der der Dicke des Bauteils entspricht.

5.2 Untersuchung der Auswirkung des Anisotropiewertes auf den Spannungshaushalt unter einer Momentbelastung

In diesem Abschnitt soll die Auswirkung des Anisotropiewertes s auf den Spannungshaushalt untersucht werden. Betreffend der Geometrie gelten dieselben Voraussetzungen wie im vorangegangenen Abschnitt.

Zur Bestimmung der Spannungskomponenten im geraden Balken unter einer Momentenbelastung gilt der folgende Zusammenhang:

$$\sigma_{yy} = \frac{M}{W} = \frac{Mx}{I_{zz}} = \frac{12Mx}{th^3}, \quad (5.1)$$

$$\sigma_{xx} = \tau_{xy} = 0. \quad (5.2)$$

Nach (5.1) existiert beim geraden Balken ein linearer Zusammenhang zwischen der Spannungskomponente σ_{yy} und der Koordinate in die Dickenrichtung x . Damit liegen die maximal auftretenden Spannungen an den Rändern. Der Betrag der Maximalspannung wird auch zur Darstellung der Spannungsverläufe bei einem gekrümmten Balken herangezogen. Bei der genannten Darstellung gilt der folgende Zusammenhang:

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \kappa_{\varphi} \frac{M}{W_{(max)}}. \quad (5.3)$$

Um die Spannungskomponenten im gekrümmten Balken darzustellen, wird ein zylindrisches Koordinatensystem mit der Koordinate in Umfangsrichtung φ und einer radialen Koordinate r definiert. Damit erklärt sich die Indizierung der Normalspannung in der Gleichung (5.3). Zusätzlich wurde bei der genannten Gleichung ein dimensionsloser Beiwert κ_{φ} eingeführt. An dieser Stelle ist zu erwähnen, dass die gewählte Darstellung Blumer [2] entnommen wurde, genauso der im weiteren Verlauf definierte Beiwert κ_r . Der Beiwert κ_{φ} soll die verhältnismäßige Abweichung der Spannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ von der maximalen Spannung σ_{yy} des geraden Balkens darstellen. Stellt man die Gleichung (5.3) nach κ_{φ} um, wird diese durch folgende Beziehung ausgedrückt:

$$\kappa_{\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi} \frac{W_{(max)}}{M}. \quad (5.4)$$

Analog dazu lässt sich ein Faktor zur Darstellung der Normalspannung in Radialrichtung definieren. Nach (5.2) existiert beim geraden Balken unter einer Momentenbelastung keine Spannungskomponente in Radialrichtung, daher wird zu der genannten Darstellung die maximale Normalspannung nach (5.1) herangezogen. Die nachstehende Gleichung (5.5) gibt den beschriebenen Zusammenhang wieder:

$$\kappa_r = \sigma_{rr} \frac{W_{(max)}}{M}. \quad (5.5)$$

Der dimensionslose Beiwert κ_r beschreibt damit ein Verhältnis der Normalspannung in Radi-
alrichtung und der maximalen Normalspannung in Längsrichtung des geraden Balkens.

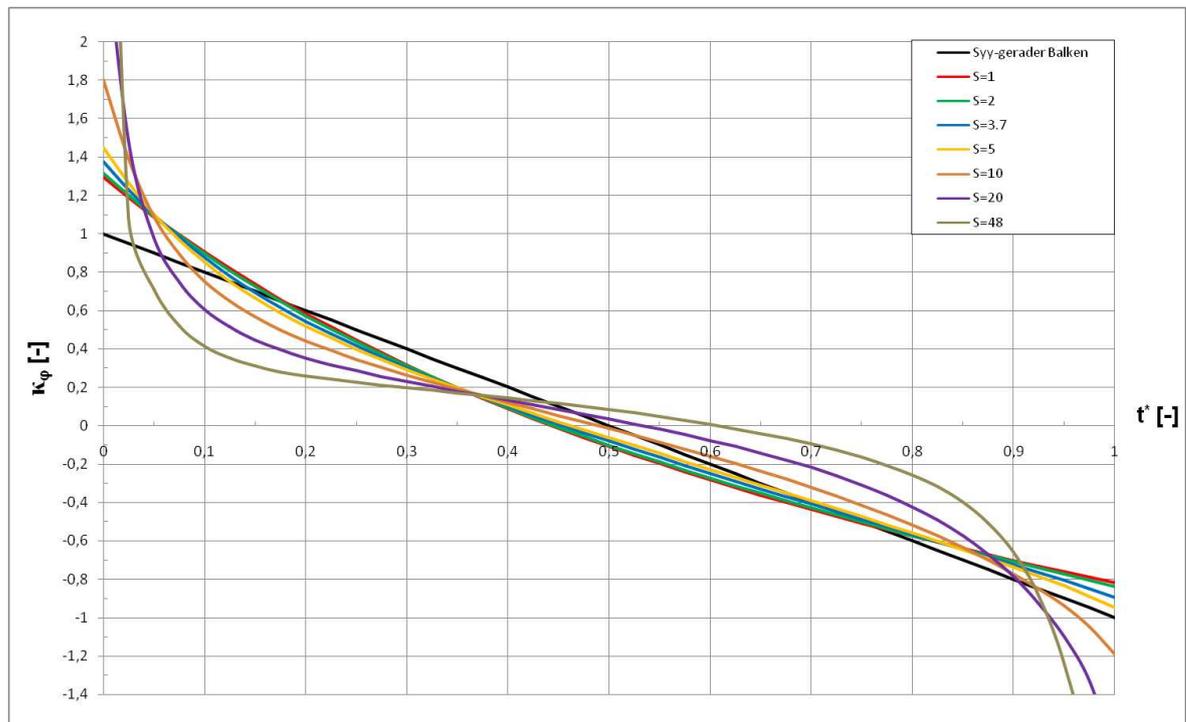


Abbildung 5.9: Der dimensionslose Beiwert κ_φ an der Stelle $\varphi = 45^\circ$

Die Abbildungen 5.9 und 5.10 geben den Verlauf des dimensionslosen Beiwertes κ_φ in Abhängigkeit vom Anisotropieparameter s an zwei unterschiedlichen Stellen des gekrümmten Bereichs wieder. Als erstes stellt man fest, dass die Spannungsverläufe über dem Querschnitt nicht mehr linear sind. Dieser Effekt nimmt mit steigendem Anisotropiewert s zu. So weisen beispielsweise die Verläufe bei $s = 48$ und $s = 20$ eine extrem starke Krümmung auf. Der Verlauf ähnelt einem S-Schlag, mit einem annähernd waagerechten Verlauf in der Mitte und einem annähernd senkrechten Verlauf nahe den Rändern. Da diese beiden Werte fürs technisch i.A. irrelevant sind und eher Extremwerte der Materialkennwerte darstellen, wird auf ihre Betrachtung im späteren Verlauf dieser Ausarbeitung nur bedingt eingegangen. Nichtsdestotrotz wird in [10] beschrieben, dass deutliche Unterschiede der Elastizitätsmoduln numerisch unkritisch sind, wenn ein Verhältnis von weniger als 10^8 vorliegt.

Bei dem Verlauf an der Stelle $\varphi = 0^\circ$ ist zu beobachten, dass die Kurven sich nur geringfügig vom linearen Verlauf unterscheiden, da an dieser Stelle die Wirkung des geraden Bereiches für die Kurvenverläufe mitentscheidend sind. Erst bei einem Wert von $s = 10$ ändert sich dieses Verhalten. Bei dem Schnitt an der Stelle $\varphi = 45^\circ$ sind hingegen etwas größere Abweichungen festzustellen. Letztendlich werden die Werte an den Rändern betrachtet. Allgemein wird am inneren Rand ein Spannungszuwachs und am äußeren Rand ein Spannungsrückgang beobachtet. Bei dem letzteren ändert sich dieses Verhalten wiederum bei $s = 10$. An der Stelle $\varphi = 0^\circ$ liegt am inneren Rand ein Spannungszuwachs von 13 – 20% für $s < 5$ und 35% für $s = 10$. An der Stelle $\varphi = 45$ sind die Unterschiede zwischen den einzelnen Werten für s wesentlich

größer. So liegt z.B. der Wert für $\kappa_\varphi (s = 1)$ bei 1,30 und der gleiche Wert für $s = 10$ bei 1,80. Am äußeren Rand liegen die Werte für κ_φ im Bereich von $-0,8$ bis $-1,2$.

Betrachtet man die Nullstellen der Kurven, die als das Indiz für die Lage der neutralen Fasern dienen, stellt man eine Systematik fest. So wird mit steigendem s der Abstand zur Lage der neutralen Fasern des geraden Balkens kleiner. Bei $s = 10$ liegt die Nullstelle annähernd an derselben Stelle mit dem theoretischen Verlauf des geraden Balkens.

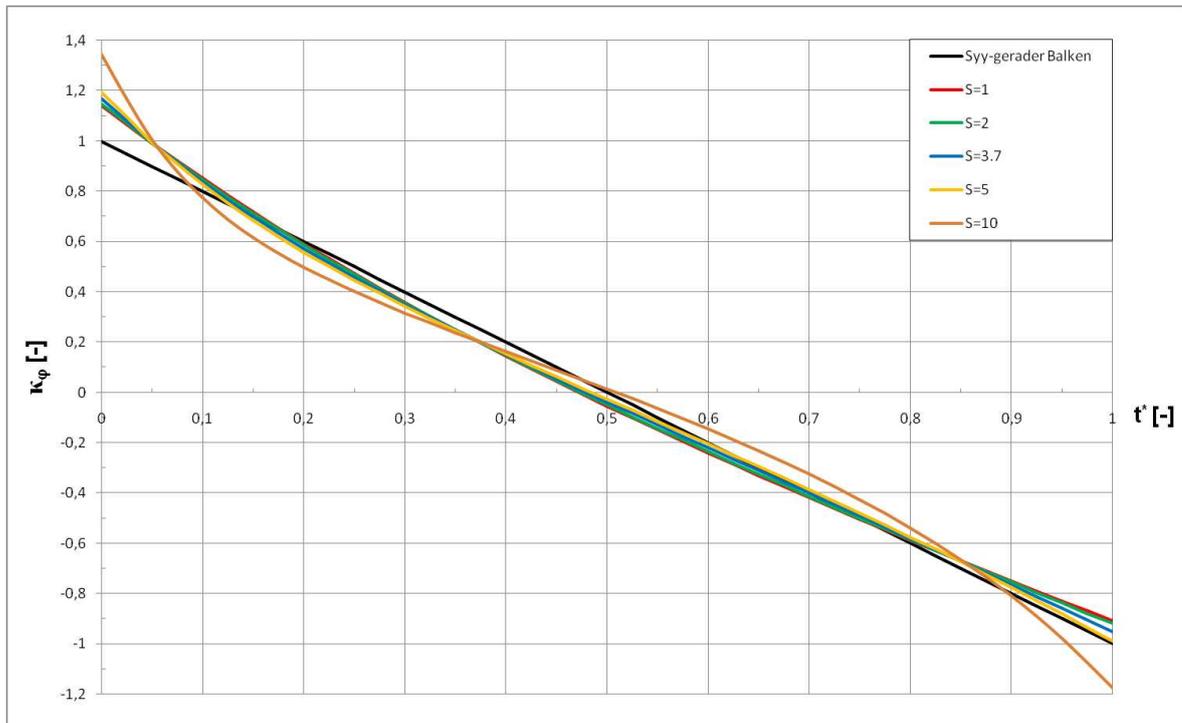
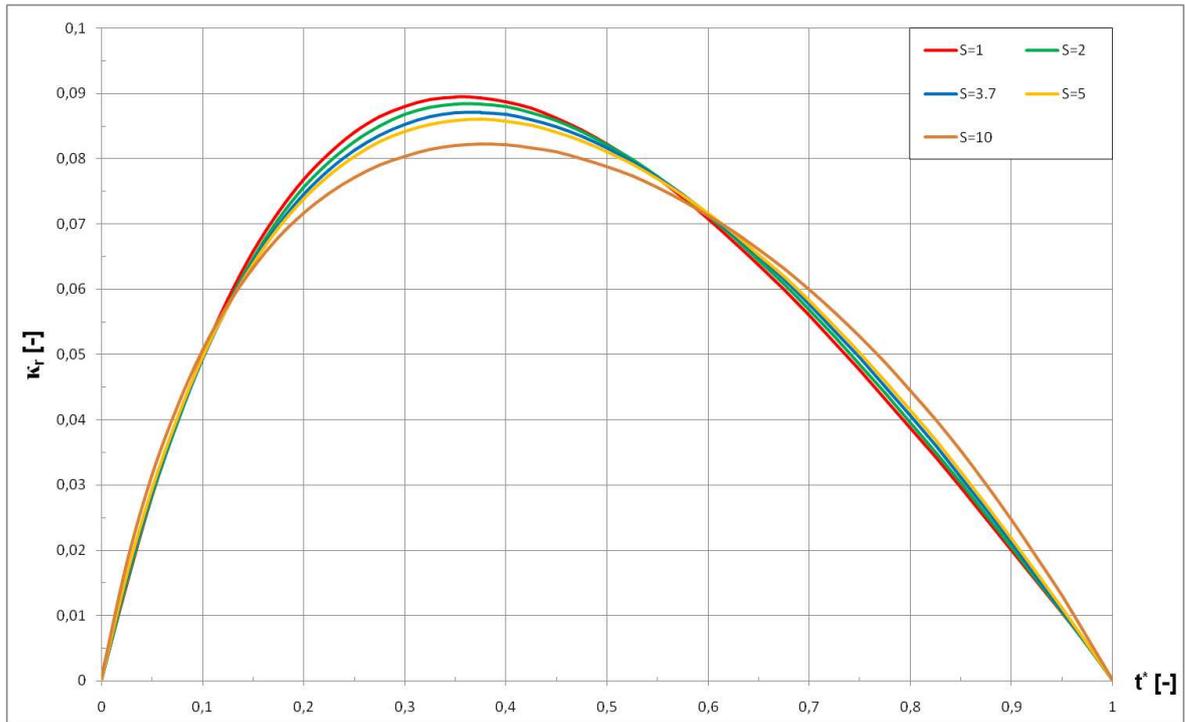
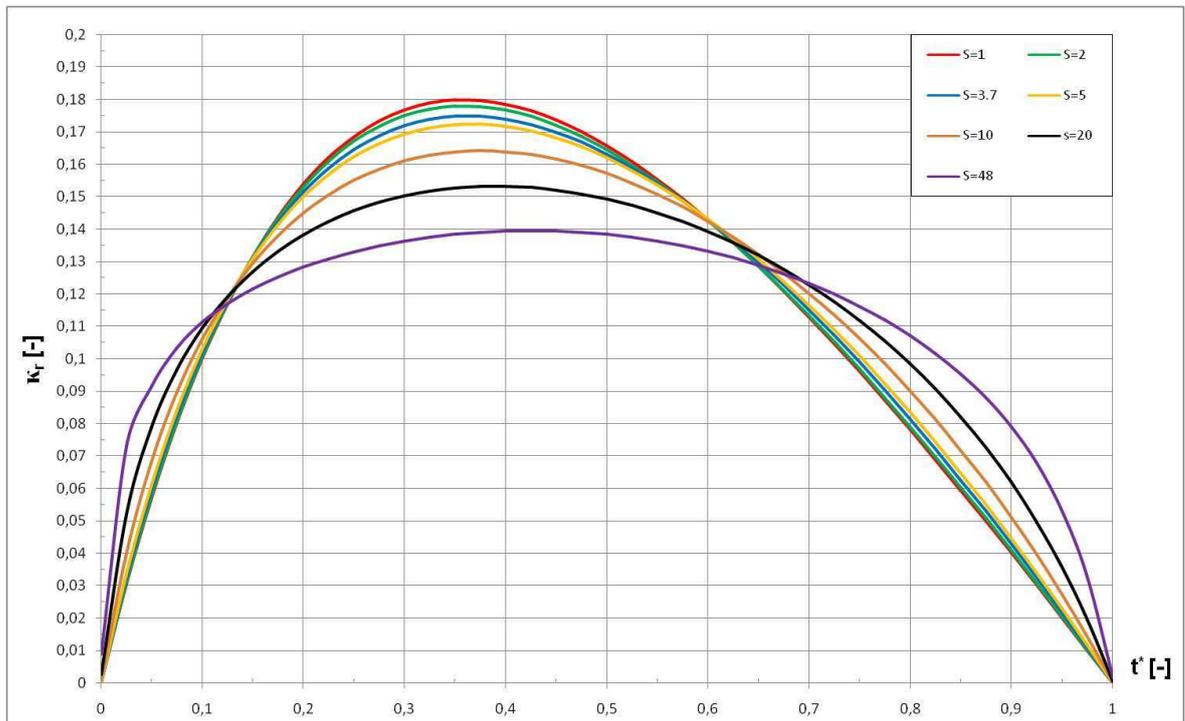


Abbildung 5.10: Der dimensionslose Beiwert κ_φ an der Stelle $\varphi = 0^\circ$

Die Abbildungen 5.11 und 5.12 geben den Verlauf des dimensionslosen Beiwertes κ_T wieder. Dieser beschreibt die Höhe der Belastung in die Dickenrichtung, die z.B. maßgebend für die Delamination ist. Allgemein betrachtet weisen die Kurven einen parabolischen Verlauf auf. An den Rändern liegen die Funktionswerte bei Null, damit werden die dort geltenden Randbedingungen erfüllt. Der Unterschied zwischen den einzelnen Kurven liegt in erster Linie bei dem Maximalwert. So nimmt dieser mit steigendem Anisotropiewert s ab. Dafür werden aber die Kurven bei gleicher Voraussetzung voller. Damit bleibt der Flächeninhalt annähernd gleich.

Abbildung 5.11: Der dimensionslose Beiwert κ_r an der Stelle $\varphi = 0^\circ$ Abbildung 5.12: Der dimensionslose Beiwert κ_r an der Stelle $\varphi = 45^\circ$

Schlussfolgerung

Für die technisch relevanten Werte sind die Unterschiede zwischen den einzelnen Werten für s unwesentlich. Erst ab einem Wert von $s = 10$ nimmt deren Einfluss zu. Durch den Vergleich der Verläufe der Beiwerte κ_φ und κ_r ist bei dem Ersten eine deutlich größere Auswirkung

festzustellen. Erklärt wird das dadurch, dass die Fasern zum größten Teil die Spannungskomponente parallel zu ihrer Ausrichtung aufnehmen. Der Anisotropiewert bezieht sich im Wesentlichen auf die Steifigkeit der Fasern und hat damit einen direkten Einfluss auf deren Tragfähigkeit und Spannungsverteilung im gesamten Laminat. Die Radialspannung nimmt dagegen im Wesentlichen die Matrix auf. Aufgrund ihrer Materialeigenschaften kann diese keine all zu hohe Werte für die Zugsteifigkeit aufweisen.

Die dargestellten Ergebnisse zeigen eine geringe Auswirkung des Anisotropiewertes s auf die Spannungsfelder des Bogenbereichs. Es ist deutlich zu erkennen, dass solche Einflüsse wie die Krümmung und die Randstörung wesentlich mehr zum Spannungshaushalt beitragen.

5.3 Untersuchung der Auswirkung des Krümmungsverhältnisses auf den Spannungshaushalt unter einer Momentenbelastung

In diesem Abschnitt soll die Auswirkung des Krümmungsverhältnisses α auf den Spannungshaushalt untersucht werden. Betreffend der Grundgeometrie gelten dieselben Voraussetzungen, wie im vorangegangenen Abschnitt. Die Beiwerte κ_r und κ_φ weisen dieselbe Definition auf.

Nun soll der Parameter α variiert werden. Dieser Parameter ist eine dimensionslose Größe für das Krümmungsverhältnis und ist bei Blumer [2] wie folgt angegeben:

$$\alpha = \frac{t}{2r_m}. \quad (5.6)$$

Setzt man in Gleichung (5.6) für r_m die Beziehung

$$r_m = \frac{t}{2} + a \quad (5.7)$$

ein und stellt die modifizierte Gleichung nach a um, so gilt der Zusammenhang:

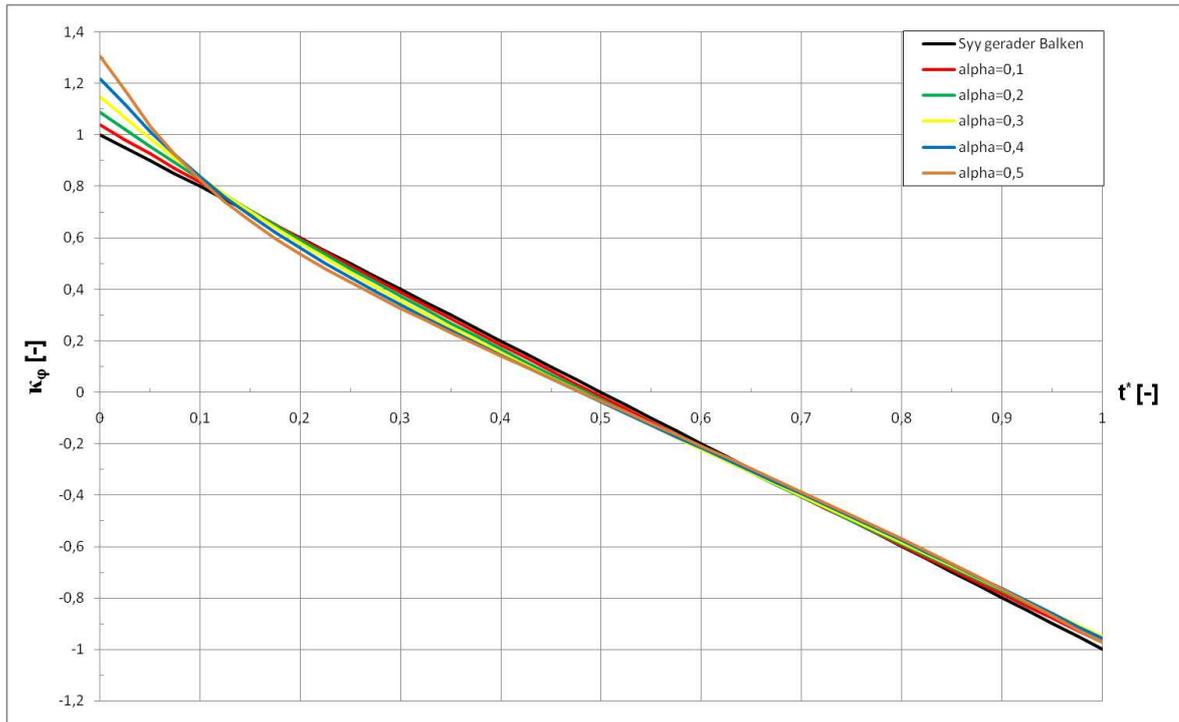
$$a = \frac{t}{2\alpha} (1 - \alpha). \quad (5.8)$$

Blumer [2] gibt an, dass für α der Wertebereich

$$0,1 < \alpha < 0,5$$

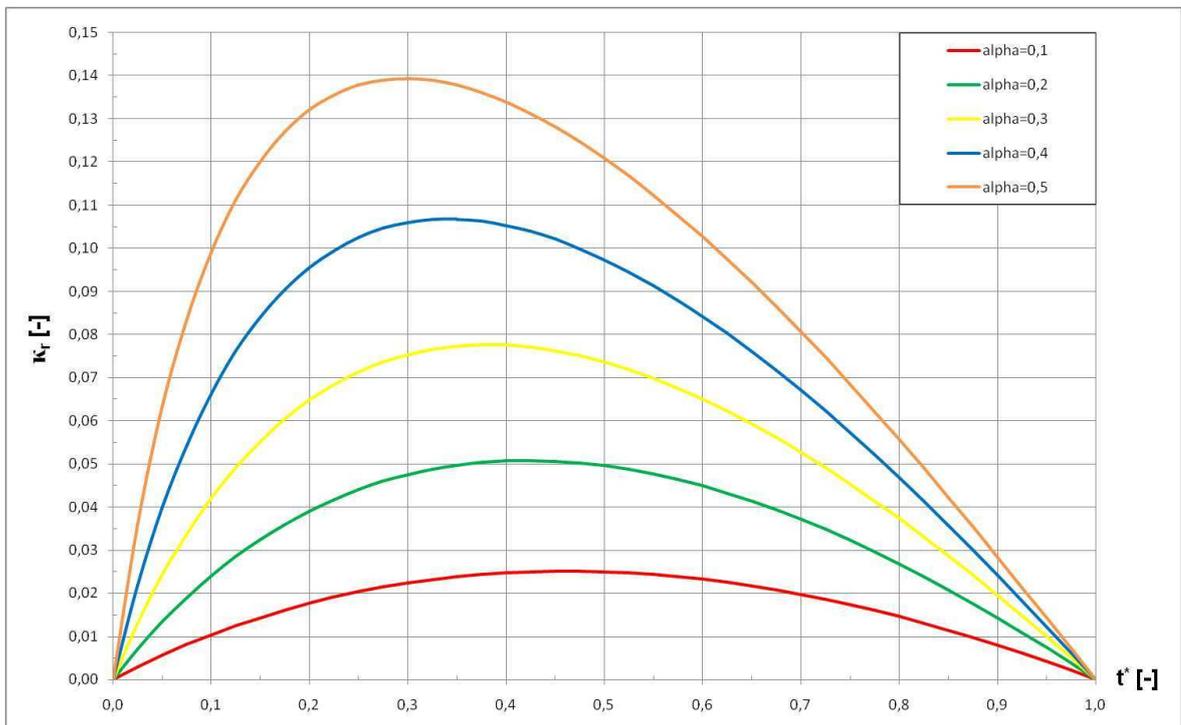
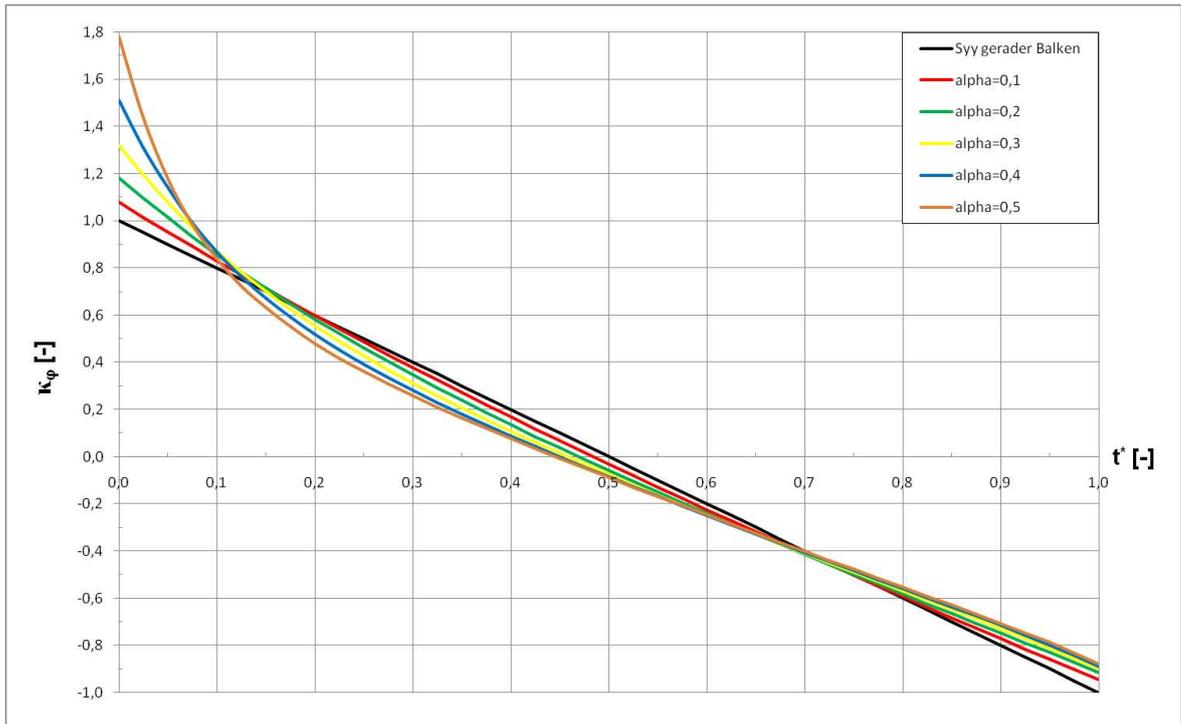
sinnvoll ist. Es ist zu beachten, dass Blumer diesen Wertebereich für Holzbausträger angibt. Unter bestimmten Voraussetzungen kann es möglich sein, diesen Wertebereich jedoch auf den Flugzeugbau zu übertragen. Durch das Einsetzen angegebener Werte für α und konstanter Bauteildicke $t = 2,5\text{mm}$ in die Gleichung (5.8) kann der innere Radius a berechnet werden. Die berechneten Ergebnisse gibt die Tabelle 5.1 wieder.

Krümmungsverhältnis α	Der innere Radius a [mm]
0,1	11,25
0,2	5
0,3	2,92
0,4	1,88
0,5	1,25

Tabelle 5.1: Der innere Radius a in Abhängigkeit vom Krümmungsverhältnis α Abbildung 5.13: Der dimensionslose Beiwert κ_φ an der Stelle $\varphi = 0^\circ$

Die Abbildungen 5.13 und 5.14 stellen den dimensionslosen Beiwert κ_φ an zwei unterschiedlichen Stellen dar. An der Stelle $\varphi = 0^\circ$ ist zu beobachten, dass das Krümmungsverhältnis im breiten Bereich des Verlaufs nur unwesentlich zu einer Veränderung der Spannungsverteilung führt. Nahe des inneren Radius wird der Einfluss jedoch wesentlich größer. An dieser Stelle beträgt die Abweichung zum theoretischen Spannungsverlauf des geraden Balkens bei $\alpha = 0,5$ etwa 30%. An der Stelle $\varphi = 45^\circ$ ist unter den gleichen Voraussetzungen ein Wert von 80% zu nennen. Allgemein gesehen fällt die Auswirkung von α an der zuletzt genannten Stelle im gesamten Verlauf größer aus.

Die Abbildungen 5.15 und 5.16 geben den Verlauf des Beiwertes κ_r bei $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 45^\circ$ wieder. Die Betrachtung der Funktionswerte an den Rändern liefert den Beweis der Erfüllung der dort geltenden Randbedingungen. Es ist festzustellen, dass das Krümmungsverhältnis auf die Spannungsverteilung im gekrümmten Bereich eine nicht zu vernachlässigbare Auswirkung hat. Des Weiteren ist festzuhalten, dass mit einem wachsendem Verhältnis α die Werte für κ_r zunehmen.



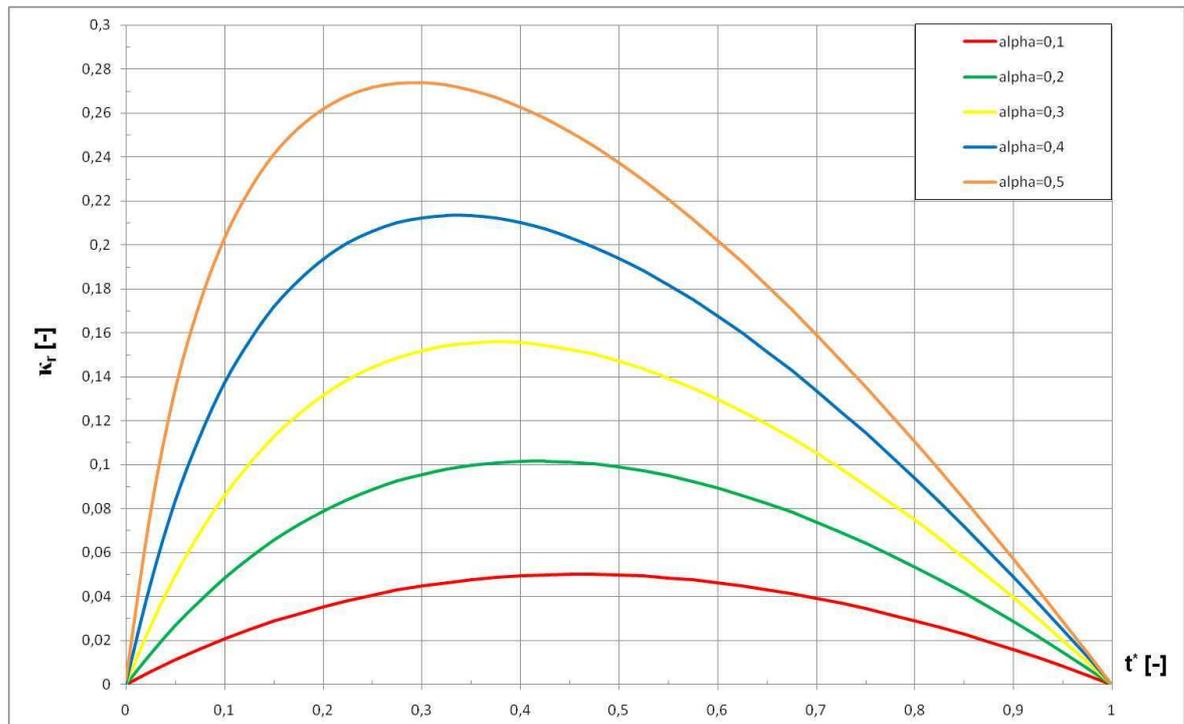


Abbildung 5.16: Der dimensionslose Beiwert κ_r an der Stelle $\varphi = 45^\circ$

Schlussfolgerung

Bei der Verteilung der Normalspannung $\sigma_{\varphi\varphi}$, bzw. des Beiwertes κ_φ ist der Einfluss der Krümmung gering. Die Verläufe nahe des inneren Randes weichen jedoch von dieser allgemeinen Aussage ab. Bei der Betrachtung des Beiwertes κ_r sind hingegen große Unterschiede zwischen den einzelnen Verläufen für α zu beobachten. Darum hat die Krümmung eine nicht zu vernachlässigbare Auswirkung auf die Verteilung der Normalspannung in Radialrichtung.

5.4 Untersuchung der Auswirkung der Randstörung auf den Spannungshaushalt unter einer Querkraftbelastung

Im diesem Abschnitt werden die Spannungsverläufe, die sich aus einer Querkraftbelastung ergeben, dargestellt. Damit wird der Einfluss der vorliegenden Störung untersucht. Die Darstellung erfolgt in Anlehnung an Kap. 5.1. Dies betrifft die Darstellung, die Geometrieangaben, die Materialdaten und den Anisotropiewert s . Der Querkraftfluss ist gemäß der Abbildung 3.1 definiert und weist einen Wert von $Q = 10\text{N/mm}$ auf.

Die Abbildung 5.17 stellt die Verläufe der Normalspannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ an unterschiedlichen Stellen t^* dar. Aus diesen Verläufen ist eine deutliche Auswirkung der Randstörung zu erkennen. Qualitativ gelten bei der dargestellten Normalspannung die gleichen Überlegungen wie unter der Momentbelastung, vgl. Kap. 5.1. Quantitativ sind jedoch Unterschiede festzustellen, die aber auf die Art und die Größe der Belastung zurückzuführen sind. Nach dem Abklingen der Randstörung bei der Normalspannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ ist zu beobachten, dass das Spannungsniveau bei $t^* = 0$ im Übergangsbereich zu Flansch 1 größer als im Übergangsbereich zu Flansch 2

ist. Dazwischen ist ein annähernd linearer Verlauf vorzufinden. Die größeren Spannungswerte sind unter anderem dadurch zu erklären, dass beim zuerst genannten Bereich ein größeres Schnittmoment vorliegt. Dieses entsteht wiederum durch einen größeren senkrechten Abstand (Hebelarm) zu der eingreifenden Querkraft Q . Damit ist der Beweis erbracht, dass im Gegensatz zur Momentbelastung kein drehsymmetrischer Spannungszustand vorliegt. Dies soll bei der analytischen Herleitung der Spannungsfunktion berücksichtigt werden. Am äußeren Rand bei $t^* = 1$ ist tendenziell umgekehrter Verlauf zu beobachten. Des Weiteren ist aus den Verläufen deutlich zu erkennen, dass die Auswirkung der Randstörung sich auf die Ränder beschränkt.

