



Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg  
*Hamburg University of Applied Sciences*

**Masterarbeit**

**Studiendepartment Fahrzeugtechnik und Flugzeugbau**

**Einfluss reibungsbehafteter Partikel-Wand- und  
Partikel-Partikel-Kollisionen auf die Large-Eddy  
Simulation disperser Mehrphasenströmungen**

**Felix Langfeldt**

**15. Dezember 2011**



Master-Thesis

**Einfluss reibungsbehafteter Partikel-Wand-  
und Partikel-Partikel-Kollisionen auf die  
Large-Eddy Simulation disperser  
Mehrphasenströmungen**

Felix Langfeldt, B.Eng.

15. Dezember 2011

HAW Hamburg  
- Department für Fahrzeugtechnik und Flugzeugbau -

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg  
Department Fahrzeugtechnik + Flugzeugbau  
Berliner Tor 9  
20099 Hamburg

in Zusammenarbeit mit:

Helmut-Schmidt Universität  
Universität der Bundeswehr Hamburg  
Institut für Mechanik  
Professur für Strömungsmechanik  
Holstenhofweg 85  
22043 Hamburg

Verfasser: Felix Langfeldt, B.Eng.  
Mat.-Nr.: 1867516  
Abgabedatum: 15. Dezember 2011

1. Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Detlef Schulze, M.Sc.
2. Prüfer: Prof. Dr.-Ing. habil. Michael Breuer

Betreuung durch: Dipl.-Ing. Michael Alletto





# Erklärung

Ich versichere, dass ich vorliegende Arbeit ohne fremde Hilfe selbständig verfasst und nur die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Wörtlich oder dem Sinn nach aus anderen Werken entnommene Stellen sind unter Angabe der Quelle kenntlich gemacht.

Hamburg, 15. Dezember 2011

\_\_\_\_\_

Unterschrift

# Kurzreferat

Partikelbeladene wandgebundene turbulente Strömungen kommen in einer Vielzahl ingenieurmäßiger Anwendungsfälle vor und das Interesse an der numerischen Simulation solcher Strömungen wird in der Forschung und der Industrie immer größer. Die dadurch steigenden Anforderungen an die CFD-Codes machen eine möglichst genaue, gleichzeitig aber effiziente Behandlung der Trägerströmung (z. B. über eine Large-Eddy Simulation) und der Partikel (z. B. über effiziente Partikelverfolgungs- bzw. Kollisionsalgorithmen) erforderlich.

Die vorliegende Master-Thesis beschäftigt sich in diesem Kontext mit der Fragestellung, welche Auswirkungen Reibungseffekte bei der Kollision von Partikeln mit Wänden oder anderen Partikeln haben und inwiefern die Rauheit der Wände die Partikel der Mehrphasenströmung beeinflusst. Dazu wurden im Zuge dieser Arbeit drei deterministische Kollisionsmodelle für die Anwendung in Euler-Lagrange-Simulationen von partikelbeladenen Strömungen entwickelt. Die ersten beiden Modelle dienen der Behandlung von reibungsbehafteten Partikel-Wand- bzw. Partikel-Partikel-Kollisionen mit sphärischen Partikeln und das dritte Modell der Berücksichtigung rauer Wände. Die Modelle wurden in den hauseigenen Euler-Lagrange-Code *LESOC* der Professur für Strömungsmechanik an der Helmut-Schmidt-Universität Hamburg implementiert und damit dann zahlreiche Large-Eddy Simulationen für einen ausgewählten Testfall aus der Literatur (ebene, horizontale Kanalströmung) bei unterschiedlichen Massenbeladungen und verschiedenen Modellierungsgraden durchgeführt. Die Simulationsergebnisse wurden ausgewertet und auf den Einfluss sowie die Wichtigkeit der einzelnen Modelle hin analysiert.

Bei der Auswertung der Ergebnisse wurde festgestellt, dass die Rauheit der Kanalwände den mit Abstand größten Einfluss auf die partikelbeladene Strömung hat. Eine Vernachlässigung dieses Effektes führte zu klaren Abweichungen von den Referenzdaten. Die Reibungseffekte bei den Partikel-Wand- und Partikel-Partikel-Kollisionen spielten im Vergleich dazu eine untergeordnete Rolle. Alles in allem führte die Berücksichtigung aller drei Modelle jedoch zu vielversprechenden Ergebnissen, die eine zum Teil hervorragende Reproduktion der Referenzdaten lieferten und somit eine wesentliche Verbesserung der Simulation von partikelbeladenen Strömungen mit *LESOC* erzielten.



# Vorwort

Die vorliegende Master-Thesis wurde in der Zeit von Juni bis Dezember 2011 an der Professur für Strömungsmechanik der Helmut-Schmidt-Universität Hamburg angefertigt. Zentrale Aspekte, die dieses spezielle Thema so reizvoll für mich machten, waren mein großes persönliches Interesse an der numerischen Strömungsmechanik, die hohe Nachfrage nach neuen Erkenntnissen zu dieser Thematik und nicht zuletzt die forschungsnahe, wissenschaftliche Arbeit direkt vor Ort an der Professur. Neben der Entstehung dieser Arbeit konnte ich in diesem Zeitraum umfangreiche Einblicke in viele Aspekte der Arbeit an einem Forschungsthema in der numerischen Strömungsmechanik gewinnen, u. a. die grundlegende Entwicklung und Diskussion von Modellen, die effiziente Implementierung dieser Modelle in den Code, die Durchführung von Simulationen auf Hochleistungsrechnern sowie die sinnvolle Auswahl und Interpretation der Ergebnisse. Dies und die hervorragende Arbeitsatmosphäre innerhalb der Professur lassen mich die Monate, während deren ich dort gearbeitet habe, in sehr guter Erinnerung behalten.

Mein ganz besonderer Dank gilt Prof. Dr.-Ing. Breuer, der es mir überhaupt möglich machte, die vorliegende Arbeit in seiner Professur anzufertigen und alle benötigten Ressourcen, einschließlich des von ihm entwickelten CFD-Codes *LESOC*, zu nutzen. Auch möchte ich Professor Breuer für die exzellente Betreuung, die Geduld beim Beantworten meiner Fragen und das hilfreiche Feedback in allen Aspekten meiner Tätigkeit danken. Desweiteren bedanke ich mich bei Herrn Dipl.-Ing. Alletto für die vielen Hilfestellungen, den fachlichen Rat und die gewissenhaften Korrekturen im Entstehungsprozess dieser Master-Thesis. Auch den übrigen Mitarbeitern der Professur für Strömungsmechanik möchte ich mein Dank aussprechen für die ständige Hilfsbereitschaft und die denkwürdigen Abende außerhalb der Arbeitszeit.

Der größte Dank ist jedoch meiner Familie gewiss, die mir während meines fünfjährigen Studiums nicht nur finanziellen, sondern vor allem auch seelischen Rückhalt gegeben hat. Ohne ihren bedingungslosen Beistand wäre es mir nicht so leicht gefallen, die Hürden des studentischen Alltags zu meistern und so viel Freude an meinem Studiengang zu finden. Meine Familie war und ist demnach einer der wichtigsten Bestandteile meines Werdegangs, was ich an dieser Stelle dankbar hervorheben möchte.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Erklärung</b>	<b>v</b>
<b>Kurzreferat</b>	<b>vi</b>
<b>Vorwort</b>	<b>vii</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>xi</b>
<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1. Motivation . . . . .	1
1.2. Aufgabenstellung . . . . .	2
1.3. Gliederung der Arbeit . . . . .	2
<b>2. Strömungsmechanische Grundlagen</b>	<b>4</b>
2.1. Klassifizierung von Mehrphasenströmungen . . . . .	4
2.2. Eigenschaften disperser Zweiphasenströmungen . . . . .	5
2.3. Grundgleichungen . . . . .	9
2.3.1. Formulierungsansätze . . . . .	10
2.3.2. Grundgleichungen für die kontinuierliche Phase . . . . .	11
2.3.3. Grundgleichungen für die disperse Phase . . . . .	14
<b>3. Numerische Simulation disperser Mehrphasenströmungen</b>	<b>22</b>
3.1. Grundlagen der Large-Eddy Simulation . . . . .	22
3.1.1. Das Turbulenzproblem . . . . .	22
3.1.2. Grundgleichungen der LES und Modellierungsannahmen . . . . .	25
3.2. Einführung in den CFD-Code LESOCC . . . . .	30
3.2.1. Grundlegende numerische Methodik für die kontinuierliche Phase . . . . .	30
3.2.2. Behandlung der dispersen Phase . . . . .	33
3.2.2.1. Integration der Bewegungsgleichungen . . . . .	33
3.2.2.2. Interpolation der Fluidgeschwindigkeit und Berücksichtigung der Feinstrukturschwankungen . . . . .	34
3.2.2.3. Zwei-Wege-Kopplung . . . . .	34
3.2.2.4. Kollisionsalgorithmus . . . . .	35
<b>4. Kollisionsmodelle</b>	<b>36</b>
4.1. Partikel-Wand-Kollisionen . . . . .	36
4.1.1. Herleitung der Modellgleichungen . . . . .	37

## Inhaltsverzeichnis

4.1.2. Energiebetrachtung . . . . .	43
4.2. Partikel-Partikel-Kollisionen . . . . .	46
4.2.1. Herleitung der Modellgleichungen . . . . .	46
4.2.2. Reduktion auf das Partikel-Wand-Kollisionsmodell . . . . .	53
4.2.3. Energiebetrachtung . . . . .	54
4.3. Modellierung der Wandrauheit . . . . .	55
4.3.1. Beschreibung des Sandrauheitsmodells . . . . .	56
4.3.2. Herleitung der Modellgleichungen . . . . .	59
<b>5. Testfall: Ebene Kanalströmung</b>	<b>63</b>
5.1. Referenzexperiment . . . . .	64
5.2. Numerisches Setup . . . . .	67
5.3. Simulierte Testfälle . . . . .	71
<b>6. Auswertung der Simulationen</b>	<b>72</b>
6.1. Verifikation des numerischen Setups . . . . .	72
6.1.1. Sensitivitätsanalyse des verwendeten Gitters . . . . .	72
6.1.2. Sensitivitätsanalyse anderer Parameter . . . . .	74
6.2. Unbeladene Kanalströmung . . . . .	78
6.3. Einfluss der Reibung bei Partikel-Wand-Kollisionen . . . . .	81
6.3.1. Disperse Phase . . . . .	82
6.3.1.1. Ohne Partikel-Partikel-Kollisionen . . . . .	82
6.3.1.2. Mit Partikel-Partikel-Kollisionen . . . . .	89
6.3.2. Kontinuierliche Phase . . . . .	93
6.3.3. Zusammenfassung der gewonnenen Erkenntnisse . . . . .	99
6.4. Einfluss der Reibung bei Partikel-Partikel-Kollisionen . . . . .	100
6.4.1. Disperse Phase . . . . .	100
6.4.2. Kontinuierliche Phase . . . . .	104
6.4.3. Zusammenfassung der gewonnenen Erkenntnisse . . . . .	106
6.5. Einfluss der Wandrauheit . . . . .	108
6.5.1. Disperse Phase . . . . .	108
6.5.2. Kontinuierliche Phase . . . . .	113
6.5.3. Einfluss des Kugelradius im Wandrauheitsmodell . . . . .	117
6.5.4. Zusammenfassung der gewonnenen Erkenntnisse . . . . .	121
<b>7. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>123</b>
7.1. Bedeutung der einzelnen Kollisionsmodelle . . . . .	123
7.2. Offene Fragen . . . . .	125
<b>Anhang</b>	<b>131</b>
A. Auflistung aller simulierten Testfälle . . . . .	131

# Symbolverzeichnis

## Lateinische Buchstaben

<i>A</i>	Fläche	$\text{m}^2$
<i>B</i>	Breite	$\text{m}$
<i>C</i>	Konstante	–
<i>D</i>	Durchmesser	$\text{m}$
<i>E</i>	Kinetische Energie	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$
<b>E</b>	Einheitsmatrix	–
<b>F</b>	Dimensionsloser Flussvektor	–
<i>G</i>	Filterkern	–
<b>G</b>	Geschwindigkeitsgradient	$\text{s}^{-1}$
<i>I</i>	Massenträgheitsmoment	$\text{kg m}^2$
<b>I</b>	Trägheitstensor	$\text{kg m}^2$
<i>J<sup>u</sup></i>	Korrekturfaktor für die Saffman-Auftriebskraft	–
<i>K<sup>*</sup></i>	Konzentration	$\text{m}^{-3}$
<i>K</i>	Normalisierte Konzentration	–
<i>L</i>	Länge	$\text{m}$
<i>L<sub>0</sub></i>	Charakteristische Länge	$\text{m}$
LES_IQ	Large-Eddy Simulation Index of Quality	–
<i>M</i>	Normierte Masse	$\text{kg}$
<i>N</i>	Partikelanzahl	–
<i>P</i>	Statischer Druck mit aufgeschlagener kinetischer Energie der Feinstruktur turbulenz	$\text{N m}^{-2}$
<i>R</i>	Rauheitstiefe	$\text{m}$
Re	Reynolds-Zahl	–
<i>R<sub>q</sub></i>	Quadratische Rauheit	$\text{m}$
<i>R<sub>Z</sub></i>	Gemittelte Rautiefe	$\text{m}$
<i>R<sub>a</sub></i>	Mittlere Rauheit	$\text{m}$
<b>S</b>	Deformationstensor	$\text{s}^{-1}$
St	Stokes-Zahl	–
<i>T</i>	Charakteristisches Zeitmaß	$\text{s}$
<b>T</b>	Spannungstensor	$\text{N m}^{-2}$
<i>U<sub>0</sub></i>	Referenzgeschwindigkeit	$\text{m s}^{-1}$
<i>V</i>	Volumen	$\text{m}^3$
<i>W</i>	Arbeit	$\text{N m}$
<i>a</i>	Extrapolationskoeffizient	–
<i>c</i>	Aerodynamischer Beiwert	–

## Symbolverzeichnis

$d$	Abstand	m
$\mathbf{d}$	Verschiebungsvektor	m
$e$	Restitutionskoeffizient	–
$\mathbf{f}$	Kraft	N
$\hat{\mathbf{f}}$	Spezifischer Kraftstoß	$\text{m s}^{-1}$
$\hat{f}$	Komponente des spezifischen Kraftstoßvektors	$\text{m s}^{-1}$
$\mathbf{g}$	Schwerebeschleunigungsvektor	$\text{m s}^{-2}$
$k$	Turbulente kinetische Energie	$\text{m}^2 \text{s}^{-2}$
$k^+$	Dimensionslose Wandrauheitstiefe	–
$k_S$	Äquivalente Sandrauheit	m
$\mathbf{l}$	Drehimpuls	$\text{N m s}$
$m$	Masse	kg
$\dot{m}$	Massenstrom	$\text{kg s}^{-1}$
$\mathbf{m}$	Drehmoment	$\text{N m}$
$n$	Zeitschrittanzahl	–
$\mathbf{n}$	Flächennormaleneinheitsvektor	–
$p$	Statischer Druck	$\text{N m}^{-2}$
$\mathbf{p}$	Impuls	$\text{kg m s}^{-1}$
$q$	Diskretisierungsordnung	–
$r$	Radius der kugelförmigen Sandrauheitselemente	m
$\mathbf{r}$	Radiusvektor	m
$\mathbf{s}$	Quellvektor	$\text{N m}^{-3}$
$t$	Zeit	s
$\mathbf{v}$	Geschwindigkeitsvektor	$\text{m s}^{-1}$
$v$	Geschwindigkeitskomponente	$\text{m s}^{-1}$
$x$	Kartesische $x$ -Koordinate	m
$\mathbf{x}$	Ortsvektor	m
$y$	Kartesische $y$ -Koordinate	m
$y^+$	Dimensionsloser Wandabstand	–
$z$	Kartesische $z$ -Koordinate	m

## Griechische Buchstaben

$\Gamma$	Dimensionsloser Diffusionskoeffizient	–
$\Delta$	Dimensionslose Filterweite	–
$\Delta x^+$	Dimensionsloser Gitterabstand in $x$ -Richtung	–
$\Delta z^+$	Dimensionsloser Gitterabstand in $z$ -Richtung	–
$\Phi$	Volumenanteil	–
$\alpha$	Kippwinkel im Sandrauheitsmodell	–
$\beta$	Kollinearitätsfaktor	–
$\delta$	Kanalhalbhöhe	m
$\epsilon$	Abbruchkriterium	–
$\varepsilon$	Dissipationsrate der turbulenten kinetischen Energie	$\text{m}^2 \text{s}^{-3}$
$\eta$	Massenbeladung	–

$\mu$	Reibungskoeffizient	–
$\mu_0$	Haftreibungskoeffizient	–
$\mu^*$	Dynamische Viskosität	$\text{N s m}^{-2}$
$\nu^*$	Kinematische Viskosität	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
$\xi$	Dimensionslose Laufkoordinate bei der Faltung	–
$\rho^*$	Dichte	$\text{kg m}^{-3}$
$\rho$	Dimensionslose Dichte	–
$\sigma$	Standardabweichung	–
$\tau$	Schubspannung	$\text{N m}^{-2}$
$\varphi$	Azimuthalwinkel im Sandrauheitsmodell	–
$\psi$	Gaußverteilte Zufallsvariable	–
$\Psi$	Gaußverteilter Zufallsvektor	–
$\omega$	Winkelgeschwindigkeitsvektor	$\text{s}^{-1}$

## Indizes

A	Auftrieb
B	Berührungspunkt zwischen zwei kollidierenden Körpern
C	Zellzentrum
D	Van Driestsche Dämpfung
Diss	Dissipation
E	Integrale Skala
G	Gleitreibung
Ges	Gesamt
Grv	Gravitation
H	Haftreibung
K	Kolmogorovsche Skala
Kol	Kollision
R	Tangentiale Reibungskomponente
S	Smagorinsky
SGS	Feinstrukturgröße
W	Widerstand
a	Oberflächensegment einer Zelle
av	Mittelwertbildung
f	Fluide (kontinuierliche) Phase
hyd	Hydrostatischer Auftrieb
konv	Konvektive Größe
m	Gemittelte Größe
n	Normalkomponente
p	Partikel
r	Größe des Wandrauheitsmodells
rel	Relativgröße
rot	Rotatorischer Anteil
t	Tangentiale Komponente

## Symbolverzeichnis

tra	Translatorischer Anteil
visk	Viskose Größe
w	Wand

## Sonstige Symbole

$(\ )^{(a)}$	Anisotroper (spurloser) Teil eines Tensors
$(\ )^{-}$	Größe vor einer Kollision
$(\ )^{+}$	Größe nach einer Kollision
$\overline{(\ )}$	Grobstruktur
$(\ )'$	Feinstruktur
$\widetilde{(\ )}$	Mit einem Testfilter gefilterte Größe
$(\ )^{(i)}$	Isotroper Teil eines Tensors
$\langle (\ ) \rangle$	Zeitlich gemittelte Größe
$(\ )''$	Schwankung der zeitlich gemittelten Größe



# Abbildungsverzeichnis

2.1. Darstellung der drei Klassen von Mehrphasenströmungen in einer ebenen Kanalströmung. . . . .	4
2.2. Charakterisierung verschiedener Regime bei dispersen Zweiphasenströmungen anhand der Kennzahlen Volumenanteil und integrale Stokes-Zahl St. Nach: Elghobashi (1994). . . . .	7
2.3. Formulierungsansätze für die Entwicklung der Grundgleichungen von dispersen Zweiphasenströmungen an einem differentiellen Kontrollvolumen $dV^*$ . Schwarze Linien: kontinuierliche Phase; grüne Linien: disperse Phase. . . . .	11
2.4. Schematische Darstellung der Grundkräfte, die an einem Partikel in einer Trägerströmung angreifen. . . . .	14
2.5. Entstehung der Saffman-Auftriebskraft an einem Partikel in einer Strömung mit dem Geschwindigkeitsgradienten $\mathcal{G}$ . . . . .	18
3.1. Fiktives Resultat für den zeitlichen Verlauf des Geschwindigkeitsbetrags einer turbulenten Strömung bei DNS, LES und RANS-Simulation. . . . .	24
4.1. Vektorielle Definitionen im System Partikel-Wand bei einer reibungsbehafteten Kollision. . . . .	37
4.2. Vektorielle Definitionen im System zweier Partikel während einer reibungsbehafteten Kollision. . . . .	46
4.3. Schematische Darstellung des Schatteneffektes bei rauen Wänden. . . . .	57
4.4. Modellbildung zur Berücksichtigung der Wandrauheit bei Partikel-Wand-Kollisionen mit Hilfe des Sandrauheitmodells. . . . .	58
4.5. Geometrische Betrachtungen zur Herleitung der Modellgleichungen. . . . .	60
5.1. Geometrie, Koordinatensystem und Geschwindigkeitsprofil bei der ebenen Kanalströmung. . . . .	64
5.2. Seiten- und Vorderansicht des für die Simulation der Kanalströmung verwendeten Gitters. Nur jede zweite Gitterlinie wird dargestellt. . . . .	69
6.1. Verlauf des Large-Eddy Simulation Index of Quality für die Kanalsimulation zur Verifikation des verwendeten Gitters. . . . .	74
6.2. Geschwindigkeitsprofile der kontinuierlichen Phase bei einfacher ( $\Delta t = 4 \times 10^{-3}$ ) und halbiertes Zeitschrittweite. . . . .	75
6.3. Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofile der Partikel bei einfacher ( $\Delta t = 4 \times 10^{-3}$ ) und halbiertes Zeitschrittweite. . . . .	76

6.4. Geschwindigkeitsprofile der kontinuierlichen Phase bei unterschiedlich langen Mittelungszeiten. . . . .	78
6.5. Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofile der Partikel bei unterschiedlich langen Mittelungszeiten. . . . .	79
6.6. Geschwindigkeitsprofile der unbeladenen Luft. . . . .	80
6.7. Einfluss der Wandreibung auf die Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofile der Partikel bei $\eta = 0,1$ ohne Berücksichtigung der Partikel-Partikel-Kollisionen. . . . .	83
6.8. Zeitliche Entwicklung der Anzahl an Partikel-Wand-Kollisionen im Simulationsverlauf bei $\eta = 0,1$ mit Partikel-Wand-Reibung und Zwei-Wege-Kopplung. . . . .	85
6.9. Einfluss der Wandreibung auf die Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofile der Partikel bei $\eta = 0,5$ ohne Berücksichtigung der Partikel-Partikel-Kollisionen. . . . .	87
6.10. Einfluss der Wandreibung auf die Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofile der Partikel bei $\eta = 1,0$ ohne Berücksichtigung der Partikel-Partikel-Kollisionen. . . . .	88
6.11. Einfluss der Wandreibung auf die Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofile der Partikel bei $\eta = 0,1$ mit Berücksichtigung der Partikel-Partikel-Kollisionen. . . . .	90
6.12. Einfluss der Wandreibung auf die Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofile der Partikel bei $\eta = 0,5$ mit Berücksichtigung der Partikel-Partikel-Kollisionen. . . . .	92
6.13. Einfluss der Wandreibung auf die Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofile der Partikel bei $\eta = 1,0$ mit Berücksichtigung der Partikel-Partikel-Kollisionen. . . . .	94
6.14. Einfluss der Wandreibung auf die Geschwindigkeitsprofile der kontinuierlichen Phase bei $\eta = 0,1$ , Vier-Wege-Kopplung. . . . .	95
6.15. Einfluss der Wandreibung auf die Geschwindigkeitsprofile der kontinuierlichen Phase bei $\eta = 0,5$ , Vier-Wege-Kopplung. . . . .	97
6.16. Einfluss der Wandreibung auf die Geschwindigkeitsprofile der kontinuierlichen Phase bei $\eta = 1,0$ , Vier-Wege-Kopplung. . . . .	98
6.17. Einfluss reibungsbehafteter Partikel-Partikel-Kollisionen auf die Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofile der Partikel bei $\eta = 0,1$ , Vier-Wege-Kopplung. . . . .	101
6.18. Einfluss reibungsbehafteter Partikel-Partikel-Kollisionen auf die Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofile der Partikel bei $\eta = 0,5$ , Vier-Wege-Kopplung. . . . .	102
6.19. Einfluss reibungsbehafteter Partikel-Partikel-Kollisionen auf die Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofile der Partikel bei $\eta = 1,0$ , Vier-Wege-Kopplung. . . . .	103
6.20. Einfluss reibungsbehafteter Partikel-Partikel-Kollisionen auf die Geschwindigkeitsprofile der kontinuierlichen Phase bei $\eta = 0,1$ , Vier-Wege-Kopplung.	104

6.21. Einfluss reibungsbehafteter Partikel-Partikel-Kollisionen auf die Geschwindigkeitsprofile der kontinuierlichen Phase bei $\eta = 0,5$ , Vier-Wege-Kopplung.	106
6.22. Einfluss reibungsbehafteter Partikel-Partikel-Kollisionen auf die Geschwindigkeitsprofile der kontinuierlichen Phase bei $\eta = 1,0$ , Vier-Wege-Kopplung.	107
6.23. Einfluss der Wandrauheitsmodellierung auf die Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofile der Partikel bei $\eta = 0,1$ , Vier-Wege-Kopplung. . . . .	109
6.24. Einfluss der Wandrauheitsmodellierung auf die Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofile der Partikel bei $\eta = 0,5$ , Vier-Wege-Kopplung. . . . .	111
6.25. Einfluss der Wandrauheitsmodellierung auf die Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofile der Partikel bei $\eta = 1,0$ , Vier-Wege-Kopplung. . . . .	113
6.26. Einfluss der Wandrauheitsmodellierung auf die Geschwindigkeitsprofile der kontinuierlichen Phase bei $\eta = 0,1$ , Vier-Wege-Kopplung. . . . .	114
6.27. Einfluss der Wandrauheitsmodellierung auf die Geschwindigkeitsprofile der kontinuierlichen Phase bei $\eta = 0,5$ , Vier-Wege-Kopplung. . . . .	116
6.28. Einfluss der Wandrauheitsmodellierung auf die Geschwindigkeitsprofile der kontinuierlichen Phase bei $\eta = 1,0$ , Vier-Wege-Kopplung. . . . .	117
6.29. Einfluss des Kugelradius $r$ auf die Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofile der Partikel bei $\eta = 0,1$ , Vier-Wege-Kopplung. . . . .	118
6.30. Einfluss des Kugelradius $r$ auf die Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofile der Partikel bei $\eta = 0,5$ , Vier-Wege-Kopplung. . . . .	120
6.31. Einfluss des Kugelradius $r$ auf die Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofile der Partikel bei $\eta = 1,0$ , Vier-Wege-Kopplung. . . . .	121

## Tabellenverzeichnis

5.1. Wandrauheitsklassen mit den entsprechenden dimensionslosen Messwerten der in den Versuchen von Kussin (2004) verwendeten Kanalwände. . . . .	65
5.2. Material, Durchmesser, dimensionslose Dichte und Stokes-Zahl der sphärischen Partikel und die untersuchten Massenbeladungsbereiche in den Versuchen von Kussin (2004). . . . .	66
5.3. Simulationsparameter für die drei Referenztestfälle aus Kussin (2004). . . . .	68
5.4. Gewählte Parameter für die Partikel-Wand- und Partikel-Partikel-Kollisionsmodelle gemäß der Materialpaarungen im Referenzexperiment. . . . .	70
7.1. Einfluss der einzelnen Kollisionsmodelle auf die Statistiken der Trägerströmung in der unteren und oberen Kanalhälfte. . . . .	123
7.2. Einfluss der einzelnen Kollisionsmodelle auf die Statistiken der dispersen Phase in Wandnähe (W) und der Kanalmitte (M). . . . .	124

*Tabellenverzeichnis*

# 1. Einleitung

## 1.1. Motivation

Partikelbeladene wandgebundene Strömungen finden sich in vielen industriellen Anwendungsfällen, darunter in Zyklonabscheidern, beim pneumatischen Transport von pulverförmigen Stoffen oder bei Sprüh- bzw. Einspritzverfahren. Besonders in der Verfahrenstechnik sind Strömungen dieser Art von großer Bedeutung, aber auch die Luftfahrtindustrie zeigt beispielsweise im Zuge der immer strenger werdenden Anforderungen an moderne Luftfahrzeuge ein zunehmendes Interesse daran, ein besseres Verständnis für die mit Treibstofftröpfchen und Verbrennungspartikeln beladene Strömung im Inneren von Flugzeugtriebwerken zu erlangen.

Weil die numerische Strömungssimulation sich schon seit vielen Jahren in Forschung und Industrie als ein erfolgreiches Werkzeug zur unterstützenden Lösung klassischer strömungsmechanischer Probleme etabliert hat, wird das Interesse an der Simulation von partikelbeladenen Strömungen zunehmend größer. Hierfür hat sich in den letzten Jahren vor allem der Euler-Lagrange-Ansatz etabliert, in dem das Trägerfluid als kontinuierliche Phase über die Eulersche Betrachtungsweise beschrieben wird, während die diskreten Strömungspartikel der dispersen Phase mit Hilfe des Lagrangeschen Ansatzes verfolgt werden.

In typischen Anwendungsfällen von partikelbeladenen Strömungen ist die Trägerströmung turbulent und deshalb der Wunsch nach einer möglichst genauen, gleichzeitig aber kostengünstigen Wiedergabe der Fluidturbulenz sehr groß, was die Large-Eddy Simulation zur Beschreibung der kontinuierlichen Phase prädestiniert. Bei der Lagrangeschen Betrachtungsweise der dispersen Phase ist die effiziente Verfolgung einer großen Anzahl von Partikeln und die Behandlung von Kollisionsereignissen über deterministische Modelle von Bedeutung. Die korrekte Erfassung der Wechselwirkungen zwischen Partikel und Trägerströmung ist für die Simulation besonders wichtig und hat in letzter Zeit zu vielen erfolgsversprechenden Ansätzen geführt (Brennen, 2005). Gerade bei wandgebundenen Strömungen ist es jedoch essenziell, dass die Mechanismen bei Partikel-Wand- und Partikel-Partikel-Kollisionen in den Simulationen mit hinreichender Genauigkeit wiedergegeben werden. Andernfalls können insbesondere bei hochbeladenen Strömungen große Differenzen zwischen Simulation und realer Strömung auftreten (Curtis und van Wachem, 2004; Vreman, 2007).

Die genauen physikalischen Vorgänge bei solchen Kollisionen sind äußerst komplex und lassen sich nach heutigem Stand der Technik nur mit Hilfe von deutlich vereinfachten Kollisionsmodellen mit vertretbarem Rechenaufwand approximieren. Bei diesem Modellbildungsprozess werden üblicherweise schwierig zu erfassende Phänomene wie geometrische Unregelmäßigkeiten oder Partikelverformung vernachlässigt. In manchen Fällen werden

## 1. Einleitung

dabei auch die Oberflächenreibung zwischen den beteiligten Kollisionspartnern und die raue Oberflächenstruktur der Wände nicht berücksichtigt.

Viele numerische Simulationen wie z. B. die von Vreman (2007) oder Laín und Sommerfeld (2008) deuten an, dass die Wandrauheit bei partikelbeladenen Strömungen eine große Rolle spielen kann. Über den Einfluss der Oberflächenreibung gibt es in der Literatur dagegen keine tiefer gehenden Untersuchungen. Vor diesem Hintergrund besteht demnach ein großer Bedarf nach einer grundlegenden Analyse des Reibungs- und Wandrauheitseinflusses bei wandgebundenen dispersen Mehrphasenströmung und nach entsprechenden Modellen, die diese Mechanismen mit guter Genauigkeit und ohne nennenswerten Mehraufwand nachbilden können.

## 1.2. Aufgabenstellung

*LESOCC*, der hauseigene CFD-Code der Professur für Strömungsmechanik an der Helmut-Schmidt-Universität Hamburg, ist in der Lage, partikelbeladene Strömungen über den Euler-Lagrange-Ansatz zu simulieren. Die Beschreibung der kontinuierlichen Phase erfolgt in *LESOCC* mit Hilfe der Large-Eddy Simulation, während die Bewegungen der Partikel über effiziente Algorithmen und deterministische Kollisionsmodelle verfolgt werden.

Weil in dem Code bisher keine Reibungs- und Rauheitseffekte bei Partikel-Wand- und Partikel-Partikel-Kollisionen berücksichtigt worden sind, soll *LESOCC* in dieser Arbeit um einfache, deterministische Modelle für die Behandlung dieser Effekte erweitert werden. Die Resultate, die dabei mit diesen Modellen für einen ausgewählten Referenzfall erzielt werden, sind mit der ursprünglichen, reibungsfreien Formulierung zu vergleichen, um den Einfluss und die Bedeutsamkeit der einzelnen Effekte bewerten zu können.

Formal gliedert sich die Aufgabenstellung für diese Master-Thesis in die folgenden Punkte:

- Literaturrecherche zu bereits vorhandenen Kollisionsmodellen und einer geeigneten experimentellen Referenz zur Verifikation der entwickelten Modelle.
- Herleitung von neuen Modellgleichungen zur Behandlung reibungsbehafteter Kollisionen und Implementierung dieser Modelle in *LESOCC*.
- Durchführung von numerischen Simulationen mit den neu implementierten Kollisionsmodellen.
- Auswertung und Dokumentation der Simulationsergebnisse im Vergleich zum Referenzfall unter dem Aspekt der Reibungseinflüsse.

## 1.3. Gliederung der Arbeit

Im ersten Kapitel dieser Arbeit werden zunächst die generellen Eigenschaften von dispersen Mehrphasenströmungen und die zugehörigen Grundgleichungen dargelegt. Dies

dient als Grundlage für das darauf folgende Kapitel, in dem auf die numerische Simulation solcher Strömungen und speziell auf die Behandlung der kontinuierlichen und dispersen Phasen eingegangen wird. Im Anschluss daran erfolgt eine ausführliche Herleitung der im Rahmen dieser Arbeit für *LESOC* entwickelten Kollisionsmodelle und in Kapitel 5 die Beschreibung des Referenzfalls zur Überprüfung dieser Modelle.

Den Abschluss bilden die detaillierte Auswertung der numerischen Simulationen in Kapitel 6 und schließlich eine kurze Zusammenfassung der wichtigsten Erkenntnisse, die im Laufe dieser Master-Thesis gewonnen werden konnten.

## 2. Strömungsmechanische Grundlagen

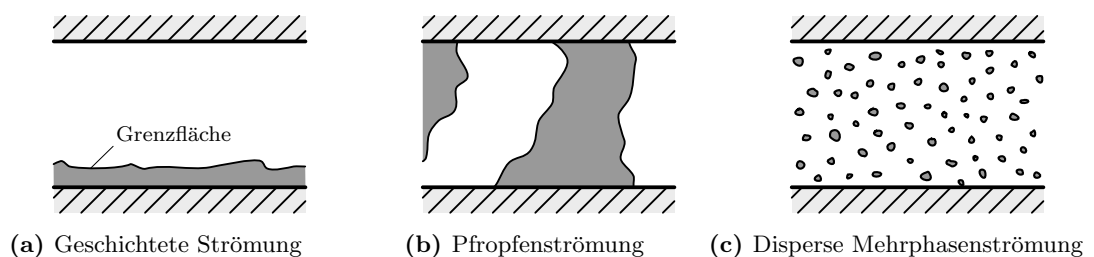
Damit in die Methodik der numerischen Simulation von partikelbeladenen Strömungen und die Modellierung der darin auftretenden Kollisionsphänomene eingestiegen werden kann, müssen zunächst einige strömungsmechanische Grundlagen und Definitionen der dispersen Zweiphasenströmungen dargelegt werden. Dazu werden zunächst einige typische Vertreter von Mehrphasenströmungen aufgezeigt, um im Anschluss daran genauer auf die Klasse der dispersen Zweiphasenströmungen, welche Hauptgegenstand dieser Arbeit sind, und ihre typischen Eigenschaften einzugehen.

Abschließend werden in diesem Kapitel die strömungsmechanischen Grundgleichungen entwickelt, die Ausgangsbasis und Berechnungsgrundlage für die Simulation partikelbeladener Strömungen sind.

### 2.1. Klassifizierung von Mehrphasenströmungen

Der Begriff der Mehrphasenströmung beschreibt eine Strömung, die sich aus mehr als einer stofflichen Komponente zusammensetzt. Dabei ist es unerheblich, ob diese Komponenten – auch Phasen genannt – verschiedene Aggregatzustände ein und desselben Stoffes sind (z. B. Wasser und Eis) oder die Strömung aus unterschiedlichen Stoffen besteht (z. B. Wasser und Speiseöl). Auch bei gleichzeitigem Auftreten von unterschiedlichen Aggregatzuständen und unterschiedlichen Stoffen spricht man von einer Mehrphasenströmung.

Die Strukturen solcher Strömungen können sehr unterschiedlich sein und nach Sommerfeld (2000) in folgende Klassen unterteilt werden: Bei einer *geschichteten Mehrphasenströmung* (Abb. 2.1(a)) ist jede Phase räumlich klar durch eine zusammenhängende Grenzfläche von den anderen getrennt. In der Technik findet man so etwas beispielsweise bei Filmströmungen. Sind die Volumenanteile der Phasen ungefähr gleich, kann



**Abbildung 2.1.:** Darstellung der drei Klassen von Mehrphasenströmungen in einer ebenen Kanalströmung.



sich eine so genannte *Pfropfenströmung* ausbilden, bei der die Phasen in Form von diskontinuierlichen, großskaligen Strukturen transportiert werden (Abb. 2.1(b)). Pfropfenströmungen finden sich zum Beispiel bei den in der Verfahrenstechnik verwendeten Rohrreaktoren (Hertwig und Martens, 2007). Schließlich überwiegt bei einer *dispersen Mehrphasenströmung* (Abb. 2.1(c)) in der Regel der Volumenanteil einer fluiden Trägerphase, während sich die anderen Phasen in kleinen, diskreten Strukturen im Strömungsfeld der Trägerphase fortbewegen. Diese Art von Mehrphasenströmungen kommt in der Technik z. B. bei Einspritzvorgängen von Flüssigkeiten in Gasströmungen (so genannten Sprays) oder beim pneumatischen Transport von Pulvern vor.

Jede dieser verschiedenen Formen von Mehrphasenströmungen haben besondere Eigenschaften und können sich ganz unterschiedlich verhalten. Auch ist es möglich, dass solche Strömungen z. B. als Resultat thermodynamischer Wechselwirkungen wie Kavitation zwischen verschiedenen Zuständen hin- und herwechseln, so dass die oben genannten Klassifizierungen nur als grobe Richtlinie anzusehen sind.

Vor allem bei den zuletzt genannten dispersen Mehrphasenströmungen wird oftmals eine weitere Klassifizierung anhand der Aggregatzustände der einzelnen Phasen vorgenommen. Ist in einer dispersen Zweiphasenströmung – also einer dispersen Mehrphasenströmung, die sich aus zwei Komponenten zusammensetzt – das Trägermedium flüssig und die zweite Phase gasförmig, so spricht man von einer *Blasenströmung*. Im umgekehrten Fall liegt eine *Tröpfchen-* bzw. *Sprayströmung* vor. Schließlich wird eine disperse Zweiphasenströmung mit einer festen, zweiten Phase allgemein als *Partikelströmung* bezeichnet.

## 2.2. Eigenschaften disperser Zweiphasenströmungen

Der Fokus der in dieser Arbeit behandelten Mehrphasenströmungen liegt in erster Linie bei den zuvor genannten dispersen Zweiphasenströmungen. Darüber hinaus wurden die Modelle und Simulationen für Feststoffpartikelströmungen entwickelt bzw. durchgeführt – das bedeutet jedoch nicht, dass die Ergebnisse dieser Arbeit nicht auch auf Tröpfchen- oder Blasenströmungen übertragen werden können. Dies ist möglich, solange die später noch aufgeführten Vereinfachungen und Annahmen beim Modellbildungsprozess ihre Gültigkeit behalten. Im Folgenden wird aus diesem Grund der Begriff Partikel synonym für feste Partikel, Tröpfchen und Gasblasen in einer dispersen Mehrphasenströmung verwendet.

Wie im vorhergehenden Abschnitt erläutert wurde, zeichnen sich disperse Zweiphasenströmungen dadurch aus, dass eine fluide Phase den Großteil des Strömungsgebietes ausfüllt und kleine, diskrete Teilchen der anderen Phase mit sich trägt. Die erstgenannte Komponente wird wegen ihrer kontinuierlichen Eigenschaften nachfolgend als *kontinuierliche Phase* oder *Trägerströmung* bezeichnet. Die zweite Phase bildet keinen zusammenhängenden Bereich, sondern ist innerhalb der kontinuierlichen Phase fein verteilt und wird deshalb auch *disperse Phase* genannt. Verschiedene Mechanismen sorgen dafür, dass die beiden Phasen mit- und untereinander wechselwirken. Nach Elghobashi (1994) spielen dabei vor allem zwei Kenngrößen eine Rolle: Die erste ist der Volumenanteil der

## 2. Strömungsmechanische Grundlagen

dispersen Phase  $\Phi_p$ . Diese dimensionslose Kennzahl ist definiert als das Verhältnis aus dem Volumen, welches von allen Partikeln im Strömungsfeld eingenommen wird, und dem Gesamtvolumen des Strömungsfeldes  $V^*$ <sup>1</sup>:

$$\Phi_p = \frac{1}{V^*} \sum_{i=1}^N V_{p,i}^*. \quad (2.1)$$

Darin ist  $N$  die Anzahl der Partikel und  $V_{p,i}^*$  das Volumen des  $i$ -ten Partikels. Der zweite Parameter ist die Stokes-Zahl  $St$ , welche dem Verhältnis aus der Relaxationszeit eines Partikels  $T_p^*$  und einem charakteristischen Zeitmaß der Trägerströmung entspricht:

$$St = \frac{T_p^*}{T_f^*}. \quad (2.2)$$

Die Partikelrelaxationszeit entspricht der Zeit, die ein Partikel benötigt, um seine eigene Geschwindigkeit zu 63,2% einer sprunghaften Geschwindigkeitsänderung im Trägerfluid (z. B. hervorgerufen durch eine turbulenzbedingte Schwankung) anzupassen (Kussin, 2004). Sie kann interpretiert werden als die Antwortzeit eines Partikels auf eine Beschleunigung in der Strömung der kontinuierlichen Phase. Im Falle kugelförmiger Partikel ist nach Brennen (2005) die Partikelrelaxationszeit für die schleichende Umströmung des Partikels zum Beispiel folgendermaßen definiert:

$$T_p^* = \frac{m_p^*}{3\pi D_p^* \mu_f^*} = \frac{\rho_p^* V_p^*}{3\pi D_p^* \mu_f^*}, \quad (2.3)$$

mit der Masse  $m_p^*$ , dem Durchmesser  $D_p^*$  und der Dichte  $\rho_p^*$  des Partikels sowie der dynamischen Viskosität der Trägerströmung  $\mu_f^*$ . Für das charakteristische Zeitmaß der turbulenten Trägerströmung können verschiedene Zeitskalen verwendet werden. Eine bei Partikelströmungen typische Wahl ist das integrale Zeitmaß

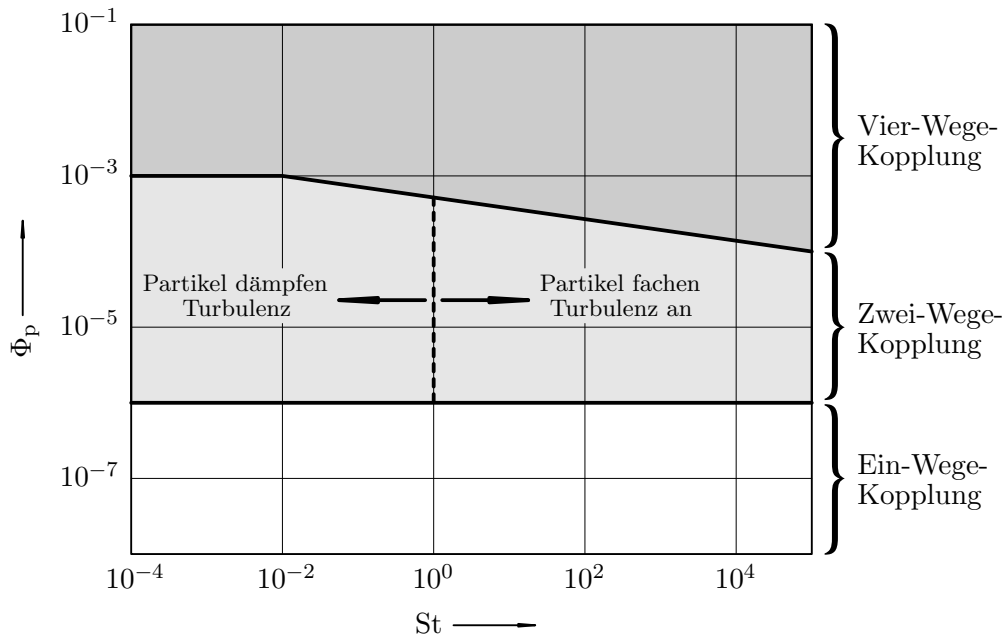
$$T_f^* \equiv T_E^* = \frac{k^*}{\varepsilon^*},$$

mit der turbulenten kinetischen Energie  $k^*$  und der turbulenten Dissipationsrate  $\varepsilon^*$  (Durbin und Reif, 2011). Diese Zeitskala wird auch *eddy turnover time* genannt und entspricht in etwa der Lebensdauer der großskaligen, energietragenden Wirbel des Trägerfluids.

Aufgrund ihrer Definition kann die Stokes-Zahl also als ein Kennwert interpretiert werden, mit dem sich eine Aussage über die Bewegung eines Partikels innerhalb einer turbulenten Strömung treffen lässt. So ist bei einer integralen Stokes-Zahl von  $St \ll 1$  die Partikelrelaxationszeit  $T_p^*$  viel kleiner als die Lebensdauer der großskaligen, turbulenten Wirbel der Strömung. Also benötigt ein Partikel mit einer solch niedrigen Stokes-Zahl sehr wenig Zeit, um sich einer plötzlich auftretenden Schwankung in der Strömung anzupassen, und folgt dem Geschwindigkeitsfeld der kontinuierlichen Phase demnach nahezu

<sup>1</sup>In dieser Arbeit werden zur einfacheren Unterscheidung alle dimensionsbehafteten, physikalischen Größen mit einem \* versehen. Jede dimensionslose Größe, die nicht explizit im Symbolverzeichnis aufgeführt ist, kann dort anhand des dimensionsbehafteten Pendant identifiziert werden.

## 2.2. Eigenschaften disperser Zweiphasenströmungen



**Abbildung 2.2.:** Charakterisierung verschiedener Regime bei dispersen Zweiphasenströmungen anhand der Kennzahlen Volumenanteil und integrale Stokes-Zahl  $St$ . Nach: Elghobashi (1994).

ohne Abweichungen. Stokes-Zahlen dieser Größenordnung sind beispielsweise bei Tracer-Partikeln für optische Messverfahren (z. B. Laser-Doppler Anemometrie oder Particle Image Velocimetry) gefordert, da die Partikel dort möglichst wenig Eigendynamik aufweisen sollen, damit das Strömungsfeld der kontinuierlichen Phase ausreichend genau von den Tracern wiedergegeben wird. Auf der anderen Seite reagiert ein Partikel mit einer hohen Stokes-Zahl sehr träge auf eine Geschwindigkeitsänderung im Strömungsfeld des Trägerfluides. Die Wirbel der turbulenten Strömung sind dann in der Regel wesentlich kurzlebiger als die Reaktionszeit des Partikels, so dass das Teilchen kaum Zeit hat, seine eigene Geschwindigkeit an die turbulenzbedingten Schwankungen in der kontinuierlichen Phase anzupassen.

Anhand dieser zwei Parameter  $\Phi_p$  und  $St$  teilte Elghobashi (1994) die dispersen Zweiphasenströmungen in drei verschiedene Regime ein, die sich durch unterschiedliche Wechselwirkungsmechanismen und -richtungen auszeichnen. In Abb. 2.2 ist dargestellt, wie diese Aufteilung schematisch aussieht und welche drei Bereiche damit herausgestellt werden können: Bei sehr niedrigen Volumenanteilen von  $\Phi_p \leq 10^{-6}$  nehmen die Partikel der dispersen Phase so wenig Raum ein, dass der Einfluss der Partikel auf die kontinuierliche Phase vernachlässigbar klein ist. Der vorherrschende Mechanismus bei der Interaktion zwischen den beiden Phasen ist denn lediglich der Einfluss vom Trägerfluid auf die Flugbahnen der Partikel. Das Strömungsfeld der kontinuierlichen Phase selbst bleibt dabei überwiegend unverändert, weshalb dieses Regime auch *Ein-Wege-Kopplung* genannt wird und bei einer Simulation auch so modellierungstechnisch abgebildet wer-

## 2. Strömungsmechanische Grundlagen

den kann. Weil die Wirkung der Partikel in diesem Bereich vernachlässigbar ist, ist die Dynamik des Trägerfluids bei der Ein-Wege-Kopplung von der Stokes-Zahl der Partikel weitestgehend unabhängig, während die Bewegung der Partikel selbst von dieser Kennzahl beeinflusst bleibt.

Im Bereich höherer Volumenanteile von  $10^{-6} < \Phi_p \leq 10^{-3}$  liegt *Zwei-Wege-Kopplung* vor. Dann nämlich ist die Wirkung der Partikel auf die Strömung signifikant genug, um von einer gegenseitigen Beeinflussung zwischen disperser und kontinuierlicher Phase sprechen zu können. Wie in Abb. 2.2 für das Regime der Zwei-Wege-Kopplung zu sehen ist, fällt die Modifikation der turbulenten Trägerströmung unterschiedlich aus: So kann beobachtet werden, dass die Turbulenzintensität in der kontinuierlichen Phase unter bestimmten Bedingungen durch die Präsenz der Partikel lokal entweder erhöht oder verringert wird. Welche Parameter welchen Einfluss hierfür haben und in welchen Zahlenbereichen diese liegen, wenn die Turbulenz der Trägerströmung gedämpft oder verstärkt wird, ist noch nicht vollständig verstanden und Gegenstand der aktuellen Forschung. Elghobashi (1994) hält die Stokes-Zahl für den größten und einzigen Einflussfaktor, wie der Darstellung in Abb. 2.2 entnommen werden kann, während Balachandar und Eaton (2010) in ihrem Übersichtsartikel jedoch aufzeigen, dass noch weitere Größen eine wesentliche Rolle bei diesem Mechanismus spielen.

Mit größer werdendem Volumenanteil  $\Phi_p$  wächst auch die Zahl der Partikel-Partikel-Kollisionen, die pro Sekunde in der Strömung auftreten. Bei Volumenanteilen von  $\Phi_p > 10^{-3}$  ist die Kollisionsrate so hoch, dass dieser zwischen den Partikeln stattfindende Wechselwirkungsmechanismus nicht mehr vernachlässigbar ist. Die Kollisionen beeinflussen die Flugbahnen und damit die Verteilung der Partikel im Fluid stark und müssen deswegen als zusätzlicher Kopplungsmechanismus berücksichtigt werden. Da auch bei diesen Volumenanteilen die gegenseitige Beeinflussung von Strömung und Partikeln (*Zwei-Wege-Kopplung*) eine große Rolle spielt, fasst man dieses Regime unter dem Begriff der *Vier-Wege-Kopplung*<sup>2</sup> zusammen. Elghobashi (1994) hat eine Differenzierung von Turbulenzdämpfung und -anfächung durch die Partikel nur im Regime der Zwei-Wege-Kopplung vollzogen, wie die gestrichelte Trennlinie in Abb. 2.2 andeuten soll. Ob diese Grenze auch bei höheren Volumenanteilen im Regime der Vier-Wege-Kopplung gültig ist, führt Elghobashi nicht weiter aus, was wohl damit erklärt werden kann, dass in diesem Bereich die zunehmende Bedeutung der Partikel-Partikel-Kollisionen eine genauere Differenzierung der Turbulenzmodifikationsmechanismen zusätzlich erschwert.

Die Kollisionsrate der Partikel ist bei der Vier-Wege-Kopplung nicht nur abhängig vom Volumenanteil  $\Phi_p$ : Im Falle hoher Stokes-Zahlen  $St$  treten die Partikel-Partikel-Kollisionen auch schon bei Volumenanteilen von  $\Phi_p < 10^{-3}$  deutlich stärker in den Vordergrund. Das liegt daran, dass Partikel mit großen Stokes-Zahlen durch ihr träges Verhalten sehr leicht aus dem momentanen Verlauf der Trägerströmung herausgerissen werden und die Flugbahnen anderer Partikel kreuzen können. Um diesen Einfluss der Stokes-Zahl auf die Kollisionshäufigkeit – und damit auf die Ausdehnung des Vier-Wege-Regimes – zu verdeutlichen, wird in Abb. 2.2 der Bereich der Vier-Wege-Kopplung ab

---

<sup>2</sup>Es sind insgesamt vier Richtungen, weil man zusätzlich zur Wechselwirkung Strömung  $\leftrightarrow$  Partikel auch die Wechselwirkung Partikel  $\leftrightarrow$  Partikel als in zwei Richtungen wirkend definiert.

einer Stokes-Zahl von  $St = 10^{-2}$  kontinuierlich zu geringeren Volumenanteilen hin größer.

Diese Einteilung von dispersen Zweiphasenströmungen in drei Regime nach Elghobashi (1994) findet in der Literatur häufig Anwendung. Oftmals werden die beiden Regime der Ein- und Zwei-Wege-Kopplung auch in einen gemeinsamen Bereich zusammengefasst, der *dünne Zweiphasenströmungen* genannt wird. Analog dazu werden die kollisionsdominierten Zweiphasenströmungen im Vier-Wege-Regime oftmals auch als *dichte Zweiphasenströmungen* bezeichnet (Kussin, 2004).

Zusätzlich zu den beiden Parametern Volumenanteil und Stokes-Zahl ist insbesondere bei dispersen Gas-Feststoff-Strömungen die so genannte Massenbeladung  $\eta$  zur Charakterisierung disperser Zweiphasenströmungen von Bedeutung. Diese Kennzahl ist definiert als das Verhältnis vom Gesamtmassenstrom der Partikelphase zum Massenstrom des Trägerfluids (Kraume, 2003):

$$\eta = \frac{\dot{m}_p^*}{\dot{m}_f^*}. \quad (2.4)$$

Die Massenbeladung erlaubt es, eine Aussage über das Ausmaß der Turbulenzmodifikation durch die Partikel innerhalb der kontinuierlichen Phase zu treffen. So haben beispielsweise die Experimente von Fessler und Eaton (1999), Borée und Caraman (2005) und Hadinoto et al. (2005) gezeigt, dass bei einer hohen Massenbeladung die von der Stokes-Zahl abhängige Anfachung der Turbulenz höher ausfällt und bei niedrigeren Massenbeladungen entsprechend geringer wird. Außerdem ist die Massenbeladung mit dem Volumenanteil der dispersen Phase  $\Phi_p$  gekoppelt, so dass bei gleichem Partikelmaterial eine höhere Massenbeladung mit einem größerem Volumenanteil einhergeht, was schließlich eine höhere Kollisionsrate zur Folge hat.

Diese drei hier aufgezeigten Kenngrößen  $\Phi_p$ ,  $St$  und  $\eta$  bilden eine oftmals ausreichende Grundlage zur Charakterisierung von dispersen Zweiphasenströmungen. In dieser Arbeit dienen sie vorrangig der Auswahl von geeigneten Referenzexperimenten zur Verifikation der Kollisionsmodelle. Besonders interessant ist in diesem Kontext die Massenbeladung  $\eta$ , da sie den Kollisionsmechanismus entscheidend beeinflusst, weshalb für diese Größe zusätzlich eine Parametervariation vorgenommen wurde.

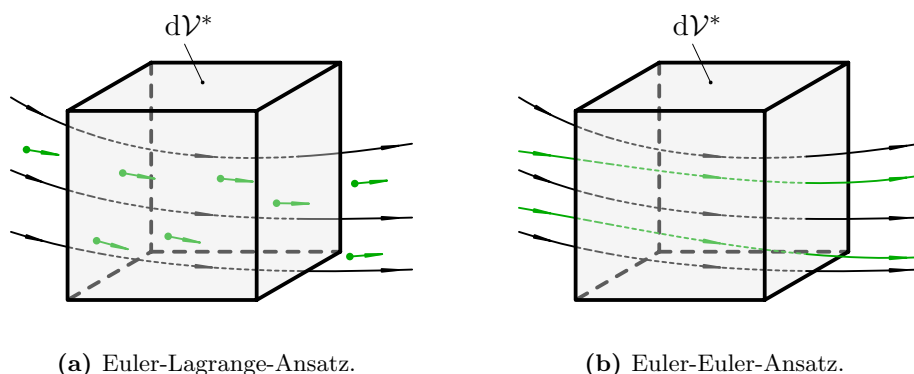
## 2.3. Grundgleichungen

Bevor ein strömungsmechanisches Problem mit numerischen Methoden simuliert werden kann, muss das reale Problem zunächst über einen physikalisch-mathematischen Modellbildungsprozess in Form von Gleichungen formuliert werden. Dafür gibt es in der Strömungsmechanik zwei verschiedene Betrachtungsweisen, die unterschiedliche Stärken und Schwächen besitzen und insbesondere bei Zweiphasenströmungen verschiedene Anwendungsfälle haben. Diese beiden Formulierungsansätze werden im folgenden Abschnitt dargelegt, bevor dann in den beiden darauffolgenden Abschnitten die strömungsmechanischen Grundgleichungen getrennt für beide Phasen aufgestellt werden.

### 2.3.1. Formulierungsansätze

In der Mechanik haben sich zur Beschreibung dynamischer Vorgänge vor allem zwei Betrachtungsweisen durchgesetzt (Herwig, 2006): Im Bereich der klassischen Festkörpermechanik findet die *Lagrangesche* oder auch *teilchenfeste* Betrachtungsweise häufig Anwendung, um beispielsweise die Bewegungsgleichungen oder Energiebilanzen für ein Mehrkörpersystem aufzustellen. Bezogen auf die Strömungsmechanik bedeutet dies, dass im Lagrangeschen Ansatz diskrete Massenpunkte oder -pakete im Strömungsfeld betrachtet werden. Die Bilanzgleichungen werden dann für ein mitbewegtes System aufgestellt, die betrachteten Massenelemente bleiben dabei stets die selben. Da es sich in der Strömungsmechanik typischerweise um kontinuumsmechanische Probleme handelt (z. B. die Umströmung eines Tragflügels), wird in diesem Bereich weitaus häufiger die so genannte *Eulersche* bzw. *ortsfeste* Betrachtungsweise gewählt, in der ein ortsfestes Kontrollvolumen von dem Fluid durchströmt wird. Die Bilanzierung der Erhaltungsgrößen Masse, Impuls und Energie erfolgt dann über dieses fest definierte Kontrollvolumen. Vor allem bei Umströmungen von Körpern oder Durchströmungen ist der Eulersche Ansatz dem Lagrangeschen überlegen, da in diesen Fällen häufig ein geeignetes, körperfestes Kontrollvolumen gewählt werden kann und die Flugbahnen individueller Fluidpakete nicht von Interesse sind.

Im Falle der dispersen Mehrphasenströmungen ist dies jedoch anders. Da die Grundgleichungen aller Strömungskomponenten getrennt aufgestellt werden können, ist es möglich, für jede einzelne Phase einen eigenen Ansatz zu wählen (Brennen, 2005). So ist es in einer Partikelströmung von großer Bedeutung zu wissen, wie sich die einzelnen Teilchen der dispersen Phase in der Strömung fortbewegen, um bestimmte Phänomene, wie zum Beispiel Kollisionen oder Ablagerungen an Wänden, deterministisch erfassen zu können. Die Lagrangesche Betrachtungsweise ist somit eine sehr naheliegende Wahl für die disperse Phase einer Mehrphasenströmung, während das Trägerfluid als kontinuierliche Phase weiterhin über den Euler-Ansatz beschrieben werden kann. Bei Zweiphasenströmungen nennt man diese spezielle Kombination dann den *Euler-Lagrange-Ansatz* (s. Abb. 2.3(a)). Hinsichtlich der numerischen Simulation solcher Strömungen liegt der große Vorteil dieses Ansatzes darin, dass die Flugbahnen aller Partikel berechnet und Kollisionen, Agglomerationen und andere partikeltypische Ereignisse daraus explizit ermittelt sowie entsprechend behandelt werden können. Doch gerade bei sehr dichten dispersen Mehrphasenströmungen mit hohen Partikelanzahlen ist dieser Ansatz mit sehr hohem numerischen Aufwand verbunden. In diesem Fall ist es meist sinnvoller, die Partikelphase näherungsweise als eine weitere kontinuierliche Phase anzusehen und auch über den Euler-Ansatz zu beschreiben. Bei der Verwendung des *Euler-Euler-Ansatzes* (s. Abb. 2.3(b)) wird die disperse Phase im Kontrollvolumen  $dV^*$  dann nicht über diskrete Massenpunkte, sondern in Form eines Feldes repräsentiert. Dieses Feld kann man sich als die zu einer quasi-kontinuierlichen Strömung verschmierten Trajektorien individueller Partikel vorstellen, die mit der Eulerschen Betrachtungsweise behandelt werden kann (Brennen, 2005). Informationen über die individuellen Flugbahnen der Partikel gehen dabei jedoch verloren, so dass Kollisionen, Agglomerationen usw. dann nur noch über die Bildung von Statistiken oder empirischen Modellen möglich ist. Gerade bei der



**Abbildung 2.3.:** Formulierungsansätze für die Entwicklung der Grundgleichungen von dispersen Zweiphasenströmungen an einem differentiellen Kontrollvolumen  $dV^*$ . Schwarze Linien: kontinuierliche Phase; grüne Linien: disperse Phase.

Simulation von höchst beladenen Partikelströmungen sind diese Euler-Euler-Verfahren jedoch oftmals nicht vermeidbar.

Mit Hilfe moderner Rechnertechnologien und der fortwährenden Optimierung der numerischen Algorithmen wird der Euler-Lagrange-Ansatz auch für Partikelströmungen mit hohen Partikelzahlen immer attraktiver. Zusammen mit zeitlich hochauflösenden Verfahren zur Simulation turbulenter Strömungen ist dieser Ansatz mit Sicherheit der vielversprechendste zur Berechnung praxisrelevanter Fälle von dispersen Mehrphasenströmungen. Die in dieser Arbeit entwickelten Kollisionsmodelle sind deterministisch, d. h. mit ihnen kann die Flugbahnänderung eines Partikels nach einer Kollision mit einer Wand oder einem anderen Partikel errechnet werden, wenn Flugrichtung und -geschwindigkeit des Partikels unmittelbar vor der Kollision bekannt sind. Demnach sind diese Modelle für die Anwendung auf Euler-Lagrange-Simulationen gedacht – aus diesem Grund wird der Euler-Euler-Ansatz hier nicht weiter verfolgt.

### 2.3.2. Grundgleichungen für die kontinuierliche Phase

Die in dieser Arbeit behandelten Zweiphasenströmungen beschränken sich auf inkompressible Strömungen, also Strömungen mit konstanter Dichte, in denen die Fluid- und Partikelgeschwindigkeiten wesentlich kleiner sind als die Schallgeschwindigkeit der Trägerströmung. Auch Temperaturänderungen werden im Folgenden vernachlässigt, so dass zur vollständigen mathematischen Formulierung des physikalischen Modells für die kontinuierliche Phase zwei fundamentale Erhaltungssätze aus der Physik herangezogen werden können:

- der Satz zur Erhaltung der *Masse* und
- der Satz zur Erhaltung des *Impulses*.

## 2. Strömungsmechanische Grundlagen

Der Massenerhaltungssatz besagt, dass in einem physikalischen System Masse weder erzeugt noch zerstört werden kann. Bezieht man dies auf ein infinitesimal kleines Kontrollvolumen  $d\mathcal{V}^*$ , welches gemäß der Eulerschen Betrachtungsweise von einem Fluid durchströmt wird (Abb. 2.3(a)), bedeutet das, dass die zeitliche Massenänderung in dem Kontrollvolumen der Differenz von Massenzu- und Massenabfluss an den Rändern entsprechen muss. Für den Fall eines Fluides mit konstanter Dichte  $\rho_f^*$  ist die Masse in dem Kontrollvolumen  $dm_f^* = \rho_f^* d\mathcal{V}^* = \text{konst.}$  Demnach darf sich die Masse bei einer inkompressiblen Strömung innerhalb eines ortsfesten Kontrollvolumens zeitlich nicht ändern, damit die Massenerhaltung nicht verletzt wird. Daraus folgt unmittelbar, dass das Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen Strömung divergenzfrei sein muss (Spurk und Aksel, 2007):

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_f^* = 0. \quad (2.5)$$

In dieser Gleichung, die auch Kontinuitätsgleichung genannt wird, ist  $\nabla$  der so genannte Nabla-Operator und  $\mathbf{v}_f^*$  der Geschwindigkeitsvektor der kontinuierlichen Phase.

