

Reduktionsverfahren für die vibroakustische
Simulation von Flugzeugstrukturen mit der
Finite-Elemente-Methode

Robert Georg Möllenhoff

Betreuer:

Prof. Dr.-Ing. habil. Frank Ihlenburg
Dipl.-Ing. Martin Wandel

5. Dezember 2012

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theoretische Grundlagen	3
2.1	Schwingungen diskreter Systeme	3
2.1.1	Direkte Frequenzantwortanalyse	3
2.1.2	Modale Frequenzantwortanalyse ohne Dämpfung	4
2.1.3	Dämpfung	6
2.1.4	Modale Frequenzantwortanalyse mit Dämpfung	8
2.2	Reduktionsmethoden	9
2.2.1	Modale Reduktion	9
2.2.2	Ermittlung von Residualvektoren	10
2.2.3	Statische Reduktion nach Guyan	12
2.2.4	Dynamische Reduktion (Component Mode Synthesis)	14
2.2.5	Automatische mehrstufige dynamische Reduktion	17
2.3	Fluid-Struktur-Interaktion	22
2.3.1	Grundlagen der Wellenausbreitung	22
2.3.2	Randbedingungen	24
2.3.3	Kopplungsbedingungen	25
2.3.4	Direkte Frequenzantwortanalyse	26
2.3.5	Modale Frequenzantwortanalyse	26
2.3.6	Beispiel	27
3	Modellanalyse und Berechnungsmethodik	33
3.1	Geometrie und Vernetzung	33
3.1.1	Pfade der Schwingungsanregung	34
3.1.2	Elemente	34
3.1.3	Randbedingungen	35
3.2	Lasten	36
3.2.1	Dynamische Lasten in Nastran	36
3.2.2	Lastdefinitionen	37
3.3	Berechnungsablauf	40
3.4	Auswertung	42
3.4.1	Frequenzantwortanalyse	42

3.4.2	Rechenzeit und Ressourcenverbrauch	44
4	Ergebnisse der Berechnungen	46
4.1	Struktur-Berechnungen	46
4.1.1	Lastdefinitionen	46
4.1.2	ACMS ohne Residualvektoren	51
4.1.3	ACMS mit Residualvektoren	55
4.1.4	ACMS und externes Superelement	58
4.1.5	ACMS mit Residualvektoren und Vorlasten	62
4.1.6	Zusammenfassung	65
4.2	Fluid-Struktur-Interaktion-Berechnungen	65
4.2.1	ACMS mit Residualvektoren	66
4.2.2	ACMS und externes Superelement	70
4.2.3	Zusammenfassung	73
5	Schlussbetrachtung	75
A	Öffentlicher Anhang	A-1
A.1	Auszug aus dem DMAP Programmer's Guide	A-1
A.2	Zusätzliche Diagramme und Auswertungen	A-2
A.2.1	Struktur, ACMS CPU Variation (SMP/DMP)	A-2
A.2.2	FSI, Direkte Lastdefinitionen	A-3
A.2.3	FSI, ACMS Lastdefinitionen	A-5
A.2.4	FSI, ACMS ohne Residualvektoren	A-7
B	Gesperrter Anhang	B-1
B.1	Abbildungen des Flugzeugmodells	B-1
B.2	Diagramme der Frequenz-Antwort-Analysen	B-3
B.2.1	Struktur, ACMS ohne Residualvektoren	B-3
B.2.2	Struktur, ACMS mit Residualvektoren	B-10
B.2.3	Struktur, ACMS und externes Superelement	B-17
B.2.4	Struktur, ACMS mit Residualvektoren und Vorlasten	B-24
B.2.5	FSI, ACMS ohne Residualvektoren	B-31
B.2.6	FSI, ACMS mit Residualvektoren	B-38
B.2.7	FSI, ACMS und externes Superelement	B-45

Abkürzungsverzeichnis

ACMS	Automated Component Mode Synthesis
AMLS	Automated Multilevel Substructuring
BPF	Blade Passing Frequency, Blattpassierfrequenz
CFD	Computational Fluid Dynamics, Numerische Strömungsmechanik
CMS	Component Mode Synthesis
CROR	Counterrotating Open Rotor, gegenläufige Doppelpropeller
DIN	Deutsches Institut für Normung
DMP	Distributed Memory Processing
DOF	Degree of Freedom, Freiheitsgrad
FE	Finite Elemente
FEM	Finite Element Methode
FSI	Fluid-Struktur-Interaktion
HPC	High Performance Cluster
I/O	Input/Output, Ein-/Ausgabe
RV	Residualvektor
SMP	Shared Memory Processing
SPL	Sound Pressure Level, Schalldruckpegel
VL	Vorlast

Abbildungsverzeichnis

1	Balken-Beispiel, Vergleich Direkt mit Modal	10
2	Balken-Beispiel, Vergleich Direkt mit Modal mit RV	12
3	Balken-Beispiel, Vergleich Direkt mit Guyan	14
4	Balken-Beispiel, Vergleich Direkt mit CMS	16
5	Zweistufige binäre Unterteilung der symmetrischen Steifigkeitsmatrix	19
6	Symmetrische Matrizen zur Elimination der Nebendiagonalen.	20
7	Balken-Beispiel, Vergleich Direkt mit ALMS	22
8	Prinzipdarstellung der Schallwellennormale	24
9	Übergang einer Schallwelle zwischen zwei Medien	24
10	FSI-Beispiel, FE-Modell, Abstände in Längsrichtung überhöht dargestellt.	28
11	FSI-Beispiel ohne Absorber, SPL	29
12	FSI-Beispiel ohne Absorber, Fehler	29
13	FSI-Beispiel mit Absorber, SPL	31
14	FSI-Beispiel mit Absorber, Fehler	31
15	Unterteilung eines Verkehrsflugzeugs in Sektionen am Beispiel des A350-900	33
16	Skizze für die Pfade der Schwingungsanregung	34
17	Struktur, Abweichungen Direkt - Lastdefinitionen	47
18	Struktur, Laufzeitanalyse Direkt - Lastdefinitionen	48
19	Struktur, Abweichungen ACMS 490/2.0 - Lastdefinitionen	49
20	Struktur, SubDMAPs ACMS 490/2.0 - Lastdefinitionen	50
21	Struktur, Abweichungen ACMS bis 490 Hz ohne RV	52
22	Struktur, Abweichungen ACMS Up-Faktor 3.0 ohne RV	53
23	Struktur, Abweichungen, ACMS Up-Faktor 3.0 ohne RV (NACRE,1R)	54
24	Struktur, Abweichungen, ACMS Up-Faktor 3.0 ohne RV (Rolls-Royce,1R)	54
25	Struktur, Abweichungen ACMS bis 490 Hz mit RV	56
26	Struktur, Abweichungen ACMS Up-Faktor 3.0 mit RV	57
27	Struktur, Laufzeitanalyse ACMS Up-Faktor 3.0 mit RV	58
28	Struktur, Abweichungen ACMS 490/3.0 Externes SE	60
29	Struktur, Abweichungen, ACMS 490/3.0 Externes SE (NACRE,1R)	61
30	Struktur, Abweichungen, ACMS 490/3.0 Externes SE (Rolls-Royce,1R)	61
31	Struktur, Abweichungen ACMS Up-Faktor 3.0 mit VL	63
32	Vergleich Anzahl Eigenmoden über Frequenz	66

33	FSI, Abweichungen ACMS Struktur 490/3.0 mit RV	67
34	FSI, Abweichungen, ACMS Struktur 490/3.0 mit RV (NACRE,2R)	68
35	FSI, Abweichungen, ACMS Struktur 490/3.0 mit RV (Rolls-Royce,2R)	68
36	FSI, Abweichungen, ACMS Struktur 490/3.0 mit RV (NACRE,3R)	68
37	FSI, Abweichungen, ACMS Struktur 490/3.0 mit RV (Rolls-Royce,3R)	69
38	FSI, Laufzeitanalyse ACMS Struktur 490/3.0 mit RV	70
39	FSI, Abweichungen ACMS und ExtSE	71
40	FSI, Abweichungen, ACMS und ExtSE (NACRE,1R)	72
41	FSI, Abweichungen, ACMS und ExtSE (Rolls-Royce,1R)	72
42	FSI, Laufzeitanalyse ACMS und ExtSE	73
43	Struktur, Laufzeitanalyse ACMS CPU Variation	A-2
44	FSI, Abweichungen Direkte Lastdefinitionen	A-3
45	FSI, Laufzeitanalyse Direkte Lastdefinitionen	A-4
46	FSI, Abweichungen ACMS Lastdefinitionen	A-5
47	FSI, Laufzeitvergleich ACMS Lastdefinitionen	A-6
48	FSI, Abweichungen ACMS Struktur 490/3.0 ohne RV	A-7
49	FSI, Laufzeitanalyse ACMS Struktur 490/3.0 ohne RV	A-8
50	Längsschnitt Struktur von S18 (grün) und S19 (rot)	B-1
51	Außenansicht der Fluidelemente von S18 (cyan) und S19 (blau)	B-1
52	Längsschnitt der gesamten Struktur mit Einspannung	B-1
53	Längsschnitt Struktur von S18 mit gedämpften Fluiden	B-2

Tabellenverzeichnis

1	FSI-Beispiel, Eigenfrequenzen des Systems [Hz]	28
2	Lastdefinitionen bei 7 Anregungen mit je 50K Elementlasten	38
3	Überblick über die Hardware des Airbus HPCs, Angaben je Knoten	40
4	Struktur, Vergleich Direkt - Lastdefinitionen	47
5	Struktur, Vergleich ACMS 490/2.0 - Lastdefinitionen	50
6	Struktur, Vergleich ACMS bis 490 Hz ohne RV	52
7	Struktur, Vergleich ACMS Up-Faktor 3.0 ohne RV	55
8	Struktur, Vergleich ACMS bis 490 Hz mit RV	55
9	Struktur, Vergleich ACMS Up-Faktor 3.0 mit RV	58
10	Struktur, Vergleich ACMS-Vorberechnungen für externe SE mit RV	59
11	Struktur, Vergleich ACMS 490/3.0 Externes SE	62
12	Struktur, Vergleich ACMS Up-Faktor 3.0 mit VL	63
13	FSI, Vergleich ACMS Struktur 490/3.0 mit RV	69
14	FSI, Vergleich ACMS und ExtSE	73
15	Überblick über einige DMAP-Prozeduren	A-1
16	Struktur, Vergleich ACMS CPU Variation	A-2
17	FSI, Vergleich Direkte Lastdefinitionen	A-3
18	FSI, Vergleich ACMS Lastdefinitionen	A-6
19	FSI, Vergleich ACMS Struktur 490/3.0 ohne RV	A-8

1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen des Masterstudiengangs in der Vertiefungsrichtung Berechnung und Simulation im Maschinenbau an dem Department Maschinenbau und Produktion der Fakultät Technik und Informatik der Hochschule für Angewandte Wissenschaften in Hamburg. Sie wurde in Zusammenarbeit mit der Airbus Operations GmbH erstellt. Vorausgegangen ist bereits ein Masterprojekt [3], welches einige Voruntersuchungen an einem skalierten Modell behandelt hat.

In Anbetracht des gestiegenen Komfortbewusstseins der Passagiere ist das Erreichen eines geringen Geräuschpegels im Innenraum von Flugzeugen zu einem wichtigen Ziel bei der Flugzeugentwicklung geworden. Insbesondere derzeitige Studien über neue Triebwerksysteme wie den Counter Rotating Open Rotor (CROR) stellen eine Herausforderung für die akustische Auslegung dar. Zum Erreichen niedriger Geräuschpegel ist es notwendig schon vor dem Bau erster Prototypen Kenntnisse über die akustischen Eigenschaften der Flugzeugstruktur und der Kabine zu erlangen. Als Werkzeug hat sich zu diesem Zweck im unteren Frequenzbereich die numerische Simulation mittels Finite Elemente Methode (FEM) etabliert. Das Ziel der Simulation ist die Vorhersage des Schallpegels in der Kabine bei dynamischer Anregung der primären Kabinenstruktur.

Derzeit werden die FE-Gleichungssysteme in der Simulationsabteilung der Innenraumakustik mittels direkter Berechnungsverfahren gelöst. Üblicherweise liegt die Anzahl der Freiheitsgrade eines FE-Modells im Bereich von 1 bis 2 Mio., d.h. das Gleichungssystem hat Unbekannte. Durch die Frequenzabhängigkeit der dynamischen Lasten muss das Gleichungssystem für jede Frequenz separat gelöst werden, was zu einem sehr hohen Rechenaufwand führt. Im Rahmen dieser Arbeit werden alternative modale Lösungsverfahren untersucht, um den Rechenaufwand zu reduzieren. Diese alternativen Lösungsverfahren werden hinsichtlich ihrer Effizienz und Genauigkeit mit der direkten Lösung verglichen. Von besonderem Interesse sind dabei verschiedene Verfahren der modalen Reduktion (global als modale Superposition, lokal als Component Mode Synthesis (CMS) in Superelementen).

Für die FE-Berechnungen wird das Programmpaket MSC.Nastran der Firma SC.Software eingesetzt. Es werden dabei ausschließlich Funktionen benutzt, die standardmäßig verfügbar sind. Erweiterungen durch Drittanbieter finden keine Berücksichtigung. Der Einfluss verschiedener Berechnungsmethoden und deren Parametern wird zuerst an Strukturberechnungen untersucht. In einem zweiten Schritt werden die Methoden auf Grundlage der Erkenntnisse auf gekoppelte Fluid-Struktur-Berechnungen angewandt und die Ergebnisse erneut analysiert. Die Auswertung der Frequenzantworten, Rechenzeiten und Ressourcenverbräuche erfolgt mit dem Programmpaket Matlab der Firma Mathworks. Hierzu wurden diverse Funktionen programmiert, die u.A. Protokolldateien in Textform in ein strukturiertes Format überführen und zur automatisierten Auswertung verfügbar machen.

In Kapitel 2 werden die theoretischen Grundlagen der Berechnungsmethoden vorgestellt. Dabei liegt der Schwerpunkt nicht primär auf der mathematischen Herleitung, sondern auf der Beschreibung der Matrix-Operationen des Gleichungssystems. Von besonderem Interesse sind dabei die Dämpfungsmodelle und Kopplungsbedingungen, da sie maßgeblichen Einfluss auf die Effizienz der modalen Berechnungsmethoden haben. Die Reduktionsme-

thoden werden anhand von einer MATLAB-Beispielberechnung illustriert. Ebenso wird der Einfluss von Absorberelementen auf die Genauigkeit der modalen Verfahren anhand eines einfachen Beispiels untersucht.

Das betrachtete Modell einer Teilstruktur eines Flugzeugkonzepts inklusive modellierter Fluide in der Kabine wird in Kapitel 3 der hinsichtlich der Anregungspfade, Elemente, Randbedingungen beschrieben. Des weiteren werden die Lastdefinitionen analysiert, einen großen Einfluss auf die Rechenzeit haben. Vor dem Hintergrund von Mehrprozessoringebungen wird außerdem auf die Charakteristik der Berechnungsabläufe von direkter und modaler Berechnung eingegangen um abschließend Kennwerte für eine einheitliche Auswertung der Berechnungen zu definieren.

Die Auswertung und Analyse der Berechnungsergebnisse erfolgt in Kapitel 4. Analog zu der beschriebenen Methodik werden zuerst die Strukturberechnungen und dann die gekoppelten Berechnungen anhand der definierten Kennwerte mit den jeweiligen Referenzberechnungen verglichen. Von besonderem Interesse ist dabei der Einfluss der Residualvektoren und der Eigenmoden auf die Ergebnisqualität, welche direkt über die gewählte obere modale Grenzfrequenz und indirekt über den Upscale-Faktor bei ACMS-Berechnungen (Automated Component Mode Synthesis) bestimmt wird.

Abschließend erfolgt in Kapitel 5 eine Schlussbetrachtung mit einer Zusammenfassung der vorgelegten Arbeit und einem Ausblick auf mögliche weiterführende Untersuchungen.

2 Theoretische Grundlagen

Das Kapitel umfasst die theoretischen Grundlagen zu Schwingungen diskreter Systeme. Hierbei werden sowohl ungedämpfte wie auch gedämpfter Schwingungen behandelt und in diesem Zuge verschiedene Dämpfungsmodelle betrachtet. Anschließend werden verschiedene Methoden zur Reduktion diskreter Gleichungssysteme vorgestellt und ihre Funktionsweise anhand eines einfachen Beispiels illustriert. Abschließend werden die Grundlagen zur Wellenausbreitung in Fluiden und die Fluid-Struktur-Interaktion, d.h. die Kopplung von Schwingungen zwischen Fluiden und Strukturen, erläutert.

Schall entsteht durch lokale Partikelschwingungen, die sich in Form von Wellen im akustischen Medium ausbreiten. Bei akustischen Medien unterscheidet man zwischen Fluiden, welche Flüssigkeiten und Gase beinhalten, und Körpern. Körperschall tritt in Festkörpern auf. Dabei wird zwischen Kontinuum und Strukturen unterschieden. Von besonderer Bedeutung sind in dieser Arbeit Biegeschwingungen dünnwandiger Strukturen.

2.1 Schwingungen diskreter Systeme

Mithilfe der FE-Methode lässt sich ein gegebener physikalischer Körper als diskretes System mit n Freiheitsgraden beschreiben. Geht man von einer harmonischen Anregung \mathbf{F} aus, so gilt für den ungedämpften Fall [23]:

$$\mathbf{K}\mathbf{U} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} = \mathbf{F}. \quad (2.1)$$

Dabei ist \mathbf{K} die Steifigkeitsmatrix und \mathbf{M} die Massenmatrix des Systems. Die noch unbekanntenen Verschiebungen der Knoten sowie deren Beschleunigung als zweifache Ableitungen werden vektoriell mit \mathbf{U} bzw. $\ddot{\mathbf{U}}$ bezeichnet. Üblicherweise handelt es sich bei \mathbf{K} und \mathbf{M} um symmetrische Bandmatrizen [1], d.h. nur die Hauptdiagonale sowie eine begrenzte Anzahl von Nebendiagonalen sind besetzt. Für den gedämpften Fall mit \mathbf{C} als Dämpfungsmatrix des Systems gilt:

$$\mathbf{K}\mathbf{U} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} = \mathbf{F}. \quad (2.2)$$

2.1.1 Direkte Frequenzantwortanalyse

Es wird angenommen, dass die harmonische Anregung $\mathbf{F} = \mathbf{f}e^{i\omega t}$ im eingeschwungenen Zustand eine ebenfalls harmonische Antwort $\mathbf{U} = \mathbf{u}e^{i\omega t}$ erzeugt [23]. Das Einsetzen in (2.2) ergibt die gedämpfte Schwingungsgleichung im Frequenzbereich:

$$[\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}] \mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (2.3)$$

Die Matrix innerhalb der Rechteckklammern in (2.3) wird als dynamische Steifigkeitsmatrix bezeichnet. Die linksseitige Multiplikation ihrer Inversen mit \mathbf{f} führt zu dem Vektor \mathbf{u} mit den unbekanntenen Verschiebungen:

$$\mathbf{u} = [\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}]^{-1} \mathbf{f}. \quad (2.4)$$

Die direkte Berechnung der Inversen einer aufgrund der Dämpfungsmatrix im Allgemeinen vollbesetzten Matrix ist z.B. mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren möglich. Der Aufwand, d.h. die Kosten hinsichtlich Rechenzeit und Speicherressourcen, steigt jedoch exponentiell mit der Anzahl der Freiheitsgrade des Systems. Bereits bei wenigen tausend Freiheitsgraden ist die direkte Berechnung sehr kostspielig. Alternative Lösungsverfahren auf Grundlage des Gaußschen Eliminationsverfahren sowie iterative Lösungsverfahren werden u.A. in [1] beschrieben. Da die dynamische Steifigkeitsmatrix von ω abhängig ist, muss die Inverse für jeden Frequenzschritt erneut ermittelt werden. Unter Vernachlässigung der Rechenzeit für das Aufstellen der Systemmatrizen folgt ein linearer Zusammenhang zwischen der Anzahl der Frequenzschritte und der Rechenzeit bei der direkten Lösung.

2.1.2 Modale Frequenzantwortanalyse ohne Dämpfung

Im ungedämpften Fall reduziert sich Gleichung (2.3) zu dem linearen Gleichungssystem

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (2.5)$$

mit symmetrischen positiv-definiten Matrizen der Größe (n, n) : Es ist nun eine Transformationsmatrix Φ gesucht, die den Vektor \mathbf{u} im n -dimensionalen Raum als lineare Kombination von n linear-unabhängigen Vektoren \mathbf{q} darstellt [23]:

$$\Phi \mathbf{q} = \mathbf{u}. \quad (2.6)$$

Zur Ermittlung dieser Transformationsmatrix Φ , muss das generalisierte Eigenproblem [1]

$$\mathbf{K}\varphi = \omega^2 \mathbf{M}\varphi \quad (2.7)$$

gelöst werden. Die Lösung des Eigenproblems liefert genau n Eigenlösungen (φ_1, ω_1^2) , $(\varphi_2, \omega_2^2), \dots, (\varphi_n, \omega_n^2)$. Der Vektor φ_i wird als *iter* Eigenvektor und ω_i als die *ite* Eigenkreisfrequenz bezeichnet, wobei mit $\omega_i^2 = \lambda_i$ sich der *ite* Eigenwert in der allgemeinen Notation ergibt. Man kann zeigen, dass alle Eigenlösungen reell und die Eigenvektoren zueinander orthogonal sind [8]. Außerdem gilt $(0 \leq \omega_1^2 < \omega_2^2, \dots, \omega_n^2)$.

Die gesuchte Transformationsmatrix Φ erhält man aus der spaltenweisen Anordnung der Eigenvektoren:

$$\Phi = [\varphi_1 | \varphi_2 | \dots | \varphi_n]. \quad (2.8)$$

Die Quadrate der Eigenkreisfrequenzen bzw. Eigenwerte werden in einer Diagonalmatrix angeordnet:

$$\Omega^2 = \Lambda = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \omega_n^2 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Mit Φ und Ω^2 lässt sich das verallgemeinerte Eigenproblem (2.7) auch als

$$\mathbf{K}\Phi = \Omega^2\mathbf{M}\Phi \quad (2.10)$$

schreiben [1]. Nach linksseitiger Multiplikation mit Φ^T und Massennormalisierung der Eigenvektoren, so dass

$$\Phi^T\mathbf{M}\Phi = \mathbf{I} \quad (2.11)$$

gilt, wird Gleichung (2.10) in die Form

$$\Phi^T\mathbf{K}\Phi = \Omega^2 \quad (2.12)$$

umgewandelt. Die Transformation führt auf der rechten Seite von (2.12) zu der bereits bekannten Diagonalmatrix Ω^2 der Quadrate der Eigenkreisfrequenzen.

Mit der Transformation (2.6) wird ein Basiswechsel durchgeführt, welcher zur Lösung eines Ersatzproblems führt. Wendet man die Transformation auf (2.5) an und multipliziert mit Φ^T von links, so ergibt sich:

$$\Phi^T [\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}] \Phi \mathbf{q} = \Phi^T \mathbf{f}. \quad (2.13)$$

Der Vektor \mathbf{q} enthält die noch unbekanntenen Ersatzfreiheitsgrade, die als modale Partizipationsfaktoren oder auch als modale generalisierte Verschiebungen bezeichnet werden. Mit $\Phi^T \mathbf{f} = \hat{\mathbf{f}}$ als modale Anregung und unter Anwendung von Φ^T bzw. Φ auf die Matrizen innerhalb der Klammer vereinfacht sich (2.13) zu:

$$[\Omega^2 - \omega^2\mathbf{I}] \mathbf{q} = \hat{\mathbf{f}}. \quad (2.14)$$

Die Lösung für den Vektor der modalen Partizipationsfaktor ist dann:

$$\mathbf{q} = [\Omega^2 - \omega^2\mathbf{I}]^{-1} \hat{\mathbf{f}}. \quad (2.15)$$

Die Überführung des Gleichungssystem in die gegebene Diagonalform ermöglicht die unabhängige Lösung der modalen Partizipationsfaktor q_i bei gegebener modalen Anregung \hat{f}_i und Eigenfrequenz ω_i und gesuchter Frequenz ω :

$$q_i(\omega) = \frac{\hat{f}_i}{\omega_i^2 - \omega^2}. \quad (2.16)$$

Gleichung (2.16) zeigt die Frequenzabhängigkeit der modalen Partizipationsfaktoren. Der Vektor \mathbf{q} der modalen Partizipationsfaktoren ist dann:

$$\mathbf{q}(\omega) = [q_1(\omega), q_2(\omega), \dots, q_n(\omega)]^T. \quad (2.17)$$

Mit Gleichung (2.6) erfolgt die Rücktransformation des Vektors der modalen Partizipationsfaktoren in den gesuchten Lösungsvektor \mathbf{u} .

Bei allen Transformationen handelt es sich um äquivalente Basiswechsel, womit die Lösung der modalen Frequenzantwortanalyse äquivalent zu der Lösung der direkten Frequenzantwortanalyse ist. Gegenüber der direkten Berechnung beinhaltet die modale Berechnung

mit der Lösung des Eigenproblems jedoch einen weiteren Lösungsschritt. Der Vorteil liegt aber in der entkoppelten Lösung des modalen Gleichungssystems, während das direkte Gleichungssystem mit den vollbesetzten Matrizen für jeden gesuchten Frequenzschritt erneut kostenaufwändig gelöst werden muss. Die Lösung der Gleichung (2.16) und die anschließende Rücktransformation in den Frequenzbereich sind auf Grund ihrer einfachen Rechenoperationen um ein Vielfaches sparsamer. Zur Berücksichtigung der physikalischen Realität werden im nachfolgenden Abschnitt Dämpfungsmodelle beschrieben die den entkoppelnden Charakter der modalen Lösung erhalten.

2.1.3 Dämpfung

Dämpfung beschreibt die Umwandlung von mechanischer Energie in Wärmeenergie. Sie tritt bei allen physikalischen Vorgängen auf und ist irreversibel. Einem schwingungsfähigen System wird durch Dämpfung kontinuierlich Energie entzogen, so dass die Amplituden freier Schwingungen mit der Zeit abnehmen und auch in Resonanz endlich bleiben [13].

Dämpfungseffekte basieren auf verschiedenen physikalischen Vorgängen wie u.A. innerer Materialdämpfung durch mikrophysikalische Effekte, Fugendämpfung durch oszillierende Mikrobewegungen an konstruktionsbedingten Fugen, Coulomb'scher Reibung an Kontaktstellen, Luftreibung sowie viskose Dämpfung durch Tilger [13, 19, 12]. Die Dämpfungseffekte lassen sich durch die dissipierte Energie kennzeichnen. Das Verhältnis der dissipierten Dämpfungsarbeit W_{diss} zu der maximalen potentiellen Energie W_{pot} pro Schwingungszyklus wird als Verlustfaktor definiert [11]:

$$\eta = \frac{W_{diss}}{2\pi W_{pot}}. \quad (2.18)$$

Der Verlustfaktor ist einheitenlos und es besteht im Allgemeinen eine Material-, Frequenz- und Temperaturabhängigkeit. Bei schwacher Abhängigkeit wird für kleine Bereiche ein konstantes Verhalten angenommen.

Um die Einzeleffekte zu betrachten sind mathematische Modelle zur Ermittlung von Modellparametern entwickelt worden. Im Vergleich mit Versuchen zeigen sie sehr gute Übereinstimmungen. Jedoch muss man für die Kombination aller Effekte nach derzeitigem Wissensstand auf qualitative Beschreibungen durch Dämpfungsmodelle zurückgreifen.

Strukturdämpfung nach Kelvin-Voigt Für den einfachen eindimensionalen Fall besteht das Kelvin-Voigt-Modell nach dem rheologischen Ansatz aus einer Parallelschaltung einer Feder mit der Federkonstanten k und einem viskosen Dämpfer mit der Dämpferkonstanten c . Auf Grund der Parallelschaltung addieren sich Feder- und Dämpferkraft bei einer komplexen harmonischen Auslenkung $x = \hat{x}e^{i\omega t}$ zu

$$F = (k + ic\omega)x. \quad (2.19)$$

Man führt die komplexe Steifigkeit

$$k_c = (k + ic\omega) \quad (2.20)$$

ein. Mit dem Verhältnis zwischen dissipierter Energie des Dämpfers und Formänderungsenergie der Feder folgt der Verlustfaktor

$$\eta = \frac{c\omega}{k}. \quad (2.21)$$

Nach Umformen und Einsetzen von (2.21) in (2.20) kann die komplexe Steifigkeit, nun in Matrixschreibweise, in Abhängigkeit des Verlustfaktors beschrieben werden:

$$\mathbf{K}_c = (1 + i\eta)\mathbf{K}. \quad (2.22)$$

Um den entkoppelnden Charakter bei der modalen Frequenzantwortanalyse beizubehalten muss der Verlustfaktor global gelten, d.h. jedes Element muss den gleichen Verlustfaktor aufweisen. Bei globaler Dämpfung führt die Massennormalisierung der komplexen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_c zu einer Diagonalmatrix der Form:

$$\Phi^T \mathbf{K}_c \Phi = (1 + i\eta)\Omega^2. \quad (2.23)$$

Werden jedoch verschiedenen Teilen der Struktur unterschiedliche Verlustfaktoren zugewiesen, so spricht man von lokaler Dämpfung. Gleiches gilt für die Verwendung von Dämpfer- oder Absorber-Elementen. Die Massennormalisierung führt dann im Allgemeinen zu einer vollbesetzten Matrix.

Modale Dämpfung Für eine weitere effektive Berechnung mit Modenüberlagerung kann modale Dämpfung angenommen werden [1]:

$$\varphi_i^T \mathbf{C} \varphi_j = 2\omega_i \xi_i \delta_{ij}. \quad (2.24)$$

ξ_i ist ein modaler Dämpfungsparameter und δ_{ij} das Kronecker-Delta. Auf Grund des Kronecker-Deltas sind nur die Diagonalen der Dämpfungsmatrix belegt. Hinter der Definition von Gleichung (2.24) steht die Annahme, dass sich die Dämpfung des Systems durch die Beteiligung der einzelnen Dämpfung in jeder Mode ergibt. Charakteristisch für die modale Dämpfung ist die Zuordnung der Dämpfungsparameter zu den Eigenfrequenzen und nicht zu den Erregerfrequenzen. Der Dämpfungsparameter ξ_i ist im Allgemeinen für jede Mode unterschiedlich und kann in geeigneter Weise bestimmt werden.

Vergleicht man die Dämpfungsmatrizen von (globaler) Strukturdämpfung und modaler Dämpfung nach Transformation in den modalen Raum ergibt sich mit Gleichung (2.24) zwischen dem Verlustfaktor η und einem konstanten modalen Dämpfungsparameter $\xi_i = \xi$ im Resonanzfall $\omega = \omega_i$ der Zusammenhang

$$\eta = 2\xi. \quad (2.25)$$

Rayleigh-Dämpfung Der Rayleigh-Dämpfung liegt der Ansatz zugrunde eine Dämpfungsmatrix aus je einem proportionalen Anteil zur Massen- und zur Steifigkeitsmatrix zu erstellen [25]:

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}. \quad (2.26)$$

Dabei sind α und β zwei Dämpfungsparameter, die aus mindestens zwei gegebenen modalen Dämpfungsparametern ermittelt werden müssen. Nach Transformation von (2.26) in den modalen Raum ergibt sich zwischen den Rayleigh-Dämpfungsparametern und den modalen Dämpfungsparametern ξ_i der Zusammenhang

$$2\xi_i\omega_i = \alpha + \beta\omega_i^2. \quad (2.27)$$

Im Gegensatz zur modalen Dämpfung wird die Anzahl der zu ermittelnden Parameter bei der Rayleigh-Dämpfung stark reduziert. Jedoch zeigt sich ein Nachteil darin, dass eine Bestimmung der Dämpfungskonstanten bei tiefen Moden eine starke Dämpfung der höheren Moden bewirkt [1].

2.1.4 Modale Frequenzantwortanalyse mit Dämpfung

Unter Berücksichtigung der Dämpfungsmatrix \mathbf{C} wird die Schwingungsgleichung (2.5) vom Frequenzbereich mit Gleichung (2.6) in den modalen Raum transformiert und linksseitig mit Φ^T multipliziert:

$$\Phi^T [\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}] \Phi \mathbf{q} = \hat{\mathbf{f}}. \quad (2.28)$$

Die Transformationsmatrix Φ wird zur Vermeidung von komplexen Eigenvektoren und Eigenmoden unter Verwendung der Bewegungsgleichung für die ungedämpfte Schwingung berechnet, d.h. es gelten weiterhin die Gleichungen (2.7) bis (2.12). Die Lösung für den Vektor der modalen Partizipationsfaktoren ist nun unter Anwendung von Φ^T bzw. Φ auf die Matrizen innerhalb der Klammer gegeben als

$$\mathbf{q} = [\Phi^T \mathbf{K} \Phi + i\omega \Phi^T \mathbf{C} \Phi - \omega^2 \mathbf{I}]^{-1} \hat{\mathbf{f}}. \quad (2.29)$$

Die dynamische Steifigkeitsmatrix liegt nur für bestimmte Dämpfungsmodelle in Diagonalform vor. Die im vorherigen Abschnitt beschriebenen Dämpfungsmodelle erfüllen diese Bedingungen sofern bei Annahme einer Strukturdämpfung ausschließlich globale Dämpfung vorliegt. Die unabhängige Lösung der modalen Partizipationsfaktoren q_i bei gegebener modalen Anregung \hat{f}_i , Eigenfrequenz ω_i und gesuchter Frequenz ω wird für globale Strukturdämpfung zu:

$$q_i(\omega) = \frac{\hat{f}_i}{\omega_i^2(1 + i\eta) - \omega^2}, \quad (2.30)$$

und für modale Dämpfung zu

$$q_i(\omega) = \frac{\hat{f}_i}{\omega_i^2 + 2i\omega\xi_i\omega_i - \omega^2}. \quad (2.31)$$

Falls allgemeine Dämpfung oder eines der Dämpfungsmodelle mit lokalen Dämpfungsgebieten gegeben ist wird die Lösung der Gleichung (2.29) mit einem direkten Lösungsverfahren bestimmt.

2.2 Reduktionsmethoden

Bei Reduktionsmethoden handelt es sich um Methoden, die statt einer äquivalenten eine reduzierte modale Basis berechnen. Nachfolgend werden die jeweiligen Matrixoperationen beschrieben und der Einfluss etwaiger Auswahl- oder Steuerungsparameter auf den zu erwartenden Abbruchfehler gegenüber der direkten Lösung diskutiert. Zur Illustration werden die Ergebnisse einer Frequenzantwortanalyse an einem linksseitig festeingespannten Kragbalken unter Belastung von zwei Einzellasten präsentiert. Der Kragbalken wird als eindimensionaler Bernoulli-Balken[12] mit 64 Elementen modelliert. Die Berechnungen erfolgen auf Grundlage der vorgestellten Matrixoperationen mithilfe von Matlab.

2.2.1 Modale Reduktion

Bei Einführung der modalen Frequenzantwortanalyse in Kapitel 2.1.2 wird von einer Transformation aus dem Raum der Verschiebungen in eine äquivalente modale Basis ausgegangen. Dafür müssen jedoch alle n Paare der Eigenvektoren φ_i und Eigenkreisfrequenzen ω_i des Systems bestimmt werden. Werden stattdessen nur $N \ll n$ Eigenmoden bestimmt, so handelt es sich um eine reduzierte modale Basis und die Größe der Matrix Φ der Eigenvektoren wird von (n, n) auf die Dimension (n, N) reduziert:

$$\Phi_N = [\varphi_1 | \varphi_2 | \dots | \varphi_N]. \quad (2.32)$$

Die Transformation der Steifigkeitsmatrix entsprechend (2.12) führt auf die reduzierte Matrix

$$\Omega_N^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \omega_N^2 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

mit der Dimension (n_N, n_N) . Die Transformationsmatrix Φ_N überführt das Gleichungssystem damit in eine um $n - N$ Dimensionen reduzierte modale Basis. Dementsprechend enthält der Vektor der Partizipationsfaktoren \mathbf{q} lediglich N Variablen und der Aufwand zur Lösung der Gleichung (2.15) im ungedämpften Fall bzw. (2.29) im gedämpften Fall verringert sich entsprechend. Zur Ermittlung einer Untermenge der Eigenvektoren wurden eine Reihe von iterativen Methoden wie das Lanczos-Verfahren[14] entwickelt.

Der Abbruchfehler zwischen äquivalenter und reduzierter Lösung wird durch die fehlenden $n - N$ Eigenmoden verursacht. Erfahrungen bei Anwendung des Verfahrens haben ergeben, dass der Fehler durch die Reduktion hinreichend klein ist, wenn wenigstens alle Eigenmoden innerhalb des Erregerfrequenzband plus einem zusätzlichen Sicherheitsaufschlag bestimmt werden. Der Sicherheitsaufschlag variiert von 20 Prozent für industrielle Anwendungen bis über 50 Prozent bei wissenschaftlichen Berechnungen. Man kann mit praktischen Beispielen außerdem zeigen, dass die niedrigen Eigenmoden meist den gesamten Frequenzbereich beeinflussen, d.h. ihre Bestimmung ist im Allgemeinen unerlässlich, während Eigenmoden oberhalb des Sicherheitsaufschlags einen immer geringeren Einfluss auf die Antwort im untersuchten Frequenzband aufweisen.

Zur besseren Lesbarkeit werden die N -Indizes im weiteren Verlauf weggelassen, da bei den nachfolgenden Verfahren, wenn nicht anders angegeben, von einer reduzierten modalen Basis nach Ermittlung der Eigenmoden ausgegangen wird.

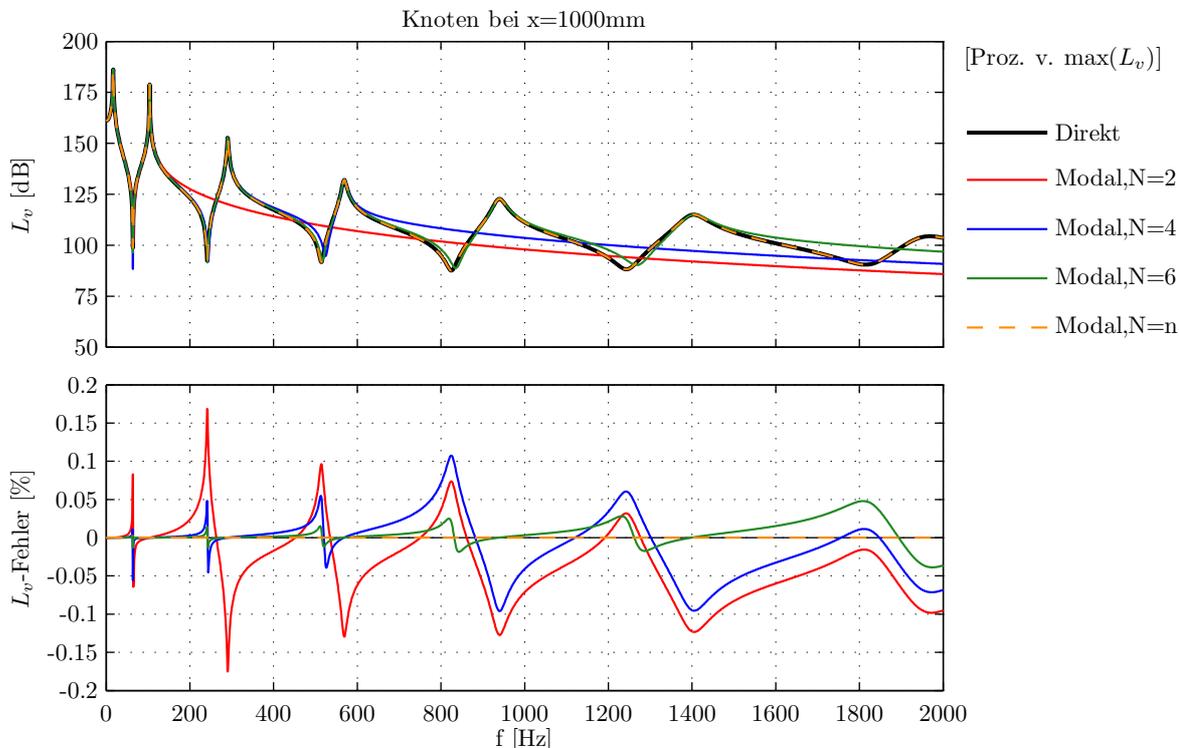


Abbildung 1: Balken-Beispiel, Vergleich Direkt mit Modal

Am Beispiel des Kragbalkens in Abbildung 1 lässt sich der Einfluss der Anzahl der berücksichtigten Eigenmoden erkennen. Im oberen Diagramm ist der Schallschnellepegel L_v des letzten Knotens über die Frequenz von 0 bis 1000Hz für die direkte Referenzberechnung und die modalen Berechnungen mit $N = 2, 4, 6, n$ dargestellt. Der Schallschnellepegel ist eine logarithmische Größe der Normalengeschwindigkeit (siehe Kapitel 3.4.1). Das untere Diagramm enthält die prozentualen Pegeldifferenzen zur Referenzlösung. Man kann erkennen, dass mit höherer Anzahl von Eigenmoden hohe Pegeldifferenzen erst mit größerer Frequenz auftreten. Bei $N = n$ handelt es sich schließlich um eine Berechnung mit äquivalenter modaler Basis und es tritt kein Abbruchfehler auf.