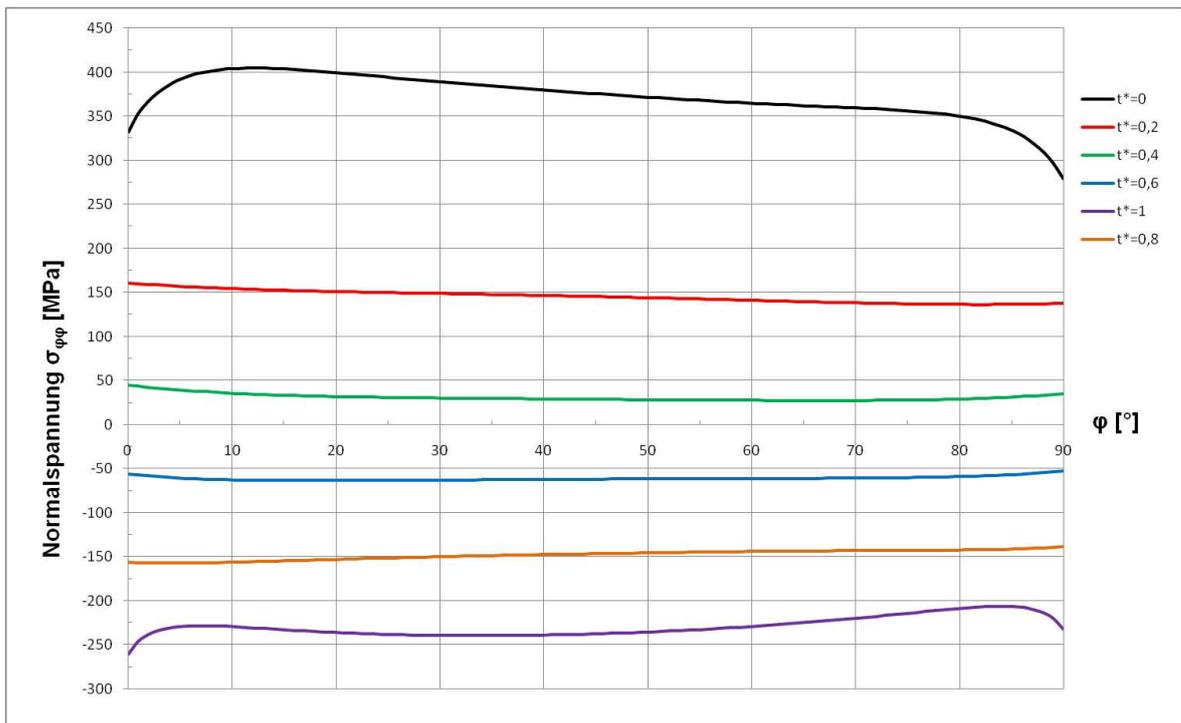


Abbildung 5.17: Verlauf der Normalspannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ über dem gesamten Bogenbereich

Die Verteilung der Normalspannung σ_{rr} vgl. Abb. 5.18 bezogen auf den jeweiligen Wert für t^* weist qualitativ denselben Verlauf, wie unter der Momentbelastung auf. Nahe der Übergangsbereiche ist ebenfalls eine deutliche Reduktion des Spannungsniveaus festzustellen.

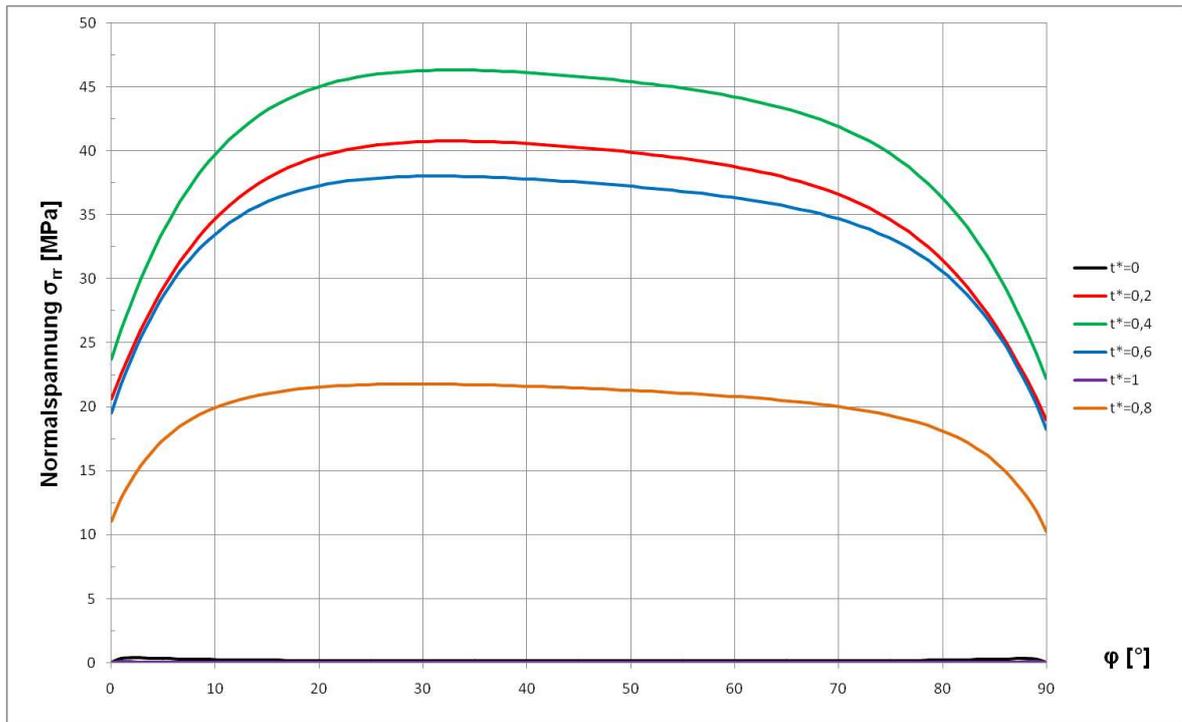


Abbildung 5.18: Verlauf der Normalspannung σ_{rr} über dem gesamten Bogenbereich

Abschließend wird die Schubspannung $\tau_{r\varphi}$, vgl. Abb. 5.19 dargestellt. Neben der quantitativen Unterschieden, weisen die Verläufe im Gegensatz zu der Momentbelastung keine Punktsymmetrie auf

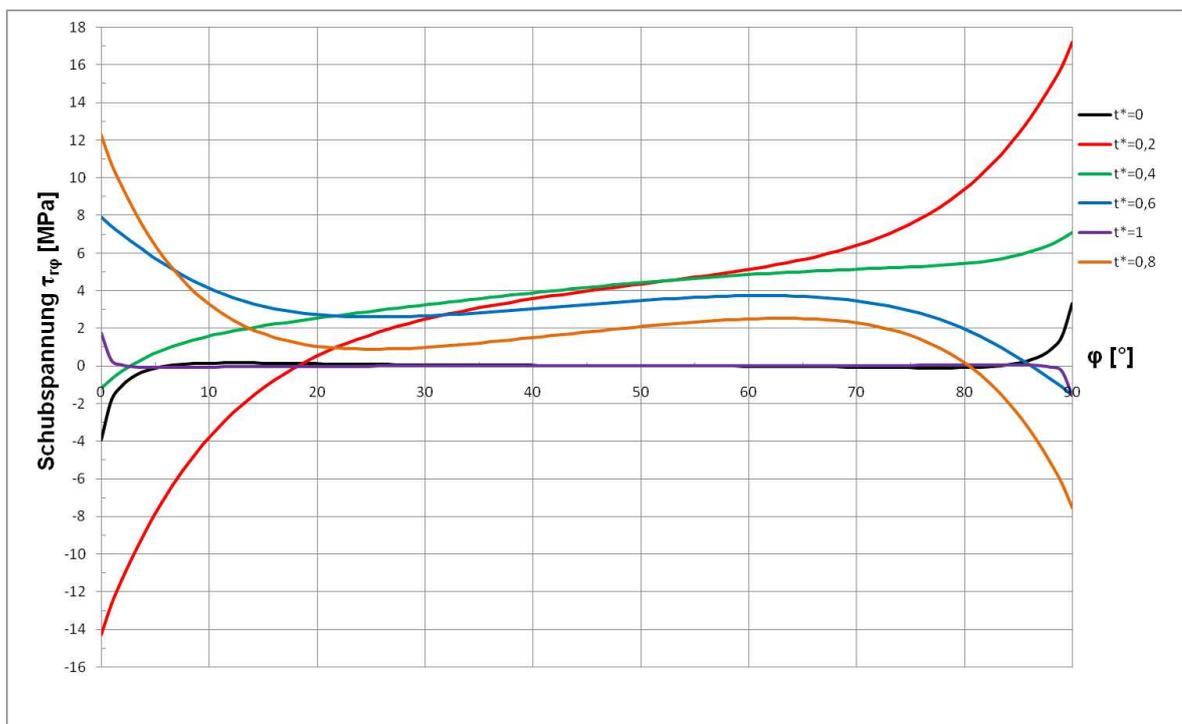


Abbildung 5.19: Verlauf der Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ über dem gesamten Bogenbereich

Schlussfolgerung

Wie es zu erwarten war, hat die Randstörung eine Auswirkung auf den Spannungshaushalt. Eine ausführliche Betrachtung erfolgte wie bereits erwähnt im Kapitel 5.1. Im weiteren Verlauf dieser Ausarbeitung wird das betrachtete Bauteil unter einer Normalkraftbelastung untersucht. Die Ergebnisse dieser Untersuchung zeigen ebenfalls eine Auswirkung der Randstörung auf das Spannungsfeld im Übergangsbereich. Die Verläufe sind dem Anhang B zu entnehmen.

5.5 Untersuchung der Auswirkung des Anisotropiewertes auf den Spannungshaushalt unter einer Querkraftbelastung

Nun wird die Auswirkung des Anisotropiewertes auf den Spannungshaushalt unter einer Querkraftbelastung untersucht. Es gelten weiterhin dieselben Angaben bezüglich der Geometrie, der Werkstoffdaten und der Belastungsart, vgl. Kap. 5.4.

Am freien Rand eines geraden Balkens, der mit einer Querkraft belastet wird, ist die Schubspannung τ_{xy} wie folgt berechenbar:

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2} \frac{Q}{A} \left[1 - \left(\frac{2x}{t} \right)^2 \right] \quad (5.9)$$

Die Koordinate x ist dabei der Abstand zur neutralen Faser. Diese wird wie üblich in die Mitte des Querschnitts gelegt. Demnach liegt ein parabolischer Verlauf bezüglich x vor. Die maximale Schubspannung im geraden Balken tritt in der neutralen Faser auf, und kann wie folgt angegeben werden:

$$\tau_{xy(max)} = \frac{3}{2} \frac{Q}{A} \quad (5.10)$$

Analog dem Kap. 5.2 wird zur Darstellung der Schubspannung beim gekrümmten Balken der Beiwert $\kappa_{r\varphi}$ eingeführt. Dieser bezieht sich auf die maximale Schubspannung und ist demnach wie folgt definiert:

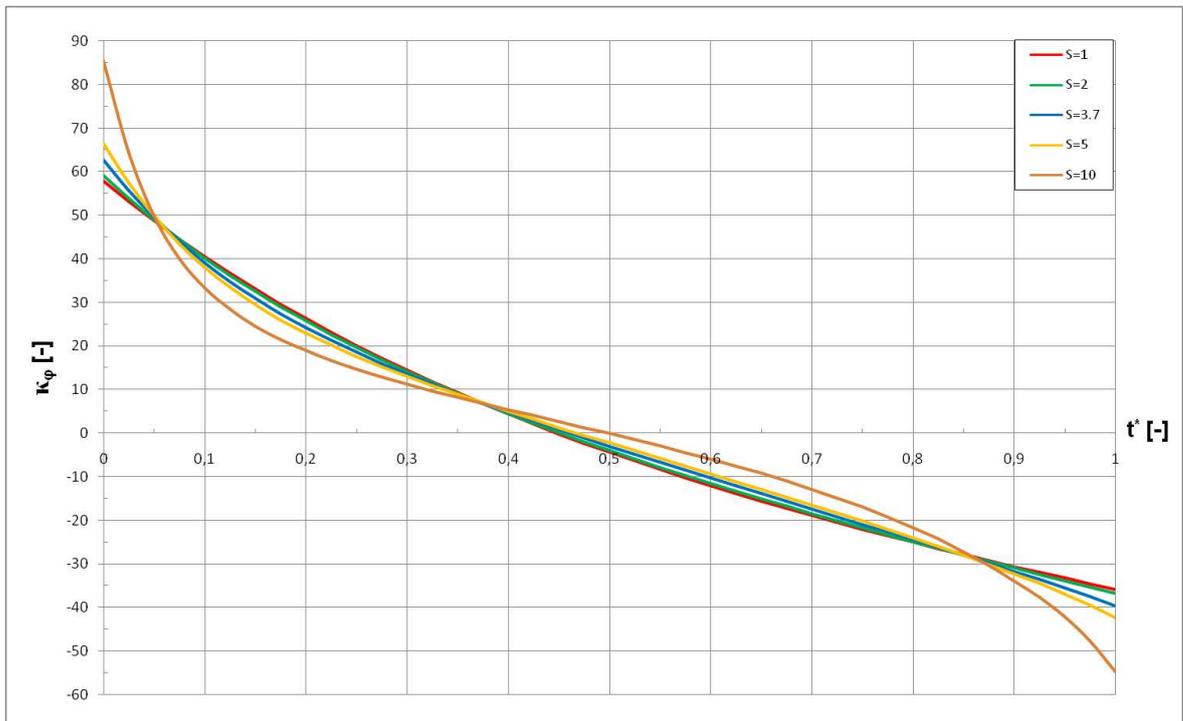
$$\kappa_{r\varphi} = \tau_{r\varphi} \frac{2}{3} \frac{A}{Q}. \quad (5.11)$$

Diese Art der Darstellung wurde wie bereits erwähnt Blumer [2] entnommen. Nun erfolgt die Erweiterung auf die Spannungskomponenten σ_{rr} und $\sigma_{\varphi\varphi}$. Demnach gelten für die angeschriebenen Spannungen folgende Zusammenhänge:

$$\kappa_{\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi} \frac{2}{3} \frac{A}{Q}, \quad (5.12)$$

$$\kappa_r = \sigma_{rr} \frac{2}{3} \frac{A}{Q}. \quad (5.13)$$

Die Abbildungen 5.20 und 5.21 geben den Verlauf des dimensionslosen Beiwertes κ_{φ} an der Stelle $\varphi = 0^\circ$ bzw. $\varphi = 45^\circ$ wieder.

Abbildung 5.20: Der dimensionslose Beiwert κ_φ an der Stelle $\varphi = 0^\circ$ Abbildung 5.21: Der dimensionslose Beiwert κ_φ an der Stelle $\varphi = 45^\circ$

Die Verläufe an der Stelle $\varphi = 0^\circ$ weichen für die Werte $s \leq 5$ nur geringfügig vom linearen Verlauf ab. Dies lässt sich durch den angeschlossenen geraden Bereich erklären. Die Verläufe an der Stelle $\varphi = 45^\circ$ weisen hingegen eine größere Krümmung auf. An beiden Stelle ist zusätzlich zu beobachten, dass die Verläufe sich untereinander nur geringfügig unterscheiden. Somit ist

die Auswirkung des Anisotropiewertes auf den Spannungshaushalt gering. Das beschriebene Verhalten ändert sich ab einem Wert von $s = 10$.

Die Abbildungen 5.22 und 5.23 stellen die Verläufe des dimensionslosen Beiwertes κ_r dar. Dabei werden die Schnitte im gekrümmten Bereich bei $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 45^\circ$ betrachtet.

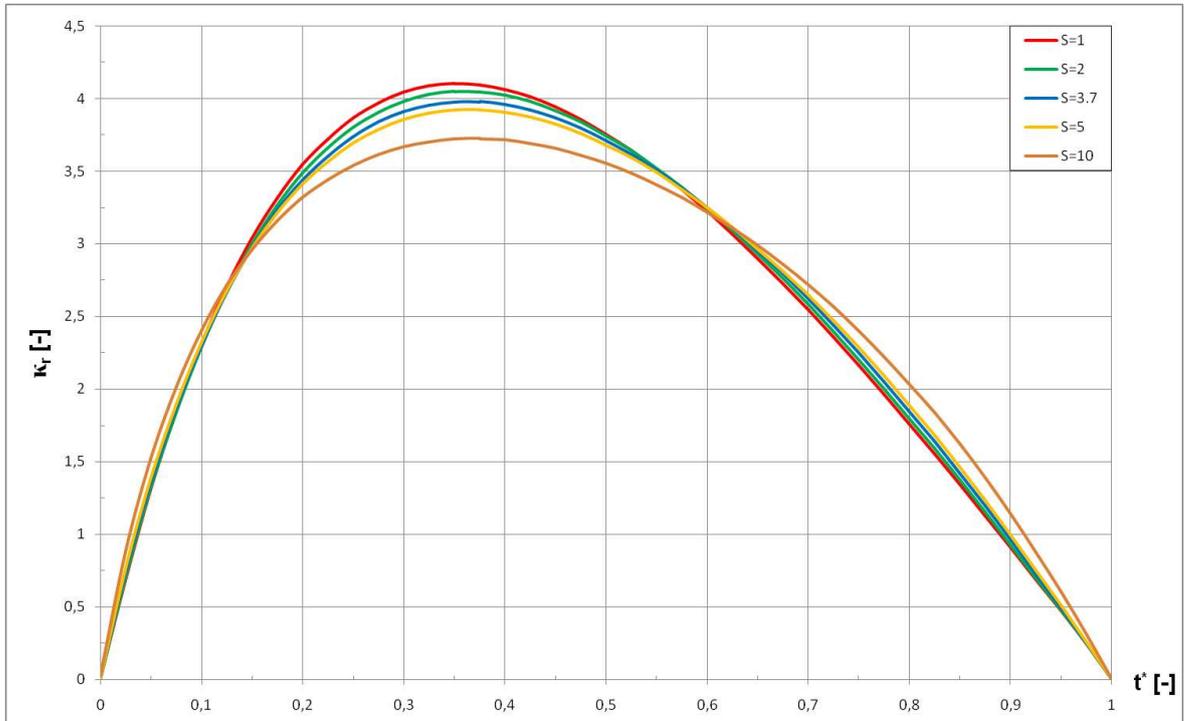


Abbildung 5.22: Der dimensionslose Beiwert κ_r an der Stelle $\varphi = 0^\circ$

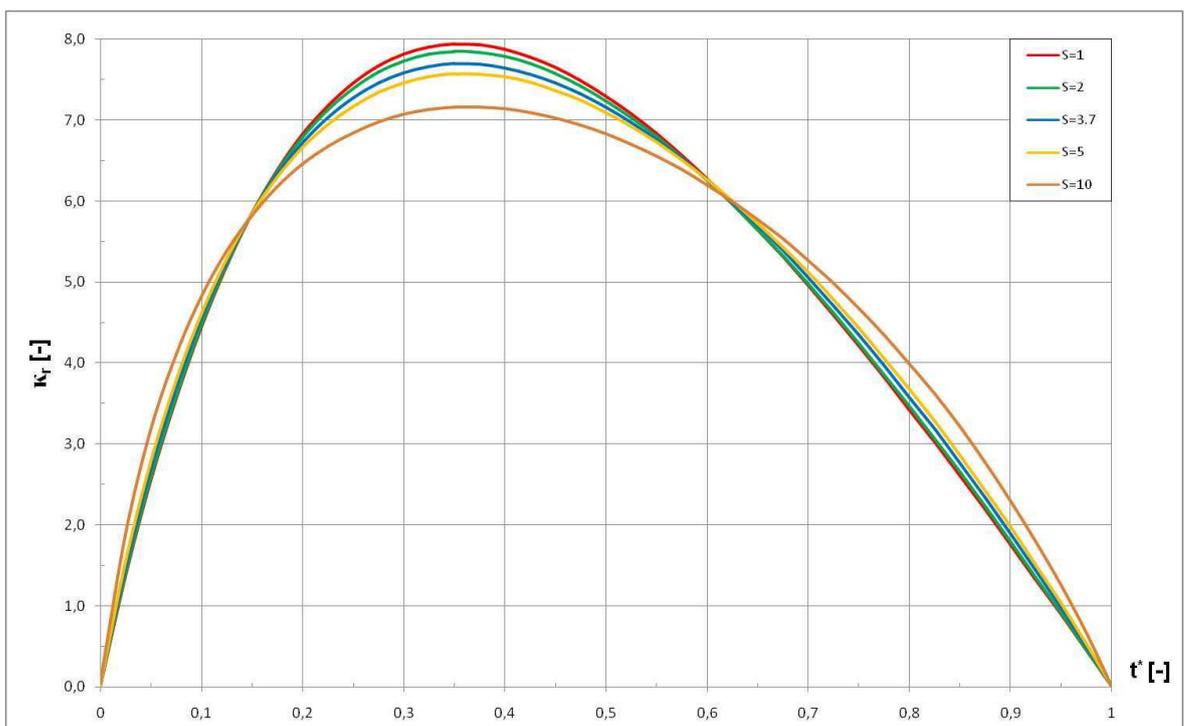


Abbildung 5.23: Der dimensionslose Beiwert κ_r an der Stelle $\varphi = 45^\circ$

Vergleicht man diese Ergebnisse mit denen, die im Kap. 5.2 erzielt waren, so sind ausschließlich quantitativen Unterschiede festzustellen. Dies ist auf die Art und die Größe der Belastung zurückzuführen. Zudem wurde folgende Beobachtung gemacht. Die Werte an der Stelle $\varphi = 45^\circ$ sind etwa doppelt so groß wie an der Stelle $\varphi = 0^\circ$.

Letztendlich erfolgt die Darstellung des Beiwertes $\kappa_{r\varphi}$. Die Abbildung 5.24 stellt den genannten Beiwert an der Stelle $\varphi = 0^\circ$ dar.

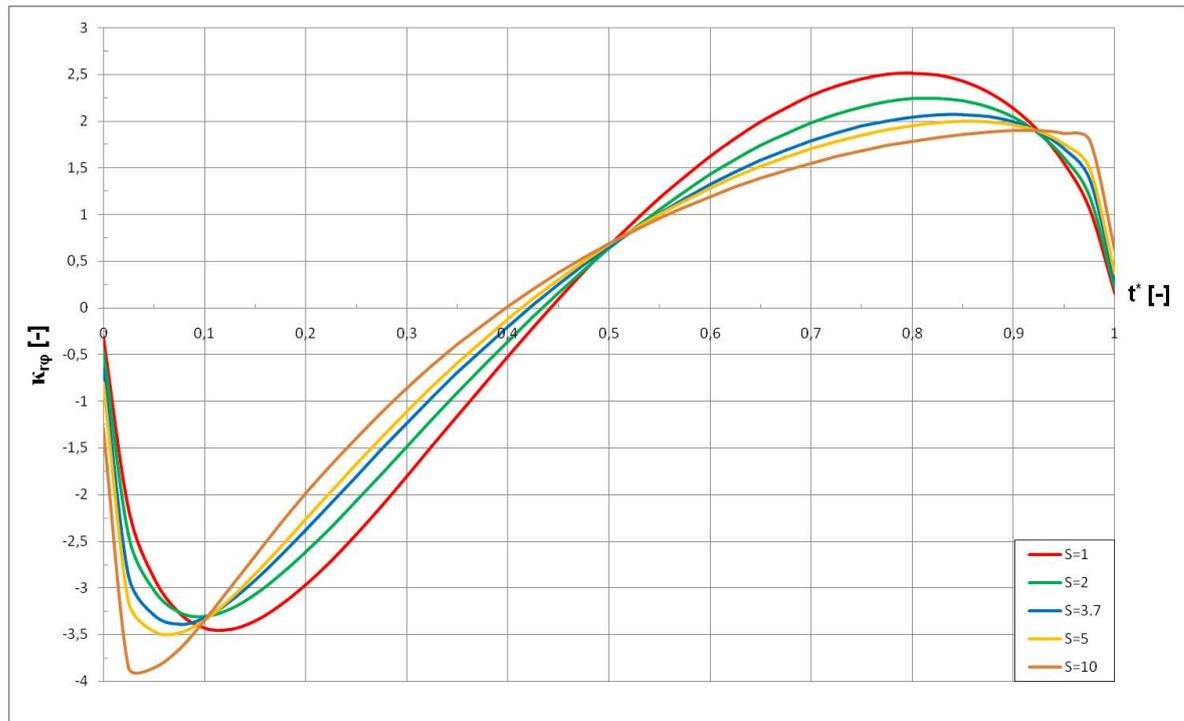


Abbildung 5.24: Der dimensionslose Beiwert $\kappa_{r\varphi}$ an der Stelle $\varphi = 0^\circ$

An der Stelle $\varphi = 0^\circ$ ist keine Querkraftbelastung vorhanden. Das resultiert sich aus der Berechnung der Schnittkräfte. Somit darf an der genannten Stelle rein theoretisch keine Schubspannung auftreten. Dieser allgemeinen Aussage widersprechen die Verläufe des Beiwertes $\kappa_{r\varphi}$ in der Abbildung 5.24. Dies ist jedoch auf die vorhandene Störung zurückzuführen. Die Untersuchung der Flächeninhalte unterhalb und oberhalb der waagerechten Achse weist auf, dass der resultierende Flächeninhalt bzw. die resultierende Querkraft annähernd null ist. Damit ist diese an das Bauteil gestellte Randbedingung erfüllt. Des Weiteren ist bei den Verläufen zu beobachten, dass die Spannungswerte an den Rändern nicht verschwinden. Damit werden die dort geltenden Randbedingungen verletzt.

Die Abbildung 5.25 gibt den Verlauf des dimensionslosen Beiwertes $\kappa_{r\varphi}$ an der Stelle $\varphi = 45^\circ$ wieder.

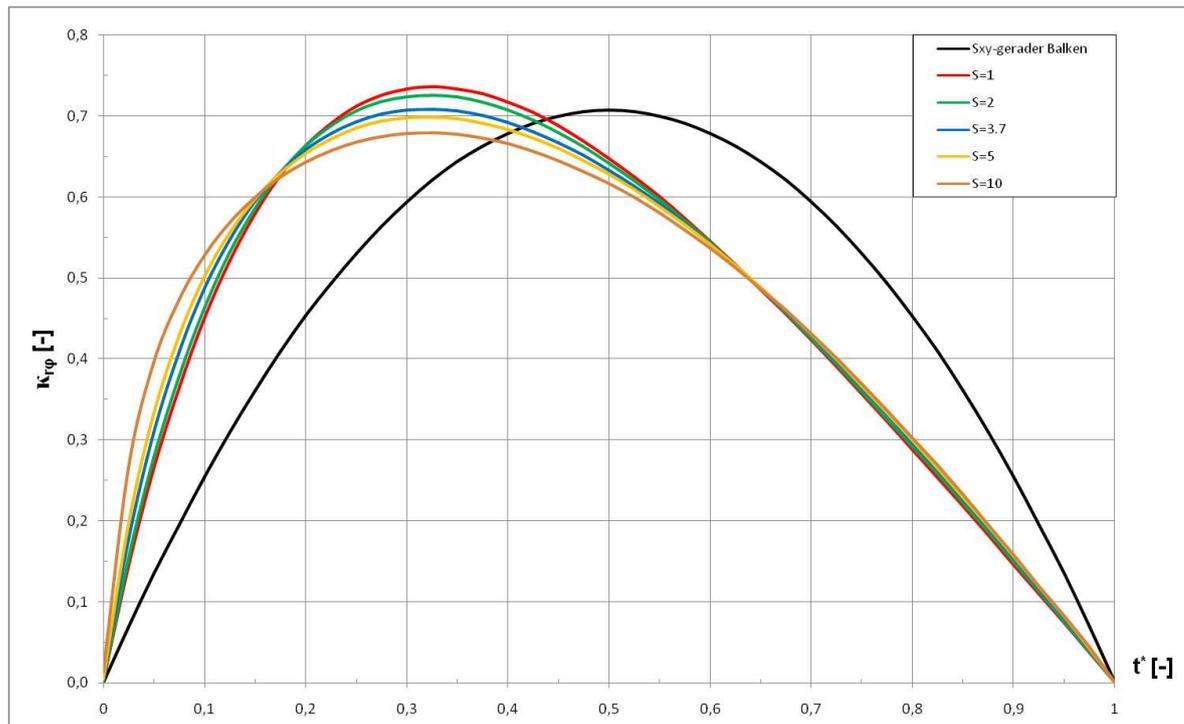


Abbildung 5.25: Der dimensionslose Beiwert $\kappa_{r\varphi}$ an der Stelle $\varphi = 45^\circ$

Zusätzlich beinhaltet diese Abbildung die Darstellung des theoretischen Verlaufs der Schubspannung eines geraden Balkens, die an diesem Schnitt ausschließlich durch die dort herrschende Schnittkraft Q hervorgerufen werden kann. Zur Bestimmung des genannten Verlaufs muss die Gleichung (5.9) mit dem Wert $\cos(\varphi = 45^\circ)$ multipliziert werden. Die allgemeine Betrachtung der Verläufe der Abbildung 5.25 zeigt deutlich, dass sich die Spannungswerte für unterschiedliche Werte von s untereinander kaum unterscheiden. Des Weiteren ist ein geringfügiger Unterschied bei der Betrachtung der Maximalwerte untereinander und im Vergleich zum theoretischen Maximalwert eines geraden Balkens festzustellen. Zusätzlich unterscheiden sich die Verläufe des geraden Balkens, der eine symmetrische Parabel aufweist, und der numerisch berechneten Verläufe des gekrümmten Balkens. Dies ist auf die Krümmung des Beiteils zurückzuführen.

Schlussfolgerung

Die Ergebnisse der in diesem Kapitel durchgeführten Untersuchung sind qualitativ den Ergebnissen aus dem Kapitel 5.2 identisch. Dies lässt sich durch die Analyse der im gekrümmten Bereich vorhandenen Belastung erklären. Ausgehend von der Geometrie des Bauteils herrscht in einem Schnitt des gekrümmten Bereichs neben der Querkraft unter anderem ein Schnittmoment M . Dieses nimmt bedingt durch einen großen Abstand zum belasteten Rand relativ große Werte an. Dadurch trägt diese Belastung zum Spannungshaushalt entscheidend bei. Bei der Auswirkung des Anisotropiewertes auf die Verteilung der Schubspannung sind relativ geringe Einflüsse festzustellen.

5.6 Untersuchung der Auswirkung des Krümmungsverhältnisses auf den Spannungshaushalt unter einer Querkraftbelastung

Die Untersuchung erfolgt in Anlehnung an das Kap. 5.3. Der einzige Unterschied liegt in der Art und Größe der Belastung. Nun wird das zu untersuchende Bauteil mit einem Querkraftfluss belastet, vgl Kap. 5.4.

Analog der Untersuchung des Bauteils unter einer Momentenbelastung, vgl. Kap. 5.3, ist bei der vorliegenden Belastung ein geringer Einfluss der Krümmung auf κ_φ festzustellen. Von dieser allgemeinen Aussage weichen die Werte nahe der Ränder jedoch ab. An der Stelle $\varphi = 45^\circ$ fällt die Auswirkung allgemein etwas größer als an der Stelle $\varphi = 0^\circ$ aus. Aus dem dargestellten Grund werden nur die Verläufe im Schnitt bei $\varphi = 45^\circ$ dargestellt, die die Abbildung 5.26 wiedergibt.

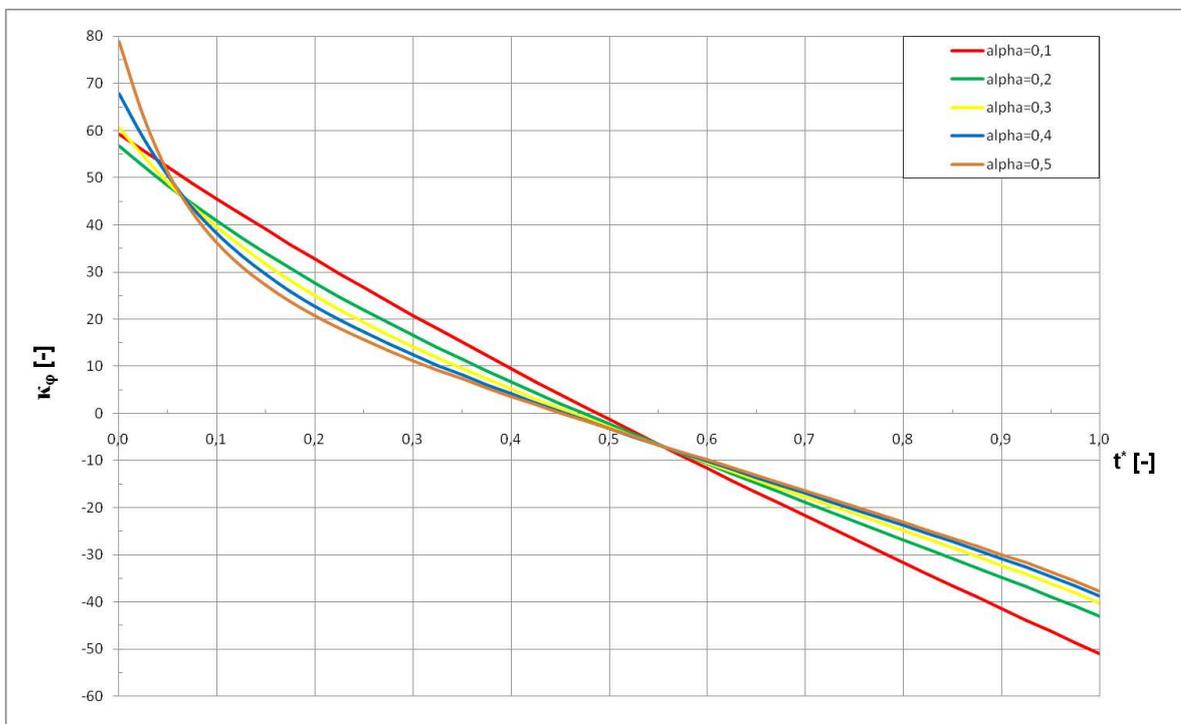
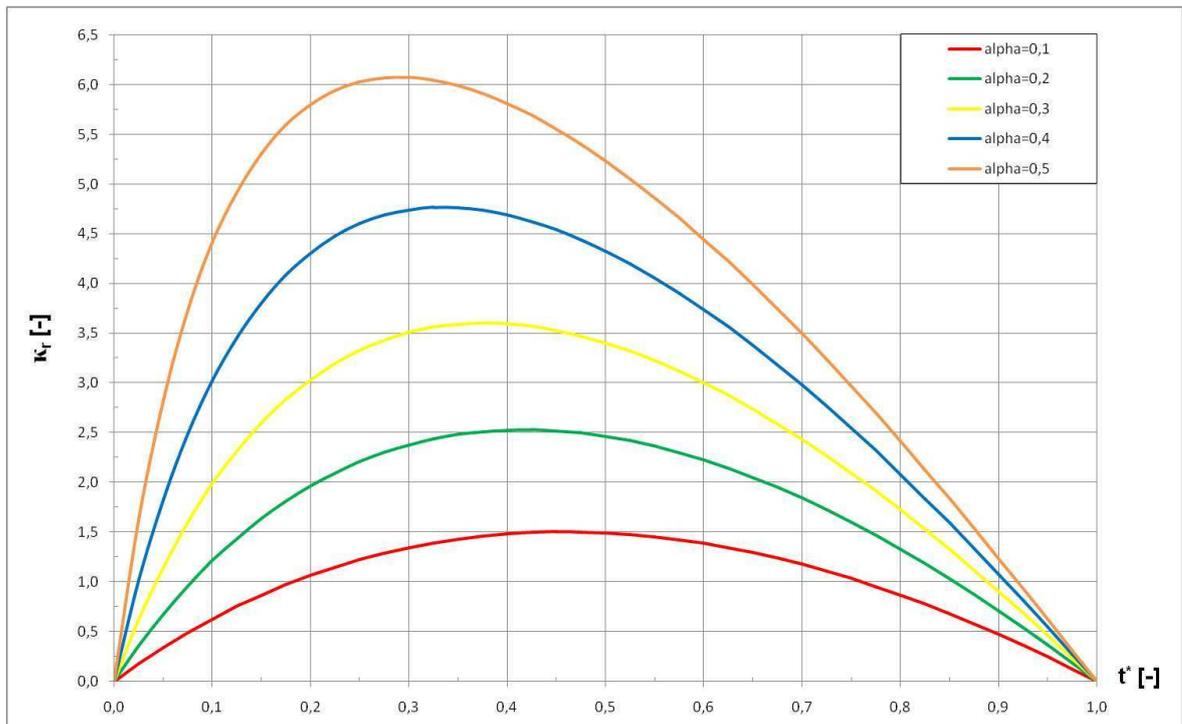
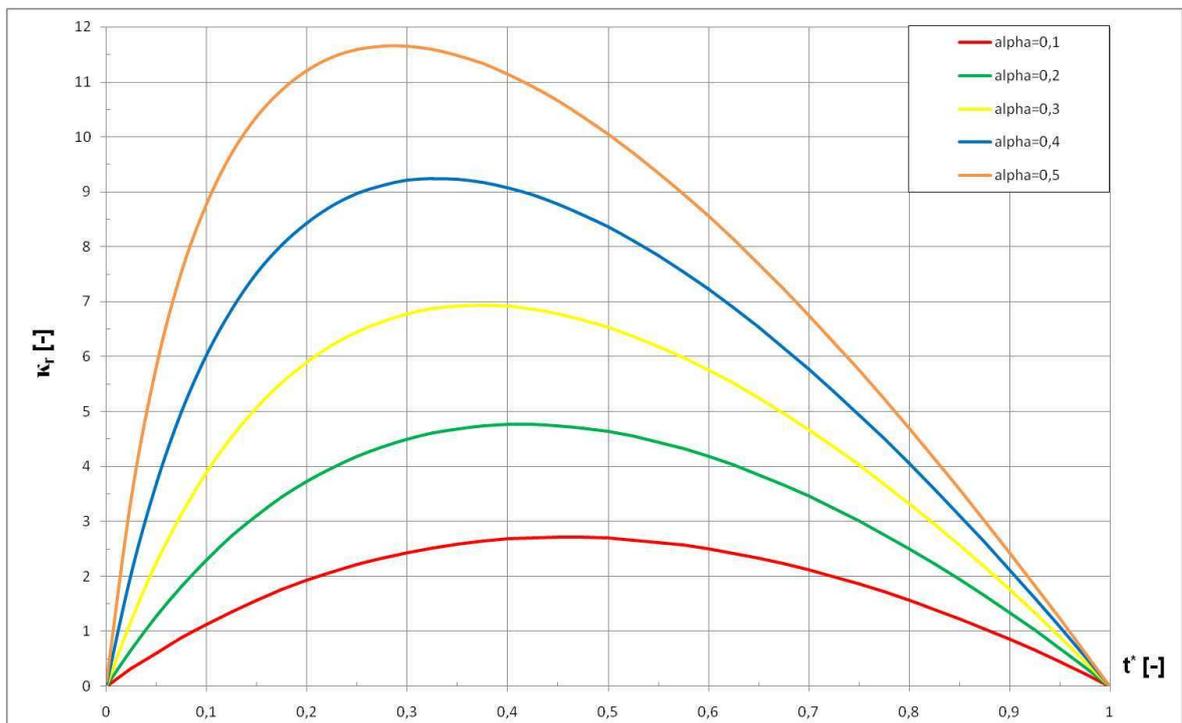


Abbildung 5.26: Der dimensionslose Beiwert κ_φ an der Stelle $\varphi = 45^\circ$

Die Abbildungen 5.27 und 5.28 stellen die Verläufe des Beiwertes κ_r an den Stellen $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 45^\circ$ dar. Es ist deutlich zu erkennen, dass sich diese qualitativ nicht von den analogen Verläufen aus dem Kap. 5.3 unterscheiden. Aus diesem Grund ist die Auswertung der Ergebnisse dem genannten Kapitel zu entnehmen.