Die andere fundamentale Erhaltungsgröße einer inkompressiblen Strömung ist der Impuls. Aus dem zweiten Newtonschen Gesetz (Brandt und Dahmen, 2005) folgt – bezogen auf das bereits für die Massenerhaltung betrachtete Kontrollvolumen  $d\mathcal{V}^*$  –, dass die Impulsänderung der Strömung in diesem Kontrollvolumen gleich der Differenz des über die Volumenberandung ein- und ausströmenden Impulses und der Summe aller angreifenden Kräfte sein muss (Schlichting und Gersten, 2006). Diese Kräfte können entweder Volumenkräfte (z. B. die Schwerkraft) oder Oberflächenkräfte (z. B. Druck- und Schubspannungen) sein. Unter Anwendung des Impulserhaltungssatzes erhält man dann in vektorieller Schreibweise die folgende Impulsgleichung (Spurk und Aksel, 2007):

$$\rho_f^* \left[ \frac{\partial \mathbf{v}_f^*}{\partial t^*} + \nabla \cdot (\mathbf{v}_f^* \mathbf{v}_f^*) \right] = -\nabla p^* - \nabla \cdot \mathbb{T}^* + \mathbf{s}^*. \quad (2.6)$$

Darin ist  $t^*$  die Zeit,  $p^*$  der statische Druck,  $\mathbb{T}^*$  der molekülbedingte Spannungstensor und  $\mathbf{s}^*$  der Quelltermvektor, der alle Volumenkräfte (wie z. B. die Schwerkraft) enthält. Für die Strömung eines inkompressiblen, Newtonschen Fluides lässt sich der Spannungstensor nach Herwig (2006) mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung (2.5) und des Deformationstensors  $\mathbb{S}^*$  folgendermaßen ausdrücken:

$$\mathbb{T}^* = -2\mu_f^* \mathbb{S}^*,$$

mit

$$\mathbb{S}^* = \frac{1}{2} \left[ (\nabla \mathbf{v}_f^*)^T + \nabla \mathbf{v}_f^* \right]$$

und der dynamischen Viskosität des Fluides  $\mu_f^*$ . Da die Stoffgrößen  $\rho_f^*$  und  $\mu_f^*$  bei inkompressiblen, isothermen Strömungen Newtonscher Fluide konstant sind, wird die Impulsgleichung (2.6) dann schließlich zu:

$$\rho_f^* \left[ \frac{\partial \mathbf{v}_f^*}{\partial t^*} + \nabla \cdot (\mathbf{v}_f^* \mathbf{v}_f^*) \right] = -\nabla p^* + 2\mu_f^* \nabla \cdot \mathbb{S}^* + \mathbf{s}^*. \quad (2.7)$$



Das Gleichungssystem bestehend aus den Gleichungen (2.5) und (2.7) ist auch unter dem Namen *Navier-Stokes-Gleichungen* bekannt und bildet ein gekoppeltes System aus insgesamt vier nichtlinearen, partiellen Differentialgleichungen zur Ermittlung der drei Komponenten des Strömungsgeschwindigkeitsvektors  $\mathbf{v}_f^*$  und des statischen Druckes  $p^*$ . Die Gleichungen beschreiben zusammen mit geeigneten Anfangs- und Randbedingungen vollständig die Strömung eines inkompressiblen Newtonschen Fluides und können demnach zur Modellierung der kontinuierlichen Phase einer dispersen Mehrphasenströmung verwendet werden.

Bei numerischen Analysen ist es oftmals nützlich, die Navier-Stokes-Gleichungen in eine dimensionslose Form zu bringen, anhand derer physikalisch ähnliche Strömungen verglichen werden können (Ferziger und Perić, 2008). Dazu werden die dimensionsbehafteten Größen, die hier mit dem Symbol \* versehen sind, mit konstanten Referenzwerten normiert. Diese Referenzwerte sind zum einen die charakteristische Länge  $L_0^*$  und die Referenzgeschwindigkeit  $U_0^*$ , welche zu den folgenden Beziehungen zwischen den dimensionslosen und den dimensionsbehafteten Größen führen:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x^*}{L_0^*}, & y &= \frac{y^*}{L_0^*}, & z &= \frac{z^*}{L_0^*}, & t &= t^* \frac{U_0^*}{L_0^*}, \\ \mathbf{v}_f &= \frac{\mathbf{v}_f^*}{U_0^*}, & p &= \frac{p^*}{\rho_f^* U_0^{*2}}, & \mathbb{S} &= \frac{\mathbb{S}^* L_0^*}{U_0^*}, & \mathbf{s} &= \frac{\mathbf{s}^* L_0^*}{\rho_f^* U_0^{*2}}. \end{aligned}$$

Daraus resultieren dann die dimensionslosen Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible Strömungen:

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_f = 0, \tag{2.8a}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}_f^* \mathbf{v}_f^*) = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot [(\nabla \mathbf{v}_f^*)^T + \nabla \mathbf{v}_f^*] + \mathbf{s}. \tag{2.8b}$$

Die bei der Entdimensionalisierung der Impulsgleichung entstandene Kennzahl

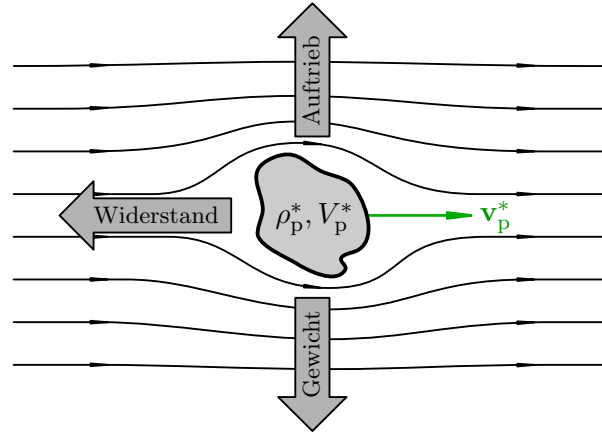
$$\text{Re} = \frac{\rho_f^* L_0^* U_0^*}{\mu_f^*} \tag{2.9}$$

wird Reynolds-Zahl genannt und ist einer der wichtigsten Ähnlichkeitsparameter in der Strömungsmechanik. So sind zwei inkompressible Strömungen genau dann strömungsmechanisch ähnlich, wenn zum einen geometrische Ähnlichkeit zwischen den beiden Fällen vorliegt (z. B. zwischen dem herunterskalierten Modell im Windkanal und dem Originalkörper) und zum anderen die Reynolds-Zahl gleich ist.<sup>3</sup> Dabei ist es völlig unerheblich, ob die Reynolds-Zahl bei einem Modell mit kleinerer Referenzlänge  $L_0^*$  konstant gehalten wird, indem beispielsweise die Referenzgeschwindigkeit  $U_0^*$  erhöht oder die dynamische Viskosität  $\mu_f^*$  verringert wird.

Im Kontext der Impulsgleichung (2.8b) kann die Reynolds-Zahl außerdem als das Verhältnis zwischen den Trägheits- und den molekularen Zähigkeitskräften in der Strö-

<sup>3</sup>Bei niedrigen Mach-Zahlen (also inkompressiblen Fluiden) und der Vernachlässigung des Schwerkrafteinflusses, was im Allgemeinen bei Fluiden mit geringer Dichte (z. B. Luft) üblich ist.

## 2. Strömungsmechanische Grundlagen



**Abbildung 2.4.:** Schematische Darstellung der Grundkräfte, die an einem Partikel in einer Trägerströmung angreifen.

mung interpretiert werden. Sie ist damit ein Indikator dafür, welche Rolle die molekularen Kräfte in einer betrachteten Strömung spielen. So sind bei sehr kleinen Reynoldszahlen die Zähigkeitskräfte groß genug, um zufällig auftretende, kleinste Störungen im Strömungsfeld wegzudämpfen, so dass sich eine gleichmäßige und geordnete Strömung ausbilden kann. Diesen Fall nennt man eine *laminare* Strömung. Bei hohen Reynoldszahlen treten jedoch die Trägheitskräfte in den Vordergrund: Aufgrund der Nichtlinearität des konvektiven Trägheitsterms auf der linken Seite der Impulsgleichung (2.8b) werden die Störungen im Geschwindigkeitsfeld dann verstärkt, während die Dämpfungseigenschaften der Fluidviskosität dieser Verstärkung nicht mehr entgegenwirken können. Die Strömung weist dann ein ungeordnet und chaotisch wirkendes Verhalten auf, in dem alle Strömungsgrößen teilweise erheblichen Schwankungen unterliegen. Strömungen mit solchen Eigenschaften werden als *turbulent* bezeichnet (Herwig, 2006).

### 2.3.3. Grundgleichungen für die disperse Phase

Während die Grundgleichungen der Trägerströmung hergeleitet wurden, indem die Erhaltungsgrößen Masse und Impuls an einem ortsfesten Kontrollvolumen bilanziert wurden, wird die disperse Phase gemäß des Lagrangeschen Ansatzes in einem sich bewegenden System untersucht (Abb. 2.4). Betrachtet man ein Partikel der Masse  $m_p^*$ , welches sich mit einer Geschwindigkeit von  $\mathbf{v}_p^*$  durch das Trägerfluid bewegt, so ist die Änderung seines Bahnimpulses  $\mathbf{p}_p^*$  wegen  $m_p^* = \text{konst.}$ :

$$\frac{d\mathbf{p}_p^*}{dt^*} = m_p^* \frac{d\mathbf{v}_p^*}{dt^*}.$$

Gemäß des zweiten Newtonschen Gesetzes (welches bereits in Abschnitt 2.3.2 zur Herleitung der Impulsgleichung angewendet wurde) ist die Impulsänderung eines Körpers eine Konsequenz aus der Summe aller an diesem Körper angreifenden Kräfte  $\mathbf{f}_i^*$ . Mit dem oben gezeigten Zusammenhang zwischen Impuls- und Geschwindigkeitsvektor eines

Partikels ergibt sich daraus die folgende Bewegungsgleichung für die Geschwindigkeit eines Lagrangeschen Partikels:

$$m_p^* \frac{d\mathbf{v}_p^*}{dt^*} = \sum_i \mathbf{f}_i^*. \quad (2.10)$$

Sind die äußeren Kräfte auf der rechten Seite der Gleichung (2.10) bekannt, so kann durch Integration der resultierende Geschwindigkeitsvektor ermittelt werden. Eine weitere Integration der Differentialgleichung

$$\frac{d\mathbf{x}_p^*}{dt^*} = \mathbf{v}_p^* \quad (2.11)$$

liefert dann den Ortsvektor  $\mathbf{x}_p^*$ , der die Position und in seinem zeitlichen Verlauf die Flugbahn des Partikels definiert.

Neben der translatorischen Bewegung kann ein Partikel zusätzlich durch von außen angreifende Momente in Rotation versetzt werden. Aus dem zweiten Newtonschen Gesetz folgt, dass die Drehimpulsänderung eines Körpers gleich der Summe aller äußeren Momente  $\mathbf{m}_i^*$  ist (Brandt und Dahmen, 2005):

$$\frac{d\mathbf{l}_p^*}{dt^*} = \sum_i \mathbf{m}_i^*.$$

Diese Gleichung wird auch Drehimpulserhaltungs- oder Drallsatz genannt. Für einen starren Körper ist der Drehimpuls  $\mathbf{l}_p^*$  gleich dem Produkt aus dem Trägheitstensor  $\mathbb{I}_p^*$  des Körpers und seines Winkelgeschwindigkeitsvektors  $\boldsymbol{\omega}_p^*$ . Damit erhält man den Drallsatz für starre Körper in Form einer Differentialgleichung zur Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit des Partikels:

$$\mathbb{I}_p^* \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}_p^*}{dt^*} = \sum_i \mathbf{m}_i^*. \quad (2.12)$$

Die Kräfte  $\mathbf{f}_i^*$  und Momente  $\mathbf{m}_i^*$ , die an einem Teilchen angreifen und dessen Bewegung beeinflussen, haben viele verschiedene Ursachen. Typische Beispiele für die äußeren Kräfte sind in Abb. 2.4 dargestellt und entstammen u. a. dem strömungsmechanischen Widerstand, dem hydrostatischen und anderen Auftriebskräften sowie der Gravitation. In der Literatur wird zur Modellierung der Bewegung von sphärischen Partikeln sehr häufig auf die so genannte BBO-Bewegungsgleichung, benannt nach den Autoren Basset, Boussinesq und Oseen, und ihre Erweiterungen zurückgegriffen (Tchen, 1947; Corrsin und Lumley, 1956; Maxey und Riley, 1983). Die BBO-Gleichung enthält neben den oben genannten Termen für Widerstand, Auftrieb und Schwerkraft noch zusätzliche Kräfte, die aus der instationären Partikelbewegung entstehen.<sup>4</sup> Nach Kussin (2004) können diese Kräfte bei Gas-Feststoff-Strömungen wegen der geringen Dichte der Trägerströmung

---

<sup>4</sup>Zum Beispiel die aus der so genannten virtuellen Masse resultierende zusätzliche Trägheitskraft oder die Basset-Kraft (Odar und Hamilton, 1964).

## 2. Strömungsmechanische Grundlagen

im Vergleich zur Dichte der Partikel jedoch vernachlässigt werden und finden in dieser Arbeit deshalb keine weitere Berücksichtigung.

Unter der Annahme von im Vergleich zur Strömung hohen Partikeldichten  $\rho_p^* \gg \rho_f^*$  setzt sich die Summe aller äußeren Kräfte in Gl. (2.10) damit aus vier verschiedenen Kraftformen zusammen:

$$\sum_i \mathbf{f}_i^* = \mathbf{f}_W^* + \mathbf{f}_A^* + \mathbf{f}_{\text{Grv}}^* + \mathbf{f}_{\text{hyd}}^*.$$

Die Widerstandskraft  $\mathbf{f}_W^*$  und die Resultierende der Auftriebskräfte eines Partikels  $\mathbf{f}_A^*$ , welche hier nicht den hydrostatischen Auftrieb beinhaltet, sind von der Partikelform, der Partikelgeschwindigkeit, dem Strömungsfeld der kontinuierlichen Phase und weiteren Parametern abhängig. Für diese Kräfte existieren deshalb keine allgemeingültigen Formulierungen und auch nur in sehr wenigen Spezialfällen können analytische Zusammenhänge dafür gefunden werden. Die Gravitationskraft  $\mathbf{f}_{\text{Grv}}^*$  dagegen ist ganz allgemein definiert als das Produkt aus der Partikelmasse  $m_p^*$  und dem Schwerebeschleunigungsvektor  $\mathbf{g}^*$ :

$$\mathbf{f}_{\text{Grv}}^* = m_p^* \mathbf{g}^* = \rho_p^* V_p^* \mathbf{g}^*.$$

Nach dem Prinzip von Archimedes ist die hydrostatische Auftriebskraft  $\mathbf{f}_{\text{hyd}}^*$ , die von der Strömung aus auf das Partikel einwirkt, so groß wie die Gewichtskraft des verdrängten Fluidvolumens und der Schwerkraft entgegengesetzt (Sigloch, 2009). Mit dem Partikelvolumen  $V_p^*$  gilt dann allgemein

$$\mathbf{f}_{\text{hyd}}^* = -\rho_f^* V_p^* \mathbf{g}^*,$$

so dass die Summe aller äußeren Kräfte dann mit

$$\sum_i \mathbf{f}_i^* = \mathbf{f}_W^* + \mathbf{f}_A^* + (\rho_p^* - \rho_f^*) V_p^* \mathbf{g}^* \quad (2.13)$$

bestimmt ist.

Wie bereits angemerkt stellt die Formulierung von Gleichungen für die Widerstands- und Auftriebskräfte bei einem Partikel mit allgemeiner Geometrie eine äußerst komplexe Problematik dar. Deshalb wird in vielen Fällen die allgemeine Gestalt der Partikel auf eine einfache Kugelgeometrie reduziert, für die analytische Lösungen und Korrelationen zur Berechnung der Widerstands- und Auftriebskräfte bekannt sind. Also wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit davon ausgegangen, dass die Partikel *sphärisch* sind und sich darüber hinaus nicht infolge der Kräfte verformen können. Für die Widerstandskraft  $\mathbf{f}_W^*$  eines kugelförmigen Partikels kann ein Ansatz über den aerodynamischen Widerstandsbeiwert  $c_W$  gewählt werden. Dieser ist mit dem Betrag der relativen Anströmgeschwindigkeit  $|\mathbf{v}_f^* - \mathbf{v}_p^*|$  nach Sommerfeld (2000) definiert über die Gleichung

$$c_W = \frac{\mathbf{f}_W^*}{\frac{\rho_f^*}{2} |\mathbf{v}_f^* - \mathbf{v}_p^*|^2 A_p^*},$$

in der die Bezugsfläche  $A_p^*$  die Stirnfläche des Partikels ist. Stellt man diese Definition von  $c_W$  nach der Widerstandskraft um und berücksichtigt dabei, dass der Kraftvektor des aerodynamischen Widerstandes per Definitionem stets in Richtung der relativen Anströmung zeigt, so erhält man den folgenden Ausdruck für  $\mathbf{f}_W^*$ :

$$\mathbf{f}_W^* = c_W \frac{\rho_f^*}{2} A_p^* |\mathbf{v}_f^* - \mathbf{v}_p^*| (\mathbf{v}_f^* - \mathbf{v}_p^*). \quad (2.14)$$

Bei der Entdimensionalisierung der Navier-Stokes-Gleichungen wurde im vorhergehenden Abschnitt gezeigt, dass die Reynolds-Zahl bei inkompressiblen Strömungen ein zentraler Ähnlichkeitsparameter ist. Demnach muss der  $c_W$ -Wert eines kugelförmigen Partikels eine Funktion von der Partikel-Reynolds-Zahl sein, d. h.

$$c_W = f(\text{Re}_p),$$

wobei

$$\text{Re}_p = \frac{\rho_f^* D_p^* |\mathbf{v}_f^* - \mathbf{v}_p^*|}{\mu_f^*} \quad (2.15)$$

ist. Der  $c_W$ -Wert einer Kugel ist sowohl experimentell als auch numerisch über sehr weite Reynolds-Zahlbereiche untersucht worden (Schlichting und Gersten, 2006). Für sehr kleine Partikel-Reynolds-Zahlen  $\text{Re}_p < 0,5$  kann nach Stokes (1851) die analytische Lösung

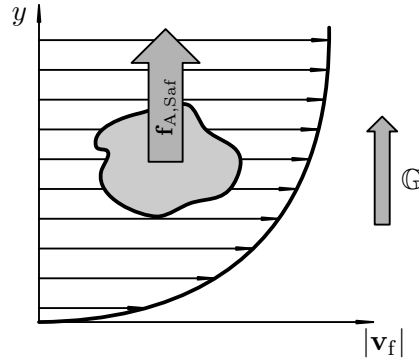
$$c_W = \frac{24}{\text{Re}_p}$$

gefunden werden. Bei höheren Partikel-Reynolds-Zahlen sind keine analytischen Lösungen mehr bekannt und es müssen Korrelationen, die auf Mess- und/oder Simulationsdaten basieren, verwendet werden. Häufige Anwendung findet dabei die Korrelation von Schiller und Naumann (1933), welche in einem Bereich von  $\text{Re}_p < 1000$  verwendet werden kann:

$$c_W = \frac{24}{\text{Re}_p} \underbrace{(1 + 0,15 \text{Re}_p^{0,687})}_{\kappa} = \frac{24}{\text{Re}_p} \kappa. \quad (2.16)$$

Die letzte unbekannte Kraft in Gl. (2.13) ist die Auftriebskraft  $\mathbf{f}_A^*$ , welche sich im Allgemein aus unterschiedlichen Teilkräften zusammensetzt. Da hier ausschließlich kugelförmige Partikel betrachtet werden, muss der von der Partikelgeometrie und dem Anstellwinkel der relativen Anströmung abhängige dynamische Auftrieb (bekannt aus der klassischen Tragflügelumströmung) nicht berücksichtigt werden. Die zwei wichtigsten Auftriebskräfte, die an einem sphärischen Partikel angreifen können, sind die *Saffman-Auftriebskraft* und die durch die Partikelrotation hervorgerufene *Magnus-Kraft*. Letztere wird in dieser Arbeit jedoch nicht weiter berücksichtigt, da die Magnus-Kraft im für die Simulationen verwendeten Solver nicht implementiert war. Ein Ansatz für diese Kraft

## 2. Strömungsmechanische Grundlagen



**Abbildung 2.5.:** Entstehung der Saffman-Auftriebskraft an einem Partikel in einer Strömung mit dem Geschwindigkeitsgradienten  $\mathbb{G}$ .

kann im Bereich niedriger Reynolds-Zahlen z. B. aus Rubinow und Keller (1961) entnommen werden.

Die an einem sphärischen Partikel angreifende Auftriebskraft  $f_A^*$  setzt sich hier also nur aus der Saffman-Auftriebskraft  $f_{A,Saf}^*$  zusammen: Wird ein Partikel räumlich ungleichmäßig angeströmt (z. B. in einer Scherströmung mit starkem Geschwindigkeitsgradienten), so wirkt auf das Partikel wie in Abb. 2.5 dargestellt aufgrund von Trägheitseffekten (vgl. (McLaughlin, 1991; Stone, 2000)) eine Kraft in Richtung des Geschwindigkeitsgradienten der Strömung, die Saffman-Auftriebskraft genannt wird. Für diese Kraft wurde von Saffman (1965) eine Gleichung aufgestellt, deren Gültigkeitsbereich von McLaughlin (1991) erweitert werden konnte. Dazu entwickelte McLaughlin eine Gleichung, die im Fall einer allgemeinen, dreidimensionalen Strömung folgendermaßen lautet:

$$\mathbf{f}_{A,Saf}^* = \frac{18}{\pi^2} \frac{\sqrt{\text{Re}_{\mathbb{G}}}}{\text{Re}_p} J^u \frac{\rho_f^*}{2} A_p^* |\mathbf{v}_f^* - \mathbf{v}_p^*| [(\mathbf{v}_f^* - \mathbf{v}_p^*) \cdot \text{sgn } \mathbb{G}^*]. \quad (2.17)$$

Darin ist  $\text{Re}_{\mathbb{G}}$  die auf den Geschwindigkeitsgradienten der kontinuierlichen Phase

$$\mathbb{G}^* = \nabla \mathbf{v}_f^*$$

und den Partikeldurchmesser bezogene Reynolds-Zahl:

$$\text{Re}_{\mathbb{G}} = \frac{\rho_f^* |\mathbb{G}^*| D_p^{*2}}{\mu_f^*}.$$

Der Faktor  $J^u$  in Gl. (2.17) ist ein Korrekturfaktor, der eine Funktion von  $\sqrt{\text{Re}_{\mathbb{G}}}/\text{Re}_p$  ist:

$$J^u = f\left(\frac{\sqrt{\text{Re}_{\mathbb{G}}}}{\text{Re}_p}\right).$$

Die Berechnung von  $J^u$  ist nicht trivial und wird aus diesem Grund hier nicht weiter diskutiert. In McLaughlin (1991) sind für verschiedene Werte und Wertebereiche des Parameters  $\sqrt{\text{Re}_{\mathbb{G}}}/\text{Re}_p$  tabellierte Funktionswerte bzw. Näherungsformeln gegeben.

### 2.3. Grundgleichungen

Die Gleichungen (2.14) und (2.17) für die Widerstands- und Auftriebskräfte an einem sphärischen Partikel können in Gl. (2.13) eingesetzt werden, um einen Ausdruck für die Summe aller hier betrachteten Partikelkräfte zu erhalten. Die rechte Seite der Bewegungsgleichung (2.10) ist dann bestimmt und man erhält nach einer Division durch die Partikelmasse  $m_p^* = \rho_p^* V_p^*$  die folgende Differentialgleichung für die Geschwindigkeit eines Partikels in Lagrangescher Betrachtungsweise:

$$\frac{d\mathbf{v}_p^*}{dt^*} = \frac{\rho_f^*}{2\rho_p^*} \frac{A_p^*}{V_p^*} |\mathbf{v}_f^* - \mathbf{v}_p^*| \left\{ c_W (\mathbf{v}_f^* - \mathbf{v}_p^*) + \frac{18}{\pi^2} \frac{\sqrt{\text{Re}_G}}{\text{Re}_p} J^u [(\mathbf{v}_f^* - \mathbf{v}_p^*) \cdot \text{sgn } \mathbb{G}^*] \right\} + \left( 1 - \frac{\rho_f^*}{\rho_p^*} \right) \mathbf{g}^*. \quad (2.18)$$

Dieser Ausdruck lässt sich noch weiter vereinfachen: Mit der Stirnfläche  $A_p^*$  und dem Volumen  $V_p^*$  einer Kugel ist

$$\frac{A_p^*}{V_p^*} = \frac{\frac{\pi}{4} D_p^{*2}}{\frac{\pi}{6} D_p^{*3}} = \frac{3}{2D_p^*}.$$

Zusätzlich wird die dimensionslose Partikeldichte  $\rho_p$  definiert als das Verhältnis von Partikeldichte zu Fluidichte:

$$\rho_p = \frac{\rho_p^*}{\rho_f^*}.$$

Mit der Kugelvolumenformel für  $V_p^*$  und der Definition der Partikel-Reynolds-Zahl in Gl. (2.15) kann aus Gl. (2.3) für die Partikelrelaxationszeit der folgende Zusammenhang ermittelt werden:

$$T_p^* = \frac{\rho_p^* D_p^{*2}}{18\mu_f^*}. \quad (2.19)$$

Setzt man diese Größen in die Bewegungsgleichung (2.18) ein, so lautet die vereinfachte Bewegungsgleichung unter Berücksichtigung der Widerstandskraft, der Auftriebskräfte und der Schwerkraft schließlich:

$$\frac{d\mathbf{v}_p^*}{dt^*} = \kappa \frac{\mathbf{v}_f^* - \mathbf{v}_p^*}{T_p^*} + J^u \frac{3\sqrt{\text{Re}_G}}{4\pi^2} \frac{(\mathbf{v}_f^* - \mathbf{v}_p^*) \cdot \text{sgn } \mathbb{G}^*}{T_p^*} + \left( 1 - \frac{1}{\rho_p} \right) \mathbf{g}^*. \quad (2.20)$$

Die äußeren Momente  $\mathbf{m}_i^*$ , die zur Lösung der Drallgleichung (2.12) bestimmt werden müssen, werden ebenso wie die Partikelkräfte stark von der Partikelgeometrie, der Trägerströmung und anderen Faktoren beeinflusst. Für die hier betrachteten sphärischen Partikel soll nach Sommerfeld (2000) lediglich das durch die molekulare Wechselwirkung der Strömung an der Oberfläche des rotierenden Partikels wirkende Reibmoment  $\mathbf{m}_R^*$  berücksichtigt werden:

$$\sum_i \mathbf{m}_i^* = \mathbf{m}_R^*.$$

## 2. Strömungsmechanische Grundlagen

Nach Rubinow und Keller (1961) kann für ein rotierendes, sphärisches Partikel im Stokes-Regime die folgende analytische Gleichung zur Berechnung des auf das Partikel einwirkenden Reibmomentes ermittelt werden:<sup>5</sup>

$$\mathbf{m}_R^* = -\pi\mu_f^* D_p^{*3} \boldsymbol{\omega}_p^* \quad (2.21)$$

Aufgrund der Vernachlässigung der Trägheitskräfte ist diese Gleichung bezogen auf mit der Partikelwinkelgeschwindigkeit gebildete Reynolds-Zahlen gemäß

$$\text{Re}_\omega = \frac{\rho_f^* D_p^{*2} |\boldsymbol{\omega}_p^*|}{\mu_f^*} < 32$$

beschränkt (Sommerfeld, 2000). Setzt man das Reibmoment aus Gl. (2.21) in die Drallgleichung (2.12) ein, so lautet die Differentialgleichung zur Bestimmung der Partikelwinkelgeschwindigkeit:

$$\mathbb{I}_p^* \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}_p^*}{dt^*} = -\pi\mu_f^* D_p^{*3} \boldsymbol{\omega}_p^* .$$

Für eine homogene Kugel ist der Trägheitstensor  $\mathbb{I}_p^*$  nach Brandt und Dahmen (2005)

$$\mathbb{I}_p^* = I_p^* \mathbb{E} ,$$

mit der Einheitsmatrix  $\mathbb{E}$ . Das Trägheitsmoment der Kugel ist durch die Gleichung

$$I_p^* = \frac{m_p^* D_p^{*2}}{10} \quad (2.22)$$

bestimmt. Zusammen mit der Definition der Partikelrelaxationszeit  $T_p^*$  aus Gl. (2.19) erhält man daraus schließlich die folgende gewöhnliche Differentialgleichung für den Winkelgeschwindigkeitsvektor des sphärischen Partikels:

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}_p^*}{dt^*} = -\frac{10}{3} \frac{\boldsymbol{\omega}_p^*}{T_p^*} . \quad (2.23)$$

Im Zuge der in Abschnitt 2.3.2 durchgeführten Entdimensionalisierung der Navier-Stokes-Gleichungen ist es sinnvoll, die Grundgleichungen der dispersen Phase (Gleichungen (2.11) und (2.20)) ebenfalls in der dimensionslosen Form zu verwenden. Zusätzlich zu den auf Seite 13 gezeigten Zusammenhängen zwischen den dimensionslosen und den dimensionsbehafteten Größen werden für die disperse Phase noch die folgenden Umrechnungsformeln eingeführt:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_p &= \frac{\mathbf{x}_p^*}{L_0^*} , & \mathbf{v}_p &= \frac{\mathbf{v}_p^*}{U_0^*} , & \boldsymbol{\omega}_p &= \boldsymbol{\omega}_p^* \frac{L_0^*}{U_0^*} , & T_p &= T_p^* \frac{U_0^*}{L_0^*} , \\ \mathbb{G} &= \mathbb{G}^* \frac{L_0^*}{U_0^*} , & \mathbf{g} &= \mathbf{g}^* \frac{L_0^*}{U_0^{*2}} , & D_p &= \frac{D_p^*}{L_0^*} . \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Nach Sommerfeld (2000) kann hierfür zusätzlich noch die Rotation des Fluides  $\nabla \times \mathbf{v}_f^*$  berücksichtigt werden, um analog zur relativen Partikelgeschwindigkeit eine relative Winkelgeschwindigkeit zu erhalten. In dieser Arbeit wurde diese Größe jedoch nicht mit in die Bewegungsgleichung für  $\boldsymbol{\omega}_p^*$  aufgenommen.



### 2.3. Grundgleichungen

Die beiden Reynolds-Zahlen  $\text{Re}_p$  und  $\text{Re}_G$  können mit den dimensionslosen Größen in Abhängigkeit zu der Reynolds-Zahl der Strömung (Gl. (2.9)) ausgedrückt werden:

$$\text{Re}_p = \text{Re } D_p |\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_p| \quad \text{und} \quad \text{Re}_G = \text{Re } D_p^2 |G|.$$

Die dimensionslosen Grundgleichungen für die disperse Phase lauten dann:

$$\frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = \kappa \frac{\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_p}{T_p} + \frac{3\sqrt{\text{Re}_G}}{4\pi^2} \frac{(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_p) \cdot \text{sgn } G}{T_p} + \left(1 - \frac{1}{\rho_p}\right) \mathbf{g}, \quad (2.24a)$$

$$\frac{d\mathbf{x}_p}{dt} = \mathbf{v}_p, \quad (2.24b)$$

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}_p}{dt} = -\frac{10}{3} \frac{\boldsymbol{\omega}_p^*}{T_p^*}. \quad (2.24c)$$

## 3. Numerische Simulation disperser Mehrphasenströmungen

Dieses Kapitel wendet sich der numerischen Simulation von partikelbeladenen Mehrphasenströmungen zu, welche der zentrale Gegenstand dieser Arbeit und Grundbaustein für die später vorgestellten Kollisionsmodelle ist. Es wird zunächst allgemein auf die Large-Eddy Simulation eingegangen, eine Methode zur Simulation turbulenter Strömung, um anschließend im Detail auf den in dieser Arbeit verwendeten Solver *LESOCC* einzugehen.

### 3.1. Grundlagen der Large-Eddy Simulation

#### 3.1.1. Das Turbulenzproblem

Die Navier-Stokes-Gleichungen, welche hier als Grundgleichungen für die kontinuierliche Phase dienen und in Abschnitt 2.3.2 für inkompressible Strömungen aufgestellt wurden, sind sowohl für laminare als auch turbulente Strömungen gültig. Wie bereits erwähnt, weisen Strömungen mit hohen Reynolds-Zahlen, in denen die Trägheitskräfte die viskosen Kräfte dominieren und kleinste Instabilitäten auftreten können, ein ungeordnetes und scheinbar chaotisches Verhalten auf. Die Verwirbelungen einer turbulenten Strömung erstrecken sich räumlich und zeitlich über ein breites Band an Skalen. Dabei hängt die Größenordnung der Differenz zwischen den größten und den kleinsten Skalen der Turbulenz in erster Linie von der Reynolds-Zahl ab (Davidson, 2004).

Die Ausdehnungen der größten turbulenten Wirbel befinden sich in der Größenordnung eines für das gegebene Strömungsproblem typischen Längenmaßes (z. B. der Durchmesser eines umströmten Zylinders). Sie entziehen der Hauptströmung kinetischen Energie und zerfallen nach einer gewissen Zeitspanne in kleinere Wirbel, welche wiederum in noch kleinere Wirbel zerfallen und so weiter. Bei diesem Zerfallsprozess, welcher als *Kolmogorovsche Energiekaskade* bezeichnet wird, wird im statistischen Mittel die kinetische Energie der großskaligen Wirbel auf immer kleiner werdende Wirbelstrukturen übertragen, bis die molekulare Viskosität der Strömung dafür sorgt, dass die kinetische Energie der kleinsten Wirbel in Form von Wärme dissipiert (Hinze, 1975).<sup>6</sup> Im statistischen Mittel findet über die Kolmogorovsche Energiekaskade in einer turbulenten Strömung also eine ständige Umwandlung von kinetischer Energie der Hauptströmung zu Wärme statt, was die dissipativen Eigenschaften von Turbulenz erklärt.

---

<sup>6</sup>Dies gilt nur für das statistische Mittel einer turbulenten Strömung. Lokal kann es über gewisse Zeitspannen hinweg durchaus auch zu einem Rücktransfer der kinetischen Energie von den kleinen zu den großen Skalen kommen. Dieser Effekt wird auch *Backscatter-Effekt* genannt.

### 3.1. Grundlagen der Large-Eddy Simulation

Die Abmessungen der kleinskaligen, dissipativen Wirbelstrukturen liegen in der Regel um mehrere Größenordnungen unter denen der großskaligen Wirbel und hängen nicht von der Geometrie, sondern von der Reynolds-Zahl der betrachteten Konfiguration ab (Davidson, 2004). Zur Abschätzung der räumlichen und zeitlichen Skalen, auf denen die Energiedissipation der Turbulenz stattfindet, wird häufig auf die *Mikroskala von Kolmogorov* zurückgegriffen. Die so genannte Kolmogorov-Länge  $L_K^*$  ist ein Maß für die kleinsten Wirbel einer turbulenten Strömung. Zwischen dieser Skala und den Abmessungen der größten Wirbel (die integrale Längenskala  $L_E^*$ ) besteht nach Hinze (1975) der folgende Zusammenhang:

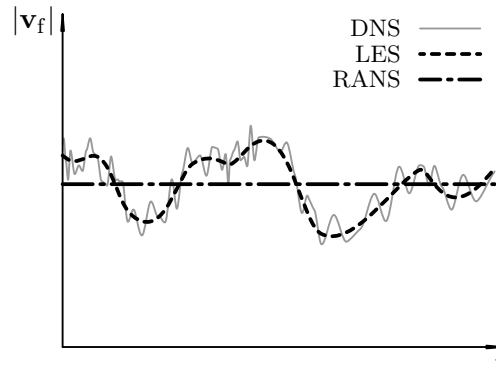
$$\frac{L_K^*}{L_E^*} \sim \text{Re}_E^{-0,75}.$$

Darin ist  $\text{Re}_E$  die auf die integrale Skala bezogene Reynolds-Zahl. Dies bedeutet also, dass bei einer höheren Reynolds-Zahl und gleich bleibender Geometrie (d. h.  $L_E \approx \text{konst.}$ ) die kleinskaligen Wirbelstrukturen kleiner werden.

Weil die Navier-Stokes-Gleichungen nach gegenwärtigem Stand der Forschung für alle technisch relevanten turbulenten Strömungen gültig sind, können bei einer numerischen Simulation mit diesen Gleichungen im Prinzip alle turbulenten Strukturen und Prozesse korrekt wiedergegeben werden, wenn der numerische Fehler zu vernachlässigen ist. Dies gilt jedoch nur unter der Voraussetzung, dass die Maschenweite des numerischen Gitters, welches das Strömungsfeld räumlich diskretisiert, in allen drei Raumrichtungen nicht größer ist als die Kolmogorov-Länge  $L_K^*$  (Ferziger und Perić, 2008). Hinzu kommt auch noch, dass die kleinskaligen Wirbel ein stark instationäres Verhalten aufweisen: Analog zur Kolmogorov-Länge gibt es demnach eine Kolmogorov-Zeit  $T_K^*$ , die um Größenordnungen kleiner ist als das integrale Zeitmaß  $T_E^*$  und ebenfalls mit steigender Reynolds-Zahl kleiner wird. Daraus folgt, dass die Simulationen instationär und mit einem sehr kleinen Zeitschritt  $\Delta t^* \approx T_K^*$  durchgeführt werden müssen, damit die Turbulenz auch zeitlich über alle Skalen hinweg hinreichend aufgelöst wird.

Strömungssimulationen, die diese strikten Voraussetzungen erfüllen, werden *direkte numerische Simulationen* (DNS) genannt. Die Bezeichnung „direkt“ geht darauf zurück, dass zur vollständigen Simulation eines Problems lediglich das System der Navier-Stokes-Gleichungen (2.8a) und (2.8b) mit entsprechenden Anfangs- und Randbedingungen gelöst werden muss – zusätzliche Modellgleichungen für die Turbulenz sind in diesem Fall nicht von Nöten. Also ist die DNS ein Verfahren, mit dem turbulente Strömungen ohne die Einführung von weiteren Modellierungsfehlern berechnet werden können. Sie liefert Ergebnisse für alle Strömungsgrößen über alle räumlichen und zeitlichen Skalen hinweg, was in Experimenten nur selten zu realisieren ist, und ist für die Strömungsmechanik deshalb von großem Interesse. Auf der anderen Seite setzen die strikten Anforderungen an Gitter und Zeitschritt einer DNS selbst bei moderaten Reynolds-Zahlen erhebliche Ressourcen voraus, denn der Rechenaufwand einer DNS ist proportional zur dritten Potenz der Reynolds-Zahl (Breuer, 2002). Trotz der schnellen Weiterentwicklung der Rechnerleistungen in den letzten Jahren ist die DNS damit auch heute noch für praxisrelevante Probleme wenig geeignet.

### 3. Numerische Simulation disperser Mehrphasenströmungen



**Abbildung 3.1.:** Fiktives Resultat für den zeitlichen Verlauf des Geschwindigkeitsbetrags einer turbulenten Strömung bei DNS, LES und RANS-Simulation.

Die direkte numerische Simulation stellt sich damit also trotz ihrer Genauigkeit als für die ingenieurmäßige Praxis, welche oftmals komplexe Geometrien mit hohen Reynolds-Zahlen involviert, zu teuer heraus. In der numerischen Strömungsmechanik hat es sich deshalb etabliert, dieses sprichwörtliche Turbulenzproblem zu lösen, indem die gesamte Turbulenz oder nur gewisse Anteile der turbulenten Skala modelliert werden. Dazu haben sich vor allem zwei Ansätze durchgesetzt: die *Reynolds-averaged Navier-Stokes equations* (RANS-Gleichungen) und die *Large-Eddy Simulation* (LES).

Die RANS-Simulationen basieren auf der ursprünglich von Reynolds (1895) durchgeführten zeitlichen Mittelung der Navier-Stokes-Gleichungen. Eine genauere Herleitung der RANS-Gleichungen kann der Literatur (z. B. Herwig (2006)) entnommen werden, da sie nicht Gegenstand dieser Arbeit sind. Das Prinzip der Reynolds-Mittelung ist die Elimination der instationären Eigenschaften turbulenter Strömungen, indem die Navier-Stokes-Gleichungen über einen hinreichend großen Zeitraum hinweg gemittelt werden. Bei diesem Prozess entsteht ein neues System aus partiellen Differentialgleichungen, die die zeitlich gemittelte (statistisch stationäre) Strömung beschreiben und RANS-Gleichungen genannt werden. Jegliche Information über den zeitlichen Verlauf der Strömung geht dabei verloren (vgl. dazu Abb. 3.1) und das RANS-Gleichungssystem ist nach der Mittelung wegen der Nichtlinearität der Navier-Stokes-Gleichungen nicht geschlossen. Die Terme, die eine Schließung des Gleichungssystems verhindern, – allen voran der so genannte Reynolds-Spannungstensor – können bis heute nur mit Hilfe empirischer Modelle berechnet werden, die Turbulenzmodelle genannt werden und von denen etliche Varianten mit unterschiedlichen Ansätzen und Komplexitätsgraden existieren (Wilcox, 1993). Die RANS-Simulationen erfreuen sich in der industriellen Praxis großer Beliebtheit, weil die Erfordernisse an räumlicher und zeitlicher Auflösung im Vergleich zur DNS weitaus geringer sind und in der Regel sowieso nur die zeitlichen Mittelwerte bestimmter aerodynamischer Größen wie Auftrieb und Widerstand von Interesse sind. In manchen Fällen ist es jedoch nötig, die großskaligen Strukturen der Turbulenz zu kennen. So büßen viele RANS-Modelle bei Sekundärströmungen, Strömungsablösungen oder anderen großskalig instationären Effekten an Genauigkeit ein (Wilcox, 1993). An-

dere Anwendungen (z. B. die hier betrachteten Partikelströmungen) wiederum erfordern die zeitliche Entwicklung einer Strömung in einer Genauigkeit, die auch instationäre RANS-Simulationen nicht immer liefern können.

In solchen Fällen ist es dann meist sinnvoller, die großskaligen Strukturen der Turbulenz direkt – also ohne Modellierung – zu simulieren und für die kleinskaligen Wirbel, die als hinreichend isotrop und deswegen leicht durch einfache Modelle abbildbar angenommen werden, weiterhin einen Modellierungsansatz zu verfolgen. Solche Simulationen werden *Grobstruktursimulation* oder Large-Eddy Simulation (LES) genannt. Diese Aufteilung der turbulenten Strömung in eine direkt simulierte *Grobstruktur* und eine nicht aufgelöste *Feinstruktur* erfolgt über einen Filterungsansatz. Dabei werden alle hochfrequenten Skalen, die unterhalb einer bestimmten Filterweite  $\Delta$  liegen, herausgefiltert und mit Hilfe eines so genannten Feinstrukturmodells modelliert. Die Informationen der großskaligen Strukturen bleiben dabei jedoch erhalten, wie in Abb. 3.1 zu sehen ist. Large-Eddy Simulationen stellen somit eine Art Kompromiss zwischen der DNS und der Reynolds-Mittelung dar: Gegenüber der DNS wird der Rechenaufwand deutlich reduziert, da nur noch die großskaligen Strukturen räumlich und zeitlich aufgelöst werden müssen, die in einer RANS-Simulation zum größten Teil verloren gehen würden. Andererseits fallen bei Large-Eddy Simulationen die aus RANS-Simulationen bekannten Vereinfachungen wie stationäre oder zweidimensionale Strömungen weg, weil auch die turbulente Grobstruktur wie das gesamte turbulente Spektrum instationär und dreidimensional ist. Dennoch werden Grobstruktursimulationen in der Praxis immer häufiger verwendet, da die im Ingenieurwesen immer ambitionierter werdenden Designziele eine höhere Genauigkeit fordern und die gleichzeitig rasant wachsende Computertechnologie den erhöhten Ressourcenbedarf von Large-Eddy Simulationen decken kann.

#### 3.1.2. Grundgleichungen der LES und Modellierungsannahmen

Im vorhergehenden Abschnitt wurde dargelegt, dass der Large-Eddy Simulation ein Filterungsansatz zugrunde liegt. Bei dieser Methodik werden – analog zur Reynoldsmitteilung – die ungefilterten Größen (hier repräsentiert durch einen allgemeinen Skalar  $\phi$ ) aufgeteilt in einen Grobstrukturanteil  $\bar{\phi}$  und einen nicht aufgelösten Feinstrukturanteil  $\phi'$ :

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \bar{\phi}(\mathbf{x}, t) + \phi'(\mathbf{x}, t). \quad (3.1)$$

Die gefilterte Größe  $\bar{\phi}$  entsteht aus einer Filteroperation, die auf die Navier-Stokes-Gleichungen über das gesamte Integrationsgebiet  $E$  angewendet wird. Ein häufig gewählter Ansatz dafür ist die räumliche Filterung nach Leonard (1975), welche über das folgende Faltungsintegral definiert werden kann (Fröhlich, 2006):

$$\bar{\phi}(\mathbf{x}, t) = \int_E G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \Delta) \phi(\boldsymbol{\xi}, t) \, d\boldsymbol{\xi}.$$

Darin ist  $G$  eine als Filterkern bezeichnete Funktion, die eine charakteristische Filterweite  $\Delta$  besitzt. Der Filterkern ist so definiert, dass alle räumlichen Strukturen, die

### 3. Numerische Simulation disperser Mehrphasenströmungen

unterhalb der Größenordnung von  $\Delta$  liegen, nicht erfasst werden, während die oberhalb dieser Grenze liegenden Skalen der turbulenten Grobstruktur aufgelöst werden. Bekannte Filterfunktionen für  $G$  sind u. a. der *Top-Hat-Filter*, der *Cut-Off-Filter* oder der *Gauß-Filter*. In dieser Arbeit wird ausschließlich der auch als Box-Filter bekannte Top-Hat-Filter angewendet, weshalb auf die anderen Filterfunktionen hier nicht weiter eingegangen werden soll. Genauere Informationen zu den gängigen Filterkernen können beispielsweise Breuer (2002) entnommen werden. Die Filterfunktion des Top-Hat-Filters ist folgendermaßen definiert:

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \text{für } |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| \leq \frac{\Delta}{2}, \\ 0 & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Der Top-Hat-Filter sorgt also für eine einfache, räumliche Mittelwertbildung einer Strömungsgröße  $\phi$  in dem Bereich der Filterweite  $\Delta$  um den Punkt  $\mathbf{x}$ .

Wendet man nun diese Filtermethodik auf die Navier-Stokes-Gleichungen (2.8a) und (2.8b) an, so erhält man unter der Berücksichtigung, dass Differentiation und Filterung getauscht werden können (Fröhlich, 2006), mit der Definition in Gl. (3.1) die gefilterten Navier-Stokes-Gleichungen:<sup>7</sup>

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}_f = 0, \quad (3.2a)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{v}}_f \bar{\mathbf{v}}_f) = -\nabla \bar{p} - \nabla \cdot \bar{\mathbb{T}} + \bar{\mathbf{s}} - \nabla \cdot \mathbb{T}_{\text{SGS}}. \quad (3.2b)$$

In der Impulsgleichung (3.2b) ist  $\bar{\mathbb{S}}$  der mit der gefilterten Geschwindigkeit gebildete Spannungstensor:

$$\bar{\mathbb{T}} = -\frac{2}{\text{Re}} \bar{\mathbb{S}} = -\frac{1}{\text{Re}} \left[ (\nabla \bar{\mathbf{v}}_f)^T + \nabla \bar{\mathbf{v}}_f \right]. \quad (3.3)$$

Aufgrund der nichtlinearen Eigenschaften des Konvektionsterms auf der linken Seite von Gl. (2.8b) taucht bei der Durchführung der Filterungsoperation ein zusätzlicher Term auf, der Feinstrukturspannungstensor genannt wird:

$$\mathbb{T}_{\text{SGS}} = \overline{\bar{\mathbf{v}}_f \bar{\mathbf{v}}_f} - \bar{\mathbf{v}}_f \bar{\mathbf{v}}_f + \overline{\bar{\mathbf{v}}_f \mathbf{v}'_f} + \overline{\mathbf{v}'_f \bar{\mathbf{v}}_f} + \overline{\mathbf{v}'_f \mathbf{v}'_f}. \quad (3.4)$$

Diese Größe repräsentiert die Wirkung der nicht aufgelösten, kleinskaligen Turbulenz auf die Grobstruktur der Strömung (Breuer, 2002).

Die Ausdrücke in der Definition von  $\mathbb{T}_{\text{SGS}}$  in Gl. (3.4) setzen sich zum Teil aus der Feinstrukturgeschwindigkeit  $\mathbf{v}'_f$  zusammen, welche bei dem Filterungsprozess verloren geht und deshalb unbekannt ist. Also können die gefilterten Navier-Stokes-Gleichungen (3.2) ohne Kenntnis des Feinstrukturspannungstensors nicht geschlossen werden. Da es nicht möglich ist, aus den Grundgleichungen Zusammenhänge für die Terme in Gl. (3.4) zu entwickeln, ohne neue unbekannte Terme einzuführen (s. Fröhlich (2006)), muss der

<sup>7</sup>Für genauere Details zur Herleitung dieser Gleichungen sei auf Breuer (2002) verwiesen.

Feinstrukturspannungstensor modelliert werden. In formaler Hinsicht ist dieser zusätzliche Term also vergleichbar mit dem aus den RANS-Gleichungen bekannten Reynolds-Spannungstensor (Herwig, 2006), jedoch beschränkt sich der Feinstrukturspannungstensor nur auf einen kleinen Teil des Spektrums der Turbulenz, während der Reynolds-Spannungstensor die Wirkung der kompletten Turbulenz auf die zeitlich gemittelte Strömung repräsentiert. Ein Modell für die Feinstrukturspannungen muss also nur die wesentlich einfacher zu beschreibenden kleinskaligen Turbulenzstrukturen hinreichend genau wiedergeben, was in vielen Fällen schon mit sehr einfachen Ansätzen gelingt.

Eines der ersten dieser so genannten *Feinstrukturmodelle* ist das von Smagorinsky (1963) entwickelte und später nach ihm benannte *Smagorinsky-Modell*. Der Aufbau dieses sehr einfachen Modells unterteilt sich in zwei Schritte: Der erste Schritt orientiert sich an der Boussinesq-Hypothese (Wilcox, 1993) und drückt den anisotropen Anteil des Feinstrukturspannungstensors über eine einfache algebraische Gleichung mittels einer Feinstruktur-Wirbelviskosität  $\nu_{\text{SGS}}$  und dem Deformationstensor der gefilterten Strömung aus:

$$\mathbb{T}_{\text{SGS}}^{(a)} = -2\nu_{\text{SGS}} \bar{\mathbb{S}}. \quad (3.5)$$

Dieser erste Schritt gilt dabei nicht nur für das Smagorinsky-Modell, sondern prinzipiell auch für alle anderen Modelle, die auf der Wirbelviskositätshypothese basieren.

Da der Deformationstensor  $\bar{\mathbb{S}}$  wegen der Kontinuitätsgleichung (3.2a) in einer inkompressiblen Strömung spurfrei ist, muss der isotrope Teil des Feinstrukturspannungstensors gesondert behandelt werden. In der Regel wird dazu in Analogie zur bei den Wirbelviskositätsmodellen angewandten Methodik die kinetische Feinstrukturenergie  $k_{\text{SGS}}$  als die Hälfte der Spur des Feinstrukturspannungstensors definiert:

$$k_{\text{SGS}} = \frac{1}{2} \text{Sp} \mathbb{T}_{\text{SGS}}.$$

Damit setzt sich  $\mathbb{T}_{\text{SGS}}$  dann wie folgt aus dem anisotropen und dem isotropen Anteil zusammen:

$$\mathbb{T}_{\text{SGS}} = \mathbb{T}_{\text{SGS}}^{(a)} + \mathbb{T}_{\text{SGS}}^{(i)} = -2\nu_{\text{SGS}} \bar{\mathbb{S}} + \frac{2}{3} k_{\text{SGS}} \mathbb{E}. \quad (3.6)$$

Setzt man diesen Ausdruck und die Definitionsgleichung (3.3) in die gefilterte Impulsgleichung (3.2b) ein, so erhält man:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{v}}_f \bar{\mathbf{v}}_f) = -\nabla \bar{p} + \frac{2}{\text{Re}} \nabla \cdot \bar{\mathbb{S}} + \bar{\mathbf{s}} + 2 \nabla \cdot (\nu_{\text{SGS}} \bar{\mathbb{S}}) - \frac{2}{3} \nabla k_{\text{SGS}}.$$

Nach Breuer (2002) kann die kinetische Feinstrukturenergie auf den gefilterten dimensionslosen Druck der Strömung  $\bar{p}$  aufgeschlagen werden, um die ansonsten notwendige Modellierung dieser Größe zu umgehen. Dazu lässt sich eine neue Druckvariable

$$\bar{P} = \bar{p} + \frac{2}{3} k_{\text{SGS}}$$

### 3. Numerische Simulation disperser Mehrphasenströmungen

eingeführen, welche jedoch teilweise stark vom physikalischen Druck abweichen kann. Da üblicherweise aber nur der Druckverlauf entlang einer Oberfläche von Interesse ist (z. B. um den Auftrieb eines Profils zu bestimmen) und wegen der Haftbedingung an Wänden  $k_{\text{SGS}}$  dort gleich null ist, stellt diese Vereinfachung in typischen Anwendungsfällen kein großes Problem dar (Fröhlich, 2006). Somit lautet die Impulsgleichung unter Anwendung des Smagorinsky-Modells dann

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{v}}_f \bar{\mathbf{v}}_f) = -\nabla \bar{P} + 2 \nabla \cdot \left[ \left( \frac{1}{\text{Re}} + \nu_{\text{SGS}} \right) \bar{\mathbb{S}} \right] + \bar{\mathbf{s}}. \quad (3.7)$$

In formaler Hinsicht ist diese Gleichung der ungefilterten Impulsgleichung (2.8b) sehr ähnlich. Dies ist für die numerische Behandlung dieser Gleichung bei Large-Eddy Simulationen von Vorteil, da oftmals bereits aus DNS oder RANS-Simulationen bekannte Lösungsmethoden ohne größeren Änderungsaufwand übernommen werden können.

Im zweiten Schritt des Smagorinsky-Feinstrukturmodells wird ein Zusammenhang für die in Gl. (2.8b) noch unbekanntes Wirbelviskosität der Feinstruktur  $\nu_{\text{SGS}}$  gefunden. Durch die Grundlagenforschungen von Prandtl (1925) an Reynolds-gemittelten Strömungen ist bekannt, dass sich die turbulente Viskosität nach einer Dimensionsanalyse aus einem Längenmaß und einem Geschwindigkeitsmaß zusammensetzt:

$$\nu_{\text{SGS}} = L_{\text{SGS}} U_{\text{SGS}}.$$

Dieser Zusammenhang lässt sich auch auf das Smagorinsky-Modell anwenden. Für das charakteristische Längenmaß  $L_{\text{SGS}}$  macht es dann Sinn, einen Wert zu verwenden, der mit der herausgefilterten Feinstruktur in direktem Zusammenhang steht. Von Deardorff (1971) wurde dieses Maß proportional zur Filterweite  $\Delta$  gewählt, da diese dem Grenzwert der größten, nicht aufgelösten Turbulenzstruktur entspricht:

$$L_{\text{SGS}} = C_S \Delta.$$

Der Proportionalitätsfaktor  $C_S$  in dieser Gleichung wird Smagorinsky-Konstante genannt und muss zur endgültigen Schließung des Turbulenzproblems aus theoretischen Betrachtungen oder empirisch bestimmt werden. Das Geschwindigkeitsmaß  $U_{\text{SGS}}$  wird üblicherweise in Analogie zum Prandtlschen Mischungswegmodell auf Grundlage des Deformationstensors der Grobstruktur gebildet:

$$U_{\text{SGS}} = L_{\text{SGS}} |\bar{\mathbb{S}}|.$$

Mit diesen beiden Größen erhält man die Feinstruktur-Wirbelviskosität schließlich in der folgenden, explizit von der Grobstrukturströmung und einer Konstanten  $C_S$  abhängigen Form:

$$\nu_{\text{SGS}} = C_S^2 \Delta^2 |\bar{\mathbb{S}}|. \quad (3.8)$$

Der Wert der Smagorinsky-Konstanten ist problemabhängig (Sagaut, 2006) und kann daher angepasst werden, um die Ergebnisse einer Large-Eddy Simulation mit diesem



### 3.1. Grundlagen der Large-Eddy Simulation

Feinstrukturmodell zu beeinflussen. Für typische Strömungsprobleme, die Scherströmungen involvieren, kann die Smagorinsky-Konstante nach Breuer (2002) in einem Bereich von  $C_S = 0,065 - 0,1$  gewählt werden.

Praxisrelevante Probleme umfassen üblicherweise unterschiedliche Strömungsphänomene zugleich, weshalb es fraglich ist, ob ein globaler, konstanter Wert für  $C_S$  die Feinstruktur im gesamten Strömungsgebiet hinreichend modellieren kann. So ist in Wandnähe für Gl. (3.8) beispielsweise eine besondere Behandlung erforderlich: Weil die turbulenten Schwankungen einer wandgebundenen Strömung in unmittelbarer Nähe zu einer Wand aufgrund der Haftbedingung weggedämpft werden, muss auch die Wirbelviskosität des Feinstrukturmodells in Wandnähe verschwinden. Das Smagorinsky-Modell erfüllt diese Bedingung nicht von sich aus, da die Filterweite  $\Delta$  einen finiten Wert hat und der Geschwindigkeitsgradient der Strömung in Wandnähe üblicherweise sehr groß ist. Deswegen führt man in Gl. (3.8) analog zu der Pionierarbeit von van Driest (1956) eine Dämpfungsfunktion  $f_D$  ein, die die Feinstruktur-Wirbelviskosität in der Nähe von Oberflächen zu null werden lässt:

$$\nu_{\text{SGS}} = f_D^2 C_S^2 \Delta^2 |\bar{\mathbb{S}}|. \quad (3.9)$$

Eine in der Large-Eddy Simulation im Zusammenhang mit dem Smagorinsky-Modell bewährte Dämpfungsfunktion ist die von Piomelli et al. (1987):

$$f_D = \sqrt{1 - \exp\left(\frac{-y^+}{25}\right)^3}, \quad (3.10)$$

mit dem dimensionslosen Wandabstand  $y^+$ , welcher über die Wandschubspannungsgeschwindigkeit  $U_\tau^*$  definiert ist (Schlichting und Gersten, 2006):

$$y^+ = \frac{\rho_f^* d_w^* U_\tau^*}{\mu_f^*} = \text{Re } d_w U_\tau \quad \text{mit} \quad U_\tau^* = \sqrt{\frac{|\tau_w^*|}{\rho_f^*}}. \quad (3.11)$$

Darin ist  $d_w^*$  der Abstand zum nächstliegenden Wandpunkt und  $\tau_w^*$  die Wandschubspannung an diesem Punkt.

Außerdem ist das Smagorinsky-Modell nicht in der Lage, den Rücktransfer turbulenter kinetischer Energie von der Feinstruktur in Richtung der Grobstruktur (Backscatter-Effekt) wiederzugeben. Dies liegt daran, dass für die Wirbelviskosität nach Gl. (3.9) nur Werte größer oder gleich null auftreten können, was dazu führt, dass der Feinstrukturspannungstensor in der gefilterten Impulsgleichung rein dissipativ wirkt. In einer turbulenten Strömung verschwindet der Backscatter-Effekt im zeitlichen Mittel zwar, jedoch sind Large-Eddy Simulationen immer zeitaufgelöst und bei der Interpretation von Ergebnissen – insbesondere statistischen Momenten höherer Ordnung – muss deshalb stets bedacht werden, dass das Smagorinsky-Modell diesen Effekt nicht berücksichtigt. Die zahlreichen erfolgreichen Anwendungen dieses Modells haben jedoch gezeigt, dass die Berücksichtigung des Backscatter-Effektes meistens nur eine untergeordnete Rolle spielt.

Trotz einiger Aspekte, die das Feinstrukturmodell von Smagorinsky nicht oder nur unzureichend nachbildet, erfreute sich dieses Modell in der Anfangszeit der LES großer

### 3. Numerische Simulation disperser Mehrphasenströmungen

Beliebtheit und wird auch heute noch sehr häufig eingesetzt. Gerade die Einfachheit der algebraischen Formulierung von  $\nu_{SGS}$  mit Einführung einer einzigen Modellkonstanten und die positiven, numerischen Eigenschaften wegen der rein dissipativen Wirkung des Feinstrukturspannungstensors gleichen viele Nachteile des Smagorinsky-Modells wieder aus. Seit der Arbeit von Smagorinsky (1963) sind viele neue Feinstrukturmodelle entwickelt worden, die andere Ansätze verfolgen oder das ursprüngliche Modell von Smagorinsky verbessern sollen. Als bekannte Beispiele dafür werden hier ohne Anspruch auf Vollständigkeit das Modell von Schumann (1975) sowie das dynamische Smagorinsky-Modell von Germano et al. (1991) genannt. Weil sich die in dieser Arbeit simulierten Fälle auf recht einfache, wandgebundene Strömungen beschränken, reicht das Smagorinsky-Modell hier für die Feinstrukturmodellierung vollkommen aus. Für detaillierte Beschreibungen und direkte Vergleiche der anderen Modelle sei auf die entsprechenden Fachartikel und Übersichtsliteratur (z. B. Breuer (2002); Fröhlich (2006)) verwiesen.

## 3.2. Einführung in den CFD-Code LESOCC

Für die numerischen Simulationen in dieser Arbeit wurde der von Prof. Breuer entwickelte CFD-Code *LESOCC* (*Large-Eddy Simulation On Curvilinear Coordinates*) angewendet (Breuer, 1998, 2002). Der Code ist primär für die Large-Eddy Simulation turbulenter Strömungen auf dreidimensionalen, krummlinigen, blockstrukturierten Gittern ausgelegt und wurde im Laufe der Zeit um viele weitere Funktionen – darunter DES<sup>8</sup>, hybride Verfahren, Mehrphasenströmungen, etc. – ergänzt. Darüber hinaus ist *LESOCC* höchstgradig vektorisiert und kann damit die Vorteile von vektorbasierten Rechnerarchitekturen ausnutzen, der parallele Betrieb auf Skalarprozessoren ist jedoch ebenfalls möglich.

In diesem Abschnitt wird kurz auf die numerische Methodik von *LESOCC* eingegangen, um einen Überblick über die verwendeten Verfahren und die numerische Modellbildung zu geben. Unterteilt wird der Abschnitt in eine kurze Beschreibung der generellen Vorgehensweise bei der numerischen Lösung der gefilterten Navier-Stokes-Gleichungen mit den verwendeten Algorithmen, Diskretisierungsverfahren und Feinstrukturmodellen. Danach folgt ein tieferer Einblick in die Behandlung der dispersen Phase, welche gerade für diese Arbeit von zentralem Interesse ist.

Weil im Rahmen dieser Arbeit nur ein zusammenfassender Überblick über die verwendeten Gleichungen, Verfahren und Modelle bei der Simulation von dispersen Mehrphasenströmungen mit *LESOCC* gegeben werden kann, sei an dieser Stelle für weiterführende Informationen auf das detaillierte und ständig aktualisierte Manual von Breuer (2011) verwiesen.

### 3.2.1. Grundlegende numerische Methodik für die kontinuierliche Phase

In *LESOCC* werden die dreidimensionalen, räumlich gefilterten Navier-Stokes-Gleichungen (Gl. (3.2)) in Integralform mit Hilfe der Finite-Volumen-Methode (FVM) numerisch

---

<sup>8</sup>*Detached-Eddy Simulation.*

gelöst. Dazu muss das relevante Gebiet des zu simulierenden Strömungsproblems durch ein geeignetes Gitter (auch Netz genannt) in entsprechende Kontrollvolumina aufgeteilt werden. *LESOCC* benötigt dazu ein blockstrukturiertes Gitter, also ein Gitter, welches sich aus einem oder mehreren strukturierten Gitterblöcken zusammensetzt, die an die Körpergeometrie angepasst und nicht-orthogonal sein dürfen.