2.2.2 Ermittlung von Residualvektoren

Bei einer reduzierten modalen Basis werden die höheren Eigenvektoren $\varphi_{N+1}, \varphi_{N+2}, \dots, \varphi_n$ nicht berücksichtigt und führen zu einem Abbruchfehler. Mithilfe von Residualvektoren lässt sich mit geringem numerischen Aufwand gegenüber der iterativen Berechnung durch Berücksichtigung weiterer höherer Eigenmoden der Abbruchfehler reduzieren.

Zu Beginn der Methode wird ein Satz von linear unabhängigen Basisvektoren benötigt. Im Allgemeinen ist der Satz der Basisvektoren beliebig. Für ein einfaches Beispiel bietet

sich die Verwendung der aufgebrachten Lasten an¹. Dazu wird die statische Antwort des System $\mathbf{x}_{r_i} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}_i$ mit für die jeweilige extrahierte Einzellast \mathbf{f}_i berechnet. Es ergibt sich bei L linear unabhängigen Einzellasten der Satz der Basisvektoren \mathbf{X}_r mit

$$\mathbf{X}_r = [\mathbf{x}_{r_1} | \mathbf{x}_{r_2} | \cdots | \mathbf{x}_{r_L}]. \quad (2.34)$$

Durch eine Basistransformation werden unter Verwendung der bereits ermittelten modalen Eigenvektoren modifizierte Basisvektoren erzeugt:

$$\hat{\mathbf{X}}_r = \mathbf{X}_r - \Phi_N ((\Phi_N^T \mathbf{M} \Phi_N)^{-1} \Phi_N^T \mathbf{M} \mathbf{X}_r). \quad (2.35)$$

Nach [19] wird damit erreicht, dass die Basisvektoren nicht partiell abhängig von den Eigenvektoren sind. Anschließend wird das Eigenproblem

$$\hat{\mathbf{K}}_r \mathbf{v}_{r_i} = \omega_{r_i}^2 \hat{\mathbf{M}}_r \mathbf{v}_{r_i} \quad (2.36)$$

mit $\hat{\mathbf{K}}_r = \hat{\mathbf{X}}_r^T \mathbf{K} \hat{\mathbf{X}}_r$ und $\hat{\mathbf{M}}_r = \hat{\mathbf{X}}_r^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{X}}_r$ gelöst.

Die Residualvektoren Φ_r ergeben sich aus der Multiplikation der gefilterten Basisvektoren $\hat{\mathbf{X}}_r$ mit den ermittelten Eigenvektoren $\mathbf{V}_r = [\mathbf{v}_{r_1} | \mathbf{v}_{r_2} | \cdots | \mathbf{v}_{r_L}]$:

$$\Phi_r = \hat{\mathbf{X}}_r \mathbf{V}_r. \quad (2.37)$$

Nach einer Massennormalisierung werden die Residualvektoren mit den bereits ermittelten modalen Eigenvektoren zu

$$\Phi_{N+r} = [\Phi_N | \Phi_r] \quad (2.38)$$

verbunden. Gleiches gilt für die Matrix der Eigenwerte:

$$\Omega_{N+r}^2 = \text{diag}(\Omega_N^2, \Omega_r^2). \quad (2.39)$$

Die Spaltenanzahl der Matrix der Eigenvektoren vergrößert sich auf (n_{N+L}) und ebenso die Größe der Matrix der Eigenwerte auf (n_{N+L}, n_{N+L}) . Die Berechnung der Frequenzantwortanalyse kann ohne zusätzliche Zwischenschritte erfolgen. Auf Grund der einfachen mathematischen Operationen bei begrenzter Anzahl von Basisvektoren $\hat{\mathbf{X}}_r$ und dem günstigen Eigenproblem (2.36) können die zusätzlichen L Residualmoden bei komplexen Problemstellungen kostengünstig ermittelt werden.

Die Ermittlung von zwei zusätzlichen Residualvektoren aus den zwei Einzellasten des Kragbalkens führen in Abbildung 2 zu deutlichen Reduktionen der prozentualen Pegelabweichungen. Besonders im Bereich der Antimoden zwischen den ersten Eigenfrequenzen reduziert sich der Abbruchfehler für alle Varianten deutlich.

¹Für eine große Anzahl von aufgebrachten Lasten würde die Methode wiederum sehr ineffektiv werden, da jede weitere Last die Anzahl der Basisvektoren erhöht. Die Generierung der Basisvektoren in MSC.Nastran ist nicht dokumentiert. Durch Versuche konnte jedoch festgestellt werden, dass auch bei ca. 50.000 Einzellasten lediglich ca. 230 Basisvektoren erzeugt werden.

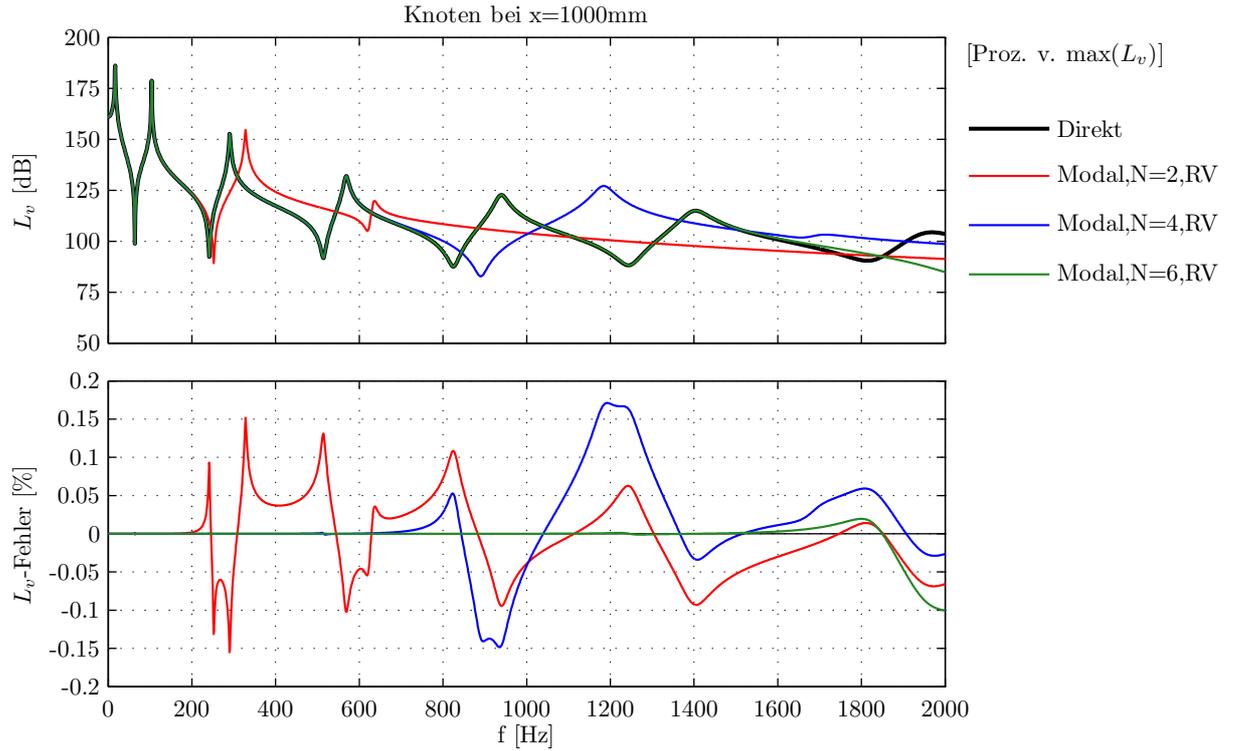


Abbildung 2: Balken-Beispiel, Vergleich Direkt mit Modal mit RV

2.2.3 Statische Reduktion nach Guyan

Der Grundgedanke der statischen Reduktion nach Guyan[7, 1] beruht darauf, dass man die Eigenschaften einiger Freiheitsgrade eines Systems hinsichtlich ihrer Steifigkeit auf andere Freiheitsgrade überträgt und sie anschließend aus dem System entfernt. Die Methode wurde für statische Probleme entwickelt und kann mit Erweiterung um die Massenmatrix auch auf Eigenprobleme angewandt werden. Je nach Quelle gibt es dabei verschiedene Benennungen für die Freiheitsgrade. Hier soll bei den zu entfernenden Freiheitsgraden von internen mit dem Index o und bei den übrigen von externen Freiheitsgraden mit Index a gesprochen werden. Üblich ist auch die Bezeichnung von Master und Slave, wobei die Master-Freiheitsgrade den externen und die Slaves den internen Freiheitsgraden entsprechen.

Bei dem gegebenen Eigenproblem (2.7) mit n Freiheitsgraden sortiert man die Steifigkeits- und Massenmatrix nach internen und externen Freiheitsgraden, wobei die internen Freiheitsgrade nach oben sortiert werden.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{oo} & \mathbf{K}_{oa} \\ \mathbf{K}_{ao} & \mathbf{K}_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_o \\ \varphi_a \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{oo} & \mathbf{M}_{oa} \\ \mathbf{M}_{ao} & \mathbf{M}_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_o \\ \varphi_a \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Aus der ersten Zeile des Gleichungssystem folgt direkt ohne Umformung:

$$\mathbf{K}_{oo}\varphi_o + \mathbf{K}_{oa}\varphi_a = \omega^2 [\mathbf{M}_{oo}\varphi_o + \mathbf{M}_{oa}\varphi_a]. \quad (2.41)$$

Nun wird der rechte Teil der Gleichung (2.41) zu Null gesetzt. Damit werden die inneren dynamischen Massenkräfte vernachlässigt. Der daraus resultierende Reduktionsfehler ist

nur hinreichend klein, wenn ω^2 sehr klein ist und/oder die Massenkraften gegenüber den Federkräften auf der rechten Seite klein sind. Die Umstellung nach dem noch unbekanntem approximierten Eigenvektor $\varphi_{\mathbf{o}}$ ergibt:

$$\varphi_{\mathbf{o}} = -\mathbf{K}_{\mathbf{oo}}^{-1}\mathbf{K}_{\mathbf{oa}}\varphi_{\mathbf{a}}. \quad (2.42)$$

Setzt man $\varphi_{\mathbf{o}}$ aus (2.42) in den globalen Verschiebungsvektor φ ein, so erhält man die statische Transformationsmatrix:

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_{\mathbf{o}} \\ \varphi_{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{\mathbf{oo}}^{-1}\mathbf{K}_{\mathbf{oa}} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \varphi_{\mathbf{a}} = \mathbf{G}_{\mathbf{ot}}\varphi_{\mathbf{a}}. \quad (2.43)$$

Die Transformationsmatrix lässt sich folgendermaßen deuten: jede Spalte der Matrix beschreibt eine “1“-Verschiebung eines externen Freiheitsgrades und die daraus resultierende Antwort der internen Freiheitsgrade. Dabei werden die übrigen externen Freiheitsgrade fixiert gehalten. Dieser Vorgang wird für alle externen Freiheitsgrade ausgeführt. Entsprechend der Sortierung des Verschiebungsvektors φ enthält der untere Anteil der Transformationsmatrix die Einheitsmatrix der Größe (n_a, n_a) und der obere Anteil eine im Allgemeinen vollbesetzte Matrix der Größe (n_o, n_a) , so dass die gesamte Matrix die Größe (n, n_a) hat.

Durch Substitution von φ in der Ausgangsgleichung (2.40) durch (2.43) und linksseitiges Multiplizieren mit $\mathbf{G}_{\mathbf{ot}}^T$ erhält man das reduzierte Eigenproblem

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{aa}}\varphi_{\mathbf{a}} = \omega^2\tilde{\mathbf{M}}_{\mathbf{aa}}\varphi_{\mathbf{a}} \quad (2.44)$$

mit der Steifigkeitsmatrix

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{aa}} = \mathbf{K}_{\mathbf{aa}} - \mathbf{K}_{\mathbf{ao}}\mathbf{K}_{\mathbf{oo}}^{-1}\mathbf{K}_{\mathbf{oa}} \quad (2.45)$$

und der Massenmatrix

$$\tilde{\mathbf{M}}_{\mathbf{aa}} = \mathbf{M}_{\mathbf{aa}} - \mathbf{K}_{\mathbf{ao}}\mathbf{K}_{\mathbf{oo}}^{-1}\mathbf{M}_{\mathbf{oa}} - \mathbf{M}_{\mathbf{ao}}\mathbf{K}_{\mathbf{oo}}^{-1}\mathbf{K}_{\mathbf{oa}} + \mathbf{K}_{\mathbf{ao}}\mathbf{K}_{\mathbf{oo}}^{-1}\mathbf{M}_{\mathbf{oo}}\mathbf{K}_{\mathbf{oo}}^{-1}\mathbf{K}_{\mathbf{oa}}. \quad (2.46)$$

Das ursprüngliche Eigenproblem der Größe (n, n) wird auf ein System der Größe (n_a, n_a) , also der Anzahl der externen Freiheitsgrade, transformiert. Die internen Freiheitsgrade werden für die Lösung des reduzierten Eigenproblems vollständig substituiert. Nach Lösung des reduzierten Eigenproblems (2.44) erfolgt wiederum eine Massennormalisierung der Eigenvektoren $\Phi_{\mathbf{a}}$ mit $\tilde{\mathbf{M}}_{\mathbf{aa}}$. Aus den reduzierten Eigenvektoren werden mit

$$\Phi = \mathbf{G}_{\mathbf{ot}}\Phi_{\mathbf{a}} \quad (2.47)$$

die approximierten Eigenvektoren für alle Freiheitsgrade extrahiert. Anschließend kann mit den Eigenvektoren Φ und den Eigenfrequenzen $\Omega_{\mathbf{a}} = \Omega$ die Frequenzantwort für das Gesamtsystem ermittelt werden.

Die statische Reduktion nach Guyan bildet die Grundlage für alle weiteren im Folgenden beschriebenen Reduktionsverfahren. Um den Reduktionsfehler der Methode zu verringern, kann man einige Freiheitsgrade von der Reduktion ausschließen, deren inneren dynamischen Massenkraften nicht vernachlässigt werden sollten, und sie als externen Freiheitsgrade betrachten.

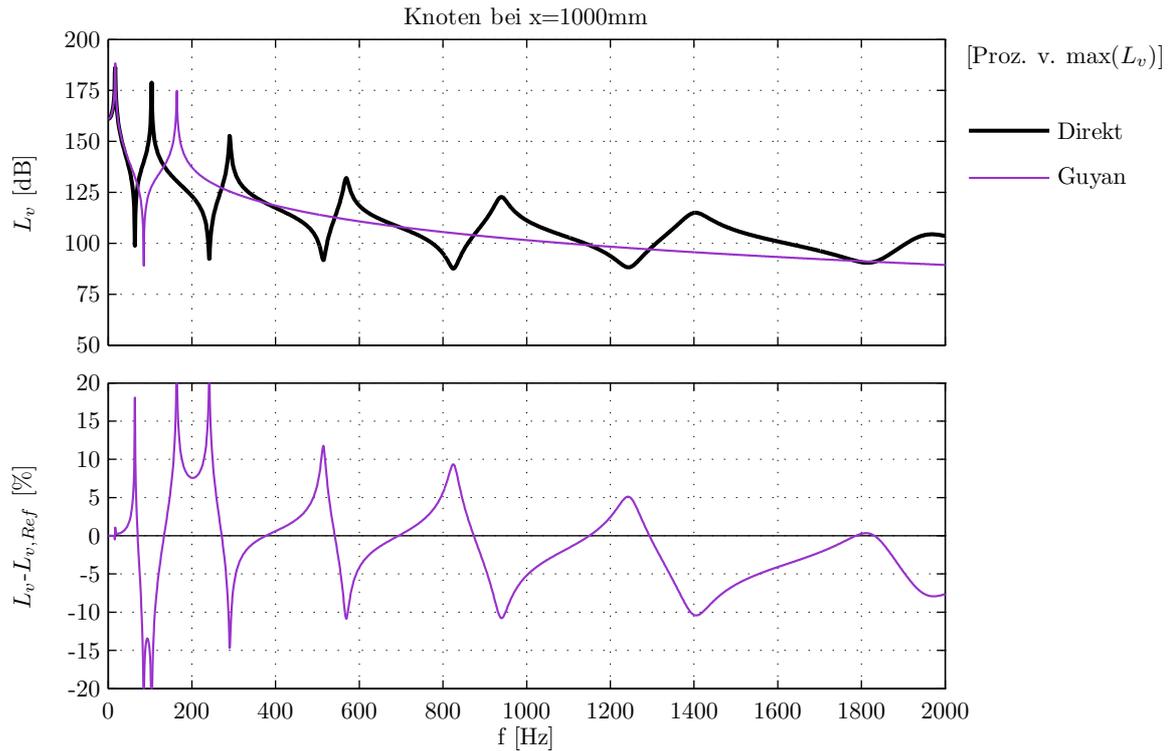


Abbildung 3: Balken-Beispiel, Vergleich Direkt mit Guyan

Die Pegelabweichungen der Guyan-Variante der modalen Berechnung in Abbildung 3 entsprechen den theoretischen Überlegungen. Im vorliegenden Beispiel wird der Kragbalken auf die Verschiebungs- und Rotationsfreiheitsgrade des ersten und letzten Knotens reduziert. Die starke Reduktion führt dazu, dass die Methode lediglich für den quasi-statischen Bereich bis zur ersten Eigenfrequenz ausreichend genau ist.

2.2.4 Dynamische Reduktion (Component Mode Synthesis)

Neben der möglichen gezielten Auswahl von internen und externen Freiheitsgraden liegt es nahe, die statische Reduktion um einen dynamischen Anteil zu ergänzen. Dazu wird eine separate Modalanalyse mit den internen Freiheitsgraden durchgeführt während die externen Freiheitsgrade fixiert bleiben. Das Eigenproblem der internen Freiheitsgrade lautet dann

$$\mathbf{K}_{oo}\Phi_o = \omega_o^2\mathbf{M}_{oo}\Phi_o. \quad (2.48)$$

Bei der Lösung wird sinnvollerweise eine reduzierte Menge der Eigenmoden (siehe Kapitel 2.2.1) ermittelt. Hierbei erfolgt entweder die Vorgabe einer Grenzfrequenz oder eine ma-

ximale Anzahl von Eigenmoden. Angenommen es werden q von o möglichen Eigenmoden ermittelt, so ist die Matrix der Quadrate der Eigenkreisfrequenzen definiert als

$$\mathbf{\Omega}_{\mathbf{o}_q}^2 = \begin{bmatrix} \omega_{o_1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_{o_2}^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \omega_{o_q}^2 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

und die reduzierte Matrix der internen Eigenvektoren der Größe (n_o, n_q)

$$\mathbf{\Phi}_{\mathbf{o}_q} = [\varphi_{\mathbf{o}_1} | \varphi_{\mathbf{o}_2} | \cdots | \varphi_{\mathbf{o}_q}] \quad (2.50)$$

mit der vorherigen Massennormalisierung

$$\mathbf{\Phi}_{\mathbf{o}_q}^T \mathbf{M}_{\mathbf{o}_o} \mathbf{\Phi}_{\mathbf{o}_q} = \mathbf{I}. \quad (2.51)$$

Die Matrix der internen Eigenvektoren wird Teil einer dynamischen Transformationsmatrix $\mathbf{G}_{\mathbf{o}_a}$. Der linke Bereich ist bereits aus dem Kapitel 2.2.3 der statischen Reduktion bekannt. Die Matrix

$$\mathbf{G}_{\mathbf{o}_a} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{\mathbf{o}_o}^{-1} \mathbf{K}_{\mathbf{o}_a} & \mathbf{\Phi}_{\mathbf{o}_q} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

hat dann die Größe (n, n_{a+q}) . Es ist auch hier wieder eine Deutung des dynamischen Anteils möglich. Der obere Teil der Matrix enthält spaltenweise die ersten q Eigenschwingungen der internen Freiheitsgrade, repräsentiert durch die Eigenvektoren, während der untere Anteil als Nullmatrix der Größe $(n - n_o, n_q)$ die fixierten externen Freiheitsgrade beschreibt.

Analog zu (2.44) lässt sich in der Ausgangsgleichung (2.40) $\mathbf{\Phi}$ mit $\mathbf{G}_{\mathbf{o}_a} \mathbf{\Phi}_q$ ersetzen und anschließendes linksseitiges Multiplizieren mit $\mathbf{G}_{\mathbf{o}_a}^T$ ergibt das neue reduzierte Eigenproblem

$$\left[\tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{q}\mathbf{q}} - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_{\mathbf{q}\mathbf{q}} \right] \mathbf{\Phi}_q = \mathbf{0} \quad (2.53)$$

mit der Steifigkeitsmatrix

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{q}\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{t}\mathbf{t}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Omega}_q^2 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

und der Massenmatrix

$$\tilde{\mathbf{M}}_{\mathbf{q}\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}_{\mathbf{t}\mathbf{t}} & \tilde{\mathbf{M}}_{\mathbf{t}\mathbf{q}} \\ \tilde{\mathbf{M}}_{\mathbf{q}\mathbf{t}} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{M}}_{\mathbf{t}\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{M}}_{\mathbf{q}\mathbf{t}}^T = [\mathbf{M}_{\mathbf{a}o} - \mathbf{K}_{\mathbf{a}o} \mathbf{K}_{\mathbf{o}o}^{-1} \mathbf{M}_{\mathbf{o}o}] \mathbf{\Phi}_{\mathbf{o}_q}. \quad (2.56)$$

2.2.5 Automatische mehrstufige dynamische Reduktion

Der Ansatz, die vorgestellte dynamische Reduktion nicht nur auf eines, sondern automatisiert auf beliebig viele Subgebiete einer Struktur anzuwenden, ermöglicht die Nutzung für Modelle mit einer großen Anzahl von Freiheitsgraden. Die Methode wurde von Benninghof, Kaplan und Lehoucq unter dem Namen ALMS (engl.: Automated Multi-level Substructuring) beschrieben [2]. In Nastran ist ein vergleichbarer Algorithmus mit dem Namen ACMS (engl.: Automated Component Mode Synthesis) implementiert. Auch wenn für ACMS keine detaillierte Dokumentation des Berechnungsablauf von dem Hersteller veröffentlicht ist, wird davon ausgegangen, dass beide Algorithmen in ähnlicher Weise funktionieren. Nachfolgend werden die theoretischen Grundlagen zu ALMS beschrieben.

Der Berechnungsablauf wird zunächst an einem einstufigen Beispiel erläutert. Man geht von dem verallgemeinerten Eigenproblem (2.7) aus. Die Einträge der gegebenen Massen- und Steifigkeitsmatrix werden so umsortiert, dass sich drei Bereiche ergeben:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{o_1} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{o_1a} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{o_2} & \mathbf{K}_{o_2a} \\ \mathbf{K}_{o_1a}^T & \mathbf{K}_{o_2a}^T & \mathbf{K}_{aa} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{o_1} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{o_1a} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{o_2} & \mathbf{M}_{o_2a} \\ \mathbf{M}_{o_1a}^T & \mathbf{M}_{o_2a}^T & \mathbf{M}_{aa} \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

Die Submatrizen \mathbf{K}_{o_i} und \mathbf{M}_{o_i} mit $i = 1, 2$ sind mit den internen Freiheitsgraden der rundum fest eingespannten Subgebiete o_i verknüpft und haben die Größe (n_{o_i}, n_{o_i}) . Die Submatrix \mathbf{K}_{aa} bzw. \mathbf{M}_{aa} beinhaltet alle gemeinsamen (externen) Freiheitsgrade der Subgebiete o_i und hat die Größe (n_a, n_a) . Geometrisch gesehen handelt es sich um die Kopplungs- bzw. Verbindungsknoten der Subgebiete. Die Submatrizen \mathbf{K}_{o_1a} und \mathbf{M}_{o_1a} mit $i = 1, 2$ sind die Kopplungsmatrizen zwischen internen und externen Freiheitsgraden und ihre Größe ist jeweils (n_{o_i}, n_a) .

Da die Nebendiagonalen in \mathbf{K} für die weitere Berechnung ungünstig sind, werden diese mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren entfernt. Es gilt $\mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \text{diag}(\mathbf{K}_{o_1}, \mathbf{K}_{o_2}, \tilde{\mathbf{K}}_{aa})$ mit

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_{o_1}} & \mathbf{0} & -\mathbf{K}_{o_1}^{-1} \mathbf{K}_{o_1a} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_{o_2}} & -\mathbf{K}_{o_2}^{-1} \mathbf{K}_{o_2a} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_a} \end{bmatrix}. \quad (2.59)$$

Dabei ist die Matrix $\tilde{\mathbf{K}}_{aa}$ das Schur-Komplement von $\text{diag}(\mathbf{K}_{o_1}, \mathbf{K}_{o_2})$:

$$\tilde{\mathbf{K}}_{aa} = \mathbf{K}_{aa} - \sum_{i=1}^2 \mathbf{K}_{o_1a}^T \mathbf{K}_{o_1}^{-1} \mathbf{K}_{o_1a}. \quad (2.60)$$

Wendet man die Transformation analog auf die Massenmatrix \mathbf{M} an, so ergibt sich für den oberen dreieckigen Teil der symmetrischen Matrix $\mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U}$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{o_1} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{o_1a} - \mathbf{M}_{o_1} \mathbf{K}_{o_1}^{-1} \mathbf{K}_{o_1a} \\ * & \mathbf{M}_{o_2} & \mathbf{M}_{o_2a} - \mathbf{M}_{o_2} \mathbf{K}_{o_2}^{-1} \mathbf{K}_{o_2a} \\ * & * & \tilde{\mathbf{M}}_{aa} \end{bmatrix}. \quad (2.61)$$

mit der Massenmatrix

$$\tilde{\mathbf{M}}_{\text{aa}} = \mathbf{M}_{\text{aa}} - \sum_{i=1}^2 (\mathbf{K}_{\text{o}_i\text{a}}^{\text{T}} \mathbf{K}_{\text{o}_i}^{-1} \mathbf{M}_{\text{o}_i\text{a}} + \mathbf{M}_{\text{o}_i\text{a}}^{\text{T}} \mathbf{K}_{\text{o}_i}^{-1} \mathbf{K}_{\text{o}_i\text{a}} - \mathbf{K}_{\text{o}_i\text{a}}^{\text{T}} \mathbf{K}_{\text{o}_i}^{-1} \mathbf{M}_{\text{o}_i} \mathbf{K}_{\text{o}_i}^{-1} \mathbf{K}_{\text{o}_i\text{a}}). \quad (2.62)$$

Setzt man $i = 1$ so vereinfachen sich die Gleichungen zu(2.45) und (2.46) der statischen Reduktion. Analog zur dynamischen Reduktion werden auf den beiden Subgebieten und dem Kopplungsgebiet, welches die Guyan-Moden enthält, jeweils die Eigenprobleme

$$\mathbf{K}_{\text{o}_i} \mathbf{R}_{\text{o}_i} = \Omega_{\text{o}_i}^2 \mathbf{M}_{\text{o}_i} \mathbf{R}_{\text{o}_i} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{K}}_{\text{a}} \mathbf{R}_{\text{a}} = \Omega_{\text{a}}^2 \tilde{\mathbf{M}}_{\text{a}} \mathbf{R}_{\text{a}}$$

gelöst. Falls nur eine reduzierte Anzahl von Eigenmoden benötigt wird, kann die Berechnung durch iterative Verfahren, wie z.B. das Lanczos-Verfahren, erfolgen. Bei komplexen Problemstellungen lässt sich die Anzahl der Eigenmoden innerhalb des gesuchten Frequenzbereichs nur schwer abschätzen. Es wird deswegen meist eine Grenzfrequenz vorgegeben bis zu der die Modalanalyse erfolgen soll. Da die Subgebiete deutlich kleiner sind als das Gesamtgebiet und dementsprechend die Eigenwerte der Subgebiete Λ_{o_i} relativ gesehen höhere Werte annehmen, muss eine Anpassung der oberen Grenzfrequenz erfolgen. Dazu wird ein Skalierungsfaktor (engl.: Upscale Factor) bestimmt mit dem die ursprüngliche Grenzfrequenz der Modalanalyse multipliziert wird. Die ermittelten Eigenvektoren der jeweiligen Subgebiete werden in einer Pseudo-Diagonalmatrix der Form

$$\mathbf{R} = \text{diag}(\mathbf{R}_{\text{o}_1}, \mathbf{R}_{\text{o}_2}, \mathbf{R}_{\text{a}}) \quad (2.63)$$

gespeichert. Die Zeilenanzahl der Matrix \mathbf{R} entspricht der globalen Anzahl der Freiheitsgrade n und die Spaltenanzahl ist abhängig von der Summe der Eigenvektoren die auf den Subgebieten und dem Verbindungsgebiet ermittelt werden. Somit ist die Dimension mit $(n, N_{\text{o}_1} + N_{\text{o}_2} + N_{\text{a}})$ gegeben.

Multipliziert man \mathbf{K} bzw. \mathbf{M} links mit $(\mathbf{UR})^{\text{T}}$ und rechts mit (\mathbf{UR}) erhält man

$$\hat{\mathbf{K}} = (\mathbf{UR})^{\text{T}} \mathbf{K} (\mathbf{UR}) = \text{diag}(\Omega_{\text{o}_1}^2, \Omega_{\text{o}_2}^2, \Omega_{\text{a}}^2) \quad (2.64)$$

und

$$\hat{\mathbf{M}} = (\mathbf{UR})^{\text{T}} \mathbf{M} (\mathbf{UR}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_{\text{o}_1}} & \mathbf{0} & \Phi_{\text{o}_1\text{a}}^{\text{T}} (\mathbf{M}_{\text{o}_1\text{a}} - \mathbf{M}_{\text{o}_1} \mathbf{K}_{\text{o}_1}^{-1} \mathbf{K}_{\text{o}_1\text{a}}) \Phi_{\text{a}} \\ * & \mathbf{I}_{n_{\text{o}_2}} & \Phi_{\text{o}_2\text{a}}^{\text{T}} (\mathbf{M}_{\text{o}_2\text{a}} - \mathbf{M}_{\text{o}_2} \mathbf{K}_{\text{o}_2}^{-1} \mathbf{K}_{\text{o}_2\text{a}}) \Phi_{\text{a}} \\ * & * & \mathbf{I}_{n_{\text{a}}} \end{bmatrix}. \quad (2.65)$$

Diese sind die Steifigkeits- und Massenmatrix des reduzierten Eigenproblems

$$\hat{\mathbf{K}} \mathbf{v} = \omega_v^2 \hat{\mathbf{M}} \mathbf{v} \quad (2.66)$$

mit $(\mathbf{UR})\mathbf{v}$ als Approximation der gesuchten Eigenvektoren φ . Dabei beschreibt die Multiplikation mit \mathbf{U} lediglich eine Transformation, während die Multiplikation mit \mathbf{R} die eigentliche Reduktion des Problems bewirkt. Gleiches gilt für die Multiplikationsoperationen der Steifigkeits- und Massenmatrix. Zur Lösung des reduzierten Eigenproblems erfolgt wiederum üblicherweise die Ermittlung einer reduzierten Anzahl von Eigenmoden z.B. unter Verwendung der bereits beschriebenen Grenzfrequenz.

Das beschriebene einstufige Beispiel lässt sich auf ein Beispiel mit l Stufen bzw. Level erweitern. Man stellt sich dazu vor, dass jedes der im vorigen Beispiel beschriebenen Subgebiete o_i wiederum in zwei Subsubgebiete sowie deren Subkopplungsgebiet unterteilt wird. Diese Unterteilung wird bis auf das Level l durchgeführt. Für eine durchgängige Benennung der Gebiete und Matrizen werden die bisherigen Indizes erweitert. Das j -te Subgebiet auf dem Level i wird mit $o_{i,j}$ bezeichnet. Dabei werden die Level von 0 bis l durchnummeriert und das erste ursprüngliche Gebiet wird mit $o_{0,1}$ bezeichnet. Jedes Subgebiet $o_{i,j}$ wird nun auf dem nächsthöheren Level $i + 1$ in weitere Subgebiete und einem Kopplungsgebiet unterteilt. Diese Aufteilung erfolgt iterativ bis das Level l erreicht ist. Unter der Annahme, dass jedes Subgebiet in zwei Subsubgebiete aufgeteilt wird, ergibt sich die Gesamtanzahl der Subgebiete auf einem Level i zu $s_i = 2^i$, d.h. das höchste Level hat 2^l oder weiterhin allgemein s_l Subgebiete. Die Verknüpfungen der Sub- bzw. Kopplungsgebiete auf den verschiedenen Levels untereinander können mit einer Baumstruktur abgebildet werden.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{o_{2,1}} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{o_{2,1},a_{1,1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{o_{2,1},a_{0,1}} \\ * & \mathbf{K}_{o_{2,2}} & \mathbf{K}_{o_{2,2},a_{1,1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{o_{2,2},a_{0,1}} \\ * & * & \mathbf{K}_{a_{1,1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{a_{1,1},a_{0,1}} \\ * & * & * & \mathbf{K}_{o_{2,3}} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{o_{2,3},a_{1,2}} & \mathbf{K}_{o_{2,3},a_{0,1}} \\ * & * & * & * & \mathbf{K}_{o_{2,4}} & \mathbf{K}_{o_{2,4},a_{1,2}} & \mathbf{K}_{o_{2,4},a_{0,1}} \\ * & * & * & * & * & \mathbf{K}_{a_{1,2}} & \mathbf{K}_{a_{1,2},a_{0,1}} \\ * & * & * & * & * & * & \mathbf{K}_{a_{0,1}} \end{bmatrix}$$

Abbildung 5: Zweistufige binäre Unterteilung der symmetrischen Steifigkeitsmatrix

Anschließend enthalten die umsortierten Steifigkeits- und Massenmatrizen auf der Diagonalen s_l Blöcke, die zu den Subgebieten auf Level l gehören und $s_0 + \dots + s_{l-1}$ Blöcke, die zu den Kopplungsgebieten der Level 0 bis $l - 1$ gehören. Die Subgebiete der anderen Level werden somit vollständig substituiert. Abbildung 5 zeigt den oberen Dreiecksbereich der Steifigkeitsmatrix für ein zweistufiges Beispiel mit binärer Unterteilung. Die Darstellung gilt analog für die Massenmatrix. Die Bereiche der Nebendiagonalen, die die Kopplung zwischen den Subgebieten und den Kopplungsgebieten sowie den Kopplungsgebieten untereinander beschreiben, werden mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren entfernt. Dabei ergibt sich aus jedem Kopplungsgebiet $a_{i,j}$ eine Eliminationsmatrix $\mathbf{U}_{a_{i,j}}$. Es wird definiert:

$$\mathbf{U}_{l-1} = \left(\prod_{j=1}^{s_{l-1}} \mathbf{U}_{a_{l-1,j}} \right) \left(\prod_{j=1}^{s_{l-2}} \mathbf{U}_{a_{l-2,j}} \right) \dots \mathbf{U}_{a_{0,1}}. \quad (2.67)$$

Für das zweistufige Beispiel sind die oberen Dreiecksbereiche der symmetrischen Gaußschen Eliminationsmatrizen $\mathbf{U}_{a_{i,j}}$ in Abbildung 6 dargestellt. Es gilt $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_{a_{1,1}} \mathbf{U}_{a_{1,2}} \mathbf{U}_{a_{0,1}}$ nach der Definition in Gleichung (2.67). Daraus folgt:

$$\mathbf{U}_1^T \mathbf{K} \mathbf{U}_1 = \text{diag}(\mathbf{K}_{o_{2,1}}, \mathbf{K}_{o_{2,2}}, \tilde{\mathbf{K}}_{a_{1,1}}, \mathbf{K}_{o_{2,3}}, \mathbf{K}_{o_{2,4}}, \tilde{\mathbf{K}}_{a_{1,2}}, \tilde{\mathbf{K}}_{a_{0,1}}). \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{\mathbf{a}_{1,1}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\mathbf{o}_{2,1}} & \mathbf{0} & -\mathbf{K}_{\mathbf{o}_{2,1}}^{-1} \mathbf{K}_{\mathbf{o}_{2,1},\mathbf{a}_{1,1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & \mathbf{I}_{\mathbf{o}_{2,2}} & -\mathbf{K}_{\mathbf{o}_{2,2}}^{-1} \mathbf{K}_{\mathbf{o}_{2,2},\mathbf{a}_{1,1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & \mathbf{I}_{\mathbf{a}_{1,1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & \mathbf{I}_{\mathbf{o}_{2,3}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & \mathbf{I}_{\mathbf{o}_{2,4}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & \mathbf{I}_{\mathbf{a}_{1,2}} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & * & \mathbf{I}_{\mathbf{a}_{0,1}} \end{bmatrix} \\
\mathbf{U}_{\mathbf{a}_{1,2}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\mathbf{n}_{2,1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & \mathbf{I}_{\mathbf{n}_{2,2}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & \mathbf{I}_{\mathbf{n}_{1,1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & \mathbf{I}_{\mathbf{n}_{2,3}} & \mathbf{0} & -\mathbf{K}_{\mathbf{o}_{2,3}}^{-1} \mathbf{K}_{\mathbf{o}_{2,3},\mathbf{a}_{1,2}} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & \mathbf{I}_{\mathbf{n}_{2,4}} & -\mathbf{K}_{\mathbf{o}_{2,4}}^{-1} \mathbf{K}_{\mathbf{o}_{2,4},\mathbf{a}_{1,2}} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & \mathbf{I}_{\mathbf{n}_{1,2}} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & * & \mathbf{I}_{\mathbf{n}_{0,1}} \end{bmatrix} \\
\mathbf{U}_{\mathbf{a}_{0,1}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\mathbf{n}_{2,1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{K}_{\mathbf{o}_{2,1}}^{-1} \mathbf{K}_{\mathbf{o}_{2,1},\mathbf{a}_{0,1}} \\ * & \mathbf{I}_{\mathbf{n}_{2,2}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{K}_{\mathbf{o}_{2,2}}^{-1} \mathbf{K}_{\mathbf{o}_{2,2},\mathbf{a}_{0,1}} \\ * & * & \mathbf{I}_{\mathbf{n}_{1,1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{K}_{\mathbf{o}_{1,1}}^{-1} \mathbf{K}_{\mathbf{o}_{1,1},\mathbf{a}_{0,1}} \\ * & * & * & \mathbf{I}_{\mathbf{n}_{2,3}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{K}_{\mathbf{o}_{2,3}}^{-1} \mathbf{K}_{\mathbf{o}_{2,3},\mathbf{a}_{0,1}} \\ * & * & * & * & \mathbf{I}_{\mathbf{n}_{2,4}} & \mathbf{0} & -\mathbf{K}_{\mathbf{o}_{2,4}}^{-1} \mathbf{K}_{\mathbf{o}_{2,4},\mathbf{a}_{0,1}} \\ * & * & * & * & * & \mathbf{I}_{\mathbf{n}_{1,2}} & -\mathbf{K}_{\mathbf{o}_{1,2}}^{-1} \mathbf{K}_{\mathbf{o}_{1,2},\mathbf{a}_{0,1}} \\ * & * & * & * & * & * & \mathbf{I}_{\mathbf{n}_{0,1}} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Abbildung 6: Symmetrische Matrizen zur Elimination der Nebendiagonalen.

Außerdem müssen die Eigenprobleme der festeingespannten Subgebiete des Levels l

$$\mathbf{K}_{\mathbf{o}_{1,j}} \mathbf{R}_{\mathbf{o}_{1,j}} = \Omega_{\mathbf{o}_{1,j}}^2 \mathbf{M}_{\mathbf{o}_{1,j}} \mathbf{R}_{\mathbf{o}_{1,j}}, \quad j = 1, \dots, s_l$$

und die gekoppelten Eigenprobleme für alle weiteren Level $i = 0, \dots, l - 1$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{a}_{i,j}} \mathbf{R}_{\mathbf{a}_{i,j}} = \Omega_{\mathbf{a}_{i,j}}^2 \tilde{\mathbf{M}}_{\mathbf{a}_{i,j}} \mathbf{R}_{\mathbf{a}_{i,j}}, \quad j = 1, \dots, s_i$$

gelöst werden.

