

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Hamburg University of Applied Sciences

EXPERIMENTELLE BESTIMMUNG DER SCHWERPUNKTSKOORDINATEN UND
MASSENTRÄGHEITSMOMENTE VON DIESELMOTOREN

BACHELORTHESIS

CHRISTIAN TOTZKE

Matrikelnummer: 1932471

Erstprüfer: Prof. Dr.-Ing. Stefan Wiesemann
Zweitprüfer: M. Eng. Jürgen Knorr
Abgabedatum: 04. Oktober 2012

CHRISTIAN TOTZKE © 2012

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit stellt die Vorbereitung, Durchführung und Auswertung einer experimentellen Schwingungsmessung, bei welcher aus den gewonnenen Daten die Schwerpunktskoordinaten und Massenträgheitsmomente von Dieselmotoren bestimmt werden. Bei der Umsetzung der Aufgabe werden zunächst rein mathematische Simulationsmodelle erzeugt. Anhand dieser Modelle wird ein Verfahren entwickelt, welches die Grundlage für eine zu programmierende Auswertungssoftware bildet. Die Software soll nachfolgend die Auswertung der experimentellen Modalanalyse vornehmen und die oben genannten Kennwerte bestimmen. Hierzu werden zunächst alle theoretischen Grundlagen erörtert, die Funktionsweise der Software erläutert und an den Simulationsmodellen validiert. Im letzten Schritt der Entwicklung erfolgt die Anpassung des Programms auf die Dieselmotoren.

Christian Totzke
Alfredstr. 61
20535 Hamburg
Geboren am 26.05.1979 in Göttingen

Tel.: 0176/96030988
E-Mail: christian_totzke@web.de

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|------------|
| Abbildungsverzeichnis | x |
| Tabellenverzeichnis | xi |
| Formelzeichen | xii |
| 1 Einleitung | 1 |
| 1.1 Ausgangssituation bei MAN | 2 |
| 1.2 Konkretisierung der Aufgabenstellung | 2 |
| 2 Grundlagen der Modalanalyse | 3 |
| 2.1 Grundlagen der rechnerischen Modalanalyse | 3 |
| 2.2 Grundlagen der experimentellen Modalanalyse | 5 |
| 3 Theoretische Grundlagen | 6 |
| 3.1 Schwerpunktsbestimmung | 6 |
| 3.2 Massenträgheitsmomente | 8 |
| 3.2.1 Massenträgheitsmomente einzelner Körper | 8 |
| 3.2.2 Hauptachsensystem und Hauptträgheitsmomente | 9 |
| 3.2.3 Hauptachsen- und Koordinatentransformation | 10 |
| 3.2.4 Berechnung der reduzierten Masse, Schwerpunkt und Trägheitskennwerte einer realen Struktur | 12 |
| 3.3 Schwingungen mit einem Freiheitsgrad | 13 |
| 3.3.1 Harmonische ungedämpfte Schwingungen | 13 |
| 3.3.2 Differentialgleichung des Feder-Masse-Schwingers | 15 |
| 3.4 Schwingungsdämpfungen | 16 |
| 3.4.1 Schwingungsdämpfung durch lineare Federn | 17 |
| 3.4.2 Gedämpfter Feder-Masse-Schwinger | 18 |
| 3.5 Berechnung linearer Schraubenfedern | 20 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3.6 | Fourier-Analyse | 21 |
| 3.6.1 | Harmonische Analyse | 21 |
| 3.6.2 | Komplexe Fourier Darstellung | 22 |
| 3.6.3 | Fourier-Analyse nicht periodischer Funktionen | 23 |
| 3.7 | Experimentelle Modalanalyse | 24 |
| 3.7.1 | Bestimmung der Systemkennfunktion | 24 |
| 3.7.2 | Bestimmung der Gewichtungsfunktion | 25 |
| 3.7.3 | Bestimmung der Übertragungsfunktion | 26 |
| 3.7.4 | Graphische Darstellung der Übertragungsfunktion im Frequenz- liniendiagramm | 28 |
| 3.7.5 | Der Dirac-Impuls | 29 |
| 3.7.6 | Modal Assurance Criterion (MAC) | 30 |
| 3.8 | Berechnungsmodelle | 31 |
| 3.8.1 | Zweidimensionales Berechnungsmodell | 31 |
| 3.8.1.1 | Berechnung der Eigenfrequenzen und Eigenvektoren . | 31 |
| 3.8.1.2 | Bestimmung des Amplitudenfrequenzgangs | 33 |
| 3.8.2 | Dreidimensionales Berechnungsmodell | 35 |
| 3.8.2.1 | Bestimmung der Bewegungsgleichungen | 35 |
| 3.8.2.2 | Berechnung der Eigenfrequenzen | 37 |
| 3.8.3 | Experimentelle Dämpfungsbestimmung | 38 |
| 4 | Versuchsvorbereitung und Versuchsdurchführung | 40 |
| 4.1 | Software für die simulatorische Versuchsvorbereitung und Versuchs- durchführung | 40 |
| 4.1.1 | Beschreibung SIMPACK | 40 |
| 4.1.2 | Beschreibung ME'Scope | 41 |
| 4.1.3 | Beschreibung MATLAB | 42 |
| 4.2 | Simulationsmodelle 2D | 43 |
| 4.2.1 | Modell Variante 4 | 43 |
| 4.2.2 | Modell Variante 7 | 44 |
| 4.3 | Simulationsmodell 3D | 44 |
| 4.4 | Experimentelle Versuchsvorbereitung | 46 |
| 4.4.1 | MAN - Dieselmotoren D0834 & D0836 | 46 |
| 4.4.2 | Prüfstands Aufbau experimentelle Schwingungsmessung | 47 |
| 4.4.3 | Auswahl Messfreiheitsgrade | 52 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4.4.4 | Auswahl Erregerfreiheitsgrade | 54 |
| 4.4.5 | Beschreibung Signalanalysesystems | 55 |
| 4.5 | Vorbereitung experimentelle Modalanalyse | 56 |
| 4.6 | Experimentelle Versuchsdurchführung | 58 |
| 5 | Auswertung | 62 |
| 5.1 | Auswertung 2D Modelle | 62 |
| 5.1.1 | Programmbeschreibung „FreQuenCy 2D“ | 62 |
| 5.1.2 | Auswertung mit ME'Scope | 72 |
| 5.1.3 | Auswertung mit FreQuenCy 2D | 78 |
| 5.1.4 | Validierung der Messergebnisse | 81 |
| 5.1.4.1 | Analytische Berechnung der Eigenfrequenzen | 81 |
| 5.1.4.2 | Soll-Ist-Vergleich der Simulationsmodelle | 82 |
| 5.2 | Auswertung 3D Modell | 82 |
| 5.2.1 | Validierung der Messergebnisse | 88 |
| 5.2.1.1 | Analytische Berechnung der Eigenfrequenzen | 88 |
| 5.2.1.2 | Berechnung der Massenträgheitsmomente | 89 |
| 5.2.1.3 | Soll-Ist-Vergleich des dreidimensionalen Modells | 89 |
| 5.3 | Auswertung der Motoren | 90 |
| 5.3.1 | Bestimmung der modalen Parameter | 90 |
| 5.3.2 | Untersuchung Ergebnisse | 95 |
| 6 | Zusammenfassung und Ausblick | 96 |
| | Literatur | xv |
| A | Anhang | A |
| A.1 | Zweidimensionale Simulationsmodelle | A |
| A.2 | Berechnungsergebnisse | C |
| A.2.1 | Zweidimensionale Modelle | C |
| A.2.2 | Dreidimensionale Modelle | D |

Abbildungsverzeichnis

| | | |
|------|---|----|
| 2.1 | Modalanalyse bei einem FEM-Modell | 3 |
| 2.2 | Erste Biegeschwingform einer Platte | 5 |
| 3.1 | Schwerpunkt diverser homogener Körper | 6 |
| 3.2 | Schwerpunktsermittlung bei einem Stab | 7 |
| 3.3 | Massenträgheitsmoment | 8 |
| 3.4 | Koordinatentransformation | 10 |
| 3.5 | Erweiterte Koordinatentransformation | 11 |
| 3.6 | Antriebseinheit Stirnradgetriebe | 12 |
| 3.7 | Feder Masse Schwinger | 13 |
| 3.8 | Kompexe Zeigerdarstellung | 15 |
| 3.9 | Freischnitt Ein-Massen-Schwinger | 15 |
| 3.10 | Federkennlinie bei äußerer oder innerer Reibung | 17 |
| 3.11 | Freischnitt gedämpfter Ein-Massen Schwinger | 18 |
| 3.12 | Schwach gedämpfte Schwingung | 19 |
| 3.13 | Lineare Schraubenfeder mit Formelzeichen | 20 |
| 3.14 | Systemkennfunktion als Blackbox Darstellung | 24 |
| 3.15 | Gewichtungsfunktion | 25 |
| 3.16 | Bode-Diagramm | 28 |
| 3.17 | Dirac-Impuls | 29 |
| 3.18 | Modal Assurance Criterion MAC - Matrix | 30 |
| 3.19 | Zweidimensionales Modell | 31 |
| 3.20 | Frequenzgang des Koppelschwingers | 34 |
| 3.21 | Dreidimensionales Berechnungsmodell | 35 |
| 3.22 | Experimentelle Bestimmung des Dämpfungsgrades | 39 |
| 4.1 | Beispiel eines SIMPACK - Modells | 40 |
| 4.2 | Modalanalyse mit ME'Scope | 41 |

| | | |
|------|--|----|
| 4.3 | Graphische Darstellung eines Phasenportrais mit MATLAB | 42 |
| 4.4 | Simpack 2D-Simulationsmodelle | 43 |
| 4.5 | Simpack 2D-Simulationsmodell mit Dämpfung | 44 |
| 4.6 | Symetrisches Modell | 45 |
| 4.7 | MAN Dieselmotor D0836 | 46 |
| 4.8 | Prüfstands Aufbau | 47 |
| 4.9 | Schwungradseitige Brücke | 48 |
| 4.10 | Motorträger für Motor D0834 | 48 |
| 4.11 | Kleine zylindrische Schraubenfeder | 49 |
| 4.12 | Freischwingende Prüfstandskomponenten | 49 |
| 4.13 | Trägheitskennwerte Motorträger D0834 & D0836 | 50 |
| 4.14 | D0834 Prüfstands Aufbau | 51 |
| 4.15 | Beschleunigungssensor und Messkabel | 52 |
| 4.16 | Zuordnung der Messstellen der Sensoren | 53 |
| 4.17 | PCB - Modalhammer | 54 |
| 4.18 | Signalanalysesystem NI USB-4431 | 55 |
| 4.19 | Versuchsaufbau: | 56 |
| 4.20 | Aufzeichnung des Kraft-Zeitverlauf mit SignalExpress | 56 |
| 4.21 | Fourierspektrum des Eingangssignals | 57 |
| 4.22 | Aufgezeichnete Beschleunigung | 58 |
| 4.23 | Aufgezeichnete Kraftverlauf | 58 |
| 4.24 | FFT des Kraftimpulssignales | 59 |
| 4.25 | FFT der Beschleunigungssignale | 59 |
| 4.26 | Bode-Diagramm der Übertragungsfunktion | 60 |
| 4.27 | Real und Imaginärteil der Übertragungsfunktion | 60 |
| 4.28 | Amplitudengang bis 20 Hz | 61 |
| 4.29 | Doppel Impuls | 61 |
| 5.1 | Messdatenauswertesoftware FreQuenCy 2D | 62 |
| 5.2 | Menü Federpakete | 63 |
| 5.3 | Schwerpunktsbeschleunigung in FreQuenCy 2D | 66 |
| 5.4 | Graphik maximieren | 67 |
| 5.5 | Funktionen des Property Inspectors | 68 |
| 5.6 | Zeitverlauf des Kraftimpulses | 69 |