Integriert man die Differentialform der gefilterten Impulsgleichung (3.7) über ein allgemeines Kontrollvolumen  $d\mathcal{V}$ , so erhält man nach Anwendung des Gaußschen Integralsatzes (Bronstein et al., 2008) die vektorielle Form der Impulsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{V}} \bar{\mathbf{v}}_f d\mathcal{V} + \oint_A \bar{\mathbf{v}}_f \bar{\mathbf{v}}_f \cdot \mathbf{n} dA = - \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \bar{P} d\mathcal{V} + \oint_A \Gamma \bar{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n} dA + \iiint_{\mathcal{V}} \bar{\mathbf{s}} d\mathcal{V},$$

mit dem Flächennormaleneinheitsvektor  $\mathbf{n}$  und der Oberfläche eines Kontrollvolumens  $A$ . Zur einfacheren Schreibweise wurde darüber hinaus der Diffusionskoeffizient

$$\Gamma = 2 \left( \frac{1}{\text{Re}} + \nu_{\text{SGS}} \right)$$

eingeführt. Die Volumen- und Oberflächenintegrale werden über die Mittelpunktsregel approximiert, d. h. die Volumenintegrale entsprechen ungefähr dem Produkt aus dem Wert des Integranden im Zellmittelpunkt und dem Volumen der Zelle

$$\iiint_{\mathcal{V}} \phi d\mathcal{V} \approx \phi_C V_C$$

und die Flächenintegrale stimmen näherungsweise mit der Summe aller Produkte aus Integrand und Oberflächensegment am Mittelpunkt des jeweiligen Oberflächensegmentes überein:

$$\oint_A \phi dA \approx \sum_a \phi_a A_a.$$

Dies führt auf die folgende im Raum diskretisierte Impulsgleichung:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_{f,C}}{\partial t} + \frac{1}{V_C} \sum_a \left( \underbrace{\bar{\mathbf{v}}_{f,a} \bar{\mathbf{v}}_{f,a} \cdot \mathbf{n}_a}_{\mathbf{F}_{\text{konv}}} - \underbrace{\Gamma_a \bar{\mathbf{S}}_a \cdot \mathbf{n}_a}_{\mathbf{F}_{\text{visk}}} \right) A_a = - (\nabla \bar{P})_C + \bar{\mathbf{s}}_C. \quad (3.12)$$

Zur Bestimmung der konvektiven und viskosen Flussvektoren  $\mathbf{F}_{\text{konv}}$  und  $\mathbf{F}_{\text{visk}}$  müssen die jeweiligen Geschwindigkeitswerte bzw. Geschwindigkeitsgradienten an den Zellflächen bekannt sein. *LESOCC* verwendet ein zellzentriertes Verfahren. Die Variablenwerte an den Zellflächen müssen demnach über geeignete Interpolationsmethoden aus den bekannten Werten in den Zellzentren ermittelt werden. Für die konvektiven Flüsse stehen in dem Code dafür verschiedene Verfahren zur Verfügung, die sich hinsichtlich der Ordnung des Abbruchfehlers und der numerischen Stabilität unterscheiden (Breuer, 2002). Darunter sind ein hybrides Verfahren, welches abhängig von einem Stabilitätskriterium

### 3. Numerische Simulation disperser Mehrphasenströmungen

zwischen Aufwind-Verfahren und zentraler Differenz umschaltet, und ein reines zentrales Differenzen-Verfahren, welches von zweiter Ordnung genau ist. Die viskosen Flüsse  $\mathbf{F}_{\text{visk}}$  werden in *LES OCC* ausschließlich über lineare Interpolation (zentrales Differenzen-Verfahren, von zweiter Ordnung genau) approximiert, was der elliptischen Natur der viskosen Effekte entspricht.

*LES OCC* nutzt zur Speicherung der Strömungsvariablen nichtversetzte Gitter, d. h. die Geschwindigkeit und der Druck werden während der Simulation in den gleichen Gitterpunkten, nämlich die Mittelpunkte der Gitterzellen, gespeichert. Bei inkompressiblen Strömungen entsteht bei diesem Verfahren im Zuge der räumlichen Diskretisierung das Problem, dass ein *pressure-velocity-decoupling*, also eine Entkoppelung der Druck- und Geschwindigkeitsfelder in benachbarten Zellen, auftritt (Fröhlich, 2006). Im Code wird dieses Problem mit Hilfe der bewährten Methode der Impulsinterpolation nach Rhie und Chow (1983) gelöst.

Für die zeitliche Integration der Impulsgleichung stehen in *LES OCC* ausschließlich explizite Verfahren zur Verfügung. Aufgrund ihrer Stabilitätseigenschaften erfordern solche Verfahren sehr kleine Zeitschrittweiten  $\Delta t$ . Sie sind jedoch wesentlich einfacher zu implementieren und benötigen weniger Berechnungsschritte pro Zeitschritt als implizite Methoden (Breuer, 2002). Da in Large-Eddy Simulationen die zeitgenaue Auflösung der Turbulenz in der Regel sowieso einen kleinen Zeitschritt erforderlich macht, stellen die strikten Stabilitätskriterien expliziter Verfahren üblicherweise kein großes Hindernis dar. Das Standardverfahren zur Diskretisierung der zeitlichen Strömungsentwicklung in *LES OCC* ist ein Mehrschritt-Runge-Kutta-Verfahren mit geringem Speicheraufwand (Breuer, 2002), welches in der Zeit von zweiter Ordnung genau ist und größere Zeitschritte erlaubt als andere klassische Zeitschrittverfahren (z. B. Euler oder Adams-Bashforth (Ferziger und Perić, 2008)).

In einer inkompressiblen Strömung ist das Druckfeld mit dem Geschwindigkeitsfeld in Form eines Druckgradienten in den Impulsgleichungen (3.2b) gekoppelt. Weil die Impulsgleichungen wegen der zeitlichen Ableitungsterme bereits zur Geschwindigkeitsberechnung genutzt werden und die Kontinuitätsgleichung (3.2a) den Druck nicht enthält, muss das Druckfeld der Strömung in einem gesonderten Verfahren bestimmt werden, damit das dann aus den Impulsgleichungen resultierende Geschwindigkeitsfeld die von der Kontinuitätsgleichung geforderte Divergenzfreiheit erfüllt. In der Numerik haben sich dafür verschiedene Verfahren durchgesetzt. In *LES OCC* kommt eine Projektionsmethode nach Chorin (1968) mit einem Prädiktor-Korrektor-Verfahren zum Einsatz: Im Prädiktor-Schritt wird aus den Impulsgleichungen ohne Berücksichtigung des Druckgradienten ein neues Geschwindigkeitsfeld bestimmt, welches im Allgemeinen nicht divergenzfrei ist. Das daraus resultierende Geschwindigkeitsfeld dient dazu, aus einer Poisson-Gleichung für den Druck<sup>9</sup> ein Druckfeld zu ermitteln, welches im Korrektor-Schritt dazu verwendet wird, das Prädiktor-Geschwindigkeitsfeld zu korrigieren und divergenzfrei zu machen (Breuer, 2002). Das lineare Gleichungssystem der implizit diskretisierten Druck-Poisson-Gleichung wird iterativ mit der unvollständigen LU-Zerlegung nach Stone (1968) gelöst, was optional mit einer Multigrid-Methode beschleunigt werden kann.

---

<sup>9</sup>Diese Druckgleichung wird üblicherweise aus der Divergenz der Impulsgleichungen hergeleitet.

Zur Feinstrukturmodellierung stehen in *LESOCC* verschiedene Modelle zur Verfügung, unter anderem das in Abschnitt 3.1.2 vorgestellte Smagorinsky-Modell oder das dynamische Smagorinsky-Modell. Die Filterung der Erhaltungsgleichungen erfolgt implizit ausschließlich mit einem Top-Hat-Filter. Die Filterweite  $\Delta$  ist dabei direkt mit dem numerischen Gitter über die dritte Wurzel der Zellvolumina verbunden:

$$\Delta = \sqrt[3]{V_C}.$$

### 3.2.2. Behandlung der dispersen Phase

#### 3.2.2.1. Integration der Bewegungsgleichungen

Zur Berechnung von dispersen Mehrphasenströmungen mit *LESOCC* können der Simulation sphärische Partikel hinzugefügt werden, die im Code als punktförmige Objekte behandelt werden und deren Bewegungsverlauf über den Lagrangeschen Ansatz (s. Abschnitt 2.3.3) verfolgt wird. Dazu werden die gewöhnlichen Differentialgleichungen für Geschwindigkeit und Position der Partikel (2.24a) und (2.24b) mit einem von vierter Ordnung genauen Runge-Kutta-Verfahren numerisch integriert, nachdem die Trägerströmung mit der im vorigen Abschnitt aufgezeigten Methodik berechnet wurde.

Bei der Bestimmung der Partikelposition durch das Lösen von Gl. (2.24b) gibt es unterschiedliche Herangehensweisen: Die naheliegendste Methodik ist die Integration der Differentialgleichung im physikalischen Raum, welche als *p-space-Verfahren* bezeichnet wird. Dabei werden die physikalischen  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Koordinaten der Partikel bestimmt, für die es auf krummlinigen, körperangepassten Gittern, wie sie in *LESOCC* verwendet werden, jedoch keinen expliziten Zusammenhang mit den  $i$ -,  $j$ - und  $k$ -Indizes der Kontrollvolumina gibt. Weil aber nach der Integration von Gl. (2.24b) bekannt sein muss, wo und in welchem Kontrollvolumen sich jedes einzelne Partikel befindet, müssen beim *p-space-Verfahren* anschließend Suchalgorithmen angewendet werden, die vor allem bei großen Partikelanzahlen sehr viel Rechenzeit in Anspruch nehmen.

Wesentlich effektiver ist es, wenn die Lösung der Differentialgleichung zur Bestimmung der Partikelpositionen im Parameterraum (*computational space*) erfolgt, was zum so genannten *c-space-Verfahren* führt (Breuer et al., 2006). In dieser Methode wird Gl. (2.24b) in den Parameterraum transformiert, der über das verwendete Simulationsgitter mit dem physikalischen Raum verknüpft ist. Der große Vorteil gegenüber dem *p-space-Verfahren* ist, dass das Simulationsgitter im Parameterraum orthonormal ist und somit – wie bei einem kartesischen Koordinatensystem – eine explizite Beziehung zwischen dem Parameterraum und den Kontrollvolumina existiert. Bei dieser Methode kann demnach vollständig auf rechenintensive Suchalgorithmen nach der Integration der Bewegungsgleichungen verzichtet werden, was sich außerdem äußerst günstig auf die Parallelisierung und Vektorisierung des Partikelverfolgungsalgorithmus auswirkt. Somit ist das *c-space-Verfahren* eine sehr effiziente Methode zur Partikelverfolgung in der Simulation partikelbeladener Strömungen und wird aus diesem Grund wie oben beschrieben bei der Integration von (2.24b) in *LESOCC* angewendet.

Die Differentialgleichung (2.24c) für die Winkelgeschwindigkeit der Partikel ist linear und kann deshalb analytisch integriert werden. Nach Rubinow und Keller (1961) gilt

### 3. Numerische Simulation disperser Mehrphasenströmungen

dann:

$$\omega_p(t_1) = \omega_p(t_0) e^{-\frac{10}{3} \frac{\Delta t}{T_p}}.$$

#### 3.2.2.2. Interpolation der Fluidgeschwindigkeit und Berücksichtigung der Feinstrukturschwankungen

Die zur Lösung der Bewegungsgleichung (2.24a) benötigte Fluidgeschwindigkeit am Ort des Partikels wird über ein Interpolationsverfahren nach Marchioli et al. (2007) aus den Geschwindigkeitswerten in den umliegenden Zellen approximiert. Zu dieser interpolierten Fluidgeschwindigkeit  $\bar{\mathbf{v}}_f$  kann noch ein modellierter Feinstrukturanteil hinzuaddiert werden, was insbesondere für kleine Partikel mit niedriger Stokes-Zahl sinnvoll sein kann, da diese besonders empfindlich auf Geschwindigkeitsfluktuationen reagieren. Nach Pozorski und Apte (2009) kann  $\bar{\mathbf{v}}_f$  in den Bewegungsgleichungen dann ersetzt werden durch den stochastischen Ansatz

$$\mathbf{v}_f = \bar{\mathbf{v}}_f + \mathbf{v}'_f \quad \text{mit} \quad \mathbf{v}'_f \approx \sqrt{\frac{2}{3} k_{\text{SGS}}} \boldsymbol{\psi}.$$

Darin ist  $\boldsymbol{\psi}$  ein dimensionsloser Vektor, dessen Komponenten mit einem Mittelwert von null und einer Standardabweichung von eins normalverteilt sind. Die turbulente, kinetische Energie der Feinstruktur  $k_{\text{SGS}}$  muss bei den Feinstrukturmodellen, die diese Größe nicht modellieren (z. B. das Smagorinsky-Modell), über einen zusätzlichen Ansatz approximiert werden. Dazu eignet sich das Skalenähnlichkeitsmodell nach Bardina et al. (1980), welches mit einer erneuten Filterung der Grobstruktur und entsprechenden Ähnlichkeitsüberlegungen Informationen über die nicht aufgelöste Feinstruktur gewinnen kann. Der Ansatz für die kinetische Feinstrukturenergie lautet

$$k_{\text{SGS}} \approx \frac{1}{2} \left| \bar{\mathbf{v}}_f - \tilde{\bar{\mathbf{v}}}_f \right|^2,$$

worin die mit einer Tilde gekennzeichnete Größe mit Hilfe einer größeren Filterweite von  $\tilde{\Delta} = 2\Delta$  ermittelt wird.

#### 3.2.2.3. Zwei-Wege-Kopplung

Zur Berücksichtigung des Einflusses der Partikel auf die Trägerströmung bei einer Zwei-Wege-Kopplung zwischen disperser und kontinuierlicher Phase (s. Abschnitt 2.2) wird in *LESOC* die *particle-source-in-cell*-Methode (PSI-CELL-Methode) von Crowe et al. (1977) angewendet. Dazu wird der Quellterm  $\bar{\mathbf{s}}_C$  in der diskretisierten Impulsgleichung (3.12) aus den Reaktionskräften auf die an den Partikeln angreifenden Widerstandskräfte  $\mathbf{f}_W$  gebildet:

$$\bar{\mathbf{s}}_C = -\frac{1}{V_C} \sum_{i=1}^{N_C} \mathbf{f}_{W,i}.$$

Darin ist  $N_C$  die Anzahl aller Partikel in dem Kontrollvolumen  $C$ . Derzeit wird in *LESOC* für die PSI-CELL-Methode demnach nur die Widerstandskraft berücksichtigt.

#### 3.2.2.4. Kollisionsalgorithmus

Der in *LESOCC* verwendete Kollisionsalgorithmus für die disperse Phase ist in Breuer und Alletto (2011) beschrieben. Die grundlegende Methodik dafür ist, dass die Bewegungsgleichungen der Partikel im ersten Schritt zunächst ohne Berücksichtigung von Partikel-Partikel-Kollisionen integriert werden und danach dann in einem zweiten Schritt mögliche Kollisionsereignisse während der Partikelbewegung im aktuellen Zeitschritt gesucht werden. Wenn eine Kollision detektiert wurde, werden die Geschwindigkeiten der beteiligten Partikel mit einem entsprechenden Kollisionsmodell neu berechnet, ohne dass die Position der Partikel verändert wird, was vorteilhaft für die Parallelisierung des Codes ist. Die Kollisionsdetektion erfolgt über eine sehr effiziente Methode nach Viccione et al. (2008), in der das Integrationsgebiet in mehrere so genannte virtuelle Zellen aufgeteilt wird und die darin enthaltenen Partikel als mögliche Kollisionspartner in Frage kommen. Während der Simulation wird die Größe der virtuellen Zellen für jeden Zeitschritt dynamisch angepasst, um den Suchalgorithmus möglichst effizient zu halten.

In jeder Zelle werden dann alle potentiellen Kollisionspartner mit dem Algorithmus von Chen et al. (1999) auf ein entsprechendes Kollisionsereignis hin überprüft und bei Erfolg entsprechend für die Neuberechnung der Partikelgeschwindigkeiten mit dem Kollisionsmodell „markiert“. Der Schritt mit den virtuellen Zellen erfolgt doppelt mit unterschiedlichen Zellgrößen, um die Gefahr der Nichterkennung von Kollisionspartnern an den Rändern von virtuellen Zellen zu minimieren. Wird die Größe der virtuellen Zellen geeignet gewählt, so kann der Aufwand für die Kollisionserkennung von  $\mathcal{O}(N^2)$  mit übliche Suchalgorithmen auf  $\mathcal{O}(N)$  reduziert werden.

Die Beschreibung der physikalischen Effekte bei den Partikel-Wand- und den Partikel-Partikel-Kollisionen erfolgt in größerer Ausführlichkeit im nachfolgenden Kapitel.

## 4. Kollisionsmodelle

In den beiden vorangegangenen Kapiteln wurden das physikalische und numerische Fundament für die Large-Eddy Simulation von dispersen Mehrphasenströmungen geschaffen. Gegenstand dieser Arbeit ist die Behandlung der Partikel-Wand- und Partikel-Partikel-Kollisionen in solchen Simulationen mit Berücksichtigung der Oberflächenreibung zwischen den beteiligten Körpern.

Weil der Stoßprozess zwischen zwei Körpern im Allgemeinen ein höchst komplexes Phänomen ist, werden bei der Entwicklung entsprechender Modelle üblicherweise Vereinfachungen vorgenommen, um den Berechnungsaufwand möglichst gering, die Realitätsnähe gleichzeitig aber so hoch wie möglich zu halten. Wenn nicht anders erwähnt, wurden die Kollisionsmodelle in dieser Arbeit unter den folgenden Annahmen hergeleitet:

- Die Partikel sind kugelförmig, starr und homogen,
- die Wände und Oberflächen sind ebenfalls starr,
- die Verformungen der Kollisionspartner während des Stoßvorganges sowie die Stoßzeiten sind deshalb vernachlässigbar klein und
- beim Kontakt zwischen zwei Oberflächen gilt das lineare Reibgesetz von Coulomb (Hibbeler, 2004a).

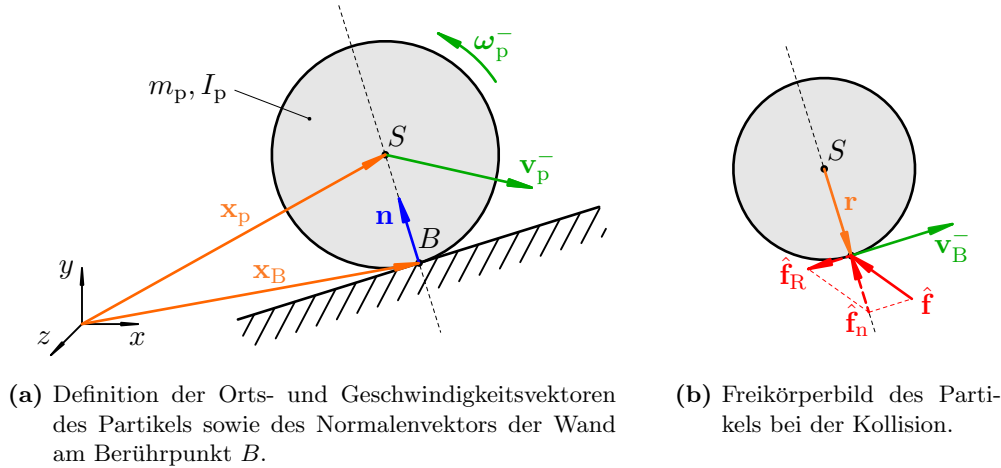
Eventuelle weitere Vereinfachungen werden in den jeweiligen Abschnitten erwähnt und begründet.

In den folgenden Abschnitten wird zunächst jeweils kurz dargelegt, wie die Kollisionsereignisse ursprünglich in dem Code modelliert wurden, bevor im Anschluss dann die Herleitung der Modellgleichungen, die im Zuge dieser Arbeit in die zugehörigen Kollisionsroutinen von *LESOC* implementiert wurden, ausgeführt wird. Begonnen wird dazu zunächst mit dem Modell für die Partikel-Wand-Kollisionen, auf das die Beschreibung des Modells für die reibungsbehafteten interpartikulären Kollisionen folgt. Als drittes und letztes Modell wird ein Modell vorgestellt, welches der Beschreibung rauer Wände bei Partikel-Wand-Kollisionen dient.

### 4.1. Partikel-Wand-Kollisionen

Das erste Modell, welches im Folgenden hergeleitet wird, behandelt die reibungsbehaftete Kollision eines Partikels mit einer festen, ebenen Wand. Eine ebene Wand bedeutet in diesem Fall, dass die Geometrie der technischen Rauheit der Wand vernachlässigt und die Reibung zwischen Partikel und Wand nur über das Coulombsche Reibungsmodell beschrieben wird.





**Abbildung 4.1.:** Vektorielle Definitionen im System Partikel-Wand bei einer reibungsbehafteten Kollision.

Vor der Implementierung des neuen Kollisionsmodells wurden die Wandkollisionen in  $\mathcal{LESOC}$  als voll-elastische, reibungsfreie Vorgänge behandelt. Das bedeutet, dass bei der Kollision mit einer Wand der Ausfallswinkel des Partikels unter diesen Bedingungen gleich dem Einfallswinkel ist und das Partikel beim Stoß auch nicht in Drehung versetzt wird. Um den Einfluss der Coulombschen Reibung auf wandgebundene Partikelströmungen untersuchen zu können, wurde dieses einfache Wandmodell auf den Fall reibungsbehafteter Partikel-Wand-Kollisionen erweitert.

#### 4.1.1. Herleitung der Modellgleichungen

In Abb. 4.1(a) sind die vektoriellen und geometrischen Definitionen eines Systems bestehend aus einem Partikel und einer Wand, mit der das Partikel kollidiert, dargestellt. Diese Definitionen werden im Folgenden bei der Herleitung der Stoßgleichungen verwendet.

Beim Zusammenstoß eines kugelförmigen Partikels mit einer festen Wand gilt nach dem zweiten Newtonschen Gesetz die Integralform des Impulssatzes (Hibbeler, 2004a):

$$m_p (\mathbf{v}_p^+ - \mathbf{v}_p^-) = \int \mathbf{f} dt, \quad (4.1)$$

mit den Partikelgeschwindigkeitsvektoren vor und nach der Kollision  $\mathbf{v}_p^-$  bzw.  $\mathbf{v}_p^+$  und dem Stoßkraftvektor  $\mathbf{f}$ . Aus Gl. (4.1) lässt sich mit der Definition des spezifischen Kraftstoßes

$$\hat{\mathbf{f}} = \frac{1}{m_p} \int \mathbf{f} dt$$

die Partikelgeschwindigkeit nach der Kollision mit der Wand berechnen:

$$\mathbf{v}_p^+ = \mathbf{v}_p^- + \hat{\mathbf{f}}. \quad (4.2)$$

#### 4. Kollisionsmodelle

Weil in diesem Modell auch reibungsbehaftete Stöße berücksichtigt werden sollen, muss die Winkelgeschwindigkeit des Partikels mit in die Betrachtung einbezogen werden. Der Grund dafür ist, dass durch die Reibung zwischen Partikel und Wand auch eine Kraftstoßkomponente in der Wandebene wirkt, welche ein Drehmoment  $\mathbf{m}$  auf das Partikel verursacht (vgl. Abb. 4.1(b)). Die Änderung der Winkelgeschwindigkeit des Partikels  $\boldsymbol{\omega}_p^+ - \boldsymbol{\omega}_p^-$  ist demnach gemäß des Drallsatzes (Hibbeler, 2004a)

$$I_p (\boldsymbol{\omega}_p^+ - \boldsymbol{\omega}_p^-) = \int \mathbf{m} dt = \int \mathbf{r} \times \mathbf{f} dt. \quad (4.3)$$

Darin ist  $I_p$  das schwerpunktbezogene Massenträgheitsmoment des Partikels und  $\mathbf{r}$  der Radiusvektor zwischen den Ortsvektoren des Partikelschwerpunktes  $\mathbf{x}_p$  und des Berührungspunktes  $B$  zwischen Wand und Partikel  $\mathbf{x}_B$ :

$$\mathbf{r} = \mathbf{x}_B - \mathbf{x}_p.$$

$\mathbf{r}$  ist im Allgemeinen während eines realen Stoßvorganges nicht konstant, da sich Partikel und Wand verformen können. Weil in diesem Modell jedoch durch die Annahme starrer Körper jegliche Verformungen der Kollisionspartner vernachlässigt werden, ist

$$|\mathbf{r}| = \frac{D_p}{2} = \text{const.}$$

und  $\mathbf{r}$  kann deshalb vor das Integral auf der rechten Seite von Gl. (4.3) gezogen werden. Zur einfacheren Handhabung lässt sich  $\mathbf{r}$  noch in einen Zusammenhang mit dem Normaleinheitsvektor  $\mathbf{n}$  bringen, der von der Wand in Richtung Partikel zeigt und demnach über

$$\mathbf{n} = -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = -\frac{2}{D_p} \mathbf{r}$$

definiert ist. Umstellen liefert dann für den Radiusvektor:

$$\mathbf{r} = -\frac{D_p}{2} \mathbf{n}.$$

Damit wird aus Gl. (4.3) unter Verwendung der Kraftstoßdefinition und Gl. (2.22) für das schwerpunktsbezogene Trägheitsmoment einer homogenen Kugel eine Bestimmungsgleichung für die Partikelwinkelgeschwindigkeit nach der Kollision:

$$\boldsymbol{\omega}_p^+ = \boldsymbol{\omega}_p^- - \frac{5}{D_p} \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{f}}. \quad (4.4)$$

Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit des Partikels vor dem Stoß  $\mathbf{v}_p^-$  und  $\boldsymbol{\omega}_p^-$  sind bekannt. Um die neuen Geschwindigkeiten nach dem Stoß berechnen zu können, muss lediglich der Kraftstoßvektor  $\hat{\mathbf{f}}$  ermittelt werden.

Zur Berechnung der Reibkraft zwischen Partikel und Wand wird das Coulombsche Reibungsmodell (Hibbeler, 2004b) angewendet. Dazu ist es von Nöten, die Komponente

$\hat{f}_n$  des Kraftstoßes zu bestimmen, welche in Richtung der Stoßnormalen  $\mathbf{n}$  wirkt.  $\hat{f}_n$  lässt sich aus einer Skalarmultiplikation von  $\hat{\mathbf{f}}$  mit  $\mathbf{n}$  berechnen:

$$\hat{f}_n = \hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{n}.$$

Stellt man die Stoßgleichung (4.2) nach  $\hat{\mathbf{f}}$  um und setzt das Ergebnis in die rechte Seite der obigen Gleichung ein, so erhält man:

$$\hat{f}_n = \hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_p^+ \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v}_p^- \cdot \mathbf{n}.$$

Mit der Definition des Restitutionskoeffizienten in Richtung der Stoßnormalen

$$e_{n,w} = -\frac{v_{n,p}^+}{v_{n,p}^-} = -\frac{\mathbf{v}_p^+ \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{v}_p^- \cdot \mathbf{n}}, \quad e_{n,w} = 0 \dots 1 \quad (\text{Hibbeler, 2004a}) \quad (4.5)$$

wird

$$\hat{f}_n = \hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{n} = -(1 + e_{n,w}) \mathbf{v}_p^- \cdot \mathbf{n}. \quad (4.6)$$

Der Restitutionskoeffizient  $e_{n,w}$  beschreibt den Verlust von kinetischer Energie in wandnormaler Richtung aufgrund von inelastischen Prozessen bei der Kollision und ist ein Parameter, der abhängig von Material und Beschaffenheit der beiden Kollisionspartner ist. Außerdem konnte von Sommerfeld und Huber (1999) experimentell ein Einfluss von Einfallswinkel und -geschwindigkeit des Partikels auf den Restitutionskoeffizienten nachgewiesen werden. Dieser Einfluss soll in diesem Modell jedoch zunächst nicht weiter berücksichtigt werden, da in wandgebundenen Strömungen üblicherweise keine großen Unterschiede in den Partikeleinfallswinkeln zu erwarten sind und für diese Abhängigkeit bisher nur Versuchsdaten, jedoch keine allgemeingültigen physikalischen Modelle bekannt sind.

Bei der Coulombschen Reibung werden zwei verschiedene Fälle unterschieden: im ersten Fall haftet die Oberfläche des Partikels *während des Stoßvorganges* an der Wand. Das bedeutet nicht, dass das Partikel auch nach dem Stoß noch an der Wand haftet (was einer Ablagerung des Partikels gleichkäme), sondern lediglich, dass die Relativgeschwindigkeit am Berührungspunkt  $\mathbf{v}_B$  *ohne* die stoßnormale Geschwindigkeitskomponente

$$\mathbf{v}_n = (\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}, \quad (4.7)$$

d. h. nur die wandtangente Komponente (vgl. Abb. 4.1(b))

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_p - \mathbf{v}_n + \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{r} = \mathbf{v}_p - \mathbf{v}_n - \frac{D_p}{2} \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{n}, \quad (4.8)$$

nach der Kollision zu null wird:

$$\mathbf{v}_B^+ = \mathbf{v}_p^+ - \mathbf{v}_n^+ - \frac{D_p}{2} \boldsymbol{\omega}_p^+ \times \mathbf{n} = 0. \quad (4.9)$$

#### 4. Kollisionsmodelle

Physikalisch gesehen entspricht diese Bedingung einer Abrollbedingung nach dem Stoß. Dieser besondere Fall der Haftreibung kann nach Hoomans (2000) verallgemeinert werden, indem hier zusätzlich der tangential Restitutionskoeffizient  $e_{t,w}$  eingeführt wird:

$$|e_{t,w}| = \frac{|\mathbf{v}_B^+|}{|\mathbf{v}_B^-|}, \quad |e_{t,w}| = 0 \dots 1.$$

Ein tangentialer Restitutionskoeffizient von  $e_{t,w} > 0$  bedeutet dann, dass das Partikel nicht auf der Wand abrollt, sondern dass es wegen der elastischen Verformung der ineinander greifenden technischen Unregelmäßigkeiten beider Oberflächen zu einem Rückfederungseffekt kommt, der die Richtung des Berührungsgeschwindigkeitsvektors nach der Kollision umkehrt und dessen Betrag um den Faktor  $e_{t,w}$  verringert. Aus der kinematischen Abrollbedingung in Gl. (4.9) wird dann:

$$\mathbf{v}_B^+ = \mathbf{v}_p^+ - \mathbf{v}_n^+ - \frac{D_p}{2} \boldsymbol{\omega}_p^+ \times \mathbf{n} = -e_{t,w} \mathbf{v}_B^-. \quad (4.10)$$

Für den Fall, dass  $e_{t,w}$  gleich null ist, reduziert sich dieser Zusammenhang wieder zu Gl. (4.9), was bedeutet, dass das Partikel abrollt. Außerdem lässt der Definitionsbereich von  $e_{t,w}$  prinzipiell auch Werte zwischen  $-1$  und null zu. Physikalisch kann ein negativer tangentialer Restitutionskoeffizient so interpretiert werden, dass es am Kontaktpunkt  $B$  nicht zu dem oben genannten Rückfederungseffekt kommt, sondern dass dort durch plastische Verformung an den beiden sich berührenden Oberflächen lediglich eine Verringerung der Berührungsgeschwindigkeit erfolgt. Gemäß Gl. (4.10) zeigt in diesem Fall dann der Berührungsgeschwindigkeitsvektor nach der Kollision in die gleiche Richtung wie davor, lediglich sein Betrag wurde um den Faktor  $|e_{t,w}|$  verringert.

Um eine Bestimmungsgleichung für den Kraftstoßvektor bei Haftreibung  $\hat{\mathbf{f}}_H$  zu erhalten, können in Gl. (4.10) zunächst für  $\mathbf{v}_p^+$  und  $\boldsymbol{\omega}_p^+$  die Stoßgleichungen (4.2) und (4.4) eingesetzt werden. Die wandnormale Partikelgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_n^+$  wird durch Gl. (4.7) ersetzt, was zu dem folgenden Ausdruck führt:

$$\mathbf{v}_p^- - (\mathbf{v}_p^+ \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - \frac{D_p}{2} \boldsymbol{\omega}_p^- \times \mathbf{n} + \hat{\mathbf{f}}_H + \frac{5}{2} (\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{f}}_H) \times \mathbf{n} = -e_{t,w} \mathbf{v}_B^-. \quad (4.11)$$

Das Skalarprodukt  $\mathbf{v}_p^+ \cdot \mathbf{n}$  kann mit der Definition des stoßnormalen Restitutionskoeffizienten in Gl. (4.5) folgendermaßen in Abhängigkeit von der Partikelgeschwindigkeit vor dem Stoß gebracht werden:

$$\mathbf{v}_p^+ \cdot \mathbf{n} = -e_{n,w} \mathbf{v}_p^- \cdot \mathbf{n}.$$

Das doppelte Vektorprodukt im letzten Term auf der linken Seite von Gl. (4.11) wird mit Hilfe der Graßmann-Identität (Bronstein et al., 2008) vereinfacht:

$$(\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{f}}_H) \times \mathbf{n} = \hat{\mathbf{f}}_H - (\hat{\mathbf{f}}_H \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}.$$

Mit der Definition der Normalkraftstoßkomponente  $\hat{f}_n = \hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{n}$  in Gl. (4.6) erhält man dann

$$\mathbf{v}_p^- - \frac{D_p}{2} \boldsymbol{\omega}_p^- \times \mathbf{n} + \frac{5 + 7e_{n,w}}{2} (\mathbf{v}_p^- \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + \frac{7}{2} \hat{\mathbf{f}}_H = -e_{t,w} \mathbf{v}_B^-,$$

was sich nach  $\hat{\mathbf{f}}_{\text{H}}$  umstellen lässt:

$$\hat{\mathbf{f}}_{\text{H}} = -\frac{2}{7} \left[ \mathbf{v}_{\text{p}}^- - \frac{D_{\text{p}}}{2} \boldsymbol{\omega}_{\text{p}}^- \times \mathbf{n} + e_{\text{t,w}} \mathbf{v}_{\text{B}}^- + \frac{5 + 7e_{\text{n,w}}}{2} (\mathbf{v}_{\text{p}}^- \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \right].$$

Gemäß der Definitionsgleichung für den tangentialen Berührungspunktgeschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}_{\text{B}}$  (4.8) ist

$$\mathbf{v}_{\text{p}}^- - \frac{D_{\text{p}}}{2} \boldsymbol{\omega}_{\text{p}}^- \times \mathbf{n} = \mathbf{v}_{\text{B}}^- + \mathbf{v}_{\text{n}}^- = \mathbf{v}_{\text{B}}^- + (\mathbf{v}_{\text{p}}^- \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}, \quad (4.12)$$

was schließlich die folgende Gleichung für den Haftreibungskraftstoßvektor liefert:

$$\hat{\mathbf{f}}_{\text{H}} = - \left[ \frac{2}{7} (1 + e_{\text{t,w}}) \mathbf{v}_{\text{B}}^- + (1 + e_{\text{n,w}}) (\mathbf{v}_{\text{p}}^- \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \right]. \quad (4.13)$$

Im zweiten Fall, der so genannten Gleitreibung, gleitet die Partikeloberfläche über die Wand und es ergibt sich eine tangentiale Reibkraft, die proportional zum Betrag der Normalkraft und entgegengesetzt zur Relativgeschwindigkeit des Berührungspunktes ist:

$$\hat{\mathbf{f}}_{\text{R,G}} = -\mu_{\text{w}} \left| \hat{\mathbf{f}}_{\text{n}} \right| \frac{\mathbf{v}_{\text{B}}^-}{|\mathbf{v}_{\text{B}}^-|} = -\mu_{\text{w}} \hat{f}_{\text{n}} \frac{\mathbf{v}_{\text{B}}^-}{|\mathbf{v}_{\text{B}}^-|}. \quad (4.14)$$

Die Proportionalitätskonstante  $\mu_{\text{w}}$  wird als Reibbeiwert oder Reibungskoeffizient bezeichnet. Der Zahlenwert von  $\mu_{\text{w}}$  hängt von verschiedenen Einflussfaktoren ab und wird in erster Linie von der Werkstoffpaarung und -beschaffenheit der Kollisionspartner beeinflusst. Für die gängigsten Werkstoffe gibt es in der Literatur entsprechende Anhaltswerte (z. B. Beardmore (2010)). Weitere Einflussfaktoren sind, wie bereits beim Restitutionskoeffizienten festgestellt, der Einfallswinkel des Partikels oder die Aufprallgeschwindigkeit (Sommerfeld und Huber, 1999). Da für diese Abhängigkeiten bisher nur empirische Zusammenhänge bekannt sind, wird der Reibbeiwert hier als konstant und nur von der Materialkombination abhängig angenommen.

Der gesamte Kraftstoßvektor  $\hat{\mathbf{f}}_{\text{G}}$  bei Gleitreibung setzt sich schließlich aus der entsprechenden Normal- und Reibkomponente zusammen:

$$\hat{\mathbf{f}}_{\text{G}} = \hat{\mathbf{f}}_{\text{n}} + \hat{\mathbf{f}}_{\text{R,G}} = \hat{f}_{\text{n}} \mathbf{n} + \hat{\mathbf{f}}_{\text{R,G}}.$$

Mit den Gleichungen (4.6) und (4.14) wird daraus eine Bestimmungsgleichung zur Berechnung des Gleitreibungskraftstoßvektors:

$$\hat{\mathbf{f}}_{\text{G}} = (1 + e_{\text{n,w}}) (\mathbf{v}_{\text{p}}^- \cdot \mathbf{n}) \left( \mu_{\text{w}} \frac{\mathbf{v}_{\text{B}}^-}{|\mathbf{v}_{\text{B}}^-|} - \mathbf{n} \right). \quad (4.15)$$

Über die Gleichungen (4.13) und (4.15) können nun die Kraftstoßvektoren für die beiden Fälle Haftreibung und Gleitreibung berechnet werden. Zur Wahl der richtigen Kraftstoßvektorgleichung ist eine Fallunterscheidung notwendig, die prüft, ob bei der

#### 4. Kollisionsmodelle

Kollision zwischen Partikel und Wand Haft- oder Gleitreibung auftritt. Dazu wird die aus dem Coulombschen Reibmodell bekannte *Haftbedingung* herangezogen:

$$\left| \hat{\mathbf{f}}_{\text{R,H}} \right| \leq \mu_{0,\text{w}} \left| \hat{\mathbf{f}}_{\text{n}} \right| = \mu_{0,\text{w}} \hat{f}_{\text{n}}. \quad (4.16)$$

Darin ist  $\hat{\mathbf{f}}_{\text{R,H}}$  die wandtangente Reibungskomponente des Haftreibungskraftstoßvektors und  $\mu_{0,\text{w}}$  der Haftreibungskoeffizient, der genau wie der Reibbeiwert  $\mu_{\text{w}}$  hauptsächlich von der Werkstoffpaarung abhängt und für gängige Kombinationen aus der Literatur entnommen werden kann. Solange also Gl. (4.16) erfüllt ist, liegt beim betrachteten Kollisionsvorgang Haftreibung vor und der Kraftstoßvektor  $\hat{\mathbf{f}}$  wird mit Gl. (4.13) berechnet. Im anderen Fall gilt Gl. (4.15) für die Gleitreibung.

Die Haftbedingung lässt sich in eine Form bringen, die nur von den Partikelgeschwindigkeiten vor der Kollision und nicht mehr von den darin beteiligten Kräften abhängt. Dazu bestimmt man die Reibungskomponente des Kraftstoßvektors im Haftreibfall mittels

$$\hat{\mathbf{f}}_{\text{R,H}} = \hat{\mathbf{f}}_{\text{H}} - \hat{\mathbf{f}}_{\text{n}} = \hat{\mathbf{f}}_{\text{H}} - \hat{f}_{\text{n}} \mathbf{n}$$

und den Gleichungen (4.6) und (4.13):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}}_{\text{R,H}} &= - \left[ \frac{2}{7} (1 + e_{\text{t,w}}) \mathbf{v}_{\text{B}}^- + (1 + e_{\text{n,w}}) (\mathbf{v}_{\text{p}}^- \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \right] + (1 + e_{\text{n,w}}) (\mathbf{v}_{\text{p}}^- \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \\ &= - \frac{2}{7} (1 + e_{\text{t,w}}) \mathbf{v}_{\text{B}}^-. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Dieses Ergebnis kann dann in Gl. (4.16) eingesetzt werden. Nach einigen Umformungen gilt die folgende Haftbedingung:

$$\left| \mathbf{v}_{\text{B}}^- \right| \leq - \frac{7}{2} \mu_{0,\text{w}} \frac{1 + e_{\text{n,w}}}{1 + e_{\text{t,w}}} \mathbf{v}_{\text{p}}^- \cdot \mathbf{n}. \quad (4.18)$$

Zur Berechnung der Partikelgeschwindigkeiten nach einer reibungsbehafteten Kollision mit einer Wand sind damit alle erforderlichen Gleichungen und Bedingungen bekannt. Der Algorithmus gliedert sich in die folgenden Schritte:

1. Bestimmung des Berührungsgeschwindigkeitsvektors unmittelbar vor der Kollision  $\mathbf{v}_{\text{B}}^-$  nach Gl. (4.8) und dessen Betrags,
2. Prüfen der Haftbedingung Gl. (4.18),
3. Berechnung von  $\hat{\mathbf{f}}$  entweder mit Gl. (4.13), wenn Gl. (4.18) erfüllt ist, oder im anderen Fall mit Gl. (4.15),
4. Bestimmung der Partikelgeschwindigkeiten nach dem Stoß mit den Gleichungen (4.2) und
5. Bestimmung der Rotationsgeschwindigkeiten der Partikel nach dem Stoß gemäß Gl. (4.4).

Insgesamt gibt es für dieses Modell vier freie Parameter  $e_{\text{n,w}}$ ,  $e_{\text{t,w}}$ ,  $\mu_{0,\text{w}}$  und  $\mu_{\text{w}}$ , die im Voraus entweder aus geeigneten Referenzen (z. B. Tabellenwerken oder Experimenten) entnommen oder abgeschätzt werden können.

### 4.1.2. Energiebetrachtung

Bei der Herleitung der Stoßgleichungen für die Partikel-Wand-Kollisionen wurde die Energieerhaltung bisher nicht mit einbezogen. Aufgrunddessen ist nicht automatisch sichergestellt, dass diese Gleichungen die Erhaltung der kinetischen Energie erfüllen und immer, d. h. unter allen denkbaren Umständen, physikalisch korrekte Ergebnisse liefern. Um nachzuweisen, dass die Stoßgleichungen (4.2) und (4.4) in Kombination mit den Kraftstoßvektoren (4.13) bzw. (4.15) den Energieerhaltungssatz nicht verletzen, wird zunächst die Bilanz der kinetischen Energie  $E$  des Partikels zwischen den beiden Zuständen unmittelbar vor der Kollision und danach aufgestellt. Streng genommen ist mit dieser Analyse kein zusätzlicher Informationsgewinn zu erzielen, weil die Stoßgleichungen mit der Definition der Reibungs- und Restitutionskoeffizienten bereits vollständig bestimmt waren. Trotzdem ist es sinnvoll, den Nachweis über die Energieerhaltung zu liefern, weil dies zum Beispiel bei der Implementierung des Modells zur Überprüfung auf eventuelle Programmierfehler ausgenutzt werden kann.

Aufgrund der dissipativen Wirkung von der Reibung und der Inelastizitäten beim Stoß (modelliert durch die beiden Restitutionskoeffizienten), lautet die Energiebilanz zwischen den Zuständen vor und nach der Kollision:

$$E^+ - E^- + W_{\text{Diss}} = 0,$$

worin  $W_{\text{Diss}}$  die beim Kollisionsvorgang dissipierte Arbeit ist. Weil dem System von außen keine Energie zugeführt wird, muss die dissipierte Arbeit größer oder (im reibungsfreien und voll elastischen Fall) gleich null sein. Das bedeutet, dass die kinetische Energie des Partikels nach der Kollision kleiner als zuvor oder gleich sein muss:

$$E^+ \leq E^-. \quad (4.19)$$

Die kinetische Energie eines Partikels entspricht der Summe aus dem translatorischen Teil

$$E_{\text{tra}} = \frac{m_p}{2} \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}_p \quad (4.20)$$

und dem rotatorischen Anteil

$$E_{\text{rot}} = \frac{I_p}{2} \boldsymbol{\omega}_p \cdot \boldsymbol{\omega}_p = \frac{m_p D_p^2}{20} \boldsymbol{\omega}_p \cdot \boldsymbol{\omega}_p. \quad (4.21)$$

Dann wird Gl. (4.19) zu

$$\mathbf{v}_p^+ \cdot \mathbf{v}_p^+ + \frac{D_p^2}{10} \boldsymbol{\omega}_p^+ \cdot \boldsymbol{\omega}_p^+ \leq \mathbf{v}_p^- \cdot \mathbf{v}_p^- + \frac{D_p^2}{10} \boldsymbol{\omega}_p^- \cdot \boldsymbol{\omega}_p^-.$$

$\mathbf{v}_p^+$  und  $\boldsymbol{\omega}_p^+$  können dort durch die Stoßgleichungen (4.2) und (4.4) ersetzt werden. Nach dem Ausmultiplizieren der Skalarprodukte können die beiden Summanden auf der rechten Seite der Ungleichung weggekürzt werden. Man erhält so:

$$2 \left( \mathbf{v}_p^- \cdot \hat{\mathbf{f}} \right) + \hat{\mathbf{f}} \cdot \hat{\mathbf{f}} - D_p \left[ \boldsymbol{\omega}_p^- \cdot \left( \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{f}} \right) \right] + \frac{5}{2} \left( \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{f}} \right) \cdot \left( \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{f}} \right) \leq 0. \quad (4.22)$$

#### 4. Kollisionsmodelle

Auf den letzten Term der linken Seite von Gl. (4.22) kann die Lagrangesche Identität (Bronstein et al., 2008) angewendet werden:

$$\left(\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{f}}\right) \cdot \left(\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{f}}\right) = \hat{\mathbf{f}} \cdot \hat{\mathbf{f}} - \left(\hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{n}\right)^2.$$

Der spezifische Kraftstoßvektor  $\hat{\mathbf{f}}$  kann als Summe seiner zwei Komponenten  $\hat{\mathbf{f}}_n$  und  $\hat{\mathbf{f}}_R$  ausgedrückt werden. Diese beiden Komponenten sind zueinander orthogonal, so dass dann

$$\hat{\mathbf{f}} \cdot \hat{\mathbf{f}} = \hat{\mathbf{f}}_n \cdot \hat{\mathbf{f}}_n + \hat{\mathbf{f}}_R \cdot \hat{\mathbf{f}}_R$$

ist. Die Normalkomponente  $\hat{\mathbf{f}}_n$  und der Normaleneinheitsvektor der Wand  $\mathbf{n}$  sind kollinear, d. h. das Kreuzprodukt dieser beiden Vektoren verschwindet. Im Gegensatz dazu stehen  $\hat{\mathbf{f}}_R$  und  $\mathbf{n}$  senkrecht zueinander, so dass für diese beiden Vektoren das Skalarprodukt gleich null ist. Gl. (4.22) wird dann zu:

$$2 \left(\mathbf{v}_p^- \cdot \hat{\mathbf{f}}_n\right) + 2 \left(\mathbf{v}_p^- \cdot \hat{\mathbf{f}}_R\right) + \frac{7}{2} \hat{\mathbf{f}}_n \cdot \hat{\mathbf{f}}_n + \frac{7}{2} \hat{\mathbf{f}}_R \cdot \hat{\mathbf{f}}_R - D_p \left[\boldsymbol{\omega}_p^- \cdot \left(\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{f}}_R\right)\right] - \frac{5}{2} \left(\hat{\mathbf{f}}_n \cdot \mathbf{n}\right)^2 \leq 0.$$

Die Normalkomponente  $\hat{\mathbf{f}}_n = \hat{f}_n \mathbf{n}$  kann durch den Ausdruck in Gl. (4.6) ersetzt werden. Damit kann diese Kraftstoßkomponente eliminiert werden und einige Umformungen liefern dann:

$$\left(\mathbf{v}_p^- \cdot \hat{\mathbf{f}}_R\right) + \frac{7}{4} \hat{\mathbf{f}}_R \cdot \hat{\mathbf{f}}_R - \frac{D_p}{2} \left[\boldsymbol{\omega}_p^- \cdot \left(\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{f}}_R\right)\right] \leq \frac{1 - e_{n,w}^2}{2} \left(\mathbf{v}_p^- \cdot \mathbf{n}\right)^2.$$

Die Vektoren in dem Term  $\boldsymbol{\omega}_p^- \cdot \left(\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{f}}_R\right)$  dürfen nach den Rechenregeln für Spatprodukte zyklisch vertauscht werden (Bronstein et al., 2008). Dann lässt sich der Reibkraftstoßvektor  $\hat{\mathbf{f}}_R$  ausklammern:

$$\left(\mathbf{v}_p^- - \frac{D_p}{2} \boldsymbol{\omega}_p^- \times \mathbf{n}\right) \cdot \hat{\mathbf{f}}_R + \frac{7}{4} \hat{\mathbf{f}}_R \cdot \hat{\mathbf{f}}_R \leq \frac{1 - e_{n,w}^2}{2} \left(\mathbf{v}_p^- \cdot \mathbf{n}\right)^2.$$

Der sich dabei ergebende Klammerterm auf der linken Ungleichungsseite kann durch Gl. (4.12) ersetzt werden. Die normale Geschwindigkeitskomponente  $\mathbf{v}_n^-$  ist zu  $\hat{\mathbf{f}}_R$  orthogonal, so dass das Skalarprodukt dieser beiden Vektoren gleich null ist. Damit lautet die Bedingung zur Erfüllung der Energieerhaltung schließlich:

$$\frac{7}{2} \hat{\mathbf{f}}_R \cdot \hat{\mathbf{f}}_R + 2 \mathbf{v}_B^- \cdot \hat{\mathbf{f}}_R \leq (1 - e_{n,w}^2) \left(\mathbf{v}_p^- \cdot \mathbf{n}\right)^2. \quad (4.23)$$

Gl. (4.23) ist für die beiden Reibungsfälle Haft- und Gleitreibung gültig und die Energieerhaltung kann somit für jeden Fall getrennt überprüft werden. Bei Haftreibung ist der Reibkraftstoßvektor  $\hat{\mathbf{f}}_R$  durch die Gleichung (4.17) bestimmt, was direkt in Gl. (4.23) eingesetzt werden kann. Daraus folgt der Ausdruck

$$- (1 - e_{t,w}^2) \mathbf{v}_B^- \cdot \mathbf{v}_B^- \leq \frac{7}{2} (1 - e_{n,w}^2) \left(\mathbf{v}_p^- \cdot \mathbf{n}\right)^2,$$



oder anders ausgedrückt:

$$-\frac{1 - e_{n,w}^2}{1 - e_{t,w}^2} \leq \frac{2}{7} \left( \frac{|\mathbf{v}_B^-|}{\mathbf{v}_p^- \cdot \mathbf{n}} \right)^2. \quad (4.24)$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung ist stets größer oder gleich null und der Betrag der beiden Restitutionskoeffizienten  $e_{n,w}$  und  $e_{t,w}$  ist per Definitionem nicht größer als eins. Daraus folgt, dass die linke Ungleichungsseite immer negativ oder null ist – die Bedingung (4.24) ist demnach erfüllt und das Partikel-Wand-Kollisionsmodell verletzt die Energieerhaltung im Falle der Haftreibung nicht.

Liegt im anderen Fall Gleitreibung vor, so ist der Reibstoßkraftvektor  $\hat{\mathbf{f}}_R$  durch Gleichung (4.14) gegeben. Setzt man darin die Normalstoßkraftkomponente  $\hat{f}_n$  aus Gl. (4.6) ein, so ergibt sich:

$$\hat{\mathbf{f}}_{R,G} = \mu_w (1 + e_{n,w}) (\mathbf{v}_p^- \cdot \mathbf{n}) \frac{\mathbf{v}_B^-}{|\mathbf{v}_B^-|}.$$

Dieser Zusammenhang wird direkt in die Energiebedingung (4.23) eingesetzt, um für den Gleitreibungsfall die folgende Ungleichung zu erhalten:

$$\frac{7}{2} \mu_w (1 + e_{n,w}) - \frac{1 - e_{n,w}}{\mu_w} \leq -2 \frac{|\mathbf{v}_B^-|}{\mathbf{v}_p^- \cdot \mathbf{n}}. \quad (4.25)$$

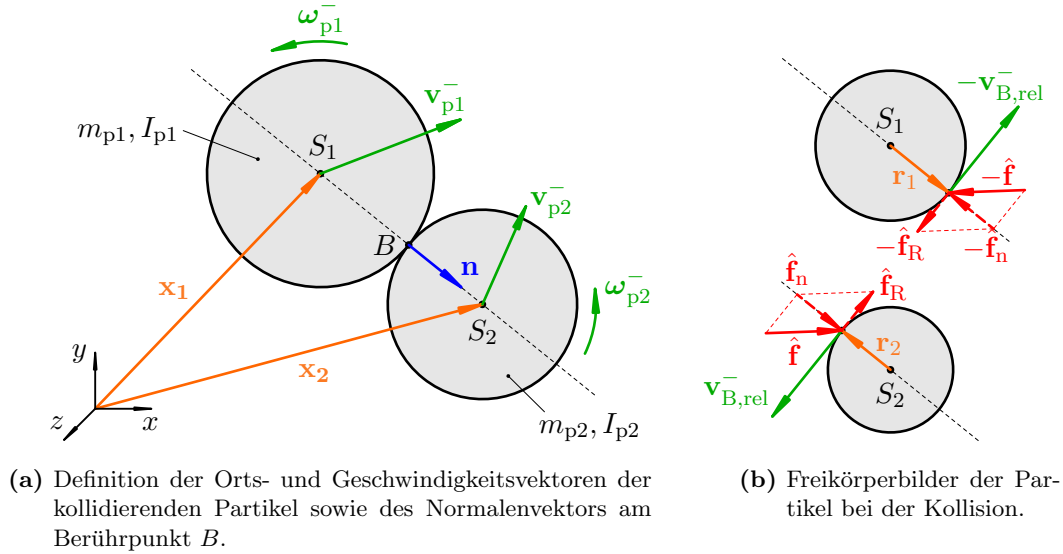
Wegen der Haftbedingung (4.18) setzt die Gleitreibung erst ab einem gewissen Betragswert des Berührungsgeschwindigkeitsvektors ein. Ersetzt man  $|\mathbf{v}_B^-|$  in Gl. (4.25) durch diesen Grenzwert aus Gl. (4.18), welcher als Mindestwert den ungünstigsten Fall zur Erfüllung dieser Ungleichung darstellt, so lautet die Bedingung zur Erhaltung der Energie bei Gleitreibung:

$$7\mu_w \left( \frac{\mu_w}{2} - \frac{\mu_{0,w}}{1 + e_{t,w}} \right) \leq \frac{1 - e_{n,w}}{1 + e_{n,w}}. \quad (4.26)$$

Da der Betrag des wandnormalen Restitutionskoeffizienten  $e_{n,w}$  wie bereits erwähnt nicht größer als eins sein kann, ist die rechte Seite der Ungleichung stets positiv oder null. Damit die Energieerhaltung nicht verletzt ist, reicht es demnach aus, wenn die linke Ungleichungsseite kleiner oder gleich null ist. Weil  $e_{t,w}$  wie  $e_{n,w}$  betragsmäßig nicht größer als eins ist und der Haftreibungskoeffizient  $\mu_{0,w}$  per definitionem größer oder gleich dem Reibbeiwert  $\mu_w$  sein muss, so ist diese Forderung auch im Gleitreibungsfall automatisch für alle physikalisch sinnvollen Zahlenwerte der vier Modellparameter erfüllt.

Die hier vorgenommenen Betrachtungen zeigen also, dass die Gleichungen des vorgestellten Modells für Partikel-Wand-Kollisionen den Energieerhaltungssatz nicht verletzen, obwohl diese Bedingung nicht direkt in das Modell mit eingeflossen ist. Demnach kann davon ausgegangen werden, dass dieses Modell im Einsatz für die Simulation partikelbeladener Strömungen – unter der Voraussetzung, dass die vier Modellparameter innerhalb ihrer Definitionsgrenzen liegen – physikalisch sinnvolle und konsistente Resultate liefert.

#### 4. Kollisionsmodelle



**Abbildung 4.2.:** Vektorielle Definitionen im System zweier Partikel während einer reibungsbehafteten Kollision.

### 4.2. Partikel-Partikel-Kollisionen

Die folgende Herleitung bezieht sich auf ein Modell zur Berechnung der Partikelgeschwindigkeiten nach einer reibungsbehafteten Kollision zwischen zwei Partikeln, deren Trajektorien sich kreuzen. Zur Vereinfachung wird für das gesamte Modell angenommen, dass es sich bei den Partikel-Partikel-Kollisionen ausschließlich um binäre Kollisionen handelt – d. h. der simultane Kontakt dreier oder gar mehrerer Partikel wird nicht berücksichtigt, weil dieser Fall nur bei sehr hoch beladenen dispersen Mehrphasenströmungen signifikant wird.

Der Zusammenstoß zweier Partikel ist in *LESOC* zuvor mit einem einfachen Modell (wie z. B. in Berlemont et al. (1998)) als zentraler Stoß zweier Kugeln beschrieben worden. Die bei der Kollision auftretenden Inelastizitäten konnten über einen normalen Resitutionskoeffizienten  $e_{n,p}$  modelliert werden, während die beteiligten Partikel beim gesamten Stoßvorgang keine tangentialen Reibungskräfte erfuhren. Deshalb konnte die Partikeldrehung in dem ursprünglichen Modell ganz vernachlässigt werden.

Die Partikel-Partikel-Kollisionsroutine von *LESOC* (vgl. (Breuer, 2011)) wurde um das folgende Kollisionsmodell erweitert, um auch die zwischen den Partikeln auftretenden Reibungskräfte berücksichtigen zu können.

#### 4.2.1. Herleitung der Modellgleichungen

Fundamentaler Ausgangspunkt des Modells ist auch hier wieder das zweite Newtonsche Gesetz bzw. der Impulssatz. Für das erste Partikel gilt demnach mit den Definitionen in

Abb. 4.2(a):

$$m_{p1} (\mathbf{v}_{p1}^+ - \mathbf{v}_{p1}^-) = - \int \mathbf{f} dt.$$

Nach dem dritten Newtonschen Gesetz (*actio = reactio*) muss am zweiten Partikel die gleiche Stoßkraft  $\mathbf{f}$ , jedoch in entgegengesetzter Richtung angreifen. Der Impulssatz für das zweite Partikel lautet dann:

$$m_{p2} (\mathbf{v}_{p2}^+ - \mathbf{v}_{p2}^-) = \int \mathbf{f} dt.$$

Wie bei den Partikel-Wand-Kollisionen in Abschnitt 4.1 kann auch in diesem Modell ein spezifischer Kraftstoßvektor  $\hat{\mathbf{f}}$  eingeführt werden. Da in dem hier betrachteten Fall zwei möglicherweise unterschiedliche Partikelmassen  $m_{p1}$  und  $m_{p2}$  auftreten, wird der spezifische Kraftstoß auf die normierte Masse

$$M = \frac{m_{p1} m_{p2}}{m_{p1} + m_{p2}} \quad (4.27)$$

bezogen:

$$\hat{\mathbf{f}} = \frac{1}{M} \int \mathbf{f} dt.$$

Mit dieser Definition folgen aus den Impulsgleichungen die beiden Stoßgleichungen zur Berechnung der Partikelgeschwindigkeiten nach der Kollision:

$$\mathbf{v}_{p1}^+ = \mathbf{v}_{p1}^- - \frac{M}{m_{p1}} \hat{\mathbf{f}}, \quad (4.28a)$$

$$\mathbf{v}_{p2}^+ = \mathbf{v}_{p2}^- + \frac{M}{m_{p2}} \hat{\mathbf{f}}. \quad (4.28b)$$

Durch die Reibung am Kontaktpunkt zwischen den beiden Partikeln wirkt eine Komponente des Kraftstoßes  $\hat{\mathbf{f}}$  tangential zu den Partikeloberflächen (s. Abb. 4.2(b)). Daraus resultiert für beide Kollisionspartner je ein Drehmoment  $\mathbf{m}_1$  bzw.  $\mathbf{m}_2$ , welche eine Änderung der Partikeldrehimpulse zur Folge haben. Nach dem Drallsatz gilt für das erste Partikel der Zusammenhang

$$I_{p1} (\boldsymbol{\omega}_{p1}^+ - \boldsymbol{\omega}_{p1}^-) = \int \mathbf{m}_1 dt = - \int \mathbf{r}_1 \times \mathbf{f} dt. \quad (4.29)$$

Darin ist  $\mathbf{r}_1$  der Hebelarm zwischen dem Schwerpunkt des ersten Partikels  $S_1$  und dem Kraftangriffspunkt bzw. Berührungspunkt  $B$ . Weil beide Partikel als starr angenommen werden und die Verformungen der Partikel am Kontaktpunkt während des Kollisionsvorganges somit vernachlässigbar sind, können Betrag und Richtung des Radiusvektors  $\mathbf{r}_1$

#### 4. Kollisionsmodelle

als konstant angenommen werden. Der Betrag von  $\mathbf{r}_1$  entspricht demnach dem Radius des ersten Partikels, d. h.

$$|\mathbf{r}_1| = \frac{D_{p1}}{2} = \text{konst.},$$

und die Richtung ist mit dem Stoßnormalenvektor  $\mathbf{n}$  vorgegeben, welcher gemäß der Definition in Abb. 4.2(a) zum Zeitpunkt der Kollision vom Schwerpunkt des ersten Partikels zum Schwerpunkt des zweiten Partikels zeigt:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|} = \frac{2(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)}{D_{p1} + D_{p2}}. \quad (4.30)$$

Also ist

$$\mathbf{r}_1 = |\mathbf{r}_1| \mathbf{n} = \frac{D_{p1}}{2} \mathbf{n} = \text{konst.}$$

und kann somit aus dem Integral in Gl. (4.29) herausgenommen werden. Zusammen mit der Kraftstoßdefinition und Gl. (2.22) für das Massenträgheitsmoment erhält man aus Gl. (4.29) die Stoßgleichung für die Winkelgeschwindigkeit des ersten Partikels

$$\boldsymbol{\omega}_{p1}^+ = \boldsymbol{\omega}_{p1}^- - \frac{5}{D_{p1}} \frac{M}{m_{p1}} \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{f}} \quad (4.31a)$$

und analog zu dieser Vorgehensweise mit

$$\mathbf{r}_2 = -|\mathbf{r}_2| \mathbf{n} = -\frac{D_{p2}}{2} \mathbf{n} = \text{konst.}$$

für das zweite Partikel:

$$\boldsymbol{\omega}_{p2}^+ = \boldsymbol{\omega}_{p2}^- - \frac{5}{D_{p2}} \frac{M}{m_{p2}} \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{f}}. \quad (4.31b)$$

Um die Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}_{p1}^+$  und  $\mathbf{v}_{p2}^+$  und die Winkelgeschwindigkeiten  $\boldsymbol{\omega}_{p1}^+$  und  $\boldsymbol{\omega}_{p2}^+$  der Partikel nach dem Stoß nun bestimmen zu können, muss der Kraftstoßvektor  $\hat{\mathbf{f}}$  berechnet werden – die Partikelgeschwindigkeiten vor dem Stoß sind bekannt.