Die Eigenvektoren werden mit $\mathbf{R}_{\mathbf{o}_{1,j}}^T \mathbf{M}_{\mathbf{o}_{1,j}} \mathbf{R}_{\mathbf{o}_{1,j}} = \mathbf{I}_{\mathbf{n}_{\mathbf{o}_{1,j}}}$ bzw. $\mathbf{R}_{\mathbf{a}_{i,j}}^T \tilde{\mathbf{M}}_{\mathbf{a}_{i,j}} \mathbf{R}_{\mathbf{a}_{i,j}} = \mathbf{I}_{\mathbf{n}_{\mathbf{a}_{i,j}}}$ massen-normalisiert. Mit allen ermittelten Eigenvektoren der Sub- bzw. Kopplungsgebiete entsprechend der Blockposition in der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} wird eine Reduktionsmatrix in pseudo-diagonaler Form

$$\mathbf{R} = \text{diag}(\mathbf{R}_{\mathbf{o}_{1,1}}, \dots, \mathbf{R}_{\mathbf{a}_{0,1}}) \quad (2.69)$$

gebildet. Üblicherweise werden sowohl auf den Subgebieten als auch auf den Kopplungsgebieten unter Verwendung des Upscale-Faktors eine reduzierte Anzahl von Eigenmoden

berechnet. Für jede Matrix der Eigenvektoren $R_{o_{l,jj}}$ bzw. $R_{a_{i,j}}$ bleibt die Zeilenanzahl als Repräsentant der physikalischen Freiheitsgrade unverändert, während die Spaltenanzahl, d.h. die Anzahl der Eigenvektoren sich zu $N_{i,j} < n_{i,j}$ reduziert. Für die Größe der Matrix \mathbf{R} gilt dann entsprechend (n, N) mit $N = \sum_{i=0}^l \sum_{j=1}^{s_i} N_{i,j}$.

Es ergibt sich wiederum das reduzierte Eigenproblem

$$\hat{\mathbf{K}}\mathbf{v} = \omega_v^2 \hat{\mathbf{M}}\mathbf{v} \quad (2.70)$$

mit den approximierten Steifigkeits- und Massenmatrizen

$$\hat{\mathbf{K}} = (\mathbf{U}_{1-1}\mathbf{R})^T \mathbf{K} (\mathbf{U}_{1-1}\mathbf{R}) = \text{diag}(\boldsymbol{\Omega}_{o_{1,1}}^2, \dots, \boldsymbol{\Omega}_{a_{0,1}}^2) \quad (2.71)$$

und

$$\hat{\mathbf{M}} = (\mathbf{U}_{1-1}\mathbf{R})^T \mathbf{M} (\mathbf{U}_{1-1}\mathbf{R}). \quad (2.72)$$

Dabei ist $(\mathbf{U}_{1-1}\mathbf{R})\mathbf{v}$ eine Approximation der gesuchten Eigenvektoren φ . Während die Steifigkeitsmatrix $\hat{\mathbf{K}}$ direkt aus den Eigenmoden der Sub- und Kopplungsgebiete assembliert werden kann, ist die Massenmatrix $\hat{\mathbf{M}}$ im Allgemeinen vollbesetzt und ihre direkte Berechnung mit links- und rechtsseitiger Multiplikation mit $\mathbf{U}_{1-1}\mathbf{R}$ ist sehr zeit- und speicherintensiv. Es wurden deswegen Algorithmen entwickelt, die von einer verschachtelten Berechnung der einzelnen Blöcke der Steifigkeits- und Massenmatrizen Gebrauch machen. Dazu werden die Rechenoperationen schrittweise je Subgebiet auf die übrigen niedrigeren Blöcke der jeweiligen Kopplungsgebiete angewandt. Ein mathematischer Beweis und der Ablauf sind in [2] beschrieben. Zusätzlich findet man in [6] einen Programmiercode für eine beliebige Levelanzahl und illustrierte Beispielabläufe für einen effizienten ALMS-Algorithmus.

Auf den Kragbalken wird die ALMS-Reduktion als einstufiges Beispiel angewandt. Der Balken wird dazu in zwei gleichgroße Subgebiete unterteilt. Auf jedem Subgebiet werden vier Eigenmoden ermittelt. Auf dem gemeinsamen Kopplungsgebiet findet keine weitere Reduktion statt. In Abbildung 7 sind der Schallschnellepegel und die prozentualen Abweichungen gegenüber der direkten Referenz dargestellt.

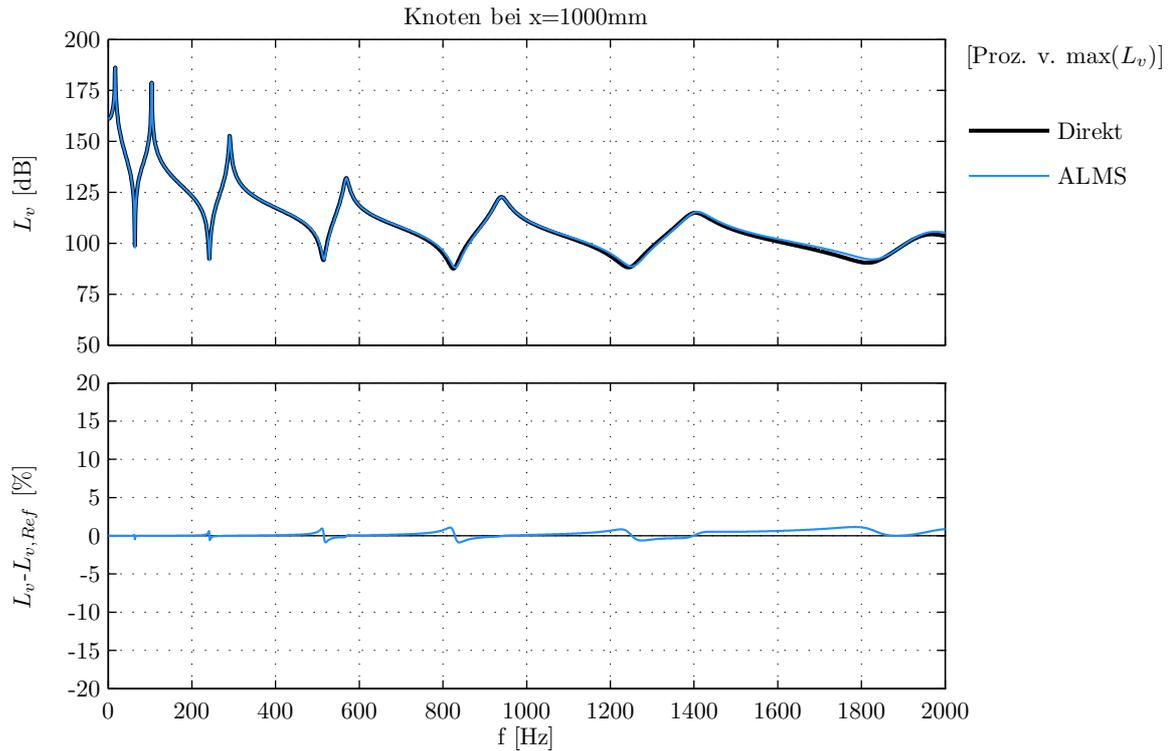


Abbildung 7: Balken-Beispiel, Vergleich Direkt mit ALMS

2.3 Fluid-Struktur-Interaktion

Solange die schwingungsanregenden Kräfte nur auf die Struktur wirken und die Ergebnisse ebenfalls nur in der Struktur ausgewertet werden sowie die Kopplung zwischen Struktur und (den) Fluid(en) als schwach angenommen werden kann, ist die Berücksichtigung von Fluiden vernachlässigbar. Für Problemstellungen, die eine der vorherigen Annahmen nicht erfüllen, ist die Berücksichtigung der Interaktion zwischen Fluid und Struktur notwendig. Von besonderem Interesse ist dabei zum einen die Schallabstrahlung von Maschinen in den freien Raum und zum anderen die Abstrahlung, Reflektion und Absorption von Schallwellen innerhalb geschlossener Räume, wie z.B. Fahrzeug- oder Flugzeugkabinen [10].

2.3.1 Grundlagen der Wellenausbreitung

Schall entsteht dadurch, dass ein Erreger das umgebene Fluid, z.B. Luft, in kleine Schwingungen versetzt. Die Schwingungen werden in Folge von Kompressibilität und Masse des Fluids bis zu dem Empfänger, z.B. dem menschlichen Ohr oder einem Mikrofon, übertragen. Physikalisch gesehen kommt es zu lokalen Druckschwankungen im Fluid um den hydrostatischen Ruhedruck P_0 . Der überlagernde Wechseldruck um den Ruhedruck wird als Schalldruck P bezeichnet und ist orts- und zeitabhängig. Analog zum Druck definiert man die Ruhedichte ρ_0 und die Schalldichte ρ als ihre überlagernde Größe. Es wird angenommen, dass alle Schallvorgänge ohne Beteiligung der Wärmeleitung im Fluid ablaufen, d.h. es handelt sich um adiabate Vorgänge. Außerdem trifft man die Annahme, dass die

Druck- und Dichteänderungen von P bzw. ρ klein gegenüber den statischen Größen sind und ein linearer Zusammenhang zwischen ihnen besteht [16].

Die Kompressibilität des Fluids ist von zentraler Bedeutung, da ein nahezu inkompressibles Medium auf Druckschwankungen statisch reagieren würde. Der Zusammenhang zwischen Druckänderung und Volumenänderung wird als linear elastisch angenommen:

$$P = -B \operatorname{div} \mathbf{U}. \quad (2.73)$$

Dabei ist B , das Kompressionsmodul, eine Materialkonstante und $\operatorname{div} \mathbf{U}$ die Volumenänderung des Fluids.

Für ein Volumenelement V unter externem Druck P ergibt sich unter Anwendung des zweiten Newton'schen Axioms mithilfe des Gauss'schen Integralsatzes die vereinfachte Euler Gleichung mit [5] zu

$$\nabla P = -\rho_0 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}. \quad (2.74)$$

Der Vektor der Schallschnellen ist mit \mathbf{V} bezeichnet, während ∇P den Druckgradienten und ρ_0 die bereits definierte statische Dichte des Fluids beschreiben. Durch Kombination von (2.73) mit (2.74) erhält man nach Umformung die Wellengleichung

$$\Delta P = \frac{1}{c^2} \ddot{P} \quad (2.75)$$

mit dem Laplace-Operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ und der Schallgeschwindigkeit

$$c^2 = \frac{B}{\rho_0}. \quad (2.76)$$

Die Schallgeschwindigkeit c ist eine weitere Konstante, die nur von dem Material und der absoluten Temperatur abhängt und die Schallausbreitungsgeschwindigkeit im Gas beschreibt. Im Gegensatz dazu bezeichnet die Schallschnelle v , die Geschwindigkeit der Teilchen während der lokalen Kompression bzw. Expansion.

Unter der Annahme einer harmonischen Zeitabhängigkeit des Schalldrucks mit $P(x, t) = p(x)e^{-i\omega t}$ erhält man durch Transformation in den Frequenzbereich aus der Wellengleichung (2.75) die Helmholtz-Gleichung

$$\Delta p + k^2 p = 0. \quad (2.77)$$

Gleichung (2.77) führt die Wellenzahl k als Verhältnis zwischen der Kreisfrequenz der harmonischen Schwingung und der Schallgeschwindigkeit ein. Die Grundlösungen der Helmholtz-Gleichung entsprechen den Schwingformen einer propagierenden Welle:

$$p(x) = p e^{\pm i k x}. \quad (2.78)$$

Mit der örtlichen Periodizität, gekennzeichnet durch die Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, gilt

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (2.79)$$

Aus (2.79) lässt sich mit $\omega = 2\pi f$ das Verhältnis zwischen Wellenzahl, Frequenz und Schallgeschwindigkeit

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (2.80)$$

bestimmen.

2.3.2 Randbedingungen

Die spezifische akustische Impedanz einer Schallwelle wird als Verhältnis zwischen dem komplexen Schalldruck und der sich an dieser Stelle ergebenden komplexen Schallschnelle in Normalenrichtung mit $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ (siehe Abbildung 8) definiert:

$$Z_n = \frac{p}{v_n}. \quad (2.81)$$

Im Allgemeinen ist die Impedanz ihrerseits ebenfalls komplex. Aufgeteilt in Real- und Imaginärteil ergibt sich:

$$Z_n = R_n + iX_n. \quad (2.82)$$

Dabei beschreibt R_n den Wirkwiderstand, als Repräsentation der Dämpfungseffekte, während der Blindwiderstand X_n Massen- und Steifigkeitseffekte repräsentiert.

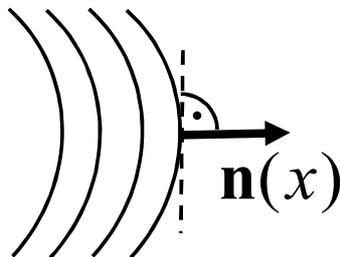


Abbildung 8: Prinzipdarstellung der Schwellennormale [9]

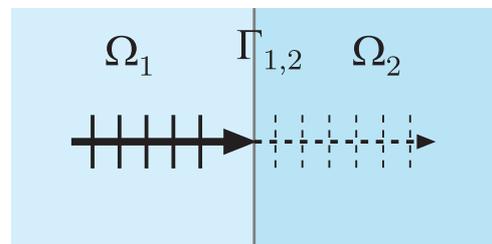


Abbildung 9: Übergang einer Schallwelle zwischen zwei Medien

Für eine ebene Schallwelle sind Amplituden von Druck und Schnelle in Phase. Für ihr Verhältnis gilt [16]

$$p = \rho_0 c v. \quad (2.83)$$

Der Proportionalfaktor von (2.83) wird als charakteristische Wellenimpedanz

$$Z_0 = \rho_0 c \quad (2.84)$$

eingeführt. Trifft eine Schallwelle am Rand $\Gamma_{1,2}$ eines Mediums Ω_1 auf ein Medium Ω_2 (siehe Abbildung 9), so kann je nach Verhältnis der Wellenimpedanzen sowohl (teilweise) Reflexion als auch (teilweise) Absorption auftreten. Der reflektierte Anteil einer am Rand

$\Gamma_{1,2}$ in Normalenrichtung auftreffenden Welle kann mit dem Reflexionsfaktor r berechnet werden:

$$r = \frac{Z_{0_2} - Z_{0_1}}{Z_{0_2} + Z_{0_1}}. \quad (2.85)$$

Trifft eine Welle auf eine undurchlässige Wand, also $Z_{0_2} \gg Z_{0_1}$, so ist $r = 1$ und es kommt zur totalen Reflexion ohne Phasensprung. Dies ist der Standardfall für Fluid-Elemente wenn keine Randbedingungen definiert sind. Für teilweise Absorption muss $|r| < 1$ gelten. Nach Gleichung (2.85) lässt sich dies durch ähnliche charakteristische Wellenimpedanzen beider Bereiche erreichen. Totale Absorption mit $r = 0$ ergibt sich bei gleicher charakteristische Wellenimpedanz $Z_{0_2} = Z_{0_1} = \rho_0 c$.

Für den Fall, dass das Medium Ω_2 in Nastran nicht modelliert werden soll, können auf dem Randbereich $\Gamma_{1,2}$ Absorber-Elemente unter Verwendung der identischen Knoten aufgebracht werden. Für die Eigenschaften der Absorber-Elemente werden die gewünschten Real- und Imaginärteile der Impedanz definiert. Die Impedanzeigenschaften werden in die lokalen Steifigkeits- und Dämpfungsmatrizen des Knoten assembliert. Die Verwendung von Absorber-Elementen entspricht einer lokalen Dämpfung (siehe Kapitel 2.1.3) und führt dazu, dass die Dämpfungsmatrix ihre Diagonaleigenschaft nach der Massennormalisierung verliert.

2.3.3 Kopplungsbedingungen

Für einen beliebigen Struktur-Bereich Σ_s , welcher sich in direktem Kontakt zu einem Fluid-Bereich Σ_f befindet, sind nach [10] zwei Kopplungsbedingungen erfüllt. An der Kontaktfläche herrscht ein Kräftegleichgewicht zwischen dem Druck P auf der Fluidseite und der Oberflächenspannung mit dem Spannungstensor σ auf der Strukturseite. Unter Annahme eines idealen reibungsfreien Fluids treten nur Spannungen in Normalenrichtung auf, so dass

$$\sigma \cdot \mathbf{n}_s = P \mathbf{n}_f \quad (2.86)$$

gilt. Der Vektor \mathbf{n}_i ist der nach außen zeigende Normalenvektor der Randfläche des jeweiligen Bereichs Σ_i . Für die Kontaktfläche gilt somit $\mathbf{n}_f = -\mathbf{n}_s$.

Um die kinematische Kopplungsbedingung zu erfüllen müssen die Verschiebungen an der Kontaktfläche von Struktur \mathbf{U}_s und Fluid \mathbf{U}_f in Normalenrichtung im Gleichgewicht sein:

$$\mathbf{U}_s \cdot \mathbf{n}_s = -\mathbf{U}_f \cdot \mathbf{n}_f \quad (2.87)$$

Nach zweimaliger zeitlicher Ableitung und unter Anwendung der Euler-Gleichung (2.74) erhält man:

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{U}}_s \cdot \mathbf{n}_f = -\nabla P \cdot \mathbf{n}_f. \quad (2.88)$$

Dabei ist $\ddot{\mathbf{U}}_s$ der Beschleunigungsvektor der Struktur. In [10, 19] sind die Ermittlung der Kopplungsknoten über die Kontaktflächen weiterführend beschrieben.

2.3.4 Direkte Frequenzantwortanalyse

Mithilfe der FE-Methode wird das Fluid, auch Kavität genannt, üblicherweise in dreidimensionale Elemente unterteilt. Jeder Knoten hat dabei mit dem Druck P nur einen Freiheitsgrad. Für vereinfachte Geometrien, wie z.B. Rohre mit großer Länge gegenüber kleinem Durchmesser können auch eindimensionale Elemente verwendet werden.

Erweitert man das gedämpfte Schwingungssystem (2.2) um die Gleichungen des Fluids und wendet die Kopplungsbedingungen unter Verwendung der Finite-Elemente-Methode an [4], so ergibt sich das diskrete gedämpfte System

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \dot{\mathbf{P}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}^T & \mathbf{M}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{P}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_s \\ \mathbf{F}_f \end{bmatrix}. \quad (2.89)$$

Dabei sind die Matrizen \mathbf{K}_s , \mathbf{K}_f , \mathbf{M}_s und \mathbf{M}_f die Steifigkeits- bzw. Massenmatrizen entsprechend des Indexes von Struktur und Fluid. Die Vektoren \mathbf{F}_s und \mathbf{F}_f entsprechen den äußeren angreifenden Kräften, während \mathbf{U} und \mathbf{P} und ihre Ableitungen die Vektoren der noch unbekannt diskreten Verschiebungen in der Struktur bzw. der Drücke im Fluid bezeichnen. Die Matrix \mathbf{A} ist die Kopplungsmatrix zwischen den beteiligten Fluid- und Struktur-Knoten. Das gegebene Gleichungssystem (2.89) ist nicht symmetrisch. Durch Ableiten der ersten Zeile nach der Zeit und Multiplikation der zweiten Zeile mit -1 ergibt sich das symmetrische System

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_s & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^T & -\mathbf{C}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{V}} \\ \dot{\mathbf{P}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{V}} \\ \ddot{\mathbf{P}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_s \\ \tilde{\mathbf{F}}_f \end{bmatrix}. \quad (2.90)$$

Die Ableitungen der Verschiebungen $\dot{\mathbf{U}}$ werden durch die Geschwindigkeiten \mathbf{V} ersetzt. Für die rechte Seite gilt $\tilde{\mathbf{F}}_s = \dot{\mathbf{F}}_s$ und $\tilde{\mathbf{F}}_f = -\mathbf{F}_f$. Für den ungedämpften Fall werden die Matrizen \mathbf{C}_s und \mathbf{C}_f gleich Null gesetzt.

Unter der Annahme einer harmonischen Anregung und einer harmonischen Antwort $\mathbf{V} = \mathbf{v}e^{i\omega t}$ bzw. $\mathbf{P} = \mathbf{p}e^{i\omega t}$ ergibt sich aus Gleichung (2.90) im Frequenzbereich

$$\left[\begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K}_f \end{bmatrix} + i\omega \begin{bmatrix} \mathbf{C}_s & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^T & -\mathbf{C}_f \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M}_f \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_s \\ \tilde{\mathbf{f}}_f \end{bmatrix}. \quad (2.91)$$

Die Lösung des gegebenen Gleichungssystems ist auch ohne Dämpfung zwangsläufig komplexwertig. Die Matrizen habe die Größe $(n_s + n_f, n_s + n_f)$. Während die Blöcke auf den Diagonalen üblicherweise eine Bandstruktur aufweisen, sind die Kopplungsmatrix \mathbf{A} und ihre Transformierte \mathbf{A}^T der Größe (n_s, n_f) bzw. (n_f, n_s) und im Allgemeinen voll besetzt. Die Kosten der Lösung mit einem direkten komplexen Solver steigen exponentiell mit der Anzahl der Freiheitsgrade und nahezu linear mit den zu berechnenden Frequenzschritten.

2.3.5 Modale Frequenzantwortanalyse

Es liegt nahe ein Lösungsverfahren im modalen Raum zu betrachten. Aus Gleichung (2.91) das komplexe quadratische Eigenproblem

$$\left[\begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K}_f \end{bmatrix} + i\omega \begin{bmatrix} \mathbf{C}_s & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^T & -\mathbf{C}_f \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M}_f \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2.92)$$

Die direkte Berechnung der gekoppelten Eigenmoden ist sehr aufwändig und daher nicht empfehlenswert. Ein gekoppelter Ansatz mit AMLS wird jedoch von Stammberger und Voss in [26] präsentiert. Da dieser Algorithmus jedoch nicht in Nastran implementiert ist, wird ein entkoppelter Ansatz gewählt. Vernachlässigt man den mittleren Kopplungsanteils innerhalb der großen Klammer (2.92) reduziert sich das Problem zu den zwei entkoppelten Eigenproblemen

$$[\mathbf{K}_s - \lambda_s \mathbf{M}_s] \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (2.93)$$

und

$$[\mathbf{K}_f - \lambda_f \mathbf{M}_f] \mathbf{p} = \mathbf{0}. \quad (2.94)$$

Das Struktur-Eigenproblem wird von kommerziellen Programmen je nach Benutzereinstellung mit einer der beschriebenen modalen Reduktionsmethoden gelöst. Für das Fluid-Eigenproblem wird nach dem derzeitigen Stand in Nastran lediglich die modale Reduktion nach Lanczos angewandt.

Aus den entkoppelten Eigenproblemen ermittelt man die reduzierten Eigenvektormatrizen Φ_s bzw. Φ_f und deren Diagonalmatrizen der Eigenmoden Λ_s bzw. Λ_f . Für Struktur und Fluid können dabei je nach Dichte der Moden in beiden Bereichen unterschiedliche obere Grenzfrequenzen festgelegt werden. Mit $\Phi_s \mathbf{q}_s = \mathbf{v}$ bzw. $\Phi_f \mathbf{q}_f = \mathbf{p}$ werden die physikalischen Geschwindigkeiten und Drücke mittels der modalen Superposition transformiert. Die linksseitige Multiplikation von Gleichung (2.91) mit $\text{diag}(\Phi_s^T, \Phi_f^T)$ ergibt dann

$$\left[\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\hat{\mathbf{K}}_f \end{bmatrix} + i\omega \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}}_s & \hat{\mathbf{A}} \\ \hat{\mathbf{A}}^T & -\hat{\mathbf{C}}_f \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{M}}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\hat{\mathbf{M}}_f \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{q}_s \\ \mathbf{q}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_s \\ \hat{\mathbf{F}}_f \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

mit den Submatrizen $\hat{\mathbf{K}}_s = \Phi_s^T \mathbf{K}_s \Phi_s$, $\hat{\mathbf{K}}_f = \Phi_f^T \mathbf{K}_f \Phi_f$ und $\hat{\mathbf{M}}_s = \Phi_s^T \mathbf{M}_s \Phi_s$, $\hat{\mathbf{M}}_f = \Phi_f^T \mathbf{M}_f \Phi_f$. Diese sind die modale Transformationen der Steifigkeits- und Massenmatrizen mit der Größe (N_s, N_s) bzw. (N_f, N_f) und $\hat{\mathbf{A}} = \Phi_s^T \mathbf{A} \Phi_f$ ist die modale Transformation der Kopplungsmatrix. Diese wiederum ist voll besetzt und hat die Größe (N_s, N_f) . Die modalen Lastvektoren ergeben sich aus $\hat{\mathbf{F}}_s = \Phi_s^T \tilde{\mathbf{f}}_s$ bzw. $\hat{\mathbf{F}}_f = \Phi_f^T \tilde{\mathbf{f}}_f$. Bei Berücksichtigung von Dämpfungseffekten gilt $\hat{\mathbf{C}}_s = \Phi_s^T \mathbf{C}_s \Phi_s$ und $\hat{\mathbf{C}}_f = \Phi_f^T \mathbf{C}_f \Phi_f$.

Mit einem direkten komplexen Solver lässt sich das reduzierte gekoppelte modale Gleichungssystem mit Bestimmung der Partizipationsfaktoren \mathbf{q}_s und \mathbf{q}_f je Frequenzschritt lösen. Gegenüber dem direkten Gleichungssystem (2.91) reduziert sich die Anzahl der Freiheitsgrade von $N_s + N_f$ auf $n_s + n_f$.

2.3.6 Beispiel

Zur Demonstration der FSI-Kopplung wird ein FE-Modell ähnlich einem Kundtschen Rohr erstellt. Das Rohr hat in XY-Ebene einen quadratischen Querschnitt mit einer Kantenlänge von 100mm und in Z-Richtung eine Länge von ca. 1000mm. Der Aufbau der verschiedenen Elemente variiert nur in Längsrichtung (siehe Abbildung 10).

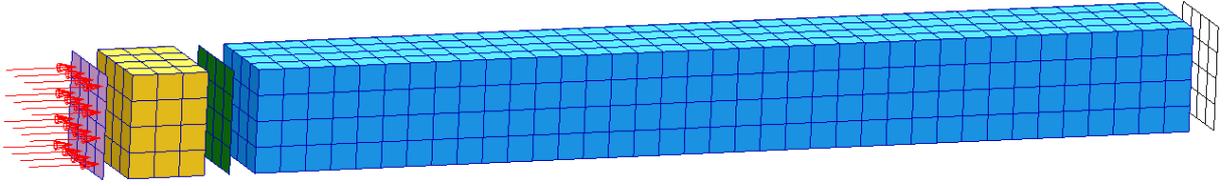


Abbildung 10: FSI-Beispiel, FE-Modell, Abstände in Längsrichtung überhöht dargestellt.

Auf der linken Seite befindet sich eine Aluminiumplatte der Dicke 2mm mit einem Elastizitätsmodul von 74MPa und einer Querkontraktionszahl von 0.37 sowie einer Dichte von 2830kg/m^3 . Darauf folgen 75mm Glaswolle als hochgedämpftes Fluid mit $\eta = 0.65$, welche wiederum durch eine Aluminiumplatte der Dicke 1mm begrenzt werden. Die restlichen Elemente mit einer Gesamtlänge von 925mm entsprechen Luft bei Normaltemperatur und atmosphärischen Normaldruck mit einer schwachen Dämpfung von $\eta = 0.01$. Die Vernetzung erfolgt mit Schalenelementen für die Platten und Volumenelementen für die Fluide. Unter Berücksichtigung der Maximalfrequenz von 500Hz wird eine gleichmäßige Elementkantenlänge von 25mm gewählt. Als Anregung wird eine dynamische Last mit einer Amplitude von 10^{-3}Pa auf die äußerste Platte aufgebracht. Die freien Ränder der Fluide werden zunächst als schallhart angenommen.

Die Berechnung der Frequenzantwortanalyse erfolgt mit MSC.Nastran in einem Bereich von 0...500Hz in 1Hz Schritten. Es soll der Einfluss der gekoppelten modalen Berechnung auf die Ergebnisqualität der Schalldrücke im Fluid ermittelt werden. Dazu wird eine direkte Referenzberechnung ausgeführt und anschließend mit dem identischen FE-Modell verschiedene modale Berechnungen durchgeführt. In Tabelle 1 sind die ersten 10 ungekoppelten Struktur- und Fluideigenmoden angegeben. Diese ungekoppelten Moden werden wie in (2.93) und (2.94) berechnet und von MSC.Nastran zur Lösung des gekoppelten Systems gemäß (2.95) herangezogen. Zum Vergleich dazu werden separat mit (2.92) die gekoppelten komplexen Eigenmoden berechnet, deren Beträge ebenfalls in der Tabelle angegeben sind. Die Starrkörpermoden werden zur besseren Übersichtlichkeit weggelassen.

Mode-Nr.	Struktur	Fluid	Komplex
1	328.97	190.03	20.07
2	494.27	380.4	128.94
3	655.82	571.46	200.08
4	666.97	615.51	323.64
5	892.41	615.51	384.17
6	892.41	763.55	491.13
7	988.16	836.86	573.87
8	1333.03	870.47	650.2
9	1709.73	957.01	662.72
10	1774.53	1038.84	765.37

Tabelle 1: FSI-Beispiel, Eigenfrequenzen des Systems [Hz]

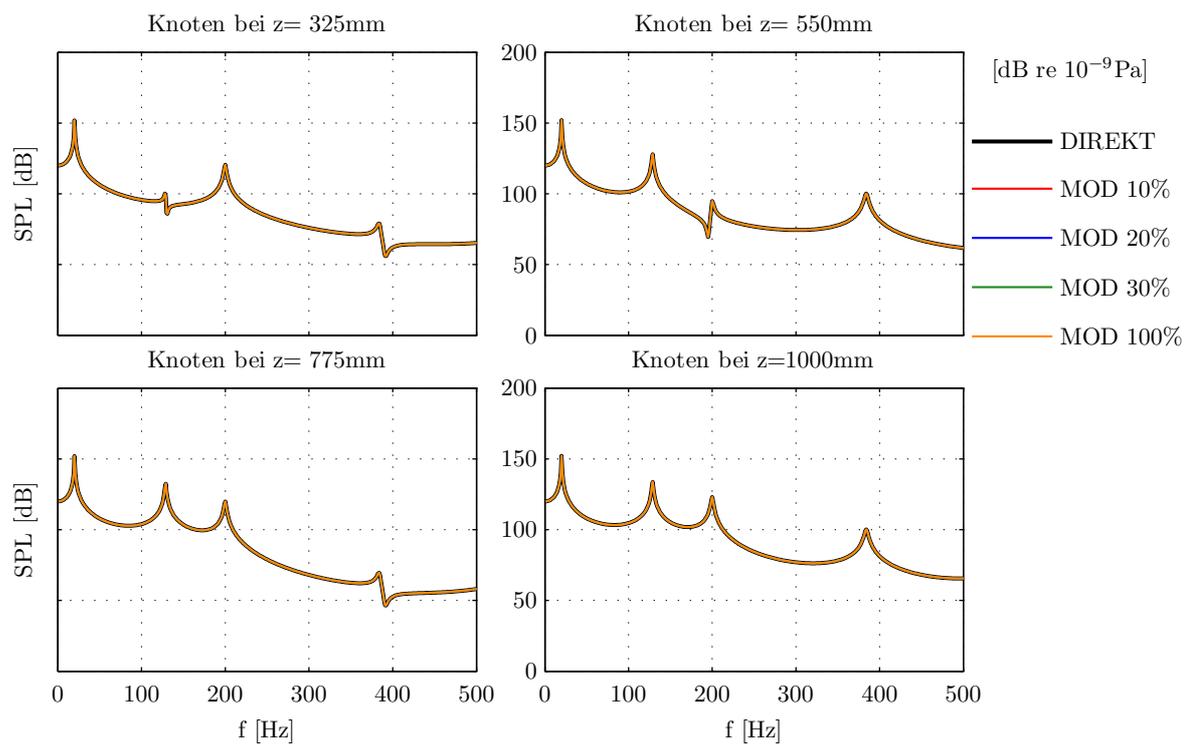


Abbildung 11: FSI-Beispiel ohne Absorber, SPL

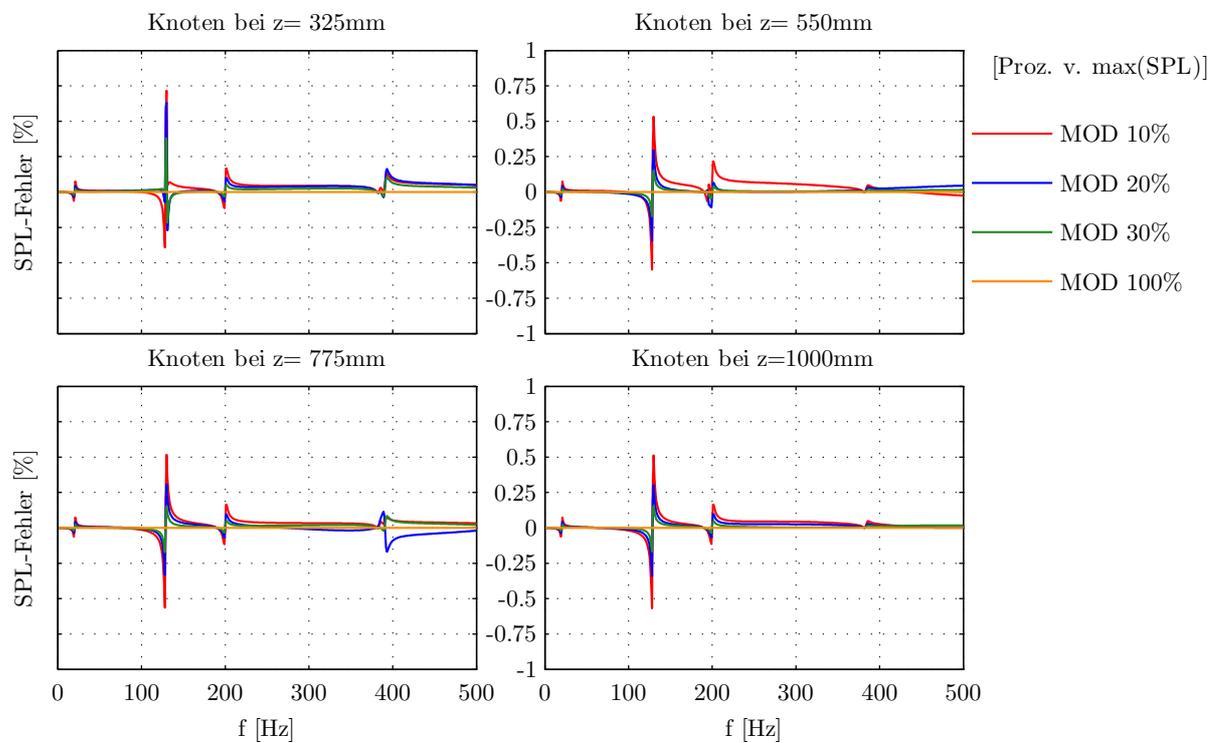


Abbildung 12: FSI-Beispiel ohne Absorber, Fehler

Die verschiedenen modalen Berechnungen werden unter Verwendung aller Strukturmoden sowie jeweils 10, 20, 30 und 100% aller Fluidmoden durchgeführt. Insgesamt gibt es, bedingt durch die Anzahl der Freiheitsgrade des Fluids, 1050 Fluidmoden mit einer maximalen Frequenz von 13424Hz. Bei Berücksichtigung von 10% aller Fluidmoden werden somit 105 Moden bis zu einer Oberfrequenz von 2958Hz verwendet, bei 20% 210 Moden bis zu 4380Hz und bei 30% 315 Moden bis zu 6297Hz.

In Abbildung 11 sind die Schallpegel (SPL, siehe Kapitel 3.4.1) über die Frequenz für vier ausgewählte Fluidknoten dargestellt. Es handelt sich dabei um Knoten jeweils aus der Mitte des quadratischen Querschnitts verteilt über die Länge des Fluids; wobei der letzte Knoten bei $z = 1000\text{mm}$ sich unmittelbar auf dem Fluidrand befindet. Die Amplitudenverläufe der Frequenzantworten sind durch mehreren Peaks in positiver sowie teilweise auch negativer Richtung sowie einer mit steigender Frequenz abfallender mittleren Amplitude gekennzeichnet. Die Lage der 4 deutlich erkennbaren Peaks im betrachteten Frequenzbereich entsprechen den komplexen Eigenfrequenzen des Systems (siehe Tabelle 1).

Vergleicht man die prozentuale Differenz zwischen dem Schallpegel der direkten und modalen Berechnung mit Bezug auf den maximalen direkten SPL-Pegel, so stellt man die größten Abweichungen in der Nähe der Frequenzen der komplexen Eigenmoden fest (siehe Abbildung 12). Der maximale Fehler liegt bei ca. 0.75% bei Berücksichtigung von 10% aller Fluideigenmoden. Mit steigender Anzahl der berücksichtigten Eigenmoden sinkt der Fehler. Bei Berücksichtigung aller Eigenmoden treten innerhalb der Rechengenauigkeit keine Abweichungen zwischen direkter und modaler Berechnung mehr auf. Es lässt sich also schließen, dass obwohl bei der gekoppelten modalen Berechnung die ungekoppelten Moden verwendet werden, der Fehler zwischen modaler Berechnung und direkter Berechnung bei Berücksichtigung aller Fluidmoden verschwindend gering ist.

Anschließend werden die Berechnungen mit zusätzlichen Absorbererelemente am Ende des Fluids erneut durchgeführt. Die Absorbererelemente mit ihren Dämpfungseigenschaften werden bei der Berechnung der ungekoppelten Struktur- und Fluideigenmoden nicht berücksichtigt. Aus diesem Grund soll im Folgenden untersucht werden, ob es dadurch im Vergleich zu der vorangegangenen Berechnung ohne Absorbererelemente zu einem erkennbaren prinzipiellen Fehler zwischen modaler und direkter Berechnung kommt.

Die Absorbererelemente haben die gleiche charakteristische Wellenimpedanz $Z_{0_2} = Z_{0_1} = \rho_0 c$ wie das Fluid, sodass eine komplette Absorption der Schallwellen am Rand in positiver Z-Richtung erwartet wird. Zur Berechnung der Eigenmoden finden die Absorbererelemente keine Berücksichtigung, somit werden weiterhin die Eigenmoden des schallharten Fluids ermittelt. Die Frequenzantworten der Schallpegel in Abbildung 13 zeigen für alle Knoten einen identischen mit steigender Frequenz abfallenden Verlauf. Lediglich bei einer Frequenz von 132Hz lässt sich für alle Knoten ein leichter Peak erkennen. Daraus lässt sich schließen, dass sich durch die Absorbererelemente die Anzahl der komplexen Eigenmoden im betrachteten Frequenzbereich auf eine Mode reduziert².

²Dieses kann jedoch nicht rechnerisch überprüft werden, da MSC.Nastran bei der direkten gekoppelten Eigenwertberechnung die CAABSF-Elemente nicht mit berücksichtigt.