| | | |
|------|--|----|
| 5.7 | Modellierter zweidimensionaler Starrkörper | 73 |
| 5.8 | Verlauf der ungedämpften Schwingung in ME'Scope | 74 |
| 5.9 | Fourierspektrum des Eingangssignals | 74 |
| 5.10 | Bestimmung der Übertragungsfunktion in ME'Scope | 75 |
| 5.11 | Logarithmierter Amplitudenfrequenzgang | 75 |
| 5.12 | Logarithmierter Amplitudengang bis 20 Hz | 76 |
| 5.13 | Gefitteter Amplitudengang | 76 |
| 5.14 | Schwingformen | 77 |
| 5.15 | Winkelbeschleunigung im Vergleich | 78 |
| 5.16 | Winkelbeschleunigung im Vergleich | 79 |
| 5.17 | Fourierspektrum des Erregerkraftsignals | 80 |
| 5.18 | Ausgabe der Parameter durch FreQuenCy 2D | 80 |
| 5.19 | Amplitudenfrequenzgänge | 81 |
| 5.20 | Symmetrisches dreidimensionales Modell | 82 |
| 5.21 | Überlagerung der Amplitudenfrequenzgänge | 83 |
| 5.22 | Amplitudenfrequenzgänge bis 20 Hz | 83 |
| 5.23 | Systemantwort x auf Erregung in x-Richtung | 84 |
| 5.24 | Systemantwort y auf Erregung in x-Richtung | 84 |
| 5.25 | Systemantwort z auf Erregung in x-Richtung | 85 |
| 5.26 | „Curve-Fitting“ der Amplitudenfrequenzgänge bei Anregung in x-Richtung | 85 |
| 5.27 | Eigenformen durch Anregung in negativer x-Achsrichtung | 86 |
| 5.28 | Eigenformen durch Anregung in negativer x-Achsrichtung | 86 |
| 5.29 | Systemantwort auf Systemerregung, jeweils in x-Richtung (a) und Systemantwort auf Systemerregung, jeweils in y-Richtung (b) | 87 |
| 5.30 | Eigenformen durch Anregung in negativer x-Achsrichtung | 87 |
| 5.31 | Amplitudenfrequenzgang und Eigenform | 88 |
| 5.32 | Systemerregung im Zeitbereich und Frequenzbereich | 90 |
| 5.33 | Amplitudenfrequenzgänge der Übertragungsfunktionen bis 20 Hz . . . | 91 |
| 5.34 | Amplitudenfrequenzgang auf Anregung in x-Richtung | 92 |
| 5.35 | Curve-Fitting im Frequenzbereich | 92 |
| 5.36 | Curve Fitting der Amplitudenfrequenzgänge | 93 |
| 5.37 | Eigenformen des Motors | 93 |
| 5.38 | Eigenformen des Motors | 94 |
| 5.39 | Eigenformen des Motors | 94 |

Tabellenverzeichnis

| | | |
|------|--|----|
| 4.1 | Kennwerte Simulationsmodell Variante 4 | 43 |
| 4.2 | Kennwerte Simulationsmodell Variante 7 | 44 |
| 4.3 | Kennwerte 3D Simulationsmodell Variante 1 | 45 |
| 4.4 | Kennwerte MAN Dieselmotoren D0834 & D0836 | 46 |
| 4.5 | Technische Daten PCB - triaxialer Beschleunigungsaufnehmer | 52 |
| 4.6 | Zuordnung der Messpositionen | 53 |
| 4.7 | Technische Daten Modalhammer | 54 |
| 4.8 | Technische Daten Signalanalysesystem NI USB-4431 | 55 |
| 5.1 | Soll-Ist-Vergleich Simulationsmodell Variante 4 | 82 |
| 5.2 | Soll-Ist-Vergleich Simulationsmodell Variante 7 | 82 |
| 5.3 | Soll-Ist-Vergleich 3D Simulationsmodell Variante 3 | 89 |
| A.1 | Kennwerte Simulationsmodell Variante 1 | A |
| A.2 | Kennwerte Simulationsmodell Variante 2 | A |
| A.3 | Kennwerte Simulationsmodell Variante 3 | B |
| A.4 | Kennwerte Simulationsmodell Variante 5 | B |
| A.5 | Kennwerte Simulationsmodell Variante 6 | B |
| A.6 | Soll-Ist-Vergleich Simulationsmodell Variante 1 | C |
| A.7 | Soll-Ist-Vergleich Simulationsmodell Variante 2 | C |
| A.8 | Soll-Ist-Vergleich Simulationsmodell Variante 3 | C |
| A.9 | Soll-Ist-Vergleich Simulationsmodell Variante 5 | C |
| A.10 | Soll-Ist-Vergleich Simulationsmodell Variante 6 | C |
| A.11 | Soll-Ist-Vergleich 3D Simulationsmodell Variante 1 | D |
| A.12 | Soll-Ist-Vergleich 3D Simulationsmodell Variante 2 | D |

Formelzeichen, Symbole und Indizes

Formelzeichen, Symbole

Nicht aufgeführt sind Formelzeichen, die nur einmalig Vorkommen und im jeweiligen Abschnitt erklärt sind.

| | | |
|-----------------|-------------|---|
| a_0, a_i, a_n | – | Fourierkoeffizient |
| b, b_i, b_n | – | Fourierkoeffizient |
| c_i, c_n | | Fourierkoeffizient |
| c | N/m | Federsteigkeit |
| c_a | N/m | Axiale Federsteigkeit |
| c_r | N/m | Radial Federsteigkeit |
| C | – | Transformationsmatrix |
| \mathbf{C} | N/m | Steifigkeitsmatrix |
| d | kg/s | Dämpfungsbeiwert |
| d | m | Drahtdurchmesser |
| d | m | Drahtdurchmesser |
| D | – | Dämpfungsmaß |
| D | m | Mittlerer Federdurchmesser |
| \mathbf{D} | N/s | Dämpfungsmatrix |
| \hat{e} | – | Eigenvektoren |
| \mathbf{E} | – | Einheitsmatrix |
| f | Hz | Frequenz |
| \mathbf{f} | N, Nm | Kraftvektor |
| $f(t)$ | – | Funktion der Zeit |
| $F(\omega)$ | – | Transformierte Funktion im Bildbereich |
| F_c | N | Federkraft |
| F_n | – | Fourierkoeffizient |
| F_0 | – | Fourierkoeffizient |
| \mathbf{F} | s^{-1} | Kraftvektor |
| \mathcal{F} | – | Fourieroperator |
| G | N/mm | Schubmodul |
| h | ms^{-2}/N | Gewichtungsfunktionsmatrix |
| $H(j\Omega)$ | ms^{-2}/N | Übertragungsfunktion |
| j | – | Imaginäre Zahl |
| J | kgm^2 | Massenträgheitsmoment, Trägheitstensor |
| J_S | kgm^2 | Massenträgheitsmoment im Schwerpunkt |
| J_x | kgm^2 | Massenträgheitsmoment bezogen auf x-Achse |
| J_y | kgm^2 | Massenträgheitsmoment bezogen auf x-Achse |
| J_z | kgm^2 | Massenträgheitsmoment bezogen auf x-Achse |

| | | |
|---------------------|----------------|--|
| J_{xy} | kgm^2 | Deviationsmoment bezogen auf die Achsen xy |
| J_{xz} | kgm^2 | Deviationsmoment bezogen auf die Achsen xz |
| J_{yz} | kgm^2 | Deviationsmoment bezogen auf die Achsen yz |
| L | m | Lagrange Funktion |
| L | m | Länge |
| L_0 | m | Ungespannte Federlänge |
| L_1 | m | Abstand von Messpunkt 1 zum Schwerpunkt |
| L_2 | m | Abstand von Messpunkt 2 zum Schwerpunkt |
| m | kg | Masse |
| \mathbf{M} | $kg, kgms^2$ | Massenmatrix |
| M | Nm | Moment |
| n | – | Windungsanzahl, Anzahl der Freiheitsgrade, Laufindex |
| P | – | Messposition |
| r | m | Radius |
| S | – | Schwerpunkt |
| t | s | Zeit |
| t^* | s | Impulszeit |
| t_i | s | Impulsdauer |
| T | s | Periode |
| T | kgm^2/s^2 | Kinetische Energie |
| \mathbf{u} | m, \circ | Vektor der Verschiebung |
| $\ddot{\mathbf{u}}$ | $m/s^2, 1/s^2$ | Vektor der Beschleunigungen |
| \underline{u} | – | Vektor der normierten Eigenvektoren |
| U | kgm^2/s^2 | Potenzielle Energie |
| x | – | Achsenbezeichnung |
| x_s | m | Schwerpunktskoordinate |
| \hat{x} | m | Amplitude |
| $x(t)$ | m | Weg als Funktion der Zeit |
| $\dot{x}(t)$ | m/s | Geschwindigkeit als Funktion der Zeit |
| $\ddot{x}(t)$ | m/s^2 | Beschleunigung als Funktion der Zeit |
| $X(j\Omega)$ | m/s^2 | Transformiertes Ausgangssignal |
| y | – | Achsenbezeichnung |
| y_s | m | Schwerpunktskoordinate |
| \hat{y} | m | Amplitude |
| $y(t)$ | m | Weg als Funktion der Zeit |
| $\dot{y}(t)$ | m/s | Geschwindigkeit als Funktion der Zeit |
| $\ddot{y}(t)$ | m/s^2 | Beschleunigung als Funktion der Zeit |
| $Y(j\Omega)$ | N | Transformiertes Eingangssignal |
| z | – | Achsenbezeichnung |
| z_s | m | Schwerpunktskoordinate |
| $z(t)$ | m | Weg als Funktion der Zeit |
| \hat{z} | m | Amplitude |
| $\dot{z}(t)$ | m/s | Geschwindigkeit als Funktion der Zeit |
| $\ddot{z}(t)$ | m/s^2 | Beschleunigung als Funktion der Zeit |
| α | \circ | Winkel |
| β | \circ | Winkel |
| γ | \circ | Winkel |
| δ | – | Abklingkonstante |
| δ | N | Diracimpuls |
| δ | – | Fourierkoeffizient |

| | | |
|------------------|----------|--|
| ε | s | Zeitintervall |
| ζ | – | Körperfeste Achse, Hauptachse |
| η | – | Körperfeste Achse, Hauptachse |
| λ | – | Eigenwerte |
| Λ | – | Logarithmisches Dämpfungsdekrement |
| μ | – | Ort der Systemantwort |
| ν | – | Ort der Systemerregung |
| φ | $^\circ$ | Winkel |
| φ_0 | $^\circ$ | Nullphasenwinkel, Phasenverschiebung |
| $\dot{\varphi}$ | $1/s$ | Winkelgeschwindigkeit |
| $\ddot{\varphi}$ | $1/s^2$ | Winkelbeschleunigung |
| v | – | Eigenvektor MAC-Matrix |
| ω_0 | $1/s$ | Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems |
| $\omega_{1,2}$ | $1/s$ | Eigenkreisfrequenzen des gekoppelten Systems |
| ω_{01} | $1/s$ | Eigenkreisfrequenz beim entkoppelten System |
| ω_{02} | $1/s$ | Eigenkreisfrequenz beim entkoppelten System |
| ω_{12} | $1/s$ | Kopplungsfaktor |
| ω_{21} | $1/s$ | Kopplungsfaktor |
| ω_d | $1/s$ | Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems |

1 Einleitung

Das Unternehmen MAN Truck & Bus AG entwickelt, konstruiert und produziert am Standort Nürnberg Motoren für die Anwendungsgebiete Nutzfahrzeuge, Generatoren und Marine. Für die Auslegung des Gesamtantriebsstrangs werden die Trägheitskennwerte dieser Motoren benötigt um das Resonanzverhalten detailliert zu bewerten.