Abbildung 5.27: Der dimensionslose Beiwert κ_r an der Stelle $\varphi = 0^\circ$ Abbildung 5.28: Der dimensionslose Beiwert κ_r an der Stelle $\varphi = 45^\circ$

Abschließend werden die Verläufe der Schubspannung bzw. des dimensionslosen Beiwertes $\kappa_{r\varphi}$ betrachtet. Die Abbildung 5.29 gibt den Verlauf des genannten Beiwertes im Schnitt bei $\varphi = 0^\circ$ wieder. Aus den Verläufen ist deutlich zu erkennen, dass das Krümmungsverhältnis eine Auswirkung auf den Spannungshaushalt hat. Der Verlauf der Kurve für $\alpha = 0,1$ weicht nur geringfügig vom theoretischen Verlauf der Schubspannung eines gekrümmten Balkens in diesem Schnitt ab. Betrachtete man die betragsmäßigen Maximalwerte der Verläufe für

$\alpha = 0,1$ und $\alpha = 0,5$, so ist eine Zunahme des Beiwertes $\kappa_{r\varphi}$ um einen Faktor von ungefähr fünf zu nennen. Bei den Verläufen des dimensionslosen Beiwertes $\kappa_{r\varphi}$ an der Stelle $\varphi = 45^\circ$, vgl. Abb. 5.30, sind hingegen bei den Maximalwerten keine nennenswerte Unterschiede zu beobachten. Mit einem steigenden Wert für α wandert der Scheitelpunkt in Richtung des inneren Radius.

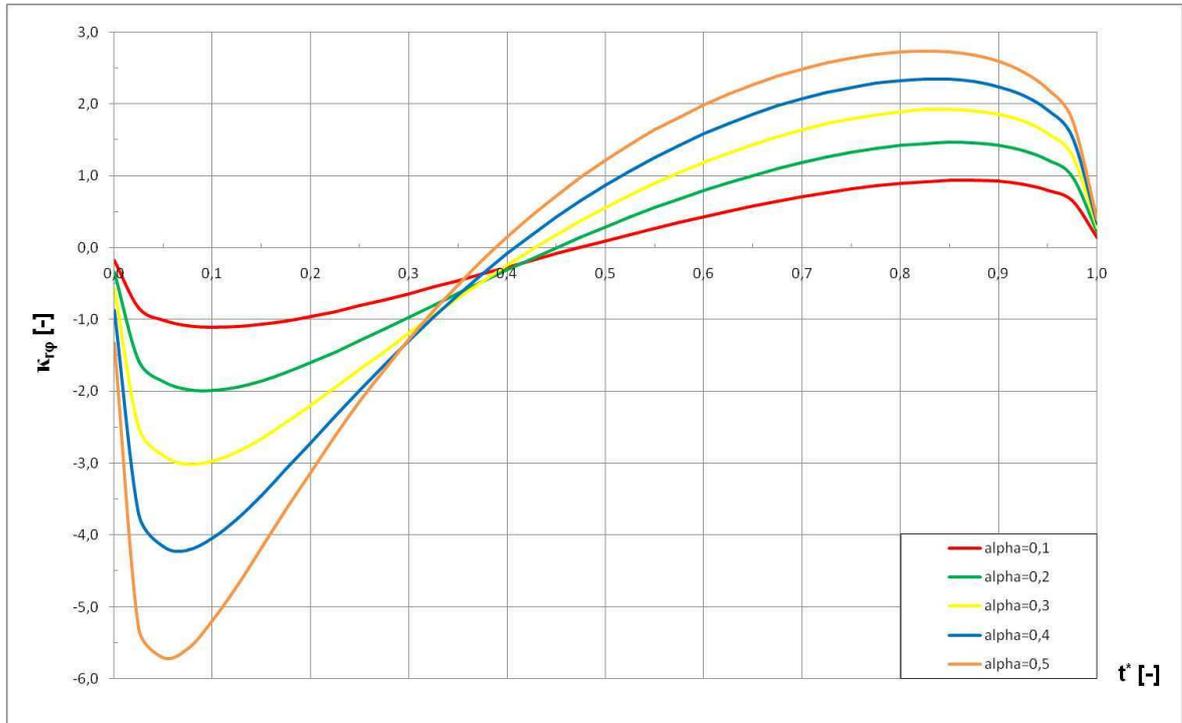


Abbildung 5.29: Der dimensionslose Beiwert $\kappa_{r\varphi}$ an der Stelle $\varphi = 0^\circ$

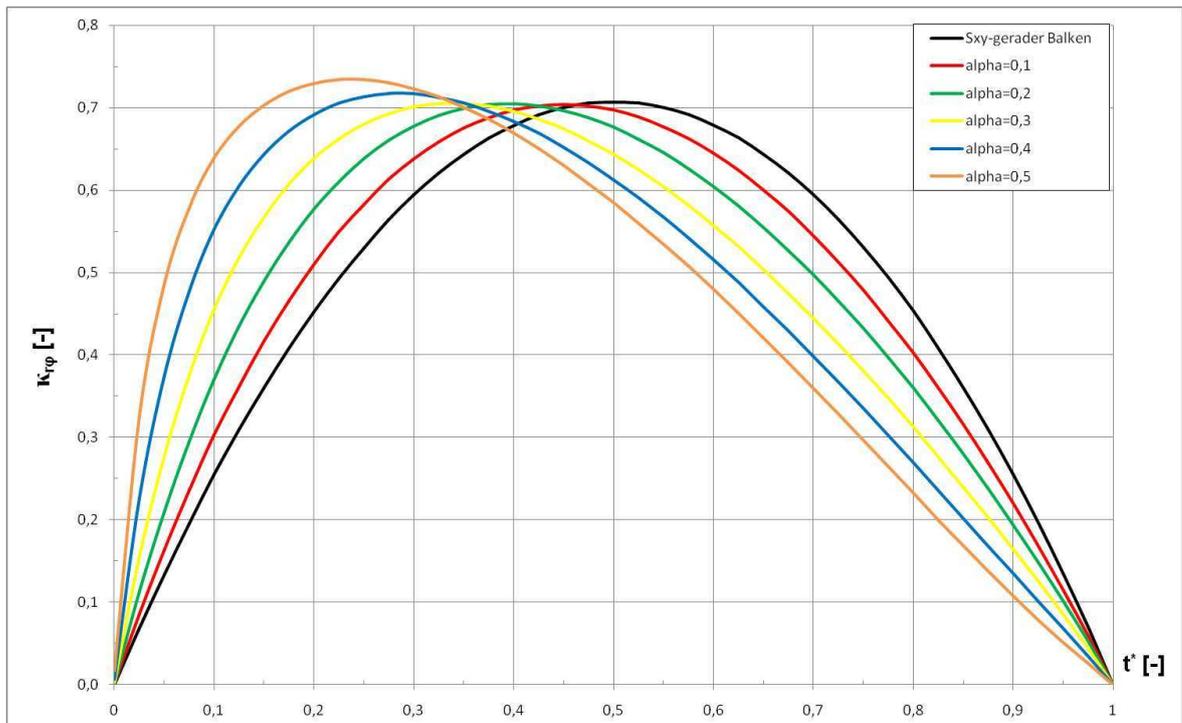


Abbildung 5.30: Der dimensionslose Beiwert $\kappa_{r\varphi}$ an der Stelle $\varphi = 45^\circ$

Schlussfolgerung

Bei der Verteilung der Normalspannung $\sigma_{\varphi\varphi}$, bzw. des Beiwertes κ_{φ} ist der Einfluss der Krümmung gering. Bei der Auswirkung des Krümmungsverhältnisses auf den Beiwert κ_r sind hingegen größere Einflüsse zu beobachten. Somit trägt die Krümmung zur Entwicklung der Normalspannung in Radialrichtung entscheidend bei. Dies ist jedoch möglichst zu vermeiden, da diese Spannungskomponente zur Delamination führen kann. Bei der Betrachtung der Schubspannung an der Stelle $\varphi = 0^\circ$ sind im Gegensatz zur Stelle $\varphi = 45^\circ$ deutlich größere Unterschiede zwischen den einzelnen Verläufen zu beobachten. Diese Entwicklung könnte unter anderem auf die Randstörung zurückgeführt werden.

5.7 Untersuchung des Spannungshaushaltes unter einer Normalkraftbelastung

Bei der Untersuchung der Spannungsfeldern ist ein Normalkraftfluss gemäß der Abbildung 3.1 definiert und beträgt $N_f = -10\text{N/mm}$. Die Beiwerte zur Darstellung der Verläufe sind wie folgt definiert:

$$\kappa_{\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi} \frac{A}{N}, \quad (5.14)$$

$$\kappa_r = \sigma_{rr} \frac{A}{N}, \quad (5.15)$$

$$\kappa_{r\varphi} = \tau_{r\varphi} \frac{A}{N}. \quad (5.16)$$

Die genannten Verläufe sind dem Anhang B zu entnehmen.

6 Analytische Herleitung der Spannungs- und Verschiebungsfunktionen für gekrümmte orthotrope Scheiben

6.1 Der allgemeine Ansatz

Die Bipotentialgleichung besitzt unendlich viele Lösungen. Die größte Schwierigkeit besteht im Auffinden einer Lösung, die auch den geltenden Randbedingungen genügt. Eine allgemeine Lösung dieser Bipotentialgleichung ist nicht bekannt. Für die Herleitung der Spannungsfunktionen wurden in vorliegender Arbeit die Ansätze den folgenden Literaturquellen entnommen: [2], [8] und [7]. In allen genannten Quellen findet sich der Nachweis, dass mit den gewählten Ansätzen die Bipotentialgleichung erfüllt ist.

Es wird ein lineares Strukturverhalten vorausgesetzt. Somit darf das Superpositionsprinzip angewandt werden. Demnach werden die Spannungs- und die Verschiebungskomponenten, die sich aus unterschiedlichen Belastungsfällen ergeben, einzeln berechnet und aufsummiert.

Die nachstehende Formel (6.1) gibt den gewählten Ansatz wieder.

$$F = f_0(r) + f_1(r) \cos(\varphi) + f_2(r) \sin(\varphi) \quad (6.1)$$

Die darin enthaltenen Größen f_0 , f_1 und f_2 sind wie folgt definiert:

$$f_0(r) = A + Br^2 + Cr^{1+s} + Dr^{1-s}, \quad (6.2)$$

$$f_1(r) = A_1r^{1+n} + B_1r^{1-n} + C_1r + D_1r \ln(r), \quad (6.3)$$

$$f_2(r) = A_2r^{1+n} + B_2r^{1-n} + C_2r + D_2r \ln(r). \quad (6.4)$$

6.2 Der orthotrope gekrümmte Balken unter einer Momentbelastung

Bei der folgenden Berechnung wird ein orthotroper, zylindrisch gekrümmter Balken betrachtet. Dieser Balken wird an einem Rand fest eingespannt und am freien Rand mit dem Biegemomentfluss M_f belastet. Eine schematische Darstellung der eingeführten Parameter gibt die Abbildung 6.1 wieder.

Bei reiner Biegebelastung eines Kreisbogens herrscht ein drehsymmetrischer Spannungszustand. Da dieser Spannungszustand vom Winkel φ unabhängig ist, verschwinden bei den Spannungskomponenten die Terme mit den partiellen Ableitungen nach φ . Unter dieser Voraussetzung vereinfachen sich die Spannungskomponenten aus Gleichungen (2.60) bis (2.62) zu:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial F}{\partial r} \right), \quad (6.5)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad (6.6)$$

$$\tau_{r\varphi} = 0. \quad (6.7)$$

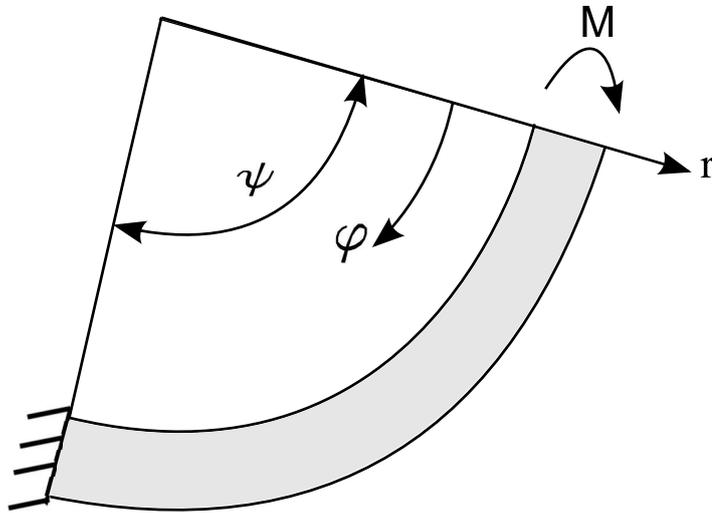


Abbildung 6.1: Schematische Darstellung eines gekrümmten Balkens unter Momentbelastung

Aus denselben Gründen tragen die Teilfunktionen $f_1(r)$ und $f_2(r)$ der allgemeinen Lösung zu keinen Termen der Spannungskomponenten bei. Damit reduziert sich die allgemeine Lösung (6.1) der Bipotentialgleichung auf die Funktion, die die Gleichung (6.8) darstellt:

$$F = f_0(r) = A + Br^2 + Cr^{1+s} + Dr^{1-s}. \quad (6.8)$$

Spannungsfeld und Randbedingungen

Setzt man die Gleichung (6.8) in die Beziehungen (6.5) bis (6.7) ein, so gelten nach der Durchführung der mathematischen Operationen für die Spannungskomponenten folgende Beziehungen:

$$\sigma_{rr} = 2B + (1 + s)Cr^{s-1} + (1 - s)Dr^{-s-1}, \quad (6.9)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = 2B + s(1 + s)Cr^{s-1} - s(1 - s)Dr^{-s-1}, \quad (6.10)$$

$$\tau_{r\varphi} = 0. \quad (6.11)$$

Nach diesem Schritt wird festgestellt, dass eine der vier zuvor eingeführten Konstanten, nämlich A , entfällt. Analysiert man die Gleichung (6.8), so ist ersichtlich, dass die genannte Konstante mit keiner der Variablen in Kombination steht. Somit verschwindet diese bei der Differentiation nach jeder beliebigen Variablen. Zur Bestimmung der drei konstanten Unbekannten B , C und D stehen folgende drei Randbedingungen zur Verfügung:

$$\sigma_{rr}(r = a) = 0, \quad (6.12)$$

$$\sigma_{rr}(r = b) = 0, \quad (6.13)$$

$$\int_a^b \sigma_{\varphi\varphi} \cdot r dr = M_f. \quad (6.14)$$

Neben der Normalspannung in Radialrichtung muss auch die Schubspannung sowohl am äußeren Rand bei $(r = b)$ auch als am inneren Rand bei $(r = a)$ verschwinden. Da die Schubspannung laut Gleichung (6.7) über dem gesamten Bogen nicht vorhanden ist, ist diese Randbedingung ohne zusätzliche Betrachtung automatisch erfüllt. Daraus ist ersichtlich, dass die Anzahl der geltenden Randbedingungen gleich der Anzahl der Unbekannten ist. Damit ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar. Setzt man nun die drei Spannungskomponenten (6.9) und (6.10) in die Beziehungen der Randbedingungen (6.12) bis (6.14) ein, so bekommt man ein Gleichungssystem zum Auflösen der drei Unbekannten:

$$0 = 2B + (1 + s)Ca^{s-1} + (1 - s)Da^{-s-1}, \quad (6.15)$$

$$0 = 2B + (1 + s)Cb^{s-1} + (1 - s)Db^{-s-1}, \quad (6.16)$$

$$M_f = \int_a^b r (2B + s(1 + s)Cr^{s-1} - s(1 - s)Dr^{-s-1}) dr. \quad (6.17)$$

Nach der Integration der Gleichung (6.17) sowie dem Einsetzen der Grenzen wird diese zusammengefasst wie folgt angegeben:

$$M_f = B(b^2 - a^2) + sC(b^{s+1} - a^{s+1}) - sD(b^{-s+1} - a^{-s+1}). \quad (6.18)$$

Das Auflösen des Gleichungssystems beinhaltet folgende Rechenschritte:

1. die Gleichungen (6.15) und (6.16) nach $2B$ umstellen und anschließend gleichsetzen,
2. die im Punkt 1 bestimmte Gleichung nach C umstellen und zusammenfassen,
3. die Gleichung für C (aus Punkt 2) in eine der Beziehungen für $2B$ aus Punkt 1 einsetzen,
4. B aus Punkt 3 und C aus Punkt 2 in die Momentengleichung (6.18) einsetzen,
5. die modifizierte Momentengleichung nach D auflösen,
6. D zur Bestimmung der unbekanntenen Konstanten C und B in die entsprechenden Beziehungen aus Punkt 2 und Punkt 3 zurück einsetzen.

Nach der Durchführung der aufgelisteten Schritte können die Konstanten wie folgt angegeben werden:

$$B = \frac{(s-1)M_f a^{s-1}}{2N_k} \left[\frac{(a^{-s-1} - b^{-s-1})}{(b^{s-1} - a^{s-1})} + a^{-2s} \right], \quad (6.19)$$

$$C = \frac{(1-s)M_f}{(1+s)N_k} \left[\frac{(a^{-s-1} - b^{-s-1})}{(b^{s-1} - a^{s-1})} \right], \quad (6.20)$$

$$D = \frac{M_f}{N_k}. \quad (6.21)$$

Die Konstanten B , C und D beinhalten einen gemeinsamen Term, der als N_k

$$N_k = \frac{N_m}{N_l} \quad (6.22)$$

abgekürzt wurde, worin die Terme N_m und N_l wie folgt definiert sind:

$$N_m = \left(\frac{s-1}{2} \right) (m^{s+1} + m^{-s-1} - m^{s-1} - m^{-s+1}) + \left(\frac{s-s^2}{s+1} \right) (m^{s+1} - 2 + m^{-s-1}) - s(2 - m^{s-1} - m^{-s+1}), \quad (6.23)$$

$$N_l = b^{s-1} - a^{s-1}. \quad (6.24)$$

Die Funktion N_m vgl. Gl. (6.23) beinhaltet eine weitere Abkürzung m , die auch bei der Angabe der Spannungskomponenten benutzt wird. Die Abkürzung m ist wie folgt definiert:

$$m = \frac{b}{a}. \quad (6.25)$$

Durch das Einsetzen der Konstanten B , C und D ergeben sich für die Spannungskomponenten folgende Termen:

$$\sigma_{rr} = \frac{(s-1)M_f}{N_m} \left[\frac{1}{a^2} [m^{s-1} - m^{-s-1}] - r^{s-1} (a^{-s-1} - b^{-s-1}) - r^{-s-1} (b^{s-1} - a^{s-1}) \right], \quad (6.26)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{(s-1)M_f}{N_m} \left[\frac{1}{a^2} [m^{s-1} - m^{-s-1}] - s \cdot r^{s-1} (a^{-s-1} - b^{-s-1}) + s r^{-s-1} (b^{s-1} - a^{s-1}) \right], \quad (6.27)$$

$$\tau_{r\varphi} = 0. \quad (6.28)$$

Verschiebungsfeld

Die Verschiebung u wird bestimmt, indem die kinematischen und die konstitutiven Gleichungen herangezogen werden. Setzt man die Beziehungen (2.15) und (2.47) gleich, ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{E_\varphi} (s^2 \sigma_{rr} - \nu_{\varphi r} \sigma_{\varphi\varphi}). \quad (6.29)$$

Mit den Beziehungen für die Spannungskomponenten (6.26) und (6.27) ergibt sich die Gleichung (6.29) zu:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{(s-1)M_f}{E_\varphi N_m} \left[(s^2 - \nu_{\varphi r}) \frac{1}{a^2} (m^{s-1} - m^{-s-1}) - r^{s-1} (s^2 - s\nu_{\varphi r}) (a^{-s-1} - b^{-s-1}) - r^{-s-1} (s^2 + s\nu_{\varphi r}) (b^{s-1} - a^{s-1}) \right]. \quad (6.30)$$

Stellt man die Gleichung (6.30) allgemein um

$$\partial u = \frac{(s-1)M_f}{E_\varphi N_m} (\dots) \partial r \quad (6.31)$$

und integriert sie anschließend, so kann diese wie folgt angegeben werden:

$$u(r, \varphi) = \frac{(s-1)M_f}{E_\varphi N_m} \left[\frac{r(s^2 - \nu_{\varphi r})}{a^2} (m^{s-1} - m^{-s-1}) - r^s (s - \nu_{\varphi r}) (a^{-s-1} - b^{-s-1}) + r^{-s} (s + \nu_{\varphi r}) (b^{s-1} - a^{s-1}) \right] + f_u(\varphi). \quad (6.32)$$

Nach der Durchführung einer unbestimmten Integration ist laut der Grundlagen der Integralrechnung eine Integrationskonstante einzuführen. Die Funktion für die Verschiebung u ist jedoch eine Funktion von zwei Variablen r und φ . Aus diesem Grund muss anstatt einer Konstanten eine sog. Integrationsfunktion eingeführt werden. Bei der durchgeführten Integration wird diese Integrationsfunktion mit $f_u(\varphi)$ abgekürzt und ist von der Variable φ abhängig. Aufgrund der zuletzt genannten Beschaffenheit wird bei der späteren Integration oder Differentiation dieser Funktion anstatt des partiellen Symbols ∂ das Symbol d verwendet.

Zur Bestimmung der Verschiebung v werden wieder die kinematischen und konstitutiven Gleichungen herangezogen. Durch das Gleichsetzen der Gleichungen (2.16) und (2.48) gilt die Beziehung (6.33):

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} = \frac{1}{E_\varphi} (\sigma_{\varphi\varphi} - \nu_{\varphi r} \sigma_{rr}). \quad (6.33)$$

Nach dem Einsetzen der Spannungsfunktionen $\sigma_{\varphi\varphi}$ aus (6.27) und σ_{rr} aus (6.26), sowie der Verschiebung u aus (6.32) lässt sich die Beziehung (6.33) zusammengefasst in folgender Form angeben:

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{r(s-1)(1-s^2)M_f}{E_\varphi N_m a^2} (m^{s-1} - m^{-s-1}) - f_u(\varphi). \quad (6.34)$$

Nach der Integration geht die Gleichung (6.34) in folgende Gestalt über:

$$v(r, \varphi) = \frac{\varphi r(s-1)(1-s^2)M_f}{E_\varphi N_m a^2} (m^{s-1} - m^{-s-1}) - \int f_u(\varphi) d\varphi + f_v(r). \quad (6.35)$$

Aus den gleichen Überlegungen bezüglich der Integrationsfunktion, die bei der Integration der Verschiebung u angestellt wurden, wird die Funktion $f_v(r)$ eingeführt. Diese ist nur von der Variable r abhängig.

Abschließend betrachtet man die Schubverzerrung $\gamma_{r\varphi}$. Durch das Gleichsetzen der Gleichungen (2.17) und (2.49) gewinnt man folgenden Zusammenhang:

$$\gamma_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = \frac{k^2}{E_\varphi} \tau_{r\varphi}. \quad (6.36)$$

Da die Schubspannung im gesamten betrachteten Bereich verschwindet, vereinfacht sich die Gleichung (6.36) zu

$$0 = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) + \frac{\partial v}{\partial r}. \quad (6.37)$$

Durch das Einsetzen der Verschiebungen u und v aus den Gleichungen (6.32) und (6.35) entsprechend, geht die Beziehung (6.37) in folgende Form über:

$$0 = \frac{1}{r} \left(\frac{df_u(\varphi)}{d\varphi} - \frac{\varphi r (s-1) (1-s^2) M_f}{E_\varphi N_m a^2} (m^{s-1} - m^{-s-1}) + \int f_u(\varphi) d\varphi - f_v(r) \right) + \frac{\varphi (s-1) (1-s^2) M_f}{E_\varphi N_m a^2} (m^{s-1} - m^{-s-1}) + \frac{df_v(r)}{dr}. \quad (6.38)$$

Zusammengefasst nimmt die Gleichung (6.38) dann folgende Form an:

$$0 = \frac{df_u(\varphi)}{d\varphi} + \int f_u(\varphi) d\varphi - f_v(r) + r \frac{df_v(r)}{dr}. \quad (6.39)$$

Die in Gleichung (6.39) angewandte Schreibweise mit dem Differentiationssymbol d wurde bei der Bestimmung der Verschiebung u bereits erklärt.

Durch das Einführen einer Konstante G_1 kann man die Differentialgleichung (6.39) entkoppeln. Dadurch werden zwei inhomogene Differentialgleichungen gewonnen, die wie folgt angegeben werden:

$$\frac{df_u(\varphi)}{d\varphi} + \int f_u(\varphi) d\varphi = G_1, \quad (6.40)$$

$$f_v(r) - r \frac{df_v(r)}{dr} = G_1. \quad (6.41)$$

Durch das Differenzieren der Gleichung (6.40) nach der Variable φ wird diese wie folgt angegeben:

$$\frac{d^2 f_u(\varphi)}{d\varphi^2} + f_u(\varphi) = 0. \quad (6.42)$$

Dadurch wurde eine homogene Differentialgleichung (DGL) 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten gewonnen. Der allgemeine Lösungsansatz weist folgende Form auf:

$$f_u(\varphi) = e^{\lambda\varphi}. \quad (6.43)$$

Die zweimalige Differentiation dieser Gleichung liefert den Ausdruck:

$$\frac{d^2 f_u(\varphi)}{d\varphi^2} = \lambda^2 e^{\lambda\varphi}. \quad (6.44)$$

Durch das Einsetzen der Ausdrücke (6.44) und (6.43) in die Beziehung (6.42) lautet die sog. charakteristische Gleichung zusammengefasst wie folgt:

$$\lambda^2 + 1 = 0. \quad (6.45)$$

Das Auflösen dieser quadratischen Beziehung liefert die Lösung, die die folgende Gleichung angibt:

$$\lambda_{1/2} = \pm\sqrt{-1} = \pm i. \quad (6.46)$$

Diese konjugiert komplexe Lösung weist ein Imaginärteil ± 1 und kein Realteil auf. Mit dieser Angabe lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (6.42) laut Papula [13] wie folgt:

$$f_u(\varphi) = G_2 \sin(\varphi) + G_3 \cos(\varphi) \quad (6.47)$$

An dieser Stelle erfolgt der Nachweis der Richtigkeit dieser Rechnung. Dafür wird zuerst die Gleichung (6.47) nach der Variable φ zweimal differenziert, womit folgender Ausdruck gewonnen wird:

$$\frac{d^2 f_u(\varphi)}{d\varphi^2} = -G_2 \sin(\varphi) - G_3 \cos(\varphi). \quad (6.48)$$

Anschließend wird Gleichung (6.48) und die Beziehung für die allgemeine partikuläre Lösung (6.47) in die Beziehung (6.42) eingesetzt. Nach der Durchführung der genannten Rechenschritte stellt man fest, dass die angegebene allgemeine Lösung (6.47) tatsächlich die Lösung der Differentialgleichung (6.42) ist.

Abschließend wird die Differentialgleichung (6.41) aufgelöst. Die allgemeine Lösung einer inhomogenen DGL 1. Ordnung der Form

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x) \quad (6.49)$$

ist bei Papula [13] wie folgt angegeben:

$$y(x) = e^{-\int f(x)dx} \left(\int g(x) \cdot e^{\int f(x)dx} dx + C \right). \quad (6.50)$$

Worin die Funktion $g(x)$ als die sog. Störfunktion bezeichnet wird. Zusätzlich muss gemäß der Integralrechnung eine weitere Integrationskonstante C eingeführt werden. Bringt man die Beziehung (6.41) in die Form

$$\frac{df_v(r)}{dr} - \frac{f_v(r)}{r} = \frac{-G_1}{r}, \quad (6.51)$$

so lässt sich durch Vergleich mit den Komponenten der Gleichung (6.49) folgendes feststellen:

$$f(x) = -\frac{1}{r}, \quad (6.52)$$

$$g(x) = -\frac{G_1}{r}. \quad (6.53)$$

Durch das Einsetzen dieser Komponente in die Gleichung (6.50) lässt sich die Integrationsfunktion $f_v(r)$ wie folgt angeben:

$$f_v(r) = e^{\int \frac{1}{r} dr} \left(\int \frac{-G_1}{r} \cdot e^{-\int \frac{1}{r} dr} dr + G_4 \right). \quad (6.54)$$

Nach der Durchführung der Integration der Teilintegrale geht die Gleichung (6.54) in folgende Gestalt über:

$$f_v(r) = e^{\ln(r)} \left(\int \frac{-G_1}{r} \cdot e^{-\ln(r)} dr + G_4 \right). \quad (6.55)$$

Worin sich einige Terme vereinfachen lassen:

$$e^{\ln(r)} = r, \quad (6.56)$$

$$e^{-\ln(r)} = r^{-1}. \quad (6.57)$$

Zusammengefasst lautet die Gleichung (6.55) wie folgt:

$$f_v(r) = r \left(\int \frac{-G_1}{r^2} dr + G_4 \right). \quad (6.58)$$

Integriert und zusammengefasst nimmt die Funktion $f_v(r)$ folgende Form an:

$$f_v(r) = G_1 + G_4 r. \quad (6.59)$$

Damit sind die Integrationsfunktionen $f_v(r)$ (vgl. Gl. (6.59)) und $f_u(\varphi)$ (vgl. Gl. (6.47)) bestimmt. An dieser Stelle ist es zu erwähnen, dass für die Konstante G_1 eine triviale Lösung, nämlich $G_1 = 0$, gewählt werden kann. Es lässt sich leicht zeigen, dass diese Vereinfachung auf die mathematische Lösung keine Auswirkung hat. Es muss nur bei der Indizierung der eingeführten Konstanten G_i mitberücksichtigt werden. Das Einsetzen der genannten Terme in die Gleichungen (6.32) und (6.35) liefert für die Verschiebung u folgenden Zusammenhang:

$$u(r, \varphi) = \frac{(s-1) M_f}{E_\varphi N_m} \left[\frac{r(s^2 - \nu_{\varphi r})}{a^2} (m^{s-1} - m^{-s-1}) - r^s (s - \nu_{\varphi r}) (a^{-s-1} - b^{-s-1}) + r^{-s} (s + \nu_{\varphi r}) (b^{s-1} - a^{s-1}) \right] + G_2 \sin(\varphi) + G_3 \cos(\varphi) \quad (6.60)$$

und für die Verschiebung v die Beziehung (6.61):

$$v(r, \varphi) = \frac{\varphi r (s-1) (1-s^2) M_f}{E_\varphi N_m a^2} (m^{s-1} - m^{-s-1}) - \int (G_2 \sin(\varphi) + G_3 \cos(\varphi)) d\varphi + G_1 + G_4 r. \quad (6.61)$$

Nach dem Auflösen des Integrals in der Gleichung (6.61) nimmt diese folgende Form an:

$$v(r, \varphi) = \frac{\varphi r (s-1) (1-s^2) M_f}{E_\varphi N_m a^2} (m^{s-1} - m^{-s-1}) + G_2 \cos(\varphi) - G_3 \sin(\varphi) + G_4 r + G_1 + G_5. \quad (6.62)$$

Zusätzlich wurde gemäß der Integralrechnung die Konstante G_5 eingeführt. Die unbekanntenen Konstanten G_1 und G_5 tauchen nur in der Gleichung zur Bestimmung der Verschiebung v auf. Aus diesem Grund lassen sie sich zu einer gemeinsamen Konstante G_6 zusammenfassen.

Zur Bestimmung der unbekanntenen Konstanten G_2 , G_3 , G_4 und G_6 werden vier Randbedingungen benötigt. Gemäß Abbildung 6.1 sind die Verschiebungen u und v an der Stelle $\varphi = \psi$ (Festeinspannung) gleich null:

$$u(\varphi = \psi) = 0, \quad (6.63)$$

$$v(\varphi = \psi) = 0. \quad (6.64)$$

Es ist zu beachten, dass die Verschiebungsfunktionen u und v diesen Randbedingungen nur an einer bestimmten Stelle in Radialrichtung genügen können. Einfachheitshalber wird dafür die Lage der neutralen Faser herangezogen, die mir einer guten Näherung bei $r = r_m$ liegt. Die eingeführte Größe r_m ist der mittlere Radius, dessen Definition die Gleichung (6.65) angibt:

$$r_m = \frac{1}{2}(a + b) = a + \frac{h}{2}. \quad (6.65)$$

Des Weiteren gelten an der angenommenen Stelle die Randbedingungen:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\psi} = 0, \quad (6.66)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{\varphi=\psi} = 0. \quad (6.67)$$

Die angeschriebenen Randbedingungen ergeben sich durch das Einsetzen der relevanten Terme zu:

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{(s-1)M_f}{E_\varphi N_m} \left[\frac{r_m(s^2 - \nu_{\varphi r})}{a^2} (m^{s-1} - m^{-s-1}) - r_m^s (s - \nu_{\varphi r}) (a^{-s-1} - b^{-s-1}) \right. \\ & \left. + r_m^{-s} (s + \nu_{\varphi r}) (b^{s-1} - a^{s-1}) \right] + G_2 \sin(\psi) + G_3 \cos(\psi), \end{aligned} \quad (6.68)$$

$$0 = \frac{\psi r_m (s-1)(1-s^2)M_f}{E_\varphi N_m a^2} (m^{s-1} - m^{-s-1}) + G_2 \cos(\psi) - G_3 \sin(\psi) + G_4 r_m + G_6, \quad (6.69)$$

$$0 = G_2 \cos(\psi) - G_3 \sin(\psi) \quad (6.70)$$

und

$$0 = \frac{\psi (s-1)(1-s^2)M_f}{E_\varphi N_m a^2} (m^{s-1} - m^{-s-1}) + G_4. \quad (6.71)$$

Aus der Gleichung (6.71) lässt sich die unbekannte Konstante G_4 direkt bestimmen:

$$G_4 = -\frac{\psi (s-1)(1-s^2)M_f}{E_\varphi N_m a^2} (m^{s-1} - m^{-s-1}). \quad (6.72)$$

Durch Einsetzen der Gleichung (6.70) in die Beziehung (6.69) vereinfacht sich diese zunächst zu:

$$0 = \frac{\psi r_m (s-1)(1-s^2)M_f}{E_\varphi N_m a^2} (m^{s-1} - m^{-s-1}) + G_4 r_m + G_6. \quad (6.73)$$

Zieht man zusätzlich die Beziehung (6.72) heran, geht die Gleichung (6.73) in die Form über:

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\psi r_m (s-1)(1-s^2)M_f}{E_\varphi N_m a^2} (m^{s-1} - m^{-s-1}) \\ & - \frac{\psi r_m (s-1)(1-s^2)M_f}{E_\varphi N_m a^2} (m^{s-1} - m^{-s-1}) + G_6, \end{aligned} \quad (6.74)$$

wonach die Konstante G_6 zu null wird:

$$G_6 = 0. \quad (6.75)$$

Die Gleichung (6.70) umgestellt nach G_2 liefert:

$$G_2 = G_3 \frac{\sin(\psi)}{\cos(\psi)}. \quad (6.76)$$

Wird die Konstante G_2 aus (6.76) in die Gleichung (6.68) eingesetzt und anschließend mit dem Ausdruck $\cos(\psi)$ multipliziert, kann man die Beziehung (6.68) in modifizierter Form wie folgt anschreiben:

$$0 = \cos(\psi) \frac{(s-1)M_f}{E_\varphi N_m} \left[\frac{r_m(s^2 - \nu_{\varphi r})}{a^2} (m^{s-1} - m^{-s-1}) - r_m^s (s - \nu_{\varphi r}) (a^{-s-1} - b^{-s-1}) \right. \\ \left. + r_m^{-s} (s + \nu_{\varphi r}) (b^{s-1} - a^{s-1}) \right] + G_3 \sin^2(\psi) + G_3 \cos^2(\psi). \quad (6.77)$$

Zwischen den Quadrattermen der trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus besteht der Zusammenhang:

$$\sin^2(\psi) + \cos^2(\psi) = 1. \quad (6.78)$$

An dieser Stelle ist es zu erwähnen, dass diese Beziehung für beliebige (gleiche) Winkelangaben gilt. Mit dieser Angabe kann die Konstante G_3 als

$$G_3 = -\cos(\psi) \frac{(s-1)M_f}{E_\varphi N_m} \left[\frac{r_m(s^2 - \nu_{\varphi r})}{a^2} (m^{s-1} - m^{-s-1}) \right. \\ \left. - r_m^s (s - \nu_{\varphi r}) (a^{-s-1} - b^{-s-1}) + r_m^{-s} (s + \nu_{\varphi r}) (b^{s-1} - a^{s-1}) \right] \quad (6.79)$$

angegeben werden. Zieht man nun die Gleichungen (6.79) und (6.76) heran, ergibt sich die Konstante G_2 zu:

$$G_2 = -\sin(\psi) \frac{(s-1)M_f}{E_\varphi N_m} \left[\frac{r_m(s^2 - \nu_{\varphi r})}{a^2} (m^{s-1} - m^{-s-1}) \right. \\ \left. - r_m^s (s - \nu_{\varphi r}) (a^{-s-1} - b^{-s-1}) + r_m^{-s} (s + \nu_{\varphi r}) (b^{s-1} - a^{s-1}) \right]. \quad (6.80)$$

Damit sind die Konstanten zur Bestimmung der Verschiebungen festgelegt.