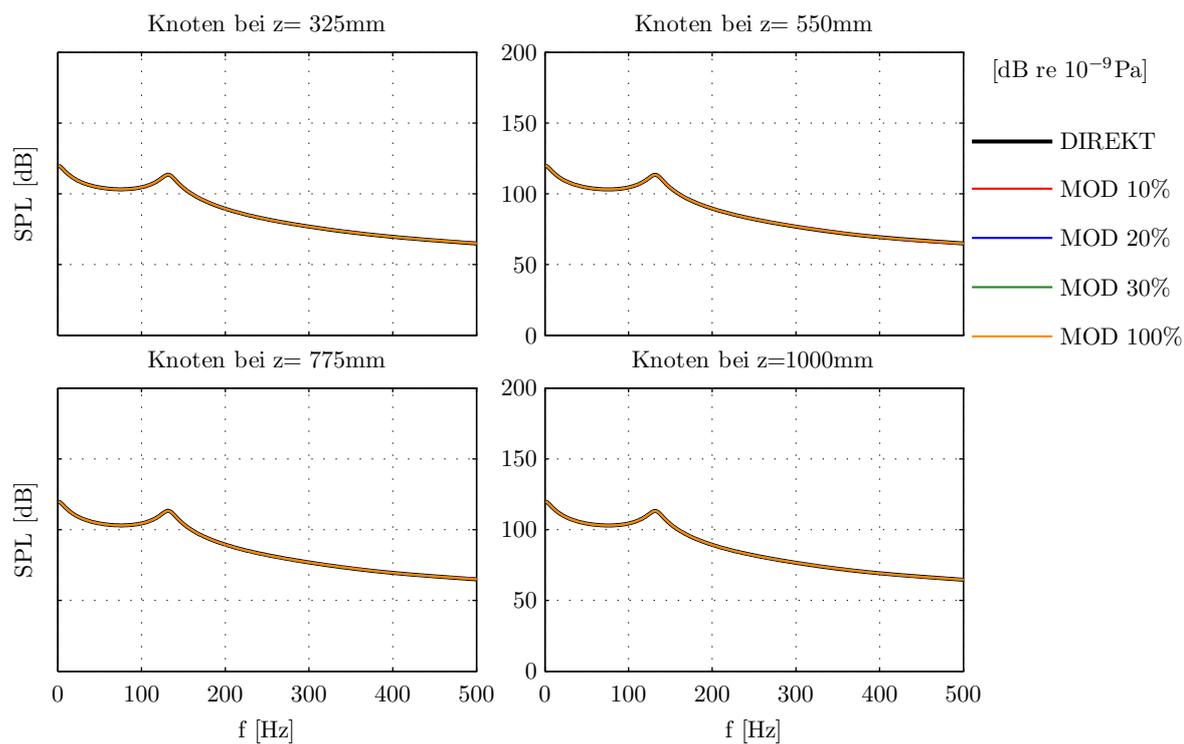


Abbildung 13: FSI-Beispiel mit Absorber, SPL

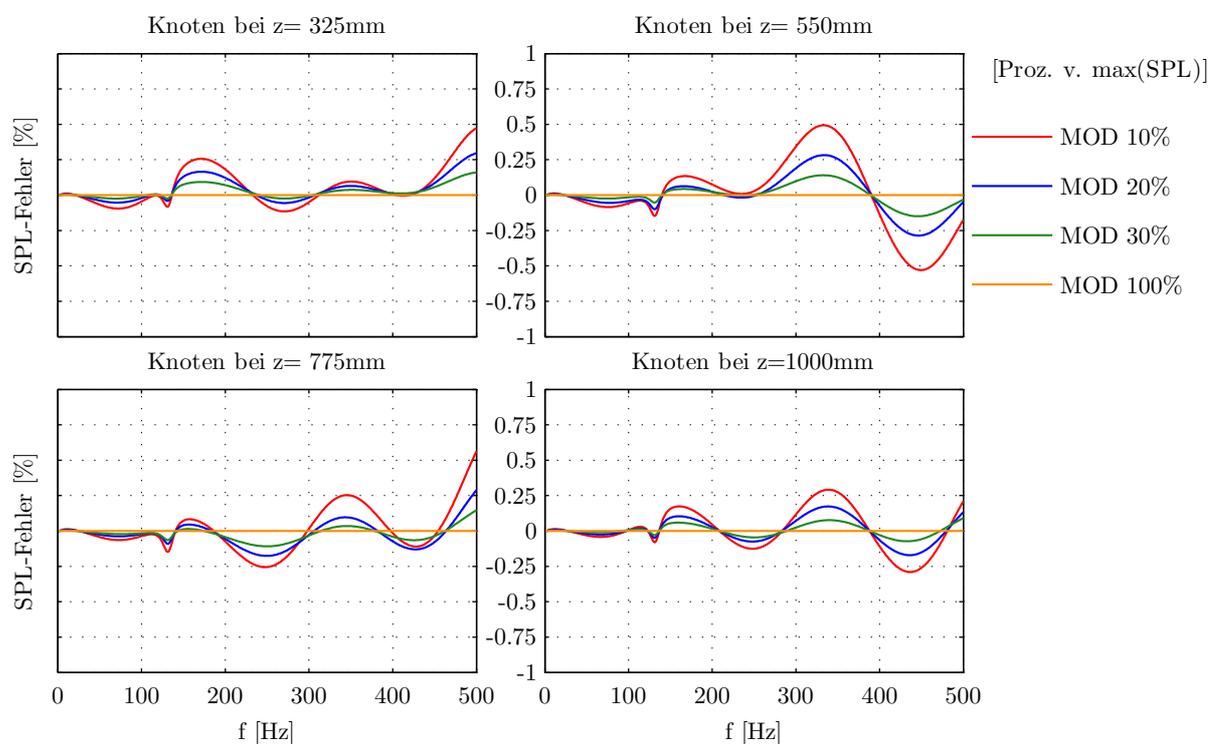


Abbildung 14: FSI-Beispiel mit Absorber, Fehler

Auch hier sind keine Abweichungen zwischen direkter und modaler Berechnung bei gegebener Auflösung zu erkennen. Vergleicht man die SPL-Fehler in Abbildung 14, so zeigen sie für alle Knoten ein charakteristisches Verhalten ähnlich einer unregelmäßigen Schwingung um die X-Achse, wobei die Amplituden mit höherer Frequenz steigen. Werden mehr Fluideigenmoden berücksichtigt, reduziert sich der Fehler analog zu den Berechnungen ohne Absorberelementen. Unter Verwendung aller Fluideigenmoden geht der Fehler wiederum gegen Null.

Es kann also kein prinzipieller Fehler der modalen Berechnungen im Vergleich zu der direkten Berechnung festgestellt werden, obwohl die Fluideigenmoden ohne Berücksichtigung der Absorberelemente berechnet werden.

3 Modellanalyse und Berechnungsmethodik

Dieses Kapitel gibt einen Überblick über das Berechnungsmodell hinsichtlich der geometrischen Daten der Hüllstruktur und der Kabine. Die dynamischen Lasten des Antriebskonzepts werden erläutert und analysiert, da sie einen erheblichen Einfluss auf die Rechenzeit haben können. Außerdem wird ein Referenzablauf für die Berechnungen beschrieben und die verschiedenen Möglichkeiten zur Auswertung und Vergleich der Berechnungen vorgestellt.

3.1 Geometrie und Vernetzung

Ein Flugzeug wird konstruktiv in separate Bereiche, die Sektionen, aufgeteilt (siehe Abbildung 15). Dabei befindet sich der Antrieb bei aktuellen Verkehrsflugzeugen von Airbus unterhalb der Tragflächen. Für die Innenraumakustik sind auf Grund der Verschiebung des Schallpfades durch die Reisegeschwindigkeit besonders die Rumpfsektionen auf gleicher Höhe der Antriebe sowie die anschließenden hinteren Sektionen von Interesse.

Gegenstand der Untersuchung ist jedoch ein Flugzeugkonzept bei dem sich die Antriebe an der Sektion 19, dem Heck des Flugzeugrumpfes, befinden. Dadurch ist der Schallpegel besonders für die Sektion 18 als Teil der Flugzeugkabine hinsichtlich der Innenraumakustik interessant.

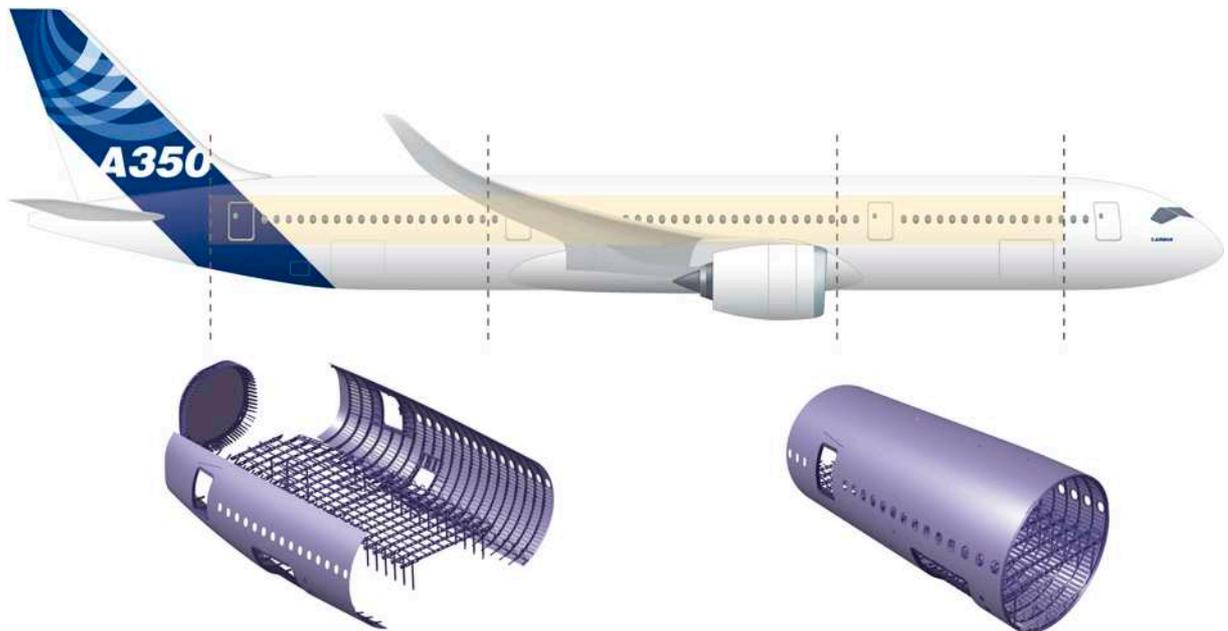


Abbildung 15: Unterteilung eines Verkehrsflugzeugs in Sektionen am Beispiel des A350-900, in Anlehnung an [24]

3.1.1 Pfade der Schwingungsanregung

Für den Schallpegel innerhalb der Kabine sind drei Anregungspfade denkbar (siehe Abbildung 16). Zum einen der direkte Schalleintrag durch die Antriebe über die Luft und die daraus resultierende Schwingungsanregung der Außenhaut von Sektion 18. Das gleiche gilt für die Außenhaut der Sektion 19. Dabei können die Schwingungen der Hüllstruktur zum einen die von der Sektion 19 eingeschlossene Luft anregen und zum anderen sich über die strukturelle Verbindung beider Sektionen fortpflanzen.

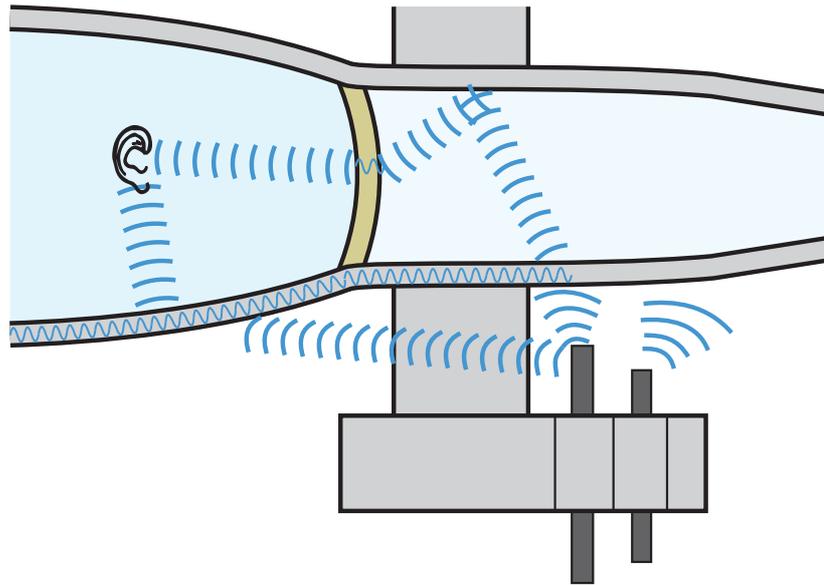


Abbildung 16: Skizze für die Pfade der Schwingungsanregung

Auf Grund der üblichen Flughöhen sind die Kabinensektionen Teil einer Druckhülle und werden in Querrichtung von der drucklosen Sektion 19 durch eine Druckkalotte getrennt. Die Luft in Sektion 19 kann nun die Druckkalotte anregen und diese wiederum die Kabinenluft. Gegenüber bisherigen Flugzeugtypen sind die hinteren Sektionen nicht nur von struktureller Bedeutung für die Einleitung der Lenkkräfte der hinteren Ruder und den Abschluss der Druckhülle, sondern auch besonders hinsichtlich der akustischen Auswirkungen auf den hinteren Teil der Innenkabine. Der Druckkalotte kommt dabei eine ähnlich wichtige Bedeutung wie die Stirnwand zwischen Motor und Innenraum bei frontgetriebenen Kraftfahrzeugen zu.

3.1.2 Elemente

Struktur Die Außenhülle der Sektion 18 und Sektion 19 sowie die Versteifungen in Längsrichtung (Stringer) und Querrichtung (Spanten) bilden die Primärstruktur und werden unter Verwendung von Schalenelementen erstellt (siehe Abbildung 50 in Anhang B.1). Die Außenhülle besteht aus CFK, die Spanten und Stringer aus Aluminium. Das Höhenleitwerk und die Seitenleitwerke werden durch konzentrierte Massen und die entsprechenden Trägheitsmomente mithilfe von CONM2-Elementen ersetzt. Auf Grund des frühen

Entwicklungsstands wird die Anbindung der Antriebe und die CROR-Antriebe selbst ebenfalls vereinfacht mit Schalen- und CONM2-Elementen modelliert. Innerhalb der Sektion 18 gibt es einen Boden für den Gepäckbereich und einen für den Passagierbereich. Diese sind ebenfalls mit Schalenelementen modelliert und durch Balkenelemente an die Primärstruktur angebunden, so dass Primärstruktur und Böden mit ca. $747K$ Freiheitsgraden modelliert sind. Für die Struktur wird eine frequenzabhängige globale modale Dämpfung gewählt.

Fluid Für die Ermittlung des Schallpegels innerhalb der Kabine ist die Modellierung der Luft, d.h. allgemein des Fluids, unverzichtbar. Dabei wird mit Volumenelementen zum einen die Luft modelliert, aber auch die Sitze des Passagierbereichs als stark gedämpfte Elemente (siehe Abbildung 53 in Anhang B.1). Ebenso wird die Isolierung durch Glaswolle innerhalb der oberen Bereichs der Außenhülle mit stark gedämpften Fluidelementen modelliert. Zur Trennung von Glaswolle und Kabinenluft erfolgt die Modellierung einer Kabineninnenstruktur. Sie umfasst auch die Gepäckablagen über den Passagiersitzen und den Abschluss zur Druckkalotte. Um den Einfluss des Schallübertragungspfad zwischen Sektion 19 und der Druckkalotte nicht zu vernachlässigen wird auch das Fluid in dieser Sektion vernetzt (siehe Abbildung 51 in Anhang B.1).

Durch die unterschiedlich gedämpften Fluidbereiche kann keine globale Dämpfung realisiert werden. Mit Berücksichtigung der $158K$ Fluid-Freiheitsgrade und den $62K$ Freiheitsgraden der Sekundärstruktur erhöht sich die Anzahl auf $967K$ Freiheitsgrade für das kombinierte Gesamtmodell.

3.1.3 Randbedingungen

Struktur Da nur ein Teil der Gesamtflugzeugstruktur betrachtet wird, müssen abschließend an Sektion 18 in Richtung negativer Längsachse Randbedingungen aufgebracht werden. Man kann sich vorstellen, dass für die Teilstruktur weder eine rein feste noch eine rein freie Einspannung vorliegt. Aus diesem Grund wird die Primärstruktur der ersten zwei Spanten der Sektion dupliziert und mehrfach in negativer Längsrichtung Knotenkoinzident verlängert (siehe Abbildung 52 in Anhang B.1). Nachteilig bei dieser Variante ist die starke Erhöhung der Struktur-Freiheitsgrade um $1193K$, sodass das Strukturmodell nunmehr $1.94M$ Freiheitsgrade und das kombinierte Modell $2.15M$ Freiheitsgrade enthält.

Fluid Auch für das Fluid muss als Abschluss an Sektion 18 eine entsprechende Randbedingung gesetzt werden, da sonst die Schallwellen an den Elementengrenzen in negativer Längsrichtung reflektiert werden. Wegen der starken Absorption innerhalb einer Flugzeugkabine kann davon ausgegangen werden, dass Schallwellen in Längsrichtung nicht reflektiert werden. Aus diesem Grund werden Absorberelemente eingesetzt, die einem offenen Ende entsprechen. Hierfür wird das Fluid der Kabinenluft in Sektion 18 um einige Elemente in negativer Längsrichtung verlängert. Die Stirnfläche der zusätzlichen Elemente wird dann Knotenkoinzident mit Absorberelementen verbunden. Die zusätzlichen Fluidelemente werden nicht ausgewertet, sondern sollen den möglicherweise fehlerhaften Ein-

fluss der Absorberelemente auf das Fluidgebiet von Interesse auffangen. Die Anzahl der Absorberelementen ist gegenüber der Gesamtanzahl an Freiheitsgraden ist mit wenigen tausend sehr gering.

3.2 Lasten

Das vorgestellte Flugzeugkonzept soll im Gegensatz zum derzeitigen Linienflugzeugen nicht durch Strahltriebwerksysteme sondern gegenläufige Doppelpropeller (CROR) angetrieben werden. Auf Grund der gegenläufigen Rotoren innerhalb einer Antriebseinheit können die Tangentialgeschwindigkeiten erheblich reduziert bzw. eliminiert werden. Dies führt zu einem erheblichen geringeren Spritverbrauch. Dem gegenüber stehenden erhebliche Nachteile durch erhöhten Triebwerkslärm.

Es werden zwei CROR-Antriebskonzepte untersucht, welche sich sowohl in der Geometrie als auch in der Anzahl der Propellerblätter des vorderen (engl.: front) und hinteren (engl.: rear) Propellers unterscheiden. Das erste Konzept wird mit NACRE und das zweite mit Rolls-Royce bezeichnet. Für die Blattpassierfrequenz (engl.: Blade Passing Frequency) BPF gilt mit der Propellerdrehzahl RPM und der jeweiligen Blattanzahl M folgender Zusammenhang

$$BPF = \frac{RPM}{60}M. \quad (3.1)$$

Die BPF s beider Propeller sowie deren ganzzahlige Vielfache werden als Erregerfrequenzen untersucht. Für den vorgegeben Frequenzbereich bis 400 Hz ergeben sich aus der vorderen (F) und hinteren (R) Blattpassierfrequenz fünf tonale Erregungen, die wie folgend benannt werden: 1R, 1F, 2R, 2F, 3R. Zusätzlich erhält man durch die Überlagerung von vorderer und hinterer Blattpassierfrequenz zwei weitere tonale Erregungen: 1R1F, 2R1F. Insgesamt werden somit jeweils sieben tonale Anregungsfrequenzen für beide Antriebskonzepte untersucht.

Da es sich bei den Antrieben um Konzeptstudien handelt, können keine Daten aus physikalischen Messungen gewonnen werden. Aus CFD-Simulationen erhält man nach Transformation der Ergebnisse auf die Außenhaut für jedes Schalenelement eine komplexen dynamische Druckkraft. Bei einer Anzahl von ca. 45.000 Elementen der Außenhaut erhält man bei sieben Erregerfrequenzen je Antriebskonzept ca. 315.000 einzelne komplexe Drucklasten.

3.2.1 Dynamische Lasten in Nastran

Eine komplexe Drucklast P kann entweder in kartesischen Koordinaten $P = P_r + iP_i$ oder in der Polarform $P = A_p e^{i\varphi}$ mit $A_p = \sqrt{P_r^2 + P_i^2}$ und $\varphi = \arg(P)$ ausgedrückt werden, wobei die einzelnen Parametern von der Frequenz abhängen können. Zusätzlich kann es noch Frequenzabhängigkeiten in den geben. Die allgemeine frequenzabhängige Definition einer dynamischen Last in Polarform in Nastran wird mit einem RLOAD2-Eintrag definiert und lautet

$$P(f) = A_p \cdot B(f) e^{i(\varphi(f) + \theta - 2\pi f\tau)}. \quad (3.2)$$

Dabei ist A_p eine statische Last, die z.B. in einem PLOAD2-Eintrag definiert wird. Mithilfe eines RLOAD2-Eintrags, der einen Verweis auf die Identifikationsnummer (kurz: ID) des PLOAD2-Eintrags enthält, wird die statische Last zur Generierung einer dynamischen Last verwendet. Der RLOAD2-Eintrag wiederum enthält Definitionen der Phasenverschiebung θ , der zeitlichen Verzögerung τ , des frequenzabhängigen Skalierungsfaktors B sowie des frequenzabhängigen Phasenwinkels φ . Falls einer der beschriebenen Werte nicht definiert wird, so ist er gleich Null, ausgenommen ist der Skalierungsfaktor B , der immer definiert sein muss. Die frequenzabhängigen Werte werden durch IDs mit TABLED1-Einträgen verknüpft. Ein TABLED1-Eintrag besteht aus beliebig vielen Frequenz/Werte-Paaren. Zwischen den definierten Werten wird linear interpoliert. Außerhalb des definierten Bereichs wird mit den ersten bzw. letzten zwei Werte-Paaren ebenfalls linear extrapoliert, wobei dabei eine Warnung in die F06-Logdatei geschrieben wird. Die allgemeine frequenzabhängige Definition einer dynamischen Last in kartesischen Koordinaten wird mit einem RLOAD1-Eintrag definiert und lautet

$$P(f) = A_p[C(f) + iD(f)]e^{i(\theta - 2\pi f\tau)}. \quad (3.3)$$

Dabei sind C und D der Real- bzw. Imaginäranteil der dynamischen Last mit dem Skalierungsfaktor A_p aus der referenzierten statischen Last. Ihre Frequenzabhängigkeit wird in TABLED1-Einträgen definiert. Es muss entweder C oder D definiert sein.

Je Berechnungslauf wird ein DLOAD-Eintrag definiert, der auf die jeweiligen RLOAD-Einträge verweist. Dabei kann jede Last $P(f)$ erneut mit einem Skalierungsfaktor multipliziert werden. Erst durch die letzte Verknüpfung im DLOAD-Eintrag wird die dynamische Last für die jeweilige Berechnung genutzt. Die vorherigen Definitionen dienen nur der Generierung der dynamischen Last.

3.2.2 Lastdefinitionen

Im folgenden Abschnitt werden drei verschiedene Varianten der Lastdefinition auf Grundlage der Nastran-Syntax beschrieben. Die ersten beiden Varianten beschreiben die Lasten in Polarkoordinaten, während für die dritte Variante kartesische Koordinaten verwendet werden. Der aus den Lastdefinitionen resultierende Lastvektor ist dabei abgesehen von Rundungsdifferenzen für alle Varianten gleich. Tabelle 2 zeigt das Zahlenbeispiel der drei Varianten für einen Antriebskonzept bei sieben tonalen Anregungen mit je 50.000 Elementlasten. Tausend ist mit K abgekürzt.

	Variante 1	Variante 2	Variante 3
PLOAD	350K (Ampl)	50K (Ampl=1)	350K (Real) 350K (Imag)
RLOAD	350K (Phase)	50K	7 (Real) 7 (Imag)
TABLED1	1 (konstant)	50K (Ampl) 50K (Phase)	7
DLOAD	7 mit je 50K Einträgen	1 mit 50K Einträgen	1 mit 14 Einträgen
SUBCASES	7 DLOAD nach FREQ	1 DLOAD alle FREQ	

Tabelle 2: Lastdefinitionen bei 7 Anregungen mit je 50K Elementlasten

Variante 1 Die erste Variante ist auf eine separate Berechnung aller sieben tonalen Frequenzbereiche ausgelegt. Je Frequenzbereich werden 50K PLOAD2-Einträge mit den jeweiligen Amplituden A_p definiert. Für die 7 Frequenzbereiche ergeben sich daraus 350K PLOAD2-IDs. Mit jedem PLOAD2-Amplituden-Eintrag ist ein RLOAD2-Eintrag mit der Definition eines festen Phasenwinkels θ verknüpft. Da der Tabelleneintrag für den Skalierungsfaktor B nicht undefiniert sein darf, wird in jedem Eintrag auf den gleichen TABLED1-Eintrag referenziert, der mit $y(x) = 1$ für alle x konstant definiert ist. Es ergeben sich so insgesamt weitere 350K RLOAD2-Einträge für alle Frequenzbereiche. Je Frequenzbereich wird abschließend ein DLOAD1-Eintrag definiert, der jeweils 50K RLOAD2-Einträge gruppiert. Innerhalb eines Subcases, einer Unterberechnung eines einzelnen Berechnungsskripts, in dem ein Frequenzbereich für ein Antriebskonzept berechnet wird, wird der jeweilige DLOAD-Eintrag ausgewählt.

Variante 2 Während bei der ersten Variante für eine direkte Berechnung jeweils nur 50K PLOAD2- und RLOAD2-Einträge eingelesen werden, müssen für die modale Berechnung jeweils alle 350K Definitionen gemeinsam einlesen und verwaltet werden (siehe auch 3.3). Bei der zweiten Variante werden nun unabhängig von den Frequenzbereichen 50K PLOAD2-Einträge mit separaten IDs und einer Pseudo-Amplitude mit einem 1-Wert definiert. Auf jeden PLOAD2-Eintrag verweist ein RLOAD2-Eintrag der jeweils zwei Tabellenreferenzen enthält:

- Der TABLED1-Eintrag zu dem B -Wert, enthält die frequenzabhängigen Amplituden, die in Variante 1 in separaten PLOAD2-Einträgen definiert wurden.
- Der TABLED1-Eintrag zu dem φ -Wert, enthält die frequenzabhängigen Phasenwinkel, die in Variante 1 den jeweiligen RLOAD2-Einträgen definiert wurden.

In Summe ergeben sich so 100K TABLED1-Einträge. Mit einem einzelnen DLOAD-Eintrag wird auf alle 50K RLOAD2-Einträge verwiesen. Für die modale Berechnung wird nun bei Verwendung von frequenzabhängiger modaler Dämpfung lediglich ein gemeinsamer Subcase für alle sieben tonalen Frequenzbereiche benötigt. Für die direkte Berechnung ergibt sich ein theoretischer Rückschritt, da nun für alle getrennten Frequenzbereiche die

gesamten Lastdefinitionen eingelesen werden müssen, obwohl eben nur ein kleiner Bereich tatsächlich benötigt wird.

Variante 3 Die dritte Variante definiert die dynamische Last in den kartesischen Koordinaten P_r und P_i . Dazu werden je tonalem Frequenzbereich $50K$ PLOAD2-Einträge für den Realteil P_r und $50K$ PLOAD2-Einträge für den Imaginärteil P_i definiert. Im Unterschied zu den beiden anderen Varianten werden alle PLOAD2-Einträge des Realteils eines Frequenzbereich mit der gleichen ID erzeugt. Gleiches gilt für die PLOAD2-Einträge des Imaginärteils. Ein großer Vorteil ergibt sich bei der Betrachtung der verknüpfenden RLOAD1-Einträgen. Es wird jeweils ein Eintrag für Real- und Imaginärteil pro Frequenzbereich definiert, sodass sich insgesamt jeweils 7 Einträge für Real- und Imaginärteil ergeben. In jedem RLOAD1-Eintrag wird auf $50K$ PLOAD2-Einträge mit einer gemeinsamen ID verwiesen. Je nachdem ob Real- oder Imaginärteil definiert ist, wird mit C oder D aus Gleichung (3.3) auf einen gemeinsamen TABLED1-Eintrag referenziert. Der TABLED1-Eintrag enthält die Frequenzabhängigkeit von C bzw. D , welche für jeden tonalen Frequenzbereich einer Rechteckfunktion

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < f_t - \Delta f \cap x > f_t + \Delta f \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = f_t \pm \Delta f \\ 1 & \text{für } f_t - \Delta f < x < f_t + \Delta f \end{cases}, \quad (3.4)$$

entspricht. Hierbei ist f_t die tonale Frequenz und Δf der halbe Abstand zur vorherigen bzw. nächsten tonalen Frequenz. Da die Frequenzabhängigkeit für C und D gleich ist, reichen insgesamt 7 TABLED1s. Alle resultierenden 14 RLOAD1-Einträge werden abschließend in einem DLOAD-Eintrag referenziert. Es wird für die modale Frequenzantwortanalyse ebenso wie in Variante 2 nur ein einzelner Subcase benötigt, der wiederum auf den globalen DLOAD-Eintrag verweist. Variante 3 definiert zwar durch die kartesische Form doppelt so viele statische Lasten jedoch reduziert sich die Anzahl der RLOAD- und TABLED1-Einträgen gegenüber den beiden anderen Varianten immens. Zusätzlich verringert sich ebenfalls die Anzahl der Referenzen in dem DLOAD-Eintrag, der von Nastran zur Generierung der Lasten eingelesen wird.

Die Auswertung der Varianten hinsichtlich Ressourcenverbrauch und Rechenzeit ist in dem Kapitel 4 beschrieben.

Zusätzlich zu den dynamischen Lasten aus den Antrieben wird die Außenhülle bei einer Referenzflughöhe von 35.000ft bzw. 10.7km durch einen statische Innendruck belastet. Bei dieser Flughöhe herrscht nach ICAO (International Civil Aviation Organization) ein atmosphärischer Luftdruck von 0.238bar. Demgegenüber steht der Innendruck der druckdichten Kabine von 0.753bar, der einem atmosphärischer Außenluftdruck bei 8.000ft entspricht. Aus der Differenz ergibt sich ein statischer Innendruck von 0.515bar, der auf alle Schalelemente der Außenhülle und Druckkalotte von Sektion 18 wirkt.

3.3 Berechnungsablauf

Auf Grund der großen Anzahl an Struktur- und Fluidfreiheitsgraden ist eine Berechnung mithilfe einer einzelnen Workstation zeitlich nicht vertretbar. Sämtliche Berechnungen erfolgen auf einem Clusterverbund von Airbus, dem High Performance Cluster (HPC). Das HPC umfasst mehrere Cluster an den Airbus-Standorten Bremen, Hamburg und Toulouse. Jedes Cluster besteht aus einer großen Anzahl von Berechnungscomputern, auch Knoten genannt. Die Knoten haben jeweils 8 bis 12 Prozessoren, die sich gemeinsam einen festen Arbeits- und Festplattenspeicher teilen. Die Leistungsdaten der einzelnen Cluster sind der Tabelle 3 zu entnehmen. Wird eine Berechnung, Job genannt, per Skript an das Clusterverwaltungsprogramm geschickt, so kann in dem Skript das Zielcluster, die Anzahl und Verteilung der Prozessoren auf die Knoten, der benötigte Arbeitsspeicher und weitere Parameter festgelegt werden. Da die Knoten im Gegensatz zu einer Workstation keinerlei grafischer Oberfläche bereitstellen und ausschließlich hinsichtlich numerischer Berechnung ausgelegt sind, reduzieren sich die Rechenzeiten bei Nutzung des Clusters deutlich.

Ort	Cluster	Syntax	CPU	Memory (GB)	Scratch (GB)	Knoten
Bremen	Petitoo-bre	pcn0xx	8	24	170	32
Bremen	Petitoo-bre	pbn0xx	8	48	846	16
Bremen	Petitoo-bre	pdn0xx	12	36	170	8
Bremen	Petitoo-bre	pen0xx	12	72	1024	8
Hamburg	POD2	hcn0xxxx	8	24	170	672
Hamburg	POD2	hbn0xxxx	8	48	846	248
Toulouse	POD3	tbcn0xxxx	12	36	170	800
Toulouse	POD3	tbbn0xxxx	12	72	1024	208
Toulouse	POD4	tccn0xxxx	12	36	170	800
Toulouse	POD4	tcbn0xxxx	12	72	1024	208

Tabelle 3: Überblick über die Hardware des Airbus HPCs, Angaben je Knoten

Nicht jeder Job nutzt alle Prozessoren eines Knotens aus. So können mehrere Jobs gleichzeitig auf einem Knoten berechnet werden. Die kombinierte Nutzung führt zu einem gravierenden Nachteil bei der Vergleichbarkeit der Berechnungen. Als Benutzer des Clusters hat man keinen Einfluss darauf, ob oder welcher Job parallel zu dem eigenen Job auf dem jeweiligen Knoten bearbeitet wird. Ein fremder leistungshungriger Job kann damit die eigene Berechnung durch die gemeinsame Nutzung von Arbeits- und Festplattenspeicher verlangsamen. Während die Reproduzierbarkeit des Ergebnisses gegeben ist, kann die Rechenzeit als zweiter wichtiger Vergleichsparameter aus Erfahrungen der vorliegenden Berechnungen Schwankungen von bis zu 50% unterliegen.

Prinzipiell kann ein Benutzer des HPCs beliebig viele Jobs an die Verwaltung schicken, jedoch werden bei normaler Auslastung maximal zwei Jobs je Cluster parallel ausgeführt. Alle weiteren Jobs werden in einer Warteschleife gehalten, bis einer der aktuellen Jobs beendet wurde und dann automatisch gestartet. Zu Lastspitzenzeiten können auch weniger

oder zeitweise keine Jobs, bzw. zu Zeiten geringer Clusterauslastung wie nachts oder an Wochenende eine deutliche höhere Anzahl ausgeführt werden. Als Grundlage für den Referenzablauf wird als allgemeine Vorgabe eine maximale Anzahl von zwei parallelen Jobs angenommen.

Um eine Vergleichbarkeit der verschiedenen Berechnungen hinsichtlich der Ergebnisqualität und Ressourcenbeanspruchung zu gewährleisten wird jeweils für die direkte und die modale Berechnung ein Referenzablauf festgelegt. Es sollen jeweils für die beiden Antriebskonzepte NACRE und Rolls-Royce alle sieben tonale Anregungen berechnet werden. Da die maximale Antwort des Modells bei einer tonalen Anregung ggfs. nicht direkt die berechnete Frequenz trifft, werden zusätzlich noch jeweils zwei Frequenzen vor und zwei nach der berechneten Anregungsfrequenz ausgewertet. Die Frequenzschrittweite beträgt dabei 4Hz. Für die Beispielanregung f_1 ergeben sich die fünf Frequenzen $f_1 - 8\text{Hz}$, $f_1 - 4\text{Hz}$, f_1 , $f_1 + 4\text{Hz}$ und $f_1 + 8\text{Hz}$. Insgesamt müssen also 35 Frequenzen je Antriebsvariante und damit 70 Frequenzen für einen Referenzablauf berechnet werden.

Direkte Berechnung Für die direkte Berechnung wird der Referenzablauf in sieben Jobs, also einen Job je Anregung aufgeteilt. Dabei wird die Frequenzabhängigkeit der Dämpfung für den Frequenzbereich der jeweiligen tonalen Anregung vernachlässigt und als konstanter globaler Parameter in dem Berechnungsskript hinterlegt. Mithilfe des Subcase-Befehls können innerhalb eines Berechnungsskripts verschiedene Lasten, Einspannungen oder Frequenzen angesprochen werden, somit werden beide Antriebskonzepte innerhalb eines Jobs berechnet. Es ändert sich dabei nur der Lastvektor, während Massen-, Steifigkeits- und Dämpfungsmatrix gleich bleiben. Da das Gleichungssystem für jeden Frequenzschritt gelöst werden muss, erfolgt die Lösung durch Parallelisierung auf 5 Prozessoren, d.h. ein Prozessor je Frequenzschritt, mithilfe der Nastran-Option DMP (Distributed Memory Processing). Insgesamt wird die Berechnung somit auf 35 separate Prozesse aufgeteilt.

Modale Berechnung Gegenüber der direkten Berechnung benötigt die modale Berechnung, egal ob mit oder ohne ACMS, einen weiteren Zwischenschritt zur Berechnung der Eigenmoden des gegebenen Systems. Die Berechnung der Eigenmoden benötigt erfahrungsgemäß einen großen Anteil an der Gesamtrechnzeit. Es ist deswegen nicht sinnvoll die Berechnung in verschiedene Jobs aufzuteilen, da dann für jeden Job separat die Modalanalyse des Systems durchgeführt werden muss. Beide Antriebskonzepte mit allen sieben Anregungen werden in einem Job durchgeführt. Die Dämpfung wird als modale Dämpfung über einen Tabelleneintrag frequenzabhängig gesteuert. Je nach Art der Lastdefinition sind zwischen zwei und 14 Subcases notwendig.

Theoretisch wäre es auch möglich mit einer Vorberechnung alle Moden des Systems zu ermitteln und die Ergebnisse auf einem Datenträger abzuspeichern. Anschließende Berechnungen können diese Ergebnisse einlesen und für die jeweilige modale Frequenzantwortanalyse verwenden. Nastran unterstützt dies durch das RESTART-Kommando, jedoch ist bei dem derzeitigen Versionsstand Nastran 2012.1 kein Neustart von ACMS-Berechnungen möglich [21, S. 96].

Auch die modale Berechnung kann parallelisiert werden. Auf Grund der binären Verzweigung der Subgebiete bei ACMS müssen 2^n Prozessoren mit $n \in \mathbb{N}$ gewählt werden. Zusätzlich gilt bis Version MSC.Nastran 2011 die Begrenzung auf maximal acht Prozessoren. Wenn nicht anders angegeben, werden die modalen Berechnungen mit der DMP-Option auf vier Prozessoren vier verschiedener Knoten durchgeführt. Somit werden für eine Berechnung vier Prozesse ausgeführt.

3.4 Auswertung

Zur Auswertung der Berechnungen werden sowohl die Frequenzantworten der verschiedenen Berechnungsvarianten verglichen, als auch der jeweilige Ressourcenverbrauch und die benötigte Rechenzeit.

3.4.1 Frequenzantwortanalyse

Die Knoten eines FE-Modells können als diskrete Messpunkte interpretiert werden. Man unterteilt das Modell quer zur Flugzeuglängsachse in gleichmäßig dicke Segmente mit einer Überdeckung von 25%. Dadurch wird sichergestellt, dass auch Knoten berücksichtigt werden, die sonst ohne Überdeckung ganz knapp das Auswahlkriterium verfehlt hätten. Diese Knoten-Ergebnisse bilden nach einer Umwandlung in akustische Größen die diskreten Messergebnisse eines Segments.

Aus der Summenhäufigkeit lassen sich akustische Kenngrößen wie den sogenannten Überschreitungs- bzw. Perzentilpegel [15] ermitteln. Dabei ist der Perzentilpegel L_n der Pegel, der von n Prozent der Messergebnisse überschritten wird. Alternativ beschreibt der Perzentilwert m -%ile dagegen den Wert der von m Prozent aller Messwerte unterschritten wird. Zwischen den n Prozent des Perzentilpegels und den m Prozent des Perzentilwerts gilt der Zusammenhang $n = 100 - m$. So entspricht der Perzentilpegel L_{99} der 1-%ile. Für die Abschätzung der gegebenen Problemstellung werden die Kenngröße L_{50} (50-%ile) verwendet.

Struktur Bei der Strukturberechnung werden die Verschiebungen und Verdrehungen je Knoten im globalen Koordinatensystem ermittelt. Die Berechnung der akustischen Kenngrößen erfolgt unter Berücksichtigung der Außenhautknoten von Sektion 18 und 19. Dazu werden die globalen Verschiebungen des jeweiligen Knotens mithilfe der Geometriedaten der angrenzenden Elemente in Verschiebungen normal zu den Elementoberflächen gewandelt. Mit $\dot{u} = i\omega u$ ermittelt man die Normalengeschwindigkeiten, auch als Schallschnellen bezeichnet. Da eine gewisse Ungenauigkeit innerhalb der tonalen Anregung vorausgesetzt wird, berechnet man für eine Anregung jeweils j Frequenzschritte und es liegen somit für jede Schallschnelle j Werte vor (Bei den durchgeführten Berechnungen ist $j = 5$ (siehe Ka-

pitel 3.3)). Es erfolgt eine quadratische Mittelwertbildung des Betrags der Schallschnelle jedes Knotens i nach:

$$\bar{v}_i = \sqrt{\frac{1}{j} \sum_{l=1}^j |v_l|^2}. \quad (3.5)$$

Der Schallschnellepegel L_{vi} für jeden Knoten i ist wie folgt definiert [13]:

$$L_{vi} = 20 \lg \frac{\bar{v}_i}{v_0} \text{ dB}. \quad (3.6)$$

Dabei ist der Bezugswert per Vorgabe von Airbus auf $v_0 = 1.0 \cdot 10^{-9} \text{ m/s}$ festgelegt.

Für alle n Knoten in einer Segmentscheibe lässt sich ein Perzentilpegel pro Segmentscheibe, z.B. der L_{50} -Pegel, aus den Schallschnellepegel der Knoten ermitteln.

Die Standardabweichung der Schallschnellepegel in einem Segment ist definiert als

$$s_{L_v} = \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (L_{vi} - \bar{L}_v)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.7)$$

wobei \bar{L}_v das arithmetische Mittel aller Schallschnellepegel im Segment bezeichnet. Die Standardabweichung (3.7) ist ein Maß für die Streuung der Schallschnellepegel innerhalb eines Segments. Für eine Abschätzung des Fehlers einer Berechnungsmethode kann für jedes Segment die Differenz des jeweiligen Perzentilpegels z.B. des L_{50} -Pegels zum Referenzperzentilpegel gebildet werden als

$$\Delta L_{50} = L_{50,Ref} - L_{50}. \quad (3.8)$$

Dabei ist $L_{50,Ref}$ der Perzentilpegel des Segments, der aus der direkten Referenzberechnung ermittelt wird. Er entspricht unter Vernachlässigung von numerischen Rundungsfehlern der exakte Lösung der finiten Elemente.