Wie schon bei den Partikel-Wand-Kollisionen in Abschnitt 4.1 wird auch bei den Partikel-Partikel-Kollisionen die Reibung am Kontaktpunkt über das Coulombsche Reibungsmodell angenähert. Dazu wird, wie in Abb. 4.2(b) zu sehen ist,  $\hat{\mathbf{f}}$  wieder in seine Normalkomponente und die Coulombsche Reibkraftkomponente  $\hat{\mathbf{f}}_R$  aufgeteilt:

$$\hat{\mathbf{f}} = \hat{\mathbf{f}}_n + \hat{\mathbf{f}}_R = \hat{f}_n \mathbf{n} + \hat{\mathbf{f}}_R.$$

Die skalare Normalkraftkomponente des Kraftstoßvektors entspricht darin dem Skalarprodukt aus  $\hat{\mathbf{f}}$  und dem Normaleneinheitsvektor  $\mathbf{n}$ :

$$\hat{f}_n = \hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{n}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich in Abhängigkeit von den Partikelgeschwindigkeiten bringen, indem zunächst die Gleichung (4.28a) von Gl. (4.28b) subtrahiert, das Ergebnis nach  $\hat{\mathbf{f}}$  umgestellt und anschließend mit  $\mathbf{n}$  skalar multipliziert wird. Die normierte Masse  $M$  kann wegen der Definition in Gl. (4.27) eliminiert werden und man erhält:

$$\hat{f}_{\mathbf{n}} = \mathbf{v}_{p2}^+ \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v}_{p1}^+ \cdot \mathbf{n} - \left( \mathbf{v}_{p2}^- \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v}_{p1}^- \cdot \mathbf{n} \right). \quad (4.32)$$

Die Skalarprodukte  $\mathbf{v}_{p1}^- \cdot \mathbf{n}$  und  $\mathbf{v}_{p2}^- \cdot \mathbf{n}$ , ... in Gl. (4.32) sind die skalaren Normalkomponenten  $v_{n,p}$  der jeweiligen Partikelgeschwindigkeiten. Über die Definition des normalen Restitutionskoeffizienten bei interpartikulären Kollisionen  $e_{n,p}$  (Sommerfeld, 2000) kann folgender Zusammenhang zwischen den Normalkomponenten der Partikelgeschwindigkeiten hergestellt werden:

$$e_{n,p} = -\frac{v_{n,p2}^+ - v_{n,p1}^+}{v_{n,p2}^- - v_{n,p1}^-} = -\frac{\mathbf{v}_{p2}^+ \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v}_{p1}^+ \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{v}_{p2}^- \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v}_{p1}^- \cdot \mathbf{n}}, \quad e_{n,p} = 0 \dots 1. \quad (4.33)$$

Multipliziert man den Nenner in Gl. (4.33) auf die linke Seite und setzt das Ergebnis in Gl. (4.32) ein, dann erhält man für die skalare Normalkraftstoßkomponente den folgenden Ausdruck:

$$\hat{f}_{\mathbf{n}} = -(1 + e_{n,p}) \left( \mathbf{v}_{p2}^- - \mathbf{v}_{p1}^- \right) \cdot \mathbf{n}. \quad (4.34)$$

Zur Berechnung der Reibkraftkomponente  $\hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{R}}$  des Kraftstoßvektors werden wieder gemäß des Coulombschen Reibgesetzes die beiden Fälle Haft- und Gleitreibung unterschieden. Im ersten Fall muss eine kinematische Haftbedingung bezüglich der relativen Berührungsgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_{B,\text{rel}}$  (s. Abb. 4.2(b)) im Kontaktpunkt  $B$  aufgestellt werden. Die relative Berührungsgeschwindigkeit entspricht dabei der Differenz aus den resultierenden Oberflächengeschwindigkeiten beider Partikel in Punkt  $B$  ( $\mathbf{v}_{B1}$  und  $\mathbf{v}_{B2}$ ). Nach der Definition von  $\mathbf{v}_B$  in Gl. (4.8) und den Radiusvektoren  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$  gilt für diese Geschwindigkeiten

$$\mathbf{v}_{B1} = \mathbf{v}_{p1} - \mathbf{v}_{n,p1} + \frac{D_{p1}}{2} \boldsymbol{\omega}_{p1} \times \mathbf{n}$$

und

$$\mathbf{v}_{B2} = \mathbf{v}_{p2} - \mathbf{v}_{n,p2} - \frac{D_{p2}}{2} \boldsymbol{\omega}_{p2} \times \mathbf{n}.$$

Mit der Definition der stoßnormalen Geschwindigkeitskomponente in Gl. (4.7) resultiert der folgende Ausdruck für den relativen Berührungsgeschwindigkeitsvektor:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{B,\text{rel}} &= \mathbf{v}_{B2} - \mathbf{v}_{B1} \\ &= \mathbf{v}_{p2} - \mathbf{v}_{p1} - [(\mathbf{v}_{p2} - \mathbf{v}_{p1}) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n} - \left( \frac{D_{p1}}{2} \boldsymbol{\omega}_{p1} + \frac{D_{p2}}{2} \boldsymbol{\omega}_{p2} \right) \times \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

#### 4. Kollisionsmodelle

Zur Formulierung der kinematischen Haftbedingung wird auch für die Partikel-Partikel-Kollisionen ein tangentialer Restitutionskoeffizient  $e_{t,p}$  eingeführt, welcher in einem System zweier kollidierender Partikel wie folgt definiert werden kann:

$$|e_{t,p}| = \frac{|\mathbf{v}_{B,rel}^+|}{|\mathbf{v}_{B,rel}^-|}, \quad |e_{t,p}| = 0 \dots 1. \quad (4.36)$$

Im Falle  $e_{t,p} = 0$  würde dies bedeuten, dass die relative Berührungsgeschwindigkeit nach dem Stoß gleich null ist, d. h. die beiden Partikel würden nach einer solchen Haftreibungskollision aufeinander abrollen. Bei  $e_{t,p} < 0$  behält der relative Berührungsgeschwindigkeitsvektor seine Richtung bei und wird aufgrund plastischer Verformungen am Kontaktpunkt um den Betrag von  $e_{t,p}$  langsamer, wie bereits beim Partikel-Wand-Kollisionsmodell erläutert wurde.

Mit dem so definierten tangentialen Restitutionskoeffizienten erhält man dann die folgende kinematische Haftbedingung:

$$\mathbf{v}_{B,rel}^+ = -e_{t,p} \mathbf{v}_{B,rel}^-.$$

Der Vektor  $\mathbf{v}_{B,rel}^+$  auf der linken Seite dieser Gleichung kann mit der Definitionsgleichung (4.35) ersetzt werden. Es ergibt sich dann:

$$\mathbf{v}_{p2}^+ - \mathbf{v}_{p1}^+ - \left[ \left( \mathbf{v}_{p2}^+ - \mathbf{v}_{p1}^+ \right) \cdot \mathbf{n} \right] \mathbf{n} - \left( \frac{D_{p1}}{2} \boldsymbol{\omega}_{p1}^+ + \frac{D_{p2}}{2} \boldsymbol{\omega}_{p2}^+ \right) \times \mathbf{n} = -e_{t,p} \mathbf{v}_{B,rel}^-.$$

Die Herleitung der Gleichung für den Haftreibungskraftstoßvektor  $\hat{\mathbf{f}}_H$  erfolgt daraus ganz analog zur Entwicklung der Gleichung (4.13) für das Partikel-Wand-Modell: Setzt man für die beiden ersten Summanden und die Winkelgeschwindigkeiten in der obigen Gleichung die aus den Stoßgleichungen (4.28) bzw. (4.31) bekannten Zusammenhänge ein, so erhält man unter der Berücksichtigung, dass nach Gl. (4.27)

$$\frac{M}{m_{p1}} + \frac{M}{m_{p2}} = 1$$

ist:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{p2}^- - \mathbf{v}_{p1}^- - \left[ \left( \mathbf{v}_{p2}^+ - \mathbf{v}_{p1}^+ \right) \cdot \mathbf{n} \right] \mathbf{n} - \left( \frac{D_{p1}}{2} \boldsymbol{\omega}_{p1}^- + \frac{D_{p2}}{2} \boldsymbol{\omega}_{p2}^- \right) \times \mathbf{n} + \\ + \hat{\mathbf{f}}_H + \frac{5}{2} \left( \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{f}}_H \right) \times \mathbf{n} = -e_{t,p} \mathbf{v}_{B,rel}^-. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Mit der Definitionsgleichung des wandnormalen Restitutionskoeffizienten für Partikel-Partikel-Kollisionen in Gl. (4.33) gilt:

$$\left( \mathbf{v}_{p2}^+ - \mathbf{v}_{p1}^+ \right) \cdot \mathbf{n} = -e_{n,p} \left( \mathbf{v}_{p2}^- - \mathbf{v}_{p1}^- \right) \cdot \mathbf{n}.$$

Das doppelte Vektorprodukt in Gl. (4.37) kann auch hier wieder mit Hilfe der Graßmann-Identität aufgelöst werden, was zusammen mit Gl. (4.34) für die Normalkraftstoßkomponente zu der folgenden Gleichung führt:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{p2}^- - \mathbf{v}_{p1}^- - \left( \frac{D_{p1}}{2} \boldsymbol{\omega}_{p1}^- + \frac{D_{p2}}{2} \boldsymbol{\omega}_{p2}^- \right) \times \mathbf{n} + \frac{7}{2} \hat{\mathbf{f}}_H + \\ + \frac{5 + 7e_{n,p}}{2} \left[ \left( \mathbf{v}_{p2}^+ - \mathbf{v}_{p1}^+ \right) \cdot \mathbf{n} \right] \mathbf{n} = -e_{t,p} \mathbf{v}_{B,rel}^- . \end{aligned}$$

Führt man den relativen Berührungspunktsgeschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}_{B,rel}^-$  nach Gl. (4.35) auf der linken Seite dieser Gleichung ein, so resultiert daraus schließlich die folgende Bestimmungsgleichung für  $\hat{\mathbf{f}}_H$ :

$$\hat{\mathbf{f}}_H = - \left\{ \frac{2}{7} (1 + e_{t,p}) \mathbf{v}_{B,rel}^- + (1 + e_{n,p}) \left[ \left( \mathbf{v}_{p2}^- - \mathbf{v}_{p1}^- \right) \cdot \mathbf{n} \right] \mathbf{n} \right\} . \quad (4.38)$$

Liegt während der Kollision Gleitreibung zwischen den Partikeln vor, so wird das lineare Reibgesetz angenommen. Der tangentielle Gleitreibungskraftstoßvektor  $\hat{\mathbf{f}}_{R,G}$  zeigt dann in die entgegengesetzte Richtung des relativen Berührungspunktsgeschwindigkeitsvektors vor der Kollision  $\mathbf{v}_{B,rel}^-$  und ist proportional zum Betrag der Normalkomponente des Kraftstoßes:

$$\hat{\mathbf{f}}_{R,G} = -\mu_p \left| \hat{\mathbf{f}}_n \right| \frac{\mathbf{v}_{B,rel}^-}{\left| \mathbf{v}_{B,rel}^- \right|} = -\mu_p \left| \hat{f}_n \right| \frac{\mathbf{v}_{B,rel}^-}{\left| \mathbf{v}_{B,rel}^- \right|} .$$

Darin ist  $\mu_p$  der Reibbeiwert für die Gleitreibung zwischen zwei Partikeln. Die Kraftstoßkomponente  $\hat{f}_n$  ist durch Gl. (4.34) gegeben. Berücksichtigt man, dass eine Kollision der beiden Partikel erfordert, dass

$$\left( \mathbf{v}_{p2}^- - \mathbf{v}_{p1}^- \right) \cdot \mathbf{n} < 0$$

ist (andernfalls würden sich die Partikel schon vor der Kollision von einander entfernen), so muss nach Gl. (4.34)

$$\left| \hat{f}_n \right| = - (1 + e_{n,p}) \left( \mathbf{v}_{p2}^- - \mathbf{v}_{p1}^- \right) \cdot \mathbf{n} \quad (4.39)$$

sein und für  $\hat{\mathbf{f}}_{R,G}$  gilt dann:

$$\hat{\mathbf{f}}_{R,G} = \mu_p (1 + e_{n,p}) \left[ \left( \mathbf{v}_{p2}^- - \mathbf{v}_{p1}^- \right) \cdot \mathbf{n} \right] \frac{\mathbf{v}_{B,rel}^-}{\left| \mathbf{v}_{B,rel}^- \right|} . \quad (4.40)$$

Der Kraftstoßvektor bei Gleitreibung  $\hat{\mathbf{f}}_G$  ergibt sich als Summe seiner beiden Komponenten  $\hat{\mathbf{f}}_n = \hat{f}_n \mathbf{n}$  und  $\hat{\mathbf{f}}_{R,G}$ . Mit den Gleichungen (4.34) und (4.40) ist demnach:

$$\hat{\mathbf{f}}_G = \hat{f}_n \mathbf{n} + \hat{\mathbf{f}}_{R,G} = (1 + e_{n,p}) \left[ \left( \mathbf{v}_{p2}^- - \mathbf{v}_{p1}^- \right) \cdot \mathbf{n} \right] \left( \mu_p \frac{\mathbf{v}_{B,rel}^-}{\left| \mathbf{v}_{B,rel}^- \right|} - \mathbf{n} \right) . \quad (4.41)$$

#### 4. Kollisionsmodelle

Für die beiden Fälle Haftreibung und Gleitreibung sind mit den Gleichungen (4.38) bzw. (4.41) die notwendigen Formeln zur Berechnung der Kraftstoßvektoren vorhanden. Die Fallunterscheidung zwischen Haften und Gleiten beim Kollisionsvorgang zweier Partikel erfolgt auch hier wieder über die Haftbedingung des Coulombschen Reibungsmodells. Demnach tritt Haftreibung zwischen den beiden involvierten Partikeln auf, wenn die Bedingung

$$\left| \hat{\mathbf{f}}_{\text{R,H}} \right| \leq \mu_{0,\text{p}} \left| \hat{\mathbf{f}}_{\text{n}} \right| \quad (4.42)$$

erfüllt ist. Darin ist  $\mu_{0,\text{p}}$  der Haftreibbeiwert von den zusammenstoßenden Partikeln. Die tangentielle Haftreibungskomponente  $\hat{\mathbf{f}}_{\text{R,H}}$  lässt sich bestimmen, wenn vom Kraftstoßvektor der Normalkomponentenvektor  $\hat{\mathbf{f}}_{\text{n}} = \hat{f}_{\text{n}} \mathbf{n}$  abgezogen wird. Mit Gl. (4.34) und Gl. (4.38) gilt:

$$\hat{\mathbf{f}}_{\text{R,H}} = \hat{\mathbf{f}}_{\text{H}} - \hat{f}_{\text{n}} \mathbf{n} = -\frac{2}{7} (1 + e_{\text{t,p}}) \mathbf{v}_{\text{B,rel}}^- \quad (4.43)$$

Dieser Zusammenhang kann in die linke Seite der Haftbedingung (4.42) eingesetzt und der Betrag von  $\hat{\mathbf{f}}_{\text{n}}$  darin durch den Betrag von  $\hat{f}_{\text{n}}$  sowie Gl. (4.39) ersetzt werden. Um-sortieren führt schließlich zu der folgenden Haftbedingung, die vollständig von den bekannten Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten der Partikel vor der Kollision abhängt:

$$\left| \mathbf{v}_{\text{B,rel}}^- \right| \leq -\frac{7}{2} \mu_{0,\text{p}} \frac{1 + e_{\text{n,p}}}{1 + e_{\text{t,p}}} \left( \mathbf{v}_{\text{p2}}^- - \mathbf{v}_{\text{p1}}^- \right) \cdot \mathbf{n} \quad (4.44)$$

Folglich sind alle benötigten Gleichungen zur Berechnung reibungsbehafteter Kollisionen zwischen zwei Partikeln bekannt. Die Vorgehensweise zur Anwendung dieses Kollisionsmodells kann in die folgenden Schritte unterteilt werden:

1. Identifizierung der Kollisionspartner (wie in Abschnitt 3.2.2 erläutert),
2. Ermitteln der Partikelortsvektoren zum Zeitpunkt der Kollision  $\mathbf{x}_1$  bzw.  $\mathbf{x}_2$  und Berechnung des Stoßnormalenvektors  $\mathbf{n}$  mit Gl. (4.30),
3. Bestimmung von  $\mathbf{v}_{\text{B,rel}}^-$  mittels Gl. (4.35) sowie dessen Betrags,
4. Prüfen der Haftbedingung gemäß Gl. (4.44),
5. Berechnung von  $\hat{\mathbf{f}}$  mit Gl. (4.38) bei erfüllter Haftbedingung bzw. andernfalls mit Gl. (4.41),
6. Bestimmung der Partikelgeschwindigkeiten nach dem Stoß mit den Gleichungen (4.28) und
7. Bestimmung der Rotationsgeschwindigkeiten der Partikel nach dem Stoß gemäß Gl. (4.31).

Genau wie beim Wandmodell gibt es auch in diesem Modell mit den beiden Restitutions- und Reibungskoeffizienten insgesamt vier Modellparameter, die gemäß der involvierten Partikelwerkstoffe angepasst werden müssen.



### 4.2.2. Reduktion auf das Partikel-Wand-Kollisionsmodell

Die oben hergeleiteten Modellgleichungen für das Partikel-Partikel-Kollisionsmodell lassen sich auf die Gleichungen des in Abschnitt 4.1 entwickelten Modells zur Beschreibung reibungsbehafteter Partikel-Wand-Kollisionen zurückführen. Dazu wird eines der beiden involvierten Partikel (hier das erste Partikel, da der Normalenvektor von ihm weg zeigt, vgl. Abb. 4.2) zur festen Wand, indem man die Partikelmasse (und damit seine Trägheit) gegen unendlich streben lässt:

$$m_{p1} \rightarrow \infty .$$

Außerdem werden die Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit der Wand unmittelbar vor der Kollision zu null gesetzt:

$$\mathbf{v}_{p1}^- = 0 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\omega}_{p1}^- = 0 .$$

Der Grenzwert der normierten Masse  $M$  liegt wegen der gegen unendlich gehenden Masse des ersten Partikels bei

$$\lim_{m_{p1} \rightarrow \infty} M = \lim_{m_{p1} \rightarrow \infty} \left( \frac{m_{p1} m_{p2}}{m_{p1} + m_{p2}} \right) = m_{p2} .$$

Daraus folgt für die Grenzwerte der in den Stoßgleichungen (4.28) und (4.31) auftretenden Massenverhältnisse

$$\lim_{m_{p1} \rightarrow \infty} \frac{M}{m_{p1}} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{m_{p1} \rightarrow \infty} \frac{M}{m_{p2}} = 1 .$$

Setzt man dies in die Stoßgleichungen des ersten Partikels Gl. (4.28a) bzw. Gl. (4.31a) ein, so ist das Ergebnis, dass das erste Partikel (also die Wand) aufgrund seiner unendlich großen Trägheit keine Änderung seiner Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit erfährt und beide Größen bei null bleiben:

$$\mathbf{v}_{p1}^+ = \mathbf{v}_{p1}^- = 0 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\omega}_{p1}^+ = \boldsymbol{\omega}_{p1}^- = 0 .$$

Die Stoßgleichungen des zweiten Partikels reduzieren sich zu

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{p2}^+ &= \mathbf{v}_{p2}^- + \hat{\mathbf{f}} \quad \text{und} \\ \boldsymbol{\omega}_{p2}^+ &= \boldsymbol{\omega}_{p2}^- - \frac{5}{D_{p2}} \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{f}} , \end{aligned}$$

was identisch ist mit den Gleichungen (4.2) und (4.4) des Partikel-Wand-Modells.

Der relative Berührungsgeschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}_{B,\text{rel}}^-$  ist, weil das erste Partikel unbeweglich ist, gleich der Berührungsgeschwindigkeit an der Oberfläche des zweiten Partikels

$$\mathbf{v}_{B,\text{rel}}^- = \mathbf{v}_{B2}^-$$

#### 4. Kollisionsmodelle

und zur Berechnung der Haft- und Gleitreibungskraftstoßvektoren gelten dann die aus Gl. (4.38) und Gl. (4.41) vereinfachten Formeln

$$\hat{\mathbf{f}}_{\text{H}} = - \left[ \frac{2}{7} (1 + e_{\text{t,p}}) \mathbf{v}_{\text{B2}}^- + (1 + e_{\text{n,p}}) (\mathbf{v}_{\text{p2}}^- \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \right] \quad \text{und}$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\text{G}} = (1 + e_{\text{n,p}}) (\mathbf{v}_{\text{p2}}^- \cdot \mathbf{n}) \left( \mu_{\text{p}} \frac{\mathbf{v}_{\text{B2}}^-}{|\mathbf{v}_{\text{B2}}^-|} - \mathbf{n} \right).$$

Auch diese Ausdrücke sind identisch mit den Gleichungen (4.13) und (4.15) zur Berechnung der Kraftstoßvektoren im Kollisionsmodell für die Partikel-Wand-Interaktion. Schließlich gilt für die Haftbedingung (4.44) bei  $m_{\text{p1}} \rightarrow \infty$

$$|\mathbf{v}_{\text{B2}}^-| \leq -\frac{7}{2} \mu_{0,\text{p}} \frac{1 + e_{\text{n,p}}}{1 + e_{\text{t,p}}} \mathbf{v}_{\text{p2}}^- \cdot \mathbf{n},$$

was ebenso mit der Haftbedingung des Partikel-Wand-Kollisionsmodells übereinstimmt.

Diese kurze Analyse zeigt also, dass das in diesem Abschnitt entwickelte Modell für reibungsbehaftete Partikel-Partikel-Kollisionen mit einem einfachen Grenzwertübergang in das Partikel-Wand-Modell aus Abschnitt 4.1 überführt werden kann. Die physikalische Konsistenz zwischen den beiden Modellen ist demnach gewährleistet.

#### 4.2.3. Energiebetrachtung

Auch für dieses Modell soll im Folgenden eine Energiebetrachtung durchgeführt werden, um nachzuweisen, dass die Gleichungen in Abschnitt 4.2.1 physikalisch sinnvolle Resultate liefern. Der Nachweis erfolgt ganz analog zu der Energiebetrachtung für das Partikel-Wand-Modell in Abschnitt 4.1.2, weshalb die durchgeführten Rechenschritte hier nicht noch einmal so detailliert ausgeführt werden.

Die Bilanzierungsgleichung der kinetischen Energie für das in Abb. 4.2 dargestellte System zweier kollidierender Partikel lautet:

$$E_1^+ - E_1^- + E_2^+ - E_2^- + W_{\text{Diss}} = 0,$$

mit  $W_{\text{Diss}} \geq 0$ . Diese Bilanz lässt sich umformulieren zu der Bedingung

$$E_1^+ + E_2^+ \leq E_1^- + E_2^-. \quad (4.45)$$

Mit der Definition der translatorischen und rotatorischen Anteile der kinetischen Energie  $E$  in Gl. (4.20) bzw. (4.21) wird daraus:

$$m_{\text{p1}} \left( \mathbf{v}_{\text{p1}}^+ \cdot \mathbf{v}_{\text{p1}}^+ + \frac{D_{\text{p1}}^2}{10} \boldsymbol{\omega}_{\text{p1}}^+ \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{p1}}^+ \right) + m_{\text{p2}} \left( \mathbf{v}_{\text{p2}}^+ \cdot \mathbf{v}_{\text{p2}}^+ + \frac{D_{\text{p2}}^2}{10} \boldsymbol{\omega}_{\text{p2}}^+ \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{p2}}^+ \right) \leq$$

$$m_{\text{p1}} \left( \mathbf{v}_{\text{p1}}^- \cdot \mathbf{v}_{\text{p1}}^- + \frac{D_{\text{p1}}^2}{10} \boldsymbol{\omega}_{\text{p1}}^- \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{p1}}^- \right) + m_{\text{p2}} \left( \mathbf{v}_{\text{p2}}^- \cdot \mathbf{v}_{\text{p2}}^- + \frac{D_{\text{p2}}^2}{10} \boldsymbol{\omega}_{\text{p2}}^- \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{p2}}^- \right).$$

Zusammen mit den Stoßgleichungen (4.28) und (4.31), der normalen Kraftstoßkomponente  $\hat{f}_n$  in Gl. (4.34) und der Definitionsgleichung (4.35) für den relativen Berührungsgeschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}_{B,rel}$  liefern die aus Abschnitt 4.1.2 bekannten Umformungen die folgende Bedingung:

$$\frac{7}{2} \hat{\mathbf{f}}_R \cdot \hat{\mathbf{f}}_R + 2 \mathbf{v}_{B,rel}^- \cdot \hat{\mathbf{f}}_R \leq (1 - e_{n,p}^2) \left[ \left( \mathbf{v}_{p2}^- - \mathbf{v}_{p1}^- \right) \cdot \mathbf{n} \right]^2. \quad (4.46)$$

Im Haftreibungsfall ist der Reibkraftstoßvektor  $\hat{\mathbf{f}}_R$  durch Gl. (4.43) gegeben. Die Gleichung (4.46) wird dann zu:

$$-\frac{1 - e_{n,p}^2}{1 - e_{t,p}^2} \leq \frac{2}{7} \left[ \frac{|\mathbf{v}_{B,rel}^-|}{\left( \mathbf{v}_{p2}^- - \mathbf{v}_{p1}^- \right) \cdot \mathbf{n}} \right]^2. \quad (4.47)$$

Diese Bedingung zur Erhaltung der kinetischen Energie bei Haftreibung zwischen den beiden Partikeln ist Gl. (4.24) für das Partikel-Wand-Kollisionsmodell sehr ähnlich. Tatsächlich ist auch hier die rechte Ungleichungsseite stets größer oder gleich null, während die linke Seite bei physikalisch sinnvoller Wahl der Parameter  $e_{n,p}$  und  $e_{t,p}$  immer negativ oder null ist. Die Energieerhaltung wird also auch in diesem Modell bei Haftreibung nicht verletzt.

Für den Fall der Gleitreibung wird  $\hat{\mathbf{f}}_R$  in Gl. (4.46) durch den Reibkraftstoßvektor in Gl. (4.40) ersetzt. Mit Hilfe der Haftbedingung (4.44), die den Mindestbetrag des relativen Berührungsgeschwindigkeitsvektors festlegt, ab dem die Gleitreibung berücksichtigt werden muss, erhält man schließlich die folgende Bedingungsgleichung:

$$7\mu_p \left( \frac{\mu_p}{2} - \frac{\mu_{0,p}}{1 + e_{t,p}} \right) \leq \frac{1 - e_{n,p}}{1 + e_{n,p}}. \quad (4.48)$$

Diese ist identisch mit Gl. (4.26) und aus diesem Grund ebenfalls – solange die vier Modellparameter gemäß ihres physikalischen Definitionsbereiches gewählt werden – immer erfüllt.

Es wurde somit nachgewiesen, dass das in dieser Arbeit entwickelte Modell für die reibungsbehaftete Kollision zweier Partikel den Energieerhaltungssatz unter allen Kollisionsbedingungen erfüllt, sofern für die vier Modellparameter sinnvolle Werte gewählt werden.

### 4.3. Modellierung der Wandrauheit

In vielen technischen Anwendungen von wandgebundenen, partikelbeladenen Strömungen liegen die Durchmesser der Partikel oftmals nur wenige Größenordnungen über den Abmessungen der Wandrauheit von den beteiligten Oberflächen. Aus diesem Grund stellt sich die Frage, ob bei der numerischen Simulation solcher Strömungen die Wirkung rauer Wände auf die disperse Phase berücksichtigt werden muss.

Die experimentellen Untersuchungen an partikelbeladenen Strömungen in einem horizontalen, ebenen Kanal mit unterschiedlichen Wandrauheiten von Kussin (2004) zeigten,

#### 4. Kollisionsmodelle

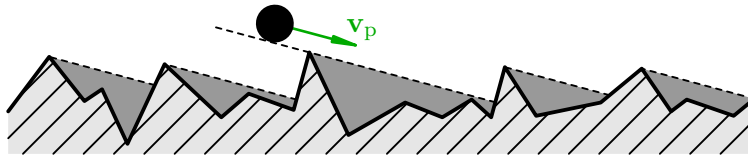
dass die Partikelphase in wandgebundenen Strömungen schon bei vergleichsweise niedrigen Rauheitsgraden signifikant von der irregulären Oberflächenstruktur rauer Wände beeinflusst wird. In den Versuchen von Borée und Caraman (2005), die eine vertikale Rohrströmung untersucht haben, wurde dieser Einfluss insbesondere dadurch deutlich, dass die Partikel in der Rohrmitte langsamer als die Strömung waren, obwohl die Schwerkraft in Strömungsrichtung wirkte und die deutlich schwereren Partikel dadurch eigentlich schneller als die Strömung sein müssten. Weil der Schwerkraftvektor in diesem Fall nicht in Richtung der Wände zeigte, sei laut Caraman et al. (2003) eigentlich zu erwarten gewesen, dass der Einfluss der Wände in der Rohrmitte zu vernachlässigen ist. Vreman (2007) zeigte in seinen Simulationen jedoch, dass das „Hinterherhinken“ der Partikel in der Rohrmitte nur reproduziert werden kann, wenn die Wandrauheit berücksichtigt wird. Ohne die Modellierung rauer Wände waren die Geschwindigkeitsfluktuationen der Partikel vor allem in wandnormaler Richtung, welche hauptverantwortlich sind für den radialen Impulstransport der dispersen Phase, viel zu klein, um zu bewirken, dass die Partikel sich durch die erhöhten Kollisionsraten gegenseitig ausbremsen.

Die Wandrauheit spielt also eine entscheidende Rolle in vielen wandgebundenen, partikelbeladenen Strömungen und sollte daher bei der Simulation solcher Strömungen nicht unberücksichtigt bleiben. Weil es aufwendig und in numerischer Hinsicht mit viel zu großen Kosten verbunden wäre, die Oberflächenstruktur einer rauen Wand geometrisch aufzulösen, kommt zur Berücksichtigung rauer Wände momentan nur ein modellhafter Ansatz in Frage. Als besonders einfache, aber effektive Wandrauheitsmodelle finden sich in der Literatur stochastische Formulierungen, die den Normaleneinheitsvektor der Wand  $\mathbf{n}$  auf Zufallsbasis verändern und somit den Effekt der irregulären Oberfläche rauer Wände statistisch nachbilden (Frank et al., 1993; Sommerfeld und Huber, 1999; Vreman, 2007).

Im Folgenden soll ein neuartiges, stochastisches Wandrauheitsmodell für die Partikel-Wand-Kollisionen vorgestellt werden, welches im Laufe dieser Arbeit für die Anwendung in *LES/OC* entwickelt wurde, um auch den Einfluss der Wandrauheit untersuchen zu können, siehe auch Breuer et al. (2011). Zunächst wird dazu der Ansatz ausgehend vom aus der Strömungsmechanik bekannten Sandrauheitsmodell beschrieben und anschließend werden die Modellgleichungen aufgestellt.

##### 4.3.1. Beschreibung des Sandrauheitsmodells

Die stochastischen Wandrauheitsmodelle von Sommerfeld und Huber (1999) oder Vreman (2007) haben bei der Anwendung in numerischen Simulationen wandgebundener Partikelströmungen erfolgreich gezeigt, dass der einfache Ansatz über eine Variation des Wandnormalenvektors zur Rauheitsmodellierung vielversprechend ist. Vreman (2007) änderte den Normalenvektor der Wand mit Hilfe eines normalverteilten Kippwinkels. Im statistischen Mittel blieb der Wandnormalenvektor jedoch unverändert, so dass dieses Modell lediglich zusätzliche Richtungsschwankungen des Wandnormalenvektors implizierte. In dem Modell von Sommerfeld und Huber (1999) wurde ein ausführlicherer Ansatz verfolgt, indem der von Sommerfeld (2000) beschriebene Schatteneffekt durch eine vom Aufprallwinkel des Partikels abhängige Modifikation der statistischen Kippwinkel-



**Abbildung 4.3.:** Schematische Darstellung des Schatteneffektes bei rauen Wänden.

verteilung berücksichtigt wird.

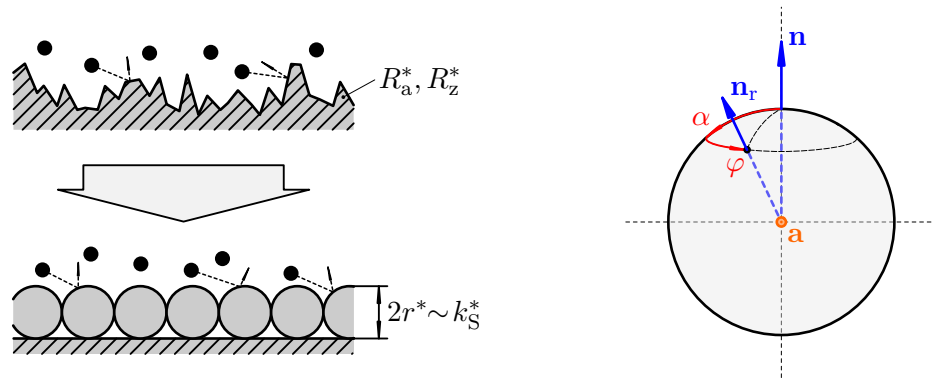
Der so genannte Schatteneffekt ist ein Phänomen, das insbesondere bei im Vergleich zur Wandrauheit kleinen Partikeln und flachen Einfallswinkeln auftreten kann. Wie in Abb. 4.3 zu sehen ist, können die Partikel gewisse Bereiche auf der Leeseite hinter den Rauheitsstrukturen gar nicht erreichen, weil diese durch die Rauheitsstrukturen selbst abgeschattet werden. Die Folge daraus ist, dass die Partikel mit einer erhöhten Wahrscheinlichkeit auf die stark angestellten Fronten der Wandrauheit treffen, was beim Kollisionsvorgang in einem erhöhten Transfer von wandparallelem zu wandnormalem Impuls resultiert. Bezogen auf die modellhafte Variation des Wandnormalenvektors bedeutet das, dass sein statistischer Mittelwert bei Auftreten des Schatteneffektes leicht in die entgegengesetzte Richtung zur Partikelflugbahn geneigt sein muss, wie es auch in dem Modell von Sommerfeld und Huber (1999) berücksichtigt worden ist.

Als Parameter zur Charakterisierung der Wandrauheit in den Simulationen liegt bei beiden Modellen eine Standardabweichung der Normalenvektorvariation zugrunde. Problematisch daran ist, dass zur Bestimmung dieser Standardabweichung die Rauheitsstruktur der Wände z. B. mit Hilfe von Messungen bekannt sein muss. Üblicherweise kann vor der Durchführung von Simulationen die Wandrauheit der beteiligten Oberflächen nur grob abgeschätzt werden, weshalb die Motivation für ein Wandrauheitsmodell groß ist, das mit einem im Vorfeld z. B. aus Tabellenwerken abschätzbaren Parameter arbeitet und kein detailliertes Wissen über die Oberflächenstruktur der Wände erfordert, trotzdem aber zufriedenstellende Ergebnisse liefert. Eine Größe, die sich in der Geschichte der Strömungsmechanik zur Beschreibung von rauen Wänden etabliert hat und deshalb für ein universelles Wandrauheitsmodell in Frage käme, ist die *äquivalente Sandrauheit*  $k_S^*$  (Schlichting und Gersten, 2006). Wie man in Abb. 4.4(a) sehen kann, basiert diese Größe auf dem Ansatz, die reelle, irreguläre Wandrauheitsstruktur durch auf der Wandoberfläche verteilte, kugelförmige „Sandkörner“ mit dem Durchmesser  $k_S^*$  zu ersetzen. Dieses Konzept lässt sich auf die Partikel-Wand-Kollision übertragen, indem die wohldefinierte Geometrie der kugelförmigen Sandrauheitselemente dazu verwendet wird, den Normalenvektor entlang ihrer Oberfläche variieren zu lassen und gleichzeitig den Schatteneffekt zu berücksichtigen. Dazu wird der Radius dieser Kugelelemente proportional zur Hälfte der äquivalenten Sandrauheit  $k_S^*$  gewählt:

$$r^* \sim \frac{k_S^*}{2}.$$

Die äquivalente Sandrauheit selbst kann entweder direkt aus geeigneten strömungsmechanischen Tabellenwerken für bestimmte Wandmaterialien entnommen werden oder

#### 4. Kollisionsmodelle



- (a) Modellierung der technischen Rauheit durch die äquivalente Sandrauheit  $k_S^*$  und den Radius der Sandrauheitselemente  $r^*$ . (b) Variation des Wandnormalenvektors  $\mathbf{n}$  auf der Oberfläche eines Rauheitselementes. Der Vektor  $\mathbf{a}$  zeigt senkrecht aus der Bildebene heraus.

**Abbildung 4.4.:** Modellbildung zur Berücksichtigung der Wandrauheit bei Partikel-Wand-Kollisionen mit Hilfe des Sandrauheitmodells.

aber über Umrechnungsformeln aus bekannten Rauheitskennwerten wie der gemittelten Rautiefe  $R_z^*$  oder der mittleren Rauheit  $R_a^*$  berechnet werden. Weil für  $R_z^*$  oder  $R_a^*$  in der Literatur üblicherweise eine wesentlich breitere Datenbasis als für  $k_S^*$  zu finden ist, wird der Weg über eine Umrechnungsformel in dieser Arbeit bevorzugt.

Nach Schockling et al. (2006) kann zwischen der äquivalenten Sandrauheit und der so genannten quadratischen Rauheit  $R_q^*$ , einem Messwert für die Charakterisierung rauer Oberflächen, der sich aus den quadratischen Abweichungen des Oberflächenprofils von der Mittellinie zusammensetzt, ein linearer Zusammenhang angenommen werden:

$$k_S^* = C_{k_S} R_q^* .$$

Darin hängt der Umrechnungsfaktor  $C_{k_S}$  von der Bearbeitungsform der rauen Oberfläche ab und drückt aus, um welchen Faktor die Sandrauheitselemente vergrößert werden müssen, damit die äquivalente Sandrauheit die Eigenschaften einer Wand mit der quadratischen Rauheit  $R_q^*$  nachbilden kann. So haben Zagarola und Smits (1998) beispielsweise für diesen Faktor an einer gehonten Oberfläche einen Wert von  $C_{k_S} \approx 3$  ermittelt. Andere Herstellungsprozesse (z. B. Spanen oder Pressen) erfordern andere Umrechnungsfaktoren. Der Näherungswert von Zagarola und Smits (1998) soll hier jedoch als erster Ausgangswert dienen. Unglücklicherweise gibt es keine exakten Umrechnungsmöglichkeiten, um die in der Technik oft verwendeten Rauheitsparameter  $R_z^*$  oder  $R_a^*$  in eine entsprechende quadratische Rauheit zu überführen. Deshalb wird an dieser Stelle davon ausgegangen, dass diese Kenngrößen von der gleichen Größenordnung sind und demnach  $R_q^* \approx R_z^*$  ist. Damit lässt sich die äquivalente Sandrauheit  $k_S^*$  aus der gemittelten

Rautiefe folgendermaßen bestimmen:

$$k_S^* = C_{k_S} R_Z^*. \quad (4.49)$$

Wie erwähnt, sind der Radius der Kugelelemente  $r^*$  und  $k_S^*/2$  zueinander proportional. Daraus kann eine Umrechnungskonstante  $C_r$  definiert werden, die zusammen mit der Umrechnungsformel (4.49) einen linearen Zusammenhang zwischen  $r^*$  und der gemittelten Rautiefe herstellt:

$$r^* = \frac{C_{k_S}}{2} R_Z^* = C_r R_Z^*. \quad (4.50)$$

Der Wert der Konstanten  $C_r$  ist also direkt mit dem Umrechnungsfaktor  $C_{k_S}$  verbunden. Aus dem von Zagarola und Smits (1998) ermittelten Faktor resultiert für  $C_r$  ein Wert von 1,5, welcher jedoch genauso wie  $C_{k_S}$  variiert werden kann. So ist es zum Beispiel auch interessant, wie das Wandrauheitsmodell abschneidet, wenn der Radius der Sandrauheitselemente gleich  $R_Z^*$ , das heißt  $C_r = 1$  gewählt wird. Aus diesem Grund wird für diesen Parameter im Zuge dieser Arbeit ein Wertebereich von

$$C_r = 1,0 \dots 1,5$$

angenommen.

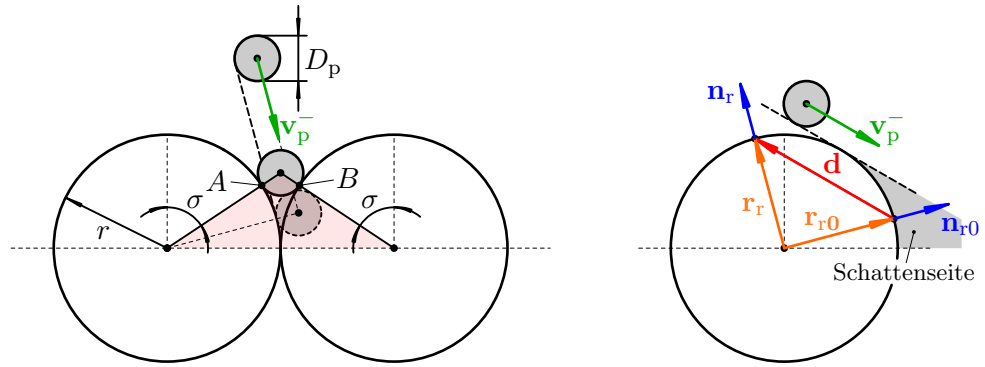
Das Prinzip der Variation von  $\mathbf{n}$  auf der Oberfläche eines Sandrauheitselementes ist in Abb. 4.4(b) dargestellt: Der ursprüngliche Normalenvektor der Wand wird mit Hilfe zweier zufällig verteilter Winkel  $\alpha$  und  $\varphi$  zunächst um die Achse  $\mathbf{a}$  gekippt und anschließend in azimuthaler Richtung um den Winkel  $\varphi$  rotiert, um die Dreidimensionalität der Wandrauheit zu berücksichtigen.

Die statistische Verteilung der Winkel  $\alpha$  und  $\varphi$  kann auf der Grundlage verschiedener Annahmen und geometrischer Betrachtungen erfolgen. Vor allem der Kippwinkel  $\alpha$  spielt eine große Rolle, wenn der Schatteneffekt und der Einfluss des Partikeldurchmessers berücksichtigt werden sollen, während  $\varphi$  in der Regel als gleichförmig verteilt angenommen werden kann. Im Laufe dieser Arbeit wurden deshalb verschiedene Ansätze für diese Winkelverteilungen verfolgt, die sich sowohl in ihrer Komplexität als auch in den Resultaten bei den Simulationen unterschieden, bevor die Wahl auf die im folgenden Abschnitt vorgestellten Zusammenhänge für  $\alpha$  und  $\varphi$  gefallen ist. In der Tat ist das Wandrauheitsmodell für den Code *LESOC* noch immer in der Entwicklungsphase und wird zur Zeit dahingehend optimiert, für verschiedene Testfälle mit unterschiedlichen Wandrauheiten und Partikeldurchmessern möglichst genaue Ergebnisse zu liefern. Dennoch zeigte das vorgestellte Modell mit dem nun folgenden Ansatz in den Simulationen schon durchaus zufriedenstellende Ergebnisse, weshalb diese Modellgleichungen in der vorliegenden Arbeit angewendet werden sollen.

### 4.3.2. Herleitung der Modellgleichungen

In Abb. 4.4(b) ist dargestellt, wie der Wandnormalenvektor  $\mathbf{n}$  mittels zweier Winkel  $\alpha$  und  $\varphi$  entlang der Oberfläche eines kugelförmigen Sandrauheitselementes variieren soll,

#### 4. Kollisionsmodelle



(a) Geometrischer Grenzfall zur Bestimmung der Standardabweichung  $\sigma$ . (b) Zusammenhänge bei der Berücksichtigung des Schatteneffektes.

**Abbildung 4.5.:** Geometrische Betrachtungen zur Herleitung der Modellgleichungen.

um den neuen Normalenvektor der modellierten, rauen Wand  $\mathbf{n}_r$  zu ergeben. Dazu wird der ursprüngliche Normalenvektor zunächst um den zufälligen Winkel  $\alpha$  um die Achse  $\mathbf{a}$  gekippt. Die Variation des Winkels folgt einer Gaußschen Normalverteilung mit einem Erwartungswert von null und der Standardabweichung  $\sigma$ :

$$\alpha = \sigma \psi. \quad (4.51)$$

Darin ist  $\psi$  eine normalverteilte Zufallsvariable mit einem Erwartungswert von null und einer Standardabweichung von eins. Für  $\sigma$  wird ein Wert gewählt, der von der Geometrie des mit der Wand kollidierenden Partikels und der Sandrauheitselemente abhängt. Dazu ist in Abb. 4.5(a) dargestellt, wie ein Partikel in einem steilen Einfallswinkel mit den sphärischen Elementen der modellierten Wandrauheit kollidiert. Im zweidimensionalen Grenzfall berührt das Partikel zwei Elemente gleichzeitig an den Punkten  $A$  und  $B$  – physikalisch gesehen kann das Partikel wegen seiner endlichen Ausdehnung nicht weiter zwischen die beiden Sandrauheitselemente eindringen. Der Winkel, der sich dann in diesem Fall zwischen der Wandnormalen und der Verbindungslinie zwischen Partikelschwerpunkt und Mittelpunkt eines der beteiligten Sandrauheitselemente ergibt, wird als Standardabweichung  $\sigma$  definiert. Für diesen Winkel (und damit auch für  $\sigma$ ) gilt unter der Berücksichtigung des in Abb. 4.5(a) rot hervorgehobenen, gleichschenkligen Dreiecks die Beziehung:

$$\sigma = \arcsin\left(\frac{r}{r + \frac{D_p}{2}}\right).$$

Weil der Winkel  $\alpha$  normalverteilt ist, befindet sich dieser in 68,27% aller Fälle im Intervall seiner Standardabweichung  $\pm\sigma$ , also innerhalb der geometrischen Grenzen. Ein Überschreiten des Bereichs  $\pm\sigma$  ist demnach in 31,73% der Fälle möglich und soll in diesem Modell toleriert werden, auch wenn dadurch streng genommen die geometrische



Plausibilität verletzt wird. Die Begründung dafür liegt darin, dass durch diese „Überschwinger“ eine stärkere Streuung des Kippwinkels  $\alpha$  hervorgerufen werden kann, die in einer realen Rauheitsstruktur ganz klar vorhanden ist. Von der im Vergleich dazu sehr glatten Kugeloberfläche, die in diesem Modell verwendet wird, kann diese Streuung nur näherungsweise wiedergegeben werden, was eine solche künstlich vergrößerte Streubreite sinnvoll macht. Um zu verhindern, dass der Normalenvektor  $\mathbf{n}_r$  nach dem Kippvorgang in die Wand hineinzeigt, wird der Maximalwert für das Intervall  $\pm 3\sigma$ , in dem 99,73% aller  $\alpha$  landen, auf  $\pm \pi/2$  beschränkt. Also wird die Standardabweichung  $\sigma$  über den folgenden Zusammenhang ermittelt:

$$\sigma = \min \left[ \arcsin \left( \frac{r}{r + \frac{D_p}{2}} \right), \frac{\pi}{6} \right]. \quad (4.52)$$

In den wenigen Fällen (0,27%), in denen der Kippwinkel doch außerhalb des Intervalls  $\pm \pi/2$  liegt, wird  $\alpha$  einfach je nach Vorzeichen auf  $\pi/2$  bzw.  $-\pi/2$  begrenzt.

Nachdem der Winkel  $\alpha$  mittels Gl. (4.51) und der Standardabweichung aus Gl. (4.52) bestimmt und der Wandnormalenvektor  $\mathbf{n}$  zunächst gekippt wurde, wird der aus dieser Operation resultierende Vektor ein zweites Mal gedreht. Drehachse ist dann die Wandnormale  $\mathbf{n}$  und der zugehörige Winkel ist der Azimuthalwinkel  $\varphi$ . Dieser befindet sich in einem Intervall von null bis  $2\pi$  und ist gleichförmig zufallsverteilt. Dadurch variiert der neue Wandnormalenvektor  $\mathbf{n}_r$  nach seiner Kippung um  $\alpha$  entlang eines Breitenkreises auf der Oberfläche des Sandrauheitselementes (s. Abb. 4.4(b)).

Der an rauen Wänden bei der Partikel-Wand-Kollision auftretende Schatteneffekt wird in diesem Modell auf folgende Weise berücksichtigt: Nachdem der Normalenvektor der rauen Wand  $\mathbf{n}_r$  über die Winkel  $\alpha$  und  $\varphi$  ermittelt wurde, wird geprüft, ob das Skalarprodukt  $\mathbf{v}_p^- \cdot \mathbf{n}_r$  größer null ist. Ist dies – wie z. B. in der zweidimensionalen Darstellung in Abb. 4.5(b) bei  $\mathbf{n}_{r0}$  – der Fall, dann kann physikalisch gesehen keine Kollision stattfinden, da der Auftreffpunkt auf der „Schattenseite“ des Sandrauheitselementes liegt. Um dies zu korrigieren wird der Fußpunkt des ursprünglichen Wandnormalenvektors  $\mathbf{n}_{r0}$  in entgegengesetzter Richtung der Partikelflugbahn entlang des Vektors  $\mathbf{d}$  auf die luvseitige Hemisphäre des Sandrauheitselementes projiziert. Der neue Wandnormalenvektor der rauen Wand  $\mathbf{n}_r$  liegt dann auf dem Punkt, der von dem Partikel erreicht wird, bevor es – wenn es das Sandrauheitselement ungehindert passieren würde – den ursprünglichen Fußpunkt von  $\mathbf{n}_{r0}$  trifft. Mit anderen Worten heißt dies, dass das Partikel nun mit der Vorderseite des Sandrauheitselementes kollidiert.

Für die beiden Radiusvektoren  $\mathbf{r}_{r0}$  und  $\mathbf{r}_r$  gilt:

$$\mathbf{r}_{r0} = r \mathbf{n}_{r0} \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_r = r \mathbf{n}_r.$$

Der Radiusvektor  $\mathbf{r}_r$  des korrigierten Wandnormalenvektors setzt sich aus der Summe von  $\mathbf{r}_{r0}$  und dem Verschiebungsvektor  $\mathbf{d}$  zusammen:

$$\mathbf{r}_r = \mathbf{r}_{r0} + \mathbf{d},$$

bzw.

$$\mathbf{n}_r = \mathbf{n}_{r0} + \frac{\mathbf{d}}{r}.$$

#### 4. Kollisionsmodelle

Weil  $\mathbf{d}$  und der Geschwindigkeitsvektor des Partikels  $\mathbf{v}_p^-$  in die entgegengesetzte Richtung zeigen, sind beide Vektoren zueinander kollinear. Berücksichtigt man dies und führt zusätzlich dazu den Kollinearitätsfaktor  $\beta$  ein, dann gilt:

$$\mathbf{n}_r = \mathbf{n}_{r0} + \frac{\beta}{r} \mathbf{v}_p^- . \quad (4.53)$$

Mit  $\beta$  existiert in Gl. (4.53) eine Unbekannte, die mit Hilfe einer zusätzlichen Gleichung bestimmt werden kann. Der Normalenvektor  $\mathbf{n}_r$  soll ein Einheitsvektor sein, das heißt sein Betrag ist per Definitionem gleich eins. Das Skalarprodukt von  $\mathbf{n}_r$  mit sich selbst ist nach Einsetzen von Gl. (4.53) dann:

$$\mathbf{n}_r \cdot \mathbf{n}_r = \left( \mathbf{n}_{r0} + \frac{\beta}{r} \mathbf{v}_p^- \right) \cdot \left( \mathbf{n}_{r0} + \frac{\beta}{r} \mathbf{v}_p^- \right) = 1 .$$

Ausmultiplizieren liefert

$$\mathbf{n}_{r0} \cdot \mathbf{n}_{r0} + 2 \frac{\beta}{r} (\mathbf{n}_{r0} \cdot \mathbf{v}_p^-) + 2 \left( \frac{\beta}{r} \right)^2 |\mathbf{v}_p^-|^2 = 1 .$$

Der erste Summand auf der linken Seite dieser Gleichung ist eins, weil  $\mathbf{n}_{r0}$  gemäß Definition ebenfalls ein Einheitsvektor ist. Daraus folgt dann nach Umstellen der Gleichung der Zusammenhang:

$$\frac{\beta}{r} = - \frac{\mathbf{n}_{r0} \cdot \mathbf{v}_p^-}{|\mathbf{v}_p^-|^2} .$$

Dies lässt sich zurück in Gl. (4.53) einsetzen, um schließlich den folgenden Ausdruck für den Normalenvektor der rauen Wand bei Berücksichtigung des Schatteneffektes zu erhalten:

$$\mathbf{n}_r = \mathbf{n}_{r0} - 2 \frac{\mathbf{n}_{r0} \cdot \mathbf{v}_p^-}{|\mathbf{v}_p^-|^2} \mathbf{v}_p^- . \quad (4.54)$$

Somit sind alle Modellgleichungen für das Wandrauheitsmodell bekannt. Der Berechnungsvorgang kann in die folgenden Schritte zusammengefasst werden:

1. Berechnung der Standardabweichung  $\sigma$  mit Gl. (4.52),
2. Stochastische Wahl der beiden Transformationswinkel  $\alpha$  (mit Gl. (4.51)) und  $\varphi$  (über eine gleichförmige Verteilung im Intervall  $0 \dots 2\pi$ ),
3. Rotation des Normalenvektors der glatten Wand  $\mathbf{n}$  um die Winkel  $\alpha$  und  $\varphi$ ,
4. Wenn  $\mathbf{v}_p^- \cdot \mathbf{n}_r > 0$  ist, Anwendung des Schatteneffektes über Gl. (4.54) und
5. Berechnung der neuen Partikel-Geschwindigkeiten nach der Wandkollision mit einem Wandmodell für ebene Wände (z. B. aus Abschnitt 4.1) unter Verwendung des zuvor ermittelten Normalenvektors der rauen Wand  $\mathbf{n}_r$ .

## 5. Testfall: Ebene Kanalströmung

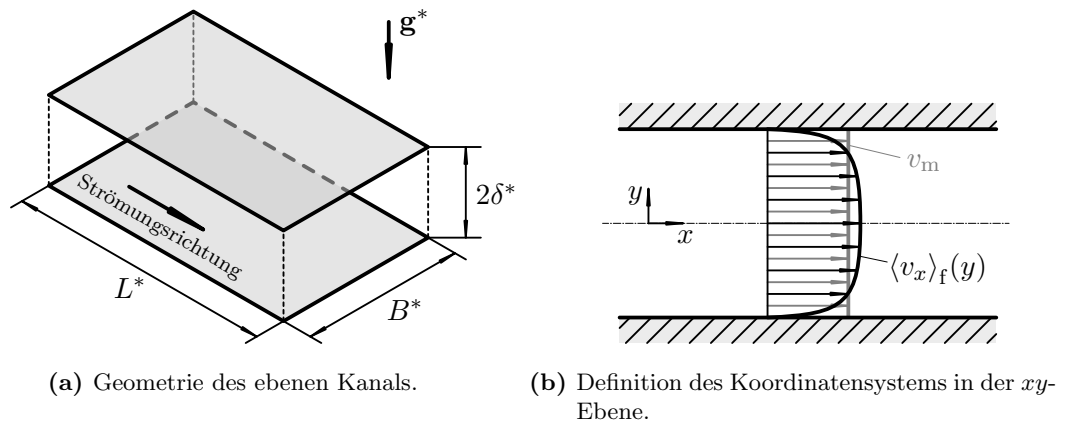
Die Strömung durch einen ebenen Kanal ist einer der bekanntesten und am besten verstandenen Testfälle für die numerische Strömungssimulation. In der Literatur existieren zahlreiche Daten aus Experimenten oder direkten numerischen Simulationen für ebene Kanalströmungen mit verschiedenen Reynolds-Zahlen, die zum Vergleich mit Simulationsergebnissen herangezogen werden können (darunter, ohne Anspruch auf Vollständigkeit, beispielsweise Kim et al. (1987); Moser et al. (1999)).

Auch für die Large-Eddy Simulation disperser Mehrphasenströmungen ist dieses fundamentale Strömungsproblem von großer Bedeutung: Die vergleichsweise simple Geometrie des Kanals vereinfacht die Erzeugung von qualitativ hochwertigen Gittern für numerische Simulationen, was die Gefahr von zu hohen numerischen Ungenauigkeiten in der Diskretisierung minimiert. Außerdem kann – sofern dies sinnvoll ist – durch die Wahl von zyklischen Randbedingungen das Berechnungsgebiet klein gehalten werden, um den numerischen Aufwand zur Simulation der Strömung deutlich zu verringern. Die Wände des Kanals ermöglichen es, die Eigenschaften von wandgebundenen Strömungen zu studieren, ohne dass es zu komplexen Phänomenen wie Grenzschichtablösung kommt. Im Kontext der hier betrachteten Partikelströmungen ist dies besonders interessant, da die Partikel mit den Kanalwänden zusammenstoßen können und das hier vorgestellte Partikel-Wand-Kollisionsmodell dann seine Anwendung findet. Zum anderen ist bei genügend hoher Massenbeladung die Zahl der interpartikulären Kollisionen im Kanal groß genug, dass das Partikel-Partikel-Kollisionsmodell dieser Arbeit ebenfalls mit diesem einfachen Strömungsproblem ausgiebig getestet werden kann.

In der Literatur finden sich diverse Experimente, die sich mit der ebenen, partikelbeladenen Kanalströmung befassen: Die Versuche von Frank et al. (1993) enthalten – neben detaillierten Analysen von Partikel-Wand-Kollisionen – Messungen der dispersen Phase in einer Kanalströmung mit quadratischem Querschnitt. Kulick et al. (1994) haben vertikale Kanalströmungen untersucht, in denen verschiedene Partikelklassen (Material und Durchmesser) bis zu einer Massenbeladung von  $\eta = 0,8$  transportiert wurden. Die Experimente von Kulick et al. (1994) sind ausführlich dokumentiert und dienen in vielen numerischen Untersuchungen als Referenz, gleichwohl die Kanalströmung in dem Versuch nicht vollständig ausgebildet gewesen zu sein schien (Lain et al., 2002).

Etwas aktueller sind die Versuchsdaten von Kussin und Sommerfeld (2002) und der zugehörigen Dissertation von Kussin (2004). Darin wurden disperse Zweiphasenströmungen durch einen horizontalen, ebenen Kanal detailliert untersucht und der Einfluss verschiedener Parameter – u. a. Partikeldurchmesser, Reynolds-Zahl der Strömung, Massenbeladung und Wandrauheit – analysiert. Aufgrund dieses breiten Spektrums an verfügbaren Daten und variierten Parametern wurden diese Experimente in dieser Arbeit als Referenz für die ebene Kanalströmung gewählt.

## 5. Testfall: Ebene Kanalströmung



**Abbildung 5.1.:** Geometrie, Koordinatensystem und Geschwindigkeitsprofil bei der ebenen Kanalströmung.

In den folgenden Abschnitten werden das Experiment genauer erläutert und die ausgewählten Referenzfälle aufgezeigt. Im Anschluss daran erfolgt eine Darlegung der numerischen Parameter und Einstellungen, die in dieser Arbeit zur Simulation dieser Kanalströmung angewendet wurden. Als letztes werden die für die spätere Auswertung simulierten Testfälle inklusive der variierten Parameter aufgezählt.

### 5.1. Referenzexperiment

Die Arbeiten von Kussin und Sommerfeld (2002) und Kussin (2004) behandeln die experimentelle Untersuchung einer horizontalen, ebenen Kanalströmung, die mit Partikeln beladen ist. Eine schematische Darstellung der Kanalgeometrie ist in Abb. 5.1(a) zu finden. Die Kanalhalbhöhe  $\delta^*$  (gleichzeitig die für die Reynolds-Zahl der Strömung charakteristische Länge  $L_0^*$ ) betrug in den Versuchen  $\delta^* = 17,5$  mm. Mit einer Länge von  $L^* = 6$  m  $\approx 340 \delta^*$  war die Versuchsstrecke lang genug, um von einer voll ausgebildeten Strömung am Ende des Kanals ausgehen zu können. Wegen der großen Kanalbreite von  $B^* = 0,35$  m  $= 20 \delta^*$  konnte der Einfluss der Seitenwände vernachlässigt und in der Mittelebene des Kanals eine im statistischen Mittel zweidimensionale Strömung angenommen werden. Die Messung der Zweiphasenströmung erfolgte nach einer Strecke von etwa 330 Kanalhalbweiten, also kurz vor dem Ende des ebenen Kanals, mittels Phasen-Doppler-Anemometrie (PDA). Mit dieser Technik konnten zur gleichen Zeit sowohl für die kontinuierliche als auch für die disperse Phase Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofile entlang der  $y$ -Achse (s. Abb. 5.1(b)) gemessen werden. Der Schwerebeschleunigungsvektor  $\mathbf{g}^*$  zeigte wegen der horizontalen Lage des Kanals in negativer  $y$ -Richtung.

Die Kanal-Reynolds-Zahl ist nach Gl. (2.9) mit der Kanalhalbhöhe  $\delta^*$  als charakteristische Länge und der über den Kanalquerschnitt gemittelten Geschwindigkeit

Stufe	$R_x$	$R_z$	$R_m^a$
R0	1,326	1,194	1,260 $\times 10^{-4}$
R1	2,434	1,983	2,209 $\times 10^{-4}$
R2	3,903	3,937	3,920 $\times 10^{-4}$
R3	9,731	10,560	10,146 $\times 10^{-4}$

<sup>a</sup> Mittelwert:  $R_m = 0,5(R_x + R_z)$

**Tabelle 5.1.:** Wandrauheitsklassen mit den entsprechenden dimensionslosen Messwerten der in den Versuchen von Kussin (2004) verwendeten Kanalwände.

$$v_m^* = \frac{1}{2\delta^*} \int_{-\delta^*}^{+\delta^*} v_{x,f}^* dy^*$$

als charakteristische Geschwindigkeit  $U_0$  (vgl. Abb. 5.1(b)) definiert:

$$\text{Re}_\delta = \frac{\rho_f^* \delta^* v_m^*}{\mu_f^*}.$$

Die beiden Größen  $\delta^*$  und  $v_m^*$  dienen demnach auch zur Entdimensionalisierung der Messdaten. In den Versuchen wurde die Kanal-Reynolds-Zahl über einen Bereich von  $\text{Re}_\delta = 12,5 \times 10^3$  bis  $40,9 \times 10^3$  variiert. Nach (Seki et al., 2010) liegt die kritische Reynolds-Zahl, bei der in einer ebenen Kanalströmung der Umschlag von laminarer zu turbulenter Strömung erfolgt, bei  $\text{Re}_\delta = 3,8 \times 10^3$ . Direkte numerische Simulationen von z. B. Kim et al. (1987) zeigen bereits bei niedrigeren Reynolds-Zahlen eine voll ausgebildete Turbulenz, so dass für die Reynolds-Zahlbereiche im betrachteten Referenzfall davon ausgegangen werden kann, dass die Kanalströmung in allen Fällen voll turbulent ist. Die Dichte der Strömung war während der Messungen näherungsweise konstant und betrug  $\rho_f^* = 1,15 \text{ kg m}^{-3}$ .

Die Wände auf der Ober- und Unterseite des Kanals waren aus Edelstahl und konnten über die gesamte Kanallänge hinweg ausgetauscht werden, um Platten unterschiedlicher Rauheitstiefen  $R^*$  einzusetzen. Insgesamt wurden vier verschiedene Wandrauheitsklassen R0 bis R3 betrachtet, die zusammen mit den entsprechenden gemessenen Rauheitstiefen (entdimensionalisiert mit der Kanalhalbhöhe) in Strömungs- und Spannweitenrichtung  $R_x$  und  $R_z$  sowie dem arithmetischen Mittel aus den beiden Werten  $R_m$  in Tab. 5.1 aufgeführt sind. Die Messwerte  $R_x$  und  $R_z$  entsprechen der *gemittelten Rautiefe*  $R_Z$  nach DIN 4760.

Für die disperse Phase wurden sechs sphärische und vier nicht-sphärische Partikelklassen untersucht, die sich hinsichtlich Volumen und Partikelmaterial (und damit in der Dichte) unterschieden. In Tab. 5.2 sind die sechs sphärischen Partikelklassen mit den zugehörigen mittleren Partikeldurchmessern und der entsprechenden Materialdichte aufgeführt, die mit der Fluidichte entdimensionalisiert worden ist. Die verschiedenen

## 5. Testfall: Ebene Kanalströmung

Material	$D_p^*$	$D_p$	$\rho_p$	St <sup>a</sup>	$\eta$
Glas	60 $\mu\text{m}$	$3,43 \times 10^{-3}$	2130	6,3	0,04–0,20
Glas	100 $\mu\text{m}$	$5,71 \times 10^{-3}$	2130	14,9	0,10–1,00
Glas	135 $\mu\text{m}$	$7,71 \times 10^{-3}$	2130	22,2	0,10–1,20
Glas	195 $\mu\text{m}$	$11,14 \times 10^{-3}$	2130	38,0	0,10–1,20
Glas	625 $\mu\text{m}$	$35,71 \times 10^{-3}$	2130	126,0	0,50–2,00
Polystyrol	645 $\mu\text{m}$	$36,86 \times 10^{-3}$	913	75,5	0,34–0,91

<sup>a</sup> Entnommen aus Kussin (2004).

**Tabelle 5.2.:** Material, Durchmesser, dimensionslose Dichte und Stokes-Zahl der sphärischen Partikel und die untersuchten Massenbeladungsbereiche in den Versuchen von Kussin (2004).

Durchmesser der fünf Glaspartikelklassen erstreckten sich über zwei Größenordnungen. Weil nach Gl. (2.19) die Partikelrelaxationszeit  $T_p$  proportional zum Quadrat des Partikeldurchmessers ist, konnte die Stokes-Zahl der Partikel mit diesen Durchmessern über einen großen Bereich von drei Größenordnungen variiert werden. Ebenfalls in Tab. 5.2 dargestellt sind die Bereiche der Massenbeladung  $\eta$ , in denen für die einzelnen Partikelklassen Messungen durchgeführt und Ergebnisse veröffentlicht worden sind. Mit Ausnahme der Polystyrolteilchen wurde die Massenbeladung in allen Fällen über zwei Zehnerpotenzen hinweg variiert, um den Einfluss dieser Kenngröße analysieren zu können.

Mit Hilfe der PDA wurden für beide Phasen Geschwindigkeitsprofile und zusätzlich für die disperse Phase Konzentrationsprofile entlang der  $y$ -Achse ermittelt. Die Messgrößen von kontinuierlicher und disperser Phase umfassen die folgenden Statistiken:

- die zeitlich gemittelten Geschwindigkeiten in Hauptströmungsrichtung  $\langle v_x \rangle$ ,
- die quadratischen Mittelwerte der zeitlichen Schwankungen in  $x$ -Richtung  $\sqrt{\langle v_x'' v_x'' \rangle}$
- und in wandnormaler Richtung  $\sqrt{\langle v_y'' v_y'' \rangle}$  sowie
- die normalisierte Partikelkonzentration  $K_N$ .

Die normalisierte Partikelkonzentration  $K_N$  ist nach Kussin (2004) definiert als das Verhältnis aus der Partikelanzahlkonzentration im Messvolumen  $V_i^*$

$$K_{N,i}^* = \frac{N_{p,i}}{V_i^*}$$

und der Konzentration im gesamten Kanalvolumen

$$K_{N,\text{Ges}}^* = \frac{N_p}{V_{\text{Ges}}^*}.$$

Demzufolge gilt für  $K_N$  die Formel:

$$K_{N,i} = \frac{K_{N,i}^*}{K_{N,\text{Ges}}^*} = \frac{N_{p,i}}{N_p} \frac{V_{\text{Ges}}^*}{V_i^*}.$$

Anhand dieser großen Zahl an zur Verfügung stehenden Messgrößen und den zusätzlich variierten Parametern wird deutlich, warum die Versuche von Kussin und Sommerfeld (2002) bzw. Kussin (2004) als Referenz ausgewählt worden sind. Insbesondere die breite Variation der Parameter Partikeldurchmesser, Massenbeladung und Wandrauheit bieten eine umfassende Grundlage zur Analyse wandgebundener partikelbeladener Strömungen. Aus diesem Grund eignen sich diese Versuche hervorragend als Referenz, um die Simulation von partikelbeladenen, ebenen Kanalströmungen mit dem CFD-Code *LESOCC* durchzuführen und die in dieser Arbeit eingeführten Kollisionsmodelle zu validieren.