Zur Bestimmung der Verschiebung u greift man auf die Gleichung (6.60) zurück. Mit den berechneten Konstanten G_2 aus Gl. (6.80) und G_3 (6.79), sowie unter Betrachtung der trigonometrischen Beziehung:

$$\sin(\varphi) \sin(\psi) + \cos(\varphi) \cos(\psi) = \cos(\varphi - \psi), \quad (6.81)$$

lässt sich die Verschiebung u wie folgt angeben:

$$u(r, \varphi) = \frac{(s-1)M_f}{E_\varphi N_m} \left[\frac{r(s^2 - \nu_{\varphi r})}{a^2} (m^{s-1} - m^{-s-1}) - r^s (s - \nu_{\varphi r}) (a^{-s-1} - b^{-s-1}) \right. \\ \left. + r^{-s} (s + \nu_{\varphi r}) (b^{s-1} - a^{s-1}) \right] - \frac{(s-1)M_f}{E_\varphi N_m} \left[\frac{r_m(s^2 - \nu_{\varphi r})}{a^2} (m^{s-1} - m^{-s-1}) \right. \\ \left. - r_m^s (s - \nu_{\varphi r}) (a^{-s-1} - b^{-s-1}) + r_m^{-s} (s + \nu_{\varphi r}) (b^{s-1} - a^{s-1}) \right] \cos(\varphi - \psi). \quad (6.82)$$

Die Verschiebung v wird bestimmt, indem die Gleichung (6.62) sowie die relevanten Konstanten herangezogen werden. Beachtet man eine weitere Additionstheorem für die Sinus- und Kosinusfunktion, die nachstehende Gleichung wiedergibt:

$$\sin(\psi) \cos(\varphi) - \cos(\psi) \sin(\varphi) = \sin(\psi - \varphi) , \quad (6.83)$$

so lässt sich die Verschiebung v zusammengefasst durch folgende Gleichung (6.84) angeben:

$$\begin{aligned} v(r, \varphi) = & (\varphi - \psi) \frac{r(s-1)(1-s^2)M_f}{E_\varphi N_m a^2} (m^{s-1} - m^{-s-1}) \\ & + \frac{(s-1)M_f}{E_\varphi N_m} \left[\frac{r_m(s^2 - \nu_{\varphi r})}{a^2} (m^{s-1} - m^{-s-1}) - r_m^s (s - \nu_{\varphi r}) (a^{-s-1} - b^{-s-1}) \right. \\ & \left. + r_m^{-s} (s + \nu_{\varphi r}) (b^{s-1} - a^{s-1}) \right] (\sin(\varphi - \psi)) . \end{aligned} \quad (6.84)$$

Mit der Angabe der Verschiebungsfunktionen ist ein orthotroper gekrümmter Balken vollständig berechenbar.

6.3 Der orthotrope gekrümmte Balken unter einer Randlast

Die nachfolgende Bestimmung des Spannungshaushaltes und der Verschiebungsfunktionen erfolgt an einem orthotropen gekrümmten Balken. Dieser ist an einem Rand fest eingespannt und wird am freien Rand durch einen Kraftfluss P_f belastet. Die Abbildung 6.2 gibt eine schematische Darstellung des genannten Belastungsfalls wieder.

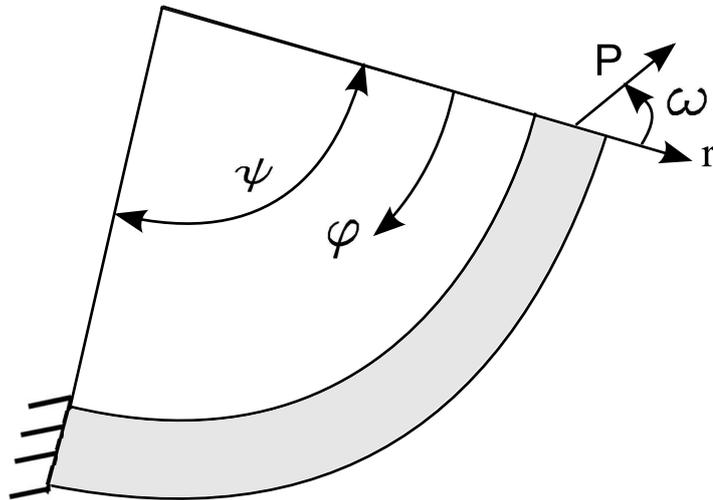


Abbildung 6.2: Schematische Darstellung eines gekrümmten Balkens unter Kraftbelastung

Lekhnitskii [7] gibt für das betrachtete Problem die Ayrische Spannungsfunktion der Form

$$\begin{aligned} F = & (A_1 r^{1+n} + B_1 r^{1-n} + C_1 r + D_1 r \ln(r)) \cos(\varphi) \\ & + (A_2 r^{1+n} + B_2 r^{1-n} + C_2 r + D_2 r \ln(r)) \sin(\varphi) \end{aligned} \quad (6.85)$$

an. Mittelstedt [8] leitet dieselbe Funktion mithilfe der Bipotentialgleichung her und führt damit den Nachweis durch, dass diese Spannungsfunktion die Bipotentialgleichung erfüllt.

Spannungsfeld und Randbedingungen

Führt man relevante Rechenschritte durch, können die Spannungskomponenten wie folgt angegeben werden:

$$\sigma_{rr} = \cos(\varphi) \left[nA_1 r^{n-1} - nB_1 r^{-n-1} + \frac{D_1}{r} \right] + \sin(\varphi) \left[nA_2 r^{n-1} - nB_2 r^{-n-1} + \frac{D_2}{r} \right], \quad (6.86)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi} = & + \cos(\varphi) \left[n(1+n)A_1 r^{n-1} - n(1-n)B_1 r^{-n-1} + \frac{D_1}{r} \right] \\ & + \sin(\varphi) \left[n(1+n)A_2 r^{n-1} - n(1-n)B_2 r^{-n-1} + \frac{D_2}{r} \right], \end{aligned} \quad (6.87)$$

$$\tau_{r\varphi} = \sin(\varphi) \left[nA_1 r^{n-1} - nB_1 r^{-n-1} + \frac{D_1}{r} \right] - \cos(\varphi) \left[nA_2 r^{n-1} - nB_2 r^{-n-1} + \frac{D_2}{r} \right]. \quad (6.88)$$

Zur Bestimmung der sechs Unbekannten stehen folgende sechs Randbedingungen zur Verfügung:

$$\sigma_{rr}(r=a) = 0, \quad (6.89)$$

$$\sigma_{rr}(r=b) = 0, \quad (6.90)$$

$$\tau_{r\varphi}(r=a) = 0, \quad (6.91)$$

$$\tau_{r\varphi}(r=b) = 0, \quad (6.92)$$

$$\int_a^b \tau_{r\varphi}(\varphi) dr = Q_f, \quad (6.93)$$

$$\int_a^b \sigma_{\varphi\varphi}(\varphi) dr = N_f, \quad (6.94)$$

Worin die Kräfte Q_f und N_f als Komponente der Gesamtkraft P_f eingeführt wurden. Zwischen den genannten Kräften gelten die Zusammenhänge:

$$N_f = P_f \sin(\omega), \quad (6.95)$$

$$Q_f = P_f \cos(\omega). \quad (6.96)$$

Mit den angegebenen Randbedingungen ist das Gleichungssystem zur Bestimmung von sechs Konstanten der Spannungskomponenten eindeutig lösbar.

Durch das Einsetzen der ersten vier Randbedingungen (6.89) bis (6.92) in die Gleichungen zur Bestimmung der Spannungskomponenten (6.86) bis (6.88) ergeben sich folgende Terme:

$$0 = \cos(\varphi) \left[nA_1 a^{n-1} - nB_1 a^{-n-1} + \frac{D_1}{a} \right] + \sin(\varphi) \left[nA_2 a^{n-1} - nB_2 a^{-n-1} + \frac{D_2}{a} \right], \quad (6.97)$$

$$0 = \cos(\varphi) \left[nA_1 b^{n-1} - nB_1 b^{-n-1} + \frac{D_1}{b} \right] + \sin(\varphi) \left[nA_2 b^{n-1} - nB_2 b^{-n-1} + \frac{D_2}{b} \right], \quad (6.98)$$

$$0 = \sin(\varphi) \left[nA_1 a^{n-1} - nB_1 a^{-n-1} + \frac{D_1}{a} \right] - \cos(\varphi) \left[nA_2 a^{n-1} - nB_2 a^{-n-1} + \frac{D_2}{a} \right], \quad (6.99)$$

$$0 = \sin(\varphi) \left[nA_1 b^{n-1} - nB_1 b^{-n-1} + \frac{D_1}{b} \right] - \cos(\varphi) \left[nA_2 b^{n-1} - nB_2 b^{-n-1} + \frac{D_2}{b} \right], \quad (6.100)$$

Betrachtet man die Gleichungen (6.97) und (6.99) so stellt man fest, dass diese gewisse Ähnlichkeiten aufweisen. Die Terme der jeweiligen Klammerausdrücke sind absolut identisch. Der einzige Unterschied liegt nur in den trigonometrischen Funktionen. Man kann die Gleichung (6.97) abgekürzt als:

$$\cos(\varphi) [(\dots)_1] + \sin(\varphi) [(\dots)_2] = 0 \quad (6.101)$$

und die Gleichung (6.99) ebenfalls abgekürzt als

$$\sin(\varphi) [(\dots)_1] - \cos(\varphi) [(\dots)_2] = 0 \quad (6.102)$$

schreiben. Die Indices 1 und 2 sollen darauf hinweisen, dass es sich um die Klammerausdrücke mit den Unbekannten A_1 , B_1 und D_1 bzw. A_2 , B_2 und D_2 handelt. Multipliziert man anschließend die Beziehung (6.101) mit dem Ausdruck

$$\cos(\varphi) [(\dots)_1] + \sin(\varphi) [(\dots)_2] = 0 \left| \cdot \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}, \quad (6.103)$$

so lautet die modifizierte Gleichung wie folgt:

$$\sin(\varphi) [(\dots)_1] + \frac{\sin^2(\varphi)}{\cos(\varphi)} [(\dots)_2] = 0. \quad (6.104)$$

Durch das Einsetzen dieser modifizierten Gleichung in die Beziehung (6.102) und elementarer Umformung ergibt sich folgender Ausdruck:

$$\sin^2(\varphi) [(\dots)_2] + \cos^2(\varphi) [(\dots)_2] = 0. \quad (6.105)$$

Zwischen den Quadrattermen von trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus besteht der Zusammenhang (6.78), womit sich die Gleichung (6.105) zu

$$[(\dots)_2] = 0 \quad (6.106)$$

vereinfachen lässt. Durch die analoge Vorgehensweise lässt sich zeigen, dass die Gleichungen (6.97) bis (6.100) sich wie folgt vereinfachen lassen:

$$0 = nA_1a^{n-1} - nB_1a^{-n-1} + \frac{D_1}{a}, \quad (6.107)$$

$$0 = nA_1b^{n-1} - nB_1b^{-n-1} + \frac{D_1}{b}, \quad (6.108)$$

$$0 = nA_2a^{n-1} - nB_2a^{-n-1} + \frac{D_2}{a}, \quad (6.109)$$

$$0 = nA_2b^{n-1} - nB_2b^{-n-1} + \frac{D_2}{b}. \quad (6.110)$$

Abschließend werden zwei restliche Randbedingungen betrachtet. Nach der Durchführung der relevanten mathematischen Operationen ergeben sich die Randbedingungen (6.93) und (6.94) zu folgenden Ausdrücken:

$$Q_f = \sin(\varphi) \left[A_1(b^n - a^n) + B_1(b^{-n} - a^{-n}) + D_1 \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right] - \cos(\varphi) \left[A_2(b^n - a^n) + B_2(b^{-n} - a^{-n}) + D_2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right], \quad (6.111)$$

$$N_f = \cos(\varphi) \left[A_1(1+n)(b^n - a^n) + B_1(1-n)(b^{-n} - a^{-n}) + D_1 \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right] + \sin(\varphi) \left[A_2(1+n)(b^n - a^n) + B_2(1-n)(b^{-n} - a^{-n}) + D_2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]. \quad (6.112)$$

Aus der Abbildung 6.2 geht hervor, dass die resultierenden Schnittkräfte bei $\varphi = 0^\circ$ eingreifen. Damit vereinfachen sich die Termen für die trigonometrischen Funktionen zu:

$$\sin(\varphi = 0^\circ) = 0 \quad (6.113)$$

bzw. zu

$$\cos(\varphi = 0^\circ) = 1 \quad (6.114)$$

In der vereinfachten Form lauten die Gleichungen (6.111) und (6.112) wie folgt:

$$-Q_f = A_2(b^n - a^n) + B_2(b^{-n} - a^{-n}) + D_2 \ln\left(\frac{b}{a}\right), \quad (6.115)$$

$$N_f = +A_1(1+n)(b^n - a^n) + B_1(1-n)(b^{-n} - a^{-n}) + D_1 \ln\left(\frac{b}{a}\right). \quad (6.116)$$

Mit den durchgeführten mathematischen Operationen lassen sich zum einen die trigonometrischen Funktionen eliminieren und zum Anderen das lineare Gleichungssystem mit sechs Unbekannten in zwei lineare voneinander unabhängige Gleichungssysteme mit jeweils drei Unbekannten spalten. Das erste Gleichungssystem bilden die Gleichungen (6.107), (6.108) und

(6.116) mit den drei Unbekannten A_1 , B_1 und D_1 . Das zweite Gleichungssystem wird von den Gleichungen (6.109), (6.110) und (6.115) mit drei Unbekannten A_2 , B_2 und D_2 gebildet.

Nach dem Auflösen und der elementaren Umformung (das Auflösen der beiden Gleichungssysteme beinhaltet dieselbe Vorgehensweise wie im vorangegangenen Abschnitt 6.2) werden die unbekannt Konstanten wie folgt angegeben:

$$A_1 = \frac{N_f}{\xi} (b^{-n} - a^{-n}) , \quad (6.117)$$

$$B_1 = \frac{N_f}{\xi} (b^n - a^n) , \quad (6.118)$$

$$D_1 = \frac{nN_f}{\xi} (m^n - m^{-n}) , \quad (6.119)$$

$$A_2 = \frac{Q_f}{\xi} (b^{-n} - a^{-n}) , \quad (6.120)$$

$$B_2 = \frac{Q_f}{\xi} (b^n - a^n) , \quad (6.121)$$

$$D_2 = \frac{nQ_f}{\xi} (m^n - m^{-n}) . \quad (6.122)$$

Für die neu eingeführte Funktion ξ gilt der Zusammenhang (6.123):

$$\xi = 4 - m^{-n} (2 + n \ln (m)) - m^n (2 - n \ln (m)) . \quad (6.123)$$

Durch das Einsetzen der berechneten Konstanten aus (6.117) bis (6.122) wird die Spannungskomponente σ_{rr} zusammengefasst in folgender Form angegeben:

$$\sigma_{rr} = \frac{n}{r\xi} (N_f \cos (\varphi) + Q_f \sin (\varphi)) [r^n (b^{-n} - a^{-n}) - r^{-n} (b^n - a^n) + (m^n - m^{-n})] . \quad (6.124)$$

Setzt man die Beziehungen (6.95) und (6.96) in die Gleichung (6.124), kann die Spannungskomponente σ_{rr} unter der Betrachtung der trigonometrischen Additionstheorien

$$\cos (\varphi) \sin (\omega) + \sin (\varphi) \cos (\omega) = \sin (\varphi + \omega) \quad (6.125)$$

wie folgt angegeben werden:

$$\sigma_{rr} = \frac{nP_f \sin (\varphi + \omega)}{r\xi} [r^n (b^{-n} - a^{-n}) - r^{-n} (b^n - a^n) + (m^n - m^{-n})] . \quad (6.126)$$

Die Spannungskomponente $\sigma_{\varphi\varphi}$ lässt sich ebenfalls unter Betrachtung des Zusammenhanges (6.125) und der eingeführten Funktion ξ wie folgt angeben:

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{nP_f \sin (\varphi + \omega)}{r\xi} [(1 + n) r^n (b^{-n} - a^{-n}) - (1 - n) r^{-n} (b^n - a^n) + (m^n - m^{-n})] . \quad (6.127)$$

Nach dem Einsetzen der Konstanten und Zusammenfassen wird die Spannungskomponente $\tau_{r\varphi}$ in der Form

$$\tau_{r\varphi} = \frac{n}{r\xi} (P_f \sin(\varphi) \sin(\omega) - P_f \cos(\varphi) \cos(\omega)) \left[r^n (b^{-n} - a^{-n}) - r^{-n} (b^n - a^n) + (m^n - m^{-n}) \right] \quad (6.128)$$

angegeben. Mit der trigonometrischen Beziehung (6.129)

$$\cos(\varphi) \cos(\omega) - \sin(\varphi) \sin(\omega) = \cos(\varphi + \omega) , \quad (6.129)$$

vereinfacht sich die Gleichung (6.128) zu:

$$\tau_{r\varphi} = - \frac{n P_f \cos(\varphi + \omega)}{r\xi} \left[r^n (b^{-n} - a^{-n}) - r^{-n} (b^n - a^n) + (m^n - m^{-n}) \right] . \quad (6.130)$$

Damit sind alle drei Spannungskomponenten σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$ und $\tau_{r\varphi}$ bestimmt.

Verschiebungsfeld

Zur Herleitung der Verschiebungsfunktionen werden die kinematischen und die konstitutiven Gleichungen herangezogen. Die genannten Zusammenhänge wurden bereits im vorangegangenen Abschnitt hergeleitet. Die Gleichung (6.29) gibt die Beziehung zur Herleitung der Verschiebung u wieder. Durch das Einsetzen der Spannungskomponenten und der Integration nach der Variable r gilt für die genannte Verschiebung der Zusammenhang:

$$u(r, \varphi) = \frac{P_f \sin(\varphi + \omega)}{E_\varphi \xi} \left[r^n K_1 (s^2 - \nu_{\varphi r} - n\nu_{\varphi r}) - r^{-n} K_2 (-s^2 + \nu_{\varphi r} - n\nu_{\varphi r}) + K_3 n \ln(r) (s^2 - \nu_{\varphi r}) \right] + f_u(\varphi) . \quad (6.131)$$

Als Abkürzungen wurden hierin folgende Terme festgelegt:

$$K_1 = b^{-n} - a^{-n} , \quad (6.132)$$

$$K_2 = b^n - a^n , \quad (6.133)$$

$$K_3 = m^n - m^{-n} . \quad (6.134)$$

Zur Herleitung der Verschiebung v wird die Gleichung (6.33) herangezogen. Nach der Durchführung relevanter Schritte wird die Verschiebungsfunktion wie folgt angegeben:

$$v(r, \varphi) = \frac{-P_f \cos(\varphi + \omega)}{E_\varphi \xi} \left[r^n K_1 (n + n^2 - s^2 + \nu_{\varphi r}) + r^{-n} K_2 (-s^2 + \nu_{\varphi r} - n + n^2) + K_3 n ((1 - \nu_{\varphi r}) - \ln(r) (s^2 - \nu_{\varphi r})) \right] - \int f_u(\varphi) d\varphi + f_v(r) . \quad (6.135)$$

Durch die Betrachtung der Schubverzerrung (vgl. Gl. (6.36)) lässt sich eine weitere Beziehung herleiten. Diese wird nach dem Einsetzen der Verschiebungen u und v bzw. deren Ableitungen, sowie der Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ in folgender Form angegeben:

$$0 = \frac{df_u(\varphi)}{d\varphi} + \int f_u(\varphi) d\varphi - f_v(r) + r \frac{df_v(r)}{dr} + K_3 \frac{P_f n^3 \cos(\varphi + \omega)}{E_\varphi \xi} . \quad (6.136)$$

Die Gleichung (6.136) wird zur Bestimmung der Integrationsfunktionen f_u und f_v aufgespalten. Aufgrund seiner Abhängigkeit von der Variable φ wird der Term mit dem Kosinusausdruck der Funktion f_u zugewiesen. Das Entkoppeln liefert folgende Beziehungen:

$$\frac{df_u(\varphi)}{d\varphi} + \int f_u(\varphi) d\varphi = G_1 - K_3 \frac{P_f n^3 \cos(\varphi + \omega)}{E_\varphi \xi}, \quad (6.137)$$

$$f_v(r) - r \frac{df_v(r)}{dr} = G_1. \quad (6.138)$$

Die Differentialgleichung (6.138) wurde im vorangegangenen Abschnitt bereits aufgelöst. Deren Lösung gibt die Gleichung (6.59) wieder.

Durch die einmalige Differentiation der Gleichung (6.137) nach der Variable φ wird eine inhomogene DGL 2. Ordnung der Form

$$\frac{d^2 f_u(\varphi)}{d\varphi^2} + f_u(\varphi) = K_3 \frac{P_f n^3 \sin(\varphi + \omega)}{E_\varphi \xi} \quad (6.139)$$

gewonnen. Die allgemeine Lösung einer inhomogenen DGL ist als Summe zweier Teillösungen darstellbar. Die erste Teillösung ist die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung f_{uh} . Bei der zweiten Teillösung wird eine (beliebige) partikuläre Lösung f_{up} der inhomogenen DGL aufgesucht. Der homogene Anteil der Differentialgleichung lautet wie folgt:

$$\frac{d^2 f_{uh}(\varphi)}{d\varphi^2} + f_{uh}(\varphi) = 0. \quad (6.140)$$

Im vorangegangenen Abschnitt wurde gezeigt, dass die Lösung dieser Differentialgleichung (vgl. die Gl. (6.47)) wie folgt aussieht:

$$f_{uh}(\varphi) = G_2 \sin(\varphi) + G_3 \cos(\varphi). \quad (6.141)$$

Die Bestimmung der partikulären Lösung erfolgt mithilfe eines geeigneten Lösungsansatzes, der im wesentlichen vom Typ der Störfunktion abhängt. Im vorliegenden Fall weist die Störfunktion die Sinusfunktion auf. Daher ist es möglich als Lösungsansatz die Linearkombination der Sinus- und Kosinusfunktion zu verwenden. Diese ist aber bereits die Lösung der charakteristischen Gleichung und damit die Lösung des homogenen Anteils. Aufgrund dieser Beschaffenheit wird die genannte Linearkombination mit der Variable φ multipliziert [13]. Dadurch weist die gewonnene Gleichung folgende Gestalt auf:

$$f_{up}(\varphi) = \varphi [G_6 \sin(\varphi + \omega) + G_5 \cos(\varphi + \omega)]. \quad (6.142)$$

Die zweimalige Differentiation ergibt zusammengefasst den Zusammenhang:

$$\frac{d^2 f_{up}(\varphi)}{d\varphi^2} = -2G_5 \sin(\varphi + \omega) + 2G_6 \cos(\varphi + \omega) + \varphi [-G_5 \cos(\varphi + \omega) - G_6 \sin(\varphi + \omega)]. \quad (6.143)$$

Durch das Einsetzen dieser Gleichung sowie der Beziehung (6.142) in die Differentialgleichung (6.139) geht diese in folgende Gestalt über:

$$-2G_5 \sin(\varphi + \omega) + 2G_6 \cos(\varphi + \omega) = \frac{K_3 P_f n^3 \sin(\varphi + \omega)}{E_\varphi \xi}. \quad (6.144)$$

Unter der Betrachtung dieser Gleichung ist es möglich mithilfe des Koeffizientenvergleichs die unbekanntenen Konstanten G_5 und G_6 zu bestimmen. Dadurch können für die genannten Konstanten folgende Terme angegeben werden:

$$G_6 = 0, \quad (6.145)$$

$$G_5 = -\frac{K_3 P_f n^3}{2E_\varphi \xi}. \quad (6.146)$$

Anschließend ergibt sich durch das Einsetzen dieser Konstanten die partikuläre Lösung wie folgt:

$$f_{up}(\varphi) = -\varphi \cos(\varphi + \omega) \frac{K_3 P_f n^3}{2E_\varphi \xi}. \quad (6.147)$$

Wie bereits erwähnt ist die Gesamtlösung der Differentialgleichung die Summe der partikulären und der homogenen Lösungen. Damit lautet die Lösung der Differentialgleichung (6.139) wie folgt:

$$f_u(\varphi) = G_2 \sin(\varphi) + G_3 \cos(\varphi) - \varphi \cos(\varphi + \omega) \frac{K_3 P_f n^3}{2E_\varphi \xi}. \quad (6.148)$$

Zur Bestimmung der Verschiebung v ist der Integral der Funktion f_u erforderlich. Nach der Integration der letztgenannten Funktion gilt der Zusammenhang:

$$\int f_u(\varphi) d\varphi = -G_2 \cos(\varphi) + G_3 \sin(\varphi) - \frac{K_3 P_f n^3}{2E_\varphi \xi} [\cos(\varphi + \omega) + \varphi \sin(\varphi + \omega)] + G_7. \quad (6.149)$$

Damit lassen sich die Verschiebungen u und v wie folgt angeben:

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) = & \frac{P_f \sin(\varphi + \omega)}{E_\varphi \xi} \left[r^n K_1 (s^2 - \nu_{\varphi r} - n\nu_{\varphi r}) - r^{-n} K_2 (-s^2 + \nu_{\varphi r} - n\nu_{\varphi r}) \right. \\ & \left. + K_3 n \ln(r) (s^2 - \nu_{\varphi r}) \right] + G_2 \sin(\varphi) + G_3 \cos(\varphi) - \varphi \cos(\varphi + \omega) \frac{K_3 P_f n^3}{2E_\varphi \xi}, \end{aligned} \quad (6.150)$$

$$\begin{aligned} v(r, \varphi) = & \frac{-P_f \cos(\varphi + \omega)}{E_\varphi \xi} \left[r^n K_1 (n + n^2 - s^2 + \nu_{\varphi r}) + r^{-n} K_2 (-s^2 + \nu_{\varphi r} - n + n^2) \right. \\ & \left. + K_3 n ((1 - \nu_{\varphi r}) - \ln(r) (s^2 - \nu_{\varphi r})) \right] + G_2 \cos(\varphi) - G_3 \sin(\varphi) \\ & + \frac{K_3 P_f n^3}{2E_\varphi \xi} [\cos(\varphi + \omega) + \varphi \sin(\varphi + \omega)] - G_7 + G_1 + G_4 r. \end{aligned} \quad (6.151)$$

Die Konstanten G_7 und G_1 lassen sich wieder zu einer gemeinsamen Konstanten $+G_8$ zusammenfassen.

Zur Bestimmung der unbekanntenen Konstanten G_2 , G_3 , G_4 und G_8 sind vier Randbedingungen zu definieren. Gemäß Abbildung 6.2 sind die Verschiebungen u und v an der Stelle $\varphi = \psi$ (Festeinspannung) gleich null:

$$u(\varphi = \psi) = 0, \quad (6.152)$$

$$v(\varphi = \psi) = 0. \quad (6.153)$$

Zusätzlich können an der Festeinspannung folgende Randbedingungen definiert werden:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\psi} = 0, \quad (6.154)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{\varphi=\psi} = 0. \quad (6.155)$$

Analog dem vorangegangenen Abschnitt sind diese Randbedingungen bei $r = r_m$ mit guter Näherung erfüllt. Betrachtet man die genannten Randbedingungen, führen diese nach der Durchführung relevanter Rechenschritte zu folgenden Termen:

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{P_f \sin(\psi + \omega)}{E_\varphi \xi} \left[r_m^n K_1 (s^2 - \nu_{\varphi r} - n\nu_{\varphi r}) - r_m^{-n} K_2 (-s^2 + \nu_{\varphi r} - n\nu_{\varphi r}) \right. \\ & \left. + K_3 n \ln(r_m) (s^2 - \nu_{\varphi r}) \right] + G_2 \sin(\psi) + G_3 \cos(\psi) - \psi \cos(\psi + \omega) \frac{K_3 P_f n^3}{2E_\varphi \xi}, \end{aligned} \quad (6.156)$$

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{-P_f \cos(\psi + \omega)}{E_\varphi \xi} \left[r_m^n K_1 (n + n^2 - s^2 + \nu_{\varphi r}) + r_m^{-n} K_2 (-s^2 + \nu_{\varphi r} - n + n^2) \right. \\ & \left. + K_3 n ((1 - \nu_{\varphi r}) - \ln(r_m) (s^2 - \nu_{\varphi r})) \right] + G_2 \cos(\psi) - G_3 \sin(\psi) \\ & + \frac{K_3 P_f n^3}{2E_\varphi \xi} \left[\cos(\psi + \omega) + \psi \sin(\psi + \omega) \right] + G_8 + G_4 r_m, \end{aligned} \quad (6.157)$$

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{P_f \cos(\psi + \omega)}{E_\varphi \xi} \left[r_m^n K_1 (s^2 - \nu_{\varphi r} - n\nu_{\varphi r}) - r_m^{-n} K_2 (-s^2 + \nu_{\varphi r} - n\nu_{\varphi r}) \right. \\ & \left. + K_3 n \ln(r_m) (s^2 - \nu_{\varphi r}) \right] + \frac{K_3 P_f n^3}{2E_\varphi \xi} \left[\psi \sin(\psi + \omega) - \cos(\psi + \omega) \right] + G_2 \cos(\psi) \\ & - G_3 \sin(\psi), \end{aligned} \quad (6.158)$$

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{-P_f \cos(\psi + \omega)}{E_\varphi \xi} \left[n r_m^{n-1} K_1 (n + n^2 - s^2 + \nu_{\varphi r}) - n r_m^{-n-1} K_2 (-s^2 + \nu_{\varphi r} - n + n^2) \right. \\ & \left. - K_3 n (s^2 - \nu_{\varphi r}) \frac{1}{r_m} \right] + G_4. \end{aligned} \quad (6.159)$$

Aus der Gleichung (6.159) lässt sich die Unbekannte G_4 direkt bestimmen.

$$\begin{aligned} G_4 = & \frac{n P_f \cos(\psi + \omega)}{r_m E_\varphi \xi} \left[r_m^n K_1 (n + n^2 - s^2 + \nu_{\varphi r}) - r_m^{-n} K_2 (-s^2 + \nu_{\varphi r} - n + n^2) \right. \\ & \left. - K_3 (s^2 - \nu_{\varphi r}) \right]. \end{aligned} \quad (6.160)$$

Durch das Auflösen des Gleichungssystems ergeben sich die gesuchten Konstanten zu:

$$G_8 = - \frac{P_f \cos(\psi + \omega)}{E_\varphi \xi} \left[r_m^n K_1 n k^2 - r_m^{-n} K_2 n k^2 + K_3 n k^2 \right], \quad (6.161)$$

$$\begin{aligned}
 G_3 = & -\frac{P_f \sin(\omega)}{E_\varphi \xi} \left[r_m^n K_1 (s^2 - \nu_{\varphi r} - n\nu_{\varphi r}) - r_m^{-n} K_2 (-s^2 + \nu_{\varphi r} - n\nu_{\varphi r}) \right. \\
 & \left. + K_3 n \ln(r_m) (s^2 - \nu_{\varphi r}) \right] - \frac{K_3 P_f n^3}{2E_\varphi \xi} \left[\cos(\psi + \omega) \sin(\psi) - \psi \cos(\omega) \right], \quad (6.162)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_2 = & -\frac{P_f \cos(\omega)}{E_\varphi \xi} \left[r_m^n K_1 (s^2 - \nu_{\varphi r} - n\nu_{\varphi r}) - r_m^{-n} K_2 (-s^2 + \nu_{\varphi r} - n\nu_{\varphi r}) \right. \\
 & \left. + K_3 n \ln(r_m) (s^2 - \nu_{\varphi r}) \right] + \frac{K_3 P_f n^3}{2E_\varphi \xi} \left[\cos(\psi + \omega) \cos(\psi) - \psi \sin(\omega) \right]. \quad (6.163)
 \end{aligned}$$

Abschließend erfolgt die Angabe der Verschiebungsfunktionen u und v . Unter der Betrachtung der relevanten Additionstheoremen der trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus lassen sich die Verschiebungsfunktionen in der zusammengefassten Form wie folgt angeben:

$$\begin{aligned}
 u(r, \varphi) = & \frac{P_f \sin(\varphi + \omega)}{E_\varphi \xi} \left[(r^n - r_m^n) (b^{-n} - a^{-n}) (s^2 - \nu_{\varphi r} - n\nu_{\varphi r}) \right. \\
 & - (r^{-n} - r_m^{-n}) (b^n - a^n) (-s^2 + \nu_{\varphi r} - n\nu_{\varphi r}) \\
 & \left. + n (\ln(r) - \ln(r_m)) (m^n - m^{-n}) (s^2 - \nu_{\varphi r}) \right] \\
 & + \frac{(m^n - m^{-n}) P_f n^3}{2E_\varphi \xi} \left[\cos(\psi + \omega) \sin(\varphi - \psi) + \cos(\varphi + \omega) (\psi - \varphi) \right], \quad (6.164)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v(r, \varphi) = & \frac{-P_f \cos(\varphi + \omega)}{E_\varphi \xi} \left[r^n K_1 (n + n^2 - s^2 + \nu_{\varphi r}) + r^{-n} K_2 (-s^2 + \nu_{\varphi r} - n + n^2) \right. \\
 & \left. + K_3 n ((1 - \nu_{\varphi r}) - \ln(r) (s^2 - \nu_{\varphi r})) \right] - \frac{P_f \cos(\varphi + \omega)}{E_\varphi \xi} \left[r_m^n K_1 (s^2 - \nu_{\varphi r} - n\nu_{\varphi r}) \right. \\
 & \left. - r_m^{-n} K_2 (-s^2 + \nu_{\varphi r} - n\nu_{\varphi r}) + K_3 n \ln(r_m) (s^2 - \nu_{\varphi r}) \right] \\
 & + \frac{K_3 P_f n^3}{2E_\varphi \xi} \left[\cos(\psi + \omega) \cos(\psi - \varphi) - \sin(\omega + \varphi) (\psi - \varphi) + \cos(\varphi + \omega) \right] \\
 & + \frac{nr P_f \cos(\psi + \omega)}{r_m E_\varphi \xi} \left[r_m^n K_1 (n + n^2 - s^2 + \nu_{\varphi r}) - r_m^{-n} K_2 (-s^2 + \nu_{\varphi r} - n + n^2) \right. \\
 & \left. - K_3 (s^2 - \nu_{\varphi r}) \right] - \frac{P_f \cos(\psi + \omega)}{E_\varphi \xi} \left[r_m^n K_1 n k^2 - r_m^{-n} K_2 n k^2 + K_3 n k^2 \right]. \quad (6.165)
 \end{aligned}$$

6.4 Der orthotrope geschichtete gekrümmte Balken unter einer Momentbelastung

Im Abschnitt 6.2 wurde ein orthotroper Balken behandelt. An dieser Stelle erfolgt nun die Erweiterung. Es wird ein Laminat bestehend aus einer bestimmten Anzahl n orthotroper UD-Schichten betrachtet. Zur Beschreibung der jeweiligen Einzelschicht wird ein Inkrement j eingeführt.