Die grafische Darstellung des jeweiligen Kennwerts über die Segmente, d.h. über der Flugzeuglängsachse, ermöglicht eine geometrische Auswertung und den Vergleich je tonaler Frequenz und je Antriebskonzept. Eine komplette Auswertung umfasst damit 14 Diagramme. Für eine komprimierte Darstellung der Ergebnisse wird wiederum die Standardabweichung der Differenzwerte über die Segmente aus Gleichung (3.8) mit

$$s_{\Delta L_{50}} = \left(\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (\Delta L_{50,i} - \overline{\Delta L_{50}})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.9)$$

berechnet. Dabei ist k gleich der Anzahl der Segmente und $\overline{\Delta L_{50}}$ das arithmetische Mittel der Differenzwerte. Das Fehlerintervall $E_{\Delta L_{50}}$ ergibt sich aus dem jeweiligen Maximal- und Minimalwert von ΔL_{50} je Frequenz über alle Segmente. Je Berechnung ergeben sich nun durch den Verzicht auf die geometrischen Informationen jeweils zwei Kennwerte $s_{\Delta L_{50}}$ und $E_{\Delta L_{50}}$ je tonaler Frequenz und je Antriebskonzept. Die Kennwerte werden um mögliche Einflüsse der modalen Grenzfrequenzen und Upscale-Faktoren (vgl. Kapitel 2.2) zu erkennen in Diagrammen über die tonalen Frequenzen dargestellt.

Fluid-Struktur-Interaktion Für die Berechnung der akustischen Kenngrößen ist der Relativdruck der Fluidknoten von Interesse. Hierbei werden ausschließlich die Fluidknoten der Sektion 18 berücksichtigt. Analog zur Strukturauswertung liegen auf Grund der Frequenzschritte mehrere Werte je Anregung vor. Es erfolgt eine quadratische Mittelwertbildung der Relativdrücke, so dass man den Mittelwert \bar{P}_i

$$\bar{P}_i = \sqrt{\frac{1}{j} \sum_{l=1}^j |P_l|^2} \quad (3.10)$$

je Knoten i erhält. Der Schalldruckpegel L_{P_i} des Knotens i ist mit dem Bezugswert $P_0 = 2.0 \cdot 10^{-5}$ Pa wie folgt definiert [13]:

$$L_{P_i} = 20 \lg \frac{\bar{P}_i}{P_0} \text{ dB.} \quad (3.11)$$

Das menschliche Ohr kann Frequenzen von von 16 Hz bis 16 kHz wahrnehmen. Dabei kommt es zu einer subjektiven Wahrnehmung der Lautstärke. Es besteht eine Frequenzabhängigkeit, die sich durch eine geringere Empfindlichkeit unserer Ohren für die tiefen Frequenzen äußert. Zur Berücksichtigung der Lautstärkewahrnehmung wurden nach DIN 45 634 drei Bewertungskurven mit den Kennzeichen A, B und C festgelegt [13]. Die Verwendung der jeweiligen Bewertungskurve wird durch Hinzufügen des eingeklammerten Kennzeichens zur Maßeinheit dB kenntlich gemacht. International hat sich die A-Bewertung durchgesetzt. Der resultierende Schalldruckpegel wird als bewerteter Schalldruckpegel bezeichnet. Anschließend erfolgt die Bildung der Perzentilpegel, Differenzpegel, Standardabweichungen und Fehlerintervalle analog zu der Vorgehensweise für die Auswertung der Strukturberechnungen.

3.4.2 Rechenzeit und Ressourcenverbrauch

Die Rechenzeit und der Ressourcenverbrauch lassen sich mithilfe der Log-, F04 und F06-Dateien der MSC.Nastran-Berechnung ermitteln. Für die Rechenzeit eines gesamten Berechnungslaufes werden zwei Kennzahlen festgelegt. Zum einen eine serielle Rechenzeit T_{ser} aus der Summe der Einzelrechenzeiten aller Jobs

$$T_{ser} = \sum_{i=1}^j T_{job_i}, \quad (3.12)$$

zum anderen die minimale zu erreichende Rechenzeit T_{min} , welche sich aus der parallelen Berechnung von Jobs unter Berücksichtigung der maximalen Anzahl von Jobs je Nutzer $n_{Job,max}$ ergibt. Es wird angenommen, dass alle Jobs eines Berechnungslaufes eine gleich lange Einzelrechenzeit haben. Somit ergibt sich für die minimale Rechenzeit bei j Einzeljobs:

$$T_{min} = \frac{T_{ser}}{j} \left(\left\lceil \frac{j}{n_{Job,max}} \right\rceil + j \bmod n_{Job,max} \right) \quad (3.13)$$

Im Referenzablauf 3.3 von direkter und modaler Berechnung wird deutlich, dass die Anzahl der Prozessoren, die einem Job zugewiesen werden, je Rechnung durch verschiedene Vorgaben definiert bzw. begrenzt sind. Um dennoch einen Vergleich zu ermöglichen wird eine Ressourcenzeit T_{use} über eine Multiplikation der Prozessoranzahl n_{cpu} mit der seriellen Rechenzeit definiert:

$$T_{use} = n_{cpu} T_{ser}. \quad (3.14)$$

Die Ressourcenzeit beschreibt somit die Prozessorzeit die ein Berechnungslauf auf dem Cluster belegt. Unabhängig von der seriellen oder minimalen Rechenzeit ist eine geringe Ressourcenzeit anzustreben, da sonst gesamtheitlich betrachtet weniger Jobs auf dem Cluster zur gleichen Zeit ausgeführt werden können. Im Falle einer Verringerung der minimalen Rechenzeit um 10 Prozent durch Verdoppelung der Anzahl an Prozessoren und damit fast Verdoppelung der Ressourcenzeit, ist diese zeitliche Verbesserung wirtschaftlich betrachtet eine deutliche Verschlechterung.

Als Kenngrößen zum Ressourcenverbrauch werden der reservierte Arbeitsspeicher³, der maximal genutzte Arbeitsspeicher und der maximale belegte Festplattenspeicher definiert. Die drei Kennzahlen beziehen sich jeweils auf die Maximalwerte eines Jobs, bzw. falls dieser Job wiederum auf mehrere Prozessoren in Anwendungen, sogenannte Tasks, aufgeteilt wurde, auf die Maximalwerte innerhalb der Tasks. Vergleicht man die Kennzahlen mit der Ausstattung der jeweiligen Clusterknoten kann man Rückschlüsse auf die anteilige Ressourcennutzung ziehen. Außerdem werden noch die gesamte transferierte Datenmenge sowie die mittlere Prozessorauslastung je Knoten ausgegeben. Ein hoher I/O-Datentransfer deutet auf eine starke und häufige Nutzung der Auslagerungsdateien, den Scratch-Dateien, hin.

Bei modalen Berechnungsvarianten erfolgt zusätzlich die Ausgabe der Anzahl der ermittelten Eigenmoden. Dabei wird zwischen Struktureigenmoden und Residualvektoren sowie Fluideigenmoden unterschieden. Über den Vergleich verschiedener Berechnungen lässt sich ermitteln wie viele Eigenmoden im Verhältnis zur Rechenzeit ermittelt werden.

³Falls der Benutzer in Nastran beim Start der Berechnung keine Reservierung des Arbeitsspeichers definiert, wird eine durch Nastran geschätzte Anzahl reserviert. Für die Abschätzung wird lediglich die Eingabedatei benötigt [20, S. 191].

4 Ergebnisse der Berechnungen

Dieses Kapitel enthält die Ergebnisse der Berechnungen am FE-Modell der Sektionen 18 und 19 des Flugzeugkonzepts. Die Auswertungen sind in Struktur- und FSI-Berechnungen unterteilt. Da die absoluten Schallpegel der Geheimhaltung unterliegen, sind im öffentlichen Teil der Arbeit ausschließlich Pegeldifferenzen dargestellt. Die Ergebnisse der absoluten Schallpegel sind dem gesperrten Anhang B.2 zu entnehmen.

4.1 Struktur-Berechnungen

Der folgende Abschnitt umfasst die Strukturberechnungen unter Verwendung der Primär- und Sekundärstruktur von Sektion 18 und 19 sowie der Einspannung. Zur Auswertung finden die Segmente von Sektion 18 und 19 Verwendung. Nach Analyse der Ergebnisse der Lastdefinitionen für die direkte und modale ACMS-Berechnung werden verschiedene ACMS-Berechnungen⁴ mit verschiedenen Technologien jeweils mit der direkten Referenzlösung verglichen und ausgewertet.

4.1.1 Lastdefinitionen

In Kapitel 3.2.2 sind drei verschiedene Varianten der Lastdefinitionen beschrieben, wobei die Variante 1 den bisherigen Standard für die Berechnungen darstellt. Es werden jeweils für die direkte Berechnung und die modale Berechnung mit ACMS die Ergebnisse der drei Varianten ausgewertet und eine Standardlastdefinition für alle nachfolgenden Berechnungen festgelegt.

Direkte Berechnung Für die direkte Berechnung zeigt Abbildung 17 in den oberen Diagrammen die Standardabweichungen $s_{L_{50}}$ der Varianten 2 und 3 gegenüber der Variante 1 als Referenz über die tonalen Frequenzen (siehe Kapitel 3.4.1). Darunter sind die Fehlerintervalle $E_{L_{50}}$ dargestellt. Links befinden sich die Ergebnisse des NACRE-Antriebskonzepts, rechts die des Rolls-Royce-Antriebskonzepts.

Über alle Frequenzen und Antriebskonzepte liegen die Standardabweichungen und Fehlerintervalle des L_{50} -Pegels in der Größenordnung von 10^{-3} dB und sind damit vernachlässigbar. Es fällt auf, dass die Variante 2 gegenüber der ersten Variante keine Abweichungen aufweist. Dies lässt sich dadurch erklären, dass hier Amplitude und Phase der Lasten statt direkt in den PLOAD- und RLOAD-Einträgen in TABLED1-Einträgen gespeichert werden. Im Gegensatz dazu kommt es bei Variante 3 durch Umrechnung der dynamischen Lasten in Real- und Imaginärteil zu Rundungsfehlern.

⁴Reine modale Berechnungen ohne ACMS führen auf Grund der Modellgröße zu Rechenzeiten > 72 h und werden deswegen nicht berücksichtigt.

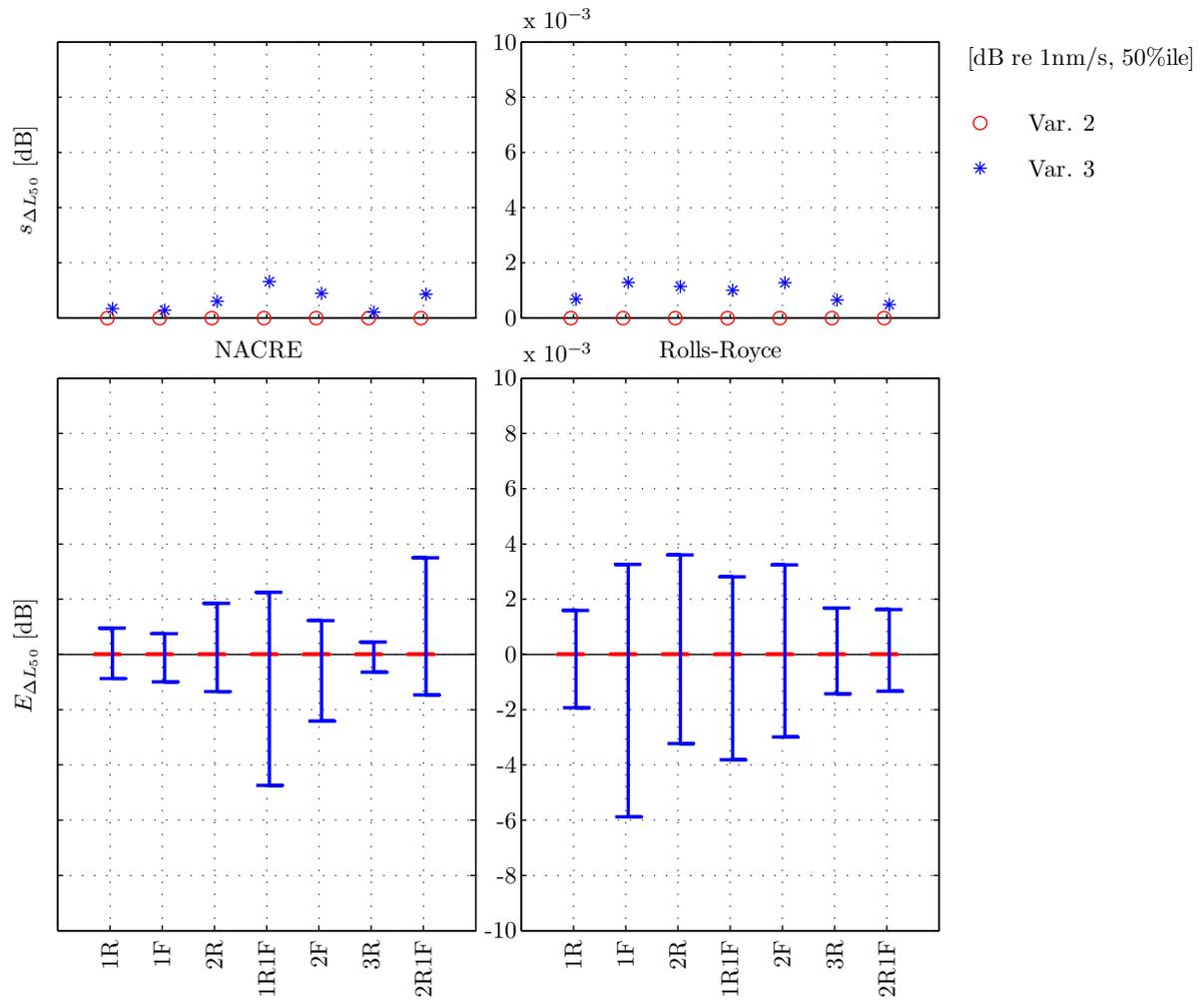


Abbildung 17: Struktur, Abweichungen Direkt - Lastdefinitionen

		Var. 1	Var. 2	Var. 3
T_{min}	[h]	3.57	3.61	2.71
T_{ser}	[h]	6.26	6.32	4.74
T_{use}	[h]	31.28	31.59	23.68
Alloc Mem	[GB]	4.00	4.00	4.00
Max Mem	[GB]	2.06	2.06	2.06
Max Disk	[GB]	22.47	22.49	22.53
I/O	[GB]	3300.38	3319.76	2908.81
Avg CPU	[%]	79.7	78.7	53.9

Tabelle 4: Struktur, Vergleich Direkt - Lastdefinitionen

Die in Kapitel 3.4.2 definierten Rechenzeiten und Ressourcenverbräuche der drei Varianten sind in Tabelle 4 dargestellt. Während die Lastvarianten 1 und 2 sich nur marginal unterscheiden, reduziert sich bei gleicher Speicherauslastung die Rechenzeit der dritten Variante um ca. 40%. Auffallend ist dabei der um ca. 400GB reduzierte I/O-Datentransfer.

In Abbildung 18 ist der prozentuale Anteil der Berechnungsschritte an der Gesamtrechenzeit für die drei Varianten dargestellt. Der 100%-Wert wird aus dem Mittelwert aller Einzelprozesse je Berechnung gebildet. Die jeweils 35 Prozesse einer Berechnung sind nebeneinander dargestellt. Farblich hervorgehoben sind die Berechnungsschritte der Prozeduren GP3, LCGEN, DPD und SSG1, wobei der zweite Name hinter dem @-Zeichen die aufrufende Prozedur bezeichnet. Es handelt sich dabei um Prozeduren die im Zusammenhang mit der Lastgenerierung stehen⁵. Variante 1 und 2 enthalten eine vielfach höhere Anzahl von verschiedenen RLOAD-Einträgen und daraus resultieren umfangreichere DLOAD-Einträge. Zwischen Variante 3 und den beiden anderen Varianten sinkt der Zeitanteil dieser Prozeduren von knapp 50% auf unter 1%. Die Reduzierung ihres Anteils an der Rechenzeit ist maßgeblich für die Reduzierung der Gesamtrechenzeit.

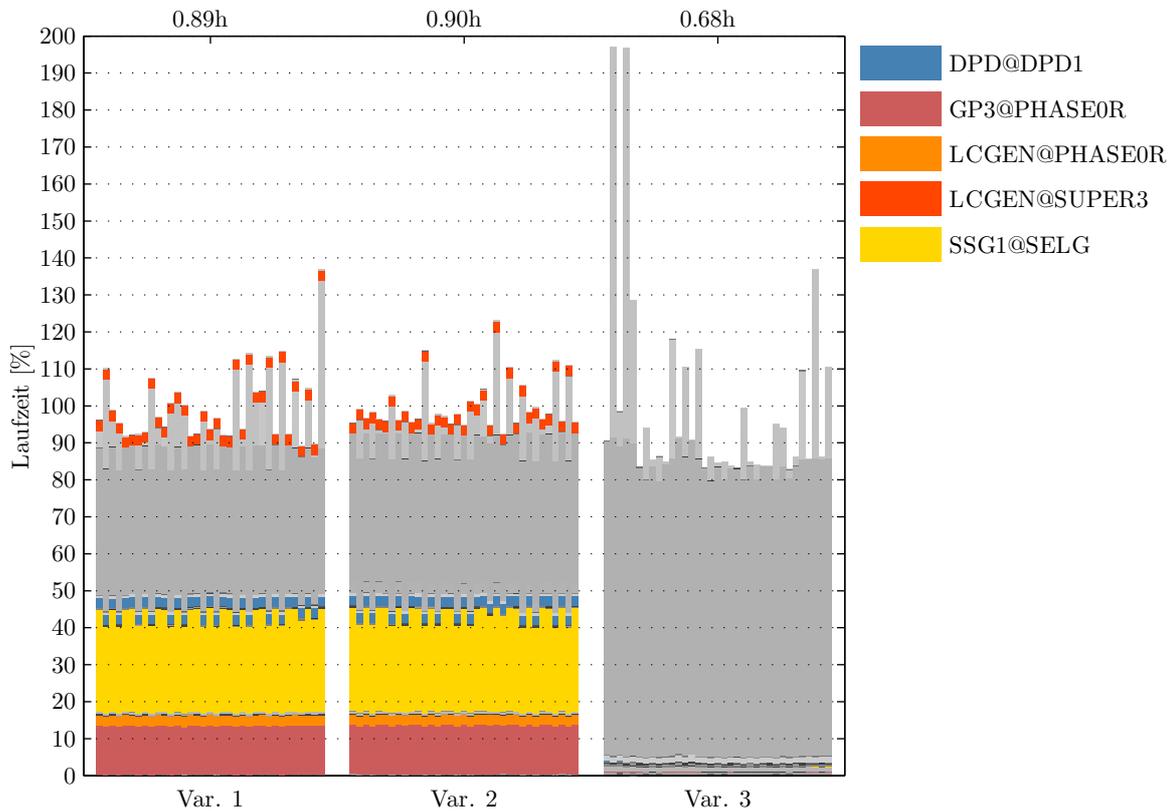


Abbildung 18: Struktur, Laufzeitanalyse Direkt - Lastdefinitionen

⁵Ein Überblick über die Prozeduren ist dem Anhang A.1 zu entnehmen.

Modale Berechnung Die modalen Berechnungen der drei Lastvarianten werden jeweils unter Verwendung von ACMS mit einem Upscale-Faktor von 2.0 und einer Obergrenze von 490Hz für die Eigenmoden durchgeführt. Da die Pegeldifferenzen zwischen den Lastvarianten von Interesse sind, wird abweichend von den weiteren Berechnungen die modale Lastvariante 1 als Referenz gewählt.

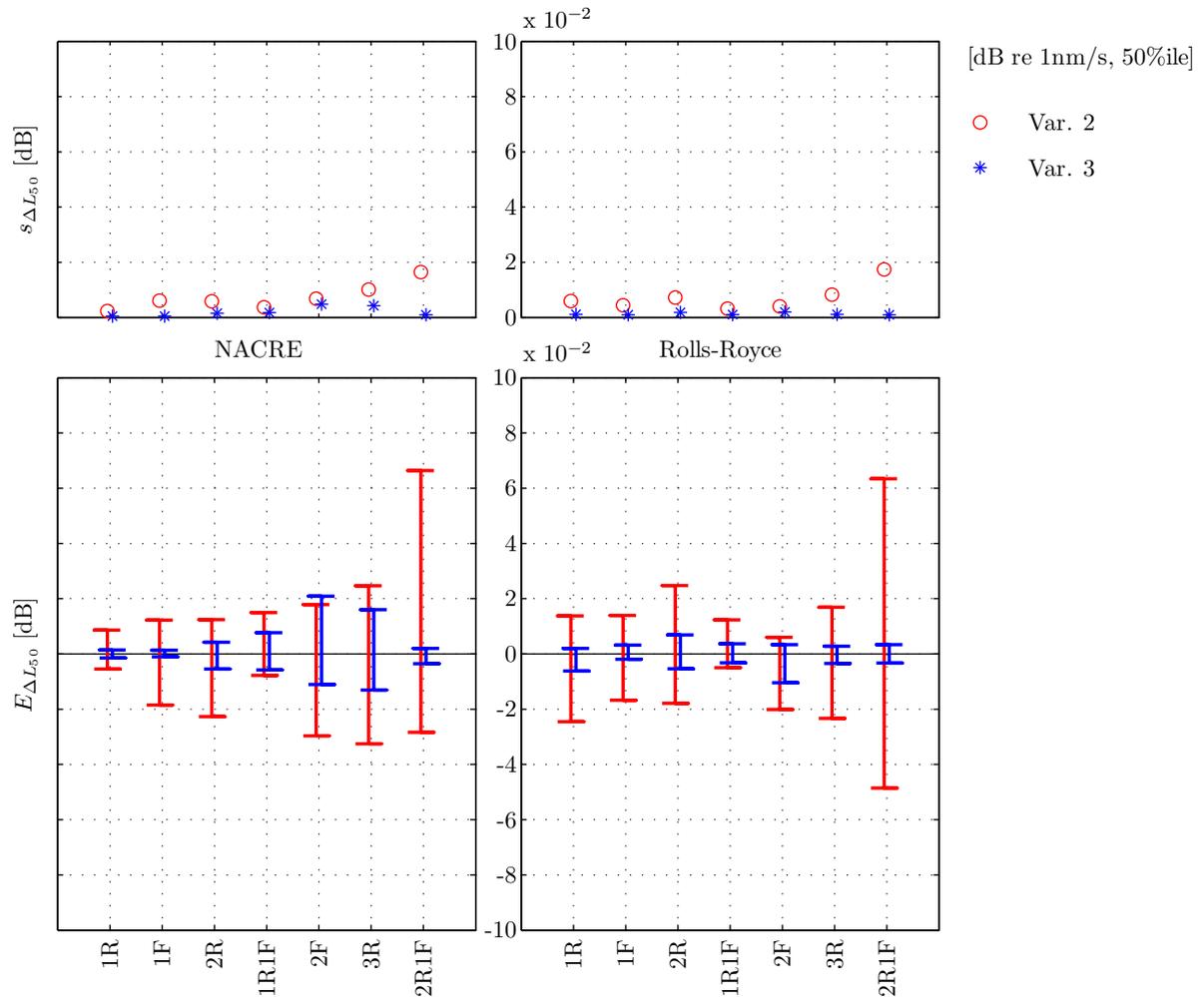


Abbildung 19: Struktur, Abweichungen ACMS 490/2.0 - Lastdefinitionen

Abbildung 19 zeigt für die Abweichungen der Standardabweichungen und der Fehlerintervalle der Variante 2 eine Größenordnung von 10^{-2} dB und damit ein widersprüchliches Ergebnis zu den Erklärungen aus der direkten Berechnung. Auch nach Überprüfung der Berechnungsskripte konnte keine Ursache gefunden werden, die eine gegenüber der modalen Variante 3 um den Faktor 10 höhere Abweichung begründet.

In Tabelle 5 erkennt man hinsichtlich der Rechenzeiten und Ressourcenverbräuche deutliche Verbesserungen der Varianten 2 und 3 gegenüber der Referenzvariante 1. Die Rechenzeit reduziert sich um mindestens 80% bei gleichem Arbeitsspeicherbedarf und um jeweils ca. 20% reduziertem Festplattenspeicher. Der I/O-Datenverkehr wird hingegen mit

		Var. 1	Var. 2	Var. 3
T_{min}	[h]	15.20	2.18	1.08
T_{ser}	[h]	15.20	2.18	1.08
T_{use}	[h]	60.82	8.72	4.33
Alloc Mem	[GB]	12.00	12.00	12.00
Max Mem	[GB]	5.42	5.42	5.42
Max Disk	[GB]	89.37	71.28	69.01
I/O	[GB]	6340.85	2589.69	2458.04
Avg CPU	[%]	95.0	90.5	83.8
Mod (Struk)	[-]	8110	8110	8110

Tabelle 5: Struktur, Vergleich ACMS 490/2.0 - Lastdefinitionen

einer Reduktion von mindestens 3.7TB bzw. 60% auf ein Niveau unterhalb der direkten Berechnungen gebracht.

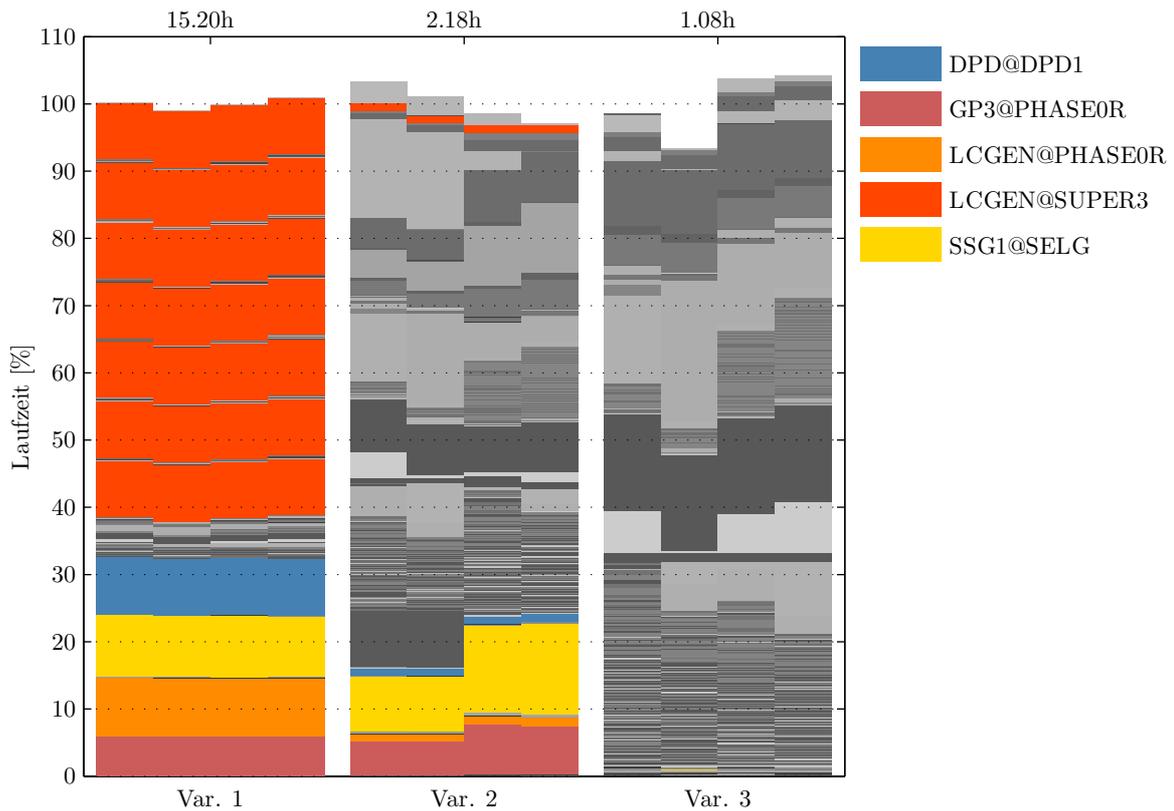


Abbildung 20: Struktur, SubDMAPs ACMS 490/2.0 - Lastdefinitionen

Die Analyse der prozentualen Laufzeitanteile der Prozeduren in Abbildung 20 zeigt hinsichtlich der Lastgenerierung ein ähnliches Verhältnis der Varianten wie bei der direkten Berechnung. Die Gesamtrechenzeit von Variante 1 ist jedoch durch die LCGEN-Prozedur

innerhalb der SUPER3-Prozedur[17, S. 450] um ein Vielfaches höher als die der beiden anderen Varianten. Mit sieben separaten Aufrufen für die 7 tonalen Frequenzbereichen (einen innerhalb jedes Subcases), benötigt die Prozedur ca. 55% der Gesamtrechenzeit. Im Vergleich dazu liegt Ihr Anteil bei den übrigen Varianten 2 und 3 im Bereich von unter einem Prozent.

Sowohl die Ergebnisse der direkten als auch der ACMS-Berechnungen zeigen eindeutig, dass die Lastvariante 3 bei großer Anzahl von dynamischen Lasten zu einer erheblichen Reduktion der Rechenzeit und Ressourcenverbräuche führt. Sie wird für die folgenden Berechnungen als neuer Standard definiert.

4.1.2 ACMS ohne Residualvektoren

Für ein skaliertes Modell der Flugzeugsektionen wurde in [3] der Einfluss verschiedener ACMS-Parameter untersucht. Dabei konnte mit Erhöhung des Upscale-Faktors über den Nastran-Standardwert von 2.0 hinaus die besten Übereinstimmungen bei nur geringer Erhöhung der Rechenzeiten erzielt werden. Die Erhöhung der oberen Grenzfrequenz ergab ebenfalls Verbesserungen, da sie auch indirekt die Grenzfrequenzen der Substrukturen erhöht.

Zunächst erfolgen die ACMS-Berechnungen ohne Verwendung von Residualvektoren mit einer oberen Grenzfrequenz von 490Hz und der Variation des Upscale-Faktors von 2.0, 3.0, 4.0 und 6.0. Im Vergleich zu der direkten Berechnung ist die Grundvariante mit dem Upscale-Faktor 2.0 schneller aber auch deutlich speicherintensiver. Die Varianten mit höheren Upscale-Faktoren ergeben kaum Reduzierungen der Pegelabweichungen.

In Abbildung 21 ist dargestellt, dass alle Berechnungen im Vergleich zur direkten Referenz für beide Antriebskonzepte eine Standardabweichung des L_{50} -Pegels von 1 bis 4dB aufweisen. Bei den Fehlerintervallen ist lediglich zwischen den Faktoren 2.0 und 3.0 bei einigen tonalen Frequenzen eine signifikante Reduktion um ca. 1dB sichtbar. Der Wertebereich der Fehlerintervalle von +2 bis -14dB macht deutlich, dass die Abweichungen zum großen Teil negativ sind, d.h. die Ergebnisse der ACMS-Berechnungen liegen absolut gesehen unter denen der direkten Referenz.

Tabelle 6 zeigt, dass mit Steigerung des Upscale-Faktors sich sowohl die Rechenzeit als auch der benötigte Arbeits- und Festplattenspeicher ebenfalls erhöhen. Besonderen Zuwachs erfährt der I/O-Datentransfer von ca. 2.5TB (2.0) bis auf 5.6TB (6.0). Im Vergleich zur direkten Referenz benötigt bereits die ACMS-Berechnung mit einem Upscale-Faktor von 2.0 mehr als 160% mehr Arbeitsspeicher sowie 200% mehr Festplattenspeicher. Die minimalen Rechenzeiten demgegenüber liegen jedoch bis zu einem Upscale-Faktor von 4.0 unter denen der direkten Berechnung. Die Anzahl der ermittelten Eigenmoden steigt zwischen 8110 (2.0) und 8217 (3.0) sprunghaft an während danach deutlich weniger zusätzliche Eigenmoden ermittelt werden. Der Zuwachs kann damit direkt mit den verringerten Pegelabweichungen in Verbindung gebracht werden.

Da mit höheren Upscale-Faktoren über 3.0 keine deutlich Verbesserungen hinsichtlich des Berechnungsfehlers erreicht werden können, wird die obere Grenzfrequenz zwischen 490, 530, 685 und 735Hz bei gleichem Upscale-Faktor von 3.0 variiert.

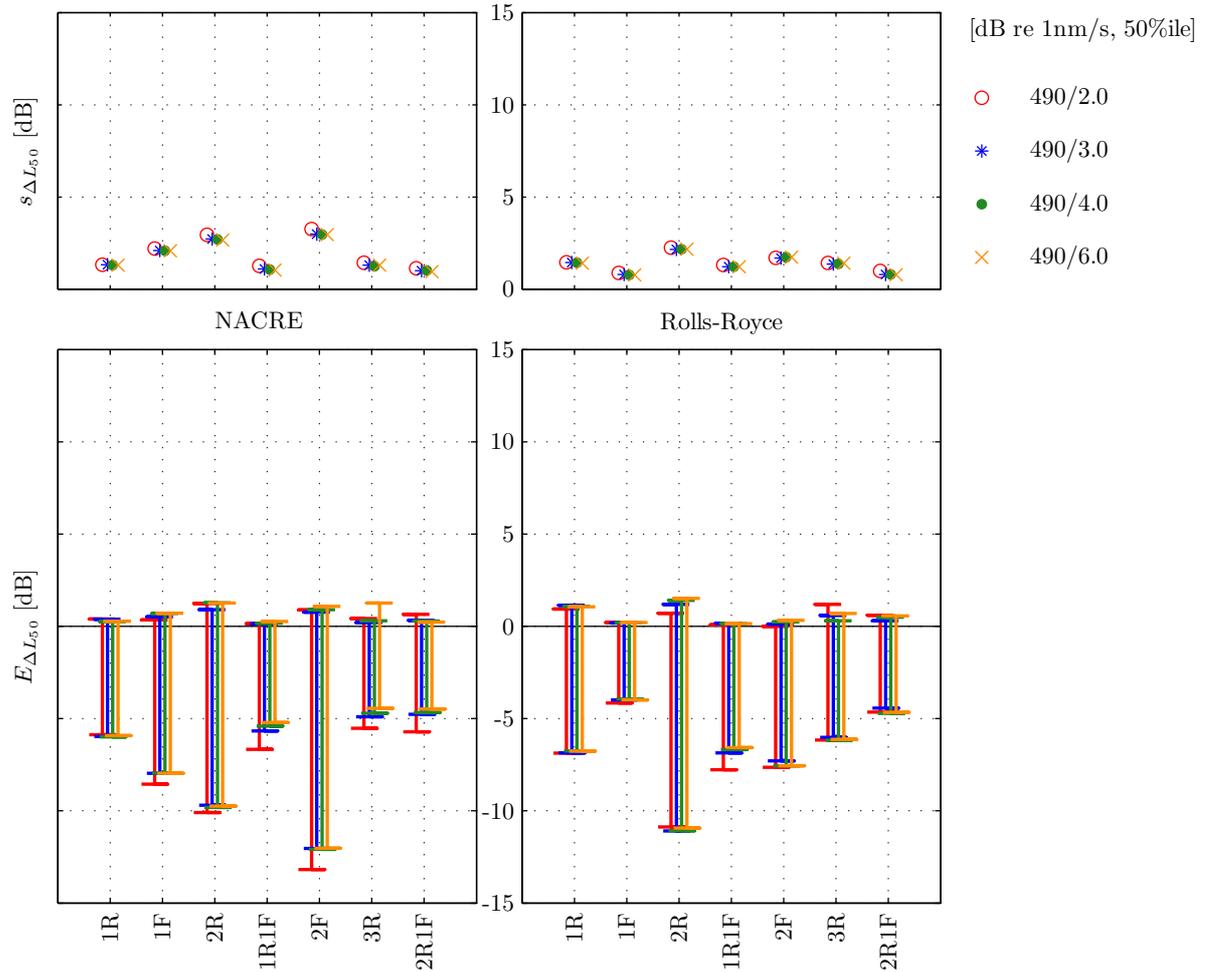


Abbildung 21: Struktur, Abweichungen ACMS bis 490 Hz ohne RV

		REF	490/2.0	490/3.0	490/4.0	490/6.0
T_{min}	[h]	2.71	1.08	1.38	1.75	2.52
T_{ser}	[h]	4.74	1.08	1.38	1.75	2.52
T_{use}	[h]	23.68	4.33	5.53	7.00	10.06
Alloc Mem	[GB]	4.00	12.00	12.00	12.00	12.00
Max Mem	[GB]	2.06	5.42	8.09	8.96	8.09
Max Disk	[GB]	22.53	69.01	71.48	73.40	76.83
I/O	[GB]	2908.81	2458.04	3086.83	4093.60	5581.11
Avg CPU	[%]	53.9	83.8	84.0	81.0	81.8
Mod (Struk)	[-]		8110	8217	8247	8266

Tabelle 6: Struktur, Vergleich ACMS bis 490 Hz ohne RV

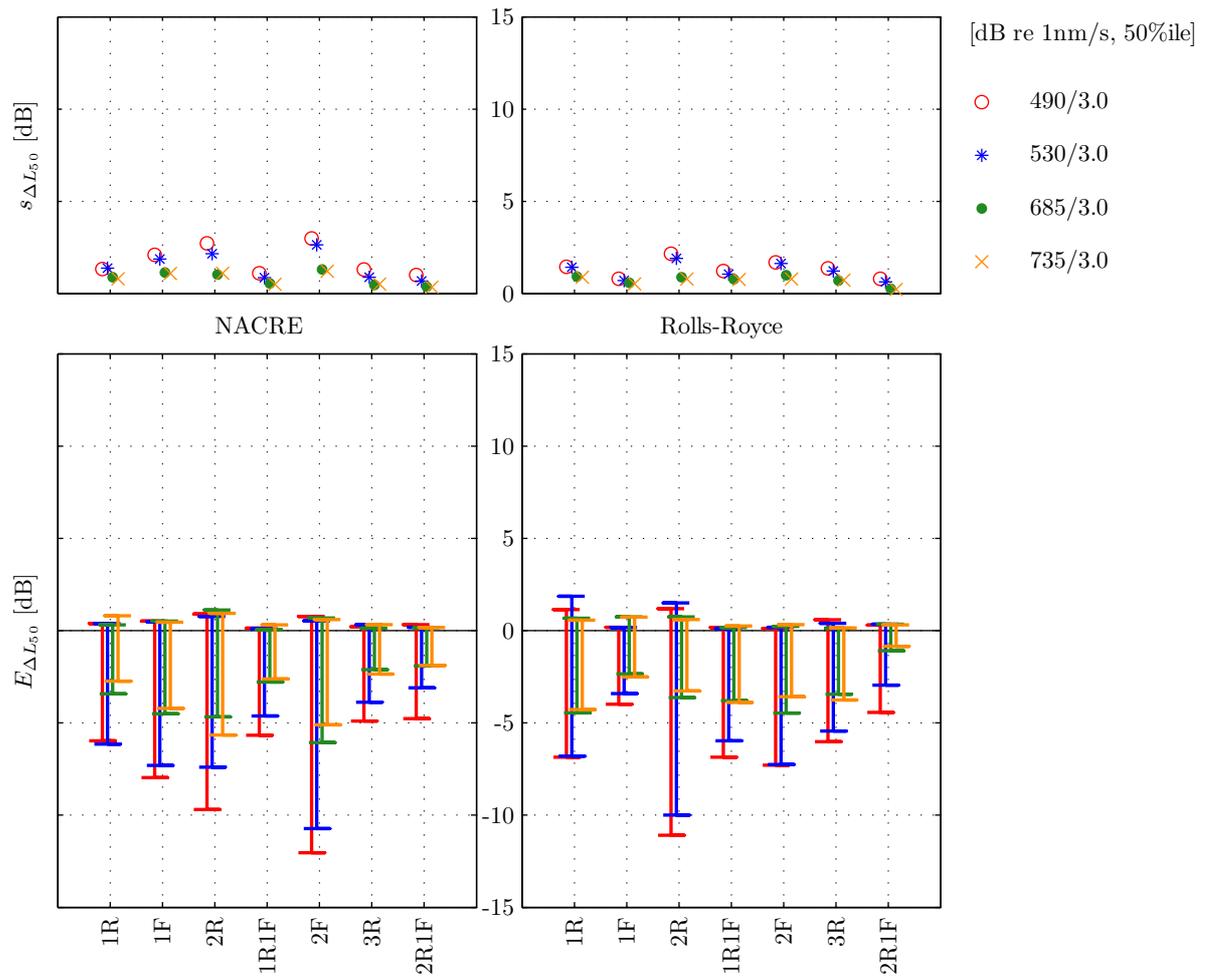


Abbildung 22: Struktur, Abweichungen ACMS Up-Faktor 3.0 ohne RV

Ab einer Grenzfrequenz von 685Hz zeigt sich in Abbildung 22 eine ungefähre Halbierung der Standardabweichungen und Fehlerintervalle für beide Antriebskonzepte. Der Wertebereich der Fehlerintervalle mit +3 bis -12dB bleibt weiter negativ dominiert.