Gegenwärtig führt die ortsansässige Georg-Simon-Ohm Fachhochschule die Ermittlung der Masse, Schwerpunktskoordinaten und Massenträgheitsmomente der Motoren durch. Ziel des Unternehmens ist es, die vorgenannten Arbeitsschritte zukünftig besser verstehen und interpretieren zu können.

Gegenstand dieser Arbeit ist es, ein experimentelles Verfahren zu entwickeln, mit dem die Schwerpunktskoordinaten und Massenträgheitsmomente der MAN-Motoren aus Messdaten bestimmt werden können.

Für die praktische Umsetzung wird die experimentelle Modalanalyse genutzt. Die Motormasse wird vorab durch wiegen bestimmt.

Die vorliegende Arbeit erläutert, aufbauend auf den theoretischen Grundlagen die Entwicklung dieses Verfahrens.

Zielführend für die Auswertung der experimentellen Messdaten wird eine Software entwickelt, welche anhand von zwei- und dreidimensionalen Computersimulationsmodellen validiert wird. Die Software soll nachfolgend die Auswertung der experimentellen aufgenommenen Messdaten der Motoren ermöglichen.

1.1 Ausgangssituation bei MAN

Die MAN Truck & Bus AG setzt für die Konstruktionen ihrer Motoren die Computersoftware Catia V5 Release 19 ein. Die Software ermöglicht die Bestimmung der Trägheitseigenschaften und Schwerpunktskoordinaten von Bauteilen. Bei der Modellierung von Bauteilen werden die Bool'schen Operationen genutzt.

Durch diese Vorgehensweise werden beispielsweise Material abtragende Bearbeitungen zunächst als positiver Solid erstellt und anschließend durch die Bildung der gemeinsamen Schnittmenge von dem Konstruktionsbauteil abgezogen. Im Ergebnis verbleibt von dem „Bearbeitungssolid“ der Bereich außerhalb der Schnittmenge. Durch die Materialzuordnung in der Software werden dem noch bestehenden „Bearbeitungssolid“ die gleichen Materialkennwerte zugewiesen und verfälschen dadurch die softwareinterne Berechnung des Schwerpunktes und der Trägheitseigenschaften.

Die Vorgehensweise bei der Konstruktion macht die Bestimmung von Masse, Schwerpunktlage und Massenträgheitsmomenten der Motoren mittels Catia nur sehr bedingt möglich. Eine fehlerfreie analytische Berechnung ist aufgrund der Anzahl von Einzelkomponenten nur mit sehr großem Aufwand realisierbar.

1.2 Konkretisierung der Aufgabenstellung

Aus den genannten Gründen, soll für die Bestimmung der Trägheitskennwerte der MAN-Dieselmotoren die experimentelle Modalanalyse genutzt werden. Der Motor würde freischwingend auf einem Schwingungsprüfstand montiert und als ein Starrkörper mit einer inhomogenen Massenverteilung angenommen werden.

Dieser Schwingungsprüfstand ist bereits vorhanden und wird gegenwärtig für die Bestimmung der genannten Kennwerte von der Georg-Simon-Ohm Fachhochschule genutzt. Um die Schwingungsmessung der Motoren durchführen zu können, sind je nach Masse der Motoren zwei unterschiedliche Sätze linearer Schraubenfedern vorhanden. Die Kennwerte der Federn sind unbekannt, daher wird die Federrate durch eine Näherungslösung bestimmt.

2 Grundlagen der Modalanalyse

Mit der Modalanalyse wird das dynamische Verhalten schwingungsfähiger Systeme charakterisiert. Dies kann auf experimentelle und numerische Weise erfolgen. Diese sollen zunächst in ihren Grundzügen erörtert werden, ohne auf die tiefergehenden mathematischen Herleitungen einzugehen. Dazu wird die Modalanalyse abstrakt diskutiert, um einen Überblick über dieses Verfahrens zu erlangen.

Die numerische Modalanalyse wird mit Computerprogrammen, welche auf der Finite-Elemente-Methode basieren, vollzogen. Hierbei wird der rein analytische Weg mit Hilfe der Mathematik genutzt.

Die experimentelle Modalanalyse wird mittels praktischen Versuchen an realen Bauteilen bzw. an realen Strukturen durchgeführt. Dabei werden Erkenntnisse über das reale Verhalten der vorliegenden Konstruktion gewonnen.

2.1 Grundlagen der rechnerischen Modalanalyse

Die numerische Modalanalyse wird vornehmlich von Berechnungsingenieuren und Konstrukteuren bei der Auslegung von Bauteilen oder Strukturen genutzt. Dies kann durch ein auf der Finite-Elemente-Methode (FEM) basierendes Programm umgesetzt werden. Im Ergebnis lassen sich unter anderem die modalen Eigenfrequenzen, Dämpfung, Eigenvektoren und somit die Schwingformen rechnerisch bestimmen und auch animiert darstellen, dies stellt den Inhalt der nachfolgenden Abbildung dar.

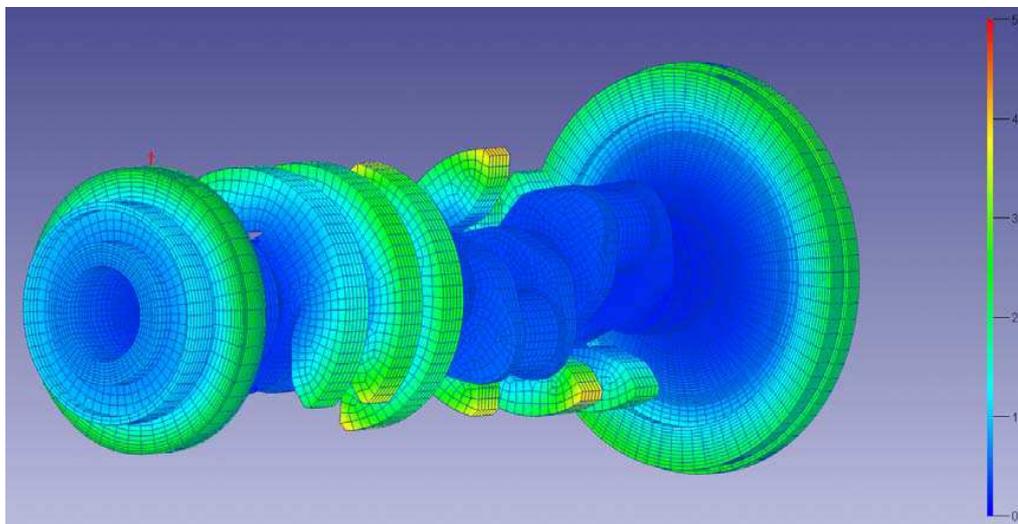


Abbildung 2.1: Modalanalyse bei einem FEM-Modell [1]

So hilft sie bei der Entwicklungsphase eine anschauliche Darstellung der modalen Schwingformen eines Bauteils bzw. Struktur zu verstehen, und Schwachstellen bzw. verbesserungswürdige Punkte der Bauteile oder Struktur frühzeitig erkannt und optimiert werden. Auf diese Weise wird ein späteres Versagen der Konstruktion vermieden.

Die Entwicklung eines modalen Modells aus einem Finite-Elemente-Modell, siehe hierzu Abbildung 2.1, ist sowohl für Simulationen als auch für Designstudien nützlich. Dies wird deutlich, wenn beispielsweise bei Versuchen die Modifikation eines Bauteils auf dynamische Veränderungen hin untersucht werden sollen.

Hier werden mithilfe modaler Daten (Frequenzen, Dämpfungen und Modalformen) mathematisch die Auswirkungen der Veränderungen auf die gesamte Systemcharakteristik bestimmt. Mathematisch lässt sich ein Bauteil oder eine Struktur mit der folgenden Gleichung bestimmen.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{F}}(t) \quad (2.1)$$

Mit den Parametern:

- ◆ \mathbf{M} Massenmatrix
- ◆ \mathbf{D} Dämpfungsmatrix
- ◆ \mathbf{C} Steifigkeitsmatrix
- ◆ $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ Beschleunigung als Funktion der Zeit
- ◆ $\dot{\mathbf{x}}(t)$ Geschwindigkeit als Funktion der Zeit
- ◆ $\mathbf{x}(t)$ Weg als Funktion der Zeit
- ◆ $\hat{\mathbf{F}}(t)$ Kraft als Funktion der Zeit

Die Massenmatrix ist üblicher Weise eine Diagonalmatrix, die Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrizen sind symmetrisch mit nichtdiagonalen Elementen, die das Ausmaß der Kopplung zwischen den Gleichungen bzw. Freiheitsgraden beschreiben. Die Größe der Matrizen hängt dabei von der Anzahl der Gleichungen ab, die zur Beschreibung des Systems benötigt werden.

Mathematisch betrachtet, wird hier eine Lösung des Eigenwertproblems durchgeführt, bei der die gekoppelten Gleichungen in eine Reihe ungekoppelter Systeme einzelner Freiheitsgrade umgewandelt werden. Diese lassen sich durch Diagonalmatrizen der modalen Masse, Dämpfung und Steifigkeit in einem neuen Koordinatensystem, dem sogenannten modalen Raum, beschreiben.

Die Transformation vom physikalischen in den modalen Raum mithilfe der Modaltransformation ist ein Vorgang, bei dem aus einem komplexen System gekoppelter Gleichungen ein einfaches System ungekoppelter Gleichungen für einzelne Freiheitsgrade entsteht.

Entsprechend kann das analytische Modell in Untersysteme für die separaten Freiheitsgrade zerlegt werden. Der modale Raum erlaubt also eine einfache Beschreibung eines komplexen Systems mithilfe von Subsystemen für jeden einzelnen Freiheitsgrad.

2.2 Grundlagen der experimentellen Modalanalyse

Die experimentelle Modalanalyse wird bei fertigen Bauteilen und Strukturen angewendet. Sie soll am Beispiel einer frei gelagerten flachen Stahlplatte erläutert werden. Eine beliebige Ecke wird mittels einer Impulskraft, beispielsweise durch einen Hammerstoß angeregt. Durch den Impuls wird die Platte in Schwingungen versetzt.

Der hier verwendete spezielle Hammer, ein sogenannter Modalhammer, besitzt im Hammerkopf eine Kraftmesseinheit über die das Kraftsignal während des Auftreffens aufgezeichnet wird. Die Reaktion der Platte auf die Anregung wird mit einem Beschleunigungsaufnehmer gemessen. Der Hammer und der Beschleunigungssensor sind mit einem Messverstärker verbunden, welcher die Daten an einen Computer mit entsprechender Messsoftware weiter leitet.