Spannungsfeld und Randbedingungen

Unter Verwendung des eingeführten Inkrementes lässt sich der im Kapitel 6.2 angeschriebene Ansatz wie folgt angeben:

$$F_{,j} = f_{0,j}(r) = A_{,j} + B_{,j}r^2 + C_{,j}r^{1+s_{,j}} + D_{,j}r^{1-s_{,j}}. \quad (6.166)$$

Daraus ergeben sich die Spannungskomponenten zu:

$$\sigma_{rr,j} = 2B_{,j} + (1 + s_{,j}) C_{,j}r^{s_{,j}-1} + (1 - s_{,j}) D_{,j}r^{-s_{,j}-1}, \quad (6.167)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi,j} = 2B_{,j} + s_{,j}(1 + s_{,j}) C_{,j}r^{s_{,j}-1} - s_{,j}(1 - s_{,j}) D_{,j}r^{-s_{,j}-1}, \quad (6.168)$$

$$\tau_{r\varphi,j} = 0. \quad (6.169)$$

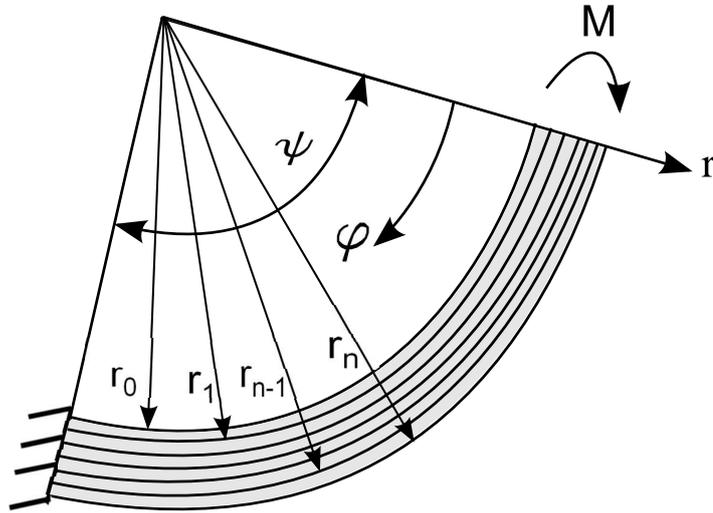


Abbildung 6.3: Schematische Darstellung eines gekrümmten Balkens unter Momentbelastung

Zur Bestimmung der Verschiebung $u_{,j}$ leitet man aus den kinematischen und konstitutiven Beziehungen für jede Einzelschicht den Zusammenhang:

$$\frac{\partial u_{,j}}{\partial r} = \frac{1}{E_{\varphi,j}} (s_{,j}^2 \sigma_{rr,j} - \nu_{\varphi r,j} \sigma_{\varphi\varphi,j}). \quad (6.170)$$

Nach dem Einsetzen der Spannungskomponenten $\sigma_{rr,j}$ und $\sigma_{\varphi\varphi,j}$ in Gleichung (6.170), sowie der Integration der genannten Beziehung nach r gilt folgender Zusammenhang:

$$u_{,j}(r, \varphi) = \frac{1}{E_{\varphi,j}} \left[r 2B_{,j} (s_{,j}^2 - \nu_{\varphi r,j}) + (s_{,j} - \nu_{\varphi r,j}) (1 + s_{,j}) C_{,j} r^{s_{,j}} - (s_{,j} + \nu_{\varphi r,j}) (1 - s_{,j}) D_{,j} r^{-s_{,j}} \right] + f_{u,j}. \quad (6.171)$$

Die Verschiebung $v_{,j}$ lässt sich analog herleiten. Es gilt damit folgende Beziehung:

$$v_{,j}(r, \varphi) = \frac{\varphi 2B_{,j} r (1 - s_{,j}^2)}{E_{\varphi,j}} - \int f_{u,j} d\varphi + f_{v,j}. \quad (6.172)$$

Die Ergebnisse der Gleichung (6.39) lassen sich ohne weiteres auf das betrachtete Problem übertragen. Nach der Erweiterung dieser Gleichung auf eine Einzelschicht, lässt sich der genannte Zusammenhang wie folgt anschreiben:

$$0 = \frac{df_{u,j}(\varphi)}{d\varphi} + \int f_{u,j}(\varphi) d\varphi - f_{v,j}(r) + r \frac{df_{v,j}(r)}{dr}. \quad (6.173)$$

Des Weiteren sind die Ergebnisse der Differenzialgleichungen übertragbar. Verallgemeinert weisen die Integrationsfunktionen folgende Form auf:

$$f_{u,j}(\varphi) = G_{2,j} \sin(\varphi) + G_{3,j} \cos(\varphi), \quad (6.174)$$

$$f_{v,j}(r) = G_{1,j} + G_{4,j}r. \quad (6.175)$$

Damit lassen sich nun die Verschiebungsfunktionen in folgender Gestalt anschreiben:

$$u_{,j}(r, \varphi) = \frac{1}{E_{\varphi,j}} \left[r 2B_{,j} (s_{,j}^2 - \nu_{\varphi r,j}) + (s_{,j} - \nu_{\varphi r,j}) (1 + s_{,j}) C_{,j} r^{s_{,j}} - (s_{,j} + \nu_{\varphi r,j}) (1 - s_{,j}) D_{,j} r^{-s_{,j}} \right] + G_{2,j} \sin(\varphi) + G_{3,j} \cos(\varphi), \quad (6.176)$$

$$v_{,j}(r, \varphi) = \frac{\varphi 2B_{,j} r (1 - s_{,j}^2)}{E_{\varphi,j}} + G_{2,j} \cos(\varphi) - G_{3,j} \sin(\varphi) + G_{6,j} + G_{4,j}r. \quad (6.177)$$

Zur vollständigen Berechnung der Spannungs- und Verschiebungsfunktionen sind sieben unbekannte Größen pro Lage zu bestimmen. Im Abschnitt 6.2 wurde gezeigt, dass die Größe G_6 verschwindet. Damit reduziert sich die Anzahl der Unbekannten auf sechs. Somit sind für ein Laminat bestehend aus n Einzelschichten $6n$ Randbedingungen zu definieren.

Pro Lage können drei Randbedingungen an der Festeinspannung definiert sein. Diese sind:

$$u_{,j}(\varphi = \psi) = 0, \quad (6.178)$$

$$v_{,j}(\varphi = \psi) = 0, \quad (6.179)$$

$$\left. \frac{\partial v_{,j}}{\partial r} \right|_{\varphi=\psi} = 0. \quad (6.180)$$

Diese Randbedingungen sind am mittleren Radius jeder Einzelschicht r_{mj} zu definieren. Dafür gilt die Beziehung:

$$r_{m,j} = \frac{1}{2} (a_{,j} + b_{,j}). \quad (6.181)$$

Des Weiteren sind an den Schichtgrenzen sowohl die Radialspannungen als auch die beiden Verschiebungen der benachbarten Schichten gleich groß. Somit gelten folgende Randbedingungen:

$$\sigma_{rr,j}(r = r_{,j}) = \sigma_{rr,j+1}(r = r_{,j}), \quad (6.182)$$

$$u_{,j}(r = r_{,j}) = u_{,j+1}(r = r_{,j}) , \quad (6.183)$$

$$v_{,j}(r = r_{,j}) = v_{,j+1}(r = r_{,j}) . \quad (6.184)$$

Zusammengefasst gibt es bei einem Laminat $3(n - 1)$ Randbedingungen. Abschließend stehen an den Rändern folgende Randbedingungen zur Verfügung:

$$\sigma_{rr,n}(r = r_{,n}) = 0 , \quad (6.185)$$

$$\sigma_{rr,1}(r = r_{,0}) = 0 , \quad (6.186)$$

Des Weiteren ist das resultierende Moment am freien Rand wie folgt definiert:

$$M_f = \sum_{j=1}^n \left[\int_{r_{,j-1}}^{r_{,j}} \sigma_{\varphi\varphi,j} r dr \right] . \quad (6.187)$$

Mit diesen Angaben ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar.

7 Verifikation der Ergebnisse

Die nachfolgende Verifikation der analytischen Ergebnisse bezieht sich auf einen Vergleich mit der FEM-Berechnung. Eine absolute Angabe der Genauigkeit ist hiermit nicht möglich. Um eine Absicherung dieser Ergebnisse zu erhalten, werden diese im Allgemeinen mit den experimentell ermittelten Ergebnissen verglichen. Zur Verifizierung der Ergebnisse wurden die numerischen Modelle ohne die Flansche simuliert. Damit lässt sich auf die Anwendung des Superpositionsprinzips verzichten, womit eine genaue Analyse jedes einzelnen Belastungsfalls möglich ist.

7.1 Umrechnung der Materialkonstanten

In diesem Abschnitt erfolgt die Umrechnung der Materialkonstanten aus dem ESZ in den EVZ. Die Vorgehensweise richtete sich nach Kap. 2.1.4.

Zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls $E_{r(EVZ)}$ wird es angenommen, dass der Term R_{11} der Nachgiebigkeitsmatrix analog dem Term S_{11} den genannten Elastizitätsmodul abbildet. Nach Gleichung (2.38) besteht der folgende Zusammenhang:

$$R_{11} \hat{=} \left(\frac{1}{E_r} \right)_{(EVZ)} = S_{11} - \frac{S_{13}S_{13}}{S_{33}}. \quad (7.1)$$

Das Einsetzen der relevanten Terme liefert:

$$E_{r(EVZ)} = \frac{E_r}{(1 - \nu_{zr}\nu_{rz})}. \quad (7.2)$$

Analog lässt sich der Elastizitätsmodul $E_{\varphi(EVZ)}$ bestimmen:

$$R_{22} \hat{=} \left(\frac{1}{E_{\varphi}} \right)_{(EVZ)} = S_{22} - \frac{S_{23}S_{23}}{S_{33}}, \quad (7.3)$$

$$E_{\varphi(EVZ)} = \frac{E_{\varphi}}{(1 - \nu_{z\varphi}\nu_{\varphi z})}. \quad (7.4)$$

Bei einem isotropen Materialverhalten wird z.B. die Gleichung (7.4) in die Form übergehen, die die Gleichung (2.39) wiedergibt.

Zur Bestimmung der Querkontraktionszahlen wird die Gleichung (2.40) herangezogen. Das Umformen ergibt:

$$\nu_{(EVZ)} = \frac{\nu}{(1 + \nu)} \quad (7.5)$$

Damit lassen sich mit den in der Tabelle 3.1 angegebenen Materialdaten die Materialkonstanten im EVZ berechnen. Das Resultat dieser Berechnung gibt die Tabelle 7.1 wieder. Mit diesen Angaben lassen sich die Anisotropiewerte berechnen. Diese gibt die Tabelle 7.2 wieder.

Materialparameter	Wert
E_φ	135733 [MPa]
E_r	10786 [MPa]
E_z	10000 [MPa]
$G_{r\varphi} = G_{\varphi z}$	5000 [MPa]
G_{rz}	4000 [MPa]
$\nu_{\varphi r}$	0,2126

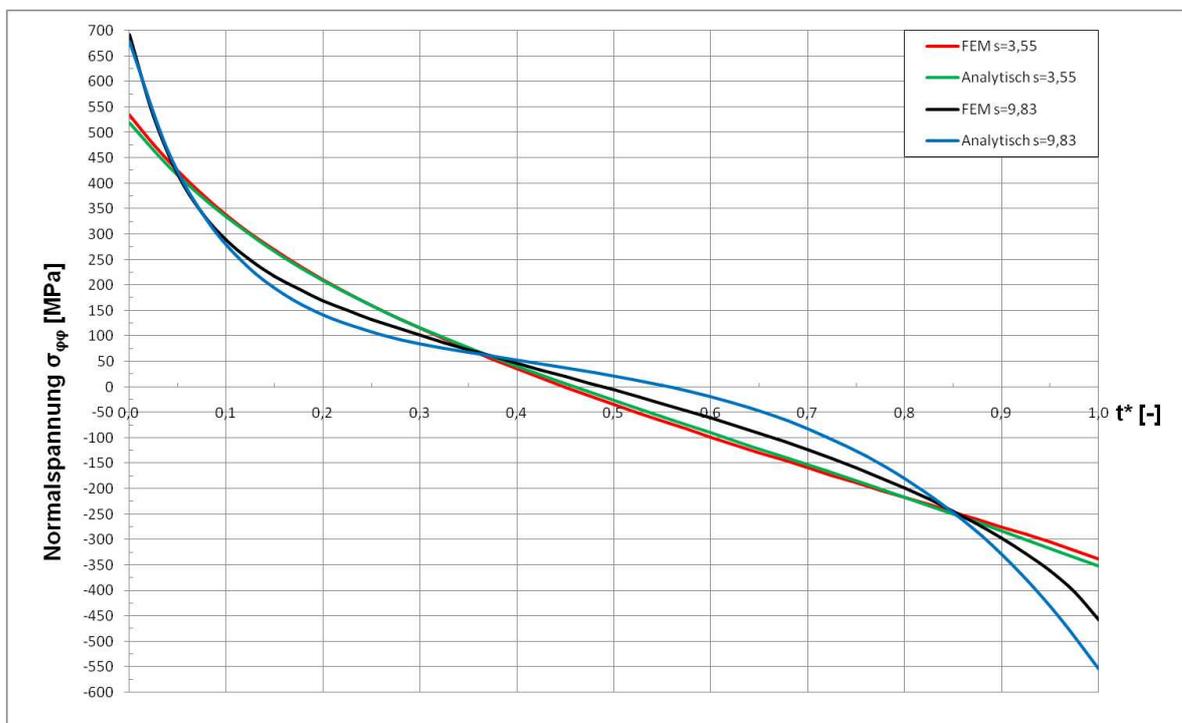
Tabelle 7.1: Materialdaten einer UD-Schicht im EVZ

Anisotropiewerte	Wert
s	3,5474
k	5,2102
n	6,3486

Tabelle 7.2: Anisotropiewerte im EVZ

7.2 Verifikation der Ergebnisse bei der Momentenbelastung

Aus den im Kap. 6.2 hergeleiteten Beziehungen werden die Verläufe der Spannungskomponenten über der Bauteildicke ermittelt. Die genannten Verläufe zusammen mit den numerisch ermittelten Ergebnissen stellt die Abbildung 7.1 dar. Dabei wird die Normalspannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ an der Stelle $\varphi = 45^\circ$ für unterschiedliche Werte von s wiedergegeben.

Abbildung 7.1: Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Spannung $\sigma_{\varphi\varphi}$

Die Abbildung 7.2 gibt unter derselben Voraussetzung die Verläufe der Normalspannung σ_{rr}

wieder.

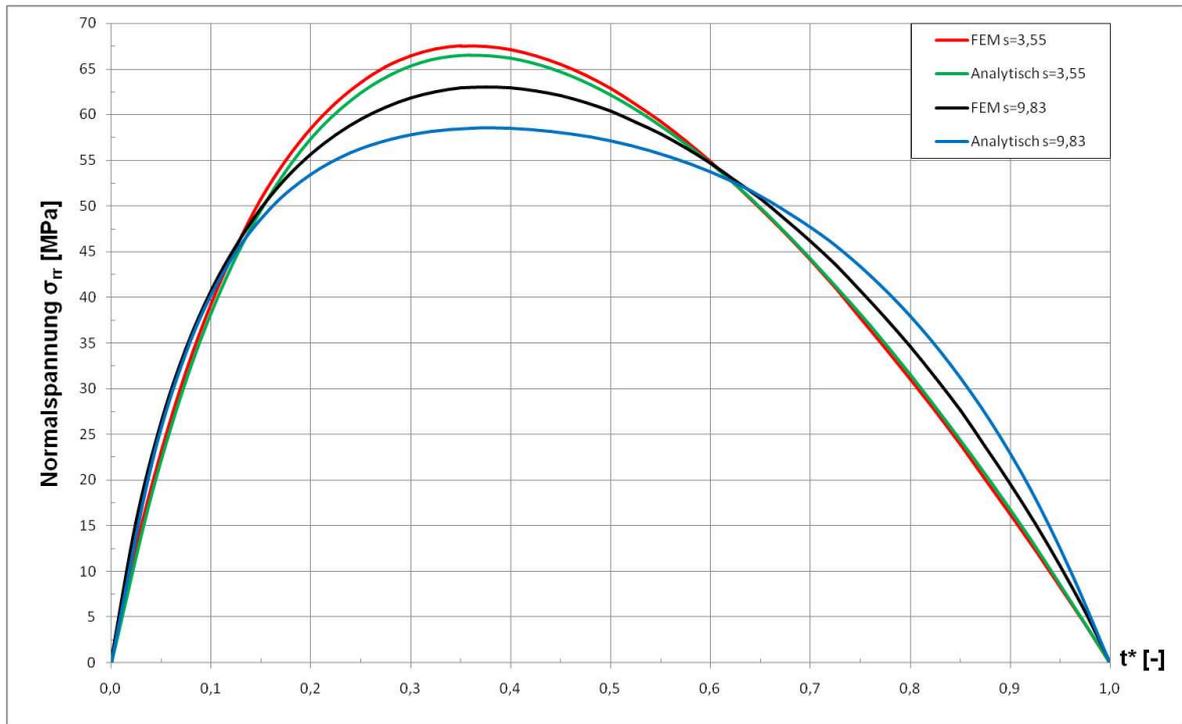


Abbildung 7.2: Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Spannung σ_{rr}

Aus diesen Abbildungen ist deutlich zu erkennen, dass die Verläufe der numerischen und der analytischen Berechnung miteinander korrelieren. Bei den Verläufen bei $s = 9,83$ sind jedoch nicht zu vernachlässigbare Abweichungen zu beobachten.

Des Weiteren werden die numerischen Ergebnisse an den Stellen $\varphi = 45^\circ$ und $\varphi = 0^\circ$ mit den analytischen Ergebnissen verglichen. Diese Darstellungsweise soll die im Kap. 5.1 festgestellte Auswirkung der Randstörung auf das Spannungsfeld im Bezug auf die analytischen Ergebnisse verdeutlichen. Die Abbildung 7.3 gibt dabei neben dem analytischen Verlauf der Normalspannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ die Verläufe derselben Spannungskomponente an den zuvor genannten Stellen bei $s = 3,55$ wieder. Die Abbildung 7.4 stellt unter derselben Voraussetzung die Verläufe der Normalspannung σ_{rr} dar.

Diese Ergebnisse waren in Anlehnung an Kap. 5.1 zu erwarten. Des Weiteren sei an dieser Stelle noch einmal erwähnt, dass die analytische Herleitung bei diesem Belastungsfall von einem drehsymmetrischen Spannungszustand ausgegangen ist. Dieser setzt über dem gesamten Bauteil vom Winkel unabhängige Verteilung der Spannungskomponenten.

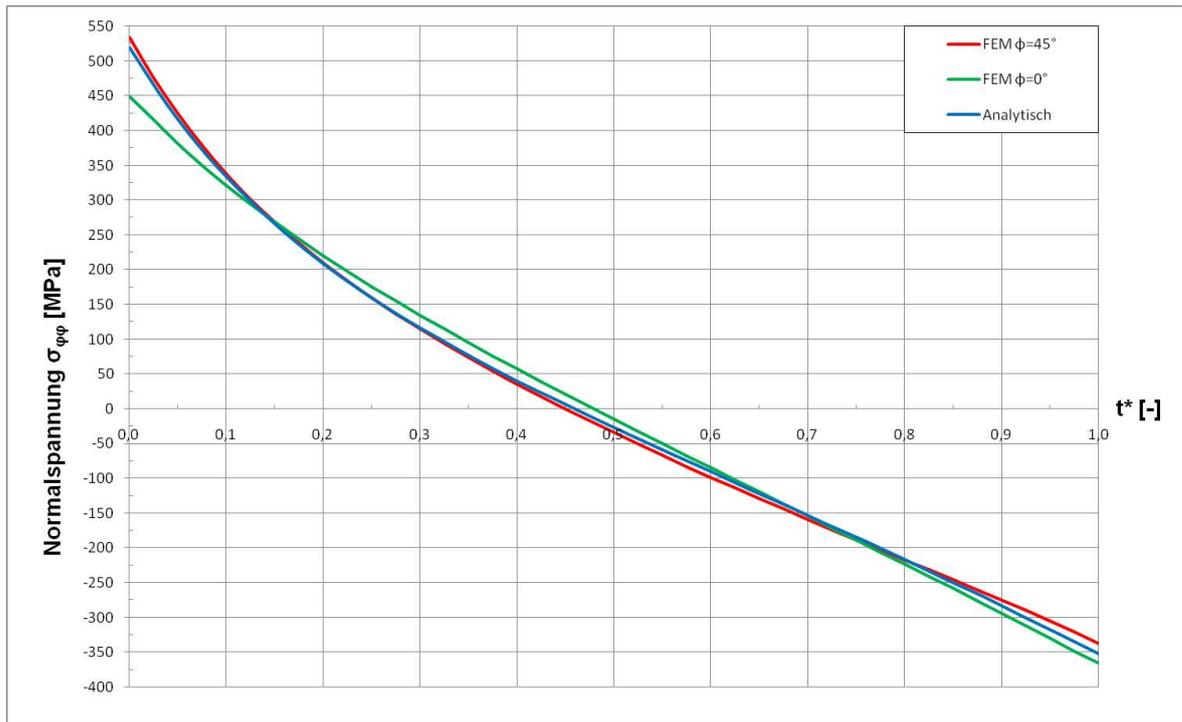


Abbildung 7.3: Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Spannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ bei $s=3,67$

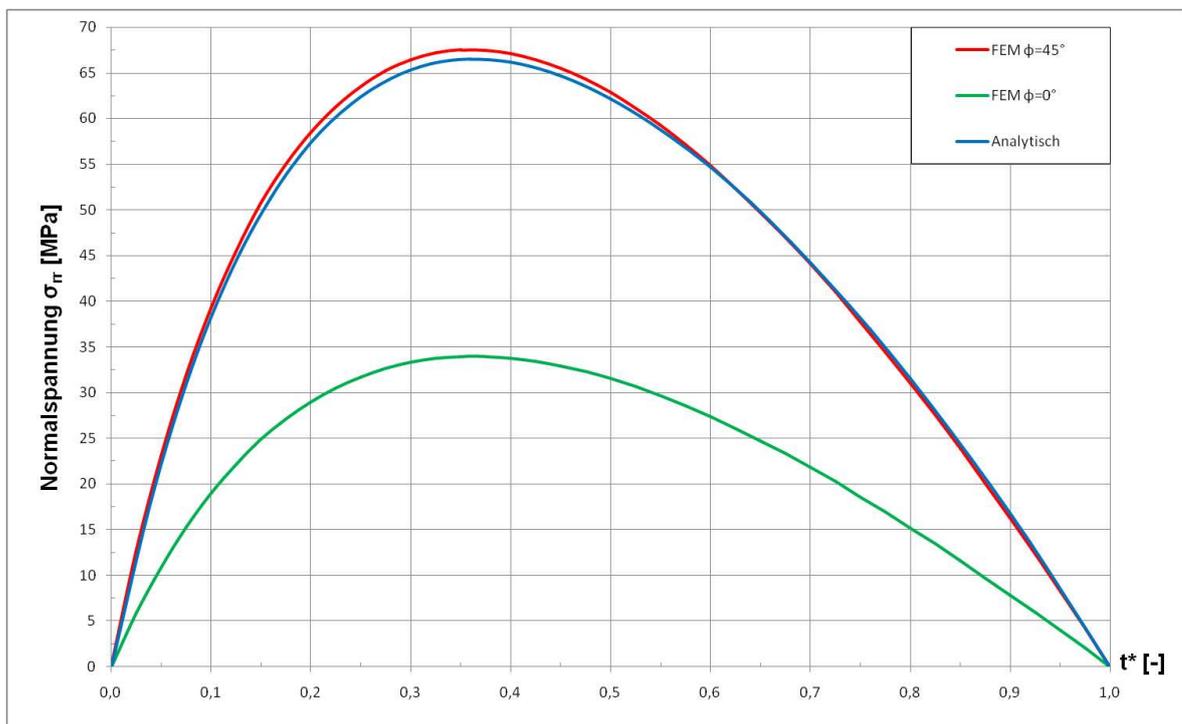


Abbildung 7.4: Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Spannung σ_{rr} bei $s=3,67$

Die Abbildungen 7.5 und 7.6 geben die Verläufe der beiden Verschiebungen u und v wieder. Bezüglich der Verschiebungskomponenten ist festzuhalten, dass die Ergebnisse im Rahmen der getroffenen Annahmen zufriedenstellend sind. Das bezieht sich in erster Linie auf den Verlauf der Verschiebung u an der Stelle $\varphi = 0^\circ$. An der genannten Stelle wurde die Annahme getroffen, dass die Verschiebungskomponenten im mittleren Radius r_m die getroffenen

Randbedingungen erfüllen.

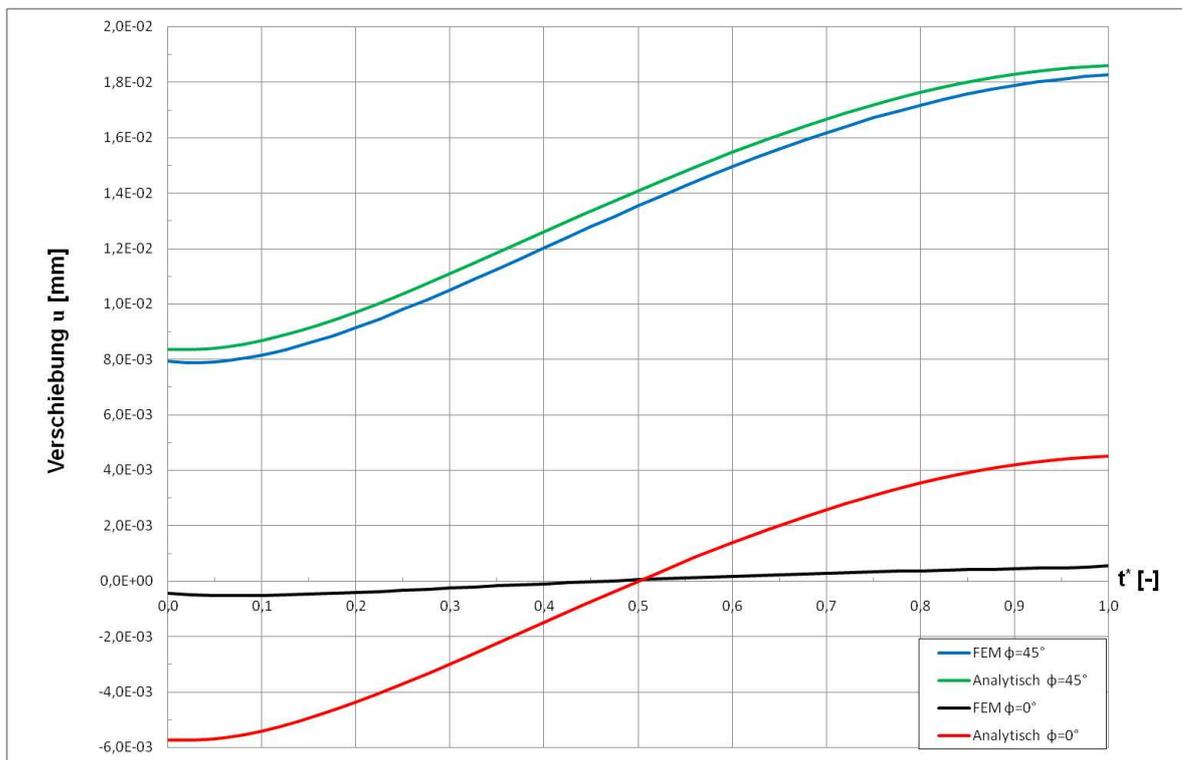


Abbildung 7.5: Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Verschiebung u bei $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 45^\circ$



Abbildung 7.6: Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Verschiebung v bei $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 45^\circ$

Schlussfolgerung

Im Rahmen der getroffenen Annahmen sind die analytisch hergeleiteten Ergebnisse zufriedenstellend. Erst ab einem Anisotropiewert von $s = 4,84$ werden die Abweichungen größer. Eine vollständige Auswertung der Verifikation für weitere Werte s ist der beigefügten CD zu entnehmen.

7.3 Verifikation der Ergebnisse bei der Querkraftbelastung

Die Abbildungen 7.7 bis 7.9 stellen die Verläufe analytischer und numerischer Berechnungen der relevanten Spannungskomponenten an zwei unterschiedlichen Stellen des gekrümmten Bereichs dar. Dabei handelt es sich um die Stellen bei $\varphi = 0^\circ$ und bei $\varphi = 45^\circ$. In einem breiten Bereich der Verläufe der Normalspannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ sind keine signifikanten Unterschiede zwischen den numerischen und den analytischen Ergebnissen an beiden zuvor genannten Stellen zu beobachten. Nahe den Rändern sind an der Stelle $\varphi = 0^\circ$ Unstimmigkeiten in numerischen Verläufen zu beobachten. Das lässt sich durch die Auswirkung der Festeinspannung erklären. Bei den Spannungskomponenten σ_{rr} und $\tau_{r\varphi}$ weisen nur die Ergebnisse an der Stelle $\varphi = 45^\circ$ annähernd gleichen Verlauf auf.

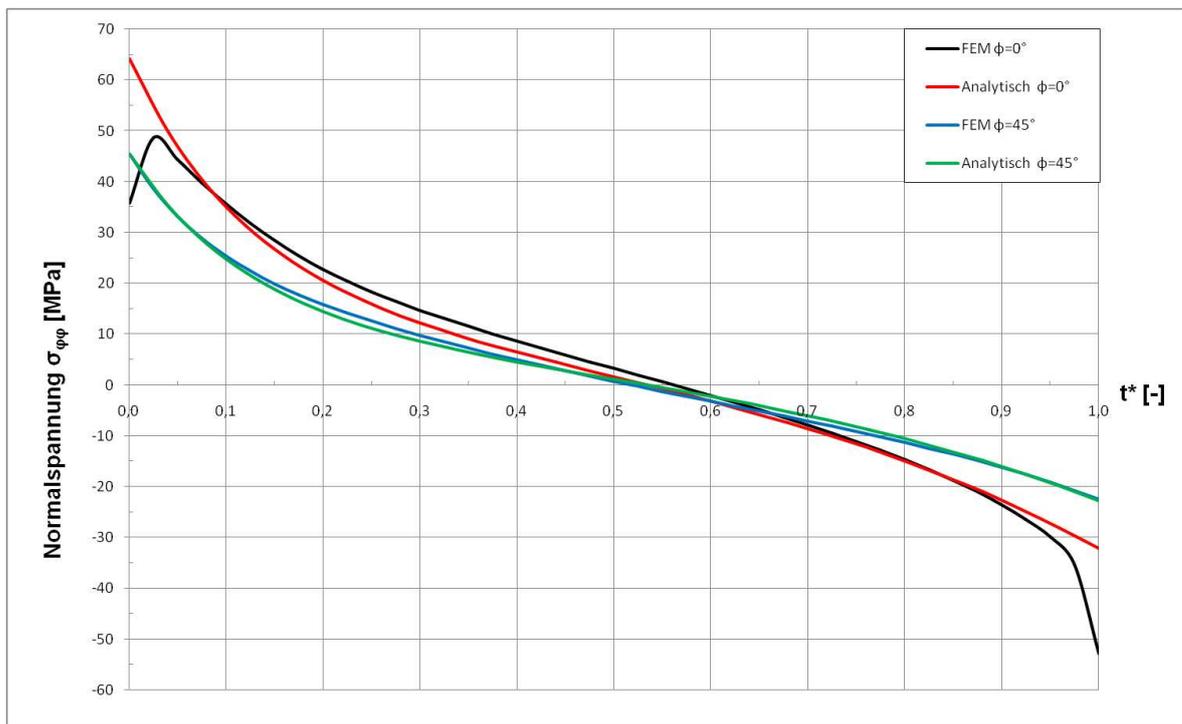


Abbildung 7.7: Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Spannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ an den Stellen $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 45^\circ$ bei einer Querkraftbelastung

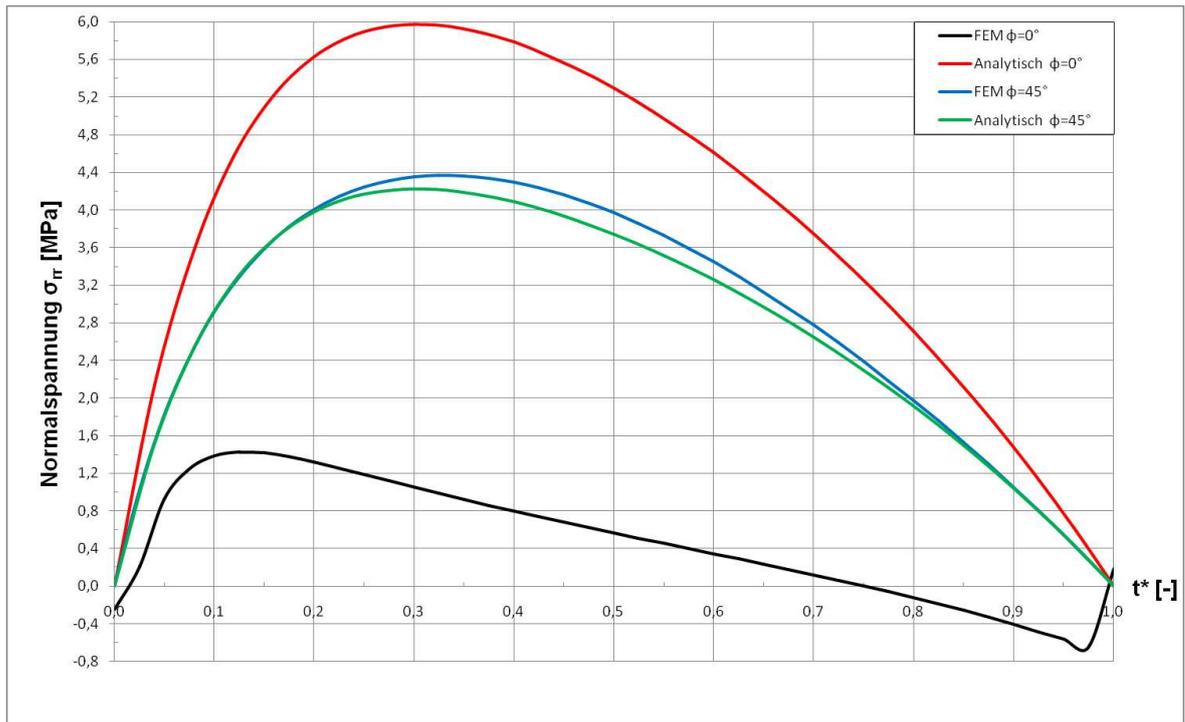


Abbildung 7.8: Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Spannung σ_{rr} an den Stellen $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 45^\circ$ bei einer Querkraftbelastung

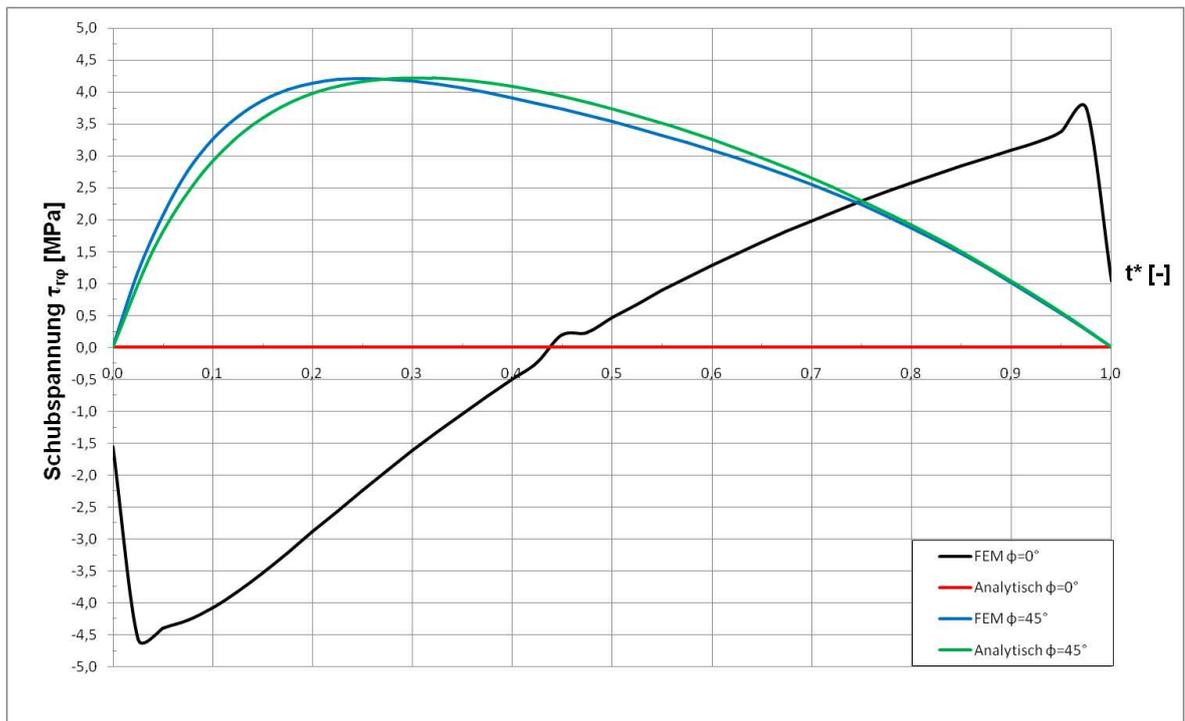


Abbildung 7.9: Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ an den Stellen $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 45^\circ$ bei einer Querkraftbelastung

Bei den Verläufen der Verschiebungen sind Unterschiede in den Verläufen zu beobachten. Diese fallen insbesondere am inneren Rand signifikant aus. Im Vergleich zu den Abweichungen bei den Spannungsverläufen ist eine Steigerung festzuhalten. Das lässt sich durch die gewählte

Vorgehensweise zur analytischen Herleitung der Spannungs- und der Verschiebungsfunktionen erklären.