## 5.2. Numerisches Setup

Zur Validierung der in Kapitel 4 aufgestellten Kollisionsmodelle und der anschließenden Einflussanalyse der jeweiligen Modelle wurde ein Teil der oben genannten Referenzexperimente für den ebenen Kanal von Kussin und Sommerfeld (2002) und Kussin (2004) mit *LESOCC* simuliert. Um die Zahl der zu simulierenden Fälle nicht übermäßig groß werden zu lassen, beschränken sich die Simulationen auf eine Kanal-Reynolds-Zahl, eine Partikelklasse und eine Wandrauheitsstufe (R1). Für die Massenbeladung der dispersen Mehrphasenströmung wurden ein niedriger, ein mittlerer und ein hoher Wert gewählt, um ein breites Spektrum dieser insbesondere für Partikel-Fluid- und Partikel-Partikel-Interaktionen wichtigen Kennzahl abzudecken. Somit wird zunächst die Anzahl der gewählten Referenzfälle auf drei beschränkt.

Ausgewählt wurden die 100  $\mu\text{m}$ -Partikel aus Glas, weil die Datenbasis für diese Partikelklasse in den Veröffentlichungen am breitesten war. Für die Reynolds-Zahl der Kanalströmung ist ein hoher Wert von  $\text{Re}_\delta = 21,3 \times 10^3$  gewählt worden, um in den Simulationen eine möglicherweise auftretende Relaminarisierung der Strömung durch die eventuell turbulenzdämpfenden Eigenschaften der Partikel, wie sie beispielsweise von Benneck (2010) beobachtet worden ist, zu vermeiden. Um den Einfluss der Wandrauheit nicht zu groß werden zu lassen, wurde die Wandrauheitsstufe R1 gewählt, welche die von den für die 100  $\mu\text{m}$ -Partikel verfügbaren Daten niedrigste Wandrauheitsstufe darstellt.<sup>10</sup> Gemäß Tab. 5.1 entspricht dies dann einer dimensionslosen, gemittelten Wandrauheit von  $R_m = 2,2085 \times 10^{-4}$ . Die drei betrachteten Massenbeladungen betragen  $\eta = 0,1, 0,5$  und  $1,0$  und decken somit einen Bereich von niedrig- bis hin zu hochbeladenen, dispersen Mehrphasenströmungen ab. Mit dieser Variation kann der Einfluss des Parameters Massenbeladung in den Simulationsergebnissen genauer analysiert werden.

Zur Übersicht sind die drei Referenzfälle in Tab. 5.3 mit allen relevanten Parametern aufgeführt. Die Massenbeladung  $\eta$  wird in *LESOCC* über die Partikelanzahl  $N_p$  im Berechnungsgebiet kontrolliert. Für eine gegebene Massenbeladung lässt sich die notwendige Partikelanzahl mit der folgenden Näherungsformel nach Kussin (2004) abschätzen:

$$\eta = \frac{\Phi_p \rho_p v_{m,p}^*}{(1 - \Phi_p) v_{m,f}^*}. \quad (5.1)$$

<sup>10</sup>Leider liegen für diese Partikel keine Messdaten bei R0 vor.

## 5. Testfall: Ebene Kanalströmung

$D_p^*$	$D_p$	$\rho_p$	$Re_\delta$	$R_m$	$\eta$	$N_p$
100 $\mu\text{m}$	$5,71 \times 10^{-3}$	2130	$21,3 \times 10^3$	$2,209 \times 10^{-4}$	0,1	17500
					0,5	87500
					1,0	175000

**Tabelle 5.3.:** Simulationsparameter für die drei Referenztestfälle aus Kussin (2004).

In der Regel ist die über den Kanalquerschnitt gemittelte Geschwindigkeit der Partikel  $v_{m,p}^*$  ungefähr gleich groß wie die gemittelte Fluidgeschwindigkeit  $v_{m,f}^*$ , so dass beide Größen weggekürzt werden können. Für sphärische Partikel kann der Volumenanteil der Partikel  $\Phi_p$  nach Gl. (2.1) aus der Partikelanzahl und dem Partikeldurchmesser bestimmt werden:

$$\Phi_p = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{N_p} V_{p,i} = \frac{\pi}{6} N_p \frac{D_p^3}{V}.$$

In nicht zu dichten Gas-Feststoff-Strömungen ist üblicherweise  $\Phi_p \ll 1$  und aus Gl. (5.1) resultiert damit die folgende Formel zur Abschätzung der Partikelanzahl im Berechnungsgebiet mit dem dimensionslosen Gesamtvolumen  $V$  bei gegebener Massenbeladung  $\eta$ :

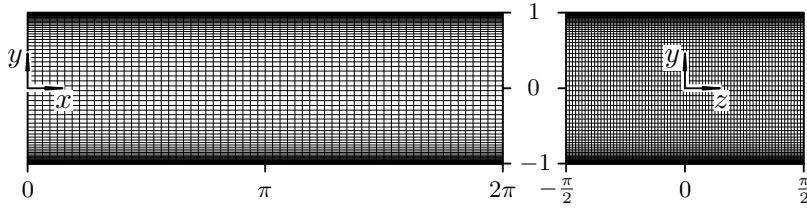
$$N_p = \frac{6}{\pi} \frac{V}{D_p^3} \frac{\eta}{\rho_p} \quad (5.2)$$

Die mit Hilfe dieser Abschätzungsformel ermittelten Partikelanzahlen liefern aufgrund der Näherungen etwas zu hohe Massenbeladungen und müssen deshalb um den über Testsimulationen ermittelten Wert von 5,85% nach unten korrigiert werden. Mit den in Tab. 5.3 gegebenen Partikelanzahlen konnten in den Simulationen dann Massenbeladungen erzielt werden, die um höchstens 0,1% von den geforderten Werten abwichen und die Massenbeladungen im Versuch somit hinreichend genau reproduzierten.

Der Einfluss der Schwerkraft auf die kontinuierliche Phase wurde in den Simulationen vernachlässigt. Wegen ihrer hohen Dichte darf die Gewichtskraft der Partikel jedoch nicht einfach ignoriert werden, weshalb der dimensionslose Schwerebeschleunigungsvektor  $\mathbf{g}$  festgelegt werden musste. Da dieser in negativer  $y$ -Richtung zeigte (s. Abb. 5.1(a)), waren seine  $x$ - und  $z$ -Komponenten gleich null. Die  $y$ -Komponente des dimensionslosen Schwerebeschleunigungsvektors war dementsprechend  $g_y = -4,424 \times 10^{-4}$ .

Für die Simulation der Kanalströmung wurde ein orthogonales, blockstrukturiertes Gitter verwendet, welches in Abb. 5.2 dargestellt ist. Um den Kanal nicht über die gesamte Länge von 6 m simulieren zu müssen, was deutlich zu kostenintensiv wäre, wurden in Hauptströmungsrichtung periodische Randbedingungen gewählt. Dies setzt natürlich voraus, dass die Strömung beider beteiligten Phasen trotz des Schwerkrafteinflusses in der Messebene der Experimente vollständig ausgebildet und statistisch stationär war. Nach Kussin und Sommerfeld (2002) war dieser Umstand gegeben, u. a. weil die durch die





**Abbildung 5.2.:** Seiten- und Vorderansicht des für die Simulation der Kanalströmung verwendeten Gitters. Nur jede zweite Gitterlinie wird dargestellt.

Wandreibung und -rauheit hervorgerufene Erhöhung der Partikel-Wand- und Partikel-Partikel-Kollisionsfrequenzen den Schwerkraufteinfluss wieder ausgleicht. Die Wahl zyklischer Randbedingungen in  $x$ -Richtung war damit gerechtfertigt. In Spannweitenrichtung wurden ebenfalls periodische Ränder festgelegt, was dadurch motiviert war, dass die Seitenwände des Kanals im Referenzversuch weit genug von einander entfernt waren, um in der Kanalmitte von einer in statistischer Hinsicht zweidimensionalen Strömung ausgehen zu können. Für die Kanalwände an der Ober- und Unterseite wurde die Stokesche Haftbedingung gewählt, die wandnahe Strömung musste mit dem Gitter demnach ausreichend fein aufgelöst werden.

Das Simulationsgebiet umfasste in dimensionslosen Werten ausgedrückt einen Bereich von  $2\pi\delta \times 2\delta \times \pi\delta$  (Reihenfolge der Raumkoordinaten:  $x \times y \times z$ ). Die Ausdehnungen in  $x$ - und  $z$ -Richtung wurden nach Fröhlich (2006) für die hier betrachtete Kanal-Reynolds-Zahl ausreichend groß dimensioniert, um zu garantieren, dass die an den periodischen Rändern einströmende Turbulenz nicht mehr mit der am gegenüberliegenden Rand ausströmenden Turbulenz korreliert. In den drei Raumrichtungen betrug die Zahl der Gitterpunkte  $129 \times 150 \times 150$ , die Gesamtzahl der Kontrollvolumina im Gitter lag damit bei ungefähr  $2,8 \times 10^6$ . Es wurden für die Hauptströmungs- und Spannweitenrichtung jeweils äquidistante Gitterlinien gewählt, die die auf dimensionslose Wandeinheiten normalisierten Gitterabstände  $\Delta x^+ \approx 80$  und  $\Delta z^+ \approx 35$  ergaben. Diese Werte liegen nach Piomelli und Chasnov (1996) innerhalb der für wandauflösende Large-Eddy Simulationen geforderten Grenzen, wonach  $\Delta x^+$  idealerweise in einem Bereich von 50 bis 150 und  $\Delta z^+$  zwischen 15 und 40 liegen sollen. In wandnormaler Richtung sind die Gitterlinien nicht-uniform verteilt und an die anisotrope Scherströmung im Kanal angepasst. Das bedeutet, dass der Gitterabstand in  $y$ -Richtung von den Wänden zur Kanalmitte hin gemäß einer geometrischen Reihe kontinuierlich zunimmt. Im ersten Kontrollvolumen direkt an der Kanalwand liegt der dimensionslose Wandabstand bei  $y^+ = 0,8$  und der Streckungsfaktor der benachbarten Kontrollvolumina beträgt dort 1,07, was nach Fröhlich (2006) im Einklang mit den Anforderungen an eine wandauflösende Large-Eddy Simulation steht.

Die Diskretisierung der konvektiven und viskosen Flüsse erfolgte mit dem zentralen Interpolationsverfahren (CDS-2), welches in Large-Eddy Simulationen standardmäßig angewendet wird und eine von zweiter Ordnung genaue Approximation bildet. Für die zeitliche Diskretisierung wurde das explizite Mehrschritt-Runge-Kutta-Verfahren eingesetzt, welches ebenfalls von zweiter Ordnung genau ist. Der dimensionslose Zeitschritt

## 5. Testfall: Ebene Kanalströmung

Kollisionstyp	Materialpaarung	$\mu$	$\mu_0$	$e_n$	$e_t$
Partikel-Wand	Glas-Edelstahl	0,15	0,50	0,80	0,30
Partikel-Partikel	Glas-Glas	0,10	0,90	0,97	0,45

**Tabelle 5.4.:** Gewählte Parameter für die Partikel-Wand- und Partikel-Partikel-Kollisionsmodelle gemäß der Materialpaarungen im Referenzexperiment.

für die instationären Simulation wurde mit  $\Delta t = 4 \times 10^{-3}$  so gewählt, dass die Stabilität des Runge-Kutta-Verfahrens nicht gefährdet wird. Dass diese Zeitschrittweite ebenfalls klein genug war, um die zeitliche Änderung der Strömung hinreichend genau aufzulösen, wird im folgenden Kapitel gezeigt. Das iterative Lösungsverfahren für die Druck-Poisson-Gleichung benötigt ein Toleranzkriterium, bei dem die Gleichungen als genau genug gelöst angenommen werden und das Lösungsverfahren abgebrochen wird. In den vorliegenden Simulationen wurde festgelegt, dass dieses Abbruchkriterium bei einem Residuum des Gleichungssystems von  $\epsilon = 3 \times 10^{-8}$  liegt.

Zur Modellierung der nicht aufgelösten Feinstruktur wurde das in Abschnitt 3.1.2 erläuterte Smagorinsky-Modell mit einer Smagorinsky-Konstanten von  $C_S = 0,065$  ausgewählt. Die wegen der Kanalwände notwendige Modifikation des Feinstrukturmodells in Wandnähe erfolgte mit der Dämpfungsfunktion nach van Driest (1956) mit den Exponenten nach Piomelli et al. (1987) aus Gl. (3.10). Für das hier betrachtete, wenig komplexe Strömungsproblem hat sich dieser einfache Ansatz für die Feinstrukturmodellierung in Kombination mit der gewählten Smagorinsky-Konstanten bewährt und wurde deswegen auf diese Weise angewendet (Breuer, 2002).

Die im Zuge dieser Arbeit eingeführten Kollisionsmodelle erfordern die Wahl von jeweils vier Modellparametern, die in erster Linie abhängig von den Materialpaarungen sind und die inelastischen und reibungsbehafteten Kollisionen zwischen Partikeln und Wänden bzw. Partikeln und Partikeln beschreiben. Für die Interaktion der Glas-Partikel mit den Kanalwänden, die im Referenzversuch aus Edelstahl waren, können die Reibbeiwerte und Restitutionskoeffizienten aus den Experimenten von Foerster et al. (1994) und Sommerfeld und Huber (1999) entnommen werden. Ebenfalls aus Foerster et al. (1994) konnten außerdem die Restitutionskoeffizienten und der Reibbeiwert für die Partikel-Partikel-Kollisionen übernommen werden. Der Haftreibungskoeffizient  $\mu_0$  wurde für die Materialpaarung Glas-Glas anhand der Zusammenstellung von Beardmore (2010) auf 0,9 abgeschätzt. Die Streuung dieser schwierig zu messenden Größen ist teilweise groß und hängt in Wirklichkeit von vielen Parametern ab und nicht bloß von den Materialkombinationen. Im Zweifel wurden Werte gewählt, die im Zentrum der angegebenen Unsicherheitsbereiche lagen. In Tab. 5.4 sind die in den Simulationen für diese Arbeit verwendeten Modellparameter aufgelistet.

Durchgeführt wurden die Simulationen auf dem Supercomputer MARVIN der Professur für Strömungsmechanik an der Helmut-Schmidt-Universität Hamburg, welcher mit insgesamt 144 Kernen und 288 GB Hauptspeicher verteilt auf zwölf Knoten ausgerüstet ist. Mittels Gebietszerlegung wurde das Gitter in sechs Teilblöcke mit ungefähr gleich großer Zellzahl unterteilt, damit jede Simulation parallel auf sechs Prozessoren

gleichzeitig ausgeführt werden konnte, um den Berechnungsvorgang zu beschleunigen. Zur Initialisierung der Rechnungen wurde eine bereits im Vorfeld simulierte, einphasige und voll entwickelte Kanalströmung gleicher Reynolds-Zahl verwendet. Die Partikel wurden dann zunächst homogen im Strömungsfeld verteilt und nach 25 000 Zeitschritten (dies entspricht bei mittlerer Strömungsgeschwindigkeit einer Strecke von 100 Kanalhalbhöhen) wurde mit der Bildung der Statistiken über einen Zeitraum von 50 000 Zeitschritten (200 Kanalhalbhöhen bei mittlerer Strömungsgeschwindigkeit) begonnen. Zusätzlich wurden die Daten in Strömungs- und Spannweitenrichtung gemittelt. Insgesamt betrug die Rechenzeit jeder Testfallsimulation mit diesen Einstellungen im Durchschnitt etwa 75 Stunden.

### 5.3. Simulierte Testfälle

Für jeden der drei in Tab. 5.3 aufgeführten Referenzfälle wurden bei den numerischen Simulationen mit *LES OCC* ausgiebige Modellvariationen durchgeführt, um den Einfluss unterschiedlicher Modellierungsgrade auswerten zu können. Bei der Partikel-Wand-Interaktion sind die folgenden Fälle betrachtet worden:

- Die ursprüngliche *LES OCC*-Implementierung mit reibungsfreien, voll-elastischen Partikel-Wand-Kollisionen,
- das Partikel-Wand-Kollisionsmodell nach Abschnitt 4.1 und
- das Wandrauheitsmodell nach Abschnitt 4.3 mit Reibung.

Jedes dieser drei Wandmodelle wurde für jede Massenbeladung insgesamt sechs mal mit verschiedenen Einstellungen simuliert:

- Kopplung zwischen kontinuierlicher und disperser Phase (Zwei-Wege-Kopplung) via PSI-CELL-Methode an/aus,
- Berücksichtigung der Partikel-Partikel-Kollisionen an/aus und
- reibungsbehaftete Partikel-Partikel-Kollisionen nach Abschnitt 4.2 an/aus.<sup>11</sup>

Ziel dieser Variation war die Untersuchung von verschiedenen Mechanismen in der partikelbeladenen Kanalströmung. So kann beispielsweise analysiert werden, welche Rolle die interpartikulären Kollisionen spielen und welchen Einfluss die Reibung auf diesen Mechanismus hat.

Insgesamt konnten so insgesamt 54 Testfälle (18 pro Referenzfall) erstellt werden, die mit *LES OCC* simuliert wurden. Eine vollständige Auflistung aller Testfälle ist in Anhang A gegeben, alle zugehörigen Simulationsergebnisse sind dem dieser Arbeit beiliegenden Datenträger zu entnehmen.

---

<sup>11</sup>Nur bei aktiver Berücksichtigung der Partikel-Partikel-Kollisionen.

## 6. Auswertung der Simulationen

### 6.1. Verifikation des numerischen Setups

Bevor die Simulationsergebnisse zur genaueren Untersuchung der Wandmodelle und des Partikel-Partikel-Kollisionsmodells herangezogen werden können, muss sichergestellt sein, dass die numerischen Fehler, die bei der Strömungssimulation unweigerlich entstehen, keinen signifikanten Einfluss auf die Ergebnisse haben. Eine der größten Fehlerquellen ist dabei das Gitter, welches im folgenden Abschnitt genauer überprüft werden soll. Anschließend werden mit Hilfe einer Sensitivitätsanalyse die Einflüsse zweier kritischer Simulationsparameter (Zeitschrittweite und Mittelungsdauer) untersucht, um nachzuweisen, dass diese sinnvoll gewählt und ausreichend dimensioniert worden sind.

#### 6.1.1. Sensitivitätsanalyse des verwendeten Gitters

Wie bei allen Strömungssimulationen ist auch bei der Large-Eddy Simulation von dispersen Zweiphasenströmungen das numerische Gitter ein zentraler Punkt, wenn es um die Qualität und Genauigkeit der Ergebnisse geht. Das Gitter für den ebenen Kanal wurde zwar nach den Anhaltswerten von Piomelli und Chasnov (1996) bzw. Fröhlich (2006) generiert und sollte dementsprechend den üblichen Qualitätsanforderungen an eine LES genügen. Trotzdem ist es sinnvoll, das Gitter vor der Analyse der Simulationsdaten zu überprüfen und als mögliche Fehlerquelle auszuschließen.

Bei RANS-Simulationen wird zur Überprüfung der Gitterqualität üblicherweise eine Gitterkonvergenzstudie mit sukzessiv verfeinerten Gittern durchgeführt und anschließend die Richardson-Extrapolation zur Fehlerabschätzung angewendet (Roache, 1998). In einer Large-Eddy Simulation mit impliziter Filterung ist dies nicht ohne weiteres möglich, weil die Diskretisierungs- und Modellfehler wegen der Kopplung von Gitter- und Filterweite miteinander wechselwirken und nicht unabhängig von einander untersucht werden können (Klein et al., 2008). Die Folge ist, dass eine LES bei immer feiner werdendem Gitter in eine DNS übergeht, was eine Gitterkonvergenzstudie bei LES wegen der hohen Anforderung an direkte Simulationen in der Regel unbrauchbar macht.

Stattdessen schlagen zum Beispiel Celik et al. (2005) eine Größe zur Qualitätsabschätzung einer Large-Eddy Simulation, den so genannten *Large-Eddy Simulation Index of Quality* (LES IQ), vor. Diese Größe basiert auf der gefilterten turbulenten kinetischen Energie

$$\bar{k} = \frac{1}{2} (\langle \bar{v}_x'' \bar{v}_x'' \rangle + \langle \bar{v}_y'' \bar{v}_y'' \rangle + \langle \bar{v}_z'' \bar{v}_z'' \rangle),$$

die wegen der Filterung nur ein Teil der gesamten turbulenten kinetischen Energie der Strömung  $k$  ist. Der Large-Eddy Simulation Index of Quality ist ein Maß dafür, wieviel

turbulente kinetische Energie von einer Simulation aufgelöst wurde, und ist mit der Gleichung

$$\text{LES\_IQ} = 1 - \frac{|k - \bar{k}|}{k} \quad (6.1)$$

definiert. Ist der LES\_IQ größer als 0,8, so kann von einer ausreichenden Auflösung der turbulenten Skalen ausgegangen werden. Weil in einer Large-Eddy Simulation immer ein gewisser Skalenbereich fehlt, muss  $k$  zur Berechnung von LES\_IQ über Näherungen abgeschätzt oder aber modelliert werden. Celik et al. (2005) verwenden dazu einen Ansatz, der analog zur Richardson-Extrapolation auf zwei Simulationen auf unterschiedlich feinen Gittern basiert. Daraus resultiert die folgende Näherungsformel für  $k$ :

$$k \approx \bar{k} + a \Delta^q.$$

Darin ist  $a$  ein Extrapolationskoeffizient, der aus den Simulationen mit den beiden Gittern berechnet werden kann. Der Exponent  $q$  entspricht der formalen Fehlerordnung des räumlichen Diskretisierungsverfahrens und ist in diesem Falle wegen des verwendeten zentralen Differenzenverfahrens gleich zwei. Damit folgt aus Gl. (6.1):

$$\text{LES\_IQ} = 1 - \frac{|a \Delta^q|}{\bar{k} + a \Delta^q}. \quad (6.2)$$

Weil der LES\_IQ somit von  $\bar{k}$  abhängt, ist diese Größe im Strömungsfeld variabel. Dadurch können zum Beispiel unzureichend aufgelöste Regionen im Gitter identifiziert werden. Nach Klein (2005) kann der Extrapolationskoeffizient  $a$  aus den Simulationsergebnissen mit einem gröberen Gitter folgendermaßen bestimmt werden:

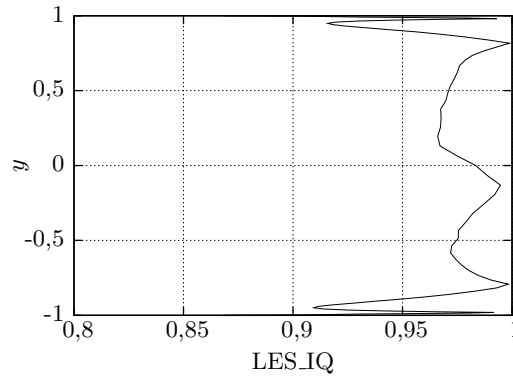
$$a = \frac{1}{\Delta^q} \frac{\bar{k} - \bar{k}_0}{\left(\frac{\Delta}{\Delta_0}\right)^q - 1}. \quad (6.3)$$

Darin sind  $\bar{k}_0$  und  $\Delta_0$  die entsprechenden Größen für das gröbere Gitter.

Zur Berechnung des LES\_IQ für die hier durchgeführten Kanalsimulationen bei  $\text{Re}_\delta = 21,3 \times 10^3$  wurde ein grobes Gitter verwendet, das aus dem ursprünglichen Simulationsgitter erstellt wurde, indem die Anzahl der Kontrollvolumina in alle drei Raumrichtungen halbiert und die Gitterabstände somit verdoppelt wurden. Der resultierende Verlauf von LES\_IQ ist in Abb. 6.1 dargestellt. Wie zu sehen ist, wird bei der Simulation demnach fast im gesamten Berechnungsgebiet über 95% der turbulenten kinetischen Energie aufgelöst. Nur in Wandnähe sind einige Minima zu erkennen, die jedoch deutlich über der Grenze von 0,8 liegen. Damit ist also sichergestellt, dass das Simulationsgitter mit großer Wahrscheinlichkeit fein genug war, um alle relevanten Skalen der Turbulenz räumlich aufzulösen.

An dieser Stelle ist anzumerken, dass die Methoden zur Qualitätssicherung von Large-Eddy Simulationen noch nicht ganz ausgereift sind und die Beurteilung einer LES mit dem obigen Verfahren zum Beispiel nicht absolut sicher und zuverlässig sind. So ist

## 6. Auswertung der Simulationen



**Abbildung 6.1.:** Verlauf des Large-Eddy Simulation Index of Quality für die Kanalsimulation zur Verifikation des verwendeten Gitters.

beispielsweise der  $LES.IQ$  aufgrund der Gleichung (6.3) an Stellen, wo sich die Kurvenverläufe von  $\bar{k}$  und  $\bar{k}_0$  schneiden, gleich eins, obwohl die beiden Werte in unmittelbarer Nähe zu diesem Schnittpunkt stark unterschiedlich sein können. Dennoch eignet sich dieses Verfahren gut zur Beurteilung einer Large-Eddy Simulation, da lediglich eine zusätzliche Rechnung auf einem größeren Gitter durchgeführt werden muss.

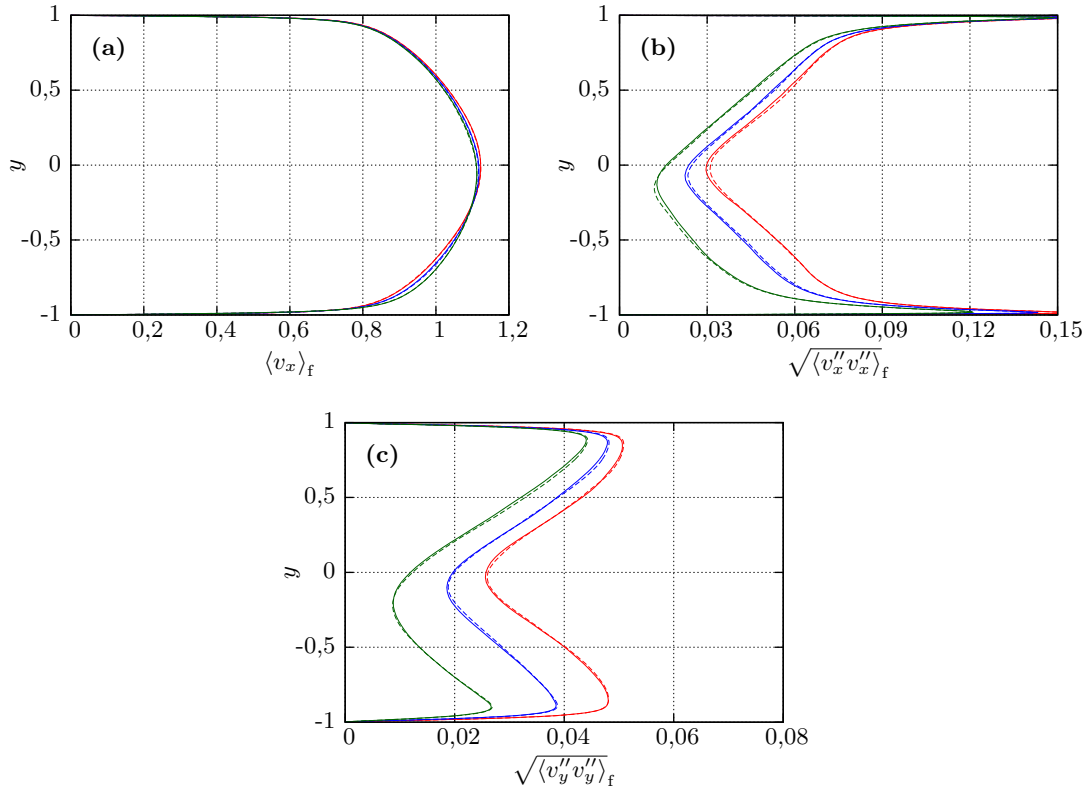
### 6.1.2. Sensitivitätsanalyse anderer Parameter

Auch wenn die Wahl der Konfigurationsparameter für den Solver  $\mathcal{LESOCC}$  bei den hier durchgeführten Simulationen entweder auf etablierten Standardeinstellungen beruhte oder aber aufgrund von sinnvollen Überlegungen getroffen wurde, ist es für die Bewertung der Ergebnisse weitaus sicherer, den Einfluss einiger kritischer Parameter auf die Resultate der Simulationen – ähnlich wie bei der oben durchgeführten Gitterqualitätsanalyse – zu überprüfen. In Frage kommen für solche Sensitivitätsanalysen vor allem die Zeitschrittweite  $\Delta t$  und die für die Bildung der Statistiken wichtige Mittelungszeit  $T_{av}$ .

Bei der Sensitivitätsanalyse dieser zwei Parameter wurden deshalb zusätzliche Simulationen mit veränderten Werten durchgeführt und die im Folgenden dargestellten Ergebnisse aus diesen Testsimulationen verglichen. Dafür wurden zunächst keine der in dieser Arbeit entwickelten Kollisionsmodelle eingebunden, sondern auf die ursprüngliche  $\mathcal{LESOCC}$ -Version zurückgegriffen. Weil zu erwarten ist, dass sich wegen der in wandnormaler Richtung wirkenden Schwerkraft kein quasi-stationärer Zustand einstellt, wenn die Partikel-Partikel-Kollisionen nicht berücksichtigt werden (darauf wird im folgenden Abschnitt noch näher eingegangen), ist die Kollisionsbehandlung in allen drei Untersuchungen aktiviert. Ebenso berücksichtigt wird die Fluid-Partikel-Interaktion (Zwei-Wege-Kopplung), um zu überprüfen, ob auch für diesen Mechanismus die gewählten Parameter ausreichend dimensioniert sind.

Die Zeitschrittweite  $\Delta t$  ist für die Simulation instationärer Strömungen vor allem aus zwei Gründen von kritischer Bedeutung: Zum einen beeinflusst sie während des Simulationsprozesses, ob das Zeitdiskretisierungsverfahren (in diesem Fall das expli-

## 6.1. Verifikation des numerischen Setups

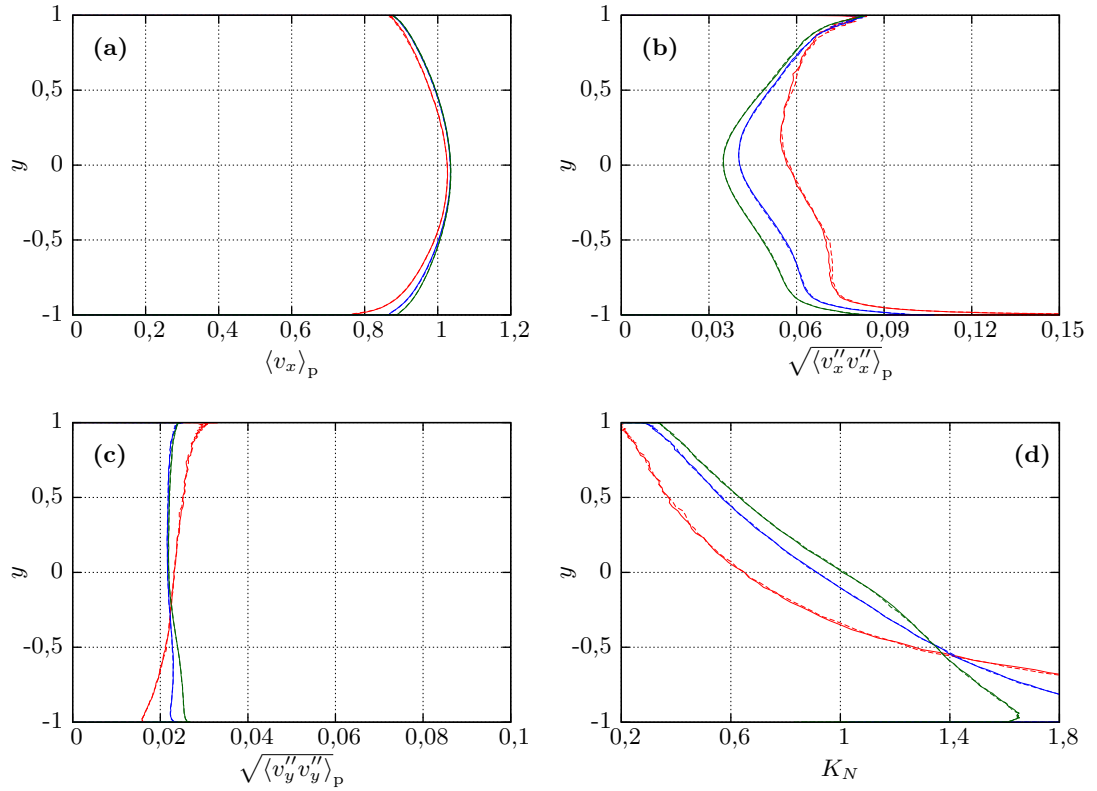


**Abbildung 6.2.:** Geschwindigkeitsprofile der kontinuierlichen Phase bei einfacher ( $\Delta t = 4 \times 10^{-3}$ ) und halbierter Zeitschrittweite.  $\eta = 0,1$ : —  $\Delta t$ , - - -  $\Delta t/2$ ;  $\eta = 0,5$ : —  $\Delta t$ , - - -  $\Delta t/2$ ;  $\eta = 1,0$ : —  $\Delta t$ , - - -  $\Delta t/2$ .

te Mehrschritt-Runge-Kutta-Verfahren) stabil bleibt und keine unphysikalischen Ergebnisse erzeugt werden oder die Simulation sogar ganz abbricht. Andererseits spielt sie aber auch bei der Genauigkeit der Zeitaufösung eine bedeutsame Rolle. Ähnlich wie die Größe der Gitterzellen muss der Zeitschritt klein genug gewählt werden, um den Abbruchfehler des Approximationsverfahrens innerhalb akzeptabler Grenzen zu halten. Um zu überprüfen, dass der gewählte dimensionslose Zeitschritt von  $\Delta t = 4 \times 10^{-3}$  den Genauigkeitsansprüchen genügt, wurden zusätzliche Simulationen für die drei betrachteten Massenbelastungen mit der halben Zeitschrittweite, aber konstanter Mittelungszeit  $T_{av}$  vorgenommen.

In Abb. 6.2 sind die Profile der mittleren Geschwindigkeit in  $x$ -Richtung und die quadratischen Mittelwerte der Geschwindigkeitsschwankungen in  $x$ - und  $y$ -Richtung für die kontinuierliche Phase bei den drei betrachteten Massenbelastungen  $\eta = 0,1$ ,  $0,5$  und  $1,0$  aufgetragen. Die Geschwindigkeitsstatistiken in dieser und allen folgenden Darstellungen sind dimensionslos, das heißt mit der über den Kanalquerschnitt gemittelten Geschwindigkeit  $v_m^*$  normiert. Ebenfalls dimensionslos dargestellt ist die wandnormale Koordinate  $y$ , welche mit der Kanalhalbhöhe  $\delta^*$  entdimensionalisiert worden ist. Die

## 6. Auswertung der Simulationen



**Abbildung 6.3.:** Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofile der Partikel bei einfacher ( $\Delta t = 4 \times 10^{-3}$ ) und halbiertes Zeitschrittweite.  $\eta = 0,1$ : —  $\Delta t$ , - - -  $\Delta t/2$ ;  $\eta = 0,5$ : —  $\Delta t$ , - - -  $\Delta t/2$ ;  $\eta = 1,0$ : —  $\Delta t$ , - - -  $\Delta t/2$ .

durchgezogenen in Abb. 6.2 Kurven entstammen den Simulationen mit der gewählten Zeitschrittweite  $\Delta t = 4 \times 10^{-3}$  (CFL-Zahl  $\approx 0,43$ ) und die gestrichelten Linien zeigen die Geschwindigkeitsstatistiken nach den Testsimulationen mit dem halbierten Zeitschritt. Es ist zu erkennen, dass eine kleinere Zeitschrittweite bei allen Massenbelastungen nur zu sehr geringfügigen Änderungen in den Ergebnissen für die kontinuierliche Phase führt. Die turbulenten Schwankungen in  $x$ - und  $y$ -Richtung (Abb. 6.2(b) und (c)) werden bei Halbierung des Zeitschrittes fast durchweg marginal größer, was auf die verbesserte zeitliche Auflösung der turbulenten Schwankungen zurückgeführt werden kann. Weil also für die Trägerströmung keine bedeutende Veränderung bei der Zeitschritthalbierung festgestellt werden kann, kann die Turbulenz der kontinuierlichen Phase mit  $\Delta t = 4 \times 10^{-3}$  als zeitlich hinreichend aufgelöst angesehen werden.

Im Falle der dispersen Phase ist in Abb. 6.3 eine Gegenüberstellung der Ergebnisse mit den beiden unterschiedlichen Zeitschrittweiten zu finden. Dort sind die mittlere Partikelgeschwindigkeit und die Partikelgeschwindigkeitsfluktuationen in Strömungs- und wandnormaler Richtung dargestellt. Zusätzlich dazu sind in Abb. 6.3(d) die Verläufe der normalisierten Anzahlkonzentration aufgeführt. Der direkte Vergleich zeigt, dass auch



bei den Partikeln kaum eine Veränderung der Ergebnisse festgestellt werden kann, wenn der Zeitschritt der Simulationen halbiert wird. Lediglich bei der niedrigsten Massenbeladung nehmen die Geschwindigkeitsfluktuationen in Strömungsrichtung (Abb. 6.3(b)) etwas zu, jedoch sind auch in diesem Fall die Änderungen so gering, dass schon mit  $\Delta t = 4 \times 10^{-3}$  auch für die disperse Phase eine ausreichende zeitliche Auflösung vorhanden ist. Diese Sensitivitätsanalyse zeigt also, dass der Zeitschritt  $\Delta t$  klein genug gewählt worden ist und alle relevanten zeitlichen Skalen mit dem verwendeten Zeitdiskretisierungsschema hinreichend genau wiedergegeben werden.

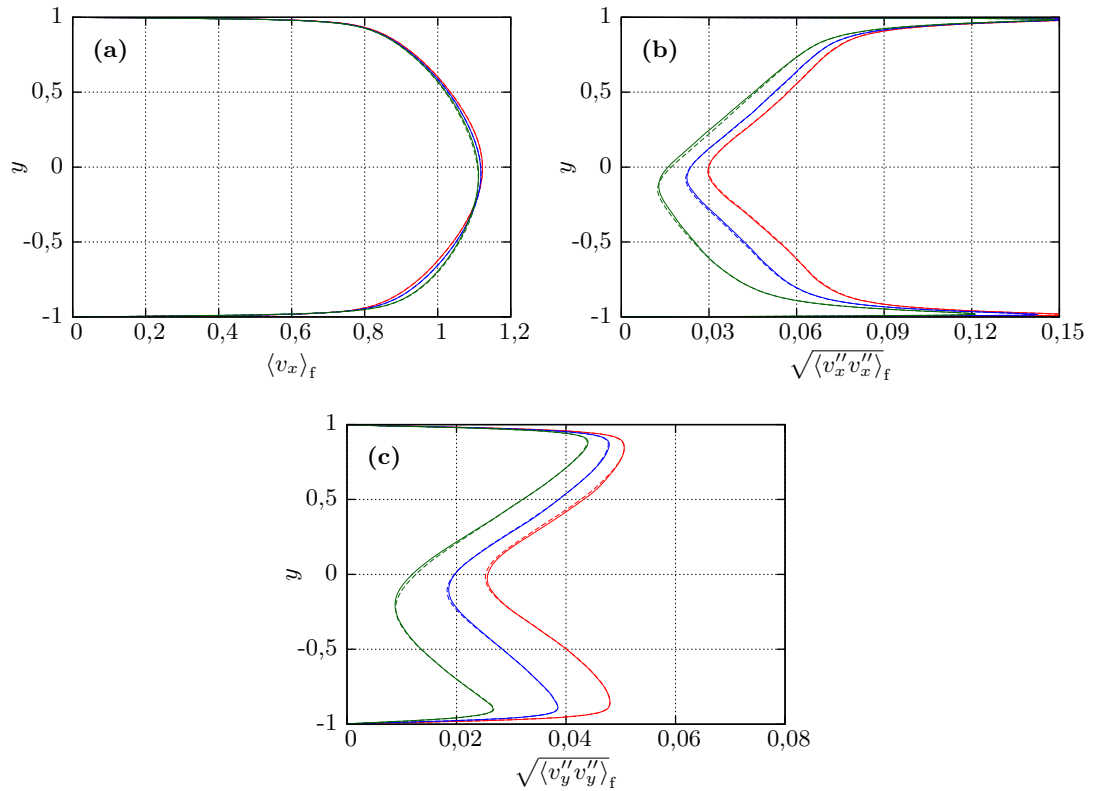
Bei der Bildung der Geschwindigkeitsstatistiken für beide Phasen ist es von sehr großer Bedeutung, dass die Mittelung über einen genügend langen Zeitraum  $T_{av}$  hinweg erfolgt. In den vorliegenden Simulationen wurden die Statistiken  $n_{av} = 50\,000$  Zeitschritte lang unter Berücksichtigung der homogenen Raumrichtungen gebildet, was einer dimensionslosen Mittelungszeit von  $T_{av} = 200$  entspricht. Demzufolge wird das  $2\pi\delta$  lange Strömungsgebiet während dieser Zeit von der Strömung im Durchschnitt über 30-mal durchströmt. Um nachzuweisen, dass dieser Mittelungszeitraum für die Bildung glaubwürdiger Statistiken groß genug gewählt worden ist, wurden zusätzliche Simulationen mit der doppelten Mittelungszeit und ansonsten gleichen Einstellungen durchgeführt.

In Abb. 6.4 sind im Vergleich die Geschwindigkeitsstatistiken der kontinuierlichen Phase bei einfacher und doppelter Mittelungszeit dargestellt. Es ist für alle drei Massenbeladungen zu sehen, dass sich die Statistiken der kontinuierlichen Phase bei einer Verdoppelung des Mittelungszeitraumes nicht mehr nennenswert ändern. Am deutlichsten wird der Einfluss der Mittelungszeit bei der höchsten Massenbeladung, was darauf zurückzuführen ist, dass die Zahl der Partikel bei  $\eta = 1,0$  am größten und die Wirkungsweise der Zwei-Wege-Kopplung dementsprechend am ausgeprägtesten ist. Dennoch zeigen die geringen Differenzen in den Resultaten, dass eine zeitliche Mittelung über 50 000 Zeitschritte für die Trägerströmung vollkommen ausreichend ist.

Die Geschwindigkeitsstatistiken und Konzentrationsprofile der dispersen Phase bei den verschiedenen Massenbeladungen und Mittelungszeiten sind in Abb. 6.5 dargestellt. Hier ist ebenfalls zu erkennen, dass eine Verdoppelung der gewählten Mittelungszeit keinen großen Einfluss auf die Ergebnisse für die disperse Phase hat. Lediglich bei der niedrigsten Massenbeladung wird eine Steigerung der Partikelgeschwindigkeitsfluktuationen in  $x$ -Richtung um 5% im Bereich der unteren Kanalhälfte deutlich (s. Abb. 6.5(b)). Weil aber alle anderen Kurvenverläufe annähernd deckungsgleich bleiben und im Falle der beiden anderen Massenbeladungen die Erhöhung der  $x$ -Schwankungen in weitaus geringerem Maße ausfällt, wird diese leichte Ungenauigkeit in den Partikelstatistiken bei niedrigen Massenbeladungen zu Gunsten des geringeren Berechnungsaufwandes akzeptiert.

Die Sensitivitätsanalyse für die beiden besonders kritischen Simulationsparameter Zeitschrittweite und Mittelungszeit zeigt also, dass die in Abschnitt 5.2 gewählten Werte ausreichen, um beide Phasen der Kanalströmung mit hinreichender Genauigkeit wiederzugeben. Die mit diesen Einstellungen durchgeführten Simulationen können in den folgenden Abschnitten also ohne Bedenken zur weiteren Analyse der in dieser Arbeit entwickelten Kollisionsmodelle verwendet werden.

## 6. Auswertung der Simulationen

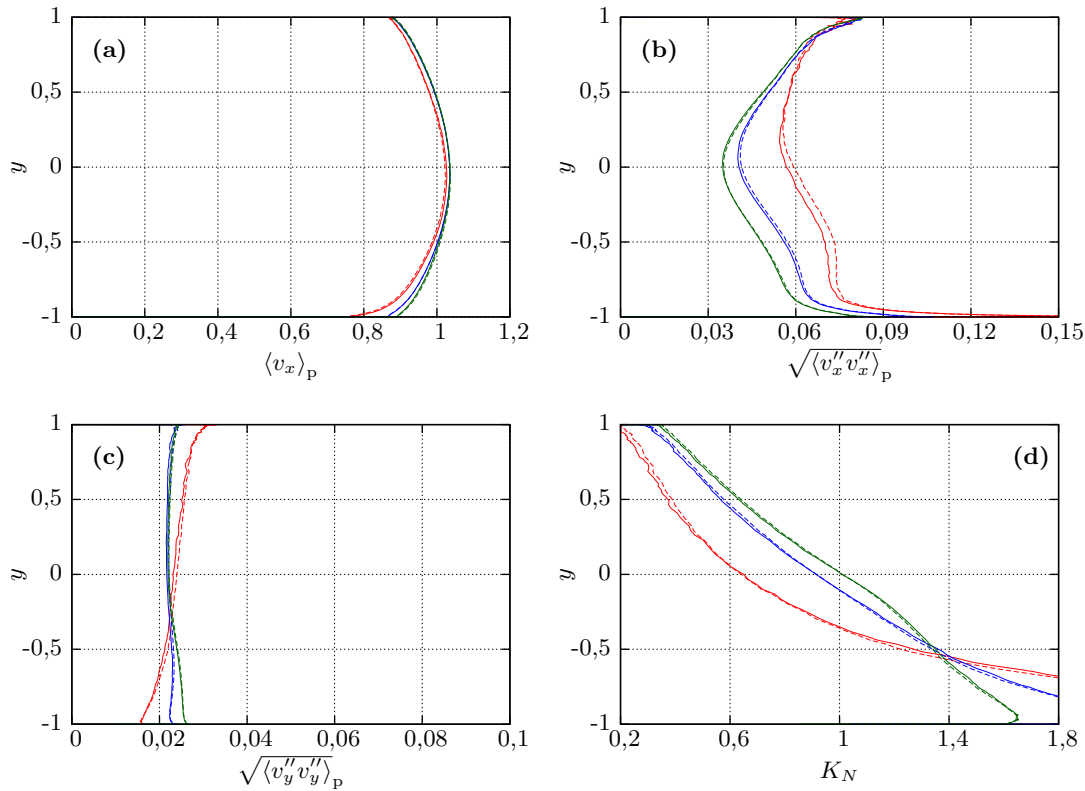


**Abbildung 6.4.:** Geschwindigkeitsprofile der kontinuierlichen Phase bei unterschiedlich langen Mittelungszeiten.  $\eta = 0,1$ : —  $T_{av}$ , - - -  $2T_{av}$ ;  $\eta = 0,5$ : —  $T_{av}$ , - - -  $2T_{av}$ ;  $\eta = 1,0$ : —  $T_{av}$ , - - -  $2T_{av}$ .

## 6.2. Unbeladene Kanalströmung

Bevor die simulierten Zweiphasenströmungen auf den Einfluss der verschiedenen Kollisionsmodelle hin analysiert werden, erfolgt hier eine kurze Untersuchung der Ergebnisse für die unbeladene Kanalströmung bei der gegebenen Referenz-Reynolds-Zahl von  $Re_\delta = 21,3 \times 10^3$ .

In Abb. 6.6 sind dazu die Geschwindigkeitsstatistiken der Luftströmung aus der Large-Eddy Simulation mit  $\mathcal{LESOC}$  und Messdaten von Kussin (2004) bei zwei nahezu gleichen Reynolds-Zahlen  $Re_\delta = 21,3 \times 10^3$  (der Referenzfall) und  $22,2 \times 10^3$  dargestellt. Der zusätzliche Datensatz wurde gewählt, weil die eigentlichen Referenzdaten von Kussin (2004) (Kreissymbole in Abb. 6.6) sichtbar asymmetrisch sind, was aufgrund des vernachlässigbaren Schwerkräfteinflusses bei der unbeladenen Luftströmung eigentlich nicht zu erwarten ist. In den Messdaten für die nur um 4,2% höhere Reynolds-Zahl kann diese Asymmetrie dagegen nicht beobachtet werden. Obwohl wegen der nahezu übereinstimmenden Reynolds-Zahlen mit wesentlich geringeren Unterschieden in den mittleren Geschwindigkeitsprofilen gerechnet werden kann, sind die Differenzen in den Messda-

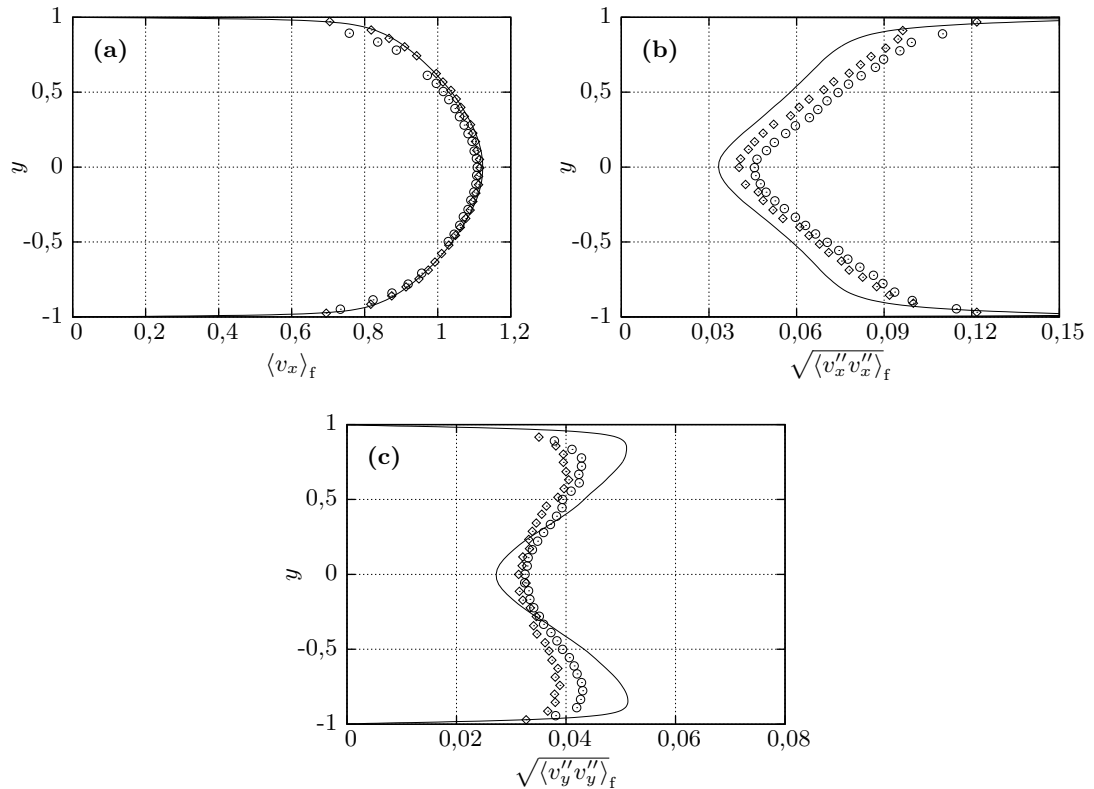


**Abbildung 6.5.:** Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofile der Partikel bei unterschiedlich langen Mittelungszeiten.  $\eta = 0,1$ : —  $T_{av}$ , - - -  $2T_{av}$ ;  $\eta = 0,5$ : —  $T_{av}$ , - - -  $2T_{av}$ ;  $\eta = 1,0$ : —  $T_{av}$ , - - -  $2T_{av}$ .

ten in Abb. 6.6(a) vor allem in der oberen Kanalhälfte deutlich sichtbar. Dies lässt die Vermutung zu, dass in den Messdaten für die unbeladene Kanalströmung des in dieser Auswertung betrachteten Referenzfalls ein systematischer Messfehler vorliegt. Leider ist unklar, ob sich dieser Fehler auch in den Messdaten für die partikelbeladenen Strömungen wiederfindet, weil die Geschwindigkeitsprofile in diesen Fällen wegen des Schwerkrafterinflusses auf die Partikel nicht mehr symmetrisch sein werden, was die Überprüfung der Messergebnisse erschwert.

Bei den gemessenen Geschwindigkeitsschwankungen (Abb. 6.6(b) und (c)) kann festgestellt werden, dass die Turbulenzintensität des Referenzfalls generell größer ist als die des zweiten Falls mit  $Re_\delta = 22,2 \times 10^3$ . Dies ist zu erwarten, weil mit einer höheren Reynolds-Zahl eine Verringerung der auf die mittlere Geschwindigkeit  $v_m^*$  bezogenen Schwankungsgeschwindigkeiten im Kanal einhergeht (Kussin, 2004). Unsicher ist jedoch, inwiefern hierfür auch noch die Wandrauheit eine Rolle spielt, welche im Referenzfall (Rauheitsstufe R1) niedriger ist als in dem hier vorhandenen Vergleichsfall mit höherer Reynolds-Zahl (Rauheitsstufe R2). Kussin (2004) selbst demonstriert anhand eines Beispiels, dass der Einfluss der Wandrauheit auf die horizontalen Geschwindig-

## 6. Auswertung der Simulationen



**Abbildung 6.6.:** Geschwindigkeitsprofile der unbeladenen Luft.  $\circ$   $Re_\delta = 21,3 \times 10^3$  (Kussin, 2004, R1);  $\diamond$   $Re_\delta = 22,2 \times 10^3$  (Kussin, 2004, R2); — Simulation.

keitsschwankungen der Luft zwischen den Rauheitsstufen R0 und R2 nicht unerheblich ist und eine höhere Wandrauheit höhere Schwankungen zur Folge hat. In direktem Widerspruch dazu steht jedoch Abb. 6.6(b), in der zu sehen ist, dass die horizontalen Geschwindigkeitsschwankungen der Luft mit zunehmender Wandrauheit abnehmen. Diese Inkonsistenzen und Unsicherheiten in den Versuchsdaten müssen beim Vergleich mit den Simulationsergebnissen berücksichtigt werden.

Wie in Abb. 6.6(a) für die mittlere Strömungsgeschwindigkeit zu sehen ist, zeigen Simulation und Experimente gleichermaßen, dass sich bei dieser hohen Kanal-Reynoldszahl ein typisches turbulentes Geschwindigkeitsprofil mit einem hohen Gradienten in Wandnähe ausbildet. Die Simulation mit  $\mathcal{LESOC}$  stimmt hier sehr gut mit den Versuchsdaten für die etwas höhere Reynolds-Zahl von  $Re_\delta = 22,2 \times 10^3$  überein. Der eigentliche Referenzfall mit  $Re_\delta = 21,3 \times 10^3$  kann in der oberen Kanalhälfte dagegen nicht so gut reproduziert werden, was direkt auf die unerwartete Asymmetrie des gemessenen Strömungsprofils und den möglichen Messfehler zurückzuführen ist. Insofern ist – wie die gute Übereinstimmung mit den Versuchsdaten bei  $Re_\delta = 22,2 \times 10^3$  zeigt – das Smagorinsky-Modell mit  $C_S = 0,065$  hinsichtlich der mittleren Strömung eine geeignete Wahl zur Feinstrukturmodellierung für die kontinuierliche Phase im ebenen Kanal.

### 6.3. Einfluss der Reibung bei Partikel-Wand-Kollisionen

Die Geschwindigkeitsschwankungen in  $x$ -Richtung der simulierten Strömung sind fast über die ganze Kanalhöhe hinweg im Vergleich zu den Experimenten zu niedrig. Dies hat mehrere Gründe: Zum Einen sind die Kanalwände im Versuch rau gewesen, während in den Simulationen für die kontinuierliche Phase hydraulisch glatte Wände angenommen wurden. Diese Annahme war in theoretischer Hinsicht insofern gerechtfertigt, weil die dimensionslose, auf Wandgrößen bezogene Rauheitstiefe

$$k^+ = \frac{\rho_f^* R_Z^* U_\tau^*}{\mu_f^*}$$

in den Versuchen von Kussin (2004) bis zur Rauheitsstufe R2 kleiner als eins war und die Rauheitsspitzen der Kanalwände sich somit noch in der viskosen Unterschicht der Grenzschichten befanden. Demnach ist eigentlich zu erwarten, dass der Einfluss der Wandrauheit auf die kontinuierliche Phase zu vernachlässigen ist. Kussin (2004) zeigte jedoch, dass es durchaus einen Einfluss der rauen Kanalwände auf die Geschwindigkeitsschwankungen in Strömungsrichtung gibt. Die fehlende Berücksichtigung rauer Wände in den Simulationen würde folglich zumindest einen Teil der zu gering vorhergesagten Schwankungen erklären und auch das zu niedrige Minimum der wandnormalen Schwankungen in Abb. 6.6(c) im Bereich der Kanalmitte kann hiermit begründet werden.

Darüber hinaus muss im Kontext von Large-Eddy Simulationen zusätzlich bedacht werden, dass die Resultate solcher Simulationen immer nur eine Näherung der tatsächlichen Strömung sind und nur die aufgelösten Strukturen der turbulenten Strömung enthalten, während die Referenzdaten vollkommen ungefiltert sind. Demnach fehlt in den Statistiken von Large-Eddy Simulationen immer ein gewisser Skalenbereich, der insbesondere bei den statistischen Momenten zweiter (und höherer) Ordnung – also in diesem Fall den quadratischen Mittelwerten der Geschwindigkeitsschwankungen – von Bedeutung sein kann (Fröhlich, 2006). Nach den in Abschnitt 6.1.1 berechneten Werten für den LES-IQ sollte dieser fehlende Skalenbereich aber klein sein.

Die Analyse der unbeladenen Strömung zeigt, dass die Large-Eddy Simulation mit dem vorhandenen Gitter und den gewählten Einstellungen vor allem für die mittlere Strömung hinreichend genaue Resultate liefert. In den Ergebnissen für die Geschwindigkeitsschwankungen sind größere Abweichungen von den Versuchsdaten zu erkennen, was einerseits mit der in den Simulationen nicht berücksichtigten Wandrauheit, andererseits mit dem Modellierungs- und Filterungsansatz in der Large-Eddy Simulation begründet werden kann. Leider kann nicht abschließend geklärt werden, woher die beobachteten Ungereimtheiten im Referenzfall von Kussin (2004) stammen und ob sie sich auch in die Messungen mit den partikelbeladenen Strömungen fortgepflanzt haben.

### 6.3. Einfluss der Reibung bei Partikel-Wand-Kollisionen

Zur Einflussanalyse der Reibung bei Partikel-Wand-Kollisionen mit dem in Abschnitt 4.1 entwickelten Kollisionsmodell werden die disperse Phase und die kontinuierliche Phase getrennt betrachtet. Daraus kann für die jeweilige Phase ein Eindruck darüber gewonnen werden, inwiefern die Wandreibung eine Rolle spielt und welche Bereiche der Ka-

## 6. Auswertung der Simulationen

nalströmung besonders betroffen sind. Im Anschluss daran folgt eine Zusammenfassung des Einflusses des Modells auf die Partikel- und Fluidstatistiken.

In den Simulationen der folgenden Untersuchungen wurden das Partikel-Partikel-Kollisionsmodell aus Abschnitt 4.2 und das Wandrauheitsmodell aus Abschnitt 4.3 deaktiviert, um allein den Wandreibungseinfluss betrachten zu können. Dies bedeutet für die Partikel-Partikel-Kollisionen, dass nur die Inelastizitäten mittels eines normalen Restitutionskoeffizienten berücksichtigt werden. Ferner wird die Wand als hydraulisch glatt angesehen.

### 6.3.1. Disperse Phase

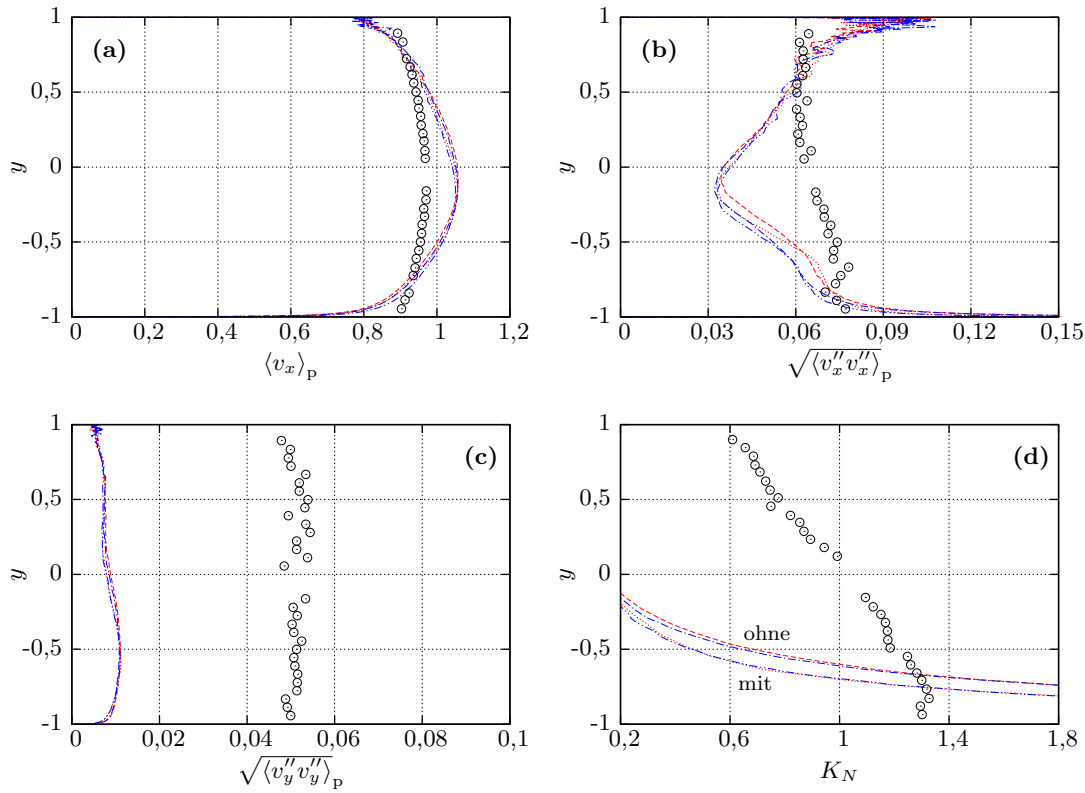
Begonnen werden soll die Untersuchung des Wandreibungseinflusses auf die Zweiphasenströmung im ebenen Kanal mit einer Analyse der dispersen Phase, da diese vom Partikel-Wand-Kollisionsmodell unmittelbar betroffen ist und dort deshalb die größten Veränderungen zu erwarten sind. Wie in Abschnitt 5.3 erläutert wurde, gibt es für jede Massenbeladung und jedes Wandmodell insgesamt vier verschiedene Testfälle, wenn man das Modell für reibungsbehaftete Partikel-Partikel-Kollisionen hier noch außer Acht lässt. Da hier zwei verschiedene Wandmodellierungsansätze verglichen werden sollen, wären dies insgesamt acht Fälle und in den Auswertungsdiagrammen dementsprechend acht Kurven, was sich negativ auf die Übersichtlichkeit auswirken würde. Die Analyse der dispersen Phase erfolgt deshalb in zwei Teilen: Zunächst werden die Simulationsergebnisse ohne die Berücksichtigung von Partikel-Partikel-Kollisionen betrachtet, ehe im Anschluss daran die Ergebnisse mit berücksichtigten interpartikulären Kollisionen untersucht werden.

#### 6.3.1.1. Ohne Partikel-Partikel-Kollisionen

Für die niedrigste Massenbeladung von  $\eta = 0,1$  sind die drei Geschwindigkeitsstatistiken der Partikel und die Konzentrationsprofile aus den Simulationen und dem Experiment von Kussin (2004) in Abb. 6.7 dargestellt. Es wurde bereits einleitend erwähnt, dass in den dort abgebildeten Simulationsergebnissen zunächst keine Partikel-Partikel-Kollisionen berücksichtigt wurden. Die beiden roten Kurven zeigen den Vergleich von reibungsfreien und reibungsbehafteten Partikel-Wand-Kollisionen bei deaktivierter Zwei-Wege-Kopplung. Bei den Simulationen, die in den Darstellungen von den zwei blauen Kurven repräsentiert werden, wurde die Rückkopplung der Partikel auf die Trägerströmung berücksichtigt.