Die aufgezeichneten Signale sind noch reine Zeitdaten. Die Computersoftware ermöglicht es die Signale der Systemerregung und der Systemantwort in den Frequenzbereich zu transformieren und graphisch darzustellen. Die Umwandlung der Zeitdaten der Systemantwort in die Frequenzdomäne mithilfe der Fast Fourier Transformation ergibt die sogenannte Frequenzantwort.

Wird das System mit einer Erregerfrequenz nahe seiner natürlichen Frequenz (Eigenfrequenz) erregt, so verstärkt sich die Systemantwort und wird maximal. Hierbei fällt die Erregerfrequenz mit der Eigenfrequenz zusammen. Durch dieses Verhalten können die Eigenfrequenzen experimentell bestimmt werden.

Diese Schwingformen werden auch Eigenformen, Modalformen oder auch kurz Moden genannt. Wird nun die Frequenzantwort auf das fouriertransformierte Signal der Systemerregung bezogen, wird hierdurch die Übertragungsfunktion zwischen dem Punkt der Systemerregung und dem Punkt der Systemantwort in dem Frequenzbereich bestimmt.

Aus der Übertragungsfunktion werden anschließend, durch ein sogenanntes „Curve-Fitting“, die modalen Parameter bestimmt. Diese können zur besseren Visualisierung graphisch animiert werden. Abbildung 2.2 zeigt die Schwingungsantwort der Platte, dies ist die erste Biegeschwingform, nach [22].

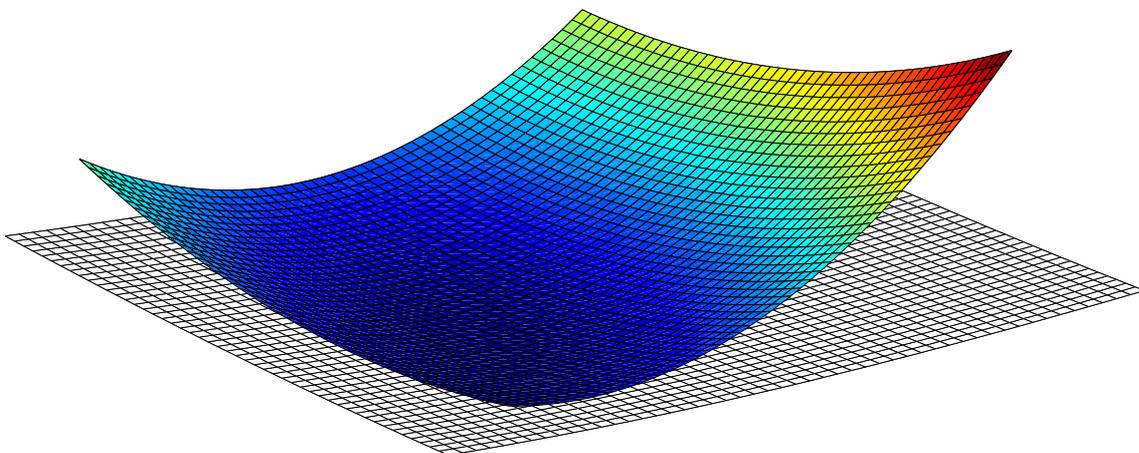


Abbildung 2.2: Erste Biegeschwingform einer Platte

3 Theoretische Grundlagen

3.1 Schwerpunktsbestimmung

Schwerpunkte einfacher homogener Körper können aus Tabellen entnommen werden. Maschinen, welche aus diversen Baugruppen und Bauteilen bestehen, können häufig in Teilkörper unterteilt werden, für die der Schwerpunkt bekannt ist.

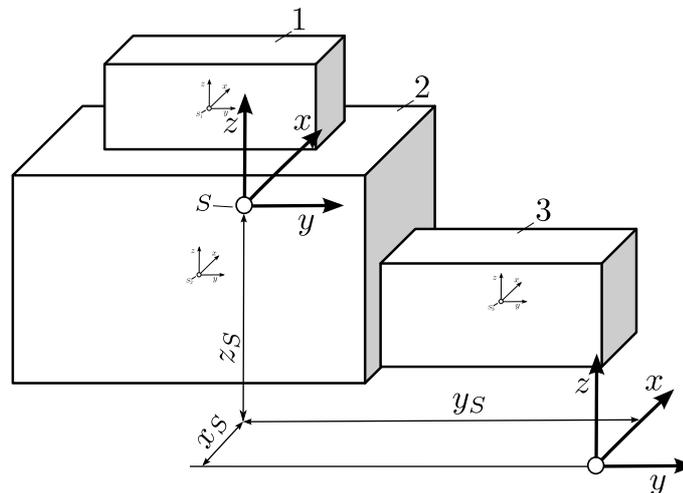


Abbildung 3.1: Schwerpunkt diverser homogener Körper

In diesem Fall kann der Gesamtschwerpunkt aus den Teilmassen und Ortsvektoren bzw. den Schwerpunktskoordinaten der Teilkörper ermittelt werden. Nötig hierfür ist die Einführung eines ortsunabhängigen Referenzkoordinatensystems auf das sich alle Teilkörper mit ihren Schwerpunktskoordinaten beziehen, siehe Abbildung 3.1.

In der Abbildung wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit darauf verzichtet, die Schwerpunktskoordinaten der Teilkörper einzuzichnen. Für eine beliebige Struktur kann der Schwerpunkt mit den folgenden Gleichungen berechnet werden.

$$x_s = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \quad (3.1)$$

$$y_s = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} \quad (3.2)$$

$$z_s = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i} \quad (3.3)$$

Die Schwerpunktskoordinaten können darüber hinaus aus dynamischen Größen bestimmt werden. Dies soll nachfolgend an einem eindimensionalen Stab nach Abbildung 3.2 erörtert werden.

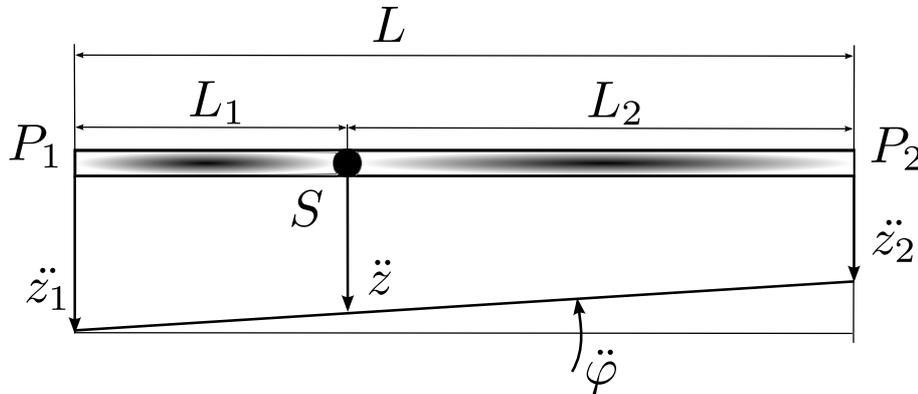


Abbildung 3.2: Schwerpunktsbestimmung bei einem Stab

Der Stab hat einen außermittigen Schwerpunkt. Es sind die Beschleunigungsvektoren, die Masse und die Länge des Stabes bekannt. Die Winkelbeschleunigung wird über die folgende Beziehung berechnet.

$$\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{z}_1 - \ddot{z}_2}{L} \quad (3.4)$$

Die Schwerpunktsbeschleunigung kann somit über die folgenden Gleichungen bestimmt werden.

$$\ddot{z} = \ddot{z}_1 - \ddot{\varphi} L_1 \quad (3.5)$$

$$\ddot{z} = \ddot{z}_2 + \ddot{\varphi} L_2 \quad (3.6)$$

Durch Umstellen der Gleichungen kann die Schwerpunktslage definiert werden.

$$L_1 = \frac{\ddot{z}_1 - \ddot{z}}{\ddot{\varphi}} \quad (3.7)$$

$$L_2 = \frac{\ddot{z} + \ddot{z}_2}{\ddot{\varphi}} \quad (3.8)$$

Das vorstehende Verfahren kann entsprechend auf einen zweidimensionalen, sowie auf einen dreidimensionalen Körper angewendet werden. Maßgebend hierfür ist es die Beschleunigungen an möglichst vielen Punkten des Körpers zu kennen.

3.2 Massenträgheitsmomente

3.2.1 Massenträgheitsmomente einzelner Körper

Das Massenträgheitsmoment, bzw. das Massenmoment 2. Grades, ist ein Maß für den Widerstand eines physikalischen Körpers gegen eine Bewegungsveränderung. Bestimmen lässt es sich bezogen auf den eigenen Schwerpunkt oder bezogen auf die Drehachse. Die Größe des Massenträgheitsmomentes ist Abhängig von der Dichte, geometrischen Beschaffenheit und Massenverteilung im Bezug auf den Schwerpunkt bzw. die Drehachse.

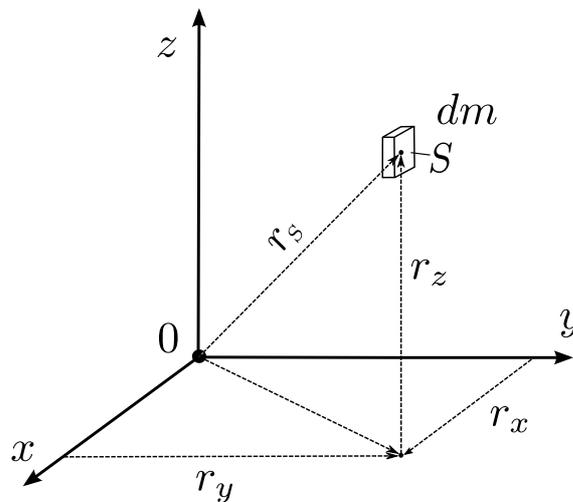


Abbildung 3.3: Massenträgheitsmoment

Die Massenverteilung hat einen großen Einfluss auf die Höhe der Trägheit. Das Massenträgheitsmoment für die Masse dm aus Abbildung 3.3 kann wie folgt formuliert werden:

$$J = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Die Elemente der Hauptdiagonalen in der Matrix des Massenträgheitsmomentes bzw. des Trägheitstensors sind die axialen Trägheitsmomente bezüglich des ortsfesten Koordinatensystems. Die axialen Trägheitsmomente beziehen sich auf die Masse dm und die entsprechenden Achsen mit dem dazugehörigen Drehradius r_i . Die axialen Massenträgheitsmomente berechnen sich mit folgenden Gleichungen.

$$J_{xx} = \int_m (y^2 + z^2) dm = r_x^2 dm \quad (3.10)$$

$$J_{yy} = \int_m (x^2 + z^2) dm = r_y^2 dm \quad (3.11)$$

$$J_{zz} = \int_m (x^2 + y^2) dm = r_z^2 dm \quad (3.12)$$

Die Elemente auf den Nebendiagonalen werden als Deviations- oder Zentrifugalmomente bezeichnet. Für die Masse dm berechnen sie sich wie folgt:

$$J_{xy} = J_{yx} = - \int_m (xy) dm \quad (3.13)$$

$$J_{xz} = J_{zx} = - \int_m (xz) dm \quad (3.14)$$

$$J_{yz} = J_{zy} = - \int_m (yz) dm \quad (3.15)$$

3.2.2 Hauptachsensystem und Hauptträgheitsmomente

Deviationsmomente können positiv, negativ oder zu null werden. Wenn die Deviationsmomente zu null werden und verschwinden sind dies die Hauptträgheitsmomente. Oft wird dies als Trägheitstensor bezeichnet und nimmt folgende Gestalt an:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Die Hauptträgheitsmomente werden $J_1 \geq J_2 \geq J_3$ geordnet. Als Hauptachse werden die Achsen bezeichnet auf welche sich die Hauptträgheitsmomente beziehen. Diese bilden mit den Hauptträgheitsmomenten J_1, J_2 und J_3 ein Rechtssystem. Die Lage der Hauptachsen ist über die Eigenvektoren definiert, so dass die Eigenvektoren und somit die Achsen orthogonal aufeinander stehen und im Körperschwerpunkt zentriert sind.