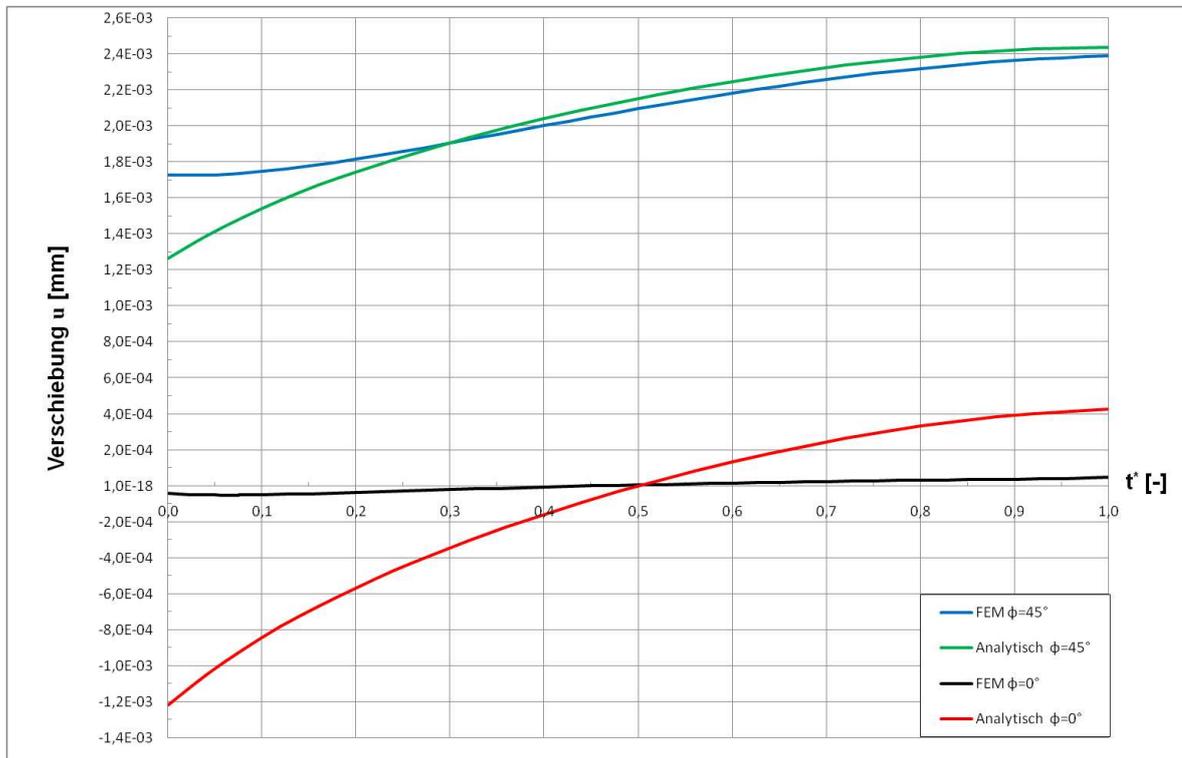


Abbildung 7.10: Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Verschiebung in die Radialrichtung u bei $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 45^\circ$

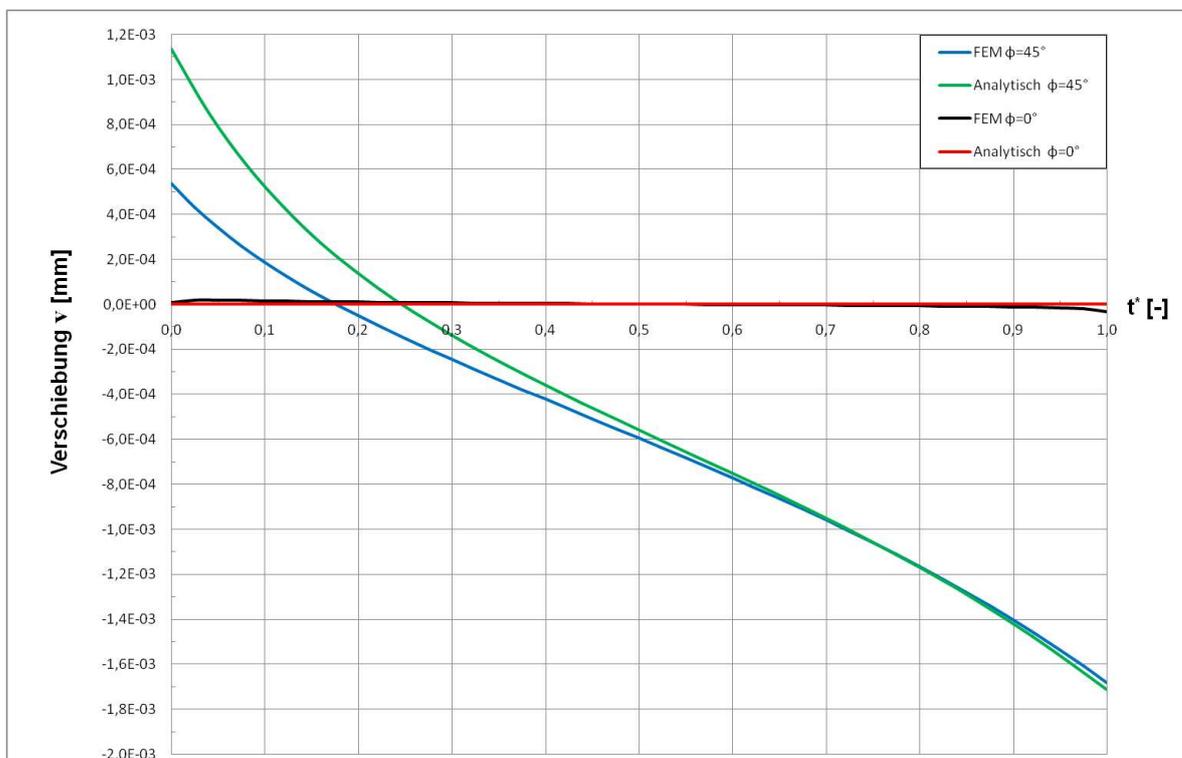


Abbildung 7.11: Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Verschiebung in die Umfangsrichtung v bei $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 45^\circ$

7.4 Verifikation der Ergebnisse bei der Normalkraftbelastung

Die analytische Lösung liefert für $\varphi = 0^\circ$ keine Normalspannungskomponenten, vgl. Abb. 7.12 und Abb. 7.13. Die numerische Lösung liefert hingegen für die erwähnten Spannungskomponenten die Werte ungleich Null. Analyse der genannten Spannungsverläufe liefert, dass die Resultierenden annähernd Null sind. Somit ist diese an das Bauteil gestellte Randbedingung erfüllt. Des Weiteren ist zu beobachten, dass auch an der Stelle $\varphi = 45^\circ$ relativ große Unterschiede in den Verläufen der beiden Berechnungsmethoden vorliegen. Das war in Anlehnung an die Ergebnisse aus dem Kap. 7.2 und Kap. 7.3 nicht zu erwarten. Die Verläufe der Schubspannung $\tau_{r\varphi}$, vgl. Abb. 7.14 sind hingegen bei $\varphi = 45^\circ$ identisch. An der Stelle $\varphi = 0^\circ$ sind jedoch nicht zu vernachlässigbare Abweichungen vorhanden.

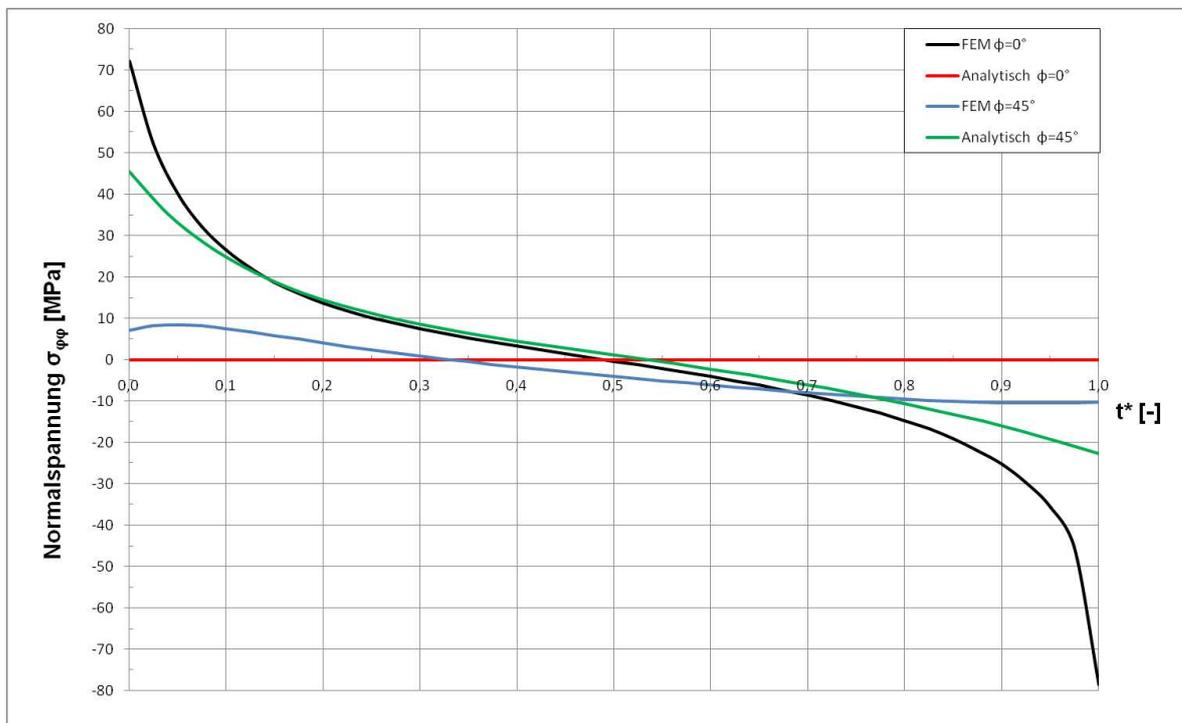


Abbildung 7.12: Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Spannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ an den Stellen $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 45^\circ$ bei einer Normalkraftbelastung

Analog zu den Erkenntnissen aus der Untersuchung der Spannungsverläufe ist bei den Verschiebungskomponenten keine Korrelation der Ergebnisse beider Berechnungsmethoden vorhanden. Die vorliegende Untersuchung weist einen extrem kleinen Krümmungsradius bei einer relativ großer Bauteildicke auf. Das Verhältnis aus dem Krümmungsradius und dem inneren Radius beträgt 1. Zusätzlich wurde eine numerische Untersuchung mit einem Verhältnis von 5 durchgeführt. Durch die Auswertung dieser Ergebnisse wurden keine signifikanten Verbesserung bezüglich der Ergebnisse sowohl der Spannungskomponenten als auch der Verschiebungen festgestellt.

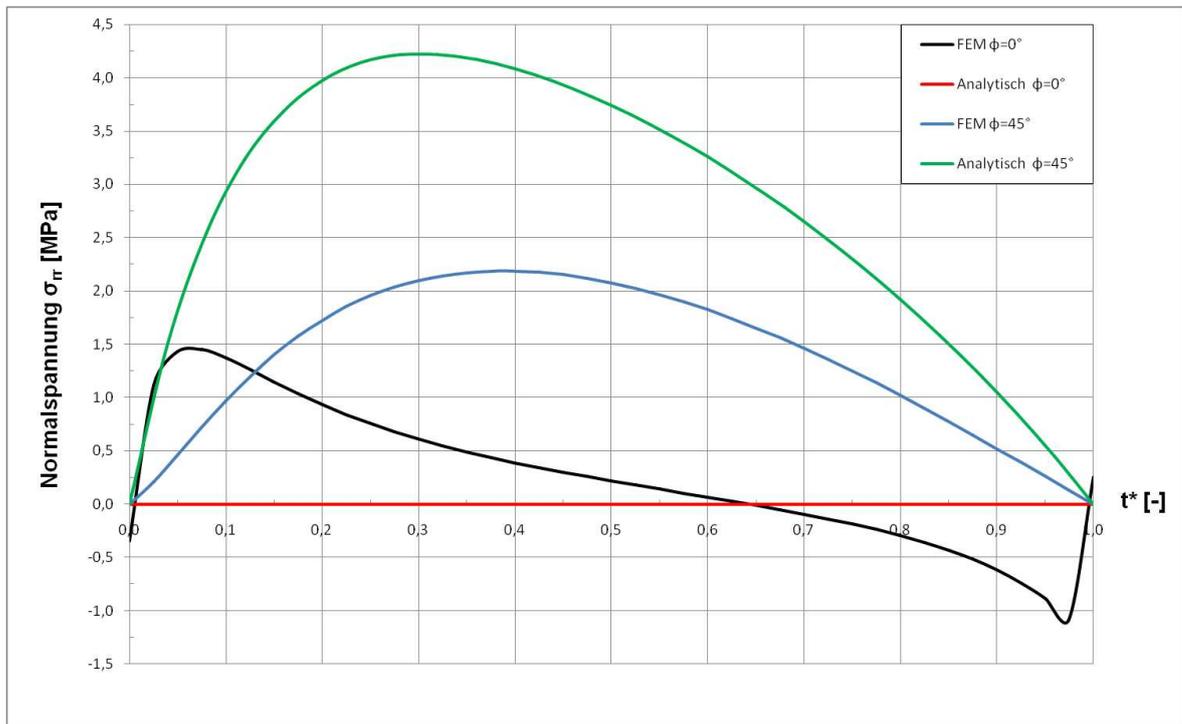


Abbildung 7.13: Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Spannung σ_{rr} an den Stellen $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 45^\circ$ bei einer Normalkraftbelastung

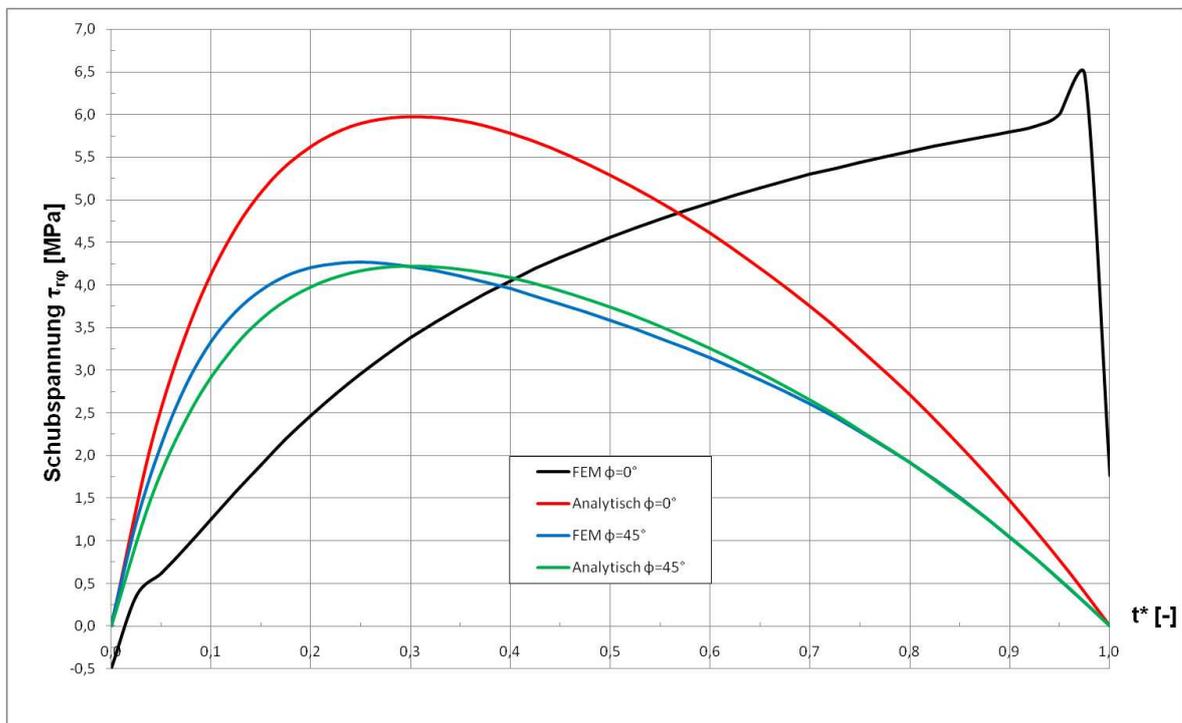


Abbildung 7.14: Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ an den Stellen $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 45^\circ$ bei einer Normalkraftbelastung

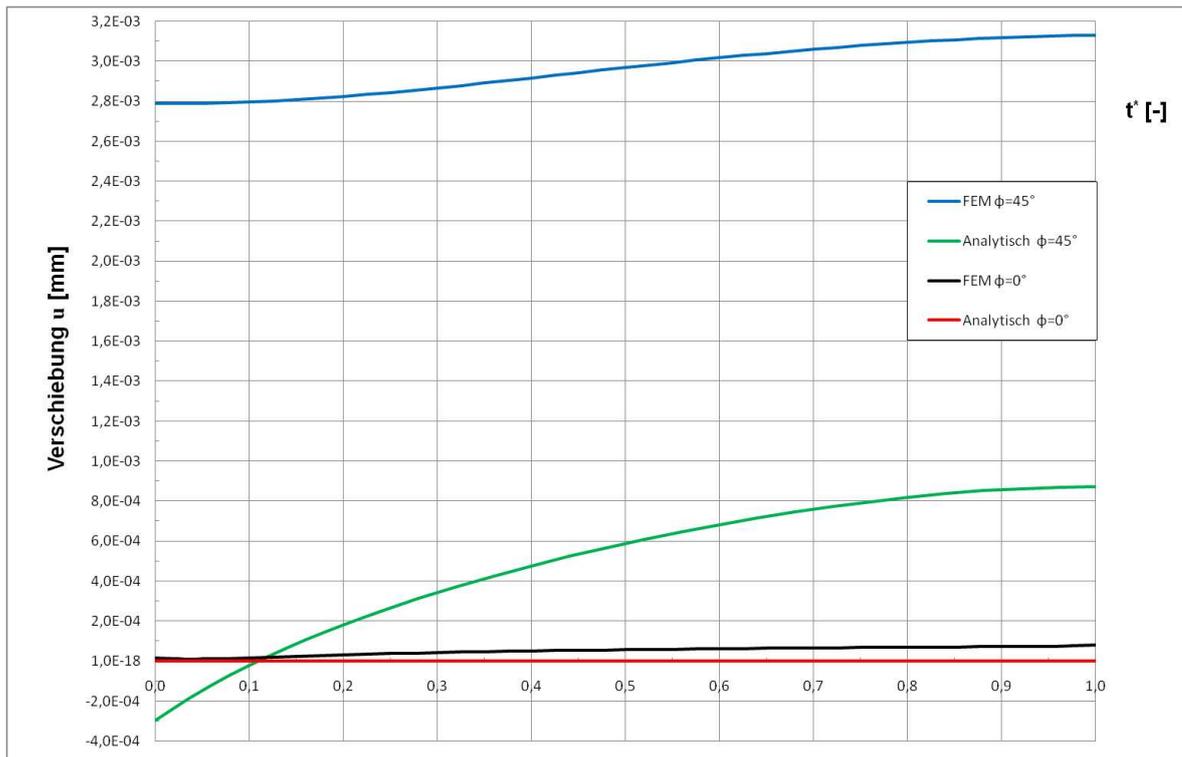


Abbildung 7.15: Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Verschiebung in die Radialrichtung u bei $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 45^\circ$

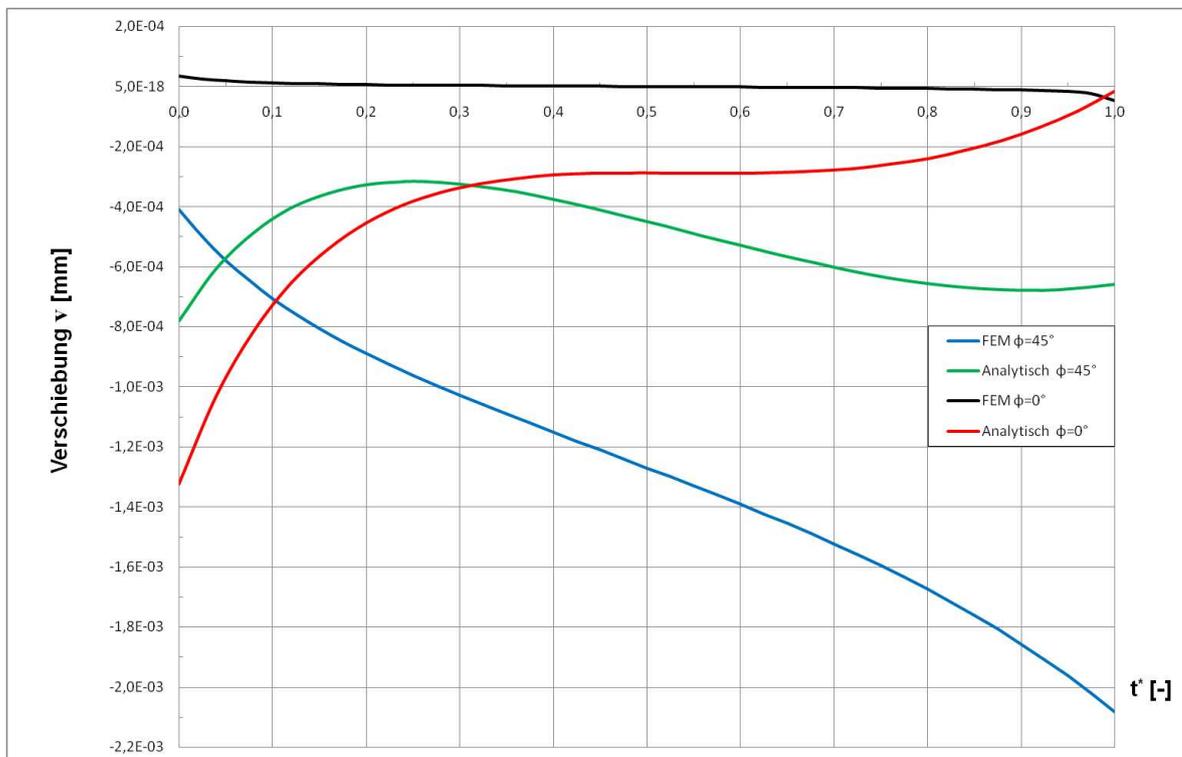


Abbildung 7.16: Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Verschiebung in die Umfangsrichtung v bei $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 45^\circ$

7.5 Verifikation der Ergebnisse bei der Momentenbelastung eines Laminats

Zur Verifizierung der im Kap. 6.4 hergeleiteten Beziehungen zur Bestimmung der Spannungs- und der Verschiebungskomponenten wird ein Laminat untersucht, welches aus zwei UD-Schichten unterschiedlicher Orientierung besteht. Die erste Schicht ($j = 1$) weist dabei einen Faserorientierungswinkel von $\theta = 0^\circ$ auf. Das entspricht der Faserorientierung in die Umfangsrichtung. Bei der zweiten Schicht ($j = 2$) beträgt der Faserorientierungswinkel $\theta = 90^\circ$. Die Faserausrichtung zeigt dabei in die Richtung der z -Achse. Somit beträgt bei der zweiten UD-Schicht der Anisotropiewert $s = 1$, da die Elastizitätsmoduln der quer dazu liegenden Achsen gleich sind. Im Rahmen dieser Ausarbeitung wurde das isotrope Materialverhalten nicht betrachtet. Aus diesem Grund wird in die xy -Ebene der zweiten UD-Schicht eine künstliche Anisotropie eingeführt. Dafür wurde der Elastizitätsmodul mit $E_\varphi = 9000MPa$ angenommen. Der Elastizitätsmodul in die Radialrichtung beträgt weiterhin $E_r = 10000MPa$. Mit dieser Annahme ist es gewährleistet, dass in die Radialrichtung dieselben Steifigkeitswerte wirken.

Aufstellen des Gleichungssystems

Nach den Gleichungen (6.178) und (6.179) verschwinden an der Festeinspannung die Verschiebungskomponenten u und v . Diese Randbedingungen sind für jede Einzelschicht im mittleren Radius zu definieren. Eingesetzt liefern die genannten Randbedingungen folgende Beziehungen:

$$u_{,1}(r_{m,1}, \psi) = 0 = \frac{1}{E_{\varphi,1}} \left[r_{m,1} 2B_{,1} (s_{,1}^2 - \nu_{\varphi r,1}) + (s_{,1} - \nu_{\varphi r,1}) (1 + s_{,1}) C_{,1} r_{m,1}^{s_{,1}} - (s_{,1} + \nu_{\varphi r,1}) (1 - s_{,1}) D_{,1} r_{m,1}^{-s_{,1}} \right] + G_{2,1} \sin(\psi) + G_{3,1} \cos(\psi), \quad (7.6)$$

$$u_{,2}(r_{m,2}, \psi) = 0 = \frac{1}{E_{\varphi,2}} \left[r_{m,2} 2B_{,2} (s_{,2}^2 - \nu_{\varphi r,2}) + (s_{,2} - \nu_{\varphi r,2}) (1 + s_{,2}) C_{,2} r_{m,2}^{s_{,2}} - (s_{,2} + \nu_{\varphi r,2}) (1 - s_{,2}) D_{,2} r_{m,2}^{-s_{,2}} \right] + G_{2,2} \sin(\psi) + G_{3,2} \cos(\psi), \quad (7.7)$$

$$v_{,1}(r_{m,1}, \psi) = 0 = \frac{\psi 2B_{,1} r_{m,1} (1 - s_{,1}^2)}{E_{\varphi,1}} + G_{2,1} \cos(\psi) - G_{3,1} \sin(\psi) + G_{6,1} + G_{4,1} r_{m,1}, \quad (7.8)$$

$$v_{,2}(r_{m,2}, \psi) = 0 = \frac{\psi 2B_{,2} r_{m,2} (1 - s_{,2}^2)}{E_{\varphi,2}} + G_{2,2} \cos(\psi) - G_{3,2} \sin(\psi) + G_{6,2} + G_{4,2} r_{m,2}. \quad (7.9)$$

An dieser Stelle ist es zu erwähnen, dass im Rahmen dieser Betrachtung die Konstanten $G_{6,j}$ nicht vernachlässigt werden. Dafür müssen zwei weitere Randbedingungen definiert werden. Analog der Betrachtung des orthotropen Balkens unter der Momentenbelastung, vgl. Kap. 6.2, kann es gefordert werden folgende Bedingung zu erfüllen:

$$\left. \frac{\partial u_{,j}}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\psi} = 0. \quad (7.10)$$

Zusammen mit der Randbedingung aus der Gleichung (6.180) können folgende Beziehungen angeschrieben werden:

$$\left. \frac{\partial u_{,1}}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\psi} = 0 = G_{2,1} \cos(\psi) - G_{3,1} \sin(\psi) , \quad (7.11)$$

$$\left. \frac{\partial u_{,2}}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\psi} = 0 = G_{2,2} \cos(\psi) - G_{3,2} \sin(\psi) , \quad (7.12)$$

$$\left. \frac{\partial v_{,1}}{\partial r} \right|_{\varphi=\psi} = 0 = \frac{\psi 2B_{,1} (1 - s_{,1}^2)}{E_{\varphi,1}} + G_{4,1} , \quad (7.13)$$

$$\left. \frac{\partial v_{,2}}{\partial r} \right|_{\varphi=\psi} = 0 = \frac{\psi 2B_{,2} (1 - s_{,2}^2)}{E_{\varphi,2}} + G_{4,2} . \quad (7.14)$$

Des Weiteren können an den Schichtgrenzen Übergangsbedingungen definiert werden. In Anlehnung an die Ergebnisse numerischer Untersuchung wird dafür die Stelle $\varphi = 45^\circ$ ausgewählt. Die genannten Übergangsbedingungen geben die Gleichungen (6.182) bis (6.184) wieder. Durch das Einsetzen der relevanten Komponenten gehen diese Gleichungen in folgende Form über:

$$2B_{,1} + (1 + s_{,1}) C_{,1} r_1^{s_{,1}-1} + (1 - s_{,1}) D_{,1} r_1^{-s_{,1}-1} = 2B_{,2} + (1 + s_{,2}) C_{,2} r_1^{s_{,2}-1} + (1 - s_{,2}) D_{,2} r_1^{-s_{,2}-1} , \quad (7.15)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{E_{\varphi,1}} \left[r_1 2B_{,1} (s_{,1}^2 - \nu_{\varphi r,1}) + (s_{,1} - \nu_{\varphi r,1}) (1 + s_{,1}) C_{,1} r_1^{s_{,1}} - (s_{,1} + \nu_{\varphi r,1}) (1 - s_{,1}) D_{,1} r_1^{-s_{,1}} \right] \\ & + G_{2,1} \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) + G_{3,1} \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) = \frac{1}{E_{\varphi,2}} \left[r_1 2B_{,2} (s_{,2}^2 - \nu_{\varphi r,2}) \right. \\ & \left. + (s_{,2} - \nu_{\varphi r,2}) (1 + s_{,2}) C_{,2} r_1^{s_{,2}} - (s_{,2} + \nu_{\varphi r,2}) (1 - s_{,2}) D_{,2} r_1^{-s_{,2}} \right] + G_{2,2} \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \\ & + G_{3,2} \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) , \quad (7.16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\psi B_{,1} r_1 (1 - s_{,1}^2)}{E_{\varphi,1}} + G_{2,1} \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) - G_{3,1} \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) + G_{6,1} + G_{4,1} r_1 = \\ & \frac{\psi B_{,2} r_1 (1 - s_{,2}^2)}{E_{\varphi,2}} + G_{2,2} \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) - G_{3,2} \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) + G_{6,2} + G_{4,2} r_1 . \quad (7.17) \end{aligned}$$

Abschließend müssen aus den Gleichgewichtsgründen die Gleichungen (6.185) bis (6.187) erfüllt werden. Eingesetzt lauten diese wie folgt:

$$0 = 2B_{,2} + (1 + s_{,2}) C_{,2} r_2^{s_{,2}-1} + (1 - s_{,2}) D_{,2} r_2^{-s_{,2}-1} , \quad (7.18)$$

$$0 = 2B_{,1} + (1 + s_{,1}) C_{,1} r_0^{s_{,1}-1} + (1 - s_{,1}) D_{,1} r_0^{-s_{,1}-1} , \quad (7.19)$$

$$\begin{aligned}
-M_f = & B_{,1} (r_1^2 - r_0^2) + s_{,1} C_{,1} (r_1^{s_{,1}+1} - r_0^{s_{,1}+1}) - s_{,1} D_{,1} (r_1^{-s_{,1}+1} - r_0^{-s_{,1}+1}) \\
& + B_{,2} (r_2^2 - r_1^2) + s_{,2} C_{,2} (r_2^{s_{,2}+1} - r_1^{s_{,2}+1}) - s_{,2} D_{,2} (r_2^{-s_{,2}+1} - r_1^{-s_{,2}+1}) . \quad (7.20)
\end{aligned}$$

Auflösen des Gleichungssystems

Analog der Betrachtung des orthotropen Balkens unter einer Momentenbelastung lässt sich schnell zeigen, dass die Integrationskonstanten $G_{6,j}$ zu Null werden. Dafür analysiert man zuerst die Gleichungen (7.11) und (7.12). Danach verschwinden die Konstanten $G_{3,j}$. Voraussetzung dafür ist die Annahme $\psi = 90^\circ$. Die Konstante $G_{6,1}$ lässt sich wie folgt eliminieren:

1. die Gleichung (7.13) nach $G_{4,1}$ umstellen,
2. $G_{4,1}$ in die Gleichung (7.8) einsetzen und vereinfachen.

Bei der Konstante $G_{6,2}$ ist der analoge Weg zu beschreiten. Durch das Eliminieren von vier Konstanten reduziert sich das Gleichungssystem auf zehn Gleichungen mit zehn Unbekannten.

Im Rahmen dieser Arbeit wird darauf verzichtet, das Gleichungssystem symbolisch aufzulösen. Anstelle dessen werden dafür die Geometrie- und Materialwerte eingesetzt. Diese gibt die Tabelle 7.3 wieder. Zum Einsetzen der Daten wird das Berechnungsprogramm Mathcad eingesetzt. Dadurch gewonnenes numerisches Gleichungssystem wird in das Berechnungsprogramm Maple importiert. Abschließend erfolgt mit dem zuletzt genannten Programm das Auflösen des Gleichungssystems. Somit sind die unbekannt Konstanten bestimmt. Die beiden Programmierungen sind der beigefügten CD zu entnehmen.

Berechnungsparameter	Wert
$s_{,1}$	3,5474
$s_{,2}$	0,9484
r_0	10mm
r_1	11,25mm
r_2	12,5mm
$E_{\varphi,1}$	135733MPa
$E_{\varphi,2}$	9043MPa
$\nu_{\varphi r,1}$	0,2126
$\nu_{\varphi r,2}$	0,2126
ψ	90°

Tabelle 7.3: Eingabedaten zum Auflösen des Gleichungssystems

Durch das Einsetzen der berechneten Konstanten lassen sich die Spannungs- und die Verschiebungskomponenten berechnen. Die Abbildungen 7.17 und 7.18 geben die analytischen und die numerischen Verläufe der beiden Spannungskomponenten wieder. Die Analyse der genannten Verläufe zeigt eine deutliche Übereinstimmung der Ergebnisse.

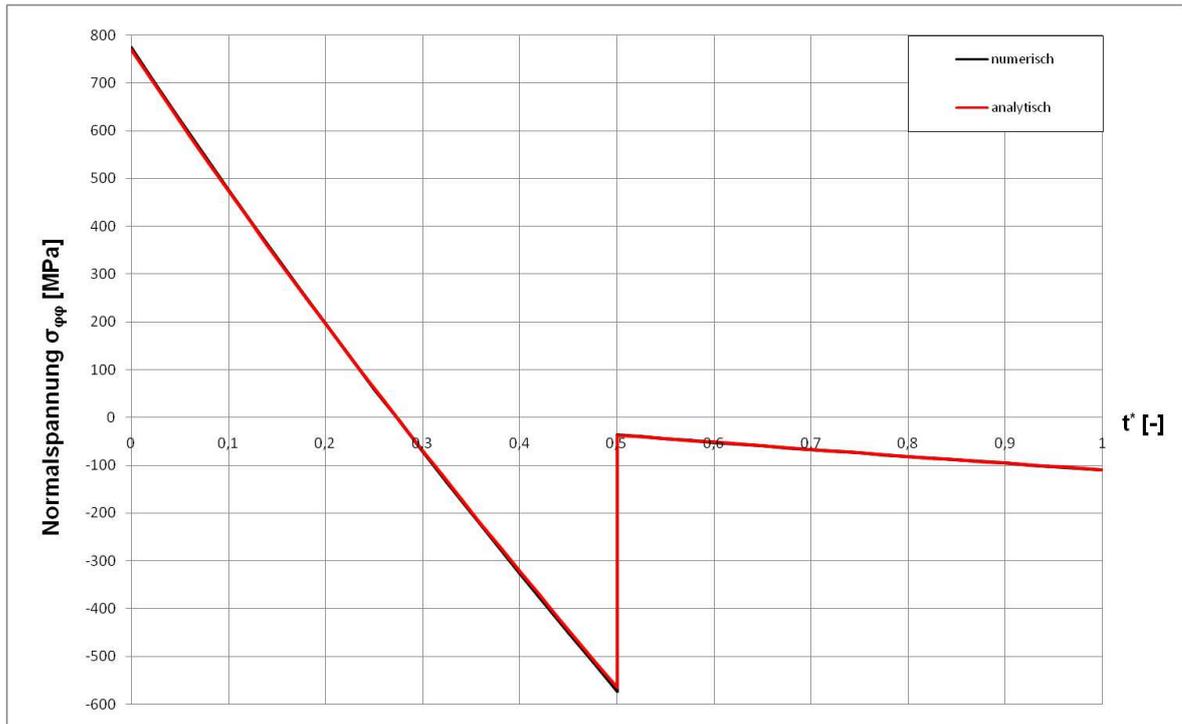


Abbildung 7.17: Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Normalspannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ bei $\varphi = 45^\circ$

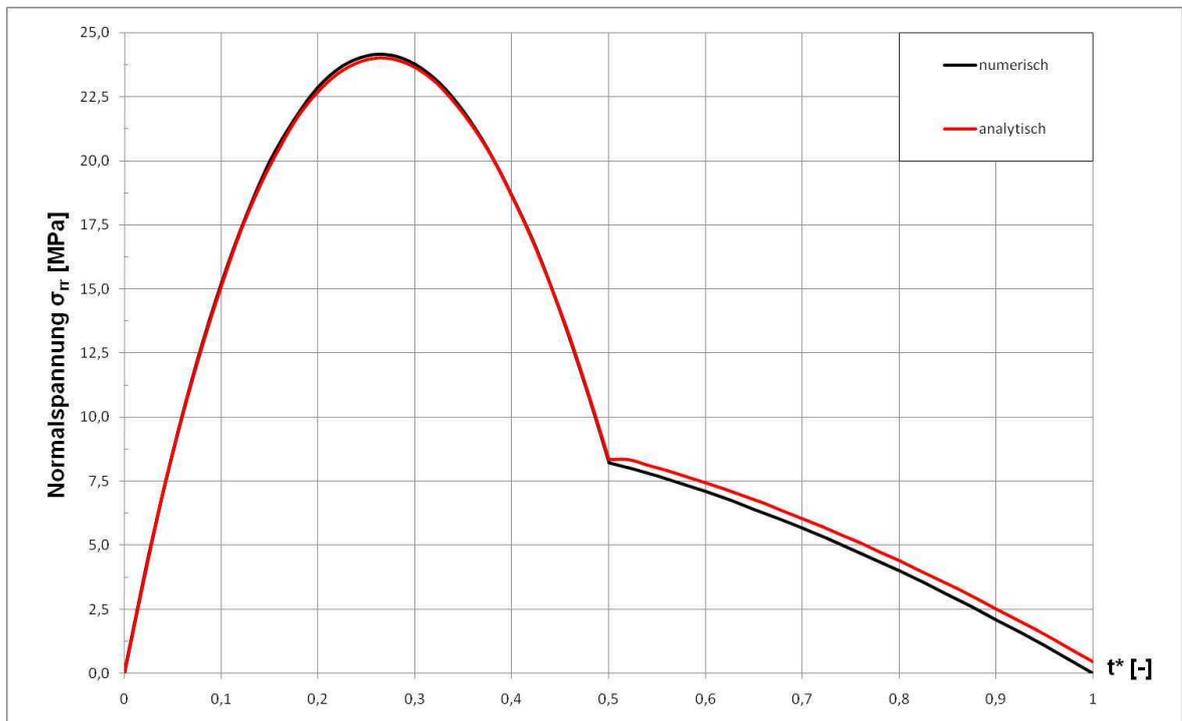


Abbildung 7.18: Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Normalspannung σ_{rr} bei $\varphi = 45^\circ$

Die Abbildungen 7.19 und 7.20 stellen die analytischen und die numerischen Verläufe der Verschiebungen u und v dar. Analog den Verläufen der Spannungskomponenten ist eine deutliche

Korrelation der Ergebnisse festzustellen.