Der Verlauf der mittleren Partikelgeschwindigkeiten in Abb. 6.7(a) zeigt, dass das flache Geschwindigkeitsprofil aus dem Referenzexperiment nicht von den dort aufgeführten Simulationen ohne Partikel-Partikel-Kollisionen wiedergegeben werden kann, und zwar unabhängig davon, ob die Zwei-Wege-Kopplung und/oder die Wandreibung berücksichtigt werden. Auch ist in den dortigen Simulationsergebnissen kein großer Unterschied zwischen der Ein- und der Zwei-Wege-Kopplung zu erkennen, was darauf zurückzuführen ist, dass die Partikelanzahl bei  $\eta = 0,1$  zu niedrig ist, als dass die Partikel einen nennenswerten Effekt auf die Trägerströmung haben können. Dies würde sich wiederum

### 6.3. Einfluss der Reibung bei Partikel-Wand-Kollisionen



**Abbildung 6.7.:** Einfluss der Wandreibung auf die Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofile der Partikel bei  $\eta = 0,1$  ohne Berücksichtigung der Partikel-Partikel-Kollisionen.  $\circ$  (Kussin, 2004, R1); --- ohne Zwei-Wege-Koppl., ohne Wandreibung; ..... ohne Zwei-Wege-Koppl., mit Wandreibung; -.-.- mit Zwei-Wege-Koppl., ohne Wandreibung; .-.-. mit Zwei-Wege-Koppl., mit Wandreibung.

rückwirkend auf die mittlere Geschwindigkeit der Partikel auswirken.

An dieser Stelle soll darauf hingewiesen werden, dass die großen Abweichungen zwischen den Simulationen und der Referenz in erster Linie auf die rauen Kanalwände zurückzuführen sind, die bei den Simulationen in diesem Abschnitt noch nicht berücksichtigt worden sind. Aus diesem Grund ist der primäre Zweck dieses Abschnittes nicht der direkte Vergleich von Experiment und Simulationen, sondern es geht hier um den Einfluss des reibungsbehafteten Partikel-Wand-Kollisionsmodells, welcher anhand der direkten Gegenüberstellung der verschiedenen Simulationen deutlich werden soll. Im Laufe dieses Kapitels werden dann immer mehr Modelle hinzugeschaltet, bis schließlich mit der Berücksichtigung aller in dieser Arbeit entwickelten Kollisionsmodelle in Abschnitt 6.5 ein sinnvoller Vergleich mit den Versuchsdaten erfolgen kann.

Bei den Geschwindigkeitsschwankungen der Partikel in Strömungsrichtung, welche in Abb. 6.7(b) zu finden sind, sind ebenfalls große Differenzen zwischen Experiment

## 6. Auswertung der Simulationen

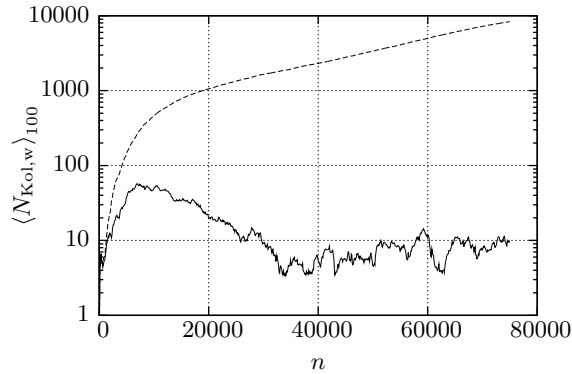
und Simulationen zu erkennen: Während die dimensionslosen Schwankungen im Versuch näherungsweise konstant zwischen 0,06 und 0,08 lagen, weisen die Ergebnisse der Simulationen in der Nähe der Kanalmitte ein deutliches Minimum und in Wandnähe viel zu hohe Maxima auf. Die Kurvenverläufe der Simulationen ähneln qualitativ eher dem Fluktuationsverlauf der unbeladenen Strömung in Abb. 6.6(b), was andeutet, dass sich die Partikel bei Vernachlässigung der Partikel-Partikel-Kollisionen in ihrem horizontalen Bewegungsverlauf an die Trägerströmung anpassen. In Abb. 6.7(b) kann im unteren Kanalbereich bei den Simulationen darüber hinaus beobachtet werden, dass die horizontalen Schwankungen der Partikel abnehmen, wenn die Zwei-Wege-Kopplung berücksichtigt wird. Dies lässt an dieser Stelle schon einmal erwarten, dass die Turbulenz der Trägerströmung von den Partikeln gedämpft wird. Der Einfluss der Wandreibung lässt sich anhand Abb. 6.7(b) nicht direkt quantifizieren. Es ist aber zu erkennen, dass in der Nähe der unteren Kanalwand die horizontalen Schwankungen durch die dämpfenden Eigenschaften der Wandreibung ein wenig abnehmen. Für den oberen Kanalbereich kann leider keine Aussage getroffen werden, da in diesem Bereich zu wenige Partikel für eine zuverlässige Statistik erfasst worden sind.

Die wandnormalen Geschwindigkeitsschwankungen, die in Abb. 6.7(c) abgebildet sind, sind sowohl im Experiment als auch in den Simulationen über den Kanalquerschnitt hinweg nahezu konstant. Qualitativ stimmen Simulation und Versuch demnach überein, jedoch liefern die Simulationen ohne Partikel-Partikel-Kollisionen Schwankungswerte, die etwa 80% unter den Versuchsdaten liegen und somit viel zu niedrig sind. Weder die Wandreibung noch die Berücksichtigung der Zwei-Wege-Kopplung zwischen Fluid und Partikeln führen zu einer signifikanten Veränderung, weshalb die fehlenden Partikel-Partikel-Kollisionen und rauen Kanalwände als relevante Mechanismen für die Erhöhung der wandnormalen Partikelgeschwindigkeitsschwankungen vermutet werden können. Die in den Simulationen deutlich unterschätzten vertikalen Schwankungen erklären die Differenzen, die auch bei den anderen Geschwindigkeitsstatistiken beobachtet werden konnten: Der quadratische Mittelwert der vertikalen Geschwindigkeitsfluktuationen repräsentiert den transversalen Austausch von Partikelimpuls. Dabei gilt, je höher diese Schwankungen sind, umso gleichmäßiger verteilen sich die Partikel entlang des Kanalquerschnitts, auch wenn die Schwerkraft einer solchen Homogenisierung entgegenwirkt. Wenn keine Partikel-Partikel-Kollisionen berücksichtigt werden, liegen die einzigen Faktoren, die zur Bahnänderung der Partikel entgegengesetzt zur Schwerkraft-richtung beitragen können, in den turbulenten Schwankungen der Trägerströmung und den Partikel-Wand-Kollisionen. Wie nun in den Abbildungen 6.7(a) bis (c) zu sehen ist, reichen diese Mechanismen (zumindest mit dem hier verwendeten Wandmodell) nicht aus, um die Partikel in der Strömung einem ausreichend erhöhtem Impulsaustausch in wandnormaler Richtung auszusetzen. Die Vernachlässigung der interpartikulären Kollisionen und der rauen Wände zieht also – selbst bei dieser niedrigen Massenbeladung – einen klaren Fehler nach sich.

Dies zeigt sich auch bei den Konzentrationsprofilen in Abb. 6.7(d): In der experimentellen Referenz ist dort eine, bedingt durch die Wirkrichtung der Gravitation, leicht erhöhte Partikelkonzentration in der unteren Kanalhälfte zu erkennen. Die Simulationen dagegen liefern in der Nähe der unteren Wand extrem hohe Konzentrationen, während



### 6.3. Einfluss der Reibung bei Partikel-Wand-Kollisionen



**Abbildung 6.8.:** Zeitliche Entwicklung der Anzahl an Partikel-Wand-Kollisionen im Simulationsverlauf bei  $\eta = 0,1$  mit Partikel-Wand-Reibung und Zwei-Wege-Kopplung. — mit Partikel-Partikel-Kollisionen; - - - - ohne Partikel-Partikel-Kollisionen.

in der oberen Kanalhälfte nur noch sehr wenige Partikel zu finden sind. Also folgt auch aus dem Verlauf der Konzentrationsprofile, dass die Kollisionen zwischen den Partikeln und die rauen Wände eine entscheidende Rolle beim vertikalen Impulsaustausch und bei der Verteilung der Partikel im Kanal spielen müssen. Interessant ist aber auch, dass in Abb. 6.7(d) ferner ein großer Einfluss der Wandkollisionsbehandlung auf die Konzentrationsverteilung sichtbar wird. So setzen sich die Partikel in den Simulationen bei Berücksichtigung der Wandreibung noch weiter am Kanalboden ab, als es ohnehin schon der Fall war. Der Grund hierfür ist, dass das Kollisionsmodell aus Abschnitt 4.1 neben der Reibung auch teilelastische Stöße beinhaltet. Mit einem wandnormalen Restitutionskoeffizienten von  $e_{n,w} = 0,8$  besitzen die Partikel nach einer Wandkollision nur noch 80% ihrer wandnormalen Geschwindigkeitskomponente und nähern sich (wie ein auf die Tischplatte fallen gelassener Tischtennisball) aufgrund der fehlenden Partikel-Partikel-Kollisionen mit jeder Wandkollision immer mehr der unteren Wand an.

Wie die Versuchsdaten zeigen, ist dieser in den Simulationen ohne interpartikuläre Kollisionen und ohne Berücksichtigung der Wandrauheit beobachtete Ablagerungseffekt in der Realität eindeutig nicht vorhanden. Es wurde bereits diskutiert, dass die wandnormalen Partikelgeschwindigkeitsschwankungen der gravitationsbedingten Ablagerung zwar entgegenwirken, ohne die Mechanismen der Partikel-Partikel-Kollisionen und rauen Kanalwände aber viel zu niedrig sind. Daraus ergibt sich ein Problem, welches in dieser Arbeit bereits schon mehrfach angedeutet wurde: Wenn die Schwerkraft alle anderen auf die Partikel einwirkenden Kräfte und Bahnänderungsmechanismen überwiegt, dann gibt es keinen stationären Zustand in der Simulation und die Mittelwertbildung über einen festen Zeitraum hinweg mit zyklischen Randbedingungen ist fragwürdig. Dies zeigt Abb. 6.8, in der exemplarisch der zeitliche Verlauf von der über jeweils 100 Zeitschritte gemittelten Anzahl an Partikel-Wand-Kollisionsereignissen  $\langle N_{\text{Kol,w}} \rangle$  bei berücksichtigten und unberücksichtigten Partikel-Partikel-Kollisionen dargestellt ist. In beiden Simulationen wurden die Reibung bei den Partikel-Wand-Kollisionen und die Modellierung

## 6. Auswertung der Simulationen

der Zwei-Wege-Kopplung mit einbezogen. Für die Untersuchung des zeitlichen Verlaufs der Partikel-Wand-Kollisionen ist dies jedoch nicht von entscheidender Bedeutung. In dieser Darstellung ist deutlich zu erkennen, dass die Kollisionsanzahl bei Vernachlässigung der Partikel-Partikel-Interaktionen nach etwa 20 000 Zeitschritten logarithmisch anwächst und sich erwartungsgemäß eindeutig kein statistisch stationärer Zustand einstellt. Ganz im Gegensatz dazu bildet sich bei aktivierten Partikel-Partikel-Kollisionen eine näherungsweise konstante Anzahl an Partikel-Wand-Kollisionen aus, welche einen stationären Zustand der dispersen Phase vermuten lässt. Die Untersuchung zeigt also, dass die Simulationen, in denen keine Kollisionen zwischen den Partikeln berücksichtigt wurden, zum Vergleich mit dem Referenzexperiment ungeeignet sind. Im weiteren Verlauf der Ergebnisauswertung wird auf diese Simulationen deswegen nicht mehr so detailliert eingegangen. Dennoch sind die Mittelungszeiten für alle simulierten Fälle gleich und es kann mit Hilfe dieser Resultate zumindest ein Einblick in gewisse Mechanismen gewonnen werden, die sonst von den Partikel-Partikel-Kollisionen verdeckt worden wären.

Bei der um den Faktor fünf höheren Massenbeladung von  $\eta = 0,5$  zeigt sich in den in Abb. 6.9 dargestellten Statistiken der dispersen Phase mit ausgeschalteten Partikel-Partikel-Kollisionen ein ähnliches Bild. Durch die höhere Partikelanzahl ist das Ausmaß der Zwei-Wege-Kopplung jedoch deutlich ausgeprägter. Auf die Simulationen, in denen dieser Mechanismus nicht berücksichtigt wurde (rote Kurven), hat die erhöhte Massenbeladung keinerlei Einfluss, weshalb auf diese Resultate nicht weiter eingegangen wird.<sup>12</sup>

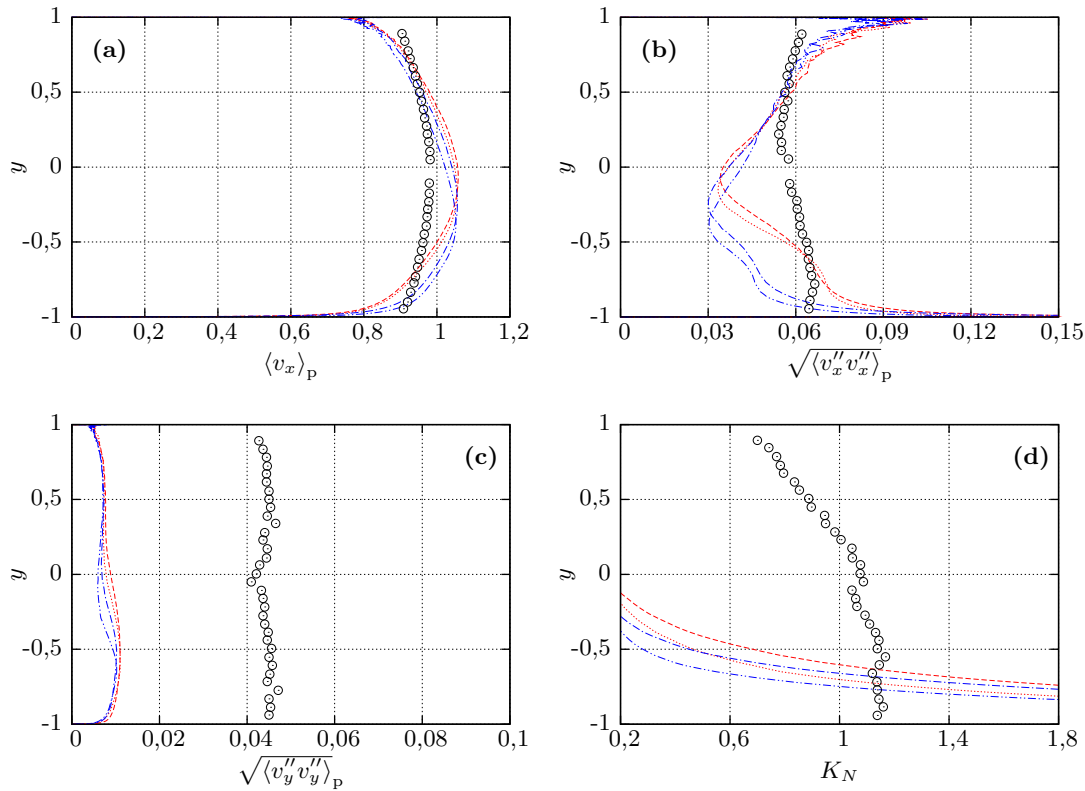
Die Profile der mittleren Geschwindigkeit in Abb. 6.9(a) sind auch in diesem Falle wegen des durch die fehlenden Partikel-Partikel-Kollisionen und rauen Kanalwände zu niedrigen transversalen Impulsaustauschs viel steiler als im Referenzexperiment. Im Vergleich zum Fall  $\eta = 0,1$  wird hier aber schon ein deutlicher Einfluss der Zwei-Wege-Kopplung sichtbar, der für ein wesentlich asymmetrischeres Geschwindigkeitsprofil sorgt. Wie bereits erwähnt, ist der Zwei-Wege-Kopplungsmechanismus aufgrund der höheren Partikelzahl wesentlich präsenter: Die in der unteren Kanalhälfte abgelagerten Partikel modifizieren die Strömung in diesem Bereich, was sich wiederum in Form eines Rückkopplungseffektes auf die Partikel auswirkt. Auch der Wandreibungseinfluss ist hier wegen der höheren Massenbeladung deutlich größer und führt zu einer Erhöhung der mittleren Partikelgeschwindigkeit in der Nähe der unteren Wand. Für die in Abb. 6.9(b) dargestellten horizontalen Partikelgeschwindigkeitsschwankungen setzt sich der bei  $\eta = 0,1$  festgestellte Trend ebenfalls fort. Als direkte Folge der hohen Partikelkonzentration an der unteren Kanalwand werden die horizontalen Fluktuationen der Partikel bei eingeschalteter Zwei-Wege-Kopplung in der unteren Kanalhälfte deutlich reduziert. Dieser Effekt tritt hier deutlicher als bei  $\eta = 0,1$  hervor, weil in diesem Fall die fünffache Partikelanzahl vorliegt.

Wie zu erwarten war, sind die wandnormalen Geschwindigkeitsschwankungen der Partikel auch bei  $\eta = 0,5$  ohne die Berücksichtigung von Partikel-Partikel-Kollisionen und

---

<sup>12</sup>Dies ist damit begründet, dass die Partikel in diesem Fall keine direkte (über Kollisionen) oder indirekte (über Zwei-Wege-Kopplung) Beeinflussung erfahren. Der einzige Unterschied liegt in der bei höherer Massenbeladung höheren Anzahl an statistischen Samples, was im Endeffekt bei genügend langer Mittelungsdauer aber keinen Einfluss auf die Ergebnisse hat.

### 6.3. Einfluss der Reibung bei Partikel-Wand-Kollisionen

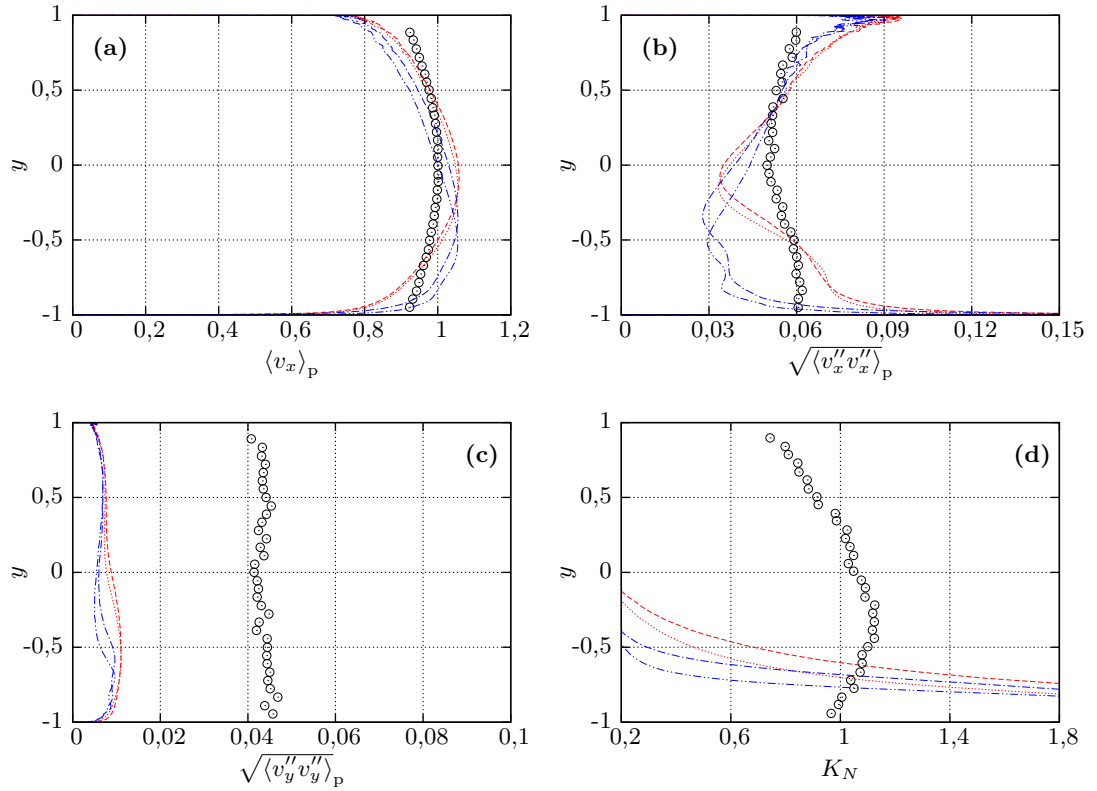


**Abbildung 6.9.:** Einfluss der Wandreibung auf die Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofile der Partikel bei  $\eta = 0,5$  ohne Berücksichtigung der Partikel-Partikel-Kollisionen.  $\circ$  (Kussin, 2004, R1); --- ohne Zwei-Wege-Koppl., ohne Wandreibung; ..... ohne Zwei-Wege-Koppl., mit Wandreibung; --- mit Zwei-Wege-Koppl., ohne Wandreibung; ..... mit Zwei-Wege-Koppl., mit Wandreibung.

der Rauheit der Kanalwände in den Simulationen viel zu gering (Abb. 6.9(c)). Als Folge der Zwei-Wege-Kopplung gibt es bei aktivierter Partikel-Wand-Reibung im Kanalinneren sogar ein leichtes Minimum, welches nicht in den Referenzdaten beobachtet werden kann. Dementsprechend zeigen die Konzentrationsprofile in Abb. 6.9(d) wieder eine viel zu inhomogene Partikelverteilung im Kanal, die an der unteren Kanalwand extrem hohe Partikelkonzentrationen aufweist. Für die kleinste Massenbelastung wurde in Abb. 6.7(d) bereits festgestellt, dass bei Verwendung des reibungsbehafteten Partikel-Wand-Kollisionsmodells die Partikelkonzentration in der Nähe der unteren Wand noch höher wird. Auch in diesem Fall ist dies in den Simulationsergebnissen ganz klar zu erkennen.

Die Partikelstatistiken aus den Simulationen für die höchste in dieser Arbeit betrachtete Massenbelastung von  $\eta = 1,0$  sind in Abb. 6.10 aufgeführt. Da die Partikelanzahl in diesem Fall noch höher ist, können die bisher beobachteten Auswirkungen in gesteiger-

## 6. Auswertung der Simulationen



**Abbildung 6.10.:** Einfluss der Wandreibung auf die Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofile der Partikel bei  $\eta = 1,0$  ohne Berücksichtigung der Partikel-Partikel-Kollisionen.  $\circ$  (Kussin, 2004, R1); - - - ohne Zwei-Wege-Koppl., ohne Wandreibung; ····· ohne Zwei-Wege-Koppl., mit Wandreibung; - · - · mit Zwei-Wege-Koppl., ohne Wandreibung; · - · - mit Zwei-Wege-Koppl., mit Wandreibung.

ter Intensität festgestellt werden: Das Maximum des mittleren Geschwindigkeitsprofils in Abb. 6.10(a) verschiebt sich wegen der noch stärker wirkenden Zwei-Wege-Kopplung und der noch größeren Bodenkonzentration der Partikel weiter nach unten und der Einfluss der Wandreibung wird etwas größer als bei  $\eta = 0,5$ . Die Dämpfung der Partikelgeschwindigkeitsschwankungen ist sowohl in horizontaler (Abb. 6.10(b)) als auch in vertikaler Richtung (Abb. 6.10(c)) ebenfalls stärker, was auf die hohe Massenbelastung zurückzuführen ist. Wie schon in den anderen Ergebnissen ist auch hier zu sehen, dass das Modell für reibungsbehaftete Wandkollisionen in der Nähe der unteren Wand zu einer Verringerung der Fluktuationen und zu einer noch größeren Bodenablagerung der Partikel führt, was vor allem auf die Inelastizitäten bei den Kollisionen zurückzuführen ist.

Wie die bisherige Analyse der Simulationsergebnisse für die disperse Phase und auch der zeitliche Verlauf der Anzahl an Partikel-Wand-Kollisionen in Abb. 6.8 gezeigt haben,

stellen die Simulationen der hier betrachteten dispersen Zweiphasenströmungen ohne die Berücksichtigung von Partikel-Partikel-Kollisionen und Wandrauheitseffekten kein realitätsnahes Abbild der experimentellen Referenz dar. Dabei kann sich im Rechengebiet nämlich kein statistisch stationärer Zustand einstellen und es kommt im unteren Kanalbereich wegen der Schwerkraftwirkung zu einer extremen Ablagerung von Partikeln, die im Experiment nicht beobachtet werden konnte.<sup>13</sup> Zur weiteren Analyse wurden die nun folgenden Resultate allesamt aus Simulationen entnommen, in denen interpartikuläre Kollisionen berücksichtigt wurden. Es ist also zu erwarten, dass diese Ergebnisse weitaus näher an die Referenzdaten herankommen.

#### 6.3.1.2. Mit Partikel-Partikel-Kollisionen

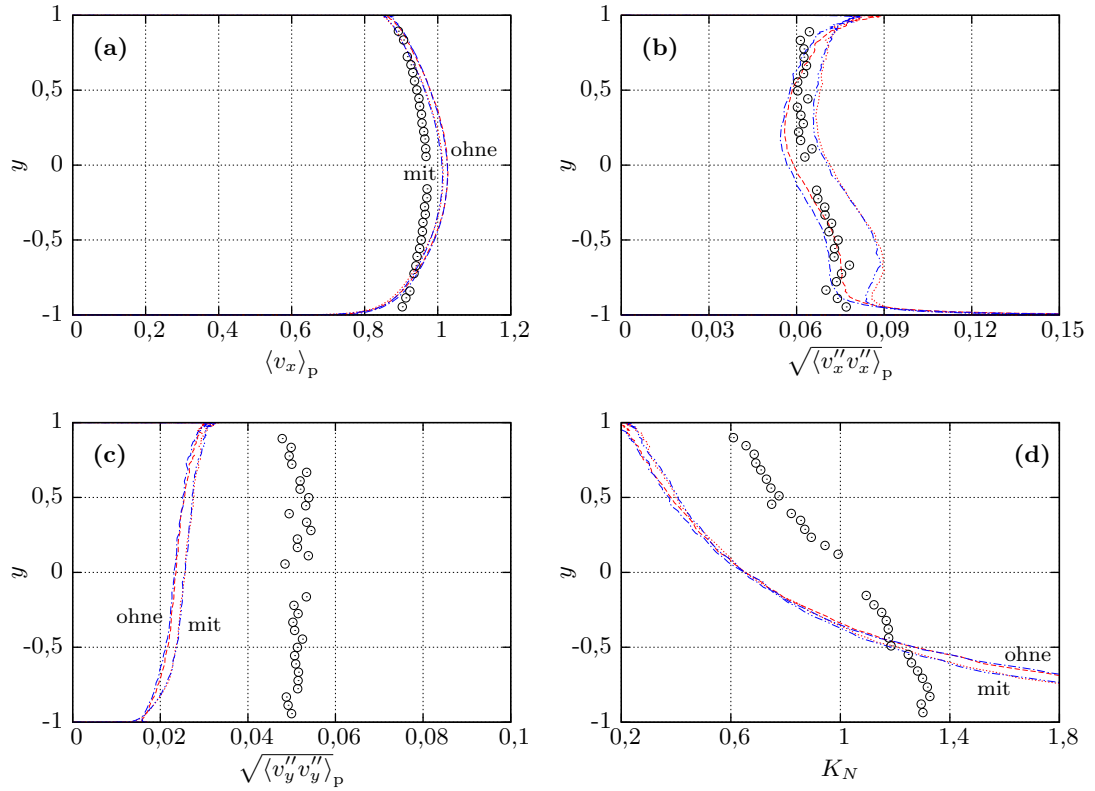
Die Simulationsergebnisse für die niedrigste Massenbeladung von  $\eta = 0,1$  mit Berücksichtigung von Partikel-Partikel-Kollisionen sind in Abb. 6.11 dargestellt. Auch diese Abbildungen halten sich an die zu Beginn dieses Unterabschnitts festgelegte Konvention, dass die beiden roten Kurven den Simulationen ohne Zwei-Wege-Kopplung entsprechen und für die beiden blauen Kurven dieser Mechanismus berücksichtigt worden ist. Zusammen mit der Berücksichtigung der Partikel-Partikel-Kollisionen repräsentieren die blauen Kurven also die Vier-Wege-Kopplung.

Abb. 6.11(a) zeigt, dass bei Berücksichtigung der Partikel-Partikel-Kollisionen ein deutlich flacheres und symmetrischeres mittleres Partikelgeschwindigkeitsprofil entsteht, als es ohne der Fall war (vgl. Abb. 6.7(a)). Dies ist auf den durch die interpartikulären Kollisionen erhöhten Impulstransport in wandnormaler Richtung zurückzuführen. Dennoch zeigt sich, dass die mittlere Geschwindigkeit der Partikel über große Bereiche des Kanals hinweg im Vergleich zum Experiment trotzdem zu groß ist, insbesondere in der Kanalmitte. Wegen der geringen Massenbeladung und der damit verbundenen niedrigen Partikelanzahl ist kaum ein Einfluss der Zwei-Wege-Kopplung zu erkennen, die Berücksichtigung der Reibung bei den Partikel-Wand-Kollisionen bewirkt aber eine leichte Verbesserung der Simulationsdaten. Es ist zu erkennen, dass sich die Partikel dabei auch in der Kanalmitte etwas verlangsamen, obwohl die Reibung lediglich an den Kanalwänden eine Rolle spielt. Der Grund hierfür liegt in den Partikel-Partikel-Kollisionen: Stößt ein Teilchen mit der Kanalwand zusammen, wird es durch die Reibung in Rotation versetzt und verliert somit ein wenig translatorische Bewegungsenergie. Außerdem geht durch diesen Vorgang etwas Impuls in Strömungsrichtung verloren, so dass dieses Partikel dann unmittelbar nach der Kollision in Strömungsrichtung etwas langsamer ist als seine Nachbarpartikel, was die Wahrscheinlichkeit eines Zusammenstoßes deutlich erhöht. Kommt es zur Kollision, so wird das langsamere Partikel von dem schnelleren angestoßen und beschleunigt, während das andere Partikel Geschwindigkeit verliert, bis es selbst wieder durch eine Kollision mit einem Nachbarpartikel beschleunigt wird. Dieser Prozess setzt sich über die gesamte Kanalhöhe hinweg fort, was die Verlangsamung aller Partikel bei Berücksichtigung der Reibung zwischen Partikeln und Kanalwänden erklärt.

---

<sup>13</sup>Dennoch können diese Ergebnisse gut dazu verwendet werden, die Mechanismen bei reibungsbehafteten Partikel-Wand-Kollisionen zu untersuchen, ohne dass diese durch die eindeutig dominanteren Partikel-Partikel-Kollisionen und Wandrauheitseffekte verfälscht werden.

## 6. Auswertung der Simulationen



**Abbildung 6.11.:** Einfluss der Wandreibung auf die Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofile der Partikel bei  $\eta = 0,1$  mit Berücksichtigung der Partikel-Partikel-Kollisionen.  $\circ$  (Kussin, 2004, R1); - - - ohne Zwei-Wege-Koppl., ohne Wandreibung; ····· ohne Zwei-Wege-Koppl., mit Wandreibung; - · - · mit Zwei-Wege-Koppl., ohne Wandreibung; - · - · mit Zwei-Wege-Koppl., mit Wandreibung.

Bei den horizontalen Geschwindigkeitsschwankungen der Partikel in Abb. 6.11(b) ist im Vergleich zu Abb. 6.7(b) ein deutlicher Einfluss der interpartikulären Kollisionen zu erkennen. Durch die Kollisionen variieren diese Schwankungen entlang der  $y$ -Achse weniger stark, was der Beobachtung in den Messdaten von Kussin (2004) entspricht. Wird die Zwei-Wege-Kopplung mit einbezogen, so verringern sich die Geschwindigkeitsschwankungen der dispersen Phase wegen der Turbulenzdämpfung durch die Partikel etwas. Aufgrund der geringen Massenbelastung ist der Effekt in diesem Falle jedoch recht klein. Die Simulationen ohne reibungsbehaftete Partikel-Wand-Kollisionen können die Referenzdaten vor allem im unteren Kanalbereich sehr gut reproduzieren, während die Berücksichtigung der Reibung eine Erhöhung der Schwankungen um bis zu 20% bringt und somit zu einer generellen Überschätzung der Versuchsdaten führt. Die Erhöhung der horizontalen Schwankungen infolge der Wandreibung geht aus der Zunahme der Partikel-Partikel-Kollisionen durch den bereits für die mittlere Geschwindigkeit disku-

tierten Abbremsmechanismus hervor.

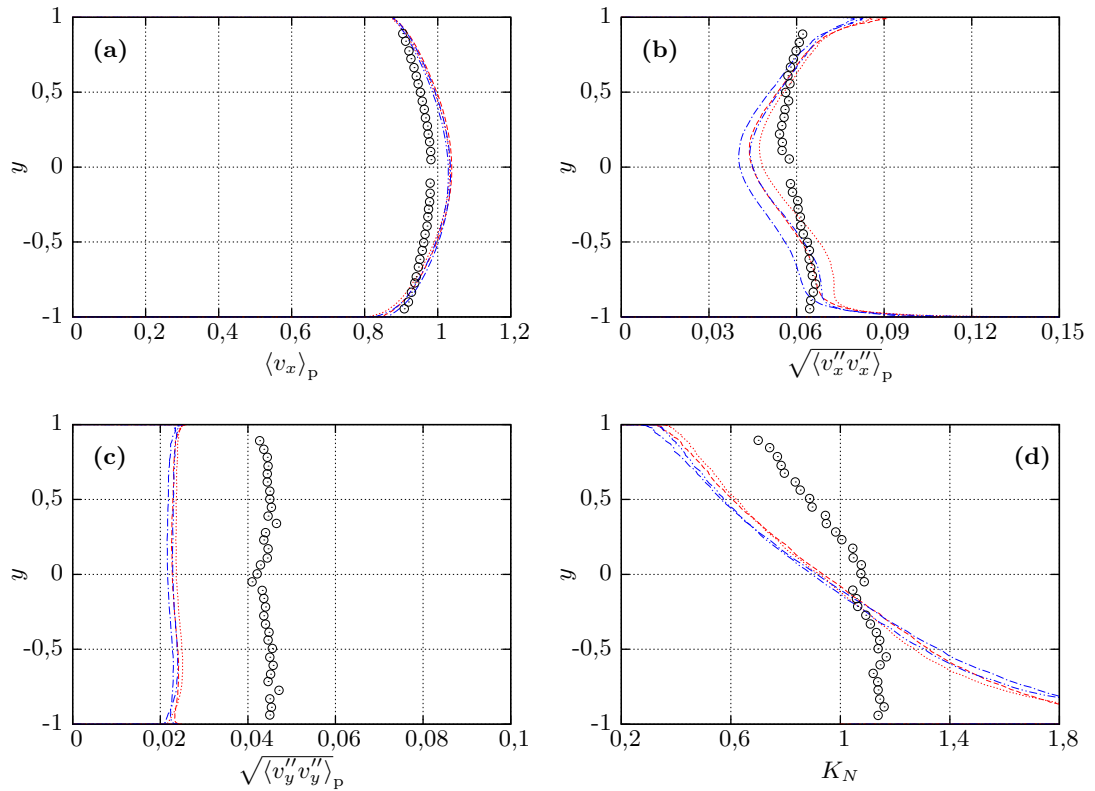
Für die wandnormalen Partikelfluktuationen in Abb. 6.11(c) kann zunächst eine deutliche Erhöhung festgestellt werden, wenn in den Simulationen die Partikel-Partikel-Kollisionen berücksichtigt werden. Dies entspricht den Erwartungen, denn die Kollisionen erhöhen den transversalen Impulsaustausch und damit auch die wandnormalen Geschwindigkeitsschwankungen beträchtlich. Durch die Wandreibung ist eine leichte zusätzliche Schwankungserhöhung zu erkennen, was auch in diesem Fall aus dem Abbremsseffekt an der Wand und der dadurch erhöhten Kollisionsrate resultiert. Es ist jedoch auch zu erkennen, dass diese Schwankungsverstärkung bei Berücksichtigung der Wandreibung nicht ausreicht, um die Versuchsdaten von Kussin (2004) zu reproduzieren. Tatsächlich liegen die simulierten Schwankungen in wandnormaler Richtung nur auf etwa der Hälfte des Messdatenniveaus.

Anhand der Konzentrationsprofile in Abb. 6.11(d) ist zu sehen, dass wegen der Berücksichtigung der Partikel-Partikel-Kollisionen keine extremen Partikelablagerungen in der Nähe der unteren Kanalwand mehr festgestellt werden können. Es zeigt sich vielmehr eine deutlich homogenere Konzentrationsverteilung mit einer gravitationsbedingt erhöhten Konzentration in der unteren Kanalhälfte. Im Vergleich zum Experiment ist diese Partikelverteilung aber immer noch deutlich zu ungleichmäßig, was in erster Linie auf die zu geringen wandnormalen Partikelgeschwindigkeitsschwankungen zurückzuführen ist. Wie bereits in Abschnitt 6.3.1.1 erläutert worden ist, sorgen die wandnormalen Fluktuation der Partikel für einen Austausch von Partikelimpuls in wandnormaler Richtung, der entgegen die auf die Partikel einwirkende Schwerkraft gerichtet ist. Daraus folgt, dass die durch die Wandreibung hervorgerufene Erhöhung der wandnormalen Schwankungen zu einer leichten Homogenisierung der Partikelkonzentration führt. Dennoch ist auch hier die Verbesserung der Simulationsergebnisse durch die Berücksichtigung der Wandreibung nicht ausreichend, um die Referenzdaten hinreichend genau zu reproduzieren.

Als Nächstes werden die Geschwindigkeitsstatistiken und Konzentrationsprofile der Partikel bei einer Massenbeladung von  $\eta = 0,5$  betrachtet. Die Simulationsergebnisse und Messdaten dazu sind in Abb. 6.12 dargestellt. Es ist zu erwarten, dass wegen der höheren Massenbeladung die Partikel-Partikel-Kollisionen an Bedeutung zunehmen werden und der Einfluss der Zwei-Wege-Kopplung größer wird als bei  $\eta = 0,1$ .

Die Profile der mittleren Partikelgeschwindigkeit in Abb. 6.12(a) sind auch hier durch den Effekt der Partikel-Partikel-Kollisionen im Vergleich zu Abb. 6.9(a) wesentlich flacher und vor allem symmetrischer geworden. Gegenüber den Versuchsdaten sind die Partikel aber auch bei  $\eta = 0,5$  im Großen und Ganzen immer noch zu schnell. Es ist zu erkennen, dass die blauen Kurven mit aktivierter Zwei-Wege-Kopplung etwas asymmetrischer sind und ein leicht nach unten verschobenes Maximum aufweisen, was vermuten lässt, dass der Schwerkrafteinfluss durch die Zwei-Wege-Kopplung verstärkt wird. In allen Fällen kann beobachtet werden, dass die Wandreibung eine Verlangsamung der mittleren Partikelgeschwindigkeit über den gesamten Kanalquerschnitt hinweg zur Folge hat. Demnach wirkt der für  $\eta = 0,1$  bereits besprochene Wechselwirkungsmechanismus zwischen den reibungsbehafteten Partikel-Wand- und den Partikel-Partikel-Kollisionen auch in diesem Fall, jedoch mit etwas geringerer Intensität. Dies liegt daran, dass die Partikel-Partikel-Kollisionen bei einer Erhöhung der Massenbeladung wesentlich stärker an Be-

## 6. Auswertung der Simulationen



**Abbildung 6.12.:** Einfluss der Wandreibung auf die Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofile der Partikel bei  $\eta = 0,5$  mit Berücksichtigung der Partikel-Partikel-Kollisionen.  $\circ$  (Kussin, 2004, R1); - - - ohne Zwei-Wege-Koppl., ohne Wandreibung; ····· ohne Zwei-Wege-Koppl., mit Wandreibung; - · - · mit Zwei-Wege-Koppl., ohne Wandreibung; · - · - mit Zwei-Wege-Koppl., mit Wandreibung.

deutung gewinnen und den Effekt der Partikel-Wand-Wechselwirkung abschwächen.

Aufgrund dieser Beobachtungen für die mittlere Geschwindigkeit liegt die Vermutung nahe, dass auch bei den Partikelgeschwindigkeitsschwankungen der Trend, der für die niedrigere Massenbeladung festgestellt worden ist, fortgesetzt wird. Die in Abb. 6.12(b) dargestellten horizontalen Schwankungen aus den Simulationen sind jedoch nicht so gleichmäßig, wie es zum einen das Experiment, aber auch die Simulationsdaten für  $\eta = 0,1$  gezeigt haben. Weil alle vier Kurven im qualitativen Verlauf ähnlich sind, wird der transversale Partikelimpulstransport hier zu niedrig sein, um eine Homogenisierung der horizontalen Schwankungen zu erwirken. Der Einfluss der Zwei-Wege-Kopplung ist auch bei den horizontalen Schwankungen wegen der höheren Massenbeladung größer: Durch die von den Partikeln hervorgerufene Turbulenzdämpfung in der Trägerströmung werden auch die Partikelschwankungen kleiner. Bei Berücksichtigung der Reibung zwischen den Partikeln und den Kanalwänden erfolgt im Gegenzug eine Erhöhung der hori-



### 6.3. Einfluss der Reibung bei Partikel-Wand-Kollisionen

zontalen Schwankungen, was ebenfalls den bei der Analyse bisher gemachten Erfahrungen entspricht.

Die vertikalen Geschwindigkeitsschwankungen der Partikel (Abb. 6.12(c)) sind sowohl im Versuch als auch in den Simulationen über den gesamten Kanalquerschnitt hinweg konstant. Wie schon bei der niedrigen Massenbeladung sind die Simulationsergebnisse trotz Berücksichtigung der Partikel-Partikel-Kollisionen um etwa 50% kleiner als die Versuchsdaten. Auch hier kann aus den gleichen Gründen wie bei den horizontalen Fluktuationen eine Schwankungsreduktion durch die Zwei-Wege-Kopplung und eine Schwankungserhöhung bei Wandreibung beobachtet werden. Weil die Änderungen in diesem Falle aber wesentlich geringer ausfallen als bei den horizontalen Schwankungen, bleibt es bei den von den Simulationen um etwa 50% zu niedrig vorhergesagten wandnormalen Partikelschwankungen. Dies ist insofern bemerkenswert, weil diese Differenz nahezu unabhängig von der Massenbeladung zu sein scheint. Als direkte Konsequenz daraus zeigen die simulierten Konzentrationsprofile in Abb. 6.12(d) eine bevorzugte Ablagerung der Partikel in der Nähe der unteren Wand, was in den Referenzdaten, die eine nahezu gleichmäßige Partikelverteilung in der unteren Kanalhälfte zeigen, nicht bestätigt wird.

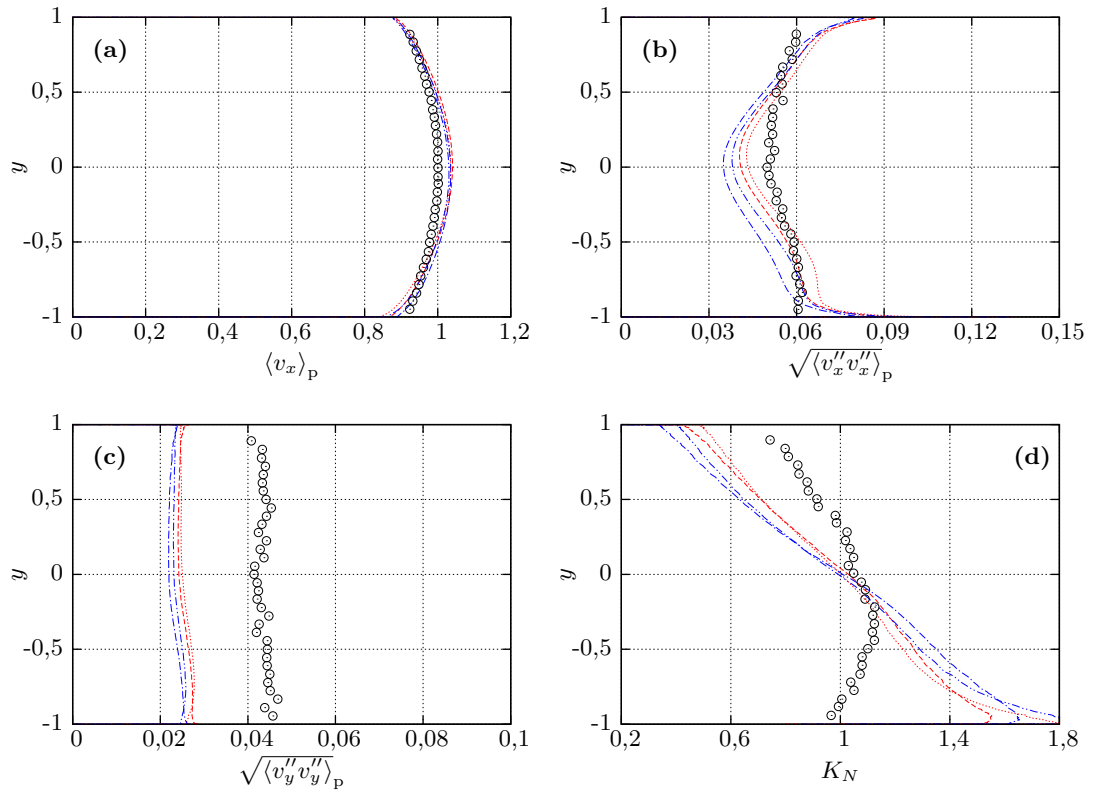
Auch bei den Geschwindigkeitsschwankungen und der Partikelkonzentration kann im Vergleich zum Verlauf dieser Größen bei  $\eta = 0,1$  beobachtet werden, dass die Auswirkungen der Wandreibung mit steigender Massenbeladung weniger ausgeprägt werden. Der Grund hierfür wurde bereits für die mittlere Geschwindigkeit diskutiert und liegt in den Partikel-Partikel-Kollisionen, die mit wachsender Partikelanzahl überproportional an Bedeutung gewinnen. Es ist deshalb zu erwarten, dass bei  $\eta = 1,0$  der Effekt reibungsbehafteter Partikel-Wand-Kollisionen noch geringer ausfällt.

Bei der Analyse der Simulationsergebnisse für die höchste Massenbeladung von  $\eta = 1,0$  in Abb. 6.13 kommen somit im Wesentlichen keine neuen Erkenntnisse hinzu: Durch die Zwei-Wege-Kopplung werden die horizontalen und vertikalen Schwankungsgeschwindigkeiten verringert und die mittlere Geschwindigkeit der Partikel im unteren Kanalbereich etwas höher, während die reibungsbehafteten Partikel-Wand-Kollisionen im Gegenzug für eine Erhöhung der Schwankungen sorgen und die Partikel besonders in der unteren Kanalhälfte abbremsen. Wie erwartet, sind die Auswirkungen der Wandreibung bei dieser Massenbeladung etwas geringer als bei  $\eta = 0,5$ . Generell ist vor allem der Einfluss der Zwei-Wege-Kopplung wegen der größeren Partikelanzahl noch stärker als bei der geringeren Massenbeladung. Trotz der Berücksichtigung von Partikel-Wand-Reibung und Partikel-Partikel-Kollisionen ist der transversale Transport von Partikelimpuls auch bei  $\eta = 1,0$  zu gering. Dies machen wieder insbesondere die Verläufe der wandnormalen Schwankungen deutlich, die auch hier nur etwas mehr als die Hälfte der Versuchsdaten betragen. Die vermeintliche Ursache für diese großen Abweichungen vom Experiment liegt mit großer Wahrscheinlichkeit in den bisher nicht berücksichtigten Wandrauheitseffekten.

#### 6.3.2. Kontinuierliche Phase

Für die Analyse der kontinuierlichen Phase werden diejenigen Simulationen herangezogen, die mit aktivierter Zwei-Wege-Kopplung durchgeführt worden sind. Weil bei ausge-

## 6. Auswertung der Simulationen

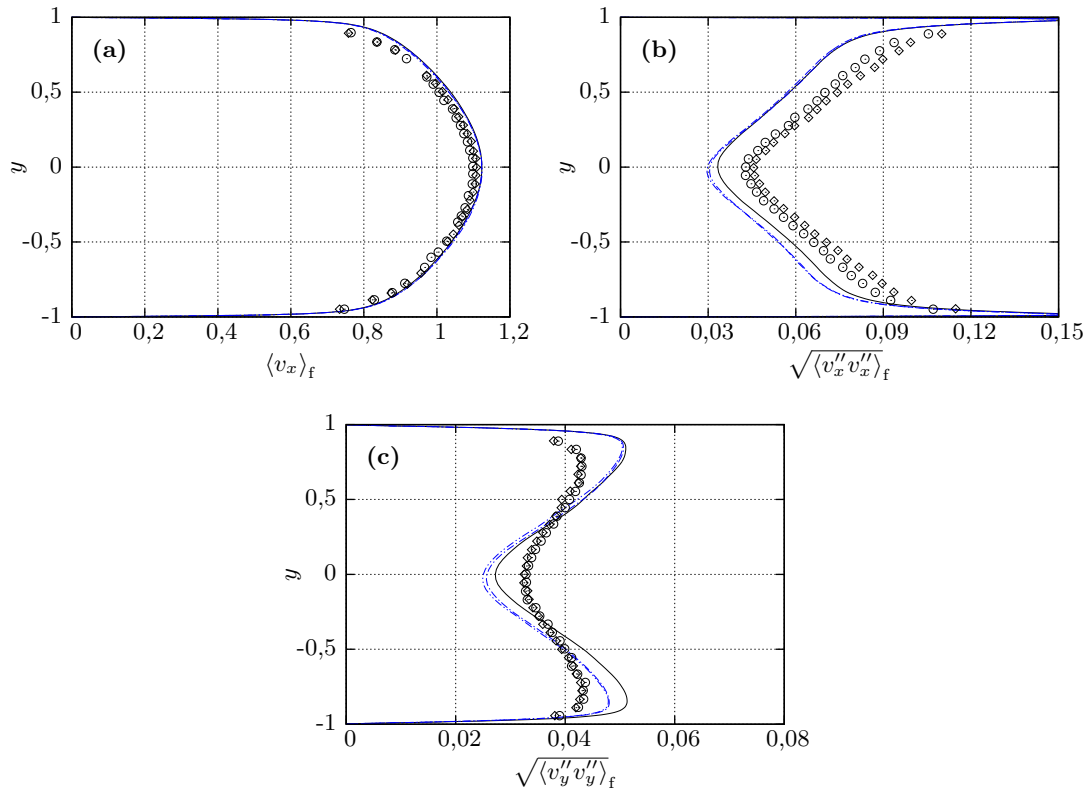


**Abbildung 6.13.:** Einfluss der Wandreibung auf die Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofile der Partikel bei  $\eta = 1,0$  mit Berücksichtigung der Partikel-Partikel-Kollisionen.  $\circ$  (Kussin, 2004, R1); - - - ohne Zwei-Wege-Koppl., ohne Wandreibung; ····· ohne Zwei-Wege-Koppl., mit Wandreibung; - · - · mit Zwei-Wege-Koppl., ohne Wandreibung; · - · - mit Zwei-Wege-Koppl., mit Wandreibung.

schalteter Zwei-Wege-Kopplung keine Modifikation der Trägerströmung durch die Partikel auftreten kann, sind diese Ergebnisse identisch mit denen der unbeladenen Strömung und werden aus diesem Grund hier nicht weiter berücksichtigt. Übrig bleiben damit für jede Massenbeladung insgesamt vier Vergleichsfälle, zwei davon ohne Berücksichtigung der Partikel-Partikel-Kollisionen und die anderen zwei mit (Vier-Wege-Kopplung). Wie bereits im Zuge der Ergebnisanalyse für die disperse Phase festgestellt worden ist, sind die Fälle ohne Partikel-Partikel-Kollisionen nicht sehr realitätsnah, weshalb auch diese Resultate der Übersichtlichkeit halber nicht in die folgenden Untersuchungen mit einbezogen werden sollen.

Abb. 6.14 zeigt die von Kussin (2004) gemessenen und die aus den Simulationen stammenden Geschwindigkeitsstatistiken der kontinuierlichen Phase bei der niedrigsten simulierten Massenbeladung von  $\eta = 0,1$ . Die beiden blauen Kurven stellen jeweils die Simulationsergebnisse der beladenen Strömung bei Partikel-Wand-Kollisionen mit und ohne

### 6.3. Einfluss der Reibung bei Partikel-Wand-Kollisionen



**Abbildung 6.14.:** Einfluss der Wandreibung auf die Geschwindigkeitsprofile der kontinuierlichen Phase bei  $\eta = 0,1$ , Vier-Wege-Kopplung.  $\diamond$  unbeladen (Kussin, 2004, R1);  $\circ$  (Kussin, 2004, R1); — unbeladen; - - - ohne Wandreibung; - · - · mit Wandreibung.

Reibung und Berücksichtigung der interpartikulären Kollisionen dar. Darüber hinaus sind in Abb. 6.14 die Simulations- und Messdaten der unbeladenen Strömung abgebildet, um einen direkten Vergleich zwischen der Einphasen- und der Zweiphasenströmung zu erhalten.

Zunächst werden die Profile der mittleren Fluidgeschwindigkeit in Abb. 6.14(a) betrachtet: Dort ist zu sehen, dass in den Simulationen bei dieser niedrigen Massenbeladung kaum ein Unterschied zwischen der beladenen und der unbeladenen Strömung besteht, was auf die niedrige Partikelanzahl und die damit verbunden gering ausfallende Turbulenzmodifikation durch die Partikel zurückzuführen ist. Dies wird auch durch die Referenzdaten bestätigt, bei denen ebenfalls nur eine minimale Änderung der mittleren Strömungsgeschwindigkeit festgestellt werden kann, wenn der Strömung Partikel zugesetzt werden. Auch der Reibungseinfluss zwischen Partikeln und Wand ist auf die zeitlich gemittelte Trägerströmung nur minimal, was ebenfalls mit der niedrigen Massenbeladung begründet werden kann. Die Wirkung der Zwei-Wege-Kopplung ist bei dieser niedrigen Massenbeladung also zu gering, als dass die Auswirkung reibungsbehaftete

## 6. Auswertung der Simulationen

ter Partikel-Wand-Kollisionen einen nennenswerten Einfluss auf die zeitlich gemittelte Trägerströmung haben könnte.

Vergleicht man die Änderung der turbulenten Geschwindigkeitsschwankungen bei beladener und unbeladener Strömung in Abb. 6.14(b) und (c), so ist zu erkennen, dass die Zwei-Wege-Kopplung dort deutlich ausgeprägter ist als bei der mittleren Strömung. Dies hängt in erster Linie damit zusammen, dass die Partikel einen direkten Effekt auf die Turbulenz und damit auf die turbulenten Schwankungen der Trägerströmung haben, was die mittlere Strömung aber nur mittelbar beeinflusst. Aus den Simulationsergebnissen ist ersichtlich, dass die Turbulenzintensität durch die Partikel verringert wird, das heißt die Geschwindigkeitsschwankungen der Strömung nehmen im Vergleich zum unbeladenen Fall ab. Diese Feststellung wird auch anhand der Versuchsdaten von Kussin (2004) bestätigt und deckt sich ebenso mit den Beobachtungen, die bereits für die Geschwindigkeitsschwankungen der Partikelphase angestellt worden sind.

Die simulierten horizontalen Schwankungen in Abb. 6.14(b) nehmen in der unteren Kanalhälfte nahezu unabhängig davon, ob die Wandreibung für die Partikel berücksichtigt wird oder nicht, um etwa den gleichen Betrag ab wie in den Versuchsdaten. Die Wirkung der Zwei-Wege-Kopplung wird bezüglich dieser statistischen Größe von den Simulationen also sehr gut wiedergegeben. In der oberen Kanalhälfte werden diese Schwankungen bei den Simulationen – entgegen der Beobachtung im Experiment – jedoch kaum gedämpft, was auf den Schwerkrafteinfluss und die bei den Simulationen auftretende zu niedrige Partikelkonzentration in der oberen Kanalhälfte zurückzuführen ist. Warum die simulierten Geschwindigkeitsschwankungen in Strömungsrichtung in dieser Darstellung generell niedriger sind als im Experiment, ist in Abschnitt 6.2 bereits für die unbeladene Strömung begründet worden.

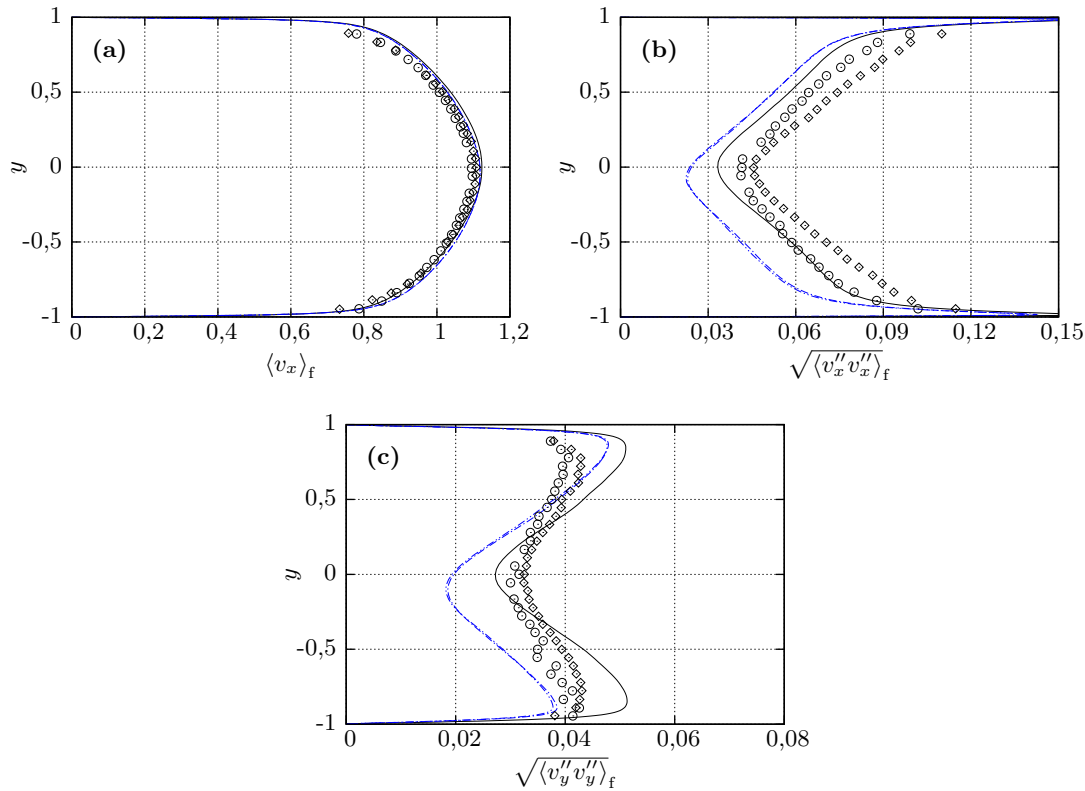
Bei den wandnormalen Schwankungen in Abb. 6.14(c) kann Ähnliches festgestellt werden: In den Simulationen ist auch hier die Turbulenzdämpfung durch die erhöhte Partikelkonzentration im unteren Kanalbereich am größten, während die wandnormalen Schwankungen der Strömung in der oberen Hälfte kaum von den Partikeln beeinflusst werden. Interessanterweise lassen die Versuchsdaten erkennen, dass die Zwei-Wege-Kopplung für diese Schwankungen wesentlich geringer ausfällt als bei den Schwankungen in Strömungsrichtung.<sup>14</sup> Also wird das Ausmaß der Turbulenzdämpfung von den Simulationen stark überschätzt und kann trotz der Berücksichtigung reibungsbehafteter Partikel-Wand-Kollisionen die Referenzdaten nicht reproduzieren. Überhaupt ist der Einfluss der Wandreibung, wie den Abbildungen 6.14(b) und (c) entnommen werden kann, auf die turbulenten Schwankungen der Trägerströmung eher vernachlässigbar klein. Von daher scheinen sich die Auswirkungen des neuen Partikel-Wand-Modells nur sehr schwach auf die kontinuierliche Phase zu übertragen. Das liegt daran, dass die Trägerströmung nur indirekt von der Partikel-Wand-Reibung beeinflusst wird und die disperse Phase, die von diesem Modell unmittelbar betroffen ist, weitaus größere Veränderungen erfährt.

Die Simulationsergebnisse für die kontinuierliche Phase bei einer höheren Massenbeladung von  $\eta = 0,5$  sind zusammen mit den entsprechenden Messdaten von Kussin (2004)

---

<sup>14</sup>Es ist sogar eine leichte Erhöhung der vertikalen Schwankungen zu erkennen, die jedoch wahrscheinlich im Bereich der Messgenauigkeit liegt.

### 6.3. Einfluss der Reibung bei Partikel-Wand-Kollisionen

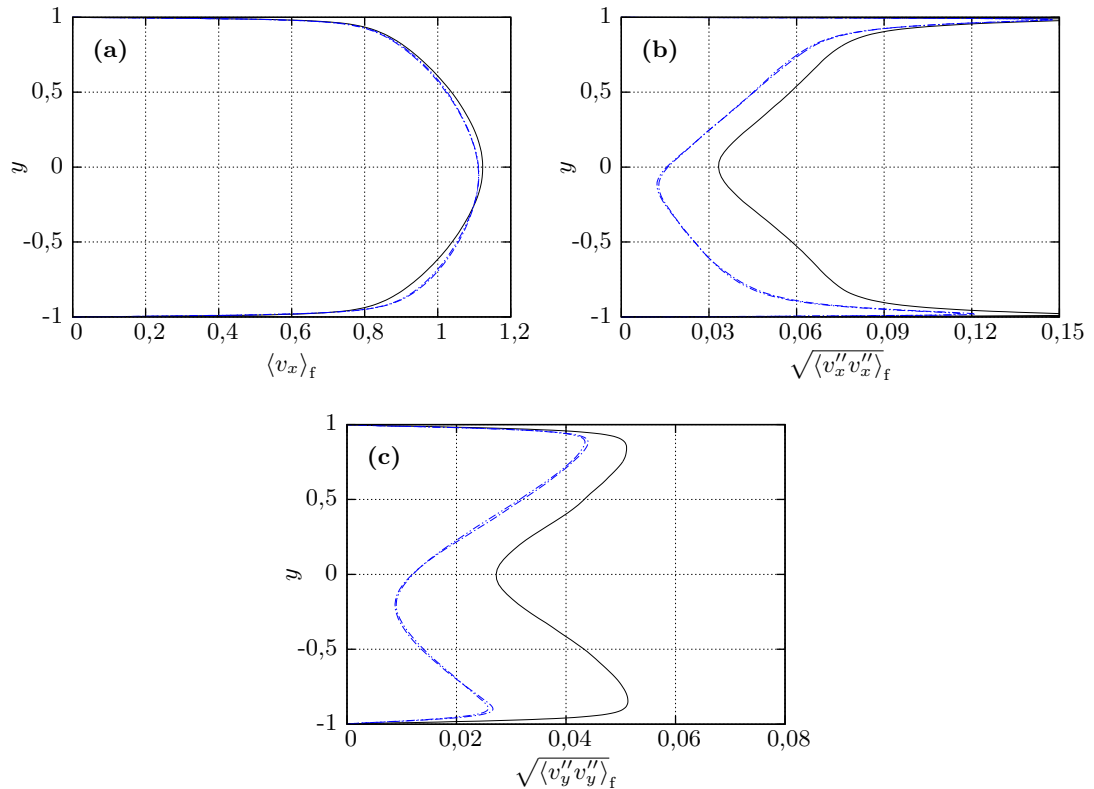


**Abbildung 6.15.:** Einfluss der Wandreibung auf die Geschwindigkeitsprofile der kontinuierlichen Phase bei  $\eta = 0,5$ , Vier-Wege-Kopplung.  $\diamond$  unbeladen (Kussin, 2004, R1);  $\circ$  (Kussin, 2004, R1); — unbeladen; - - - ohne Wandreibung; - · - · mit Wandreibung.

in Abb. 6.15 dargestellt. Auch hier finden sich zum direkten Vergleich ebenfalls wieder die Versuchs- und Simulationsdaten für die unbeladene Strömung.

Schon anhand der mittleren Geschwindigkeitsprofile in Abb. 6.15(a) ist zu erkennen, dass durch die Verfünfachung der Massenbelastung die Modifikation der Trägerströmung durch die Partikel deutlich ausgeprägter ist. Wie auch die Versuchsdaten zeigen, ist die mittlere Geschwindigkeit der beladenen Trägerströmung in der Nähe der unteren Wand etwas höher als im unbeladenen Fall, während es im oberen Kanalbereich größtenteils umgekehrt ist. Außerdem ist im direkten Vergleich mit den Versuchsdaten zu sehen, dass die Änderung der mittleren Strömung im beladenen Fall bei den Simulationen ein wenig zu stark ausfällt. Der Grund hierfür kann in den Geschwindigkeitsschwankungen (Abb. 6.15(b) und (c)) gefunden werden: Wie in den Versuchsdaten verringern sich diese durch die Dämpfungswirkung der Partikel zwar, aber diese Turbulenzdämpfung fällt in den Simulationen bei den horizontalen Schwankungen im unteren und mittleren Kanalbereich zu hoch sowie in der oberen Hälfte zu niedrig aus. Die wandnormalen Schwankungen werden dagegen fast über den gesamten Kanalquerschnitt hinweg zu stark

## 6. Auswertung der Simulationen



**Abbildung 6.16.:** Einfluss der Wandreibung auf die Geschwindigkeitsprofile der kontinuierlichen Phase bei  $\eta = 1,0$ , Vier-Wege-Kopplung. — unbeladen; - - - ohne Wandreibung; - · - · mit Wandreibung.

gedämpft.