Jeder Körper, welcher über Deviationsmomente verfügt lässt sich in das Hauptachsensystem überführen. Die Basis bildet hier das Hauptachsentheorem, anhand dessen sich jede symmetrische Matrix auf Diagonalgestalt transformieren lässt. Zu jedem Eigenvektor gehört ein Eigenwert. Alle Eigenwerte bilden die Hauptdiagonale der Matrix. Die Transformation wird mit dem speziellen Eigenwertproblem gelöst und ist wie folgt definiert.

$$(J - \lambda E) \hat{e} = 0 \quad (3.17)$$

In der Gleichung (3.17) sind λ_i die Eigenwerte, \hat{e} die Eigenvektoren und E die Einheitsmatrix. Zusammen mit dem Trägheitstensor (3.9) entsteht somit das homogene

Gleichungssystem (3.17), welches nur dann von Null verschiedene Lösung hat, wenn die Determinante zu null wird.

$$\det \begin{pmatrix} J_{xx} - \lambda & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} - \lambda & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (3.18)$$

Anschließend an die Bestimmung der Eigenwerte, bzw. der Hauptträgheitsmomente werden diese zur Berechnung der Eigenvektoren in Gleichung (3.17) eingesetzt. Die Eigenvektoren geben die Ausrichtung der Hauptachsen im Raum wieder.

$$\hat{e} = \begin{pmatrix} e_{1x} & e_{2x} & e_{3x} \\ e_{1y} & e_{2y} & e_{3y} \\ e_{1z} & e_{2z} & e_{3z} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

3.2.3 Hauptachsen- und Koordinatentransformation

Die Transformation der Hauptachsen lässt sich nach den bekannten Regeln der Mathematik durchführen. Hiermit wird ein verdrehter Körper mit dem körperfesten Koordinatensystem $\{\xi, \eta, \zeta\}$ in das ursprüngliche xyz -Koordinatensystem transformiert, siehe Abbildung 3.4.

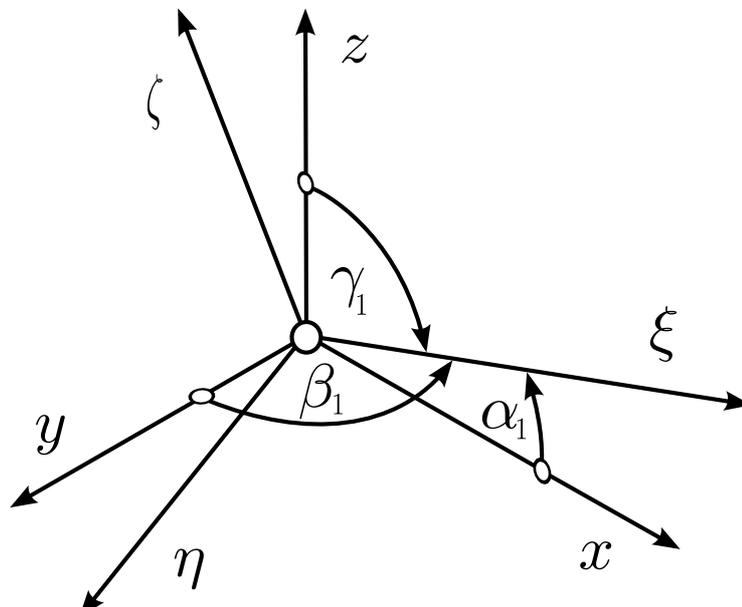


Abbildung 3.4: Koordinatentransformation, nach [3]

Die Transformation von axialen Massenträgheitsmomenten, Deviationsmomenten oder dem Hauptachsensystem aus dem $\{x, y, z\}$ Koordinatensystem in das körperfeste Koordinatensystem kann nun mittels des Richtungskosinus entsprechend Gleichung (3.20) durchgeführt werden.

$$C = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Die in Abbildung 3.4 eingetragenen Winkel $\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ beziehen sich nur auf die ξ -Achse. Zur Übersichtlichkeit wurde darauf verzichtet die weiteren Winkel einzutragen. Für die Transformation der Achse η , sind dies die Winkel $\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$ sowie die Winkel $\{\alpha_3, \beta_3, \gamma_3\}$ für die Achse ζ . Soll nun ein Massenträgheitsmoment eines beliebigen Körper in das Hauptachsensystem transformiert werden, so erfolgt dies mit der folgenden Gleichung (3.21).

$$J = C^T J_S C = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Für einen Körper dessen Schwerpunkt sich nicht im Ursprung befindet, wie beispielsweise in Abbildung 3.5 müssen für die Transformation in das Ursprungskoordinatensystem entsprechend der Radius $\vec{r}_S = \sqrt{x_S^2 + y_S^2 + z_S^2}$ und die Masse des Körpers berücksichtigt werden, nach [3].

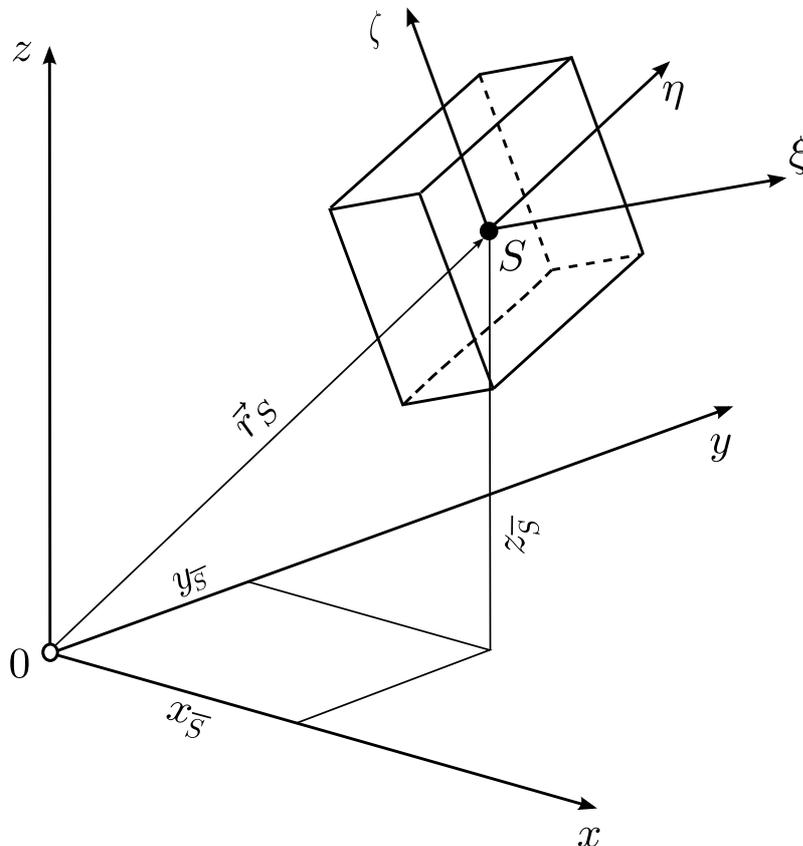


Abbildung 3.5: Erweiterte Koordinatentransformation

3.2.4 Berechnung der reduzierten Masse, Schwerpunkt und Trägheitskennwerte einer realen Struktur

Sollen bei einer realen Struktur welche, aus mehreren Bauteile zusammengesetzt ist, einzelne Bauteile bei der Berechnung der Massenträgheitsmomente nicht berücksichtigt werden, kann dies einerseits über das Hauptachsensystem mit nachfolgender Hauptachsentransformation geschehen.

Andererseits kann dies auch über die Massenträgheitsmomente und die Lage des körperfesten Koordinatensystems erfolgen. Für den Elektromotor auf der linken Seite der Abbildung 3.6 erfolgt die Bestimmung der neuen Trägheitseigenschaften über die Berechnung der Massenträgheitsmomente.

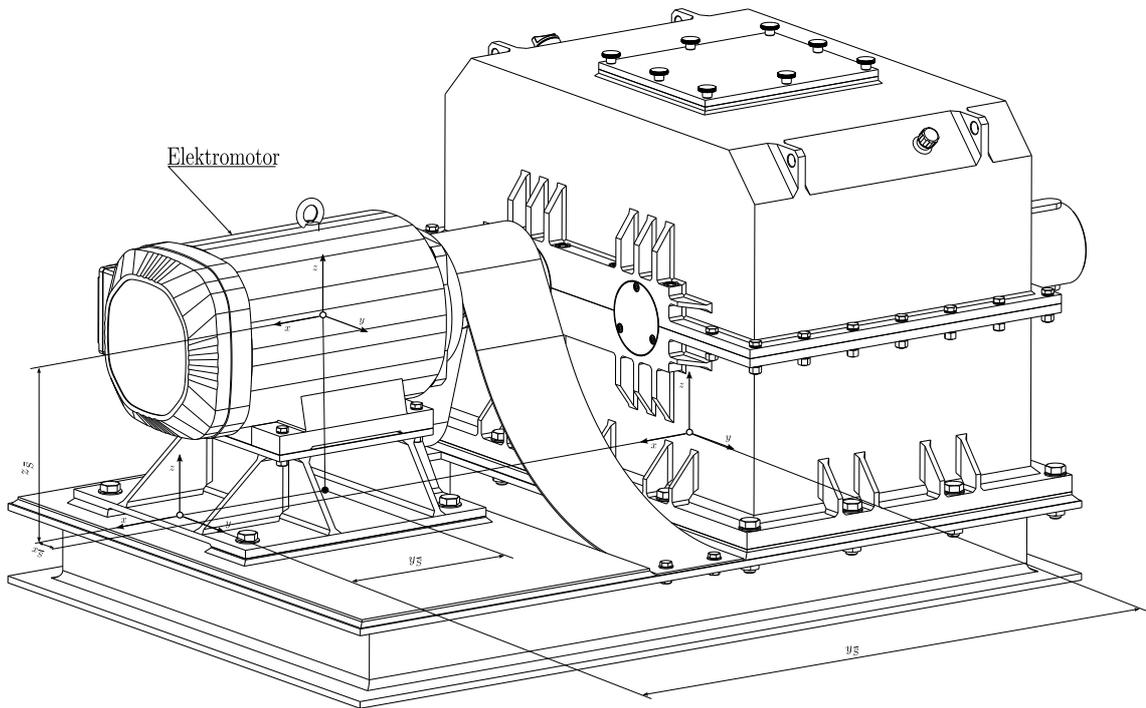


Abbildung 3.6: Antriebseinheit Stirnradgetriebe[16]

Für die Berechnung der neuen Gesamtmasse, Schwerpunkt und Trägheitsmomente ist es nützlich ein zusätzliches Koordinatensystem einzuführen. In Bezug auf dieses, wird mit folgenden Gleichungen der neue Schwerpunkt bestimmt.