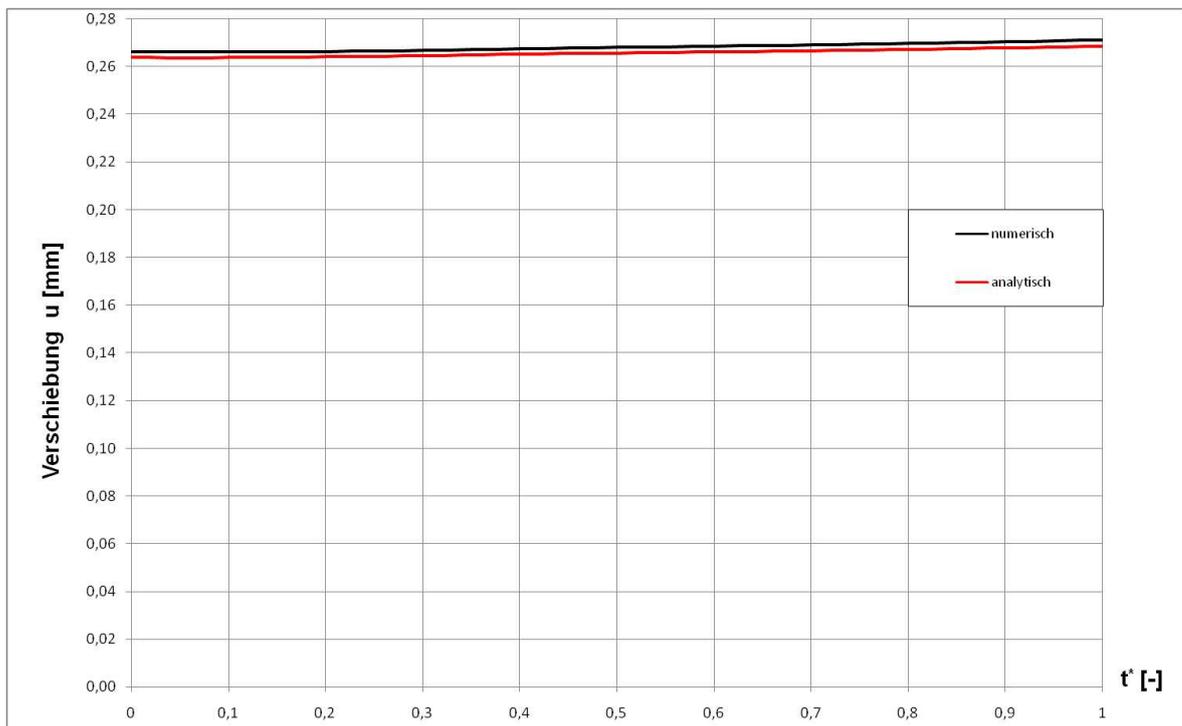


Abbildung 7.19: Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Verschiebung in die Radialrichtung u bei $\varphi = 45^\circ$

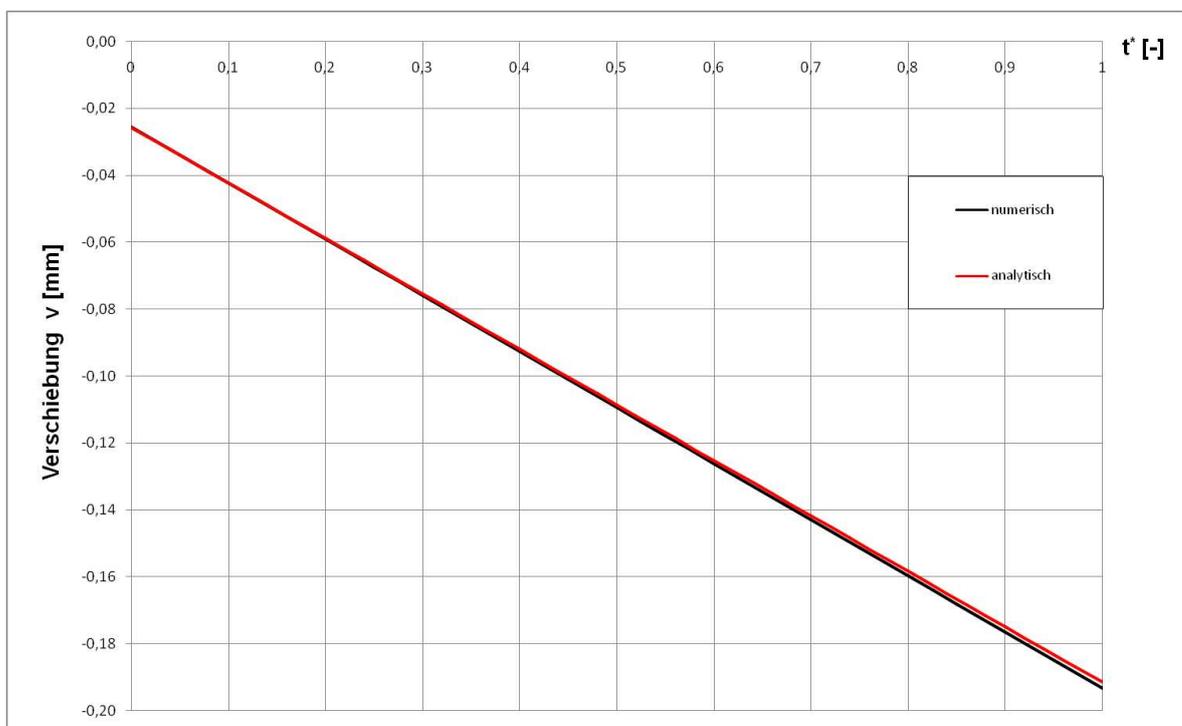


Abbildung 7.20: Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Verschiebung in die Umfangsrichtung v $\varphi = 45^\circ$

8 Zusammenfassung und Ausblick

8.1 Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war numerische und analytische Untersuchung der Spannungsfelder in gekrümmten Composite-Laminat-Strukturen.

Die numerische Untersuchung diente zum einen dem Aufbau des grundlegenden Verständnisses der Mechanik gekrümmter Strukturen. Zum anderen wurden diese Ergebnisse zur Verifizierung der analytischen Ergebnisse herangezogen. Bevor das erfolgen konnte, musste der zu untersuchende Schubwinkel sinnvoll mit dem Berechnungsprogramm ANSYS 11.0 modelliert werden. Im Anschluss an die Modellierung erfolgte die Konvergenzstudie. Diese stellte eine sinnvolle Relation zwischen dem Rechenaufwand und der Genauigkeit her. Die Auswertung der Konvergenzstudie ergab eine Modellierung mit zwei Elementen pro Lage. Im darauffolgenden Kapitel 5 wurden dann unterschiedliche Parameterstudien mit dem numerischen Modell durchgeführt. Dabei wurde nach Antworten auf die Fragestellung gesucht, welche Auswirkung diese Parameter auf den Spannungshaushalt im gekrümmten Bereich haben. Die anschließende Auswertung der numerischen Berechnungsergebnisse hat gezeigt, dass vor allem die Krümmung zu signifikanten Einflüssen auf die Spannungsverteilung führt. Bei der Betrachtung des Anisotropiewertes fällt die Auswirkung deutlich kleiner aus. Des Weiteren wurde gezeigt, dass in den Übergangsbereichen (Übergang von den Flanschen zum Bogensegment) der Einfluss der Randstörung auf die Spannungsverteilung nicht vernachlässigbar ist.

Der zweite Hauptteil dieser Ausarbeitung befasste sich mit der Herleitung der Spannungs- und Verschiebungsfunktionen in gekrümmten Strukturen. Dafür wurde die Airysche Spannungsfunktion herangezogen. Als erstes wurden die gekrümmten orthotropen Strukturen untersucht. Aus den Gründen der Linearität des Strukturverhaltens, wonach das Superpositionsprinzip angewandt werden darf, konnten für die relevanten Belastungsfälle (Momentenbelastung, Randkraft) die gesuchten Komponenten für die Spannungen und die Verschiebungen einzeln hergeleitet werden. Zum Abschluss dieses Kapitels erfolgten analoge Herleitungen der Spannungs- und Verschiebungsfunktionen von Laminaten unter Momentenbelastung. Diese Lamine bestehen aus orthotropen UD-Schichten unterschiedlicher Ausrichtung. Aus diesem Grund war es möglich, auf die zuvor hergeleiteten Beziehungen für orthotrope gekrümmte Strukturen zurückzugreifen.

Nachdem die analytische Herleitung abgeschlossen war, fand der Vergleich mit den numerischen Ergebnissen statt. Bevor ein sinnvoller Vergleich erfolgen konnte, mussten zuerst die Materialparameter aus dem ebenen Spannungszustand in den ebenen Verzerrungszustand über die Ersatzgrößen der Nachgiebigkeitsmatrix gewonnen werden. Die anschließende Aus-

wertung beider Berechnungsmethoden hat eine deutliche Übereinstimmung der Ergebnisse unter der Momentenbelastung stehender Strukturen gezeigt. Das betrifft sowohl die orthotropen als auch die orthotropen geschichteten Strukturen. Zur Verifizierung der Ergebnisse für eine Randkraft wurde diese in zwei Komponenten zerlegt: in eine Normalkraft N und eine Querkraft Q . Bei der Betrachtung der Querkraft wurde eine deutliche Korrelation der Ergebnisse von beiden Berechnungsmethoden festgestellt. Bei der Auswertung der Ergebnisse mit der Normalkraft sind hingegen nicht zu vernachlässigbare Unterschiede zu beobachten.

8.2 Ausblick

Es sind weitere Studien denkbar, die direkt an diese Master-Arbeit anknüpfen könnten.

Die Arbeit zeigt deutlich, dass insbesondere die geometrischen Einflussfaktoren (Krümmung, Geometrieänderung) einen maßgeblichen Einfluss auf den Spannungshaushalt haben. Zudem sollten folgende Punkte eingehender untersucht werden:

- der Einfluss des Öffnungswinkels des Bauteils,
- Untersuchung und Optimierung des Lagenaufbaus bei geschichteten Strukturen,
- Untersuchung von Lagenaufbauten, die aus Gewebeschichten bestehen,

Bei der Verifizierung der Ergebnisse der gekrümmten orthotropen Strukturen, die mit einer Normalkraft belastet sind, wurden in den Verläufen der Spannungs- und Verschiebungskomponenten nicht zu vernachlässigbare Abweichungen festgestellt. Diese Ergebnisse waren in Anlehnung an die durchgeführte Verifizierung für orthotrope gekrümmte unter der Querkraftbelastung stehender Lamine nicht zu erwarten.

Die hergeleiteten Funktionen zur Berechnung von Spannungen und Verschiebungen müssen für geschichtete Lamine, die mit einer Randkraft belastet sind, erweitert werden. Abschließend sind diese Ergebnisse zu verifizieren oder auch nach Möglichkeit zu validieren. Das Letztere betrifft die in dieser Arbeiten erzielten Ergebnisse. Die vorliegende Arbeit untersuchte ausschließlich gekrümmte Strukturen. Aus diesem Grund ist eine vollständige Beschreibung des Spannungshaushaltes im gesamten Schubwinkel nicht möglich. Somit müssen für die geraden Bereiche (Flansche) die Spannungs- und die Verschiebungsfunktionen in kartesischen Koordinaten hergeleitet und verifiziert werden. Abschließend sind die beiden Lösungsmethoden miteinander zu koppeln. Dafür sind in den Übergangsbereichen die Übergangsbedingungen aufzustellen. Diese Randbedingungen müssen dabei so formuliert werden, dass die Randstörung mitberücksichtigt wird. Alternativ können zusätzlich Abklingfunktionen in den Übergangsbereichen definiert und bestimmt werden. Die Untersuchung der Randstörung ergab, dass deren Auswirkung sehr schnell abklingt. Um das mathematisch berücksichtigen zu können, werden streng monoton fallende Funktionen benötigt. Die genannte Eigenschaft können dabei unter anderem folgende Funktionen aufweisen:

- Exponentialfunktion,

- Potenzfunktionen mit negativem Exponenten,
- Logarithmusfunktionen.

Bei den genannten Funktionen kann durch die entsprechende Definition der Parameter das Abklingen in einem kleinen Bereich erreicht werden.

Literaturverzeichnis

- [1] Bathe K: *Finite-Elemente-Methode, 2. Auflage*. Springer -Verlag Berlin et al., 2002.
- [2] Blumer H: *Spannungsberechnungen an anisotropen Kreisbogenscheiben und Sattelträgern konstanter Dicke. Forschungsbericht*. Lehrstuhl für Ingenieurholzbau und Baukonstruktionen der Universität (TH) Karlsruhe. Karlsruhe 1972/1979.
- [3] Eschenauer H, Schnell W: *Elastizitätstheorie - Grundlagen, Flächentragwerke, Strukturoptimierung, 3. Auflage*. Wissenschaftsverlag Mannheim Leipzig Wien Zürich et al., 1993.
- [4] Girkmann, K: *Flächentragwerke: Einführung in die Elastostatik der Scheiben, Platten, Schalen und Faltwerke, 6. Auflage*. Springer-Verlag Wien New York et al., 1978.
- [5] Gross D, Hauger W, Schröder J, Wall W: *Technische Mechanik 2 - Elastostatik, 10. Auflage*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg et al., 2009.
- [6] Gross D, Hauger W, Wriggers P: *Technische Mechanik 4 - Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden, 7. Auflage*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg et al., 2009.
- [7] Lekhnitskii, S. G.: *Anisotropic Plates*. Gordon and Breach Science Publication, New York London et al., 1978.
- [8] Mittelstedt C: *Berechnung anisotroper Strukturen mit Hilfe von Spannungsfunktionen. Entwurfsversion 2011*. LTH Faserverbund-Leichtbau.
- [9] Mittelstedt C, Becker W: *Strukturmechanik ebener Laminate*. Börsen / Darmstadt, Buchmanuskript, im Druck, 2011.
- [10] Müller G, Groth C: *FEM für Praktiker - Band 1: Grundlagen, 7. Auflage* Expert-Verlag Renningen-Malmsheim et al., 2002.
- [11] Nast E: *Faserverbundtechnologie. Kompendium zur Vorlesung*. Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg, 2009.
- [12] N.N. *Release 11.0 Documentation for ANSYS*.
- [13] Papula L: *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler - Band 2, 12. Auflage*. Vieweg-Verlag Wiesbaden et al., 2007.
- [14] Pestel E, Wittenburg J: *Technische Mechanik - Festigkeitslehre, 2. Auflage*. Wissenschaftsverlag Mannheim et al., 1991.

-
- [15] Schürmann H: *Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden, 2. Auflage*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg et al., 2007.
- [16] Timoshenko S, Goodier J.N.: *Theory of Elasticity 2. Edition*. Engineering Societies Monographs 2, New York London et al., 1951.
- [17] Zienkiewicz O: *Methode der finiten Elemente, 2. Auflage*. Hanser-Verlag München Wien et al., 1984.

A APDL-Skript zur Modellierung eines L-Winkels mit ANSYS 11.0

Anmerkung: die Zeilen, die mit einem Ausrufezeichen beginnen werden von ANSYS als Kommentar angesehen.

A.1 Modellierung

! 0. Start der Modellierung

```
!*****
FINISH
/CLEAR,NOSTART
VARIANT = 'plane_82_02'
/filename,L - ANGLE_1_DB_%VARIANT%,1
```

! 1. PRE-PROCESSING

```
!*****
/prep7
csys,0
```

! 1.1 Definition der Parameter

! 1.1.1 Die Geometrieparameter

```
pi = acos(-1)
! Bestimmung der Kreiszahl
Ri = 2.5
! Der innere Radius in [mm]
R = Ri
l_1 = 25
! Die Länge des 1. Flansches in [mm]
l_2 = 25
! Die Länge des 2. Flansches in [mm]
t = 2.5
! Die Bauteildicke in [mm]
b = 30
! Die Bauteillänge in [mm]
phi = 90
```

! Der Öffnungswinkel in [°]

$n_ply = 20$

! Anzahl der Lagen

$t_ply = 0.125$

! Die Lagendicke in [mm]

! 1.1.2 Die Zusatzparameter

$phirad = phi * pi / 180$

$phibog = (90 - phi) * pi / 180$

$n_el = 2$

! Anzahl der Elemente pro Lage

$n_pl = n_ply * n_el$

$t_pl = t_ply / n_el$

$nn = n_ply * n_el$

$d = t_ply / n_el$

! Die Elementgröße in [mm]

$d = size$

$gamma = size / (R + t_pl / 2)$

! Die Elementgröße in der Mitte des gekrümmten Bereiches in [mm]

$sizea = gamma * R$

! Die Elementgröße am inneren Rand des gekrümmten Bereiches in [mm]

$sizea = gamma * (R + t_pl)$

! Die Elementgröße am äußeren Rand des gekrümmten Bereiches in [mm]

$s = 3.67$

! Steifigkeitsparameter

! 1.1.3 Definition des Lagenaufbaus

$orient1 = 1000$

$orient2 = 1000$

$orient3 = 1000$

$orient4 = 1000$

$orient5 = 1000$

$orient6 = 1000$

$orient7 = 1000$

$orient8 = 1000$

$orient9 = 1000$

$orient10 = 1000$

$orient11 = 1090$

$orient12 = 1090$

$orient13 = 1090$

$orient14 = 1090$

$orient15 = 1090$

```
orient16 = 1090
```

```
orient17 = 1090
```

```
orient18 = 1090
```

```
orient19 = 1090
```

```
orient20 = 1090
```

! 1.1.4 Definition der lokalen Koordinatensysteme

```
local, 11, 0, 0, 0, 0, -90
```

```
local, 12, 0, l_1+(R*cos(phibog))+l_2*sin(phibog), R*(1-sin(phibog))+l_2*cos(phibog),
```

```
local, 13, 0, l_1+(R*cos(phibog)), R*(1-sin(phibog)), 0, (phi-90)
```

```
local, 14, 1, l_1, R, 0, -90
```

! 1.1.5 Definition der Lasten

```
F = 10
```

```
M = 400
```

! 1.1.6 Definition der Materialparameter

! 1.1.6.1 Definition der Materialparameter von Aluminium

```
Ea = 70000
```

```
! Der Elastizitätsmodul in [MPa]
```

```
PRa = 0.3
```

```
! Die Querkontraktionszahl
```

! 1.1.6.2 Definition der Materialparameter für Balkenelemente

```
Eb = 10e8
```

```
! Der Elastizitätsmodul in [MPa]
```

! 1.2 Erstellen der Geometrie

! 1.2.1 Generieren der Keypoints

```
csys, 11
```

```
* do, i, 1, n_pl + 1, 1
```

```
k, ,(i-1)) * t_pl, 0, 0
```

```
k_%100 + (i-1)% = _return
```

```
* enddo
```

```
csys, 11
```

```
* do, i, 1, n_pl + 1, 1
```

```
k, ,(i-1)) * t_pl, l_1, 0
```

```
k_%200 + (i-1)% = _return
```

```
* enddo
```

```
csys, 13
```

```

*do, i, 1, n_pl + 1, 1
k, , (i - 1) * t_pl, 0, 0
k_%300 + (i - 1)% = _return
*enddo

```

```

csys, 12
*do, i, 1, n_pl + 1, 1
k, , (i - 1) * t_pl, 0, 0
k_%400 + (i - 1)% = _return
*enddo

```

! 1.2.2 Generieren der Linien

```

*do, i, 1, n_pl + 1, 1
lstr, k_100 + (i - 1), k_200 + (i - 1)
l_%100 + (i - 1)% = _return
*enddo

```

```

*do, i, 1, n_pl, 1
lstr, k_100 + (i - 1), k_100 + (i)
l_%400 + (i - 1)% = _return
*enddo

```

```

*do, i, 1, n_pl, 1
lstr, k_200 + (i - 1), k_200 + (i)
l_%500 + (i - 1)% = _return
*enddo

```

```

*do, i, 1, n_pl + 1, 1
lstr, k_300 + (i - 1), k_400 + (i - 1)
l_%300 + (i - 1)% = _return
*enddo

```

```

*do, i, 1, n_pl, 1
lstr, k_300 + (i - 1), k_300 + (i)
l_%600 + (i - 1)% = _return
*enddo

```

```

*do, i, 1, n_pl, 1
lstr, k_400 + (i - 1), k_400 + (i)
l_%700 + (i - 1)% = _return
*enddo

```

```

csys,14
k,,0,0,0
cs = _return

```

```

*do,i,1,n_pl+1,1
larc,k_200+(i-1),k_300+(i-1),cs,R+(i-1)*t_pl
l_%200+(i-1)% = _return
*enddo

```

! 1.2.3 Generieren der Flächen

```

*do,i,1,n_pl,1
al,l_100+(i-1),l_500+(i-1),l_100+(i),l_400+(i-1)
a_%100+i% = _return
*enddo

```

```

*do,i,1,n_pl,1
al,l_300+(i-1),l_700+(i-1),l_300+(i),l_600+(i-1)
a_%300+i% = _return
*enddo

```

```

*do,i,1,n_pl,1
al,l_200+(i-1),l_600+(i-1),l_200+(i),l_500+(i-1)
a_%300+i% = _return
*enddo

```

```

asel,all

```

! 1.3 Vernetzung

! 1.3.1 Zuweisung der Materialeigenschaften

```

mp,ex,1,Ea
mp,prxy,1,PRa

```

```

mp,ex,2,Eb
mp,prxy,2,PRa

```

```

mp,ex,1000,10000
mp,ey,1000,135000
mp,ez,1000,10000
mp,prxy,1000,0.02
mp,pryz,1000,0.27
mp,prxz,1000,0.27
mp,gxy,1000,5000

```

```
mp, gyz, 1000, 5000
```

```
mp, gxz, 1000, 4000
```

```
mp, ex, 1090, 10000
```

```
mp, ey, 1090, 9000
```

```
mp, ez, 1090, 135000
```

```
mp, prxy, 1090, 0.27
```

```
mp, pryz, 1090, 0.018
```

```
mp, prxz, 1090, 0.02
```

```
mp, gxy, 1090, 4000
```

```
mp, gyz, 1090, 5000
```

```
mp, gxz, 1090, 5000
```

! 1.3.2 Elemente

```
et, 2, beam3
```

```
keyopt, 2, 6, 0
```

```
keyopt, 2, 9, 0
```

```
keyopt, 2, 10, 0
```

```
r, 2, 0.01, 8.3e - 6, 0.1
```

```
et, 3, plane82
```

```
keyopt, 3, 3, 2
```

! 1.3.3 Aufteilen der Linien

```
*do, i, 1, n_pl + 1, 1
```

```
lesize, l_100 + (i - 1), size
```

```
*enddo
```

```
*do, i, 1, n_pl + 1, 1
```

```
lesize, l_100 + (i - 1), size
```

```
*enddo
```

```
sizearc = d / (R + (t_pl * n_pl / 2))
```

```
*do, i, 1, n_pl + 1, 1
```

```
lesize, l_200 + (i - 1), sizearc * (R + (i - 1) * t_pl)
```

```
*enddo
```

```
*do, i, 1, n_pl + 1, 1
```

```
lesize, l_300 + (i - 1), size
```

```
*enddo
```

```
*do,i,1,n_pl,1  
lesize,l_400+(i-1),size  
*enddo
```

```
*do,i,1,n_pl,1  
lesize,l_500+(i-1),size  
*enddo
```

```
*do,i,1,n_pl,1  
lesize,l_600+(i-1),size  
*enddo
```

```
*do,i,1,n_pl,1  
lesize,l_700+(i-1),size  
*enddo
```

! 1.3.4 Vernetzen der Flächen

```
type,3  
mat,1  
esys,0  
csys,0  
asel,all
```

```
*do,i,1,n_pl,1  
amesh,a_%100+i%  
amesh,a_%200+i%  
amesh,a_%300+i%  
*enddo
```

```
esel,all  
allsel,below,elem
```

! 1.4 Modifikation der Elemente

! 1.4.1 Selektieren der Elemente zu einer Schicht

```
*do,i,1,n_pl,1  
nselect,all  
csys,0  
nselect,r,loc,x,-0.1,l_1  
nselect,r,loc,y,-(i-1)*t_ply,-i*t_ply  
esln,,1  
esel,r,type,,3  
cm,ply_e_%100+i%,elem
```

```

* enddo

*do, i, 1, n_pl, 1
  nsel, all
  csys, 14
  nsel, s, loc, y, 0, phi
  nsel, r, loc, x, ((i - 1) * t_ply) + R, (i * t_ply) + R
  esln, , 1
  esel, r, type, , 3
  cm, ply_e_%200 + i%, elem
* enddo

```

```

*do, i, 1, n_pl, 1
  nsel, all
  csys, 13
  nsel, s, loc, y, 0, l_2
  nsel, r, loc, x, (i - 1) * t_ply, i * t_ply
  esln, , 1
  esel, r, type, , 3
  cm, ply_e_%300 + i%, elem
* enddo

```

```

*do, i, 1, n_pl, 1
  esel, s, elem, , ply_e_%100 + i%
  esel, a, elem, , ply_e_%200 + i%
  esel, a, elem, , ply_e_%300 + i%
  cm, ply_%i%, elem

```

! 1.4.2 Transformieren der Koordinatensysteme der Elemente

```

esel, , type, , 3
allsel, below, elem
csys, 0
nsel, s, loc, x, -0.1, l_1 + 0.001
esln, s, 1
emodif, all, esys, 11

```

```

esel, , type, , 3
allsel, below, elem
csys, 14
nsel, s, loc, y, -0.01, phi + 0.01
esln, s, 1
emodif, all, esys, 14

```

```

esel, , type, , 3
allsel, below, elem
csys, 13
nsel, s, loc, y, -0.1, l_2 + 0.001
esln, s, 1
emodif, all, esys, 13

```

```

esel, , type, , 3
allsel, below, elem

```

! 1.4.3 Modifizieren der Materialeigenschaften der Elemente

```

*do, i, 1, n_pl/2, 1
cmsel, , ply_%i%
allsel, below, elem
emodif, all, mat, orient%i%
*enddo

```

! 1.5 Definieren der Randbedingungen und der Lasten

! 1.5.1 Definieren der Randbedingungen

```

nsel, all
csys, 0
nsel, , loc, x, (t_pl / (n_el * 3)), -0.1

d, all, ux, 0
d, all, uy, 0

```

! 1.5.2 Aufbringen der Lasten

```

alls
allsel, below, elem
nsel, all
csys, 12
*get, nodenumber, node, num, count
n, nodenumber + 1, t_pl * n_pl / 2, 0.01, ,
nrotat, nodenumber + 1

```

```

type, 2
mat, 2
real, 2
secnum, 2
esys,

```

```

*do,i,1,2*nn+1,1
nselect,s,loc,y,+0.001,-0.001
nselect,r,loc,x,(d)*(2*i-3)/4,(d)*(2*i-1)/4
*get,nodenum_i,node,,num,max
nselect,a,node,,nodenum_i+1
nodenum_i = nodenum_i
e,nodenum_i+1,nodenum_i
*enddo

```

```

f,nodenum_i+1,fx,F
f,nodenum_i+1,mz,M
f,nodenum_i+1,fy,-F

```

! 1.6 Speichern der Modellierung

```

esel,all
esel,,type,,3
esel,a,type,,2
allsel,below,elem
save,L-ANGLE_1_DB_%VARIANT%,db,,
save,L-ANGLE_1_SOL_%VARIANT%,db,,

```

```
finish
```

A.2 Berechnung

```

finish
/CLEAR,NOSTART
VARIANT = 'plane_82_02'
resume,L-ANGLE_1_SOL_%VARIANT%,db
/filename,L-ANGLE_2_SOL_%VARIANT%,1
/solu
antype,static
solve

```

```
finish
```

A.3 Auswertung

```

alls
esel,all
esel,r,type,,3
allsel,below,elem

```

nsle, r, corner

csys, 14

nsl, r, loc, y, 44, 45

nplot

rsys, 14

dsys, 14

nlist, all, coord, node

prnsol, s

prnsol, u

B Parameterstudien mit dem numerischen Modell unter einer Normalkraftbelastung

B.1 Untersuchung der Auswirkung der Randstörung auf den Spannungshaushalt unter einer Normalkraftbelastung

Die nachstehenden Abbildungen zeigen die Auswirkung der Randstörung auf den Spannungshaushalt unter einer Normalkraftbelastung. Es werden die Spannungsverläufe über dem gesamten Bogenbereich dargestellt.

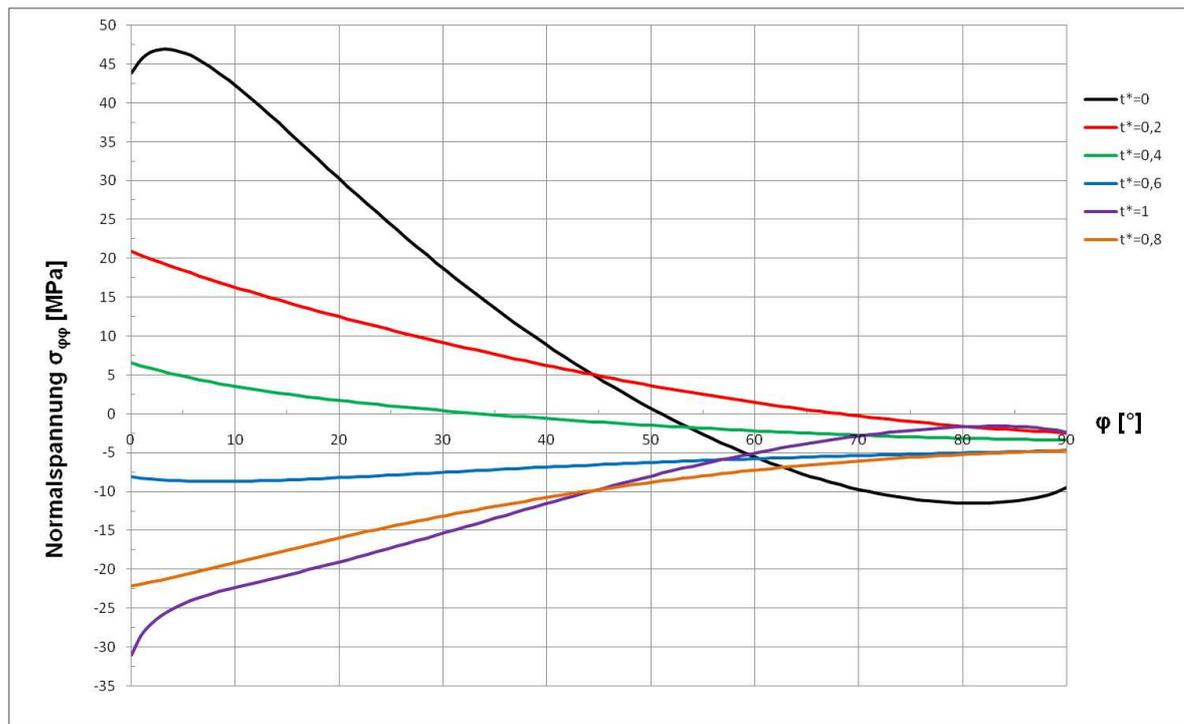


Abbildung B.1: Verlauf der Normalspannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ über dem gesamten Bogenbereich

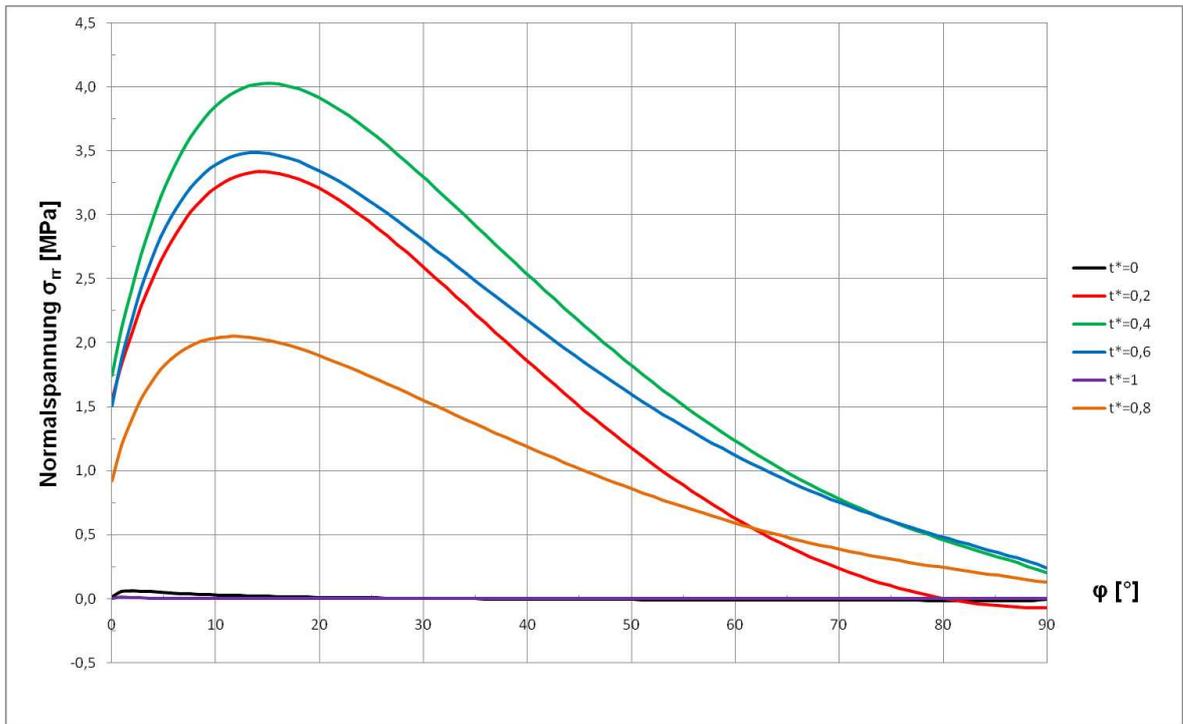


Abbildung B.2: Verlauf der Normalspannung σ_{rr} über dem gesamten Bogenbereich

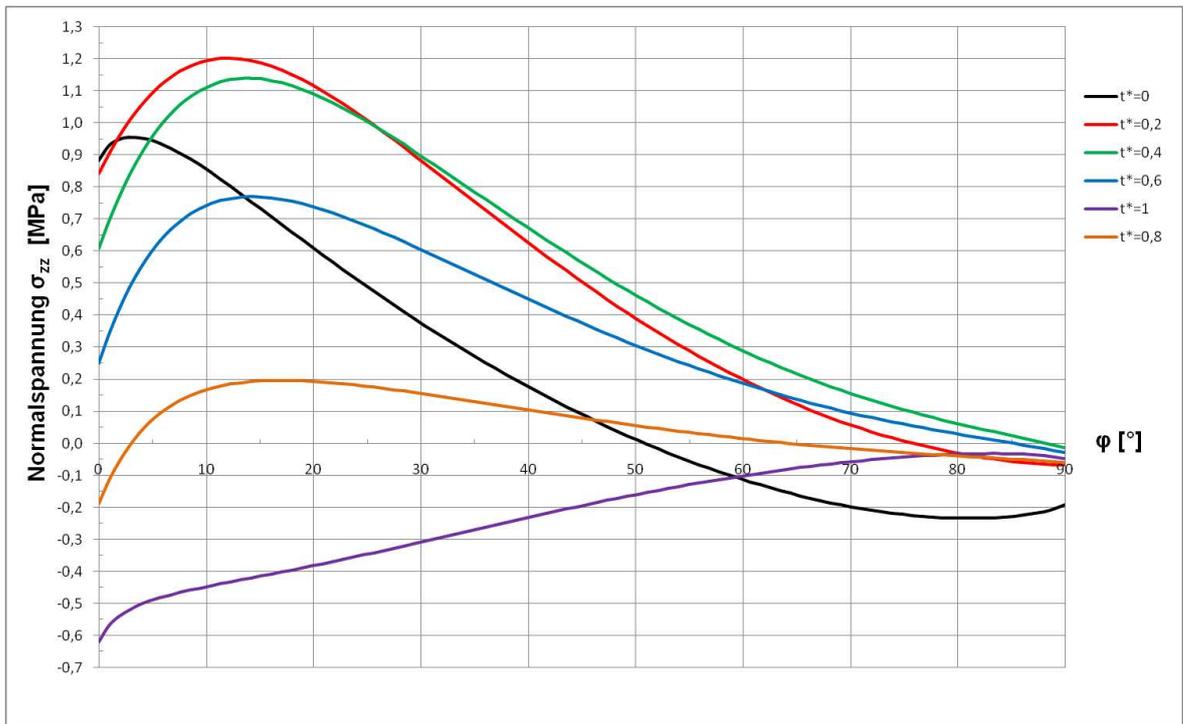


Abbildung B.3: Verlauf der Normalspannung σ_{zz} über dem gesamten Bogenbereich

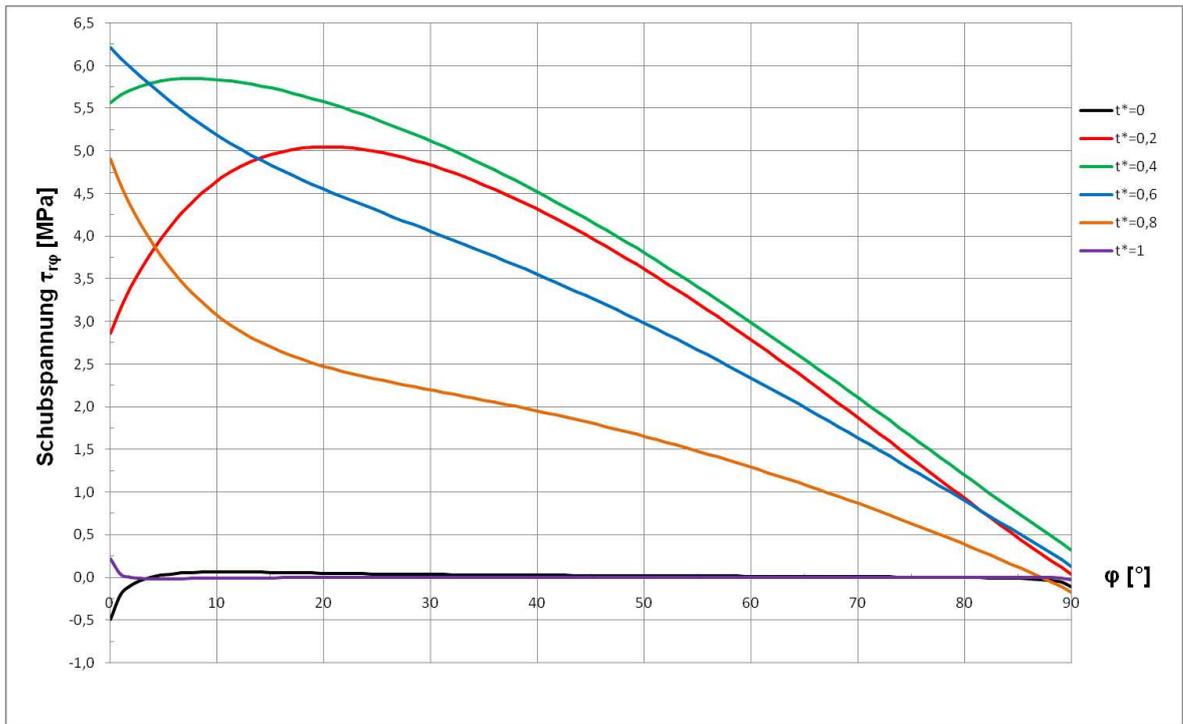


Abbildung B.4: Verlauf der Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ über dem gesamten Bogenbereich