Hinsichtlich der Wandreibung kann in Abb. 6.14 für alle dargestellten Größen festgestellt werden, dass auch bei einer Massenbelastung von  $\eta = 0,5$  kaum eine Auswirkung der reibungsbehafteten Partikel-Wand-Kollisionen auf die kontinuierliche Phase zu verzeichnen ist. In der Tat wurde bei der Analyse der dispersen Phase bereits erläutert, dass der Wandeinfluss mit steigender Massenbelastung immer geringer wird, und der Vergleich mit Abb. 6.14 zeigt, dass bei  $\eta = 0,5$  die Differenzen zwischen den beiden blauen Kurven wesentlich geringer sind.

Für die höchste Massenbelastung von  $\eta = 1,0$  sind in Abb. 6.16 lediglich die Simulationsergebnisse dargestellt, weil Kussin (2004) für diesen Fall leider keine Messdaten der kontinuierlichen Phase veröffentlicht hat. Anhand der Daten aus den Simulationen lässt sich jedoch ableiten, dass die für die beiden niedrigeren Massenbelastungen gezogenen Schlüsse auch in diesem Fall gültig sind: So ist zu erkennen, dass die Turbulenzdämpfung noch stärker ausfällt als in den beiden anderen Fällen. Ebenso ist aber zu erwarten, dass die Turbulenzmodifikation in den Simulationen wieder zu hoch ist, weil die mittlere Geschwindigkeit der Partikel in Abb. 6.13(a) von den Simulationen auch bei  $\eta = 1,0$

überschätzt wird und die Partikel-Reynolds-Zahl damit wahrscheinlich kleiner sein wird als in den Versuchen. Weil die Partikel-Partikel-Kollisionen für diese Massenbeladung noch dominanter sind, ist der Wandreibungseinfluss auf die kontinuierliche Phase hier noch kleiner als bei  $\eta = 0,5$ . Tatsächlich sind die beiden blauen Kurven in allen Darstellung von Abb. 6.16 fast deckungsgleich.

#### 6.3.3. Zusammenfassung der gewonnenen Erkenntnisse

In den beiden vorherigen Abschnitten wurden die Simulationsergebnisse bei Partikel-Wand-Kollisionen mit und ohne Reibung eingehend analysiert und mit den Referenzdaten verglichen. Zusätzlich dazu wurden noch zwei andere Faktoren, die Berücksichtigung von Partikel-Partikel-Kollisionen und die Zwei-Wege-Kopplung, untersucht und dabei einige interessante Erkenntnisse gewonnen, die im Folgenden zusammenfassend aufgeführt werden sollen.

Die Berücksichtigung von Partikel-Partikel-Kollisionen stellte sich selbst bei der niedrigsten Massenbeladung als unverzichtbar heraus, um realitätsnahe Ergebnisse für die partikelbeladene Kanalströmung zu erzielen. Im Vergleich mit den Versuchsdaten konnte aber festgestellt werden, dass die Simulationen für die disperse Phase trotz der mit einbezogenen Partikel-Partikel-Kollisionen einen zu niedrigen Impulsaustausch in transversaler Richtung voraussagen und daraus unmittelbar die Abweichungen von den Messdaten (insbesondere bei den wandnormalen Schwankungen und der Konzentration) resultieren. Als Ursache für diese deutlichen Diskrepanzen zwischen den Simulationen und der Referenz wird die fehlende Berücksichtigung der rauen Kanalwände vermutet. Auf die kontinuierliche Phase wirken die Partikel in den Simulationen wie im Experiment turbulenzdämpfend. Dieser Effekt ist umso ausgeprägter, je größer die Massenbeladung ist, was von den Experimenten bestätigt wird. Es wurde aber ebenso festgestellt, dass die Turbulenzdämpfung der Partikel von den Simulationen als viel zu stark vorhergesagt wird.

Die Berücksichtigung der Wandreibung bei den Partikel-Wand-Kollisionen hat im Allgemeinen einen durchweg positiven Effekt auf die Simulationsergebnisse. Bei der dispersen Phase erhöhen sich dadurch die horizontalen und vertikalen Schwankungen ein wenig, was zu einer leichten Abflachung der mittleren Geschwindigkeitsprofile führt. Trotzdem ist der Effekt vergleichsweise gering und wird mit steigender Massenbeladung wegen der dabei an Bedeutung gewinnenden Partikel-Partikel-Kollisionen zunehmend kleiner. Auf die kontinuierliche Phase hat die Partikel-Wand-Reibung dagegen kaum einen Einfluss.

Die Bilanz der in diesem Abschnitt durchgeführten Analyse ist also, dass die Simulation der partikelbeladenen Kanalströmung ohne jegliche Anwendung der in dieser Arbeit entwickelten Modelle die Referenzexperimente von Kussin (2004) nur unzureichend wiedergeben kann, selbst wenn die Partikel-Partikel-Kollisionen berücksichtigt werden. Bezieht man das in Abschnitt 4.1 entwickelte Modell für reibungsbehaftete Partikel-Wand-Kollisionen mit ein, so ist zwar eine leichte Verbesserung der Resultate zu verzeichnen, eine zufriedenstellende Reproduktion der Versuchsdaten kann hiermit aber nicht erzielt werden. Die Wandreibung allein reicht demnach nicht aus, um den Transport von Partikelimpuls in wandnormaler Richtung zu erhöhen.

## 6.4. Einfluss der Reibung bei Partikel-Partikel-Kollisionen

Nachdem im vorigen Abschnitt gezeigt wurde, dass die Berücksichtigung der Reibung bei den Partikel-Wand-Kollisionen mit zunehmender Anzahl an Partikeln im Strömungsfeld an Bedeutung verliert, ist es interessant, als nächsten Schritt auch die reibungsbehafteten Partikel-Partikel-Kollisionen über das Modell aus Abschnitt 4.2 in die Simulationen mit einzubeziehen. Zur genaueren Analyse werden auch hier wieder die Resultate für Partikel und Trägerströmung getrennt betrachtet und ein Vergleich mit den Referenzmessdaten angestellt. Im Anschluss daran erfolgt wieder eine kurze Zusammenfassung der bei der Untersuchung gesammelten Eindrücke mit einer Bewertung der Relevanz und der besonderen Einflüsse dieses Modells.

In die im Folgenden aufgeführten Simulationen wurden neben den reibungsbehafteten Partikel-Partikel-Kollisionen auch die im vorigen Abschnitt analysierten Partikel-Wand-Kollisionen mit Reibungseinfluss einbezogen. Die Wandrauheit wurde für diese Untersuchung jedoch immer noch nicht berücksichtigt. Weil damit zu rechnen ist, dass die rauen Kanalwände einen großen Einfluss auf die partikelbeladene Strömung haben, soll an dieser Stelle nochmals betont werden, dass die zu erwartenden Übereinstimmungen zwischen Referenz und Simulationen auch in diesem Fall nicht gut sein werden. Dennoch ist die Diskussion dieser Simulationsergebnisse sinnvoll, da es in erster Linie darum geht, die relative Änderung durch die zusätzliche Berücksichtigung von reibungsbehafteten Partikel-Partikel-Kollisionen zu beurteilen, bevor im nächsten Abschnitt dann das Wandrauheitsmodell hinzugeschaltet wird. Weil hier das Kollisionsmodell für reibungsbehaftete Partikel-Partikel-Kollisionen untersucht werden soll, sind alle Simulation mit aktivierter Kollisionsbehandlung für die disperse Phase durchgeführt worden.

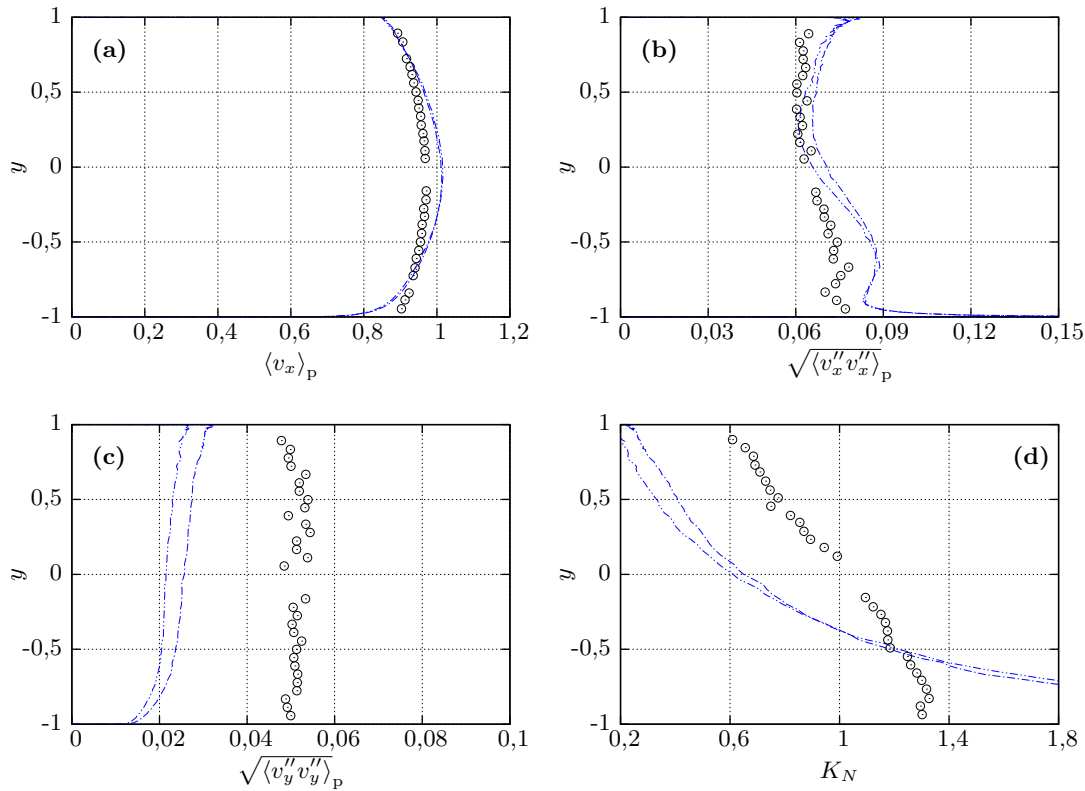
### 6.4.1. Disperse Phase

Als erstes werden wieder die Simulationsergebnisse für die disperse Phase untersucht, weil auch in diesem Fall die Partikel unmittelbar betroffen sind und deshalb die größten Veränderungen zu erwarten sind. Begonnen wird mit der niedrigsten Massenbeladung ( $\eta = 0,1$ ), für die in Abb. 6.17 die Simulationsergebnisse und die Referenzdaten aus Kussin (2004) dargestellt sind. Weil in Abschnitt 6.3.1 bereits ausführlich auf den Effekt der Zwei-Wege-Kopplung auf die disperse Phase eingegangen worden ist, werden der Übersichtlichkeit halber die Simulationsergebnisse, in denen dieser Mechanismus deaktiviert worden ist, in den folgenden Darstellungen nicht mehr mit abgebildet. Dementsprechend sind alle folgenden Simulationsergebnisse mit Berücksichtigung der vollen Vier-Wege-Kopplung entstanden.

Auf die mittlere Partikelgeschwindigkeit in Abb. 6.17(a) ist der Reibungseinfluss bei den Partikel-Partikel-Kollisionen wegen der für  $\eta = 0,1$  geringen Partikelzahl eher zu vernachlässigen, denn dort sind keine signifikanten Änderungen zu erkennen. Bei den Partikelgeschwindigkeitsschwankungen dagegen ist ein Einfluss des Modells für reibungsbehaftete Partikel-Partikel-Kollisionen zu beobachten: Die horizontalen Partikelgeschwindigkeitsschwankungen (Abb. 6.17(b)) werden durch die Reibung zwischen den Partikeln in erster Linie im oberen Kanalbereich abgeschwächt, während sie weiter unten annähernd



#### 6.4. Einfluss der Reibung bei Partikel-Partikel-Kollisionen



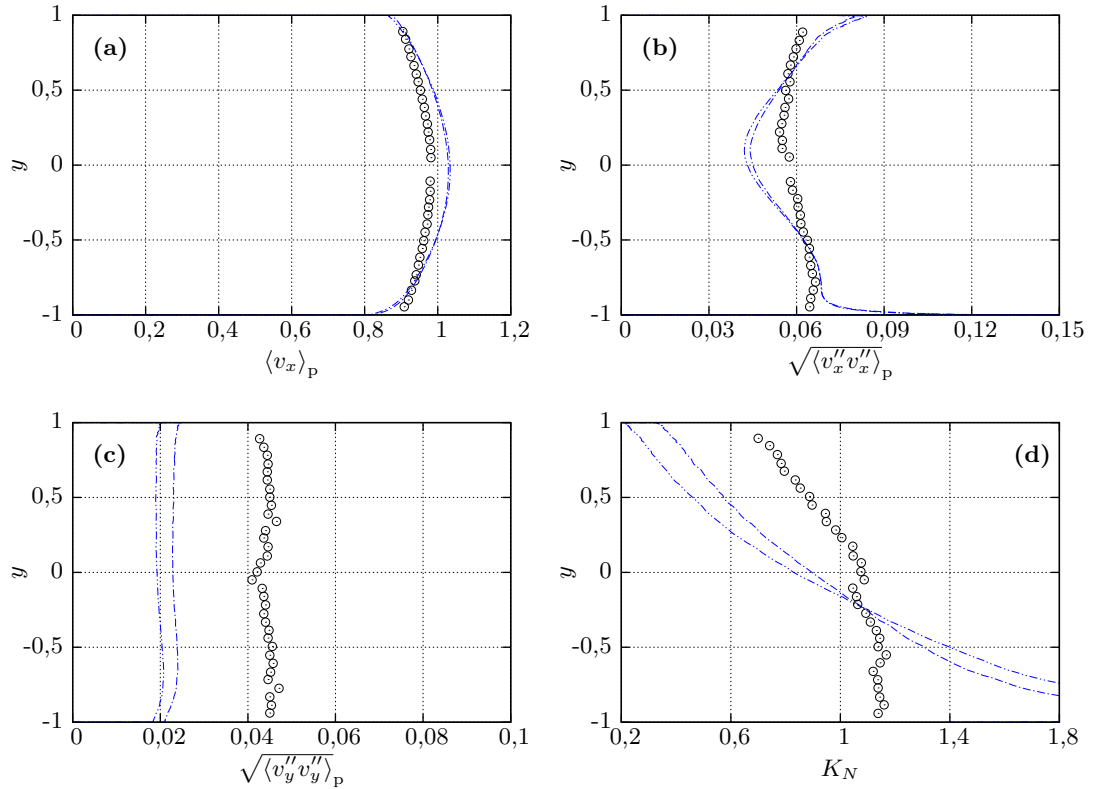
**Abbildung 6.17.:** Einfluss reibungsbehafteter Partikel-Partikel-Kollisionen auf die Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofile der Partikel bei  $\eta = 0,1$ , Vier-Wege-Kopplung.  $\circ$  (Kussin, 2004, R1);  $-\cdot-\cdot-$  ohne Partikelreibung;  $-\cdot-\cdot-$  mit Partikelreibung.

unbeeinflusst sind. Eine Abschwächung der horizontalen Schwankungen ist in diesem Fall erwünscht, da diese Größe durch die Wandreibung bei den Simulationen als zu hoch vorausgesagt worden ist. Für die wandnormalen Schwankungen in Abb. 6.17(c) ist ebenfalls eine deutliche Schwankungsdämpfung zu beobachten, welche jedoch nicht im Einklang mit den Referenzdaten steht und den positiven Effekt durch die Wandreibung revidiert. Als direkte Konsequenz daraus verteilen sich die Partikel etwas inhomogener im Kanal und die Partikel konzentrieren sich bei aktivierter Partikel-Partikel-Reibung stärker in der Nähe der unteren Kanalwand (Abb. 6.17(d)).

Zur Erklärung dieser im Vergleich zum reibungsfreien Fall ausschließlich schwankungsdämpfenden Wirkung reibungsbehafteter Partikel-Partikel-Kollisionen kann die folgende Überlegung angestellt werden: Die Reibung zwischen den Partikeln führt zu einem Verlust an kinetischer Gesamtenergie beider Kollisionspartner, was eine verringerte Relativgeschwindigkeit zwischen den beiden Teilchen nach sich ziehen kann.<sup>15</sup> Kleinere

<sup>15</sup>Zu einer Verringerung der stoßnormalen Relativgeschwindigkeit führt außerdem der Restitutionskoeffizient  $e_{n,p}$ . Da dieser aber sowohl im reibungsfreien als auch im reibungsbehafteten Kollisionsmodell

## 6. Auswertung der Simulationen



**Abbildung 6.18.:** Einfluss reibungsbehafteter Partikel-Partikel-Kollisionen auf die Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofile der Partikel bei  $\eta = 0,5$ , Vier-Wege-Kopplung.  $\circ$  (Kussin, 2004, R1);  $-\cdot-\cdot-$  ohne Partikelreibung;  $-\cdot-\cdot-$  mit Partikelreibung.

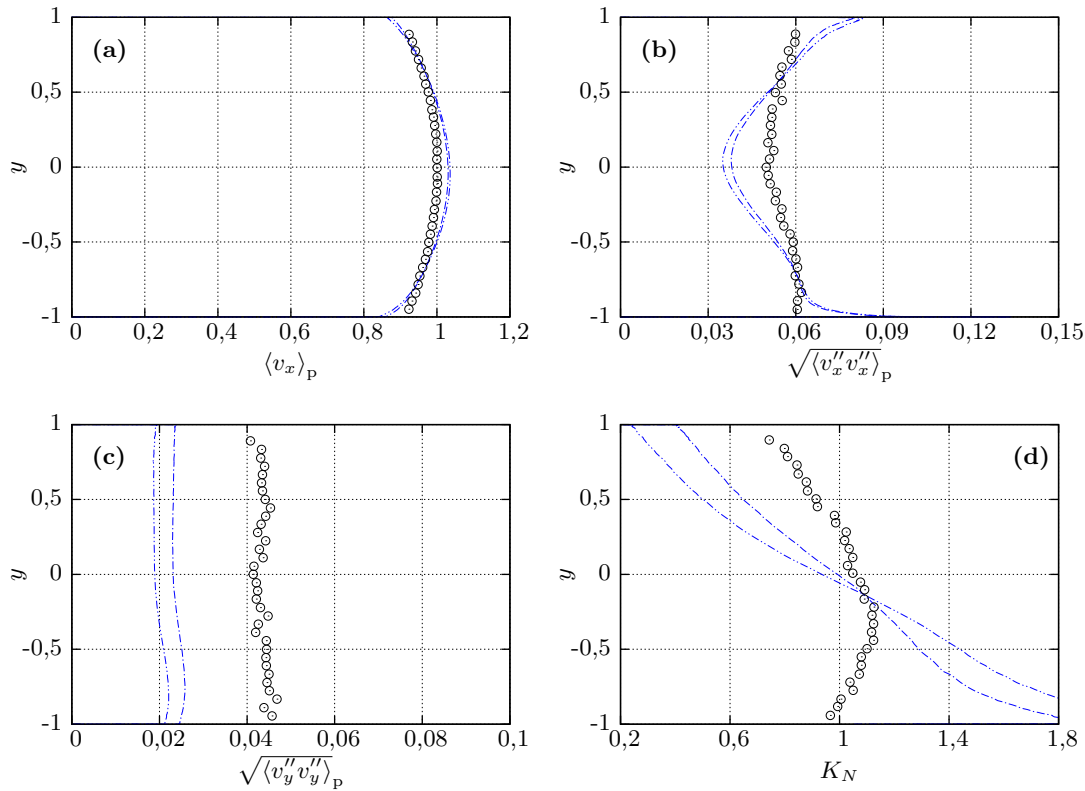
Relativgeschwindigkeiten bedeuten aber, dass die Stoßkräfte, die die Partikeltrajektorien entscheidend beeinflussen, bei der nächsten Kollision geringer ausfallen können. Die wandnormalen Komponenten der somit reduzierten Stoßkräfte können der Gravitation weniger entgegensetzen, was den transversalen Partikelimpulstransport und somit die wandnormalen Geschwindigkeitsschwankungen der Partikel vermindert und zu der erhöhten Konzentration im unteren Kanalbereich führt.

Abb. 6.18 zeigt die Simulationsergebnisse und Messdaten der dispersen Phase für die Massenbeladung  $\eta = 0,5$ . Der Einfluss der Partikelreibung auf die mittlere Geschwindigkeit der Partikel (Abb. 6.18(a)) ist hier etwas größer als bei der niedrigsten Massenbeladung, was auf die erhöhte Partikel-Partikel-Kollisionsrate zurückgeführt werden kann. In diesem Fall werden die mittleren Geschwindigkeitsprofile durch den reduzierten Partikelimpulsaustausch in wandnormaler Richtung bei Berücksichtigung der reibungsbehafteten Kollisionen etwas spitzer.

---

berücksichtigt wird, ist hier allein der Einfluss der anderen drei Modellparameter ( $e_{t,p}$ ,  $\mu_{0,p}$  und  $\mu_p$ ) sichtbar.

#### 6.4. Einfluss der Reibung bei Partikel-Partikel-Kollisionen

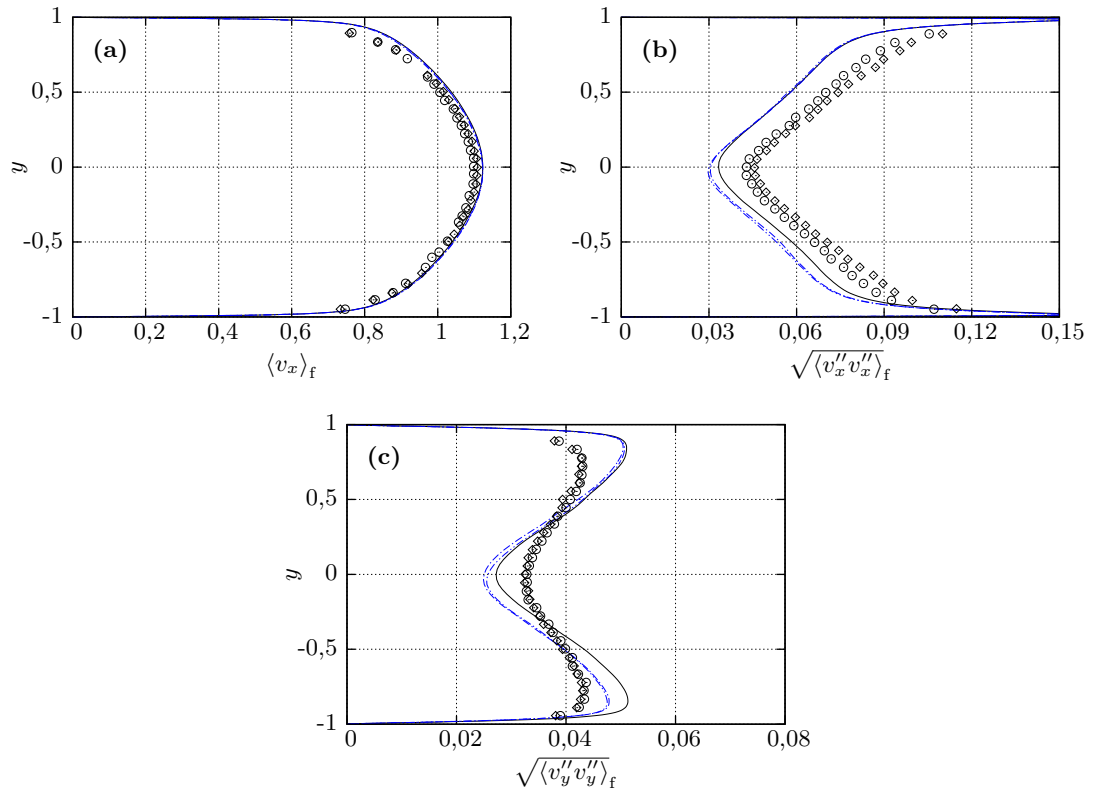


**Abbildung 6.19.:** Einfluss reibungsbehafteter Partikel-Partikel-Kollisionen auf die Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofile der Partikel bei  $\eta = 1,0$ , Vier-Wege-Kopplung.  $\circ$  (Kussin, 2004, R1);  $-\cdot-\cdot-$  ohne Partikelreibung;  $-\cdot-\cdot-$  mit Partikelreibung.

Für die Partikelgeschwindigkeitsschwankungen in Abb. 6.18(b) und (c) ist Ähnliches wie bei  $\eta = 0,1$  festzustellen: Das Minimum der simulierten horizontalen Partikelgeschwindigkeitsschwankungen wird durch die Partikelreibung etwas ausgeprägter, weshalb die Simulation auch bei der Berücksichtigung reibungsbehafteter Partikel-Partikel-Kollisionen den in den Referenzdaten nahezu konstanten Verlauf der horizontalen Fluktuationen nicht reproduzieren können. Die wandnormalen Schwankungen verringern sich durch die von der Partikelreibung verursachte Reduktion der Partikelrelativgeschwindigkeiten deutlich um nahezu konstant 20%, was auch in diesem Fall den positiven Auswirkungen der reibungsbehafteten Partikel-Wand-Kollisionen entgegenwirkt. Anhand der Konzentrationsverteilungen in Abb. 6.18(d) ist zu sehen, dass dies erwartungsgemäß unmittelbar zu einer Konzentrationserhöhung nahe der unteren Kanalwand führt.

Schließlich wird der Reibungseinfluss bei den Partikel-Partikel-Kollisionen für die höchste Massenbeladung von  $\eta = 1,0$  in Abb. 6.19 betrachtet: Erwartungsgemäß kann in Abb. 6.19(a) eine Zuspitzung der mittleren Geschwindigkeitsprofile bei Berücksichtigung der Partikelreibung festgestellt werden. Die Partikelgeschwindigkeitsschwankungen

## 6. Auswertung der Simulationen



**Abbildung 6.20.:** Einfluss reibungsbehafteter Partikel-Partikel-Kollisionen auf die Geschwindigkeitsprofile der kontinuierlichen Phase bei  $\eta = 0,1$ , Vier-Wege-Kopplung.  $\diamond$  unbeladen (Kussin, 2004, R1);  $\circ$  (Kussin, 2004, R1); — unbeladen; - - - ohne Partikelreibung; - · - · mit Partikelreibung.

(Abb. 6.19(b) und (c)) werden, wie ebenfalls erwartet, gedämpft. Vor allem auf die wandnormalen Schwankungen ist ein starker Reibungseinfluss zu beobachten, was sich auf die Partikelkonzentrationen in Abb. 6.19(d) niederschlägt, die sich durch den Einfluss der Massenbeladung deutlicher als bei den anderen bisher betrachteten Fällen in Richtung der unteren Wand erhöhen.

### 6.4.2. Kontinuierliche Phase

Nach der Ergebnisauswertung für die disperse Phase folgt in diesem Unterabschnitt nun die Analyse der Trägerströmung. Wie schon in Abschnitt 6.3.2 werden auch hier lediglich die Ergebnisse aus den Simulationen mit aktivierter Zwei-Wege-Kopplung zum Vergleich herangezogen, da die Trägerströmung bei Ein-Wege-Kopplung von den Partikeln nicht modifiziert wird und somit identisch mit der unbeladenen Strömung ist.

Für den niedrig beladenen Fall mit  $\eta = 0,1$  sind die mittleren Geschwindigkeitsprofile und die Schwankungsstatistiken aus den Simulationen und dem Experiment in Abb. 6.20 aufgetragen. Bei dieser niedrigen Massenbeladung ist in Abb. 6.20(a) keine Veränderung

#### 6.4. Einfluss der Reibung bei Partikel-Partikel-Kollisionen

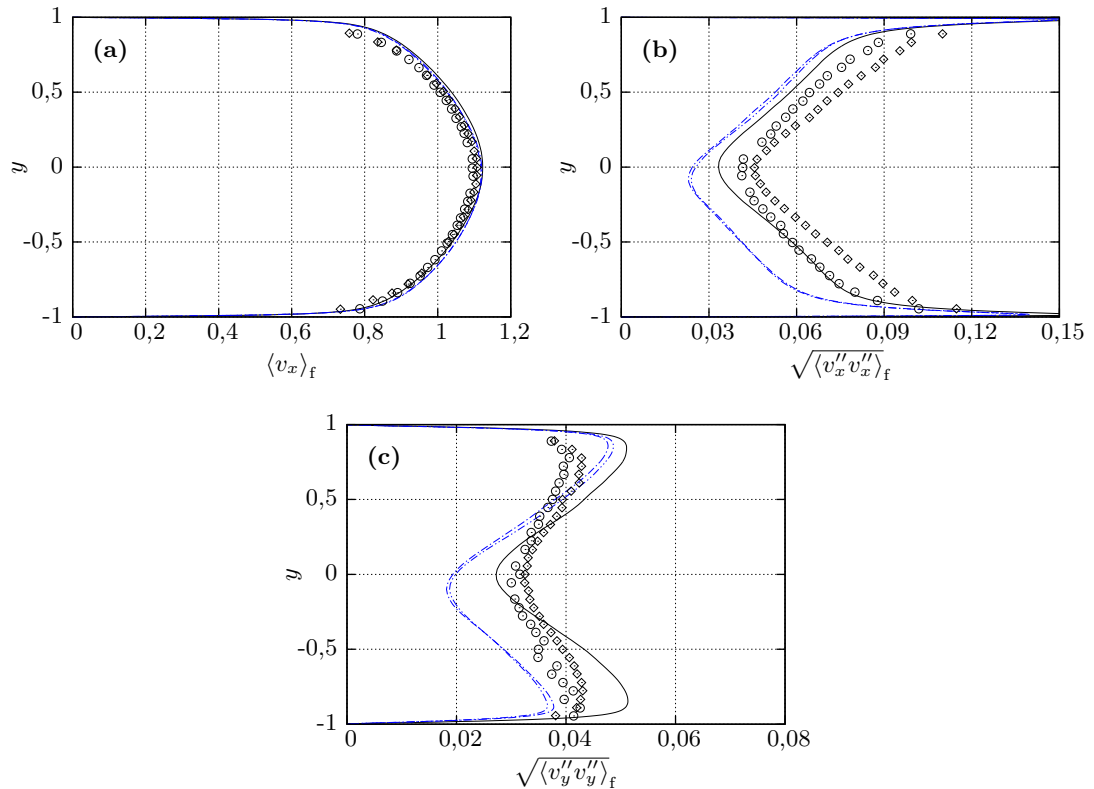
der mittleren Trägerströmungsgeschwindigkeit durch die Berücksichtigung der Partikelreibung zu erkennen. Da bereits der Unterschied zwischen der beladenen und der unbeladenen mittleren Strömung wegen der geringen Partikelanzahl vernachlässigbar klein ist, war auch kein nennenswerter Einfluss der reibungsbehafteten Partikel-Partikel-Kollisionen zu erwarten.

Bei den Geschwindigkeitsschwankungen der kontinuierlichen Phase in Abb. 6.20(b) und (c) ist dagegen ein leichter Effekt infolge der Partikelreibung zu verzeichnen: Die horizontalen Schwankungen der Trägerströmung werden in der unteren Kanalhälfte etwas stärker gedämpft und bleiben im oberen Kanalbereich unverändert. Dagegen werden die wandnormalen Schwankungen (Abb. 6.20(c)) in der oberen Kanalhälfte infolge der Partikelreibung fast gar nicht mehr abgeschwächt (was der Beobachtung im Experiment entspricht) und in der Nähe der unteren Kanalwand minimal stärker gedämpft. Dass bei den Geschwindigkeitsschwankungen im Kanal sowohl oben als auch unten ein Einfluss der reibungsbehafteten Partikel-Partikel-Kollisionen zu verzeichnen ist, kann mit der durch dieses Modell geänderten Partikelkonzentrationsverteilung erklärt werden: In der oberen Kanalhälfte sind durch den bei berücksichtigter Partikelreibung vergrößerten Gravitationseinfluss weniger Partikel vorhanden und der Turbulenzdämpfung über die Zwei-Wege-Kopplung fällt dort dementsprechend weniger Bedeutung zu. Auf der anderen Seite sind im unteren Kanalbereich mehr Partikel vorhanden und die Zwei-Wege-Kopplung ist in diesem Gebiet deshalb stärker präsent.

Dass vor allem die Konzentrationsverteilung der Partikel die treibende Kraft bei der Turbulenzmodifikationsänderung durch die Partikelreibung in der Trägerströmung ist, kann auch für die höheren Massenbeladungen festgestellt werden. Bei  $\eta = 0,5$  wurde in Abb. 6.18(d) für die disperse Phase festgestellt, dass die Partikelkonzentrationsverteilung deutlich inhomogener wird, wenn Reibung zwischen den Partikeln berücksichtigt wird. Für die kontinuierliche Phase ist in Abb. 6.21 bei  $\eta = 0,5$  zu erkennen, dass dies zwar keinen nennenswerten Einfluss auf die mittlere Geschwindigkeit (Abb. 6.21(a)) hat. Die turbulenten Geschwindigkeitsschwankungen werden aber – das lässt sich vor allem anhand der wandnormalen Schwankungen in Abb. 6.21(c) feststellen – wegen der durch die Partikelreibung modifizierten Partikelkonzentrationsverteilung oben stärker und unten weniger gedämpft.

Die gleiche Feststellung ist auch im Falle der höchsten Massenbeladung von  $\eta = 1,0$  zu machen, für die in Abb. 6.22 die Simulationsergebnisse dargestellt sind. Wegen der fehlenden Messergebnisse sind in diesen Darstellungen keine Referenzdaten aus Kussin (2004) vorhanden. Auf die mittlere Geschwindigkeit des Trägerfluids ist der Einfluss der Partikelreibung schon etwas größer als in den anderen beiden Fällen, was auf die in Abb. 6.22(b) und (c) sichtbare starke Modifikation der Fluidturbulenz zurückfällt. Weil die Zwei-Wege-Kopplung wegen der höheren Partikelanzahl hier einen sehr großen Einfluss hat und sich die Partikel bei  $\eta = 1,0$  mit berücksichtigter Partikelreibung noch stärker an der unteren Kanalwand konzentrieren (Abb. 6.19(d)), fallen die Änderungen der Schwankungen in der Trägerströmung durch die Berücksichtigung reibungsbehafteter Partikel-Partikel-Kollisionen hier sehr groß aus.

## 6. Auswertung der Simulationen



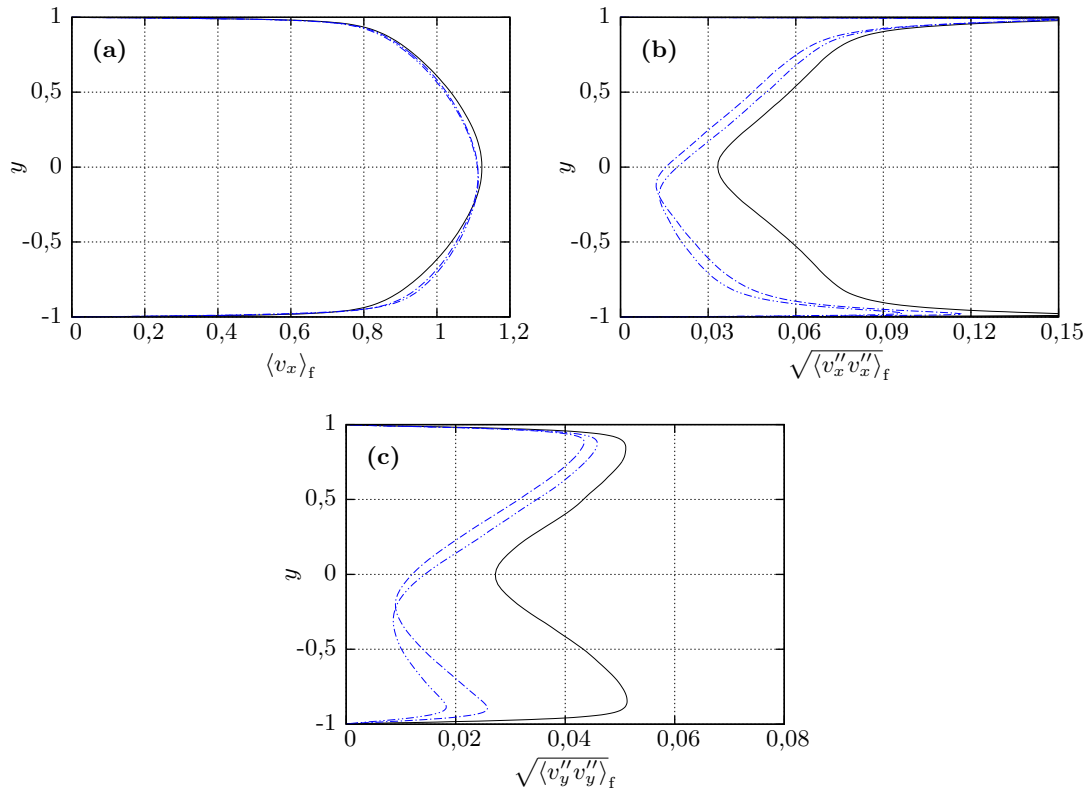
**Abbildung 6.21.:** Einfluss reibungsbehafteter Partikel-Partikel-Kollisionen auf die Geschwindigkeitsprofile der kontinuierlichen Phase bei  $\eta = 0,5$ , Vier-Wege-Kopplung.  $\diamond$  unbeladen (Kussin, 2004, R1);  $\circ$  (Kussin, 2004, R1); — unbeladen; - - - ohne Partikelreibung; - · - · mit Partikelreibung.

### 6.4.3. Zusammenfassung der gewonnenen Erkenntnisse

Bezüglich der Auswirkungen, die bei der Berücksichtigung reibungsbehafteter Partikel-Partikel-Kollisionen in der numerischen Simulation von dispersen Mehrphasenströmungen zu erwarten sind, konnten bei der Analyse in den beiden vorigen Unterabschnitten einige Erkenntnisse gewonnen werden, die im Folgenden zusammenfassend dargelegt werden.

Eine wichtige Schlussfolgerung der Ergebnisanalyse ist, dass der Einfluss der Partikelreibung den in Abschnitt 6.3 herausgestellten Auswirkungen der reibungsbehafteten Partikel-Wand-Kollisionen entgegengesetzt ist. So spitzen sich die mittleren Geschwindigkeitsprofile der Partikel zu und der transversale Partikelimpulstransport nimmt ab, weil die wandnormalen Schwankungen durch die dämpfungsartige Wechselwirkung bei reibungsbehafteten Partikel-Partikel-Kollisionen deutlich kleiner werden. Daraus folgt unmittelbar eine Veränderung der Partikelkonzentrationsverteilung im Kanal mit einer deutlich höheren Partikelkonzentration in unmittelbarer Nähe zur unteren Kanalwand. Im Vergleich zu den Referenzdaten führte diese Entwicklung – außer bei den horizon-

#### 6.4. Einfluss der Reibung bei Partikel-Partikel-Kollisionen



**Abbildung 6.22.:** Einfluss reibungsbehafteter Partikel-Partikel-Kollisionen auf die Geschwindigkeitsprofile der kontinuierlichen Phase bei  $\eta = 1,0$ , Vier-Wege-Kopplung. — unladen; - - - ohne Partikelreibung; - · - · mit Partikelreibung.

talen Geschwindigkeitsschwankungen der Partikel für  $\eta = 0,1$  – zu einer weniger guten Reproduktion der experimentellen Referenzdaten durch die numerischen Simulationen. Es sei an dieser Stelle aber nochmals darauf hingewiesen, dass es in diesem Abschnitt vor allem um die Bewertung der relativen Änderungen bei der Berücksichtigung von reibungsbehafteten Partikel-Partikel-Kollisionen in den Simulationen ging. Da auch hier noch keine Wandrauheitseffekte berücksichtigt worden sind, ist zu erwarten gewesen, dass der Vergleich mit den Versuchsdaten noch große Unterschiede aufweist.

Die durch die Partikelreibung veränderten Konzentrationsprofile haben einen direkten Einfluss auf die Modifikation der Turbulenz der kontinuierlichen Phase: Aufgrund der verstärkten Präsenz von Partikeln im unteren Kanalbereich konnte in diesen Regionen für alle Massenbeladungen eine erhöhte Turbulenzdämpfung festgestellt werden, während die Turbulenzintensität in den oberen Bereichen der Kanalströmung wegen der niedrigeren Partikelkonzentration wieder höher werden. Dieser Effekt auf die Trägerströmung wird mit steigender Massenbeladung deutlich ausgeprägter.

Mit der Berücksichtigung der Reibung bei den Partikel-Partikel-Kollisionen ist ein weiteres Modell hinzugekommen, welches die Simulation disperser Mehrphasenströmungen

## 6. Auswertung der Simulationen

ein weiteres Stück näher an die realen physikalischen Vorgänge innerhalb der dispersen Phase bringen soll. Die Analyse der Ergebnisse zeigt, dass die reibungsbehafteten Partikel-Partikel-Kollisionen im Vergleich zu dem in Abschnitt 6.3 untersuchten Wandmodell entgegengesetzte Auswirkungen haben. Weil die Rauheit der Kanalwände bisher komplett unberücksichtigt blieb, war der direkte Vergleich mit den Referenzdaten wenig sinnvoll. Daraus lässt sich die Vermutung ableiten, dass mit der Wandrauheit in den Simulationen bisher ein Aspekt vernachlässigt worden ist, dem in den Versuchen von Kussin (2004) eine wichtige Bedeutung zukommt.

### 6.5. Einfluss der Wandrauheit

Die Auswertung der Simulationsergebnisse mit den in dieser Arbeit entwickelten Modellen für reibungsbehaftete Partikel-Wand- und Partikel-Partikel-Kollisionen hat gezeigt, dass bei beiden Mechanismen unterschiedliche Einflüsse auf die Resultate der numerischen Simulationen festgestellt werden können. Trotz der Anwendung beider Modelle konnten die Versuchsdaten von Kussin (2004) nicht zufriedenstellend reproduziert werden. Insbesondere die wandnormalen Schwankungen der dispersen Phase sind trotz der Berücksichtigung von reibungsbehafteten Kollisionen nicht groß genug, um dem massiven Einfluss der Gravitation entgegenzuwirken und eine gleichmäßigere Partikelverteilung im Kanal zu erzielen.

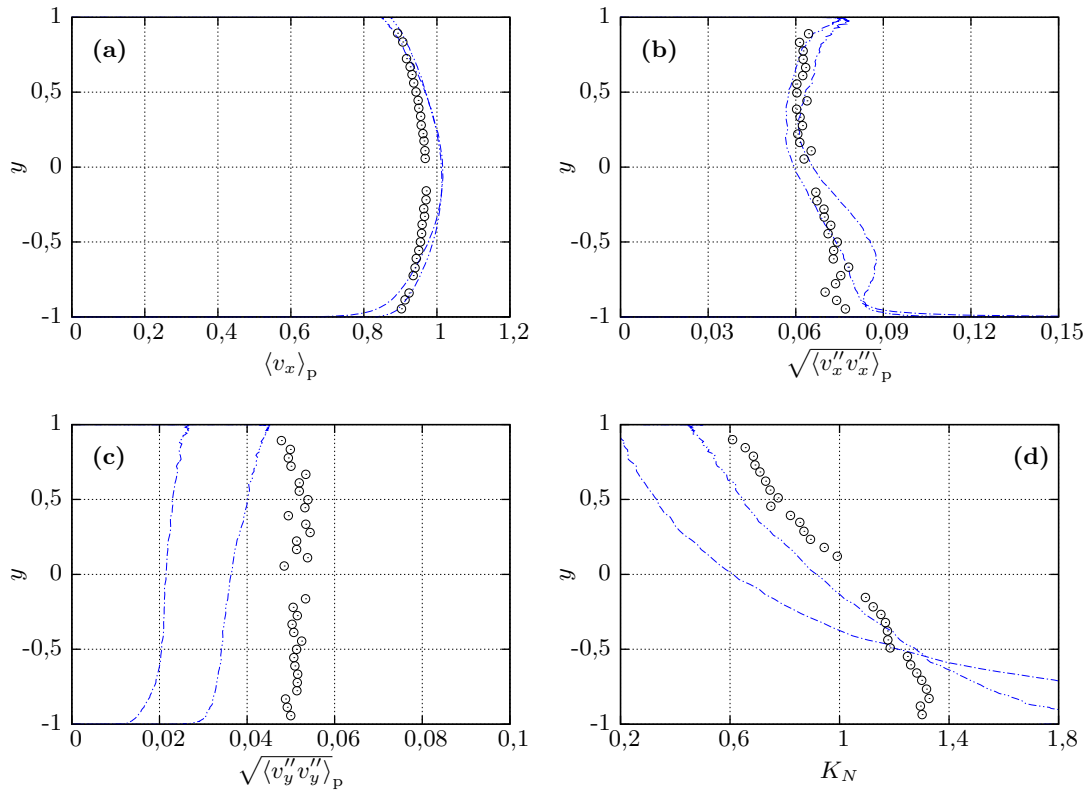
Weil der Einfluss der Wandrauheit in den Simulationen bisher unberücksichtigt geblieben ist und die experimentelle Referenz raue Kanalwände der Rauheitsstufe R1 (s. Tab. 5.1) beinhaltet, macht es Sinn, mit Hilfe des in Abschnitt 4.3 beschriebenen Wandrauheitsmodells den Einfluss der Wandrauheit zu untersuchen. Im ersten Schritt soll überprüft werden, was für Ergebnisse das Wandrauheitsmodell liefert, wenn der Kugelradius  $r$  der Wandrauheitselemente und das arithmetische Mittel der dimensionslosen Rautiefe  $R_m$  des Referenzfalls gleichgesetzt werden. Der Umrechnungsfaktor  $C_r$  ist in diesem Fall also dann gleich eins ( $r = C_r R_m$ ). Anschließend wird überprüft, was eine Erhöhung des Kugelradius über den Umrechnungsfaktor von  $C_r = 1,5$  nach Zagarola und Smits (1998) für Folgen auf die Simulationsergebnisse hat.

Für die Analyse wurden die beiden reibungsbehafteten Kollisionsmodelle (Partikel-Wand bzw. Partikel-Partikel) mit in die Simulationen einbezogen, um zusammen mit dem Wandrauheitsmodell den vollen Modellierungsgrad zu erhalten. Wie bisher sind die Simulationsergebnisse in den folgenden Abschnitten getrennt für die disperse und die kontinuierliche Phase dargestellt. Abschließend erfolgt daraufhin wieder eine kurze Zusammenfassung mit den wichtigsten Erkenntnissen, die für dieses Modell gewonnen werden konnten.

#### 6.5.1. Disperse Phase

Die Untersuchung des Wandrauheitseinflusses beginnt mit der Darstellung der Geschwindigkeits- und Konzentrationsstatistiken für die disperse Phase bei  $\eta = 0,1$  in Abb. 6.23. Wie schon im vorigen Abschnitt bei der Ergebnisanalyse für die reibungsbehafteten





**Abbildung 6.23.:** Einfluss der Wandrauheitsmodellierung auf die Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofile der Partikel bei  $\eta = 0,1$ , Vier-Wege-Kopplung.  $\circ$  (Kussin, 2004, R1);  $---$  ohne Wandrauheit;  $- \cdot - \cdot -$  mit Wandrauheit.

Partikel-Partikel-Kollisionen werden auch hier nur die Simulationsergebnisse mit Berücksichtigung der Zwei-Wege-Kopplung zwischen disperser und kontinuierlicher Phase aufgeführt. Auf den Einfluss dieses Mechanismus wird demnach nicht weiter eingegangen, so dass in den Darstellungen der Effekt der Wandrauheitsmodellierung direkt entnommen werden kann.

Abb. 6.23(a) stellt die mittleren Partikelgeschwindigkeitsprofile aus den Simulationen und der experimentellen Referenz dar. Dort ist zu erkennen, dass die Wandrauheit in unmittelbarer Nähe zu den Kanalwänden einen sehr großen Einfluss hat. Vor allem an der unteren Kanalwand ist eine deutliche Erhöhung der mittleren Partikelgeschwindigkeit zu erkennen, da hier wegen der Schwerkraft mehr Partikel-Wand-Kollisionen passieren als an der oberen Wand. Dadurch werden die mittleren Geschwindigkeitsprofile der dispersen Phase in den Simulationen wesentlich flacher und geben die Versuchsdaten in Wandnähe besser wieder, als es bei den Simulationen ohne Wandrauheitseinfluss bisher der Fall war. Im Bereich der Kanalmitte ist dagegen keine nennenswerte Veränderung der mittleren Geschwindigkeit zu verzeichnen, weil die Wandrauheit nur an den Kanalwänden eine Rolle spielt und die Partikel-Partikel-Kollisionsrate bei dieser niedrigen Massenbeladung

## 6. Auswertung der Simulationen

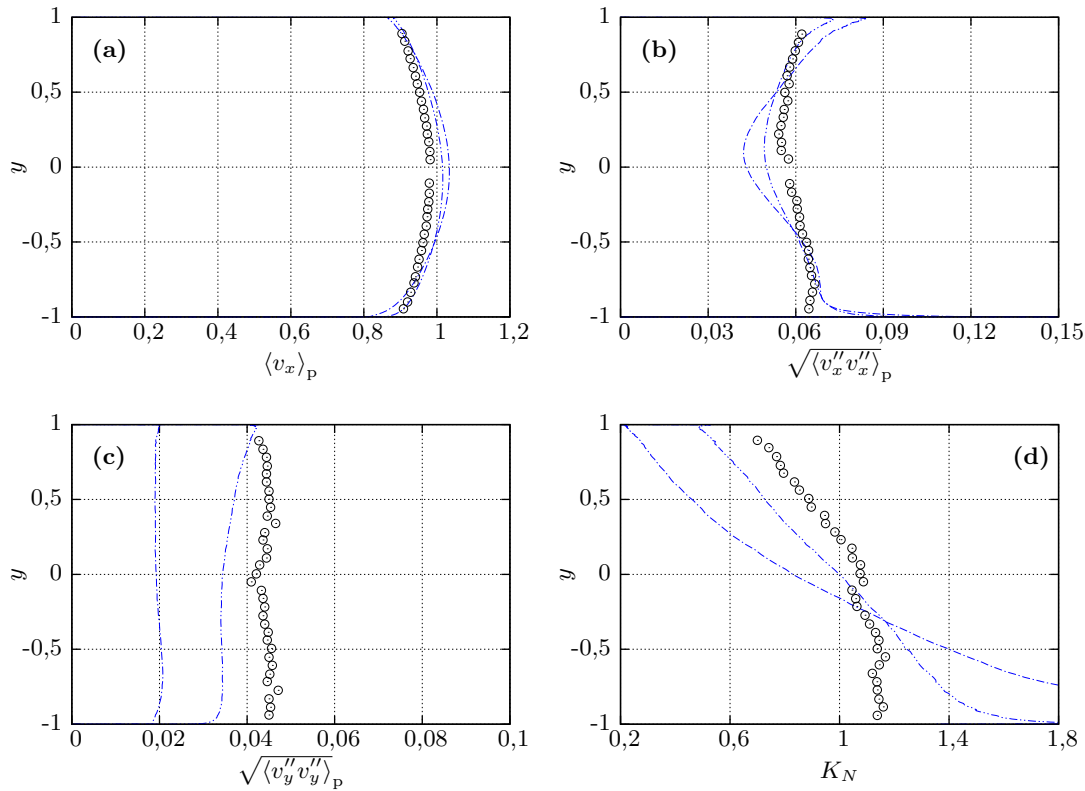
zu gering ist, um den Wandrauheitseinfluss auf die mittlere Geschwindigkeit in wandferne Regionen zu transportieren.

Der Verlauf der in Abb. 6.23(b) aufgezeigten horizontalen Geschwindigkeitsschwankungen wird durch den Einfluss der Wandrauheit etwas gleichmäßiger und stimmt qualitativ gut mit den Referenzdaten überein. Im unteren Kanalbereich werden die Schwankungen bei Berücksichtigung der Wandrauheit nicht mehr so stark überschätzt – tatsächlich kann die Simulation mit dem vollen Modellierungsansatz (reibungsbefahete Kollisionen, Wandrauheit und Zwei-Wege-Kopplung) die Versuchsdaten sehr gut reproduzieren. Auffällig ist, dass die horizontalen Partikelgeschwindigkeitsschwankungen unter dem Einfluss des Wandrauheitsmodells über den gesamten Kanalquerschnitt hinweg kleiner werden. In Abb. 6.17(b) konnte diesbezüglich beobachtet werden, dass die Reibung bei den Partikel-Partikel-Kollisionen hierfür verantwortlich ist.

Bei den wandnormalen Geschwindigkeitsschwankungen der Partikel in Abb. 6.23(c) ist dagegen eine deutliche Steigerung zu erkennen, wenn die rauen Kanalwände in den Simulationen berücksichtigt werden. Die Wandrauheit hat einen riesigen Einfluss auf diese Größe, was sich bei dieser Massenbeladung in einer Schwankungserhöhung um etwa 70% über den gesamten Kanalquerschnitt hinweg zeigt. Dies ist besonders bemerkenswert, weil der Betrag der wandnormalen Schwankungen in den Simulationen bisher (ohne Wandrauheitseinfluss) weit unter den Referenzdaten lag. Zwar werden die Messdaten von Kussin (2004) auch unterschätzt, wenn das Wandrauheitsmodell mit einbezogen wird, die Differenz wird jedoch deutlich kleiner. Außerdem darf nicht vergessen werden, dass in dem Modell die äußerst komplexe Struktur einer technischen Rauheit durch geometrisch sehr einfache Körper ersetzt wird, was unweigerlich einen Modellierungsfehler nach sich zieht. Die Erhöhung der wandnormalen Schwankungen macht aber klar, dass der transversale Impulstransport innerhalb der dispersen Phase durch die Wandnormalenvektorvariation deutlich anwächst, was automatisch positive Auswirkungen auf die Simulationsergebnisse hat.

Folglich können auch bei der Konzentrationsverteilung der Partikel in Abb. 6.23(d) deutliche Veränderungen festgestellt werden: Die durch die Wandrauheit gesteigerten wandnormalen Geschwindigkeitsschwankungen sorgen für eine gleichmäßigere Partikelverteilung im Kanal. In der oberen Kanalhälfte ist die normalisierte Partikelkonzentration infolge der Wandrauheit sehr viel höher und der gravitationsbedingte Konzentrationsanstieg in negativer  $y$ -Richtung stimmt in diesem Bereich qualitativ sehr gut mit den Beobachtungen in der experimentellen Referenz überein. Direkt an der unteren Wand kann in den Simulationen trotz der Berücksichtigung rauer Wände eine Konzentrationsspitze festgestellt werden, die in den Versuchsdaten nicht in dieser Ausprägung vorhanden ist. Die gravitationsbedingte Ablagerung von Partikeln an der unteren Wand ist also auch bei der Verwendung des Wandrauheitsmodells vorhanden, wenn auch wesentlich weniger markant als ohne dieses Modell.

Es stellt sich also heraus, dass die Berücksichtigung der Wandrauheit schon bei der niedrig beladenen Kanalströmung durchaus lohnenswert ist. Im Falle von höheren Massenbeladungen nimmt die Zahl der Partikel-Wand- und vor allem der Partikel-Partikel-Kollisionen zu, was auch den Einfluss der Wandrauheit verstärken sollte. Um dies zu prüfen, sind in Abb. 6.24 die mittlere Geschwindigkeit, die Schwankungsgeschwindigkeit



**Abbildung 6.24.:** Einfluss der Wandrauheitsmodellierung auf die Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofile der Partikel bei  $\eta = 0,5$ , Vier-Wege-Kopplung.  $\circ$  (Kussin, 2004, R1); - - - ohne Wandrauheit; - · - · mit Wandrauheit.

keiten und die Konzentrationsverteilung der Partikel aus den Simulationen und dem Experiment bei  $\eta = 0,5$  aufgeführt.

In Abb. 6.24(a) kann zunächst herausgestellt werden, dass auch in diesem Fall die Wandrauheit einen deutlichen Einfluss auf die mittlere Partikelgeschwindigkeit in der Nähe der Kanalwände hat. Über die durch die höhere Massenbelastung wesentlich dominanteren Partikel-Partikel-Kollisionen wird dieser Wandeeinfluss auch in das Kanalinnere getragen, was bei der niedrig beladenen Strömung nicht beobachtet werden konnte. Dies hat eine Verringerung des Geschwindigkeitsmaximums und damit eine Abflachung des Geschwindigkeitsprofils zur Folge, was den Versuchsdaten von Kussin (2004) schon wesentlich näher kommt.

Bei den horizontalen Geschwindigkeitsschwankungen in Abb. 6.24(b) ist zu beobachten, dass der Verlauf dieser Schwankungen durch den Einfluss der Wandrauheit über den gesamten Kanalquerschnitt hinweg gleichmäßiger wird und die Messdaten der experimentellen Referenz wesentlich besser wiedergegeben werden. Interessant ist hierbei, dass die horizontalen Schwankungen nicht ausschließlich verringert werden, wie es für die niedrige Massenbelastung in Abb. 6.23(b) festgestellt werden konnte. Tatsächlich wer-

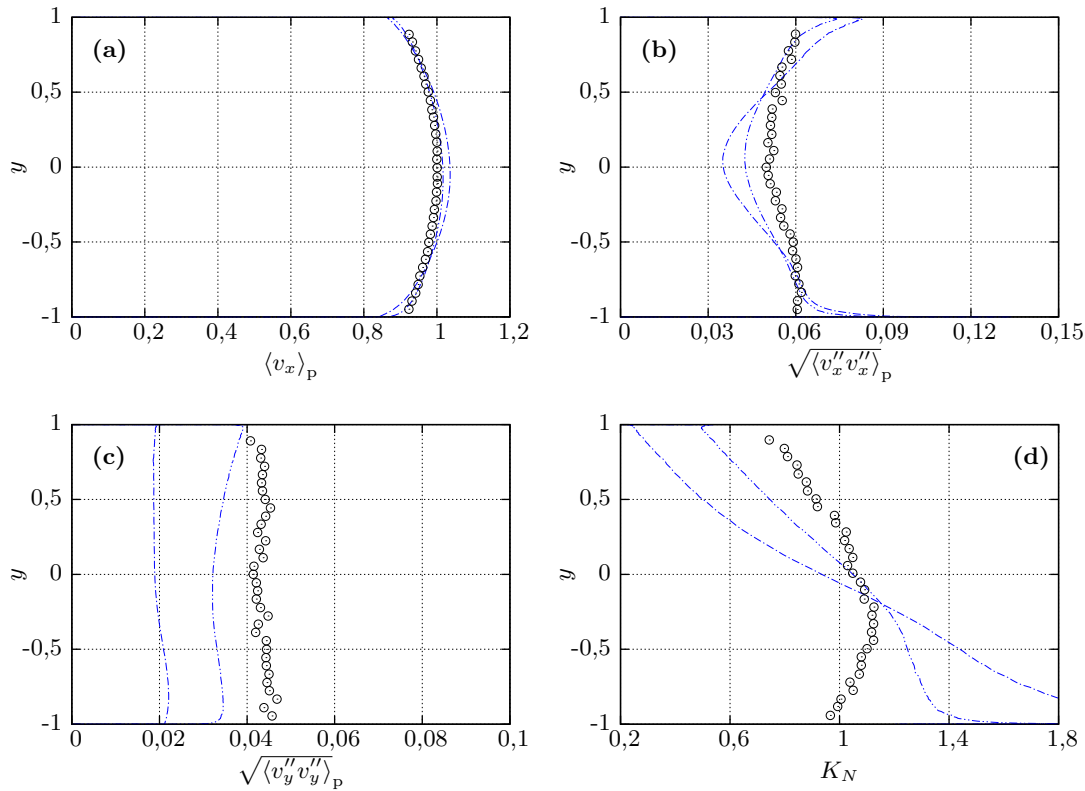
## 6. Auswertung der Simulationen

den die Schwankungsgeschwindigkeiten im Kanalzentrum, wo in den Simulationen ohne Wandrauheitsmodell ein ausgeprägtes Minimum zu finden ist, infolge der Wandrauheitsmodellierung größer. Dies verdeutlicht wieder einmal, dass die Berücksichtigung der Wandrauheit in erster Linie eine stärkere Durchmischung der Partikel verursacht: Teilchen, deren Fluggeschwindigkeiten sich deutlich von der lokalen mittleren Partikelgeschwindigkeit unterscheiden (die also zu einer hohen horizontalen Schwankungsgeschwindigkeit beitragen), werden bei Kollisionen mit den rauen Kanalwänden durch den angestellten Wandnormalenvektor mehr in Richtung der Kanalmitte gezwungen, wo sie ihren Impuls über Partikel-Partikel-Kollisionen weitergeben und so zu einer Erhöhung der Schwankungen führen, auch wenn die interpartikuläre Reibung einen dämpfenden Einfluss hierauf hat.

Der größte Einfluss der Wandrauheit ist auch bei  $\eta = 0,5$  in den wandnormalen Partikelgeschwindigkeitsschwankungen zu erkennen. Wie in Abb. 6.24(c) zu sehen ist, werden diese im gesamten Kanalbereich stark erhöht und rücken viel näher an die Versuchsdaten heran. Infolgedessen verteilen sich die Partikel auch wesentlich gleichmäßiger im Kanal und die Verläufe der Konzentrationsverteilungen aus den Simulationen mit Berücksichtigung der Wandrauheit in Abb. 6.24(d) nähern sich dem Verlauf der experimentellen Referenz an. Auch in dieser Darstellung ist jedoch zu beobachten, dass in den Simulationen direkt an der unteren Kanalwand eine Konzentrationsspitze entsteht, die die Versuchsdaten nicht hergeben. Im Versuch ist die gemessene Konzentration zwischen  $y = -0,5$  und  $-1,0$  fast konstant, während die Konzentration in den Simulationen mit geringer werdendem Wandabstand immer stärker ansteigt. Es ist nicht ganz klar, woher dieses Phänomen in den Simulationen kommt – eine mögliche Erklärung wäre, dass die tatsächliche Geometrie einer technischen Rauheit die Erhöhung der Partikelkonzentration in unmittelbarer Wandnähe verhindert und dass dies durch das geometrisch wesentlich einfachere Sandrauheitsmodell nicht wiedergegeben werden kann.

Für die höchste hier betrachte Massenbeladung von  $\eta = 1,0$  sind in Abb. 6.25 prinzipiell die gleichen Beobachtungen zu machen wie bei  $\eta = 0,5$ . So ist in Abb. 6.25(a) eine deutliche Abflachung des mittleren Partikelgeschwindigkeitsprofils erkennbar, welches im Falle der vollen Vier-Wege-Modellierung gute Übereinstimmungen mit den Versuchsdaten zeigt. Die in Abb. 6.25(b) dargestellten horizontalen Geschwindigkeitsschwankungen werden durch den Wandrauheitseinfluss wie erwartet gleichmäßiger und auch das zuvor beobachtete Schwankungsminimum im Bereich der Kanalmitte ist nicht mehr so ausgeprägt.