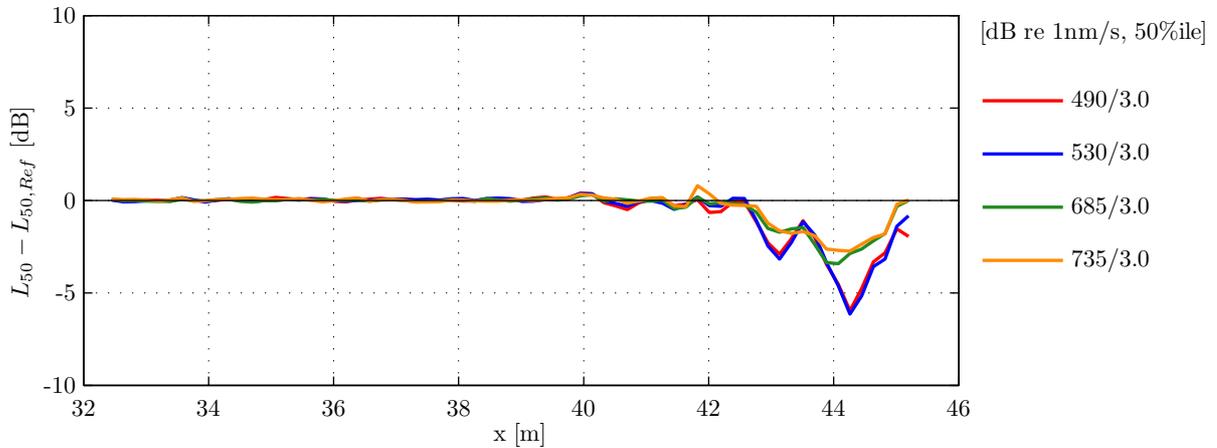


Abbildung 23: Struktur, Abweichungen, ACMS Up-Faktor 3.0 ohne RV (NACRE,1R)

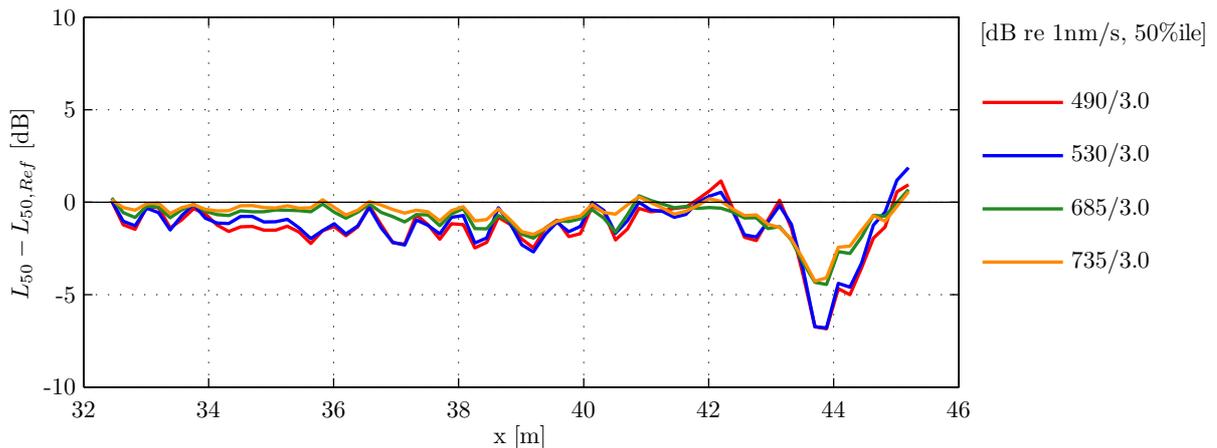


Abbildung 24: Struktur, Abweichungen, ACMS Up-Faktor 3.0 ohne RV (Rolls-Royce,1R)

In Abbildung 23 und 24 sind die L_{50} -Pegeldifferenzen der Segmente in Sektion 18 und 19 beider Antriebsvarianten für die 1R-Frequenz über die Flugzeuglängsachse aufgetragen. Es fällt auf, dass die größten Abweichungen jeweils in direkter Nähe der Propeller in Sektion 19 auftreten. Die Abweichungen in Sektion 18 fallen geringer aus.

Die Erhöhung der Grenzfrequenz führt, wie in Tabelle 7 verdeutlicht, ebenfalls zu einem erhöhten Ressourcenbedarf und höheren Rechenzeiten. Die Zuwächse bei Arbeits- und Festplattenspeicher übersteigen die der Variation des Upscale-Faktors. Die Berechnung bis 735Hz macht deutlich, dass eine zeitintensive Ermittlung der Eigenmoden sogar zu Laufzeiten deutlich über denen der direkten Referenz führen kann. Der größte Gewinn an Eigenmoden von 9396 (530Hz) auf 14697 (685Hz) korrespondiert zu der deutlichen Reduktion der Pegelabweichungen.

		REF	490/3.0	530/3.0	685/3.0	735/3.0
T_{min}	[h]	2.71	1.38	1.69	2.58	6.75
T_{ser}	[h]	4.74	1.38	1.69	2.58	6.75
T_{use}	[h]	23.68	5.53	6.76	10.31	26.99
Alloc Mem	[GB]	4.00	12.00	12.00	12.00	12.00
Max Mem	[GB]	2.06	8.09	8.09	9.86	11.22
Max Disk	[GB]	22.53	71.48	80.30	120.99	134.03
I/O	[GB]	2908.81	3086.83	3662.38	5633.81	6195.54
Avg CPU	[%]	53.9	84.0	83.5	77.5	90.0
Mod (Struk)	[-]		8217	9396	14697	16402

Tabelle 7: Struktur, Vergleich ACMS Up-Faktor 3.0 ohne RV

4.1.3 ACMS mit Residualvektoren

Bei der Verwendung von Residualvektoren zeigt sich in Abbildung 25 eine deutliche Reduktion der Abweichungen des L_{50} -Pegels gegenüber den Berechnungen ohne Residualvektoren. Die Rechenzeiten und Ressourcenverbräuche in Tabelle 8 erhöhen sich dabei nur leicht. Die deutlich reduzierten Abweichungen lassen sich mit den zusätzlichen Residualmoden erklären, deren Anzahl bei allen Varianten bei ca. 230 liegt.

		REF	490/2.0	490/3.0	490/4.0	490/6.0
T_{min}	[h]	2.71	1.28	1.58	2.08	2.99
T_{ser}	[h]	4.74	1.28	1.58	2.08	2.99
T_{use}	[h]	23.68	5.10	6.34	8.30	11.97
Alloc Mem	[GB]	4.00	12.00	12.00	12.00	12.00
Max Mem	[GB]	2.06	7.18	8.09	10.55	8.09
Max Disk	[GB]	22.53	71.15	73.44	75.35	83.40
I/O	[GB]	2908.81	2614.00	3458.68	4273.69	5765.36
Avg CPU	[%]	53.9	83.8	84.8	83.0	81.8
Mod (Struk)	[-]		8147	8228	8252	8265
Mod (RV)	[-]		230	224	224	224

Tabelle 8: Struktur, Vergleich ACMS bis 490 Hz mit RV

Die Variation des Upscale-Faktors hat wiederum einen geringen Einfluss auf die Pegelabweichungen. Gegenüber der direkten Referenz reduziert sich die Standardabweichung auf höchstens 0.3dB für beide Antriebskonzepte. Abgesehen von einem Ausreißer bei 2F/NACRE lässt sich ein Ansteigen der Standardabweichung mit wachsenden Frequenzen feststellen. Ab einem Upscale-Faktor von 3.0 reduzieren sich die Fehlerintervalle auf einen Wertebereich von +0.5 bis -0.8dB, womit die Fehler im Mittel nur noch leicht unterhalb der direkten Referenz liegen.

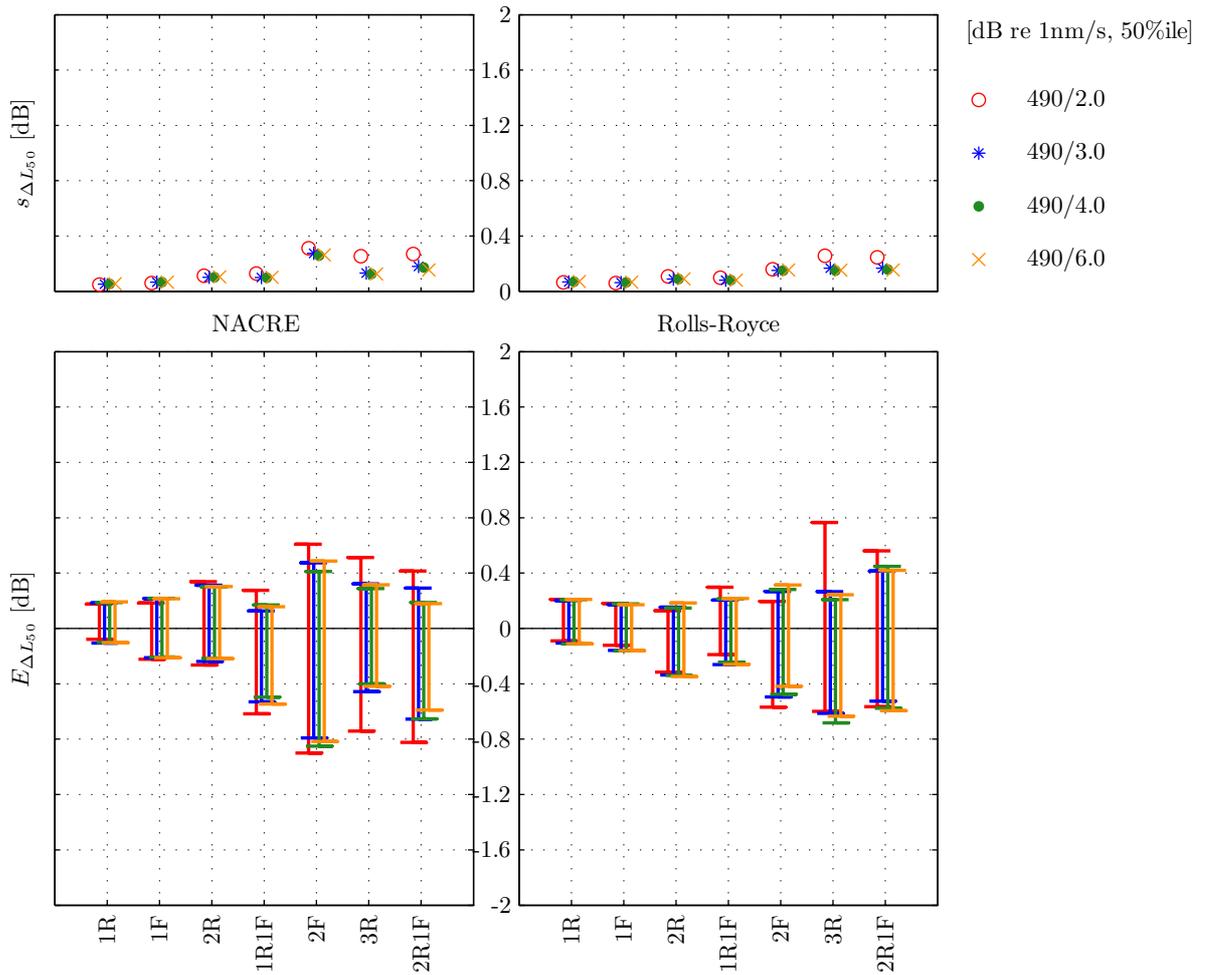


Abbildung 25: Struktur, Abweichungen ACMS bis 490 Hz mit RV

Bei Variation der oberen Grenzfrequenz mit einem Upscale-Faktor von 3.0 und Berücksichtigung von Residualmoden zeigen die Ergebnisse in Abbildung 26 eine deutliche Verbesserung ab 685Hz dar. Ähnlich wie bei den Berechnungen in Kapitel 4.1.2 halbiert sich ab dieser Frequenz die Standardabweichung und das Fehlerintervall. Jedoch zeigt sich für diese Grenzfrequenz beim NACRE-Antriebskonzept bei der Frequenz 1R eine doppelt so hohe Abweichung wie alle anderen Varianten. Tendenziell ist eine Erhöhung der Standardabweichung und der Breite des Fehlerintervalls für steigende Frequenzen zu erkennen.

Die Rechenzeiten und Ressourcenverbräuche in Tabelle 9 entsprechen für eine Obergrenze von 490 und 530Hz mit einer leichten Erhöhung denen der Berechnungen ohne Residualvektoren. Bemerkenswert ist, dass die Anzahl der Residualmoden unabhängig von oberer Grenzfrequenz und Upscale-Faktor relativ konstant bei 224 bis 230 liegt. Eine direkte Abhängigkeit von den variierten Parametern ist nicht zu erkennen. Für die höheren oberen modalen Grenzfrequenzen steigt die Rechenzeit sprunghaft an. Die Analyse der Laufzeiten in Abbildung 27 ergibt, dass sich der Anteil der MPYAD-Matrixmultiplikation

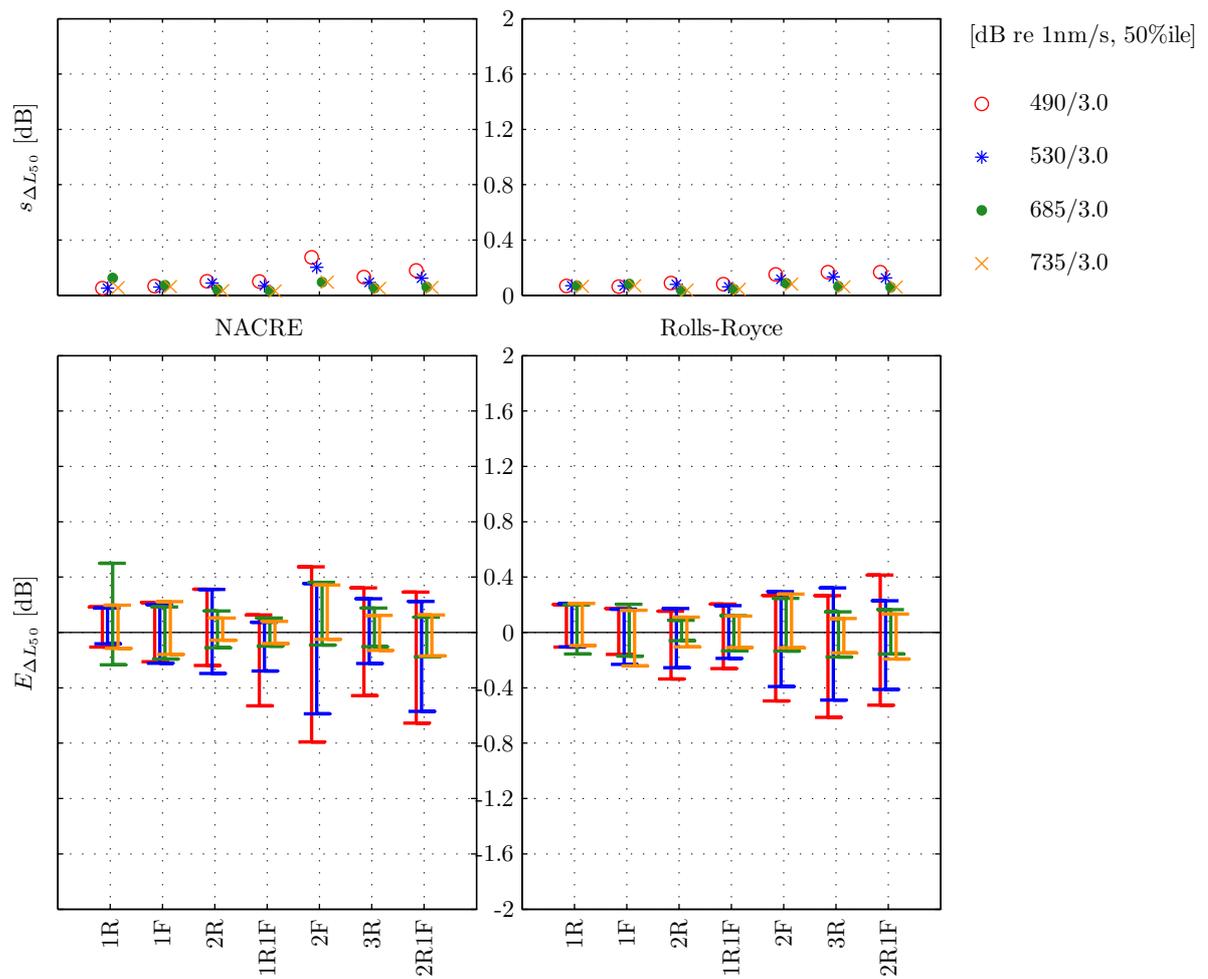


Abbildung 26: Struktur, Abweichungen ACMS Up-Faktor 3.0 mit RV

innerhalb der MODEFSRS-Prozedur ab einer Grenzfrequenz von 685Hz von unter 1% auf jeweils über 60% erhöht. Eine Erklärung dafür kann nicht gegeben werden.

		REF	490/3.0	530/3.0	685/3.0	735/3.0
T_{min}	[h]	2.71	1.58	2.26	6.96	8.06
T_{ser}	[h]	4.74	1.58	2.26	6.96	8.06
T_{use}	[h]	23.68	6.34	9.04	27.85	32.23
Alloc Mem	[GB]	4.00	12.00	12.00	12.00	12.00
Max Mem	[GB]	2.06	8.09	8.09	11.51	8.09
Max Disk	[GB]	22.53	73.44	82.32	122.88	136.31
I/O	[GB]	2908.81	3458.68	3909.19	5759.61	5469.50
Avg CPU	[%]	53.9	84.8	81.5	90.8	92.3
Mod (Struk)	[-]		8228	9408	14712	16408
Mod (RV)	[-]		224	224	224	225

Tabelle 9: Struktur, Vergleich ACMS Up-Faktor 3.0 mit RV

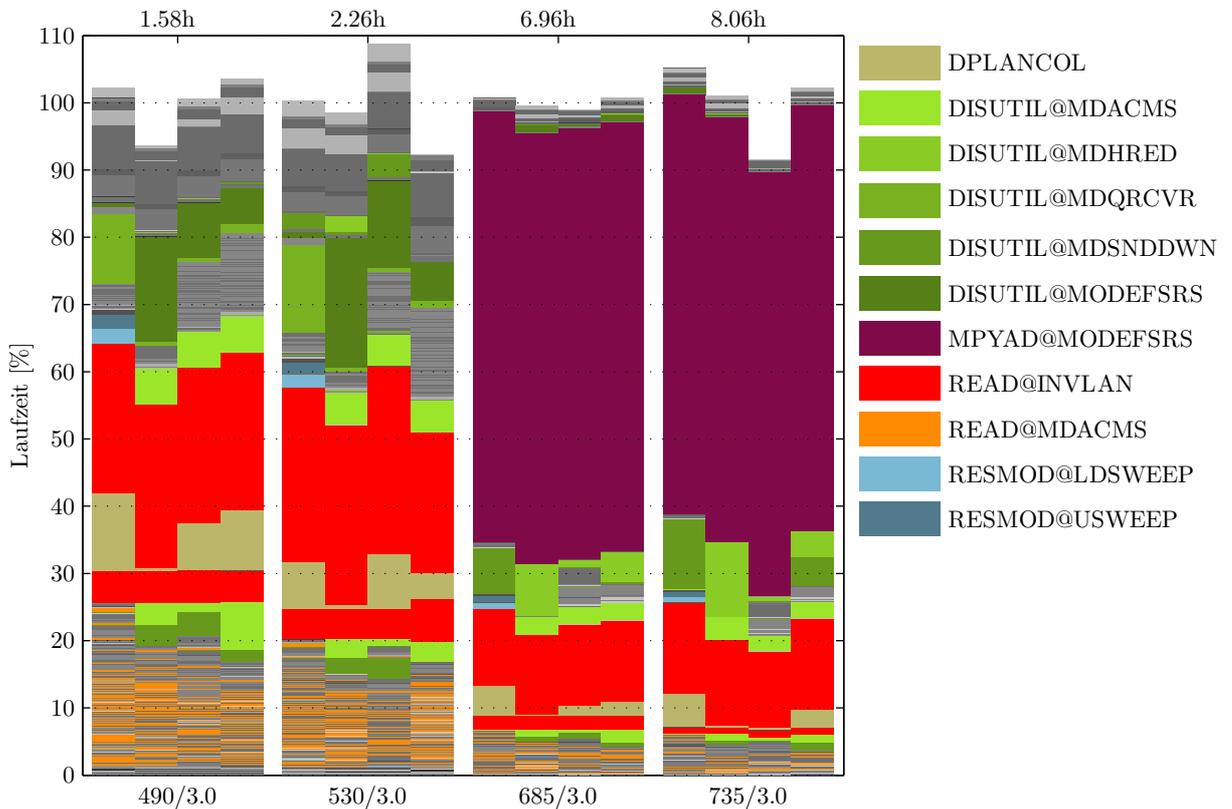


Abbildung 27: Struktur, Laufzeitanalyse ACMS Up-Faktor 3.0 mit RV

4.1.4 ACMS und externes Superelement

Ein weiterer Ansatz ist die separate Vorberechnung einer Substruktur des Modells. Dabei werden die Eigenschaften der Massen- und Steifigkeitsmatrizen der Substruktur auf die

entsprechenden Eigenschaften der externen Verbindungsknoten zu dem Restmodell, der Residualstruktur, kondensiert und zusätzlich Eigenmoden auf der Substruktur berechnet. Die Substruktur wird im Sprachgebrauch von Nastran als externes Superelement bezeichnet, wenn diese Vorberechnung nicht als Subcase sondern als separate Berechnung ausgeführt wird. Vorteilhaft ist daran, dass die Ergebnisse in Dateien abgespeichert werden und beliebig oft eingelesen und wiederverwendet werden können. Im Gegensatz dazu sind die Ergebnisse der Vorberechnungen aus den Substrukturen bei internen Superelementen ebenso wie bei ACMS nur temporär verfügbar. Eine Verwendung bzw. Speicherung über die Hauptberechnung hinaus ist dann nicht möglich (siehe Kapitel 3.3).

Für das gegebene Strukturmodell werden die mehrfach duplizierten Spantensegmente mit ca. 1.2M Freiheitsgraden, die für die Berücksichtigung der Randbedingungen (siehe Kapitel 3.1.3) notwendig sind, als ein externes Superelement definiert. Von den 1.2M Freiheitsgraden sind knapp 8K externe bzw. Master-Freiheitsgrade. Vorteilhaft ist hierbei, dass später keine Extraktion von Ergebnissen der Hauptberechnung zurück auf die internen Freiheitsgrade des Superelements notwendig sind, da diese ausschließlich der Einspannung der eigentlich betrachteten Teilstruktur des Flugzeuges dienen. Für das Superelement wird

		SE (490/4.0)	SE (735/4.0)	SE (980/4.0)
T_{min}	[h]	0.85	2.15	4.28
T_{ser}	[h]	0.85	2.15	4.28
T_{use}	[h]	3.39	8.61	17.10
Alloc Mem	[GB]	32.00	12.00	12.00
Max Mem	[GB]	8.09	9.60	8.09
Max Disk	[GB]	19.54	82.09	72.97
I/O	[GB]	1239.20	3296.74	3571.47
Avg CPU	[%]	94.3	66.5	88.8
Mod (Struk)	[-]	5005	9757	14491
Mod (RV)	[-]	143	143	143

Tabelle 10: Struktur, Vergleich ACMS-Vorberechnungen für externe SE mit RV

die Berechnung unter Verwendung von ACMS mit drei verschiedenen Grenzfrequenzen bei einem Upscale-Faktor von 4.0 und mit Residualvektoren durchgeführt. In Tabelle 10 sind die Rechenzeiten und Ressourcenverbräuche dargestellt. Unter der Annahme einer mehrfachen Verwendung wird die Rechenzeit der Vorberechnung für die Rechenzeit der Hauptberechnung vernachlässigt. Die ermittelten Eigenmoden des Superelements sind in der Anzahl anteilig vergleichbar mit denen der Gesamtstruktur in Tabelle 9 wenn man das Verhältnis zwischen der Anzahl der Freiheitsgrade von Superelement und Gesamtstruktur (ca. 1.94M Freiheitsgrade) berücksichtigt.

Vor der Berechnung der Residualstruktur definiert man einen zusätzlichen Subcase, der die Ergebnisse der Vorberechnung d.h. des Superelements einliest. Die Hauptberechnung wird wiederum mit ACMS mit einem Upscale-Faktor von 3.0 und einer oberen Grenzfrequenz von 490Hz durchgeführt. Abbildung 28 vergleicht die Ergebnisse der Superelement-Berechnungen mit der ACMS-Grundvariante gegenüber der direkten Referenz. Mit der

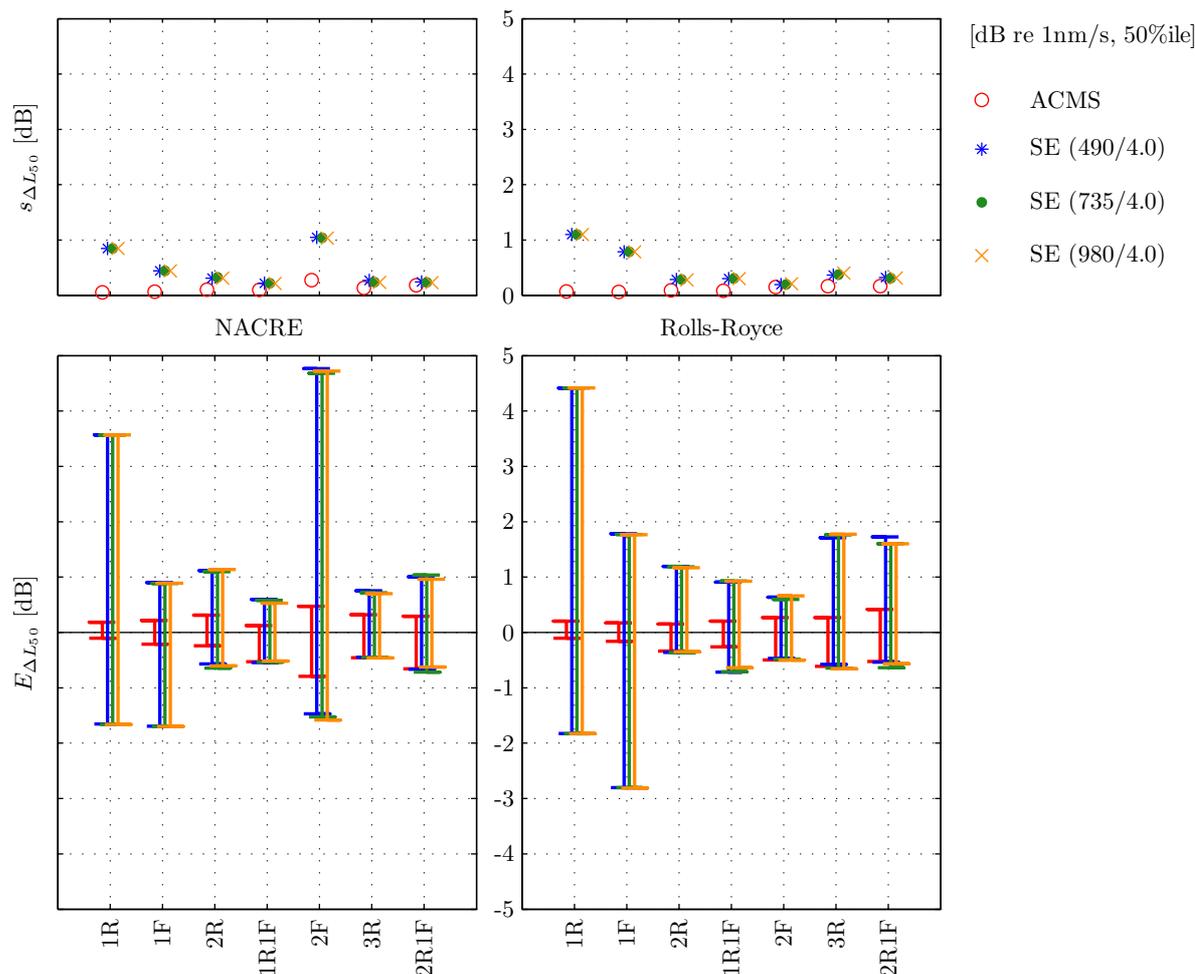


Abbildung 28: Struktur, Abweichungen ACMS 490/3.0 Externes SE

ACMS-Grundvariante wird im Folgenden die ACMS-Berechnung ohne Superelemente mit ansonsten gleichen Parametern bezeichnet. Es fällt auf, dass die Standardabweichungen des L_{50} -Pegels für alle Superelementberechnungen nahezu identisch sind und besonders für die niedrigen 1R- und 1F-Frequenzen um ein Vielfaches höher liegen als die der ACMS-Grundvariante. Für höhere Frequenzen reduzieren sich die Abweichungen mit Ausnahme der Frequenz 2F des NACRE-Antriebskonzepts auf ein doppelt so hohe Standardabweichung im Vergleich zur ACMS-Grundvariante. Auch beim Vergleich der Fehlerintervalle ist kein Einfluss der höheren Grenzfrequenz der Superelement-Vorbereitung zu erkennen. Der Wertebereich ist mit +5 bis -2dB bei der 1R-Frequenz für beide Antriebskonzepte am größten.

In Abbildung 29 und 30 sind die L_{50} -Pegeldifferenzen der Segmente in Sektion 18 und 19 beider Antriebskonzepte für die 1R-Frequenz über die Flugzeuglängsachse aufgetragen. Zum einen wird deutlich, dass die Pegeldifferenzen der Superelementberechnungen nahezu identisch sind und die höchsten Abweichungen an dem Segment der Verbindungsstelle zwischen Superelement und Residualstruktur auftreten. In Richtung positiver Längsach-

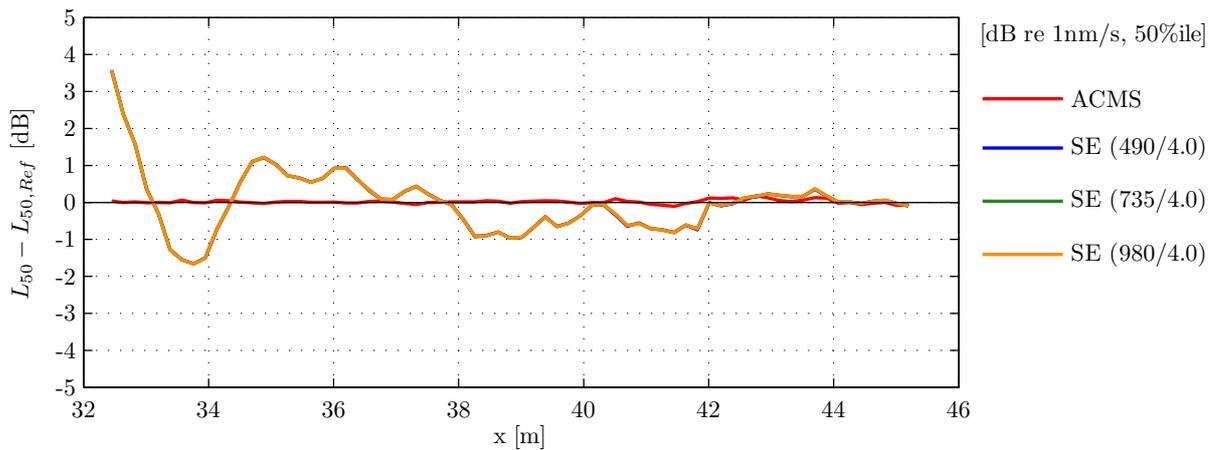


Abbildung 29: Struktur, Abweichungen, ACMS 490/3.0 Externes SE (NACRE,1R)

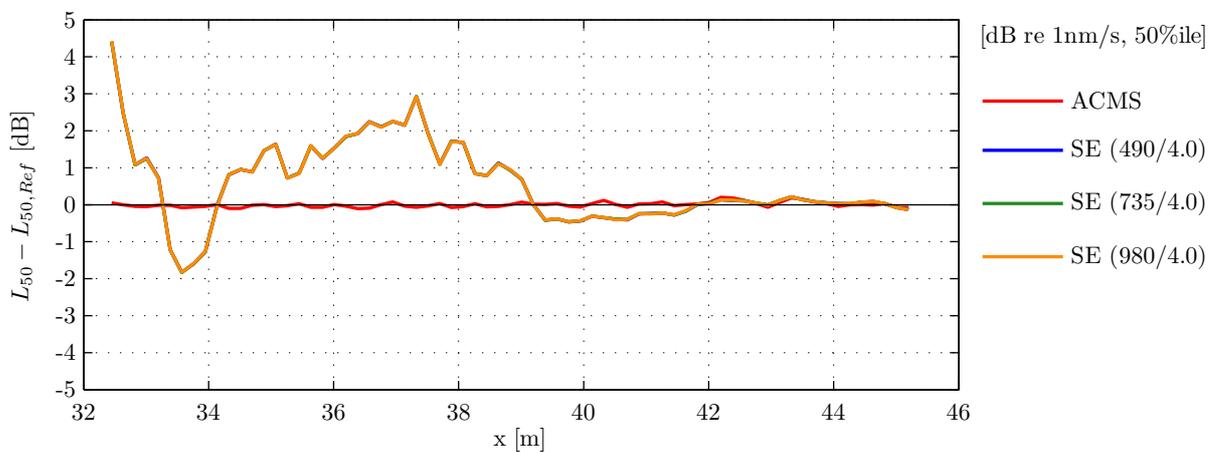


Abbildung 30: Struktur, Abweichungen, ACMS 490/3.0 Externes SE (Rolls-Royce,1R)

se wechseln die Abweichungen mehrfach zwischen positivem und negativem Bereich bei allgemein abfallender Amplitude. Im Bereich von 42 bis 45m liegen die Abweichungen schließlich sogar auf dem Niveau der ACMS-Grundvariante.

Die Rechenzeiten in Tabelle 11 der Superelementberechnungen können nicht mit der ACMS-Grundvariante verglichen werden, da verschiedene CPU-Konfigurationen verwendet werden. Die Berechnung erfolgt jeweils mit 4 Prozessoren, jedoch bei der ACMS-Grundvariante im DMP-Modus und bei den Superelementberechnungen im SMP-Modus (Shared Memory Processing)⁶. Üblicherweise liegen die Rechenzeiten von SMP deutlich über denen von DMP. Ein Vorteil der Superelementberechnungen ist der deutlich reduzierte IO-Datenverkehr im Vergleich zu der ACMS-Grundvariante, ansonsten befinden sich die anderen Kenndaten auf einem ähnlichen Niveau. Auffällig ist die deutlich reduzierte Anzahl von Residualvektoren von 84 im Vergleich zu 230 der Grundvariante.

⁶Ein Fehler im Airbus-internen Startskript verhinderte die Berechnung der Residualstruktur im DMP-Modus auf dem HPC, da die Dateien der Vorberechnung nicht auf alle Knoten kopiert werden. Eine korrigierte Version des Startskripts befindet sich in der Testphase.

		REF	ACMS	SE (490/4.0)	SE (735/4.0)	SE (980/4.0)
T_{min}	[h]	3.57	1.58	1.85	2.35	2.65
T_{ser}	[h]	6.26	1.58	1.85	2.35	2.65
T_{use}	[h]	31.28	6.34	7.40	9.42	10.61
Alloc Mem	[GB]	4.00	12.00	12.00	12.00	12.00
Max Mem	[GB]	2.06	8.09	8.09	8.09	8.09
Max Disk	[GB]	22.47	73.44	73.49	120.45	172.64
I/O	[GB]	3300.38	3458.68	1344.64	1583.48	1622.81
Avg CPU	[%]	79.7	84.8	22.5	19.3	17.8
Mod (Struk)	[-]		8228	8268	8285	8286
Mod (RV)	[-]		224	84	84	84

Tabelle 11: Struktur, Vergleich ACMS 490/3.0 Externes SE

Die 143 Residualvektoren der Vorberechnung werden jedoch noch zusätzlich als Eigenmoden des Superelements berücksichtigt. Dies kann somit nicht die Hauptursache für die starken Abweichungen des L_{50} -Pegels sein. Die starke geometrische Konzentration der Pegeldifferenzen in der Nähe der Verbindungsknoten und der fehlende Einfluss der höheren Eigenmoden des Superelements deuten nicht auf einen Abbruchfehler hin. Vielmehr könnte ein prinzipieller Fehler durch falsche Annahmen der Randbedingungen zwischen Superelement und Residualstruktur ursächlich für die starken Abweichungen sein.

4.1.5 ACMS mit Residualvektoren und Vorlasten

Abschließend erfolgt die Berechnung des L_{50} -Pegels unter Berücksichtigung von statischen Drucklasten auf die Außenhülle und Druckkalotte von Sektion 18, die durch die Druckdifferenz der Kabine zur Außenatmosphäre in Referenzflughöhe entstehen (siehe Kapitel 3.2).

In Abbildung 31 sind die Abweichungen und Fehlerintervalle der ACMS-Berechnungen zu der direkten Referenz mit statischen Vorlasten unter Variation der oberen Grenzfrequenz und einem Upscale-Faktor von 3.0 dargestellt. Gegenüber den ACMS-Berechnungen verdoppeln sich die Werte für beide Antriebskonzepte und über alle Frequenzen auf maximal 0.5dB. Dabei ist eine Erhöhung der Abweichungen für höhere Frequenzen deutlich zu erkennen und eine Verschiebung des Bereichs der Fehlerintervalle mit +0.5 bis -1.6dB hin zu negativen Werten. Bei Erhöhung der oberen Grenzfrequenz kommt es im Gegensatz zu den vorherigen Berechnungen ohne Vorlasten zu keiner signifikanten Verbesserung.

Die Verhältnisse der Rechenzeiten und Ressourcenverbräuche in Tabelle 12 zeigen im Vergleich zu den Berechnungen ohne statische Vorlasten eine leichte Steigerung für fast alle Kennwerte. Auch hier treten bei den beiden Berechnungen mit höheren oberen Grenzfrequenzen wieder deutlich längere Rechenzeiten auf. Durch die statischen Vorlasten kommt es zu einer Versteifung der Struktur und damit erhöhen sich die Eigenfrequenzen signi-

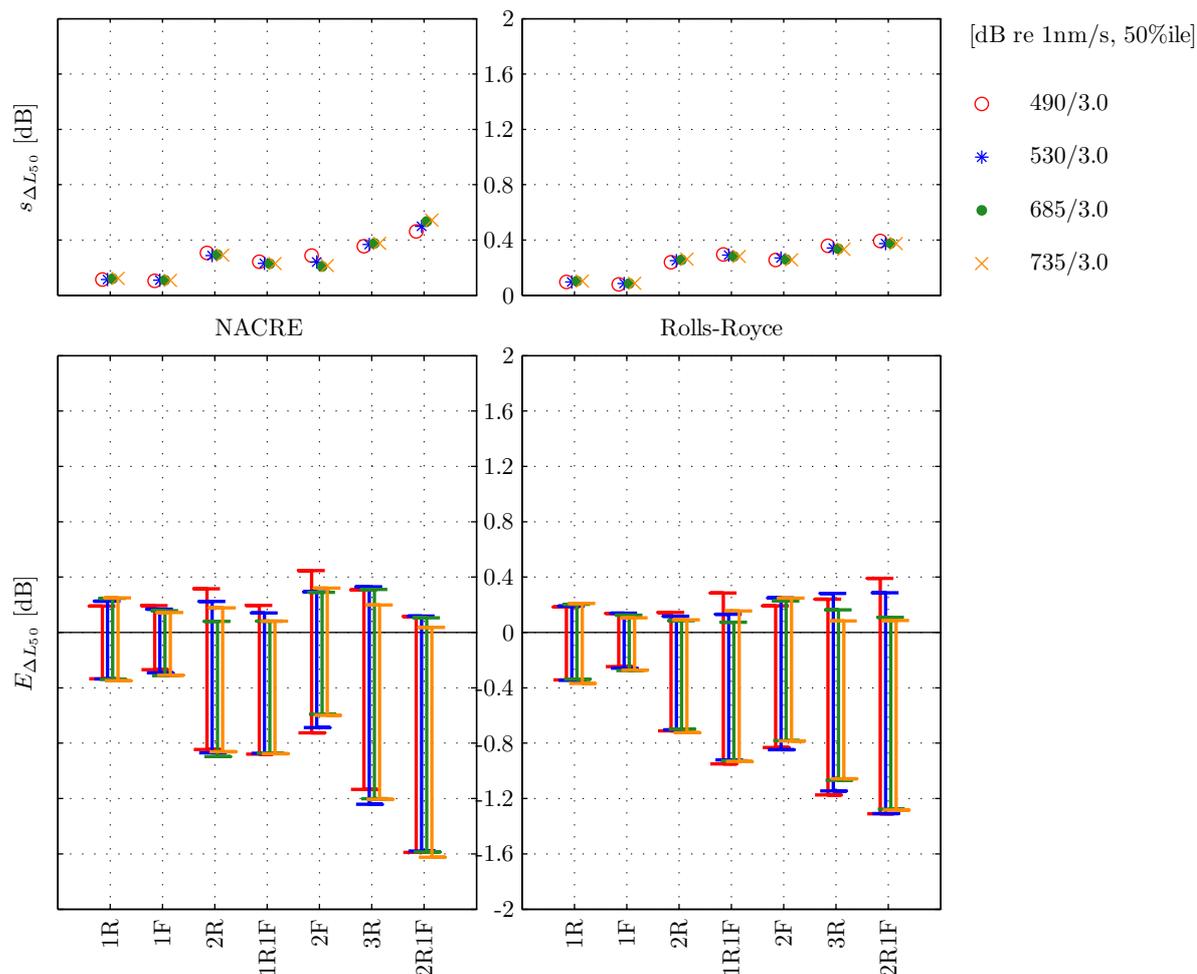


Abbildung 31: Struktur, Abweichungen ACMS Up-Faktor 3.0 mit VL

		REF	490/3.0	530/3.0	685/3.0	735/3.0
T_{min}	[h]	4.12	2.32	2.89	6.76	6.46
T_{ser}	[h]	7.22	2.32	2.89	6.76	6.46
T_{use}	[h]	36.09	9.26	11.56	27.06	25.83
Alloc Mem	[GB]	2.00	12.00	12.00	12.00	12.00
Max Mem	[GB]	2.00	8.09	8.09	10.43	8.09
Max Disk	[GB]	31.01	72.33	79.90	113.88	124.76
I/O	[GB]	4231.63	3843.16	4292.64	6438.32	5971.13
Avg CPU	[%]	62.3	89.3	85.5	86.0	91.3
Mod (Struk)	[-]		6991	7999	12421	13797
Mod (RV)	[-]		228	228	227	227

Tabelle 12: Struktur, Vergleich ACMS Up-Faktor 3.0 mit VL

fikant. Gegenüber den Berechnungen ohne Vorlasten werden dadurch ca. 15% weniger Eigenmoden im gleichen Frequenzintervall ermittelt.