B.2 Untersuchung der Auswirkung des Anisotropiewertes auf den Spannungshaushalt unter einer Normalkraftbelastung

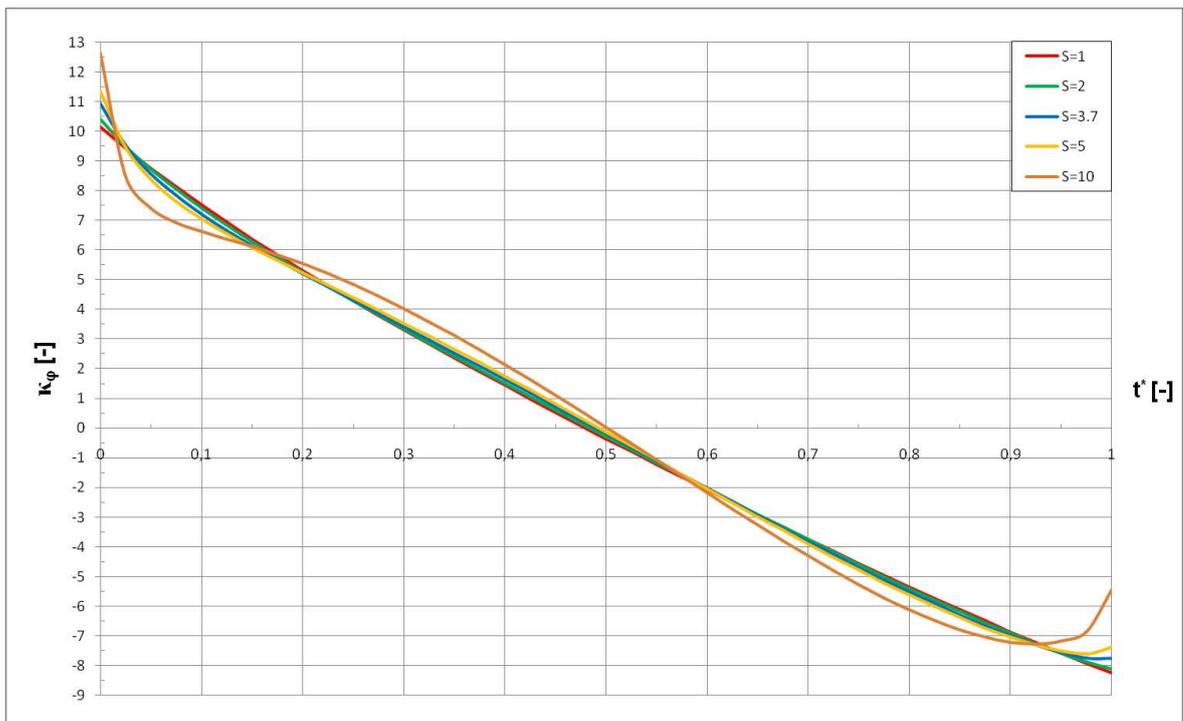


Abbildung B.5: Der dimensionslose Beiwert κ_φ an der Stelle $\varphi = 0^\circ$

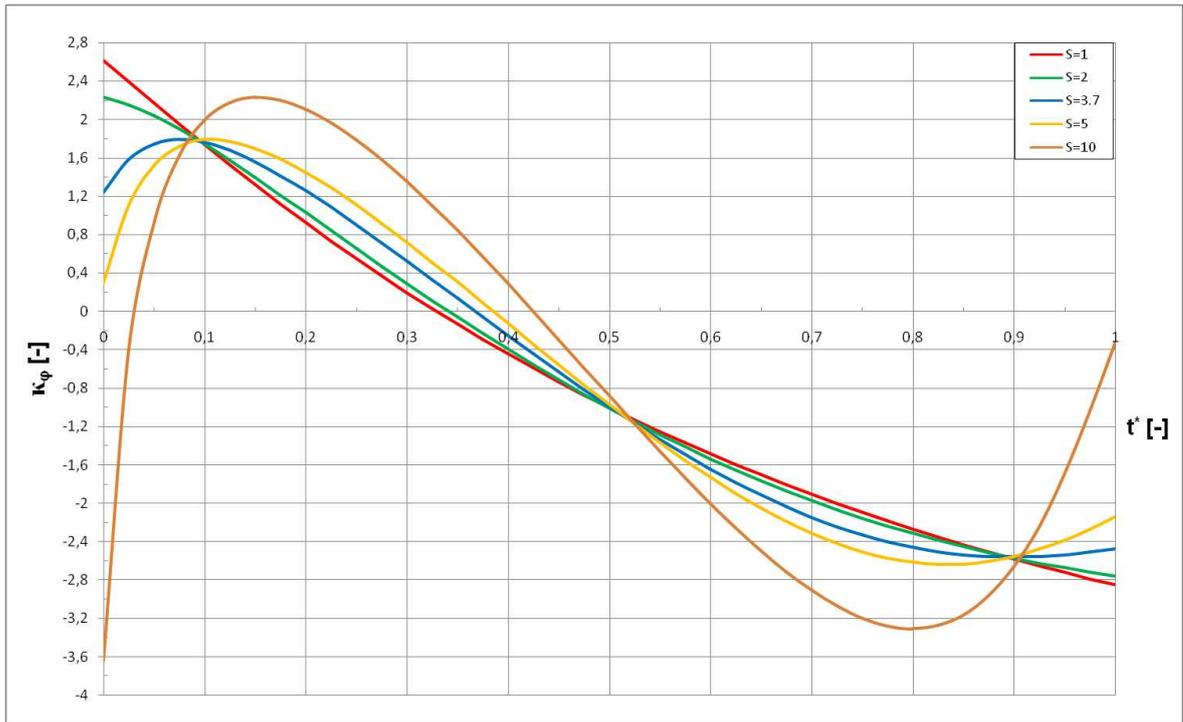


Abbildung B.6: Der dimensionslose Beiwert κ_φ an der Stelle $\varphi = 45^\circ$

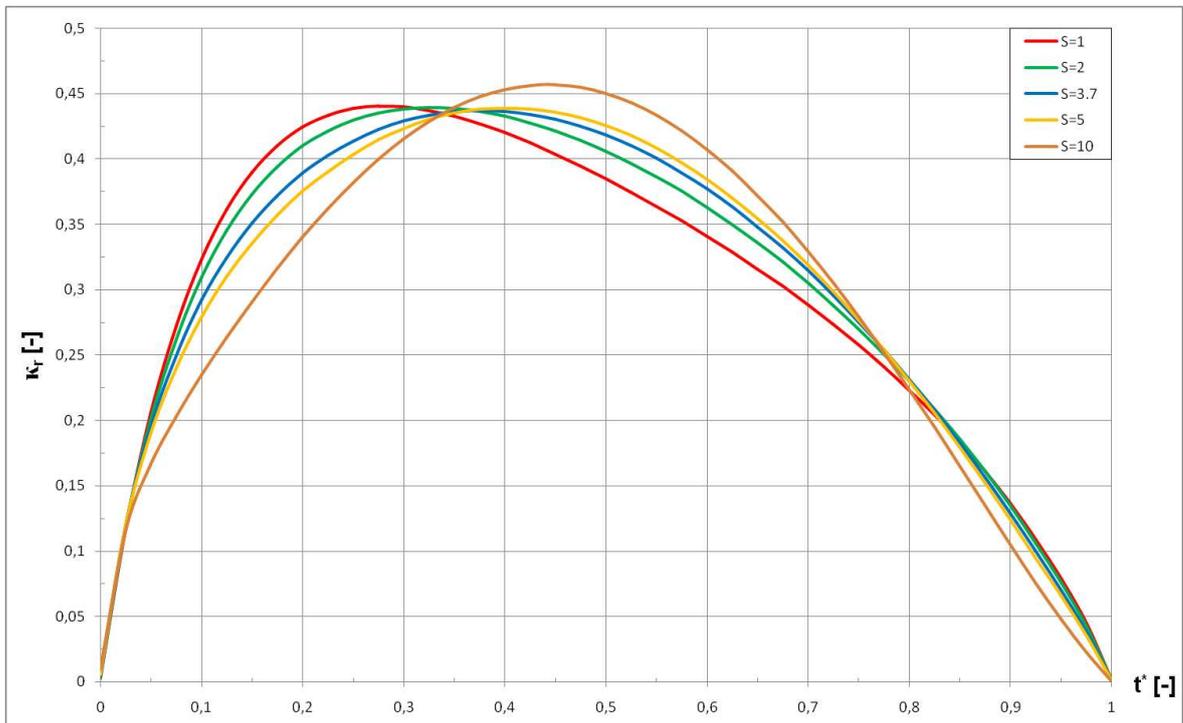


Abbildung B.7: Der dimensionslose Beiwert κ_r an der Stelle $\varphi = 0^\circ$

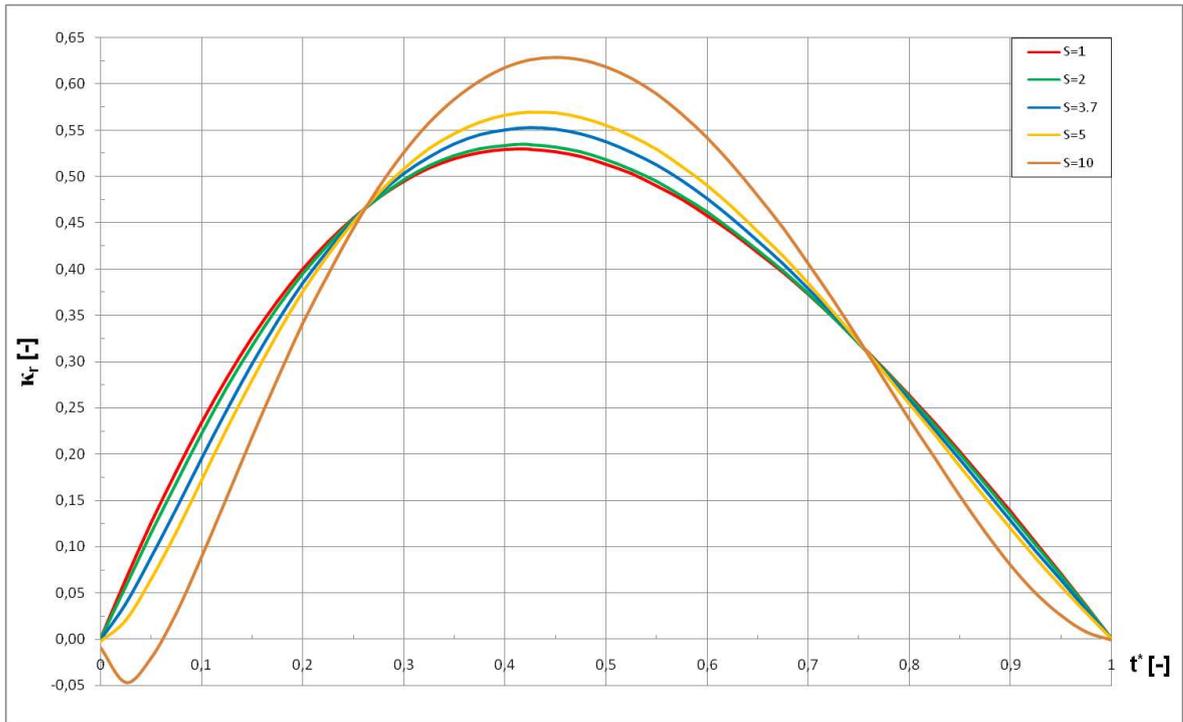


Abbildung B.8: Der dimensionslose Beiwert κ_r an der Stelle $\varphi = 45^\circ$

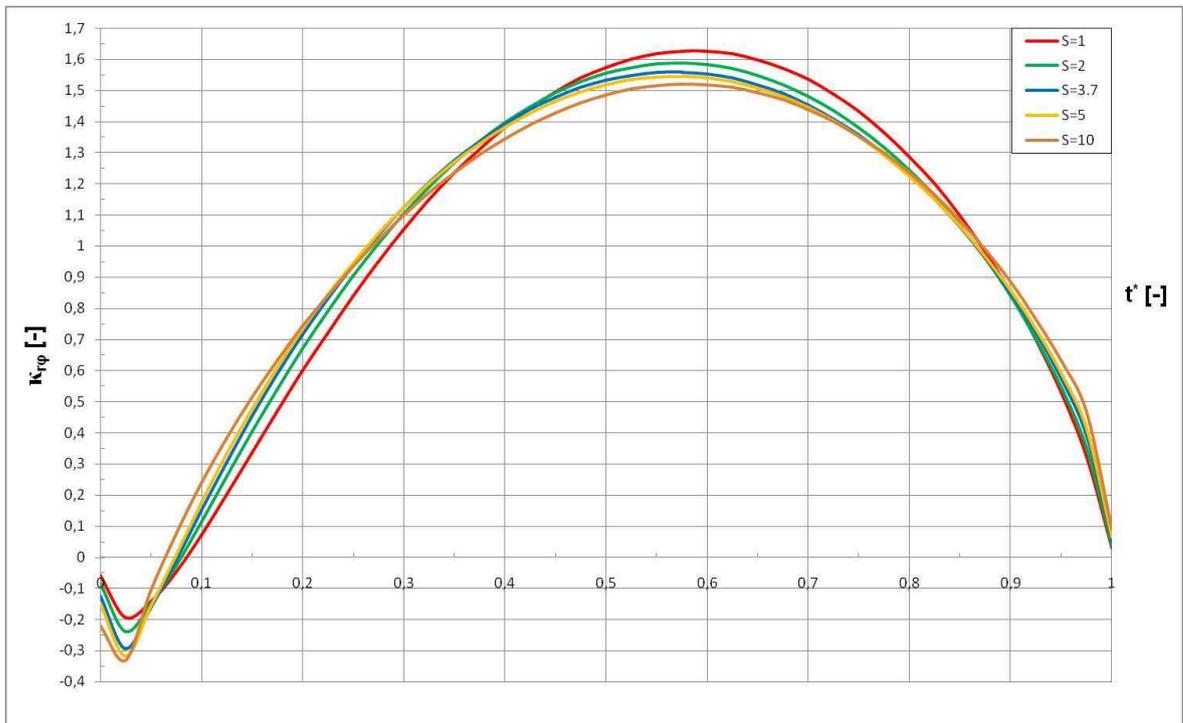


Abbildung B.9: Der dimensionslose Beiwert $\kappa_{r\varphi}$ an der Stelle $\varphi = 0^\circ$

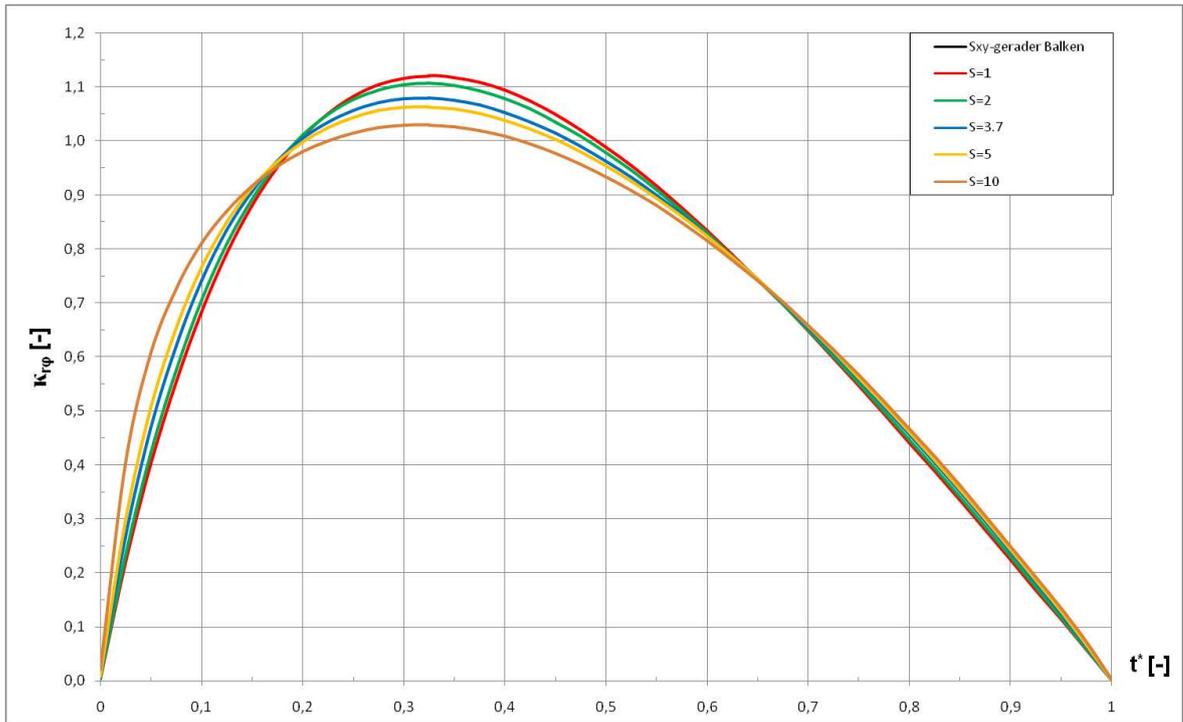


Abbildung B.10: Der dimensionslose Beiwert $\kappa_{r\varphi}$ an der Stelle $\varphi = 45^\circ$

B.3 Untersuchung der Auswirkung des Krümmungsverhältnisses auf den Spannungshaushalt unter einer Normalkraftbelastung

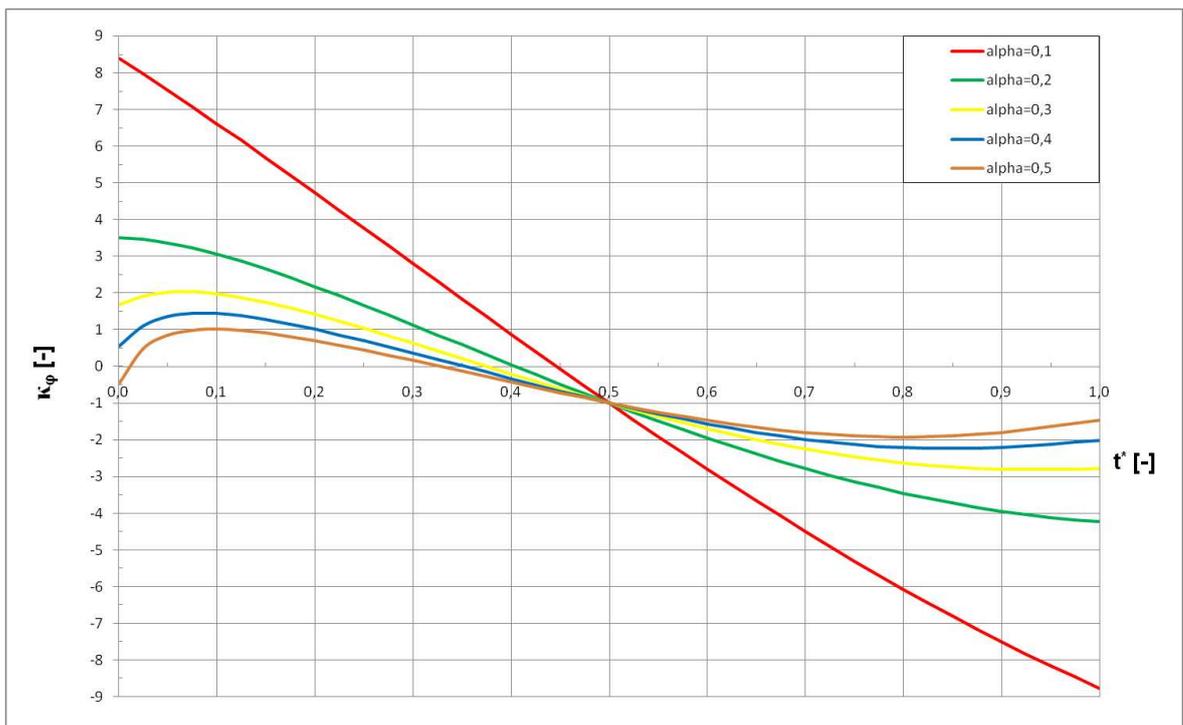


Abbildung B.11: Der dimensionslose Beiwert κ_{φ} an der Stelle $\varphi = 45^\circ$

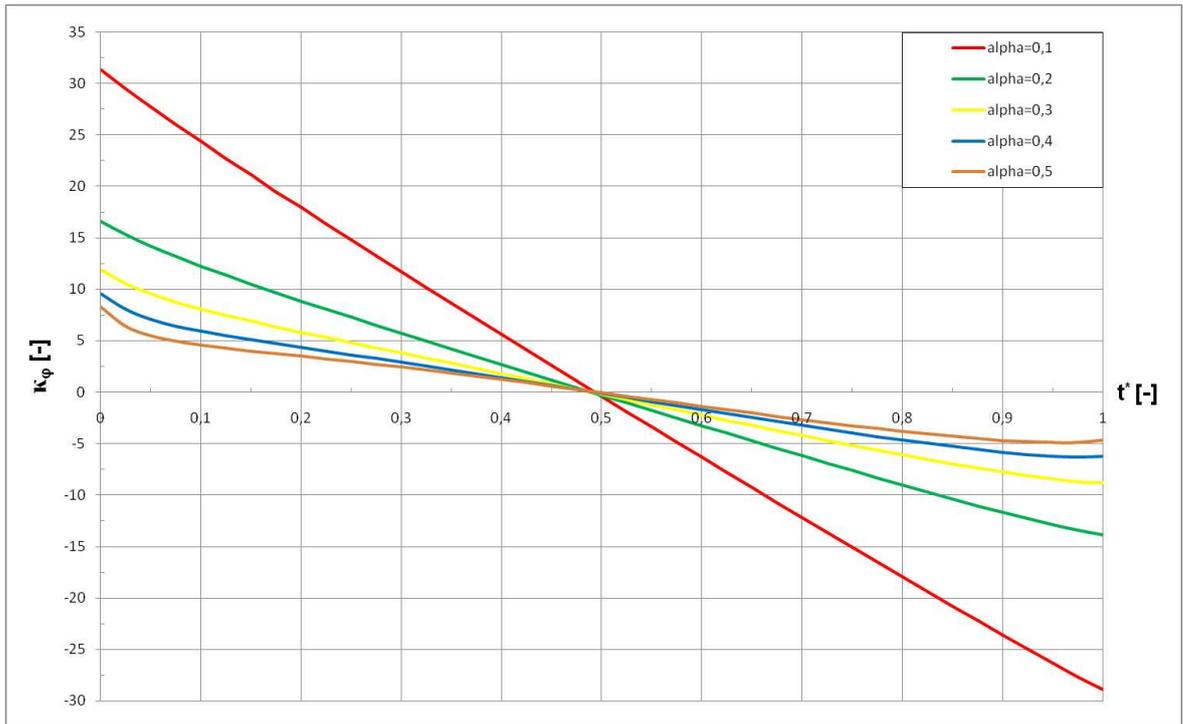


Abbildung B.12: Der dimensionslose Beiwert κ_φ an der Stelle $\varphi = 0^\circ$

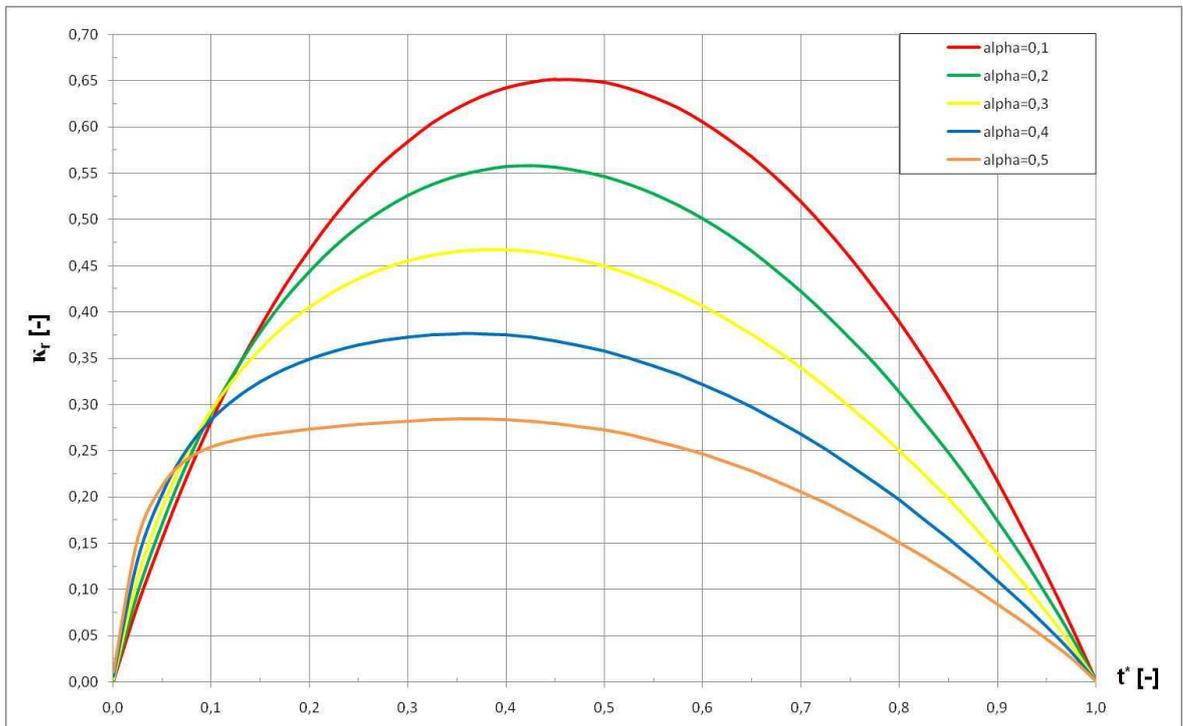


Abbildung B.13: Der dimensionslose Beiwert κ_r an der Stelle $\varphi = 0^\circ$

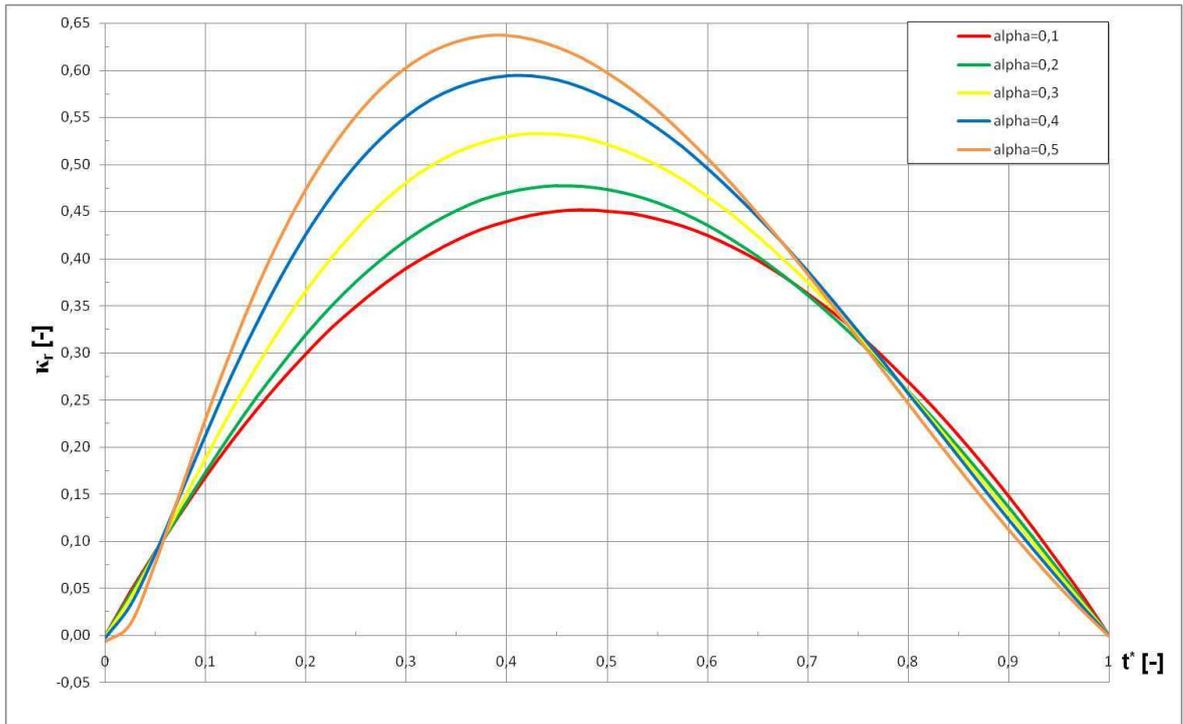


Abbildung B.14: Der dimensionslose Beiwert κ_r an der Stelle $\varphi = 45^\circ$

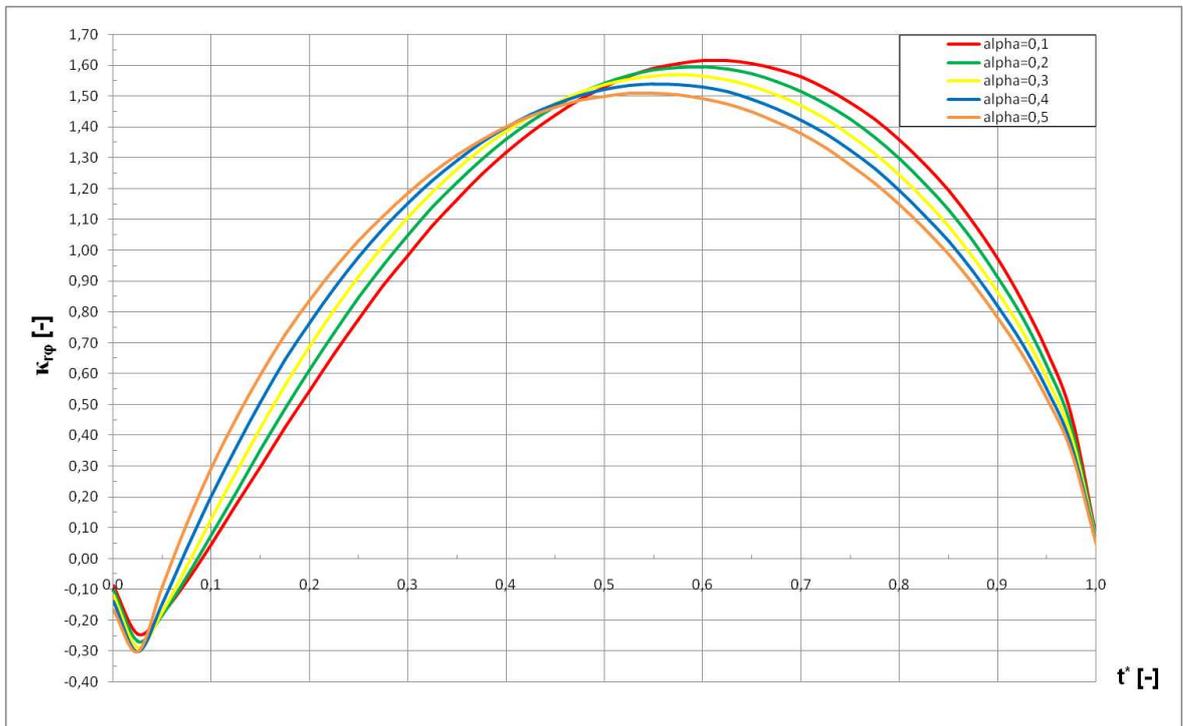
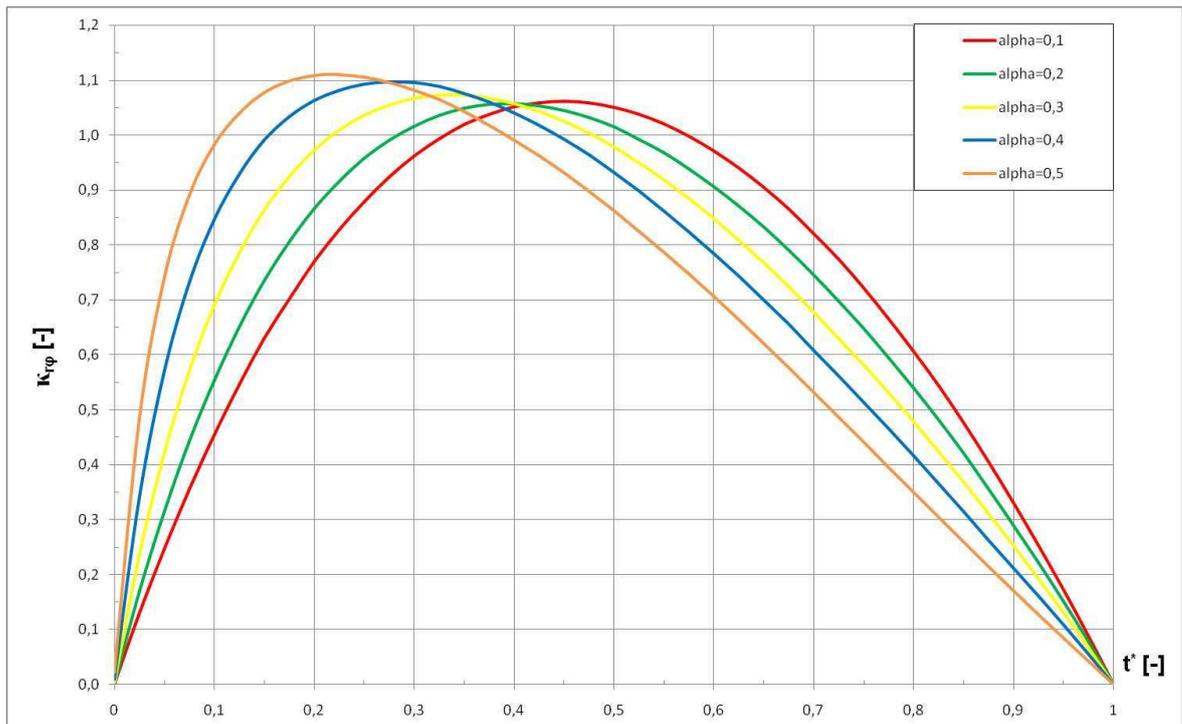


Abbildung B.15: Der dimensionslose Beiwert $\kappa_{r\varphi}$ an der Stelle $\varphi = 0^\circ$

Abbildung B.16: Der dimensionslose Beiwert $\kappa_{r\varphi}$ an der Stelle $\varphi = 45^\circ$

C Zeitplan

		9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	29. Aug			
Master-Thesis																															
Präsentation des aktuellen Standes																															
Numerische Behandlung der Aufgabe																															
Entwicklung der analytischen Methode																															
Korrektur der Arbeit																															
Abgabe der Arbeit																															