$$x_S = \frac{\sum x_{S_i} m_i}{\sum m_i} = \frac{\sum x_{S_g} m_{S_g} - \sum x_{S_\psi} m_{S_\psi}}{\sum m_{S_g} - \sum m_{S_\psi}} \quad (3.22)$$

$$y_S = \frac{\sum y_{S_i} m_i}{\sum m_i} = \frac{\sum y_{S_g} m_{S_g} - \sum y_{S_\psi} m_{S_\psi}}{\sum m_{S_g} - \sum m_{S_\psi}} \quad (3.23)$$

$$z_S = \frac{\sum z_{S_i} m_i}{\sum m_i} = \frac{\sum z_{S_g} m_{S_g} - \sum z_{S_\psi} m_{S_\psi}}{\sum m_{S_g} - \sum m_{S_\psi}} \quad (3.24)$$

Die Berechnung des reduzierten Trägheitsmomentes erfolgt über die nachfolgenden Gleichung (3.25).

$$J_S = J_{Sg} - m_{S\psi} \begin{pmatrix} y_{S\psi}^2 + z_{S\psi}^2 & -x_{S\psi} y_{S\psi} & -x_{S\psi} z_{S\psi} \\ -x_{S\psi} y_{S\psi} & x_{S\psi}^2 + z_{S\psi}^2 & -y_{S\psi} z_{S\psi} \\ -z_{S\psi} y_{S\psi} & -z_{S\psi} x_{S\psi} & x_{S\psi}^2 + y_{S\psi}^2 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

3.3 Schwingungen mit einem Freiheitsgrad

3.3.1 Harmonische ungedämpfte Schwingungen

Wegen der elementaren Bedeutung der harmonischen Schwingungen für die vorliegende Arbeit, sollen diese am System des Feder-Masse-Schwinger nach Abbildung 3.7 erörtert werden. Im allgemeinen werden Schwingungen durch physikalische Größen verursacht. Ein Körper verharrt solange in seiner Ruhelage bis er durch äußere Einwirkung angeregt wird.

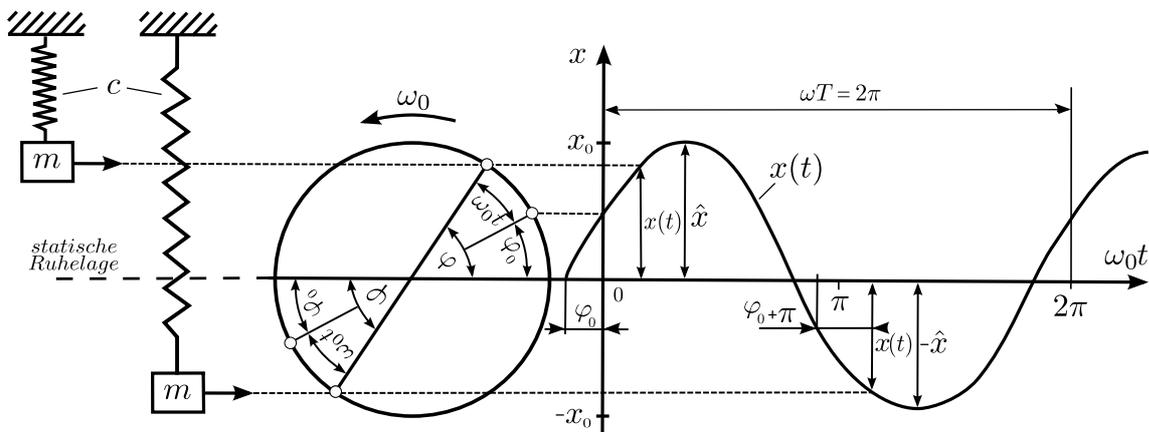


Abbildung 3.7: Feder Masse Schwinger

Die Masse m in Abbildung 3.7 erfährt durch einen einmaligen Impuls eine Anfangsauslenkung x_0 oder eine Anfangsgeschwindigkeit \dot{x}_0 und wird anschließend sich selbst überlassen. Das System antwortet mit seiner Eigenkreisfrequenz ω . Die Bewegung und die Position der Masse ist zeitabhängig. Die Schreibweise $x(t)$ soll dies verdeutlichen. Durch das Einsetzen von Zeitwerten in die Gleichung (3.26) die exakte Position der Masse bestimmt werden [10].

$$x(t) = \hat{x} \cos \omega t + \varphi_0 \quad (3.26)$$

In Gleichung (3.26) ist φ_0 der Nullphasenwinkel, dieser gibt die Verschiebung der Phase an. Die Bewegungsrichtung in Bezug auf die Ruhelage der Masse ändert sich mehrmals und somit auch ihr Vorzeichen. Die Regelmäßigkeit zu welchem Zeitpunkt die Masse den gleichen Punkt durchfährt, ist die Periode T der Schwingung. So gilt für periodische Schwingungen nach [3].

$$x(t + T) = x(t). \quad (3.27)$$

Die Frequenz einer Schwingung hingegen ist der Kehrwert der Periode.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (3.28)$$

Gleichung (3.26) analysiert die Auslenkung der Masse in Bezug auf die Zeit. Das Differential der Auslenkung ist die Geschwindigkeit \dot{x} , eine weitere Differentiation führt zur Beschleunigung \ddot{x} .

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = -\omega \hat{x} \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (3.29)$$

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \ddot{x}(t) = -\omega^2 \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (3.30)$$

Gleichung (3.26) lässt sich mit den Konstanten A & B auch als Überlagerung von einer Sinus und Cosinus-Schwingung schreiben, die aus den Anfangsbedingungen berechnet werden.

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) + B \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (3.31)$$

Durch folgende Beziehung lässt sich die Amplitude \hat{x} und die Phasenverschiebung φ_0 berechnen.

$$\hat{x} = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \varphi_0 = \arctan \frac{B}{A} \quad (3.32)$$

Für die Analysierung von komplizierten Bewegungen ist es hilfreich die Schwingungen mittels komplexer Größen zu untersuchen. Jede zeitabhängige, harmonisch verlaufende Funktion kann als Imaginärteil einer komplexen Veränderlichen aufgefasst werden. Dieses angewendet auf Gleichung (3.26) liefert daher folgendes Ergebnis nach [3].

$$x(t) = \hat{x}(\cos(\omega t + \varphi_0) + j \sin(\omega t + \varphi_0)) \quad (3.33)$$

Mit Anwendung der Euler-Relation

$$\cos x \pm j \sin x = e^{\pm jx} \quad (3.34)$$

lautet die Schreibweise für Gleichung (3.26) daher

$$x(t) = \hat{x}e^{j\omega t}. \quad (3.35)$$

Die komplexe Amplitude, in Bezug auf die Schreibweise ist in Abbildung (3.8) dargestellt.

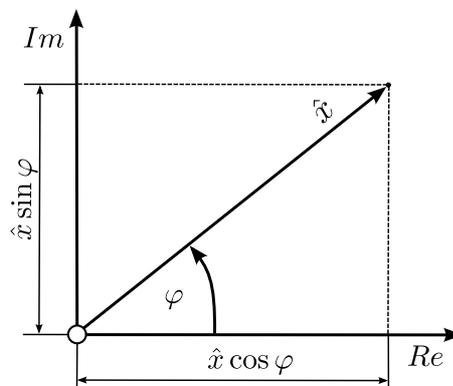


Abbildung 3.8: Komplexe Zeigerdarstellung

Die Abszisse ist der Realteil, die Ordinate der Imaginärteil der Schwingung. Die Beziehungen aus (3.32) können vollwertig übertragen werden.

3.3.2 Differentialgleichung des Feder-Masse-Schwingers

Am Beispiel des bereits in Abbildung 3.7 dargestellten Feder-Masse-Schwingers erfolgt nun die Bestimmung der Differentialgleichung. Dazu wird zunächst das System entsprechend Abbildung 3.9 freigeschnitten.

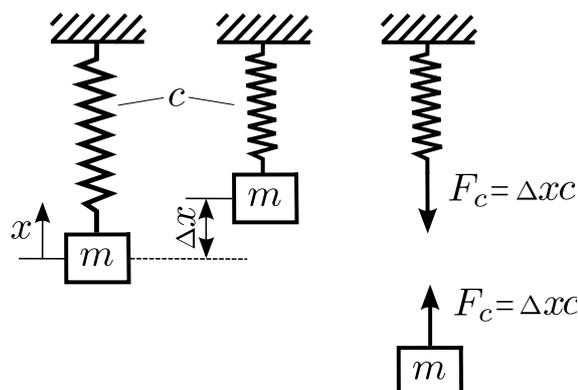


Abbildung 3.9: Freischnitt Ein-Massen-Schwinger

Die Erdanziehung wurde hier vernachlässigt, da diese nur eine Veränderung der statischen Ruhelage zur Folge hätte, sich aber nicht auf die dynamischen Eigenschaften des Schwingverhaltens auswirken würde. Aus Abbildung 3.9 lässt sich mit dem dynamischen Grundgesetz die Bewegungsgleichung bestimmen[3].

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} x = 0 \quad (3.36)$$

Die Eigenkreisfrequenz des Systems wird durch die Annahme einer linearen Federsteifigkeit und der Masse m des Systems bestimmt.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad (3.37)$$

Entsprechend kann daher die Gleichung (3.36) auch wie folgt geschrieben werden:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3.38)$$

Der zeitliche Verlauf der Schwingung wurde bereits in Unterkapitel 3.3.1 diskutiert, so dass hier nicht näher darauf eingegangen wird.

3.4 Schwingungsdämpfungen

Die ungedämpften harmonischen Schwingungen sind eine Idealvorstellung, da bei ihnen kein Abklingenverhalten vorhanden ist und der Betrag der Amplitude stets konstant ist. Im realen Verhalten eines Körpers hingegen nehmen die Amplituden im Laufe der Zeit ständig ab, bis das System schließlich vollständig ruht. Der Grund hierfür sind die stets vorhandenen Bewegungswiderstände, die als Dämpfung bezeichnet werden. Bei Körpern kommt es zu verschiedensten Formen der Dämpfung. Die Gesamtdämpfung, am Beispiel einer Struktur, setzt sich aus mehreren Anteilen zusammen. Die wichtigsten Anteile werden nachstehend kurz erläutert, nach[10].

- Materialdämpfung:** Innere Dämpfung, diese ist abhängig vom verwendeten Material und dessen Bearbeitung.
- Systemdämpfung:** Diese ist abhängig von der konstruktiven geometrischen Gestalt des Systems.
- Lagerdämpfung:** Hierbei handelt es sich im Wesentlichen um Reibungseinflüsse. Unterschieden wird zwischen trockener Reibung (konstante Reibungskraft), geschwindigkeitsproportionaler Reibungskraft und dem Quadrat der Geschwindigkeit proportionaler Kraft. Die Lagerdämpfung hängt ab von der Form der Lagerung und von eventuell vorhandenen Führungen des Systems.

Umgebungsdämpfung: Das System bewegt sich in Luft oder einem anderen Gas oder in einer Flüssigkeit. Je nachdem, ob das umgebende Medium in Ruhe oder selbst in Bewegung ist, spricht man von hydrostatischer bzw. hydrodynamischer Dämpfung.

Schwingungsdämpfer: Es werden häufig besondere Dämpfungsglieder eingebaut, um ein bestimmtes Schwingungsverhalten zu erzielen. Am bekanntesten sind die Schwingungsdämpfer, die im Fahrzeugbau verwendet werden, die dort fälschlicherweise Stoßdämpfer genannt werden.