4.1.6 Zusammenfassung

Die Vorberechnungen haben wichtige Erkenntnisse über die unterschiedlichen dynamischen Lastdefinitionen geliefert. Die Variante 3 zeigte dabei sowohl bei der Rechenzeit als auch bei dem Ressourcenverbrauch die besten Werte. Bei den Vergleichsberechnungen zwischen direkter Referenz und ACMS zeigt sich ein großer Nutzen der Residualvektoren. Ihre Berücksichtigung führt zu einer Reduktion der Standardabweichung der L_{50} -Pegeldifferenzen um den Faktor 10 auf weniger als 0.4dB. Die Rechenzeit und der Ressourcenverbrauch erhöhen sich dabei nur leicht.

Aus der Parametervariation ergibt sich ein Optimum hinsichtlich Pegelabweichungen und Rechenzeit bei der Kombination von einer oberen Grenzfrequenz von 490Hz und einem Upscale-Faktor von 3.0. Es können dabei gegenüber der direkten Berechnung bei der minimalen Rechenzeit um die 40% und bei der Ressourcenzeit über 70% eingespart werden. Generell sind die ACMS-Berechnungen jedoch von einem deutlich höheren Ressourcenverbrauch gekennzeichnet. So benötigt ACMS ca. viermal mehr Arbeitsspeichers und ca. 20% mehr I/O-Datentransfer je Knoten. Durch die Verwendung eines externen Superelements lässt sich der I/O-Datentransfer stark reduzieren, jedoch zeigen die Berechnungen starke Pegelabweichungen im Bereich des Verbindungssegments.

Die Berücksichtigung von statischen Vorlasten führt ebenfalls zu einer Erhöhung der Pegelabweichungen. Die Ursache hierfür ist unklar. Es zeigt sich hierbei eine deutliche Frequenzabhängigkeit der Abweichungen. Bemerkenswert ist auch der sehr geringe Einfluss bei Berücksichtigung von höheren Eigenmoden.

4.2 Fluid-Struktur-Interaktion-Berechnungen

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der gekoppelten Berechnungen präsentiert. Zusätzlich zu der Primär- und Sekundärstruktur berücksichtigt man dabei die Fluidelemente in Sektion 18 und 19 sowie die Kabineninnenverkleidung. Die Auswertung der Segmente findet in beiden Sektionen statt.

Es werden die Ergebnisqualität, die Rechenzeit und der Ressourcenverbrauch der ACMS-Berechnungen mit und ohne Residualvektoren sowie externem Superelement mit der direkten Referenzberechnung verglichen. Statische Vorlasten können nicht berücksichtigt werden, da mit ihnen bei dem gekoppelten Modell Abbrüche bei allen ACMS-Berechnungen auftreten⁷.

Die Analyse der drei Lastdefinitionen ergibt für die FSI-Berechnungen ähnliche Ergebnisse wie die Analyse der Strukturberechnungen. Der prozentuale Anteil der Lastprozeduren reduziert sich für die direkte Berechnung von 37% bzw. für die ACMS-Berechnung von 67% auf jeweils unter einen Prozent. Die Diagramme sind dem Anhang A.2.2 zu entnehmen.

Der Aufwand für eine FSI-Berechnung ist im Vergleich zu einer Strukturberechnung deutlich höher. Vor der Lösung des gekoppelten Gleichungssystem müssen bei der modalen Berechnung sowohl für die Struktur als auch für das Fluid die Eigenmoden separat er-

⁷Der Fehler ist bereits bei MSC Software bekannt und wurde unter der Nummer NAS-5213 registriert. Derzeit wird von MSC Software keine Lösung zum Umgehen des Problems angeboten [22]

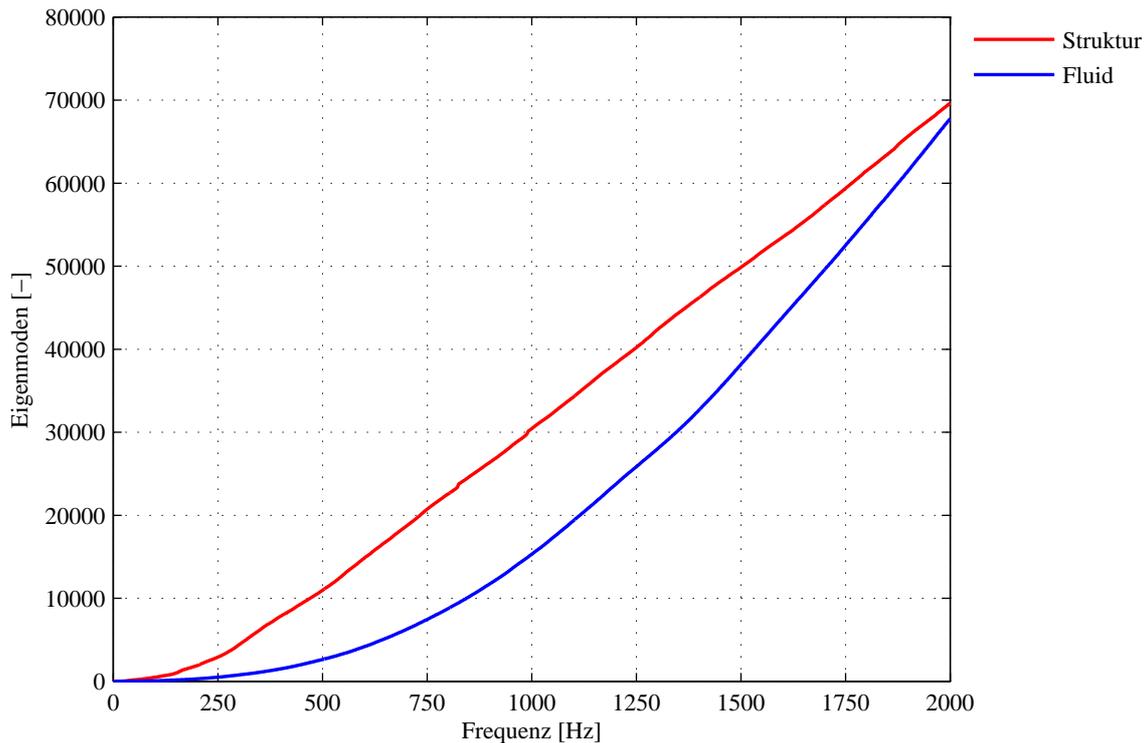


Abbildung 32: Vergleich Anzahl Eigenmoden über Frequenz

mittelt werden. In Abbildung 32 ist die Modendichte als Anzahl der Eigenmoden von allen Strukturelementen bzw. allen Fluidelementen gegenüber der Frequenz bis 2000Hz dargestellt. Die Berechnung erfolgt für die Struktur mit ACMS ohne Residualvektoren und einem Upscale-Faktor von 3.0. Für die Struktureigenmoden ergibt sich ab 250Hz ein ungefähr linearer Verlauf, während die Fluideigenmoden in den unteren Frequenzen deutlich schwächer ansteigen. Erst bei 2000Hz haben sie mit knapp 70.000 Eigenmoden das gleiche Niveau wie die Struktureigenmoden erreicht. Bei einer oberen Grenzfrequenz von 490Hz werden ca. 2500 Eigenmoden für das Fluid und ca. 10500 für die Struktur ermittelt.

4.2.1 ACMS mit Residualvektoren

Auf Grundlage der Erkenntnisse der Strukturberechnungen wird die obere Grenzfrequenz für die Struktureigenmoden auf 490Hz und ein Upscale-Faktor von 3.0 festgelegt. Da eine Berechnung von Residualvektoren innerhalb des Fluids von MSC.Nastran nicht unterstützt wird, erfolgt die Berechnung der Residualvektoren ausschließlich für die Struktur. Die Ergebnisse der gekoppelten Berechnung ohne Residualvektoren sind dem Anhang A.2.4 zu entnehmen. Sie entsprechen bis auf geringfügig höhere Pegelabweichungen den nachfolgend beschriebenen Berechnungen mit Residualvektoren.

Um den Einfluss der Fluideigenmoden zu analysieren wird die obere Grenzfrequenz von 490Hz in 200Hz Schritten bis auf 1090Hz variiert. Die Standardabweichung des L_{50} -Pegels in Abbildung 33 reduziert sich zwischen 490 und 690Hz teilweise deutlich. Generell liegen die Abweichungen für beide Antriebsvarianten unabhängig von der Grenzfrequenz

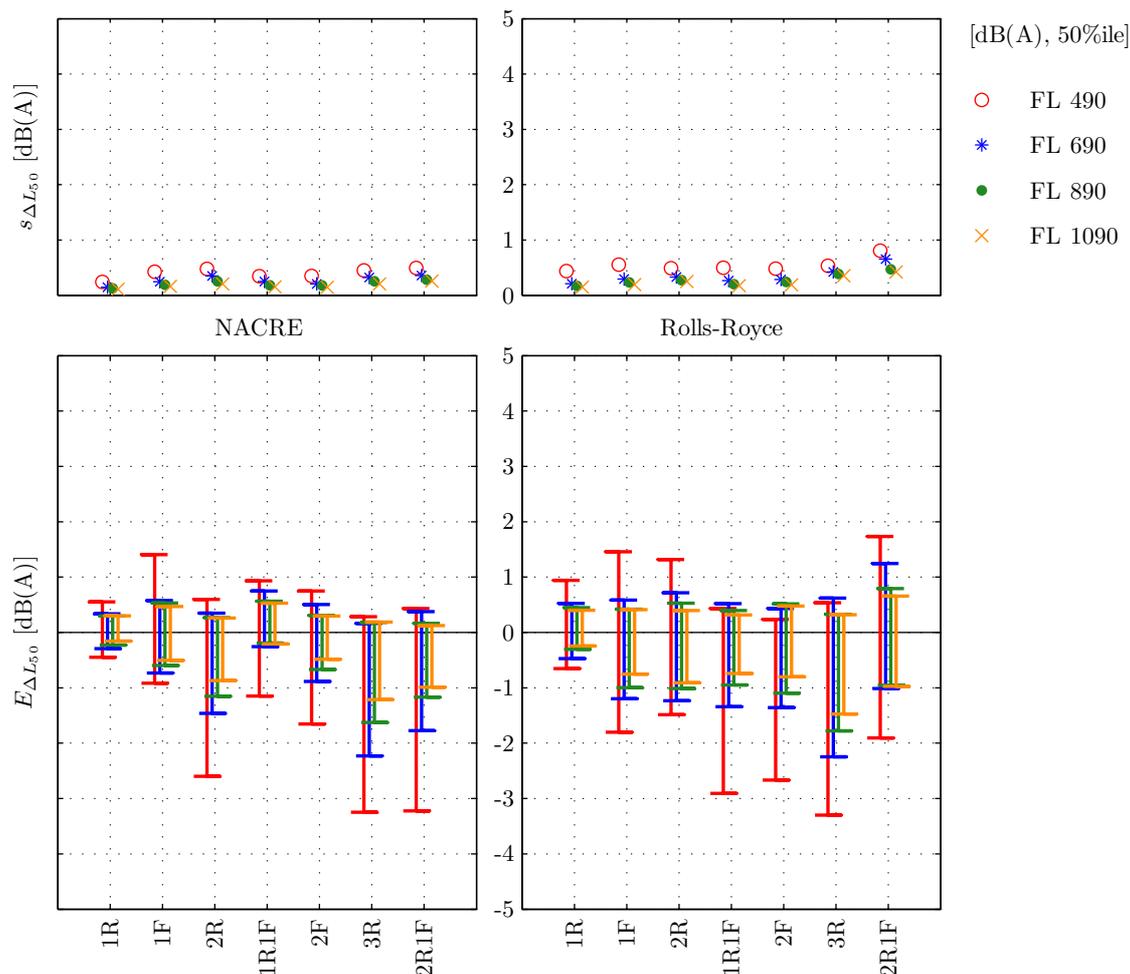


Abbildung 33: FSI, Abweichungen ACMS Struktur 490/3.0 mit RV

der Fluideigenmoden für alle tonalen Frequenzen unter 1dB(A). Auch bei den Fehlerintervallen zeigt sich mit Berücksichtigung von höheren Fluideigenmoden eine deutliche Reduktion. Während der maximale Wertebereich für 490Hz von +2 bis -3.5db(A) liegt, reduziert er sich für 1090Hz auf +1 bis -1.8db(A). Außerdem verschiebt sich die Fehlerintervalle von anfangs negativ dominiert mit höheren Eigenmoden auf eine neutrale Streuung.

In Abbildung 34 bis 37 sind die L_{50} -Pegeldifferenzen zur direkten Referenz für beide Antriebskonzepte der Frequenz 2R der Segmente in Sektion 18 und 19 über die Flugzeuglängsachse aufgetragen. Man kann bei allen Diagrammen erkennen, dass der größte Fehler negativ ist und jeweils an dem Segment 18 bei $x = 30\text{m}$ auftritt. Durch höhere Eigenmoden wird der lokale Fehler signifikant reduziert, was mit den reduzierten Fehlerintervallen aus Abbildung 33 korrespondiert.

Die Auswertung der Rechenzeiten und Ressourcenverbräuche in Tabelle 13 macht deutlich, dass die ACMS-Berechnungen generell schlechter abschneiden als die direkte Referenz. Lediglich die unterste ACMS-Berechnung unterschreitet die serielle Rechenzeit der Referenz

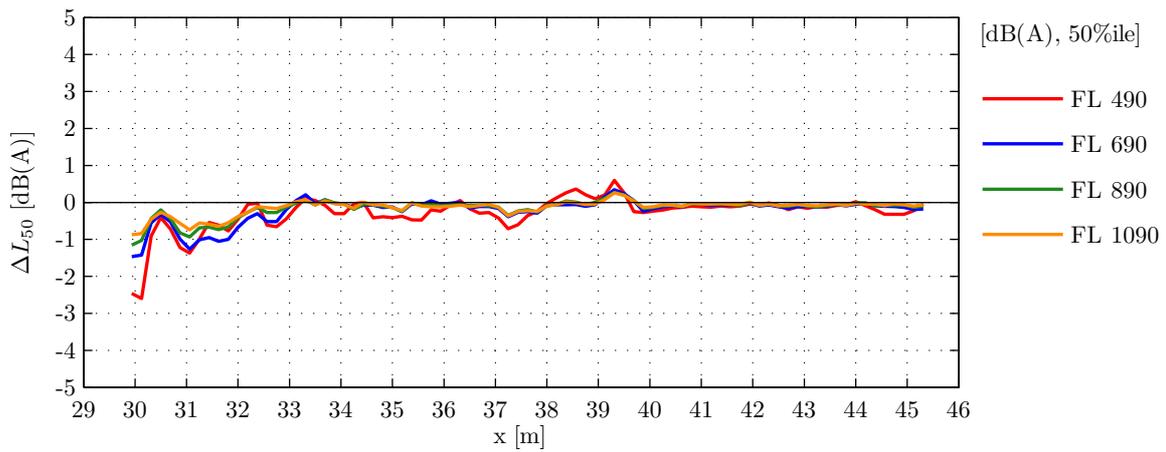


Abbildung 34: FSI, Abweichungen, ACMS Struktur 490/3.0 mit RV (NACRE,2R)

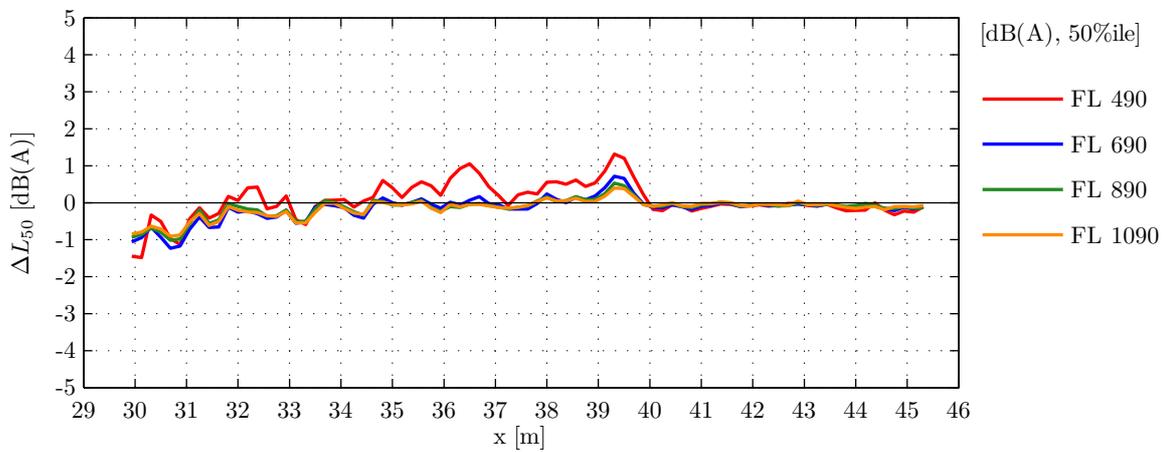


Abbildung 35: FSI, Abweichungen, ACMS Struktur 490/3.0 mit RV (Rolls-Royce,2R)

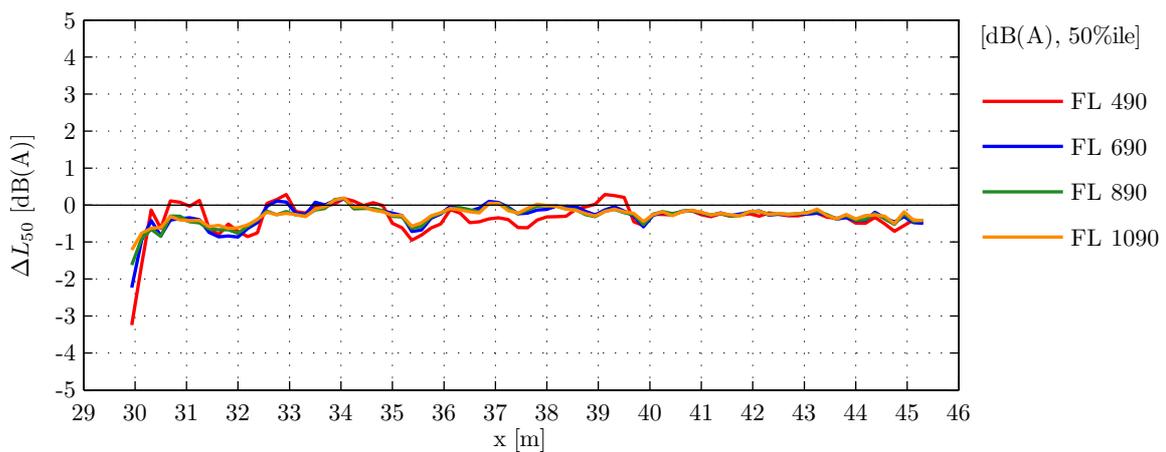


Abbildung 36: FSI, Abweichungen, ACMS Struktur 490/3.0 mit RV (NACRE,3R)

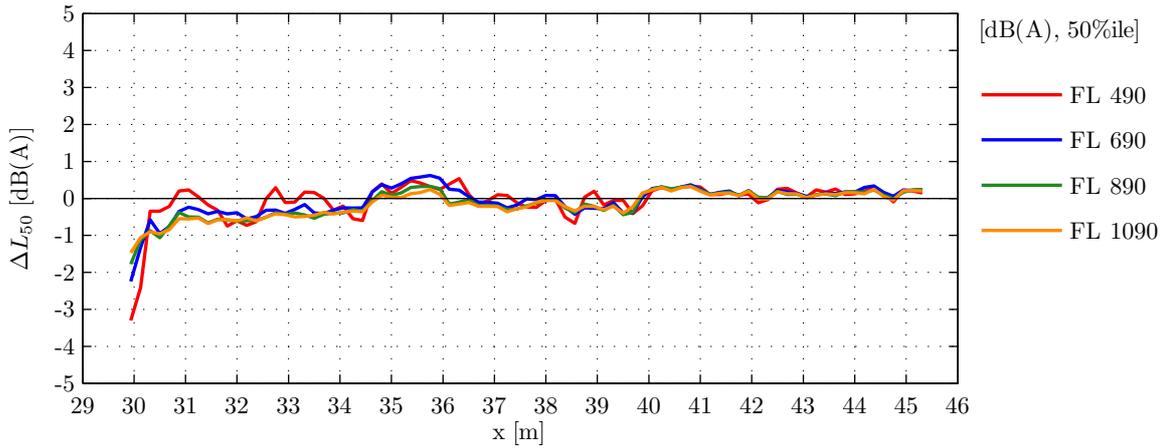


Abbildung 37: FSI, Abweichungen, ACMS Struktur 490/3.0 mit RV (Rolls-Royce,3R)

		REF	FL 490	FL 690	FL 890	FL 1090
T_{min}	[h]	5.61	8.80	12.20	17.68	95.32
T_{ser}	[h]	9.81	8.80	12.20	17.68	95.32
T_{use}	[h]	49.05	35.19	48.79	70.71	381.27
Alloc Mem	[GB]	4.00	12.00	12.00	12.00	12.00
Max Mem	[GB]	3.56	5.23	5.23	5.23	6.68
Max Disk	[GB]	35.43	850.06	877.68	924.42	997.00
I/O	[GB]	4567.87	20199.29	23640.48	30211.50	40464.70
Avg CPU	[%]	58.6	62.3	70.5	77.5	81.8
Mod (Struk)	[-]		10580	10580	10580	10580
Mod (RV)	[-]		230	230	230	230
Mod (Fluid)	[-]		2517	6019	11442	18942

Tabelle 13: FSI, Vergleich ACMS Struktur 490/3.0 mit RV

signifikant. Demgegenüber stehen allerdings ein deutlicher Mehrverbrauch an Festplattenspeicher von über 800GB je Knoten und über 400% höherem IO-Datenverkehr. Mit Berücksichtigung von mehr Fluideigenmoden erhöht sich der Festplattenspeicher auf maximal 997GB für 1090Hz. Es ist zu berücksichtigen, dass die verfügbaren HPC-Knoten eine physikalische Speichergrenze von 1TB aufweisen (siehe Tabelle 3 in Kapitel 3.3). Der IO-Datenverkehr verdoppelt sich im Vergleich zur einfachsten ACMS-Berechnung auf maximal 40TB.

Nach Analyse der prozentualen Laufzeitanteile in Abbildung 38 erkennt man, dass die Erhöhung der Rechenzeit maßgeblich durch die Prozeduren READ@XREAD, SMPYAD@GMAM, RESMOD@ATBC sowie diverse Aufrufe von DISUTIL beeinflusst wird. READ@XREAD ermittelt die Eigenmoden des Fluids und wird im Gegensatz zu READ@INVLAN (Struktureigenmoden) ausschließlich auf dem Master-Knoten ausgeführt, da das Fluid nicht partitioniert wird. Die DISUTIL-Prozedur wird aufgerufen,

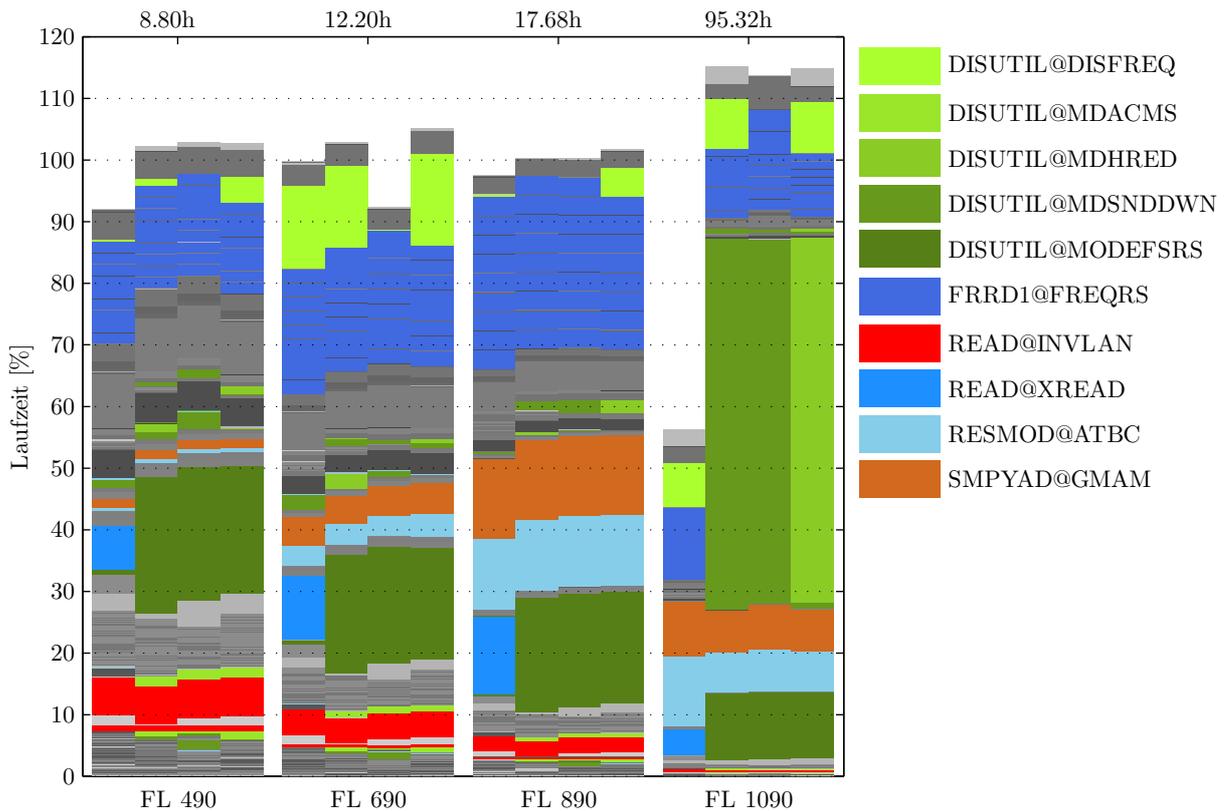


Abbildung 38: FSI, Laufzeitanalyse ACMS Struktur 490/3.0 mit RV

wenn Daten zwischen Master- und Slave-Knoten ausgetauscht werden. Während ihr Laufzeitanteil bei Strukturberechnung sehr gering ist, beträgt ihr Anteil bei den gekoppelten ACMS-Berechnungen je nach Frequenzobergrenze des Fluids von 20 bis 60%. Für die längste ACMS-Berechnung lässt sich der starke lokale Zuwachs in den Slave-Knoten jedoch nicht erklären. Bei SMPYAD@GMAM und RESMOD@ATBC handelt es sich um Prozeduren zur Matrixmultiplikation. Ihr Laufzeitanteil schwankt von 2 bis 24%, so dass von einer Abhängigkeit zu der Anzahl der Fluideigenmoden ausgegangen wird.

4.2.2 ACMS und externes Superelement

Für die FSI-Berechnungen kann auf die Vorberechnungen des Struktur-Superelements zurückgegriffen, da sich die zusätzlichen Fluidelemente und die Strukturelemente der Innenverkleidung ausschließlich in der Residualstruktur befinden. Aus den Erkenntnissen der externen Superelementberechnungen an der Struktur werden im Vergleich zur ACMS-Grundvariante deutlich höhere Pegelabweichungen erwartet.

In Abbildung 39 sind die Standardabweichungen und die Fehlerintervalle einer ACMS-Grundvariante und einer ACMS-Berechnung mit externem Superelement gegenüber der direkten Referenzberechnung dargestellt. Bei beiden Berechnungen werden die Fluideigenmoden bis zu einer Frequenzobergrenze von 590Hz berücksichtigt. Die Standardabweichungen und Fehlerintervalle bei NACRE 1R,1F und 2R sowie Rolls-Royce 1R der

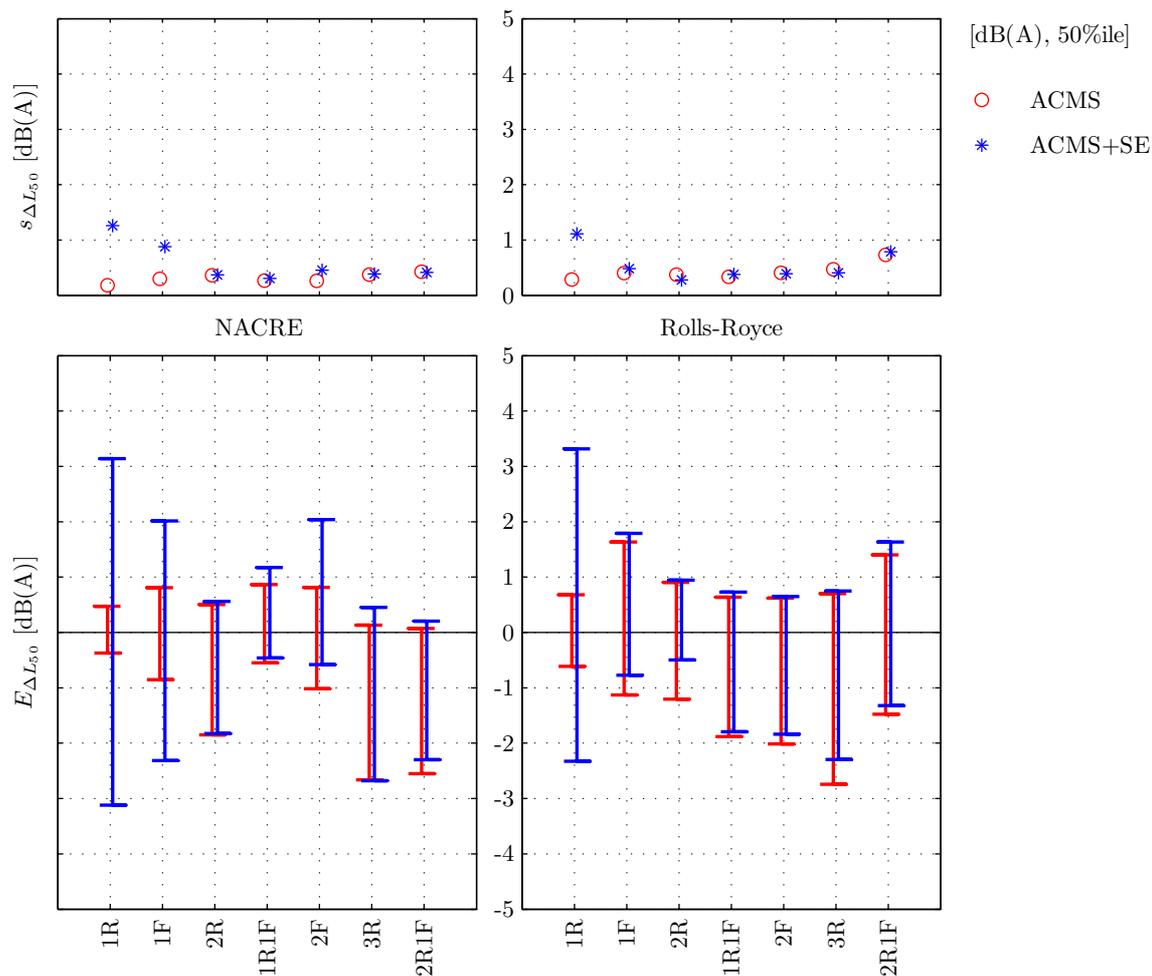


Abbildung 39: FSI, Abweichungen ACMS und ExtSE

Superelementberechnung sind um ein Vielfaches höher als die der ACMS-Grundvariante. Die übrigen Ergebnisse liegen im Bereich der Grundvariante.

Die L_{50} -Pegeldifferenzen der Frequenz 1R der Segmente in Sektion 18 und 19 sind in Abbildung 40 und 41 dargestellt. Im Gegensatz zur Strukturberechnung befindet sich der globale maximale Fehler der Superelementberechnung nicht an dem Verbindungssegment zum Superelement, sondern es gibt, ähnlich einer Sinuswelle, ein negatives und ein positives Maximum in der Mitte der Sektion 18. Da bei der Superelementberechnung der Struktur die Pegeldifferenzen ebenfalls für die niedrigste Frequenz am Höchsten sind, wird vermutet, dass der gleiche Effekt auch Ursache für die hohen Abweichungen der gekoppelten Berechnung ist.

Die Berechnung beider ACMS-Varianten erfolgt auf dem HPC mit der SMP-Option (Shared Memory Processing). Tabelle 14 zeigt, dass die Superelementberechnung eine deutlich kürzere Rechenzeit als die Grundvariante ausweist. Zusätzlich werden ca. 500GB Festplattenspeicher und 3.3TB I/O-Datentransfer gegenüber der Grundvariante eingespart. Dabei erhöht sich lediglich die Arbeitsspeicherlast geringfügig. Die Analyse der Laufzeiten

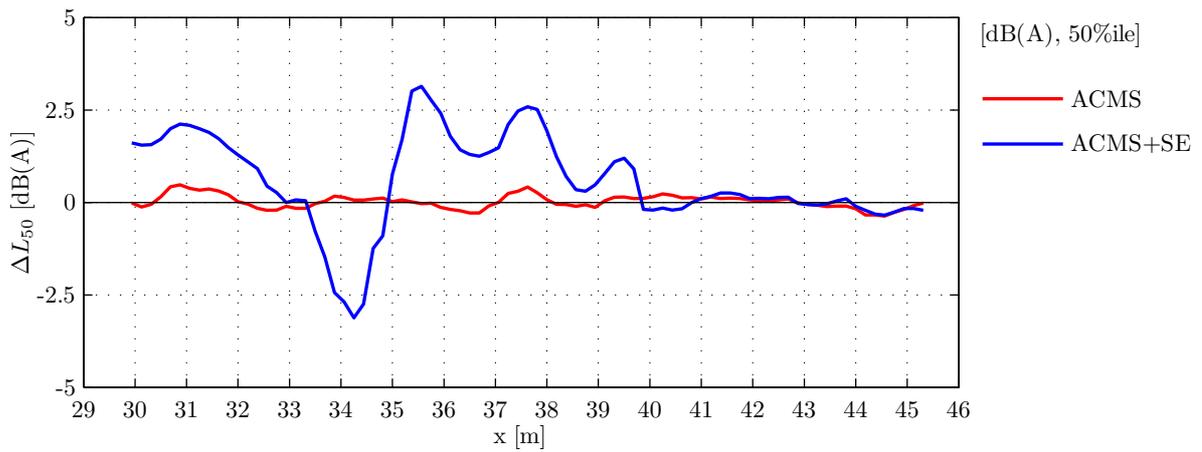


Abbildung 40: FSI, Abweichungen, ACMS und ExtSE (NACRE,1R)

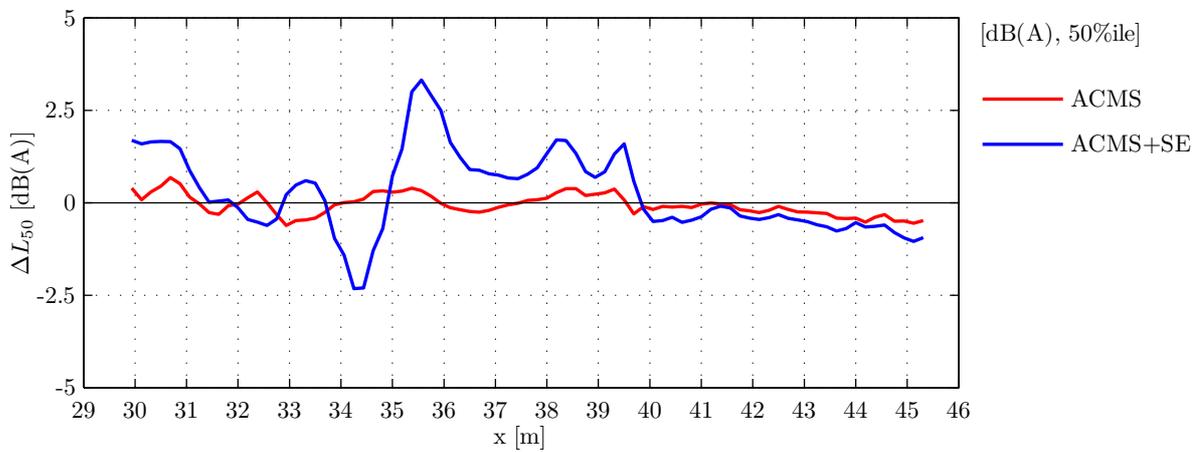


Abbildung 41: FSI, Abweichungen, ACMS und ExtSE (Rolls-Royce,1R)

in Abbildung 42 zeigt den Vorteil der Vorberechnung des Superelements. Der Laufzeitan-
 teil der Prozeduren zur Erstellung des gekoppelten modalen Gleichungssystems reduziert
 sich von ca. 4.7h (35%) auf 1.7h (22%). Die mehrfache Lösung des Gleichungssystem für
 die verschiedenen Antriebsvarianten und Frequenzen durch die FRRD1-Prozedur verrin-
 gert sich ebenfalls von 7.4h auf 5.9h.

		Direct	ACMS	ACMS+SE
T_{min}	[h]	5.61	9.47	7.54
T_{ser}	[h]	9.81	9.47	7.54
T_{use}	[h]	49.05	37.88	30.15
Alloc Mem	[GB]	4.00	12.00	12.00
Max Mem	[GB]	3.56	5.23	8.09
Max Disk	[GB]	35.43	861.56	381.02
I/O	[GB]	4567.87	21614.05	6542.78
Avg CPU	[%]	58.6	64.3	30.0
Mod (Struk)	[-]		10580	10620
Mod (RV)	[-]		230	90
Mod (Fluid)	[-]		4006	4006

Tabelle 14: FSI, Vergleich ACMS und ExtSE

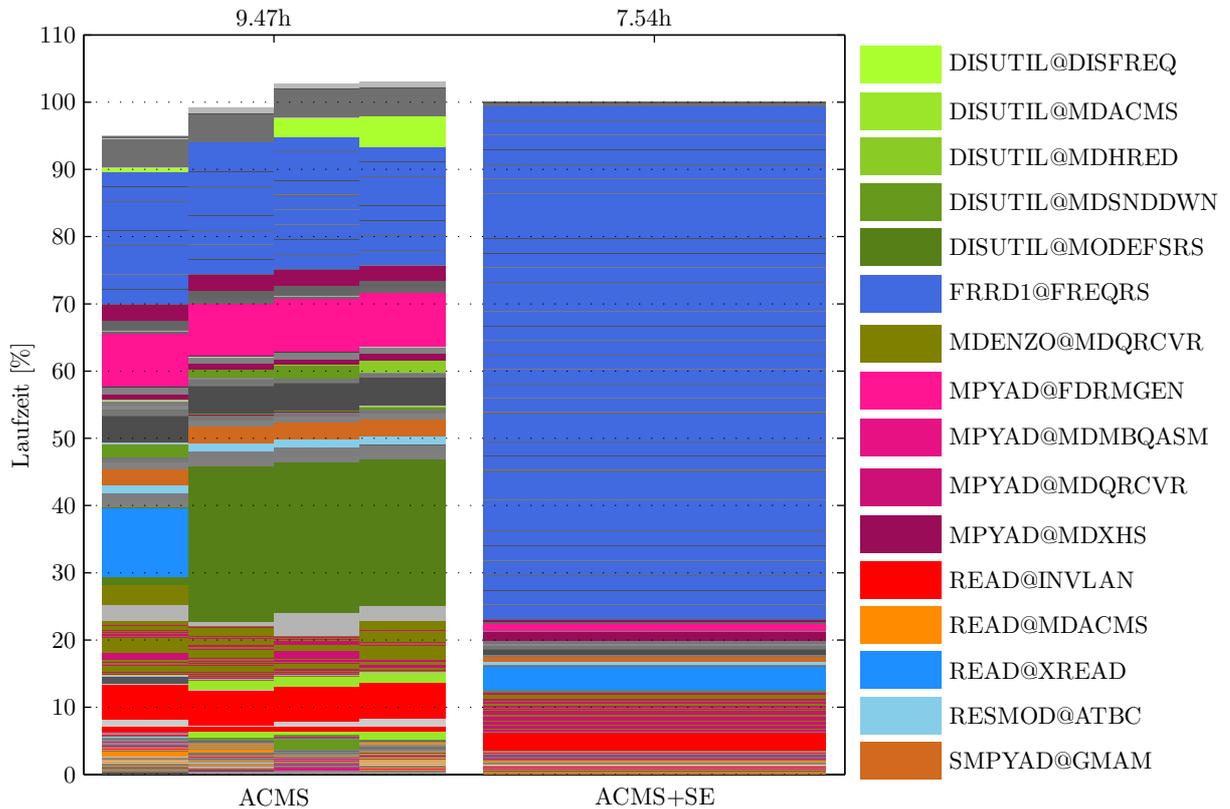


Abbildung 42: FSI, Laufzeitanalyse ACMS und ExtSE

4.2.3 Zusammenfassung

Bei den FSI-Berechnungen bestätigen sich die Erkenntnisse aus den vorherigen Struktur-berechnungen der verschiedenen Lastdefinitionen, sodass die Lastvariante 3 als Standard

definiert wird. Der Vergleich zwischen ACMS-Berechnungen und direkter Referenz zeigt, dass die Standardabweichungen und Fehlerintervalle generell höher als bei den Strukturberechnungen sind. Der Einfluss von Residualvektoren, die lediglich auf der Struktur ermittelt werden, ist für die Ergebnisqualität vernachlässigbar gering. Die größten L_{50} -Pegeldifferenzen treten bei höheren Frequenzen lokal am Anfang der Sektion 18 auf. Ein negativer Einfluss der Absorberelemente durch zu wenige hohe Fluideigenmoden kann nicht ausgeschlossen werden.