Der Effekt der Wandrauheit auf die wandnormalen Partikelschwankungen, die für die höchste Massenbeladung in Abb. 6.25(c) dargestellt sind, zieht sich wie ein roter Faden durch die Analyse der Ergebnisse für das Wandrauheitsmodell. Auch bei  $\eta = 1,0$  nehmen diese Schwankungen deutlich zu, wenngleich die Differenz zwischen den Simulationen mit und ohne Wandrauheit hier etwas geringer ist als in den beiden Fällen zuvor. Der Grund hierfür ist, dass der Einfluss der Kanalwände mit zunehmender Massenbeladung von den Partikel-Partikel-Kollisionen immer mehr in den Hintergrund gerückt wird. Infolge der wandnormalen Schwankungserhöhung verteilen sich die Partikel gleichmäßiger und die Partikelkonzentration nimmt, wie man Abb. 6.25(d) entnehmen kann, in der oberen Kanalhälfte zu und im unteren Teil deutlich ab. Die Konzentrationsverteilung der



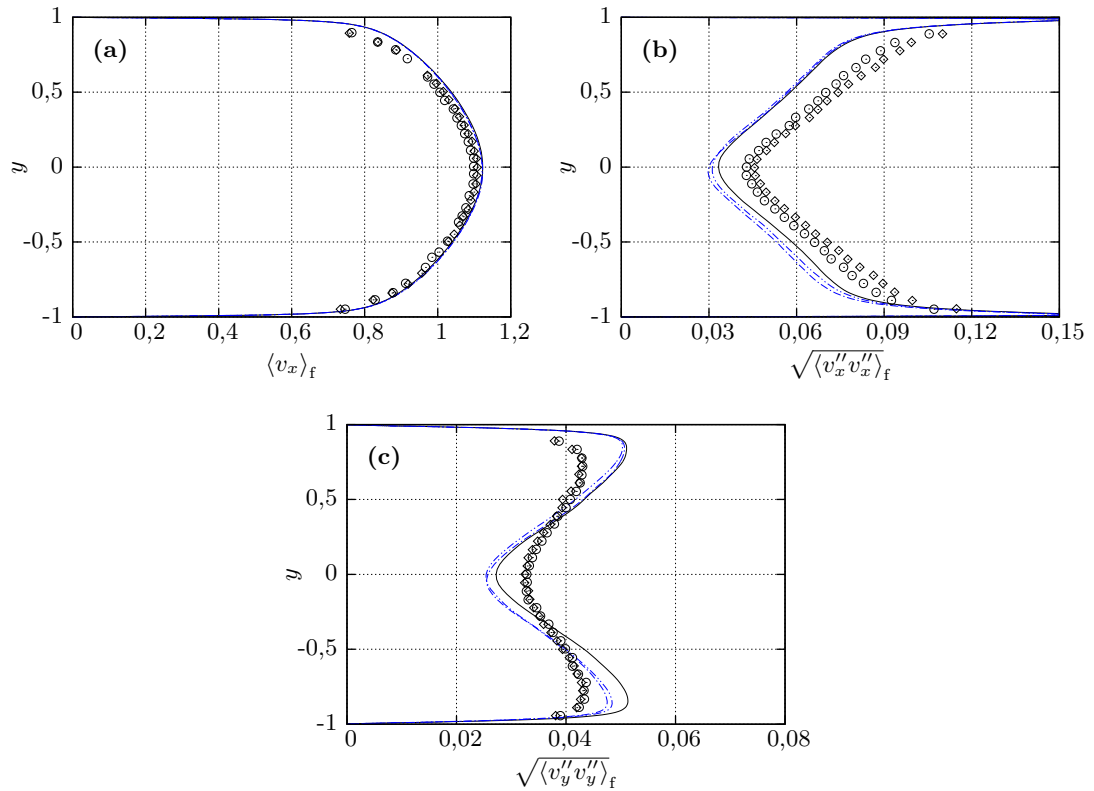
**Abbildung 6.25.:** Einfluss der Wandrauheitsmodellierung auf die Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofile der Partikel bei  $\eta = 1,0$ , Vier-Wege-Kopplung.  $\circ$  (Kussin, 2004, R1);  $---$  ohne Wandrauheit;  $- \cdot -$  mit Wandrauheit.

experimentellen Referenz besitzt bei etwa  $y = -0,3$  ein Maximum und fällt anschließend mit geringer werdendem Abstand zur unteren Wand wieder ab. Dies wird von den Simulationen selbst bei aktivierter Wandrauheitsmodellierung nicht wiedergegeben. In den Simulationen ist in negativer  $y$ -Richtung eine stetige Konzentrationszunahme zu verzeichnen, die wieder direkt an der unteren Kanalwand in Form einer Konzentrationsspitze endet. Wie bereits erwähnt, ist die Ursache hierfür noch nicht bekannt und erfordert tiefgreifendere Untersuchungen, die im Rahmen dieser Arbeit leider nicht abschließend durchgeführt werden konnten.

### 6.5.2. Kontinuierliche Phase

Die Untersuchung der Simulationsergebnisse mit dem in Abschnitt 4.3 vorgestellten Wandrauheitsmodell für die disperse Phase hat gezeigt, dass die Wandrauheit im gewählten Referenzfall zweifellos ein bedeutender Einflussfaktor ist, der in den Simulationen berücksichtigt werden sollte. Bezüglich der kontinuierlichen Phase, die in diesem Unterabschnitt hinsichtlich der Wandrauheit untersucht werden soll, ist zu erwarten, dass die Simulationsergebnisse die Referenzdaten besser reproduzieren können, wenn die rauen

## 6. Auswertung der Simulationen



**Abbildung 6.26.:** Einfluss der Wandrauhtmodellierung auf die Geschwindigkeitsprofile der kontinuierlichen Phase bei  $\eta = 0,1$ , Vier-Wege-Kopplung.  $\diamond$  unbeladen (Kussin, 2004, R1);  $\circ$  (Kussin, 2004, R1); — unbeladen; - - - ohne Wandrauheit; ····· mit Wandrauheit.

Kanalwände mit in die Simulationen einbezogen werden. Die vorigen Untersuchungen haben gezeigt, dass die beladene Trägerströmung hauptsächlich von der Konzentrationsverteilung der dispersen Phase beeinflusst wird. Weil die Partikelkonzentration in den Simulationen bei Berücksichtigung der Wandrauheit deutlich näher an den Versuchsdaten liegt, kann also auch für die kontinuierliche Phase ein positiver Einfluss der Wandrauheit erwartet werden.

Die im Folgenden dargestellten Resultate für die beladene Trägerströmung entstammen wieder den Simulationen, in denen die Zwei-Wege-Kopplung, die Partikel-Wand-Reibung und reibungsbehaftete Partikel-Partikel-Kollisionen berücksichtigt worden sind. Der Einfluss der Wandrauheit wird dadurch verdeutlicht, dass in den Darstellungen zwei Simulationen – einmal ohne und einmal mit dem Wandrauheitsmodell – direkt gegenübergestellt werden.

Für die kontinuierliche Phase des niedrig beladenen Falls mit  $\eta = 0,1$  sind die Geschwindigkeitsstatistiken aus den Simulationen und den Messungen von Kussin (2004) zusammen mit den entsprechenden Daten der unbeladenen Strömung in Abb. 6.26 dar-

gestellt. Die mittlere Strömung (Abb. 6.26(a)) wird wegen der niedrigen Massenbeladung kaum durch die Partikel beeinflusst, weshalb hierfür keine Aussage über die Auswirkungen der Wandrauheit auf die zeitlich gemittelte Trägerströmung getroffen werden kann. In den Abbildungen 6.26(b) und (c) ist bei den horizontalen und vertikalen Geschwindigkeitsschwankungen dagegen eine leichte Veränderung der Simulationsergebnisse bei Berücksichtigung der Wandrauheit zu erkennen: Wie aus der durch die rauen Wände gleichmäßigeren Partikelverteilung im Strömungsfeld folgt, wird der obere Kanalbereich von mehr Partikeln und der untere von weniger Partikeln durchströmt als in der Simulation ohne Wandrauheitsmodell. Folglich wird die Turbulenz der Trägerströmung in der oberen Kanalhälfte etwas stärker und unten etwas weniger gedämpft. Dies ist in den Ergebnissen für die horizontalen wie für die vertikalen Schwankungen zu erkennen.

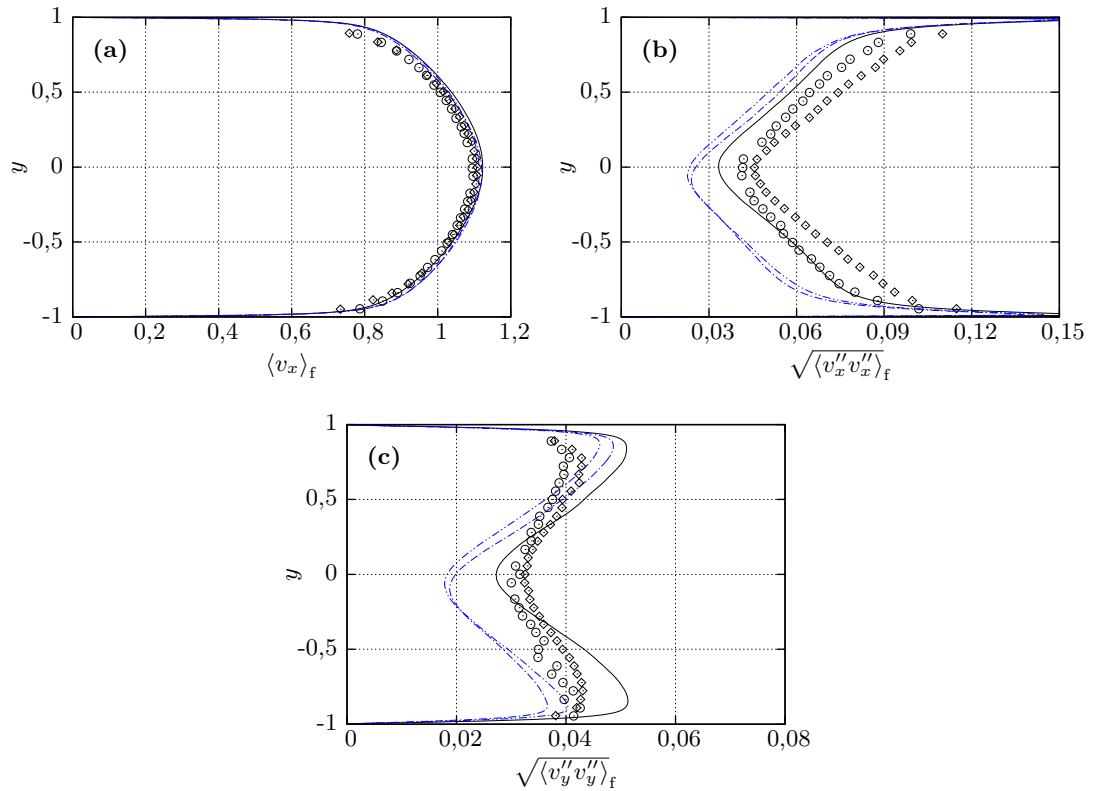
Im Vergleich zu dem im Versuch identifizierten Einfluss der Partikel auf die Fluidturbulenz können die Auswirkungen des Wandrauheitsmodells in diesem Fall als positiv bewertet werden. Der direkte Vergleich ist zwar vor allem für die wandnormalen Schwankungen schwierig, weil die Simulationsdaten schon im unbeladenen Fall deutlich von den Messungen abweichen, was nach Laín et al. (2002) aber auf Probleme bei der Messung der vertikalen Geschwindigkeitskomponente der Trägerströmung zurückgeführt werden kann. Trotzdem lässt sich zumindest qualitativ feststellen, dass durch die homogenere Verteilung der Partikel im Strömungsfeld bei Berücksichtigung der Wandrauheit auch eine gleichmäßigere Turbulenzmodifikation vorliegt, was von den Versuchsdaten bestätigt wird.

Für den Fall der mittleren Massenbeladung von  $\eta = 0,5$  sind die Simulationsergebnisse und die Versuchsdaten in Abb. 6.27 zu finden. Wegen der höheren Partikelanzahl wird die mittlere Strömungsgeschwindigkeit der kontinuierlichen Phase (Abb. 6.27(a)) etwas stärker beeinflusst. Obwohl die Veränderungen der mittleren Fluidgeschwindigkeit in den verschiedenen Simulationen nur sehr gering sind, lässt sich im Vergleich zum Experiment eine positive Tendenz herausstellen: In der Nähe der Kanalmitte ist die Trägerströmung bei der Berücksichtigung rauer Wände langsamer als ohne und im oberen Bereich nähert sich das Geschwindigkeitsprofil infolge der Wandrauheit schon bei einem größerem Abstand zur oberen Kanalwand dem mittleren Profil der unbeladenen Strömungsgeschwindigkeit an. Überhaupt kann die im Experiment beobachtete Differenz zwischen der beladenen und der unbeladenen mittleren Strömung von den Simulationen mit Wandrauheitsmodell wesentlich besser reproduziert werden als ohne.

Bei den Geschwindigkeitsschwankungen der kontinuierlichen Phase in Abb. 6.27(b) für die horizontale und Abb. 6.27(c) für die vertikale Komponente können die gleichen Beobachtungen wie schon für  $\eta = 0,1$  gemacht werden: Oberhalb des Schnittpunktes der Konzentrationskurven in Abb. 6.24(d) bei ungefähr  $y = -0,3$  wird die Fluidturbulenz wegen der höheren Partikelanzahl stärker reduziert. Auf der anderen Seite findet unterhalb dieses Schnittpunktes bei beiden Schwankungskomponenten eine klare Reduzierung der von den Partikeln verursachten Schwankungsdämpfung statt. Auch in diesem Fall geht diese Veränderung, die durch die Berücksichtigung der Wandrauheit verursacht wird, in die richtige Richtung, wenn man die Simulations- und Versuchsdaten für die jeweils beladene und unbeladene Strömung vergleicht.

Wie bereits in den vorhergehenden Analysen erwähnt worden ist, liegen im Falle der

## 6. Auswertung der Simulationen

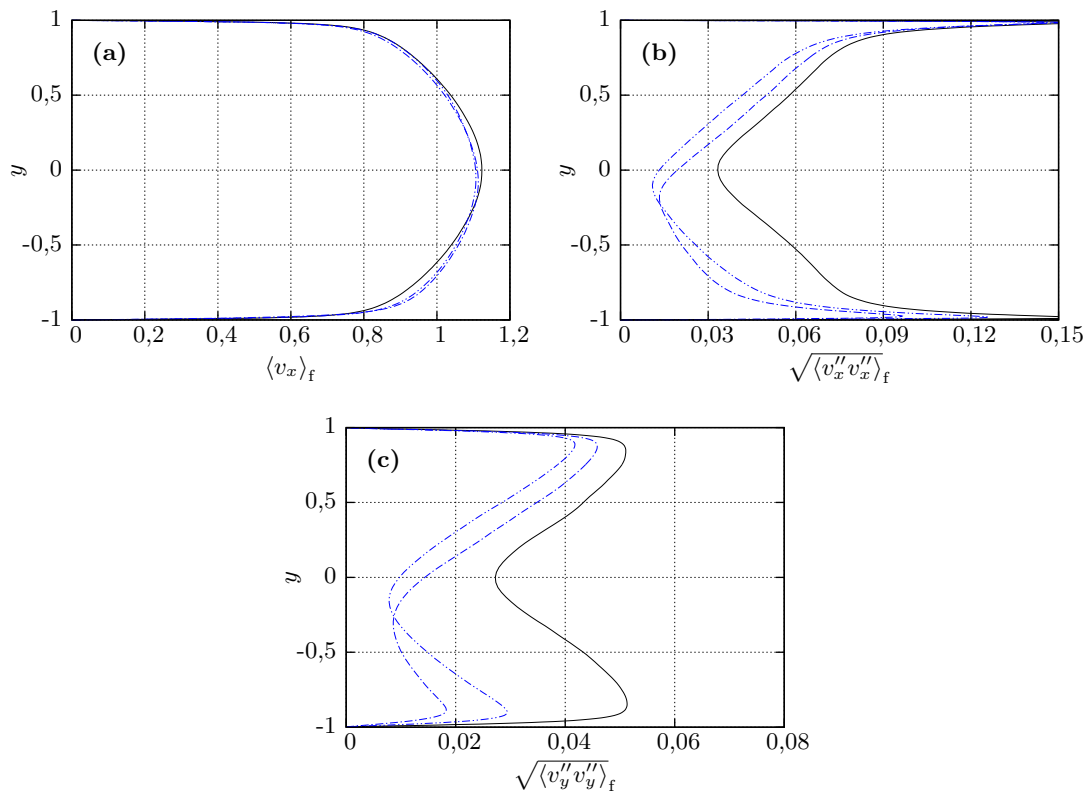


**Abbildung 6.27.:** Einfluss der Wandrauhtmodellierung auf die Geschwindigkeitsprofile der kontinuierlichen Phase bei  $\eta = 0,5$ , Vier-Wege-Kopplung.  $\diamond$  unbeladen (Kussin, 2004, R1);  $\circ$  (Kussin, 2004, R1); — unbeladen; - - - ohne Wandrauheit; ····· mit Wandrauheit.

höchsten Massenbeladung keine Messdaten von Kussin (2004) vor. Deswegen sind in Abb. 6.28 auch nur die Simulationsergebnisse für diesen Fall aufgeführt. Die Resultate bestätigen alle in diesem Unterabschnitt für den Wandrauheitseinfluss auf die kontinuierliche Phase gewonnenen Erkenntnisse. Vor allem bei den Geschwindigkeitsschwankungen in Abb. 6.28(b) und Abb. 6.28(c) ist wieder zu erkennen, dass es einen Punkt gibt, oberhalb dessen die Schwankungen in Folge der erhöhten Partikelkonzentration größer und darunter wegen der niedrigeren Partikelanzahl kleiner werden. Auch in diesem Fall fällt dieser Punkt wieder mit dem Schnittpunkt der Konzentrationsprofile für die Simulationen mit und ohne Wandrauheit in Abb. 6.25(d) zusammen.

Aufgrund der fehlenden Referenzdaten kann in diesem Fall keine Aussage darüber getroffen werden, ob und inwiefern die Berücksichtigung der Wandrauheit eine Verbesserung der Simulationsergebnisse liefert. Basierend auf den bisher mit dem Modell gemachten Erfahrungen und den Ergebnissen für die disperse Phase in Abschnitt 6.5.1 kann jedoch davon ausgegangen werden, dass das Wandrauheitsmodell auch für die kontinuierliche Phase bei  $\eta = 1,0$  Resultate liefert, die näher an der experimentellen Referenz





**Abbildung 6.28.:** Einfluss der Wandrauheitsmodellierung auf die Geschwindigkeitsprofile der kontinuierlichen Phase bei  $\eta = 1,0$ , Vier-Wege-Kopplung. — unladen; - - - ohne Wandrauheit; - · - · mit Wandrauheit.

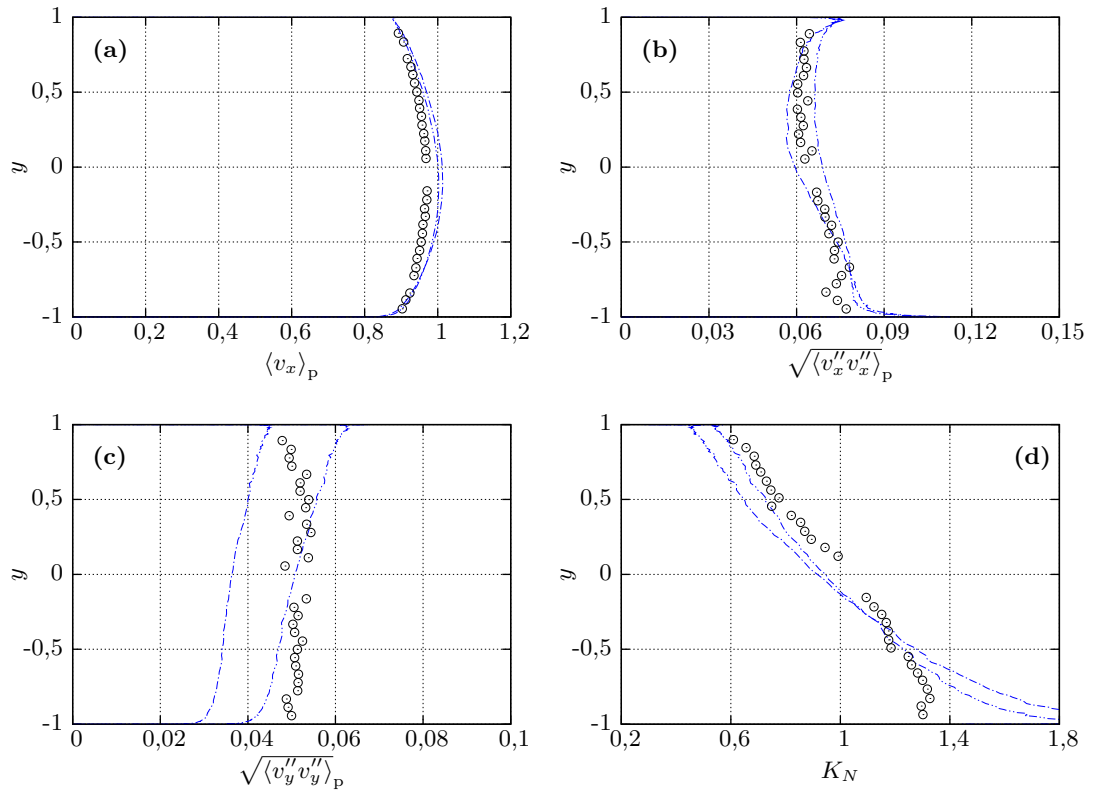
liegen. Trotzdem ist aber auch zu erwarten, dass in einigen Bereichen der dispersen Kanalströmung noch ein Verbesserungsspielraum besteht.

### 6.5.3. Einfluss des Kugelradius im Wandrauheitsmodell

Die vorigen Untersuchungen der Simulationsergebnisse mit dem Wandrauheitsmodell haben gezeigt, dass selbst bei einer sehr trivialen Wahl von eins für den Umrechnungsfaktor  $C_r$  zwischen Kugelradius und mittlerer Rautiefe erstaunlich gute Ergebnisse erzielt werden. Es stellt sich jedoch die Frage, wie sensibel die Mehrphasenströmung auf eine Änderung des Kugelradius über einen anderen Umrechnungsfaktor reagiert. Wie in Abschnitt 4.3.1 erläutert wurde, kann aus Zagarola und Smits (1998) für eine gehobene Oberfläche der Faktor 1,5 entnommen werden. Bei diesem Wert ist zu erwarten, dass sich der Wandrauheitseinfluss gegenüber  $C_r = 1$  erhöht und sich möglicherweise sogar eine weitere Verbesserung der Simulationsergebnisse einstellt.

Aus diesem Grund soll im Folgenden kurz untersucht werden, welche Auswirkungen es hat, wenn für den Umrechnungsfaktor  $C_r$  ein Wert von 1,5 angenommen und der Kugelradius im Wandrauheitsmodell demnach um 50% vergrößert wird. Nach Gl. (4.52) wird

## 6. Auswertung der Simulationen



**Abbildung 6.29.:** Einfluss des Kugelradius  $r$  auf die Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofile der Partikel bei  $\eta = 0,1$ , Vier-Wege-Kopplung.  $\circ$  (Kussin, 2004, R1);   
- - -  $C_r = 1,0$ ; - · - · -  $C_r = 1,5$ .

dadurch die Standardabweichung  $\sigma$  des Kippwinkels  $\alpha$  erhöht<sup>16</sup> und der Wandnormalenvektor  $\mathbf{n}$  kann über einen größeren Bereich hinweg variieren, was die Auswirkungen des Wandrauheitsmodelles verstärkt.

Um den Umfang dieser Untersuchung nicht zu groß werden zu lassen, wird im Folgenden lediglich die disperse Phase betrachtet, da diese unter dem unmittelbaren Einfluss der Wandrauheit steht und die bisherigen Analysen gezeigt haben, dass gute Ergebnisse für die disperse Phase auch einen positiven Effekt auf die Trägerströmung haben. Außerdem werden nur die Simulationen betrachtet, die die volle Vier-Wege-Modellierung mit reibungsbehafteten Partikel-Wand- und Partikel-Partikel-Kollisionen berücksichtigen.

In Abb. 6.29 sind die Resultate aus den Simulationen und den Versuchen für die Massenbeladung  $\eta = 0,1$  dargestellt. Die zwei blauen Kurven in jedem Plot stehen dort für die beiden Simulationen mit den unterschiedlichen Kugelradien im Wandrauheitsmodell. Schon bei den mittleren Partikelgeschwindigkeitsprofilen in Abb. 6.29(a) ist zu erkennen, dass der Kugelradius  $r$  einen klaren Einfluss auf die disperse Phase hat. Bei

<sup>16</sup>Dies gilt wegen der Beschränkung von  $\sigma$  nur, solange  $2r < D_p$  ist. Diese Bedingung ist hier jedoch ganz klar erfüllt.

einem Umrechnungsfaktor von  $C_r = 1,5$  wird das Geschwindigkeitsprofil flacher und auch die horizontalen Geschwindigkeitsschwankungen in Abb. 6.29(b) sind dann im Vergleich zum Experiment zwar etwas zu hoch, stimmen im qualitativen Verlauf jedoch hervorragend mit der Referenz überein.

Die in Abb. 6.29(c) aufgeführten vertikalen Schwankungen nehmen infolge des größeren Kugelradius erheblich zu, was auf den größeren Variationsbereich des Wandnormalenvektors und den damit verbundenen erhöhten Impulsaustausch in wandnormaler Richtung zurückzuführen ist. Die Simulationen treffen den Messwertebereich der wandnormalen Schwankungen aus der Referenz bei  $C_r = 1,5$  gut, jedoch können sie nicht den qualitativen Verlauf der Versuchsdaten reproduzieren. Weil dieser mit Erhöhung von  $r$  praktisch unverändert bleibt, steht dies wohl nicht direkt mit dem Wandrauheitsmodell bzw.  $C_r$  in Verbindung.

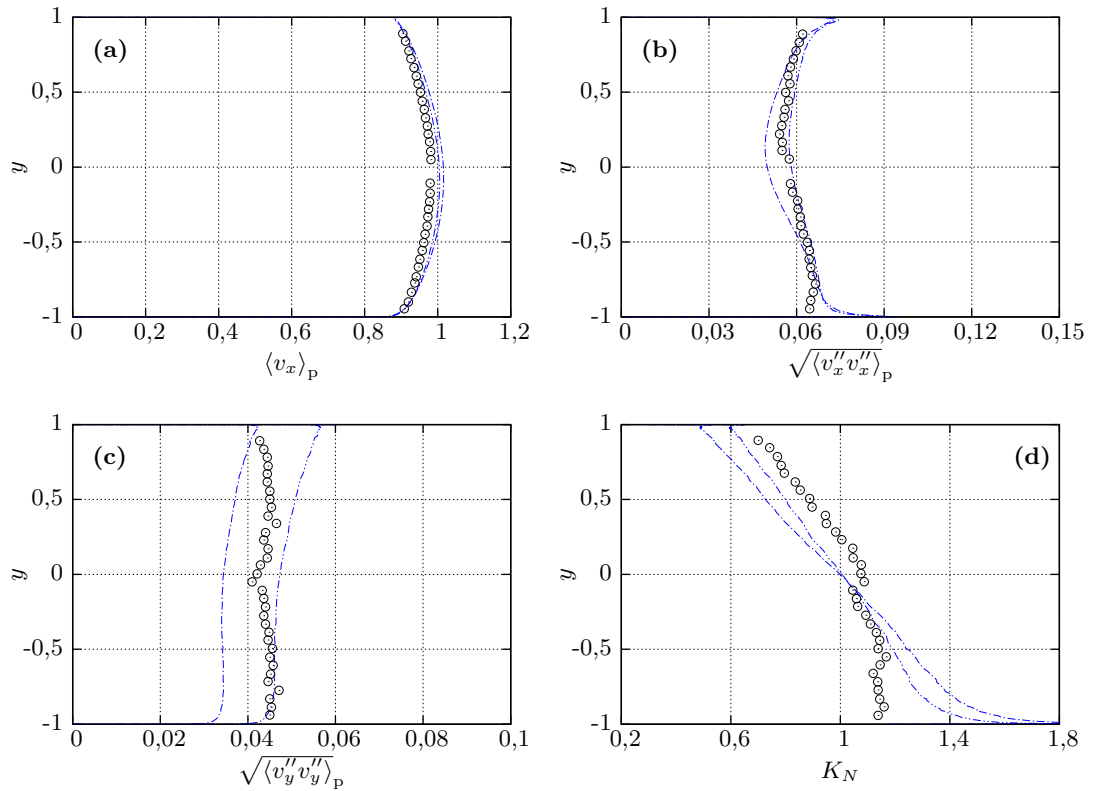
Mehrfach wurde bereits festgestellt, dass die Konzentrationsverteilung der Partikel in direkter Verbindung zu den wandnormalen Partikelgeschwindigkeitsschwankungen steht. Deshalb ist der Verlauf der normalisierten Partikelkonzentration in Abb. 6.29(d) für  $C_r = 1,5$  gleichmäßiger und liegt näher an den Versuchsdaten. Trotz des erhöhten Wandrauheitseinflusses ist hier jedoch immer noch zu erkennen, dass es in unmittelbarer Nähe zur unteren Kanalwand eine Konzentrationsspitze gibt, die in den Vergleichsdaten nicht gefunden werden kann. Durch eine Variation des Kugelradius kann diese Spitze folglich nicht eliminiert werden und es stellt sich die Frage, ob ein in den Simulationen noch nicht berücksichtigter physikalischer Effekt verantwortlich für dieses Phänomen ist.

Bei der mittleren Massenbeladung von  $\eta = 0,5$ , für die in Abb. 6.30 die Simulationsergebnisse und die Messdaten der dispersen Phase dargestellt sind, ist der Einfluss von  $r$  ebenso deutlich. Die mittlere Partikelgeschwindigkeit in Abb. 6.30(a) wird durch den vergrößerten Kugelradius im Kanalzentrum langsamer und rückt näher zu den Versuchsdaten von Kussin (2004). Darüber hinaus stimmen die horizontalen Geschwindigkeitsschwankungen (Abb. 6.30(b)) außer in Wandnähe hervorragend mit den Versuchsdaten überein. In direkter Nähe zu den Kanalwänden streben die horizontalen Partikelgeschwindigkeiten zu Maximalwerten, die in den Versuchsdaten nicht vorhanden sind. Die Vermutung liegt nahe, dass dies den gleichen Grund hat wie die in den Simulationen beobachteten Partikelkonzentrationsspitzen an der unteren Kanalwand.

Die in Abb. 6.30(c) aufgeführten wandnormalen Schwankungen werden von der Simulation mit dem größeren Kugelradius im unteren Kanalbereich sehr gut wiedergegeben. Dadurch, dass diese Schwankungen in den Simulationen nicht so konstant wie im Experiment sind, sondern mit zunehmendem  $y$  größer werden, werden sie im oberen Kanalbereich jedoch überschätzt. Als Konsequenz der erhöhten wandnormalen Schwankungen liegt die Partikelkonzentrationsverteilung im Kanal beim um 50% vergrößerten Kugelradius zumindest im oberen Kanalbereich deutlich näher an den Versuchsdaten. Die bereits mehrfach beobachteten Konzentrationsabweichungen in der unteren Kanalhälfte werden zwar geringer, die unnatürliche Konzentrationsspitze bleibt in den Simulationen aber auch in diesem Fall erhalten.

Aus den in Abb. 6.31 dargestellten Simulationsergebnissen für die höchste Massenbeladung von  $\eta = 1,0$  ist grundsätzlich nichts Neues zu entnehmen. Es ist aber besonders erwähnenswert, dass die Simulationsergebnisse in diesem Fall bei dem 1,5-fachen Kugel-

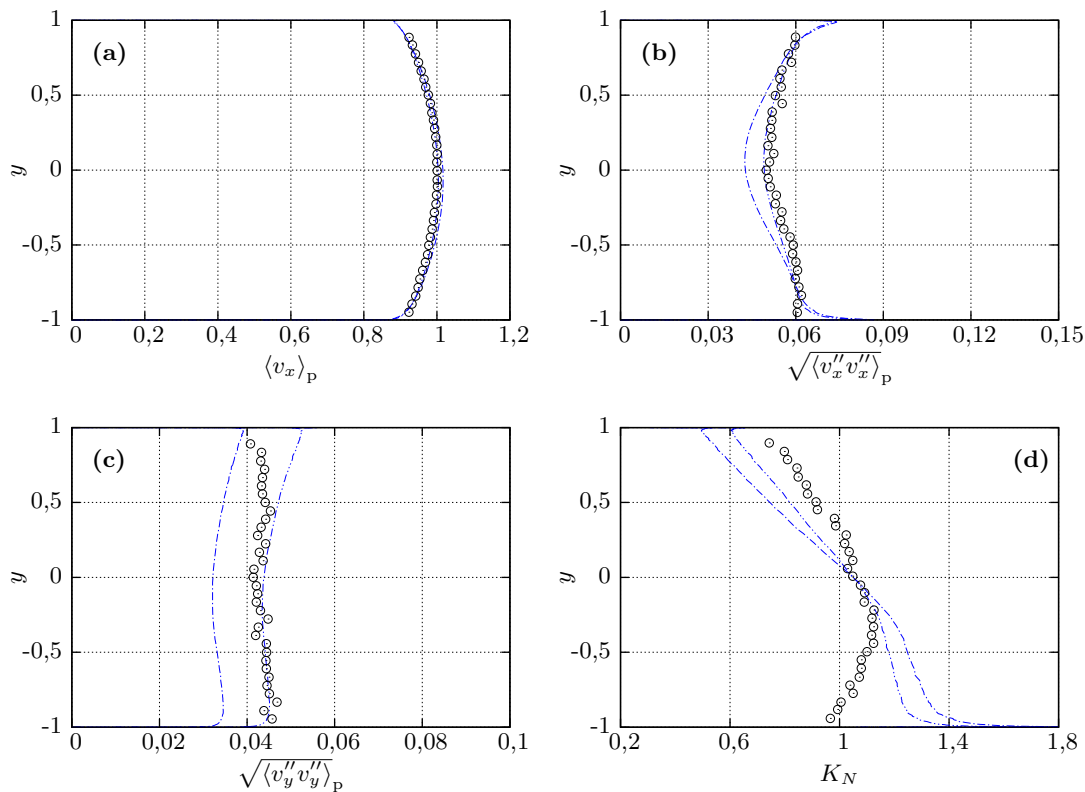
## 6. Auswertung der Simulationen



**Abbildung 6.30.:** Einfluss des Kugelradius  $r$  auf die Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofile der Partikel bei  $\eta = 0,5$ , Vier-Wege-Kopplung.  $\circ$  (Kussin, 2004, R1);  
 - - -  $C_r = 1,0$ ; - · -  $C_r = 1,5$ .

radius die insgesamt beste Übereinstimmung mit den Referenzdaten von Kussin (2004) liefern. Zu erkennen ist jedoch auch, dass die bei den horizontalen Schwankungen und der Konzentrationsverteilung problematischen Regionen in unmittelbarer Wandnähe auch hier nur unzureichend nachgebildet werden können.

Im Großen und Ganzen zeigt die hier vorgenommene Analyse, dass der Kugelradius  $r$  mit einem Umrechnungsfaktor von  $C_r = 1,5$  zumindest im Vergleich zu dem hier betrachteten Referenzfall hervorragende Ergebnisse liefert. Außerdem konnte herausgestellt werden, dass die Statistiken der dispersen Phase sehr sensibel auf diesen Parameter reagieren. Deshalb wäre es für das Wandrauheitsmodell durchaus hilfreich, eine möglichst universelle Gesetzmäßigkeit zwischen dem Kugelradius  $r$  und den im Ingenieurwesen verbreiteten Wandrauheitsparametern wie z. B.  $R_Z$ ,  $R_Q$  oder  $R_a$  zu finden. Ein Proportionalitätsfaktor von  $C_r = 1,5$  scheint in diesem Falle eine sehr gute Wahl zu sein – ohne weitere Überprüfungen an anderen Testfällen lässt sich dieser Wert jedoch nicht verallgemeinern.



**Abbildung 6.31.:** Einfluss des Kugelradius  $r$  auf die Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofile der Partikel bei  $\eta = 1,0$ , Vier-Wege-Kopplung.  $\circ$  (Kussin, 2004, R1);  
 - - -  $C_r = 1,0$ ; - · -  $C_r = 1,5$ .

#### 6.5.4. Zusammenfassung der gewonnenen Erkenntnisse

Am Ende der Zusammenfassung von Abschnitt 6.4, in dem das reibungsbehaftete Partikel-Partikel-Kollisionsmodell untersucht worden ist, wurde die Vermutung geäußert, dass bei den Simulationen der dispersen Kanalströmung ein wichtiger Aspekt bisher fehlte und dass es sich darum um die Rauheit der Kanalwände handeln könnte. Die Untersuchung im vorliegenden Abschnitt hat nun gezeigt, dass die Wandrauheit tatsächlich eine wichtige – wenn nicht sogar die wichtigste – Rolle in diesem Testfall spielt. Mit Einführung des Wandrauheitsmodells aus Abschnitt 4.3 verbesserten sich die Simulationsergebnisse in allen Aspekten erheblich und dieser positive Effekt konnte durch eine geeignete Wahl des Kugelradius  $r$  noch weiter verstärkt werden. Zum Abschluss der Auswertung für den Einfluss der Wandrauheit auf die disperse Mehrphasenströmung im ebenen Kanal wird im Folgenden eine kurze Zusammenfassung der gewonnenen Erkenntnisse gegeben.

In den Ergebnissen für die disperse Phase konnte bei allen Massenbelastungen festgestellt werden, dass das Wandrauheitsmodell eine klare Erhöhung des transversalen Partikelimpulstransportes verursacht. Dies ist eine Folge aus dem im Modell variablen Wandnormalenvektor und wird durch den dort berücksichtigten Schatteneffekt noch wei-

## 6. Auswertung der Simulationen

ter verstärkt, weil der Wandnormalenvektor im statistischen Mittel gegen die Partikelflugbahn geneigt wird und die Partikel selbst somit eine deutlich stärkere Bahnänderung erfahren. Daraus resultieren die beobachteten Verbesserungen für die Simulationen der dispersen Phase: Die mittleren Geschwindigkeitsprofile wurden flacher, während die Partikelgeschwindigkeitsschwankungen in wandnormaler Richtung merklich größer wurden. Außerdem bildete sich im Kanal eine wesentlich homogenere Partikelverteilung aus. Die horizontalen Geschwindigkeitsschwankungen wurden gleichmäßiger und sprachen qualitativ viel besser mit den Referenzdaten überein.

Trotz dieser guten Ergebnisse konnten die wandnahen Regionen als Bereiche identifiziert werden, in denen das Wandrauheitsmodell keine nennenswerten Verbesserungen lieferte. Die im Experiment nicht beobachteten horizontalen Schwankungsmaxima und die Partikelkonzentrationsspitzen an der unteren Kanalwand konnten auch nicht durch einen mittels eines größeren Kugelradius  $r$  erhöhten Wandrauheitseinflusses eliminiert werden.

Weil die kontinuierliche Phase von der dispersen Phase beeinflusst wird, wurde auch für die Trägerströmung eine Verbesserung der Ergebnisse festgestellt. Die durch die Wandrauheit homogenere Partikelverteilung im Kanal führte zu einer gleichmäßigeren Turbulenzmodifikation im Trägerströmungsfeld. Auch wenn insbesondere bei den hohen Massenbeladungen die Turbulenzdämpfung in manchen Gebieten des Kanals zu stark ausfiel, wird die Trägerströmung bei Berücksichtigung der rauen Kanalwände wesentlich besser wiedergegeben als ohne dieses Modell.

## 7. Zusammenfassung und Ausblick

Im abschließenden Kapitel dieser Arbeit werden noch einmal die bei der Analyse der numerischen Simulationen gewonnenen Erkenntnisse zusammengefasst. Außerdem soll auf die Bedeutung der drei neu eingeführten Modelle eingegangen werden und darauf, welche Rolle sie bei der Simulation von dispersen Mehrphasenströmungen spielen. Weil im Zuge dieser Master-Thesis auch neue Fragen aufgeworfen worden sind, wird im Anschluss daran eine Übersicht der noch offenen Fragen dargelegt, um einen Ausblick für künftige Arbeiten in diesem Themenbereich zu bieten.

### 7.1. Bedeutung der einzelnen Kollisionsmodelle

Der zentrale Punkt dieser Arbeit war die Einführung und Implementierung von geeigneten Modellen zur Berücksichtigung von reibungsbehafteten Kollisionen in der Simulation von partikelbeladenen Mehrphasenströmungen mit *LES OCC*. Dazu wurden in Kapitel 4 insgesamt drei Kollisionsmodelle – zwei für reibungsbehaftete Partikel-Wand- bzw. Partikel-Partikel-Kollisionen und eines für die Berücksichtigung rauer Wände – vorgestellt. Anhand des in Kapitel 5 aufgeführten Testfalls wurden zahlreiche Simulationen durchgeführt, die in Kapitel 6 schließlich ausgewertet worden sind.

Bezüglich der Rolle der einzelnen Kollisionsmodelle konnte die Ergebnisanalyse eine ganz klare Hierarchie herausstellen: Den mit Abstand größten Einfluss auf die Simulationsergebnisse zeigte das Wandrauheitsmodell, welches zu einer deutlichen Erhöhung des transversalen Partikelimpulsaustauschs und damit zu einer erheblichen Verbesserung der Resultate führte. Die reibungsbehafteten Partikel-Partikel-Kollisionen spielten im Vergleich dazu eine untergeordnete Rolle, hatten gegenüber dem dritten Modell (der Partikel-Wand-Reibung) aber etwas größere Auswirkungen. Dies kann darauf zurückgeführt werden, dass in der betrachteten Kanalströmung die Zahl der Partikel-Partikel-Kollisionen die der Partikel-Wand-Interaktionen in der Regel übersteigt. Darüber hinaus

Modell	$\langle v_x \rangle$		$\sqrt{\langle v_x'' v_x'' \rangle}$		$\sqrt{\langle v_y'' v_y'' \rangle}$	
	unten	oben	unten	oben	unten	oben
Partikel-Wand-Reibung	–	–	↘	↘	↘	↘
Partikel-Partikel-Reibung	↗	↘	↘	↗	↘	↗
Wandrauheit	↘	↗	↗	↘	↗	↘

**Tabelle 7.1.:** Einfluss der einzelnen Kollisionsmodelle auf die Statistiken der Trägerströmung in der unteren und oberen Kanalhälfte. – Keine wesentliche Veränderung; ↘ Reduktion; ↗ Erhöhung.

## 7. Zusammenfassung und Ausblick

Modell	$\langle v_x \rangle$		$\sqrt{\langle v_x'' v_x'' \rangle}$		$\sqrt{\langle v_y'' v_y'' \rangle}$		$K_N$
	W	M	W	M	W	M	
Partikel-Wand-Reibung	↘	↘	↗	↗	↗	↗	homogener
Partikel-Partikel-Reibung	↘	↗	↘	↘	↘	↘	inhomogener
Wandrauheit	↗	↘	↘	↗	↗	↗	homogener

**Tabelle 7.2.:** Einfluss der einzelnen Kollisionsmodelle auf die Statistiken der dispersen Phase in Wandnähe (W) und der Kanalmitte (M). ↘ Reduktion; ↗ Erhöhung.

konnte festgestellt werden, dass die Reibunseffekte bei Partikel-Wand- und Partikel-Partikel-Kollisionen im Großen und Ganzen eine gegenteilige Wirkung haben: Während die Wandreibung über den gesamten Kanalquerschnitt hinweg zu einer leichten Erhöhung der Partikelgeschwindigkeitsschwankungen und einer Homogenisierung der Partikelverteilung führte, sanken die Schwankungsgeschwindigkeiten der Partikel bei Berücksichtigung von reibungsbehafteten Partikel-Partikel-Kollisionen wieder und die Konzentrationsverteilung der Partikel wurde ungleichmäßiger. Zur besseren Übersicht ist in den Tabellen 7.1 und 7.2 aufgezeigt, welche trendmäßigen Einflüsse der drei verschiedenen Kollisionsmodelle auf die Statistiken der kontinuierlichen und dispersen Phase bei der Analyse beobachtet werden konnten.

Der große Einfluss der Wandrauheit im hier betrachteten Testfall machte die Verifikation der beiden Reibungsmodelle und der verwendeten Modellparameter (s. Tab. 5.4) anhand der experimentellen Referenz schwierig. Trotzdem konnten alle beobachteten Auswirkungen physikalisch begründet werden. Weil raue Wände in der Realität kaum vermieden werden können, ist ohnehin fraglich, ob eine geeignete Verifikationsgrundlage für die reibungsbehafteten Kollisionsmodelle existiert, in denen die Wandrauheit keine Rolle spielt. Das Wandrauheitsmodell selbst lieferte im Zusammenspiel mit den beiden anderen Kollisionsmodellen und der Umrechnungskonstanten  $C_r = 1,5$  hervorragende Ergebnisse. Natürlich muss bei der Bewertung dieser Resultate bedacht werden, dass hier lediglich ein einziger Rauheitsfall betrachtet worden ist. Nichtsdestotrotz ist der Modellierungsansatz mit allen drei Kollisionsmodellen sehr vielversprechend und insbesondere beim vergleichsweise einfachen Wandrauheitsmodell mit den kugelförmigen Sandrauheitselementen lohnt es sich definitiv, diesen Ansatz weiter zu verfolgen und anhand anderer Testfälle weiterzuentwickeln.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass es sehr lohnenswert ist, alle drei Modelle in die Simulation disperser Mehrphasenströmungen mit einzubeziehen. Zum Einen versprechen dies die hervorragenden Resultate in dieser Arbeit, zum Anderen ist aber auch der Berechnungs- und Speicheraufwand, der mit der Einführung dieser Modelle einhergeht, vergleichsweise gering. Hinzu kommt außerdem, dass die zusätzliche Berücksichtigung der Partikelrotation, die die reibungsbehafteten Kollisionen mit sich bringen, den Weg für weitere Modelle (z. B. für die Magnus-Kraft) frei macht, die eine zusätzlich verbesserte Nachbildung von partikelbeladenen Strömungen in den Simulationen nach sich ziehen können.



## 7.2. Offene Fragen

Bei der Analyse der Simulationsergebnisse in Kapitel 6 wurden einige Fragen aufgeworfen, die im zeitlichen Rahmen dieser Arbeit nicht oder nicht abschließend beantwortet werden konnten. Auf diese offenen Fragen soll im Folgenden kurz eingegangen werden, um einen Ausblick auf die weitere Entwicklung der Kollisionsmodellierung für die Simulation von partikelbeladenen Strömungen und mögliche Ausgangspunkte für zukünftige Arbeiten in dieser Thematik zu bieten.

Eine Parametervariation von den Restitutions- und Reibungskoeffizienten der Kollisionsmodelle hätte den Umfang dieser Master-Thesis gesprengt und wurde aus diesem Grunde nicht durchgeführt. Zwar lässt sich anhand der Modellgleichungen teilweise abschätzen, welchen ungefähren Einfluss die einzelnen Parameter haben. Eine gründliche Parameterstudie würde aber dennoch weitaus tiefere Einblicke in die Rollenverteilung der einzelnen Modellparameter bieten und eine Aussage über die Fehler erlauben, die auftreten können, wenn schwierig zu messende Parameter wie z. B. der tangentialen Restitutionskoeffizient nur grob abgeschätzt werden können.

Desweiteren konnte in dieser Arbeit nicht geklärt werden, ob das Wandrauheitsmodell auch für andere Testfälle (zum Beispiel mit anderen Wandrauheitstiefen oder Partikeldurchmessern aus Kussin (2004)) ebenfalls so hervorragende Ergebnisse liefert. Insbesondere der Umrechnungsfaktor  $C_r$  spielt hierbei eine wichtige Rolle, für den sich in dem hier betrachteten Testfall ein Wert von  $C_r = 1,5$  nach Zagarola und Smits (1998) etabliert hat. Dies wirft die Frage auf, ob dieser Wert im Idealfall auch für andere Testfälle übernommen werden kann, oder aber, ob dieser Umrechnungsfaktor tatsächlich eine Abhängigkeit von der Wandrauheitsstruktur aufweist und wie groß diese Abhängigkeit letztendlich ist.

Schließlich soll hier ein Problem erwähnt werden, welches direkt in den Ergebnissen für die disperse Phase beobachtet werden konnte: Unabhängig davon, ob die drei in dieser Arbeit entwickelten Modelle in die Simulationen mit einbezogen worden sind oder nicht, konnten in den Darstellungen für die horizontalen Partikelgeschwindigkeitsschwankungen und die Partikelkonzentrationen in unmittelbarer Nähe der Kanalwände große Abweichungen (z. B. in Form einer Konzentrationsspitze) zwischen Simulation und Experiment festgestellt werden. Weil die Modelle hierauf keinen großen Einfluss hatten, liegt die Vermutung nahe, dass in den Simulationen mindestens ein weiterer Mechanismus zusätzlich berücksichtigt werden muss, um dieses Problem zu beheben. Eine Möglichkeit hierfür wäre die Magnus-Kraft, die nach einer ersten Vorabanalyse in unmittelbarer Wandnähe vergleichsweise groß sein kann. Leider war es jedoch im zeitlichen Rahmen dieser Arbeit nicht mehr möglich, den Einfluss dieser Kraft auf die disperse Phase zu klären. Aus diesem Grund bietet es sich an, die Auswirkungen des Magnus-Effektes in einer weiterführenden Arbeit zu quantifizieren und zu prüfen, ob dieser Effekt in den oben genannten problematischen Regionen zu einer Verbesserung der Simulationsergebnisse führen kann.

# Literaturverzeichnis

- Balachandar, S. und J. Eaton (2010). Turbulent Dispersed Multiphase Flow. *Annual Review of Fluid Mechanics* 42, 111–133.
- Bardina, J., J. Ferziger, und W. Reynolds (1980). Improved Subgrid-Scale Models for Large-Eddy Simulation. In *13th Fluid and Plasma Dynamics Conference*, Snowmass, Colorado. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- Beardmore, R. (2010). Coefficients of Friction. [http://www.roytech.co.uk/Useful\\_Tables/Tribology/co\\_of\\_frict.htm](http://www.roytech.co.uk/Useful_Tables/Tribology/co_of_frict.htm). Letzter Zugriff: 10. Oktober 2011.
- Benneck, L. (2010). Large-Eddy Simulation eines turbulenten, partikelbeladenen Wandstrahls. Bachelor-Thesis, Helmut-Schmidt-Universität Hamburg.
- Berlemont, A., Z. Chang, und G. Gouesbet (1998). Particle Lagrangian Tracking with Hydrodynamic Interactions and Collisions. *Flow, Turbulence and Combustion* 60(1), 1–18.
- Borée, J. und N. Caraman (2005). Dilute Bidispersed Tube Flow: Role of Interclass Collisions at Increased Loadings. *Physics of Fluids* 17(5), 055108.
- Brandt, S. und H. Dahmen (2005). *Mechanik. Eine Einführung in Experiment und Theorie*. (4. Aufl.). Berlin: Springer.
- Brennen, C. (2005). *Fundamentals of Multiphase Flow*. Cambridge University Press.
- Breuer, M. (1998). Large-Eddy Simulation of the Subcritical Flow Past a Circular Cylinder: Numerical and Modeling Aspects. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 28(9), 1281–1302.
- Breuer, M. (2002). *Direkte Numerische Simulation und Large-Eddy Simulation turbulenter Strömungen auf Hochleistungsrechnern*. Aachen: Shaker Verlag.
- Breuer, M. (2011). *Large-Eddy Simulation on Curvilinear Coordinates: Manual*. Version: 19. April 2011.
- Breuer, M. und M. Alletto (2011). Efficient Simulation of Particle-Laden Turbulent Flows with High Mass Loadings Using LES. In *7th International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena*, Ottawa, Canada. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- Breuer, M., M. Alletto, und F. Langfeldt (2011). Sandgrain Roughness Model for Rough Walls within Eulerian-Lagrangian Predictions of Turbulent Flows. Zur Veröffentlichung eingereicht.
- Breuer, M., H. Baytekin, und E. Matida (2006). Prediction of Aerosol Deposition in Bends Using LES and an Efficient Lagrangian Tracking Method. *Journal of Aerosol Science* 37(11), 1407–1428.
- Bronstein, I., K. Semendjajew, G. Musiol, und H. Mühlig (2008). *Taschenbuch der*

- Mathematik* (7., vollst. überarb. u. erg. Aufl.). Harri Deutsch-Verlag.
- Caraman, N., J. Borée, und O. Simonin (2003). Effect of Collisions on the Dispersed Phase Fluctuation in a Dilute Tube Flow: Experimental and Theoretical Analysis. *Physics of Fluids* 15(12), 3602–3612.
- Celik, I., Z. Cehreli, und I. Yavuz (2005). Index of Resolution Quality for Large-Eddy Simulations. *Journal of Fluids Engineering* 127(5), 949–958.
- Chen, M., K. Kontomaris, und J. McLaughlin (1999). Direct Numerical Simulation of Droplet Collisions in a Turbulent Channel Flow. Part I: Collision Algorithm. *International Journal of Multiphase Flow* 24(7), 1079–1103.
- Chorin, A. (1968). Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations. *Mathematics of Computation* 22(104), 745–762.
- Corrsin, S. und J. Lumley (1956). On the Equation of Motion for a Particle in Turbulent Fluid. *Applied Scientific Research* 6(2), 114–116.
- Crowe, C., M. Sharma, und D. Stock (1977). The Particle-Source-In Cell (PSI-CELL) Model for Gas-Droplet Flows. *Journal of Fluids Engineering* 99(2), 325–332.
- Curtis, J. und B. van Wachem (2004). Modeling Particle-Laden Flows: A Research Outlook. *AIChE Journal* 50(11), 2638–2645.
- Davidson, P. A. (2004). *Turbulence: An Introduction for Scientists and Engineers*. New York: Oxford University Press.
- Deardorff, J. W. (1971). On the Magnitude of the Subgrid Scale Eddy Coefficient. *Journal of Computational Physics* 7(1), 120–133.
- Durbin, P. und B. Reif (2011). *Statistical Theory and Modeling for Turbulent Flow* (2. Aufl.). John Wiley & Sons.
- Elghobashi, S. (1994). On Predicting Particle-Laden Turbulent Flows. *Applied Scientific Research* 52(4), 309–329.
- Ferziger, J. und M. Perić (2008). *Numerische Strömungsmechanik* (1. Aufl.). Berlin: Springer.
- Fessler, J. R. und J. K. Eaton (1999). Turbulence Modification by Particles in a Backward-Facing Step Flow. *Journal of Fluid Mechanics* 394, 97–117.
- Foerster, S. F., M. Y. Louge, H. Chang, und K. Allia (1994). Measurements of the Collision Properties of Small Spheres. *Physics of Fluids* 6(3), 1108–1115.
- Frank, T., K.-P. Schade, und D. Petrak (1993). Numerical Simulation and Experimental Investigation of a Gas-Solid Two-Phase Flow in a Horizontal Channel. *International Journal of Multiphase Flow* 19(1), 187–198.
- Fröhlich, J. (2006). *Large Eddy Simulation turbulenter Strömungen*. Teubner.
- Germano, M., U. Piomelli, P. Moin, und W. H. Cabot (1991). A Dynamic Subgrid-Scale Eddy Viscosity Model. *Physics of Fluids* 3(7), 1760–1765.
- Hadinoto, K., E. Jones, C. Yurteri, und J. Curtis (2005). Reynolds Number Dependence of Gas-Phase Turbulence in Gas-Particle Flows. *International Journal of Multiphase Flow* 31(4), 416–434.
- Hertwig, K. und L. Martens (2007). *Chemische Verfahrenstechnik: Berechnung, Auslegung und Betrieb chemischer Reaktoren*. München: Oldenbourg Wissenschaftsverlag.

- Herwig, H. (2006). *Strömungsmechanik* (2., neu bearb. und erw. Aufl.). Berlin: Springer.
- Hibbeler, R. C. (2004a). *Engineering Mechanics. Dynamics* (3rd Aufl.). Singapore: Prentice-Hall.
- Hibbeler, R. C. (2004b). *Engineering Mechanics. Statics* (3rd Aufl.). Singapore: Prentice-Hall.
- Hinze, J. (1975). *Turbulence* (2. Aufl.). New York: McGraw-Hill.
- Hoomans, B. P. B. (2000). *Granular Dynamics of Gas-Solid Two-Phase Flows*. Dissertation, University of Twente.
- Kim, J., P. Moin, und R. Moser (1987). Turbulence Statistics in Fully Developed Channel Flow at Low Reynolds Number. *Journal of Fluid Mechanics* 177, 133–166.
- Klein, M. (2005). An Attempt to Assess the Quality of Large Eddy Simulations in the Context of Implicit Filtering. *Flow, Turbulence and Combustion* 75(1), 131–147.
- Klein, M., J. Meyers, und B. Geurts (2008). Assessment of LES Quality Measures Using the Error Landscape Approach. In J. Meyers, B. Geurts, und P. Sagaut (Eds.), *Quality and Reliability of Large-Eddy Simulations*, ERCOFTAC series, pp. 131–142. Springer.
- Kraume, M. (2003). *Transportvorgänge in der Verfahrenstechnik: Grundlagen und Applikative Umsetzungen*. Berlin: Springer.
- Kulick, J., J. Fessler, und J. Eaton (1994). Particle Response and Turbulence Modification in Fully Developed Channel Flow. *Journal of Fluid Mechanics* 277, 109–134.
- Kussin, J. (2004). *Experimentelle Studien zur Partikelbewegung und Turbulenzmodifikation in einem horizontalen Kanal bei unterschiedlichen Wandrauheiten*. Dissertation, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg.
- Kussin, J. und M. Sommerfeld (2002). Experimental Studies on Particle Behaviour and Turbulence Modification in Horizontal Channel Flow with Different Wall Roughness. *Experiments in Fluids* 33(1), 143–159.
- Lain, S. und M. Sommerfeld (2008). Euler/Lagrange Computations of Pneumatic Conveying in a Horizontal Channel with Different Wall Roughness. *Powder Technology* 184(1), 76–88.
- Lain, S., M. Sommerfeld, und J. Kussin (2002). Experimental Studies and Modelling of Four-Way Coupling in Particle-Laden Horizontal Channel Flow. *International Journal of Heat and Fluid Flow* 23(5), 647–656.
- Leonard, A. (1975). Energy Cascade in Large-Eddy Simulations of Turbulent Fluid Flows. *Advances in Geophysics* 18A, 237–248.
- Marchioli, C., V. Armenio, und A. Soldati (2007). Simple and Accurate Scheme for Fluid Velocity Interpolation for EulerianLagrangian Computation of Dispersed Flows in 3D Curvilinear Grids. *Computers & Fluids* 36(7), 1187–1198.
- Maxey, M. R. und J. J. Riley (1983). Equation of Motion for a Small Rigid Sphere in a Nonuniform Flow. *Physics of Fluids* 26(4), 883–889.
- McLaughlin, J. B. (1991). Inertial Migration of a Small Sphere in Linear Shear Flows. *Journal of Fluid Mechanics* 224, 261–274.
- Moser, R., J. Kim, und N. Mansour (1999). Direct Numerical Simulation of Turbulent Channel Flow up to  $Re_\tau = 590$ . *Physics of Fluids* 11(4), 943–945.

- Odar, F. und W. S. Hamilton (1964). Forces on a Sphere Accelerating in a Viscous Fluid. *Journal of Fluid Mechanics* 18(2), 302–314.
- Piomelli, U. und J. Chasnov (1996). Large-Eddy Simulations: Theory and Applications. In M. Hallböck, D. Henningson, A. Johansson, und P. Alfredson (Eds.), *Turbulence and Transition Modelling*, pp. 269–331. Kluwer Academic.
- Piomelli, U., J. H. Ferziger, und P. Moin (1987). Models for Large-Eddy Simulations of Turbulent Channel Flows Including Transpiration. Report TF-32, Stanford University, Stanford.
- Pozorski, J. und S. Apte (2009). Filtered Particle Tracking in Isotropic Turbulence and Stochastic Modeling of Subgrid-Scale Dispersion. *International Journal of Multiphase Flow* 35(2), 118–128.
- Prandtl, L. (1925). Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 5(2), 136–139.
- Reynolds, O. (1895). On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A* 186, 123–164.
- Rhie, C. und W. Chow (1983). Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Airfoil With Trailing Edge Separation. *AIAA Journal* 21(11), 1525–1532.
- Roache, P. (1998). *Verification and Validation in Computational Science and Engineering*. Hermosa Publishers.
- Rubinow, S. und J. Keller (1961). The Transverse Force on a Spinning Sphere Moving in a Viscous Fluid. *Journal of Fluid Mechanics* 11(03), 447–459.
- Saffman, P. G. (1965). The Lift on a Small Sphere in a Slow Shear Flow. *Journal of Fluid Mechanics* 22(2), 385–400.
- Sagaut, P. (2006). *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows: An Introduction* (3. Aufl.). Berlin: Springer.
- Schiller, L. und A. Naumann (1933). Über die grundlegende Berechnung bei der Schwerkraftaufbereitung. *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure* 44, 318–320.
- Schlichting, H. und K. Gersten (2006). *Grenzschicht-Theorie* (10., überarb. Aufl.). Berlin: Springer.
- Schockling, M., J. Allen, und A. Smits (2006). Roughness Effects in Turbulent Pipe Flow. *Journal of Fluid Mechanics* 564, 267–285.
- Schumann, U. (1975). Subgrid Scale Model for Finite Difference Simulations of Turbulent Flows in Plane Channels and Annuli. *Journal of Computational Physics* 18(4), 376–404.
- Seki, D., T. Numano, und M. Matsubara (2010). Numerical and Experimental Investigations of Relaminarizing Plane Channel Flow. In P. Schlatter und D. Henningson (Eds.), *Seventh IUTAM Symposium on Laminar-Turbulent Transition*, Volume 18 of *IUTAM Bookseries*, pp. 367–372. Dordrecht: Springer.
- Sigloch, H. (2009). *Technische Fluidmechanik* (7. Aufl.). Berlin: Springer.
- Smagorinsky, J. (1963). General Circulation Experiments with the Primitive Equations. I. The Basic Experiment. *Monthly Weather Review* 91(3), 99–164.

- Sommerfeld, M. (2000). Theoretical and Experimental Modelling of Particulate Flow: Overview and Fundamentals. In *Lecture Series 2000-06*, pp. 1–63. Von Karman Institute for Fluid Mechanics.
- Sommerfeld, M. und N. Huber (1999). Experimental Analysis and Modelling of Particle-Wall Collisions. *International Journal of Multiphase Flow* 25(6-7), 1457–1489.
- Spurk, J. H. und N. Aksel (2007). *Strömungslehre. Einführung in die Theorie der Strömungen*. (7. Aufl.). Berlin: Springer.
- Stokes, G. G. (1851). On the Effect of the Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 9, 8–106.
- Stone, H. (1968). Iterative Solution of Implicit Approximations of Multidimensional Partial Differential Equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 5(3), 530–558.
- Stone, H. (2000). Philip Saffman and Viscous Flow Theory. *Journal of Fluid Mechanics* 409, 165–183.
- Tchen, C. (1947). *Mean Value and Correlation Problems Connected With the Motion of Small Particles Suspended in a Turbulent Fluid*. Dissertation, Technische Universität Delft.
- van Driest, E. R. (1956). On Turbulent Flow Near a Wall. *Journal of the Aeronautical Sciences* 23(11), 1007–1011.
- Viccione, G., V. Bovolín, und E. P. Carratelli (2008). Defining and Optimizing Algorithms for Neighbouring Particle Identification in SPH Fluid Simulations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 58(6), 625–638.
- Vreman, A. W. (2007). Turbulence Characteristics of Particle-Laden Pipe Flow. *Journal of Fluid Mechanics* 584, 235–279.
- Wilcox, D. (1993). *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries.
- Zagarola, M. und A. Smits (1998). Mean-Flow Scaling of Turbulent Pipe Flow. *Journal of Fluid Mechanics* 373, 33–79.

# Anhang

## A. Auflistung aller simulierten Testfälle

#	Reibung		Wand- rauheit	$\eta$	Zwei-Wege- Kopplung	Partikel-Partikel- Kollisionen
	Wand	Partikel				
00	aus	aus	aus	0,1	aus	aus
01	aus	aus	aus	0,1	an	aus
02	aus	aus	aus	0,1	aus	an
03	aus	aus	aus	0,1	an	an
04	aus	aus	aus	0,5	aus	aus
05	aus	aus	aus	0,5	an	aus
06	aus	aus	aus	0,5	aus	an
07	aus	aus	aus	0,5	an	an
08	aus	aus	aus	1,0	aus	aus
09	aus	aus	aus	1,0	an	aus
10	aus	aus	aus	1,0	aus	an
11	aus	aus	aus	1,0	an	an
12	an	aus	aus	0,1	aus	aus
13	an	aus	aus	0,1	an	aus
14	an	aus	aus	0,1	aus	an
15	an	aus	aus	0,1	an	an
16	an	aus	aus	0,5	aus	aus
17	an	aus	aus	0,5	an	aus
18	an	aus	aus	0,5	aus	an
19	an	aus	aus	0,5	an	an
20	an	aus	aus	1,0	aus	aus
21	an	aus	aus	1,0	an	aus
22	an	aus	aus	1,0	aus	an
23	an	aus	aus	1,0	an	an
24	an	aus	an	0,1	aus	aus
25	an	aus	an	0,1	an	aus
26	an	aus	an	0,1	aus	an
27	an	aus	an	0,1	an	an
28	an	aus	an	0,5	aus	aus
29	an	aus	an	0,5	an	aus

Anhang

#	Reibung		Wand- rauheit	$\eta$	Zwei-Wege- Kopplung	Partikel-Partikel- Kollisionen
	Wand	Partikel				
30	an	aus	an	0,5	aus	an
31	an	aus	an	0,5	an	an
32	an	aus	an	1,0	aus	aus
33	an	aus	an	1,0	an	aus
34	an	aus	an	1,0	aus	an
35	an	aus	an	1,0	an	an
36	aus	an	aus	0,1	aus	an
37	aus	an	aus	0,1	an	an
38	aus	an	aus	0,5	aus	an
39	aus	an	aus	0,5	an	an
40	aus	an	aus	1,0	aus	an
41	aus	an	aus	1,0	an	an
42	an	an	aus	0,1	aus	an
43	an	an	aus	0,1	an	an
44	an	an	aus	0,5	aus	an
45	an	an	aus	0,5	an	an
46	an	an	aus	1,0	aus	an
47	an	an	aus	1,0	an	an
48	an	an	an	0,1	aus	an
49	an	an	an	0,1	an	an
50	an	an	an	0,5	aus	an
51	an	an	an	0,5	an	an
52	an	an	an	1,0	aus	an
53	an	an	an	1,0	an	an