3.4.1 Schwingungsdämpfung durch lineare Federn

Bei äußerer oder innerer Reibung verläuft die Federkennlinie prinzipiell wie in Abbildung 3.10 dargestellt. Beim Entlasten der Feder wird weniger Federungsarbeit abgegeben als beim Belasten aufgenommen wurde. Die Differenz wird in Wärme umgewandelt. Im Federdiagramm zeigt sich der Energieverlust (Hysterese) durch die von der Kennlinie umschlossene Fläche. Zur Kennzeichnung der Dämpfungseigenschaften einer Feder vergleicht man den Energieverlust W_D mit der Federungsarbeit W_{pot} einer verlustlosen Feder. Entsprechend kann der Dämpfungsfaktor Ψ bestimmt werden.

$$\Psi = \frac{W_D}{W_{pot}} \quad (3.39)$$

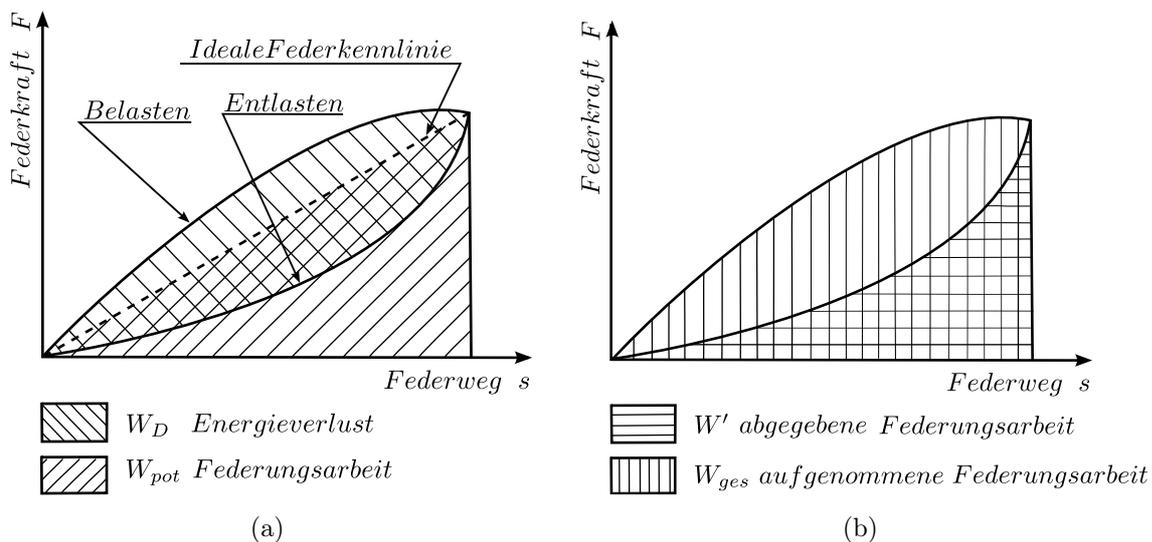


Abbildung 3.10: Federkennlinie bei äußerer oder innerer Reibung, nach [15]

Für dämpfungbehaftete Schwingungsvorgänge lässt sich der Dämpfungswert δ nach Gleichung (3.40) bestimmen, nach [15].

$$\delta = \frac{W_{ges} - W''}{W_{ges} + W'} \quad (3.40)$$

3.4.2 Gedämpfter Feder-Masse-Schwinger

Nun wird der Fall der geschwindigkeitsabhängigen Dämpfung am Beispiel des Schwingungsdämpfers, nach Abbildung 3.11 erörtert. Dieser wurde bereits in 3.4 erwähnt.

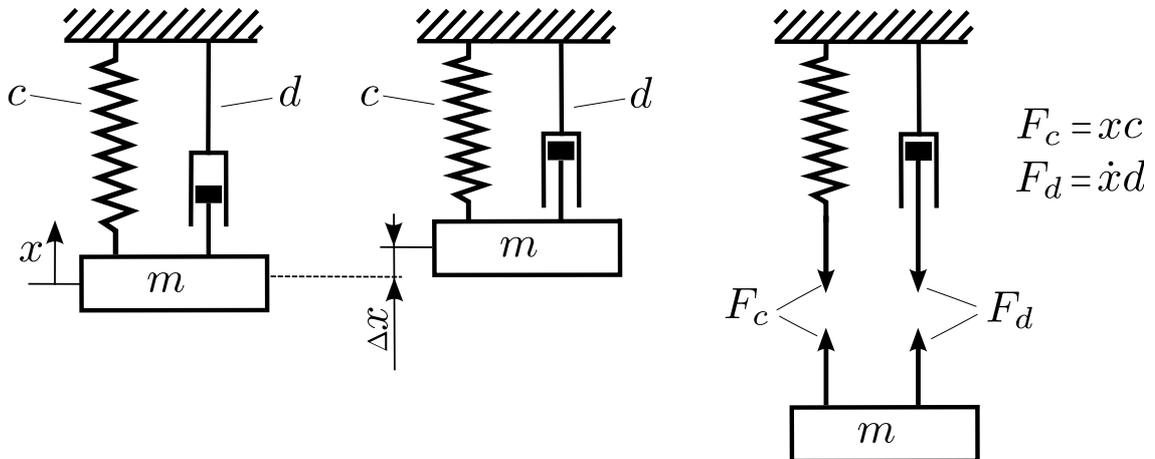


Abbildung 3.11: Freischnitt gedämpfter Ein-Massen Schwinger

Nach dem dynamischen Grundgesetz lässt sich die Bewegungsgleichung für das gedämpfte System wie folgt bestimmen:

$$\ddot{x} + \frac{d}{m} \dot{x} + \frac{c}{m} x = 0 \quad (3.41)$$

Mit dem Verhältnis des Dämpfungskoeffizienten δ und der Eigenkreisfrequenz ω_0 des ungedämpften Systems lässt sich das Dämpfungsmaß D bestimmen

$$D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{d}{2\sqrt{mc}} \quad (3.42)$$

und die Differentialgleichung wie folgt formulieren:

$$\ddot{x} + 2D\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3.43)$$

Mit dem Exponentialansatz

$$x = \hat{x} e^{\lambda t} \quad (3.44)$$

kann die Differentialgleichung in die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 2D\omega_0 \lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (3.45)$$

überführt werden. Die Gleichung (3.45) besitzt insgesamt zwei Lösungen die reell oder komplex sein können.

$$\lambda_{1,2} = \omega_0(-D \pm \sqrt{D^2 - 1}) \quad (3.46)$$

Allerdings können drei verschiedene Arten der Dämpfung vorkommen. Diese werden nachfolgend aufgeführt und erläutert werden.

1. **Fall:** $D > 1$ starke Dämpfung
2. **Fall:** $D = 1$ aperiodischer Grenzfall
3. **Fall:** $D < 1$ schwache Dämpfung

1. **Fall:** Starke Dämpfungen sorgen für ein sehr schnelles Abklingen der Schwingung.
2. **Fall:** Bei dem aperiodischen Grenzfall, ist die Dämpfung so stark, dass keine Schwingungen entstehen.
3. **Fall:** Bei schwach gedämpften Schwingungen nimmt die Amplitude im zeitlichen Verlauf stetig ab bis die Schwingung vollständig ruht. Dies Verhalten wird durch Abbildung (3.12) verdeutlicht.

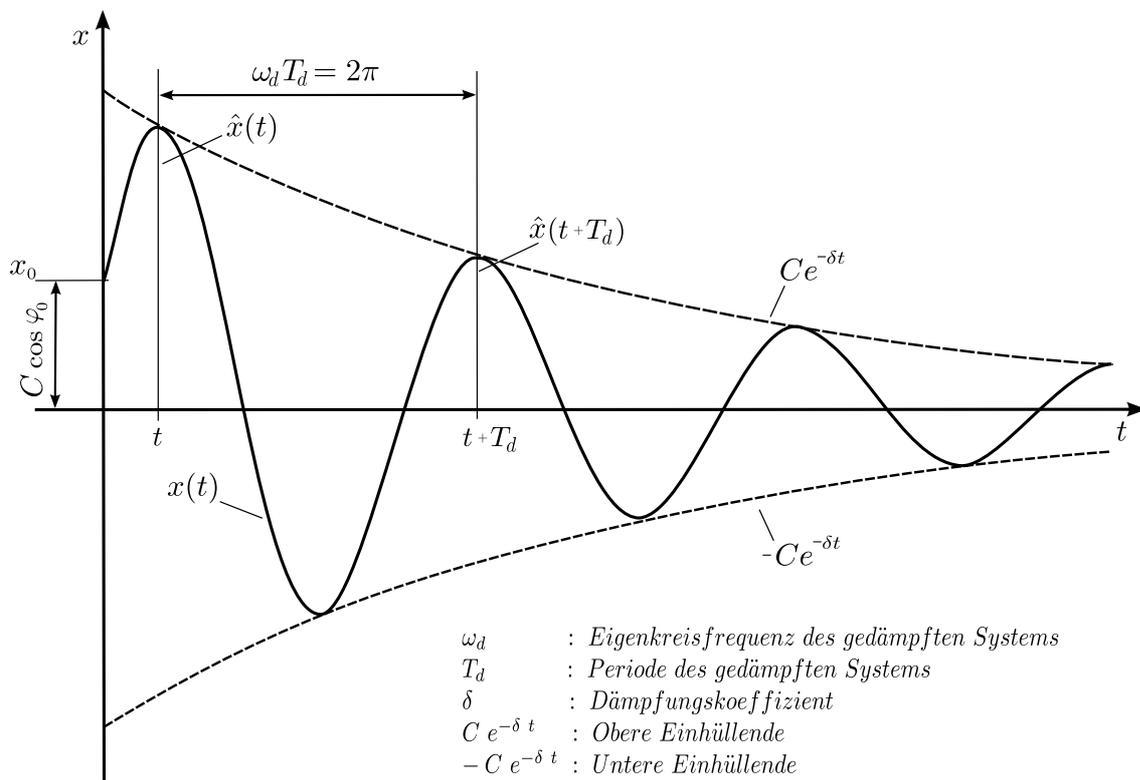


Abbildung 3.12: Schwach gedämpfte Schwingung

Mit der Euler-Relation nach Gleichung (3.34) folgt somit die zeitliche Formulierung der Schwingung.

$$x(t) = \hat{x} e^{-\delta t} \cos(\omega_d t - \varphi_0) \quad (3.47)$$

3.5 Berechnung linearer Schraubenfedern

Eine genaue Bestimmung der Federrate ist durch die Vermessung mit einer Federprüfmaschine möglich. Eine lineare Federkennlinie lässt sich mit Kenntnis der Federgeometriedaten und des Werkstoffes berechnen. Die Lösung ist allerdings nicht exakt, kann aber als eine gute Näherung für die erste Untersuchung herangezogen werden. Die axiale Federrate, bzw. die Federkonstante mit den geometrischen Kennwerten lässt sich nach Abbildung 3.13 wie folgt berechnen.