Erst ab Frequenzobergrenze von 690Hz reduzieren sich die Abweichungen. Die große Anzahl von Fluideigenmoden macht die Berechnungen jedoch sehr teuer, sodass bei Betrachtung der Rechenzeiten kein Vorteil für die ACMS-Berechnungen vorliegt. Erst die Untersuchung eines breiteren Frequenzbandes, z.B. bei anderen Antriebskonzepten, könnte zu Rechenzeiteinsparungen gegenüber der direkten Variante führen. Demgegenüber steht jedoch die erhebliche höhere Belastung der Berechnungsknoten durch eine Festplattenausnutzung von 80% und mehr. Gegenüber den Strukturberechnungen steigt die Festplattennutzung um den Faktor 10. Abbrüche bei Kollision mit anderen speicherintensiven Berechnungen auf dem gleichen Knoten können dadurch häufiger auftreten. Außerdem können sehr hohe I/O-Datentransfermengen, besonders auch zwischen einzelnen Prozessen, beobachtet werden. Diese führen ebenfalls wie die serielle Berechnung der Fluideigenmoden auf lediglich einem Prozessor zu einer sehr hohen Rechenzeit. Die Berechnung mit externem Superelement kann die Festplattennutzung deutlich reduzieren. Die Standardabweichungen und Fehlerintervalle sind jedoch deutlich höher als die der ACMS-Grundvariante. Der Zeitananteil der ACMS-Strukturberechnungen nimmt bei allen Berechnungen eine untergeordnete Rolle ein.

5 Schlussbetrachtung

Die Beschäftigung mit den theoretischen Grundlagen, besonders der Reduktionsmethoden und gekoppelten Berechnungen, gibt einen vertiefenden Einblick in die Matrixoperationen und damit in die Zusammenhänge zur Lösung der FE-Gleichungssysteme. Die Beispielergebnisse von Struktur und FSI zeigen jeweils den Einfluss der Eigenmoden auf die Ergebnisqualität der modalen Berechnungen.

Am Beispiel der Teilstruktur eines Flugzeugkonzepts mit 2 Mio. Freiheitsgraden und zwei verschiedenen Antriebskonzepten wurden verschiedene ACMS-Berechnungen durchgeführt. In Zusammenarbeit mit dem Airbus-internen Support konnten die HPC-Startskripte um fehlende Funktionen u.A. zur Verwendung von externen Superelementen erweitert werden. Außerdem wurden einige Nastran-Fehler im Zusammenhang der Nutzung von FSI, DMP (Distributed Memory Processing) und statischen Vorlasten gemeldet, deren Beseitigung teilweise noch aussteht. Die Voruntersuchungen zeigen die Bedeutung der Lastdefinitionen für die Gesamtrechenzeit. Im Falle der gekoppelten FSI-Berechnungen konnten die Rechenzeiten allein durch die überarbeitete Lastdefinition um bis zu 80% reduziert werden.

Für die abschließende Bewertung ist es sinnvoll zwischen Struktur- und FSI-Berechnungen zu unterscheiden. Die Struktur-Berechnungen zeigen gute Ergebnisse mit geringen Abweichungen, im Mittel unter 0.5dB, bei Verwendung von Residualvektoren und der Kombination von einer oberen Grenzfrequenz von 490Hz sowie einem Upscale-Faktor von 3.0. Die Einsparungen gegenüber der direkten Berechnung liegen bei der minimalen Rechenzeit bei bis zu 40% und bei der Ressourcenzeit bis über 70%. Die effektiv geringere zeitliche Belastung des Clusters muss jedoch mit einem deutlich höheren Ressourcenverbrauch bezahlt werden. Die Verwendung von externen Superelementen könnte diesen zusätzlichen Ressourcenverbrauch hinsichtlich der Festplattennutzung reduzieren. Andererseits führt die untersuchte Konfiguration zu starken lokalen Fehlern an dem Verbindungssegment, so dass eine Verwendung nicht empfehlenswert ist. Die Berücksichtigung von statische Vorlasten führen zu leicht erhöhten Abweichungen, jedoch fallen sie mit maximal 0.6dB noch ausreichend gering aus. Abschließend kann man sagen, dass die ACMS-Berechnung für das gegebene Strukturmodell eine gute Alternative zur direkten Berechnung darstellt.

Bei FSI-Berechnungen lassen sich generell höhere Abweichungen mit maximal 0.8dB(A) feststellen. Gegenüber der oberen Struktur-Grenzfrequenz ist eine deutlich höhere Fluid-Grenzfrequenz für gute Ergebnisse notwendig. Bei dem Vergleich der Rechenzeiten ergibt sich für das vorliegende Modell jedoch kein Vorteil. Erschwerend wiegt die erheblich höhere Belastung der Berechnungsknoten hinsichtlich des Ressourcenverbrauchs. Kritisch gesehen werden muss dabei eine Festplattenausnutzung von 80% und mehr. Für stabile Berechnungen müsste eine Nachrüstung der Festplattenkapazität oder exklusive Nutzung der Knoten erfolgen. Die Berechnung mit einem externen Superelement kann die Festplattennutzung deutlich reduzieren. Demgegenüber stehen jedoch wiederum die deutlich höheren Standardabweichungen und Fehlerintervalle. Somit ist die ACMS-Berechnung von dem gegebenen FSI-Modell nicht von Vorteil gegenüber der direkten Variante. Erst die Untersuchung eines breiteren Frequenzbandes, z.B. bei anderen Antriebskonzepten, könnte

zu deutlichen Rechenzeiteinsparungen gegenüber der direkten Variante führen, sodass der zusätzliche Hardwareaufwand gerechtfertigt wäre.

Für die Zukunft ist die Behebung verschiedener Fehler z.B. bei FSI-Berechnungen mit statischen Vorlasten sowie bei Verwendung von 8 Prozessoren oder mehr abzuwarten. ACMS-Berechnungen mit größerer Anzahl von Eigenmoden führten sowohl bei Struktur als auch bei FSI zu plötzlicher Erhöhung der Laufzeitanteile einiger Berechnungsprozeduren von <1% auf über 60%. Diesem Verhalten sollte gemeinsam mit dem Support von MSC.Software nachgegangen werden. Außerdem bieten sich weitergehende Untersuchungen der lokalen Fehler bei Superelementberechnungen an, da die Berechnungen prinzipiell Vorteile hinsichtlich des Ressourcenverbrauchs und der Rechenzeit bieten.

Literatur

- [1] BATHE, Klaus-Jürgen ; ZIMMERMANN, Peter: *Finite-Elemente-Methoden*. 2. Berlin : Springer, 2002
- [2] BENNIGHOF, Jeffrey K. ; LEHOUCQ, Richard B.: An Automated Multilevel Substructuring Method for Eigenspace Computation in Linear Elastodynamics. In: *SIAM Journal on Scientific Computing* 25 (2004), Nr. 6, S. 2084–2106
- [3] BÜCHNER, Björn ; MÖLLENHOFF, Robert: *Untersuchungen zur Anwendbarkeit der „Component Modes Synthesis“ in akustischen Fragestellungen*, Hochschule für angewandte Wissenschaften Hamburg, Masterprojekt, 2012
- [4] FAHY, Frank ; GARDONIO, Paolo: *Sound and Structural Vibration: Radiation, Transmission and Response*. 2. Oxford : Academic Press, 2007
- [5] FAHY, Frank ; WALKER, John: *Fundamentals of Noise and Vibration*. 1. London : E & FN Spon, 1998
- [6] GAO, Weiguo ; LI, Xiaoye S. ; YANG, Chao ; BAI, Zhaojun: An Implementation and Evaluation of the AMLS Method for Sparse Eigenvalue Problems. In: *ACM Transactions on Mathematical Software* 34 (2008), Nr. 4
- [7] GUYAN, Robert J.: Reduction of stiffness and mass matrices. In: *AIAA Journal* 3 (1965), Nr. 2, S. 380
- [8] IHLENBURG, Frank: *Grundlagen der mathematischen Modellierung und numerischen Berechnung im Ingenieurwesen*. Vorlesungsskript, 2010
- [9] IHLENBURG, Frank: *Computational Acoustics - Methods in Engineering*. Vorlesungsunterlagen, 2011
- [10] IHLENBURG, Frank: *Computational Methods for Vibracoustic Simulations*. Vorlesungsskript, 2011
- [11] IHLENBURG, Frank: *Technische Schwingungslehre*. Vorlesungsskript, 2012
- [12] KLEIN, Bernd: *FEM: Grundlagen und Anwendungen der Finite-Element-Methode im Maschinen- und Fahrzeugbau ; mit 12 Fallstudien und 20 Übungsaufgaben*. 8. Wiesbaden : Vieweg + Teubner, 2010
- [13] KOLLMANN, Franz G. ; SCHÖSSER, Thomas F. ; ANGERT, Roland: *Praktische Maschinenakustik*. 1. s.l : Springer-Verlag, 2006
- [14] LANCZOS, Cornelius: An Iteration Method for the Solution of the Eigenvalue Problem of Linear Differential and Integral Operators. In: *Journal of Research of the National Bureau of Standards* 45 (1950), Nr. 4, S. 255–282
- [15] MÖSER, Michael: *Messtechnik der Akustik*. 1. Berlin : Springer Berlin, 2007

- [16] MÖSER, Michael: *Technische Akustik*. 8. s.l : Springer-Verlag, 2009
- [17] MSC.SOFTWARE CORPORATION: *MSC Nastran 2004 Reference Manual*. USA, 2003
- [18] MSC.SOFTWARE CORPORATION: *MSC Nastran 2012 DMAP Programmer's Guide*. USA, 2011
- [19] MSC.SOFTWARE CORPORATION: *MSC Nastran 2012 Dynamic Analysis User's Guide*. USA, 2011
- [20] MSC.SOFTWARE CORPORATION: *MSC Nastran 2012 Installation and Operations Guide*. USA, 2011
- [21] MSC.SOFTWARE CORPORATION: *MSC Nastran 2012 Quick Reference Guide*. USA, 2011
- [22] MSC.SOFTWARE CORPORATION: *MD Nastran/MSC.Nastran Current Error List*. USA, 2012. – Erreichbar unter http://simcompanion.mscsoftware.com/library/MSC/KI8008006/current_error_list.v2.htm; besucht am 26.11.2012.
- [23] PETYT, Maurice: *Introduction to finite element vibration analysis*. Cambridge : Cambridge Univ. Pr, 1990
- [24] PREMIUM AEROTEC GMBH: *Premium AEROTEC startet Produktion der ersten Panels für neuen Airbus A350 XWB*. Augsburg : Bild von Website, 2012. – Erreichbar unter <http://www.premium-aerotec.com/Page1516.html>; besucht am 27.11.2012.
- [25] RAYLEIGH, John William S.: *The Theory of Sound*. Bd. 1. New York : Dover Publications, 1945
- [26] STAMMBERGER, Markus ; VOSS, Heinrich: Automated multi-level sub-structuring for fluid-solid interaction problems. In: *Numerical Linear Algebra with Applications* 18 (2011), Nr. 3, S. 411–427

A Öffentlicher Anhang

A.1 Auszug aus dem DMAP Programmer's Guide

Name	Description
DISOFPM	Collects and merges OFP data blocks from the slave processors to the master processor.
DISOFPS	Sends OFP data blocks from the slave processors to the master processor.
DISOFPS	Sends OFP data blocks from the slave processors to the master processor.
DISUTIL	Broadcasts data blocks between slave and master processors for parallel processing. Additional processing may occur on the master processor.
DPD	Creates tables from Bulk Data entry images specified for dynamic analysis.
GP3	Processes static and thermal loads.
LCGEN	Expands Case Control table based on LSEQ Bulk Data entries.
MDENZO	Matrix utility for matrix domain automatic component mode synthesis (MDACMS).
MPYAD	Perform the multiplication of two matrices and optionally, the addition of a third matrix to the product.
OFP	Output file processor. To output (print or punch) data blocks prepared by other modules in user-oriented, self-explanatory formats.
READ	Extracts real symmetric system eigenvalues.
RESMOD	Perform linear algebra functions to support residual vector calculations.
SMPYAD	Multiplies a series of matrices together and optionally, the addition of a another matrix to the product.
SSG1	Computes static load matrix.

Tabelle 15: Überblick über einige DMAP-Prozeduren, Beschreibungen entnommen aus [18]

A.2 Zusätzliche Diagramme und Auswertungen

A.2.1 Struktur, ACMS CPU Variation (SMP/DMP)

	SMP 4	DMP 4	DMP 8
T_{min} [h]	3.29	2.82	1.61
T_{ser} [h]	3.29	2.82	1.61
T_{use} [h]	13.18	11.28	12.91
Alloc Mem [GB]	12.00	12.00	10.00
Max Mem [GB]	8.09	8.09	8.09
Max Disk [GB]	85.98	68.23	64.93
I/O [GB]	2028.18	3589.33	5439.12
Avg CPU [%]	24.0	79.0	83.6
Mod (Struk) [-]	8228	8228	8228
Mod (RV) [-]	224	224	224

Tabelle 16: Struktur, Vergleich ACMS CPU Variation

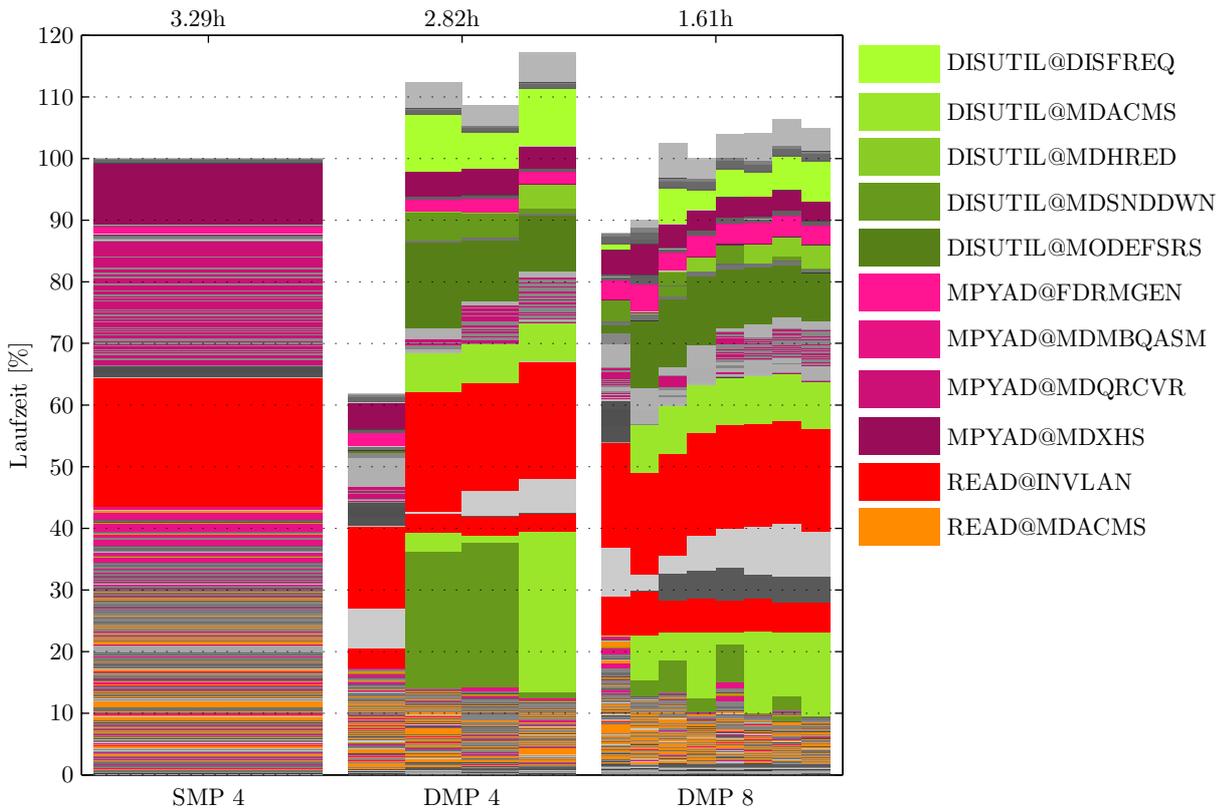


Abbildung 43: Struktur, Laufzeitanalyse ACMS CPU Variation

A.2.2 FSI, Direkte Lastdefinitionen

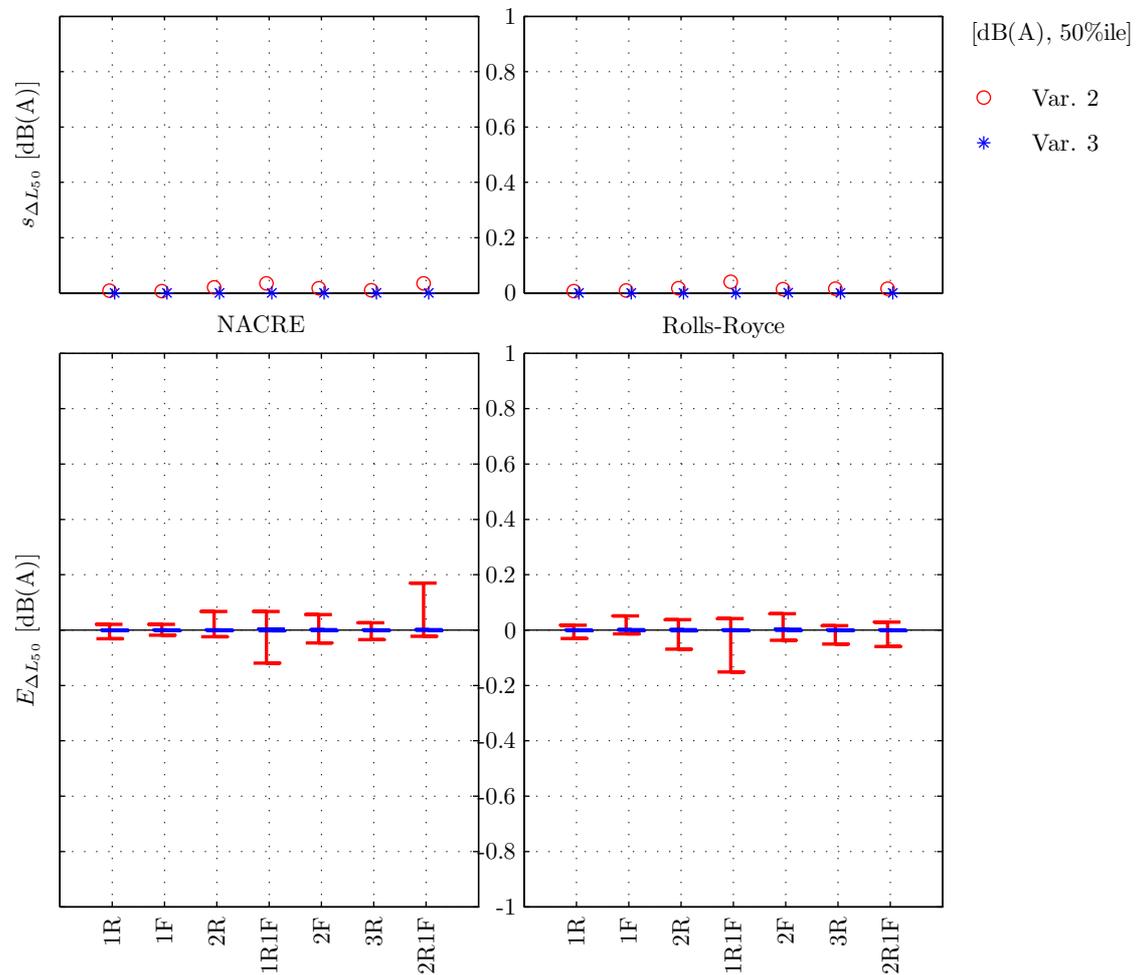


Abbildung 44: FSI, Abweichungen Direkte Lastdefinitionen

		Var. 1	Var. 2	Var. 3
T_{min}	[h]	6.20	7.07	5.61
T_{ser}	[h]	10.86	12.37	9.81
T_{use}	[h]	54.28	49.47	49.05
Alloc Mem	[GB]	4.00	4.00	4.00
Max Mem	[GB]	3.56	3.09	3.56
Max Disk	[GB]	35.44	37.47	35.43
I/O	[GB]	4774.37	4935.70	4567.87
Avg CPU	[%]	78.2	97.7	58.6

Tabelle 17: FSI, Vergleich Direkte Lastdefinitionen

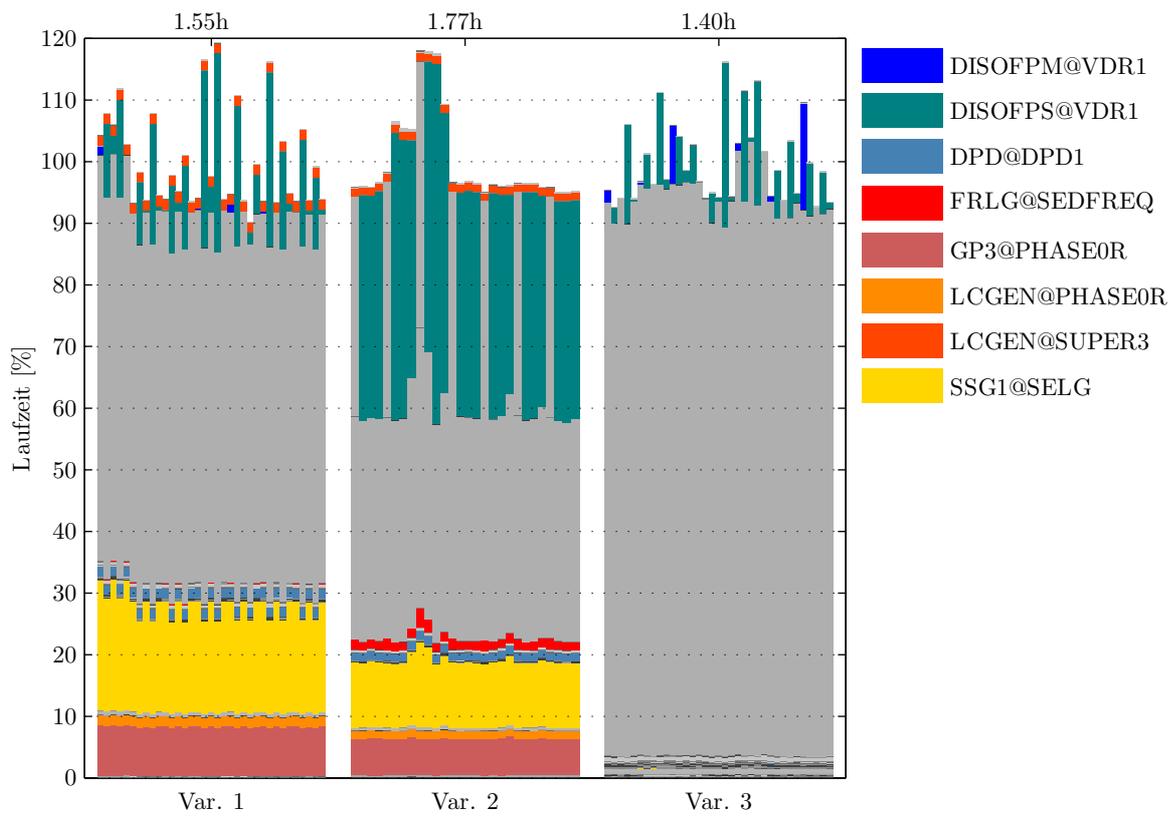


Abbildung 45: FSI, Laufzeitanalyse Direkte Lastdefinitionen

A.2.3 FSI, ACMS Lastdefinitionen

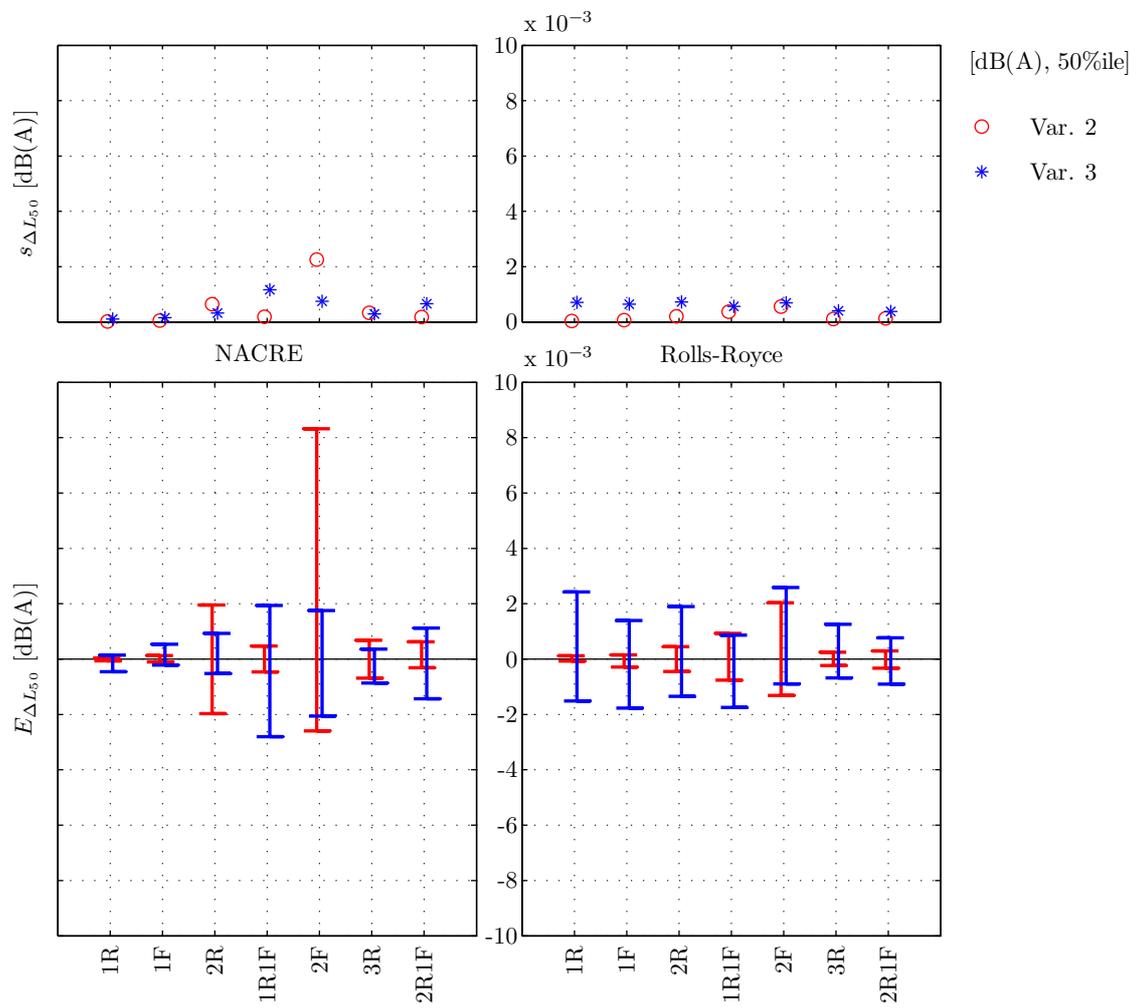


Abbildung 46: FSI, Abweichungen ACMS Lastdefinitionen

		Var. 1	Var. 2	Var. 3
T_{min}	[h]	27.88	11.33	7.81
T_{ser}	[h]	27.88	11.33	7.81
T_{use}	[h]	111.52	45.33	31.25
Alloc Mem	[GB]	12.00	12.00	12.00
Max Mem	[GB]	7.11	7.11	7.11
Max Disk	[GB]	826.45	826.35	826.39
I/O	[GB]	39184.05	19065.02	19014.18
Avg CPU	[%]	70.0	69.8	59.3
Mod (Struk)	[-]	10536	10536	10536
Mod (Fluid)	[-]	2517	2517	2517

Tabelle 18: FSI, Vergleich ACMS Lastdefinitionen

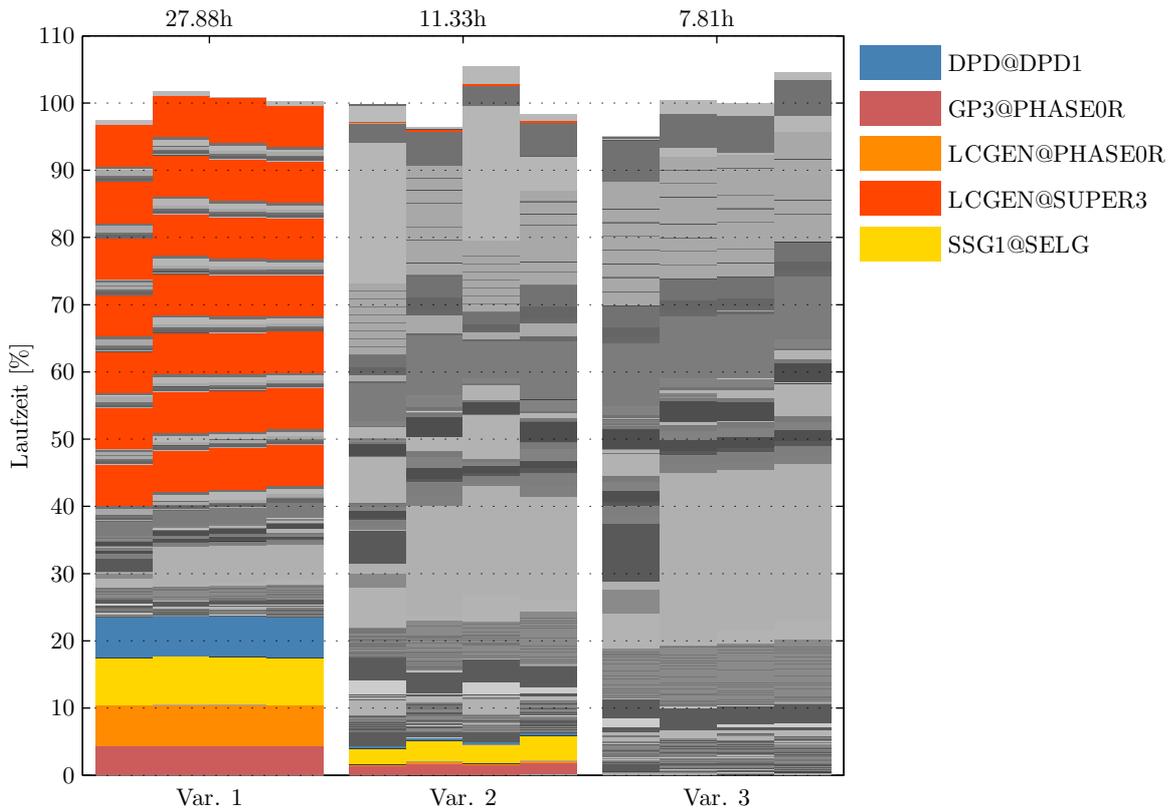


Abbildung 47: FSI, Laufzeitvergleich ACMS Lastdefinitionen

A.2.4 FSI, ACMS ohne Residualvektoren

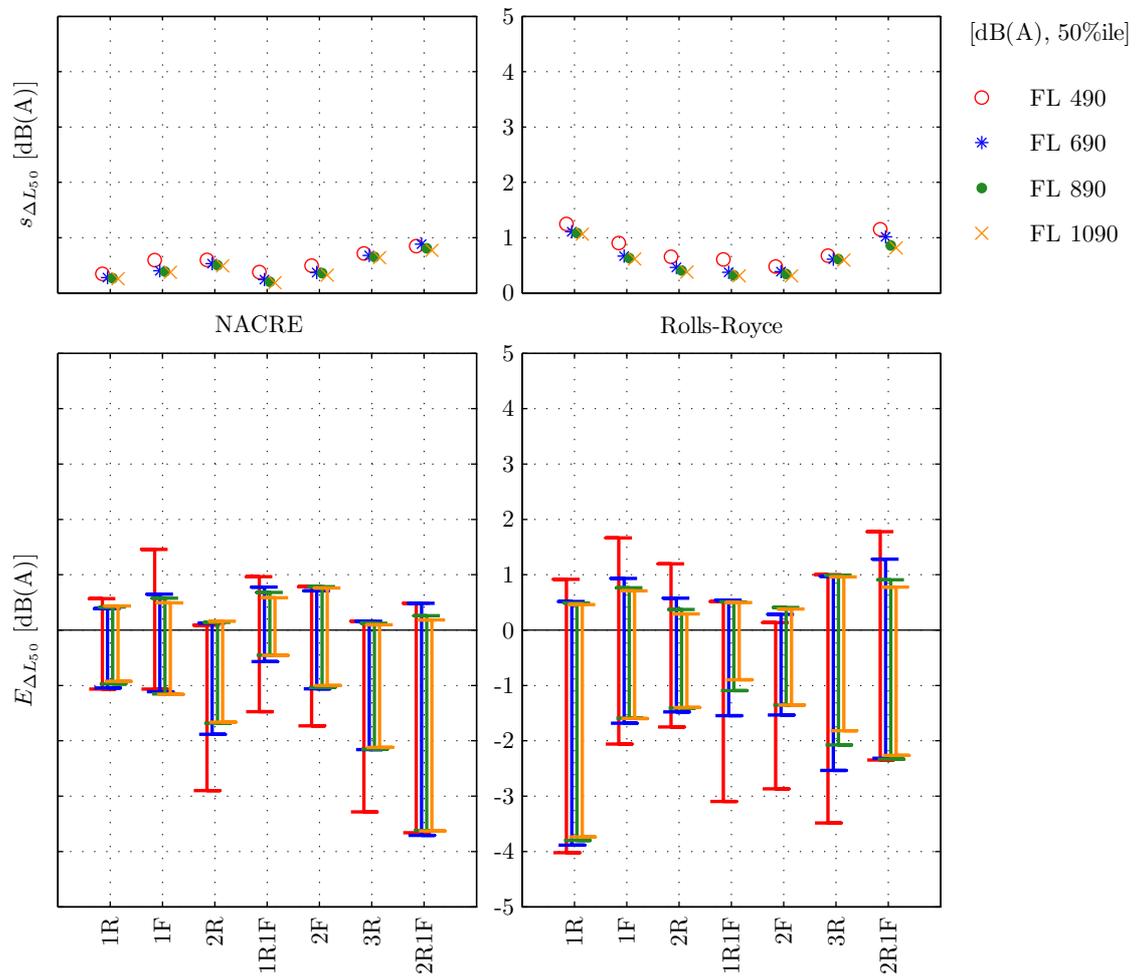


Abbildung 48: FSI, Abweichungen ACMS Struktur 490/3.0 ohne RV

		REF	FL 490	FL 690	FL 890	FL 1090
T_{min}	[h]	5.61	9.61	12.34	19.12	40.31
T_{ser}	[h]	9.81	9.61	12.34	19.12	40.31
T_{use}	[h]	49.05	38.45	49.37	76.46	161.22
Alloc Mem	[GB]	4.00	12.00	12.00	12.00	12.00
Max Mem	[GB]	3.56	5.33	5.33	5.33	6.58
Max Disk	[GB]	35.43	831.04	858.55	905.22	977.50
I/O	[GB]	4567.87	19667.96	23110.29	29576.62	39691.52
Avg CPU	[%]	58.6	64.8	69.8	78.0	84.5
Mod (Struk)	[-]		10568	10568	10569	10568
Mod (Fluid)	[-]		2517	6019	11442	18942

Tabelle 19: FSI, Vergleich ACMS Struktur 490/3.0 ohne RV

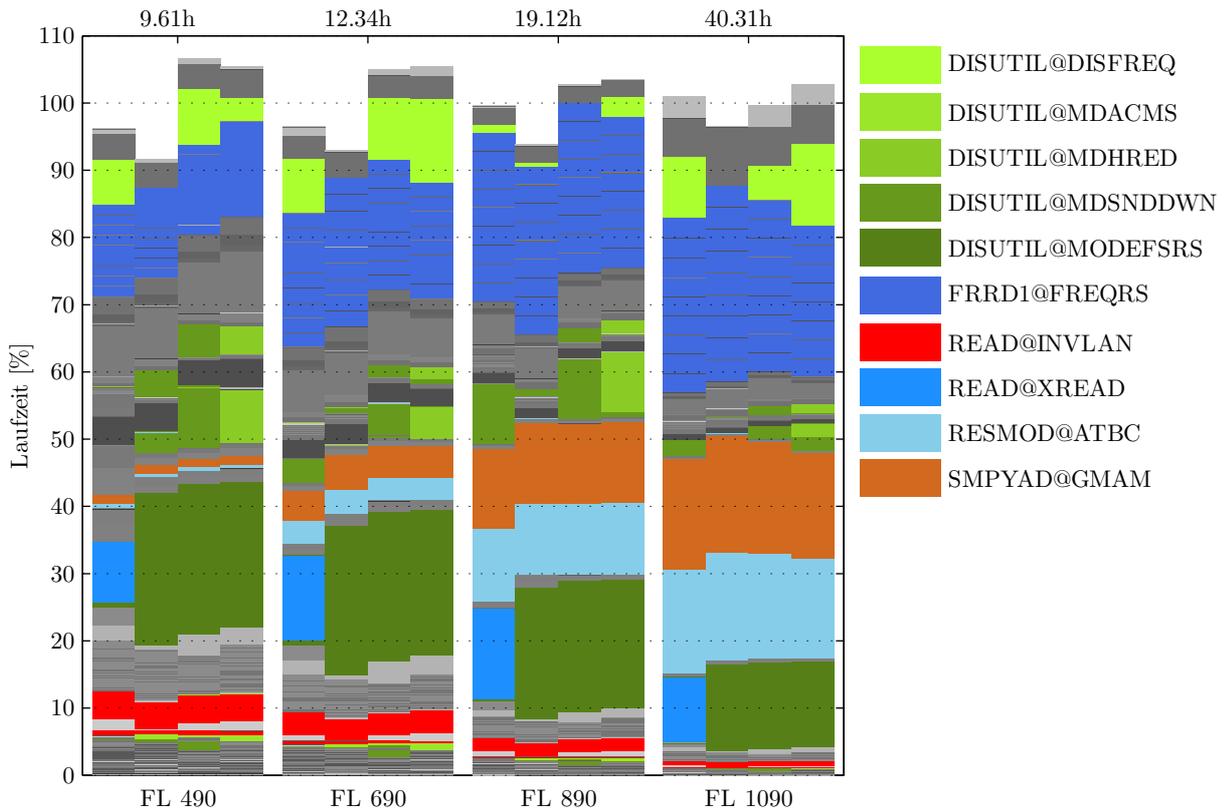


Abbildung 49: FSI, Laufzeitanalyse ACMS Struktur 490/3.0 ohne RV