$$c = \frac{G d^4}{8 D^3 n} \quad (3.48)$$

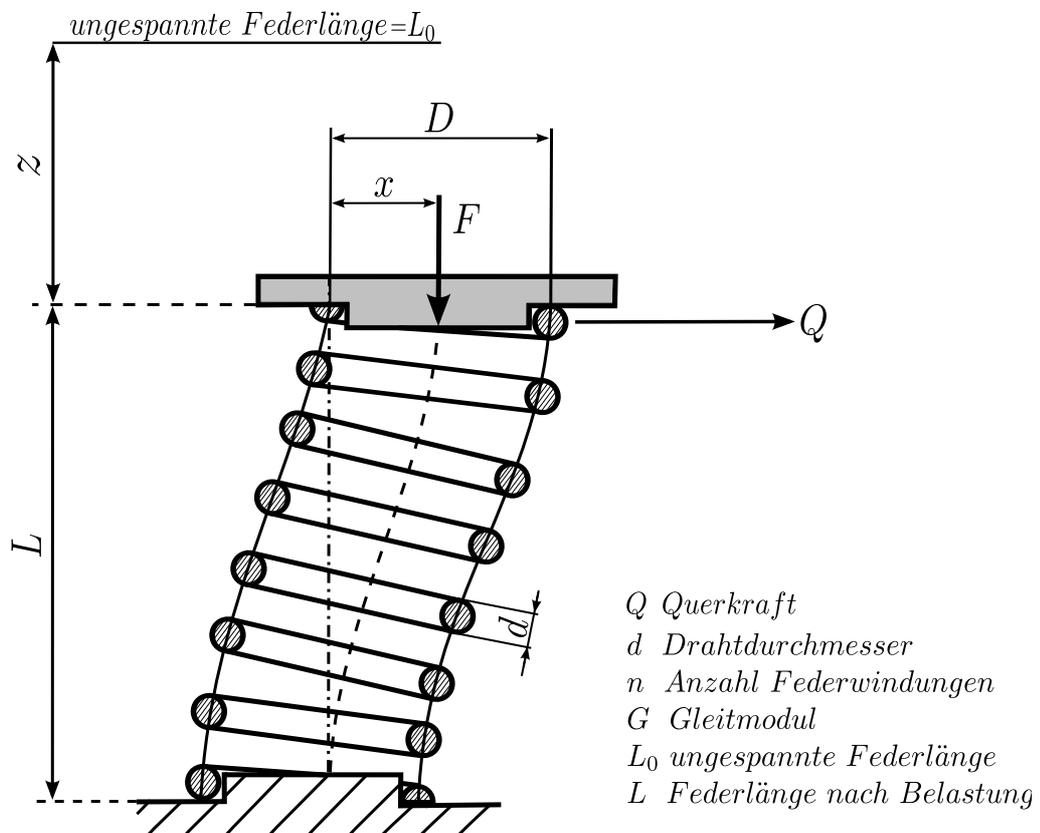


Abbildung 3.13: Lineare Schraubenfeder mit Formelzeichen, nach[5]

Jede lineare Feder weist neben der Längssteifigkeit auch eine Quersteifigkeit auf. Die Quersteifigkeit lässt sich mit folgender empirischen Gleichung (3.49) nach [5] berechnen.

$$\frac{c}{c_r} = 1.0613 \frac{D}{z} \sqrt{\frac{L_0}{z} - 0.6142} \tan \left(0.9422 \frac{z}{D} \sqrt{\frac{L_0}{z} - 0.6142} \right) + 1 - \frac{L_0}{z} \quad (3.49)$$

3.6 Fourier-Analyse

3.6.1 Harmonische Analyse

In der Dynamik ist es üblich, periodische Vorgänge in Form von Fourier-Reihen zu beschreiben. Ist $f(\omega t)$ eine periodische Funktion für die $f(\omega t) = f(\omega(t + nT))$ mit $n = 1, 2, 3, \dots$ gilt, dann ist es möglich diese durch eine Fourier-Reihen-Entwicklung in eine harmonische Bewegung zu approximieren.

$$f(\omega t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) \quad (3.50)$$

$$f(\omega t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \quad (3.51)$$

Mit den Parametern und Beziehungen:

Eigenkreisfrequenz : $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Schwingungsperiode : T

Fourierkoeffizienten : a_i, a_0, b_i und c_i

Die Aufgabe der Fourieranalyse ist die Bestimmung dieser Koeffizienten. Wenn die Funktion $f(\omega t)$ analytisch vorliegt, können die Koeffizienten geschlossen berechnet werden.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) dt \quad (3.52)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \cos(n\omega t) dt \quad (3.53)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \sin(n\omega t) dt \quad (3.54)$$

Es besteht hier folgender Zusammenhang.

$$c_0 = a_0 \quad \sin \varphi_n = \frac{a_n}{c_n} \quad \cos \varphi_n = \frac{b_n}{c_n} \quad (3.55)$$

Die Bestimmung der Amplitude und des Nullphasenwinkels erfolgt mit den nachfolgenden Gleichungen, nach [5] und [12].

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (3.56)$$

$$\tan \varphi_n = \frac{b_n}{a_n} \quad (3.57)$$

3.6.2 Komplexe Fourier Darstellung

Die komplexe Darstellung der Fourier-Reihe kann ähnlich aufgefasst werden wie die der komplexe Schwingungen. Durch die Einführung der komplexen Amplitude F_n kann die Fourierzerlegung durch die Euler-Relation (3.34) in Exponentialform gebracht werden.

$$\delta + j\omega = n e^{j\varphi} = n(\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad (3.58)$$

mit

$$n = \sqrt{\delta^2 + \omega^2} \quad \varphi = \arctan \frac{\omega}{\delta}$$

folgt:

$$\cos(n\omega t) = \frac{1}{2}(e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}) \quad (3.59)$$

$$\sin(n\omega t) = \frac{1}{j2}(e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}) \quad (3.60)$$

Dem folgt das Ergebnis:

$$f(\omega t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n - j b_n) e^{jn\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n + j b_n) e^{-jn\omega t} \quad (3.61)$$

Mit den komplexen Fourierkoeffizienten ergibt sich.

$$F_n = \frac{1}{2} (a_n - j b_n) \quad (3.62)$$

$$F_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + j b_n) \quad (3.63)$$

$$F_0 = \frac{a_0}{2} \quad (3.64)$$

Entsprechend zusammengefasst lässt sich die komplexe Fourier-Reihe wie folgt darstellen.

$$f(\omega t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad (3.65)$$

Die Koeffizienten F_n sind im Allgemeinen komplex. Für die Koeffizienten F_n und F_{-n} gilt beim gleichen Index n , dass sie konjugiert komplex sind.

Die Bestimmungsgleichung der komplexen Amplituden F_n ist mit einer Verbindung der Gleichungen möglich und stellt sich entsprechend dar, nach [7] und [12].

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (3.66)$$

3.6.3 Fourier-Analyse nicht periodischer Funktionen

Beim Übergang von periodischen zu nichtperiodischen Schwingungen wird aus der diskreten Darstellung eine kontinuierliche. Das heißt, dass zur Darstellung nichtperiodischer Funktionen Sinusfunktionen, deren Kreisfrequenzen ω ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz ω_0 darstellen, nicht mehr ausreichen.

Stattdessen sind unendlich viele Sinusfunktionen mit allen reellen Frequenzen ω notwendig. Da die Beträge der komplexen Amplituden F_k für $T_0 \rightarrow \infty$ immer kleiner werden, ist es deutlich angenehmer mit der auf die Frequenz bezogenen Amplitude $F(jn\Omega_0)$ nach Gleichung (3.67) zu rechnen.

$$F(jn\Omega_0) = \frac{F_n}{f_0} = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (3.67)$$

Mit der folgenden Betrachtung für $T_0 \rightarrow \infty$.

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \rightarrow d\omega \text{ und } n\omega_0 \rightarrow \omega \quad (3.68)$$

Entsprechend sieht die Fourier-Transformation für nicht periodische Schwingungen aus.

$$F(jn\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.69)$$

Die entsprechende Rücktransformation aus dem Frequenzbereich in den Zeitbereich lässt sich mit Gleichung (3.70) darstellen.

$$f(\omega t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} F(j\Omega) e^{j\omega t} dj\Omega \quad (3.70)$$

Die Funktionen $f(\omega t)$ und $F(j\Omega)$ sind eindeutig einander zugeordnet. Die Überführung vom Zeitbereich in den Frequenzbereich und umgekehrt erfolgt durch die Fourier Transformation bzw. die Fourier- Rücktransformation, die mit \mathcal{F} bzw. \mathcal{F}^{-1} abgekürzt werden.

Dies lässt sich wie folgt erläutern.

$$F(j\Omega) = \mathcal{F}\{f(\omega t)\}$$

$$f(\omega t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(j\Omega)\}$$

Die Fourier-Transformation zeigt, dass nichtperiodische Signale als Summe sinusförmiger Signale dargestellt werden können, wobei alle Frequenzen $\omega = -\infty \dots \infty$ vorkommen können. Amplitudenspektrum und Phasenspektrum sind kontinuierlich, nach [7] und [12].

3.7 Experimentelle Modalanalyse

3.7.1 Bestimmung der Systemkennfunktion

Die experimentelle Modalanalyse ist eine spezielle und häufig eingesetzte Art der Schwingungsanalyse. Sie dient zur Bestimmung der Modalparameter Eigenfrequenzen, Dämpfung und Eigenvektoren der verschiedenen Schwingungsformen.

Grundsätzlich wird bei der experimentellen Modalanalyse das Schwingungsverhalten des zu untersuchenden Körpers nach einem Kraftimpuls untersucht. Als Impulsgeber werden unter anderem Modalhämmer genutzt. Für die Messung der Schwingungen werden triaxiale Beschleunigungssensoren verwendet.

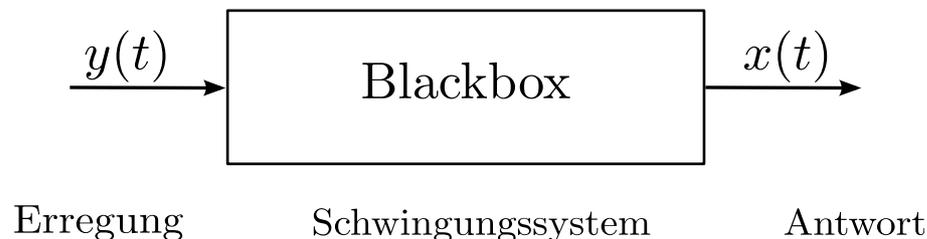


Abbildung 3.14: Systemkennfunktion als Blackbox Darstellung

Für den zu untersuchenden Körper muss schwingungsfähig sein. Das Schwingverhalten des Systems muss als zeitinvariant, stabil, kausal und linear angenommen werden können. Desweiteren muss es über eine endliche Zahl an Freiheitsgraden verfügen.

Für die weitere Betrachtung soll zunächst das zu untersuchende System abstrahiert werden. Dazu dient die Vorstellung der sogenannten „Blackbox“ nach Abbildung 3.14. Die Anregung des Systems ist der Impulsstoß mit dem Modalhammer und die Antwort sind die Eigenschwingungen des Systems.

Für dieses reale System, wird nun ein mechanisches Modell erzeugt. Die Beschreibung dieses Modelles bei der experimentellen Modalanalyse im Frequenzbereich. Dazu muss als erstes die Übertragungsfunktion bestimmt werden. Im Folgenden werden die theoretischen Grundlagen für die Bestimmung und Ermittlung der Übertragungsfunktion näher erläutert.

3.7.2 Bestimmung der Gewichtungsfunktion

Die Gewichtungsfunktion $h_{\mu v}(t)$ ist die Zuordnung der Systemerregungsstellen v der Kraft- oder Momenteneinleitung zu der jeweiligen Systemantwortsstelle μ im Zeitbereich. Dies soll Abbildung 3.15 darstellen.

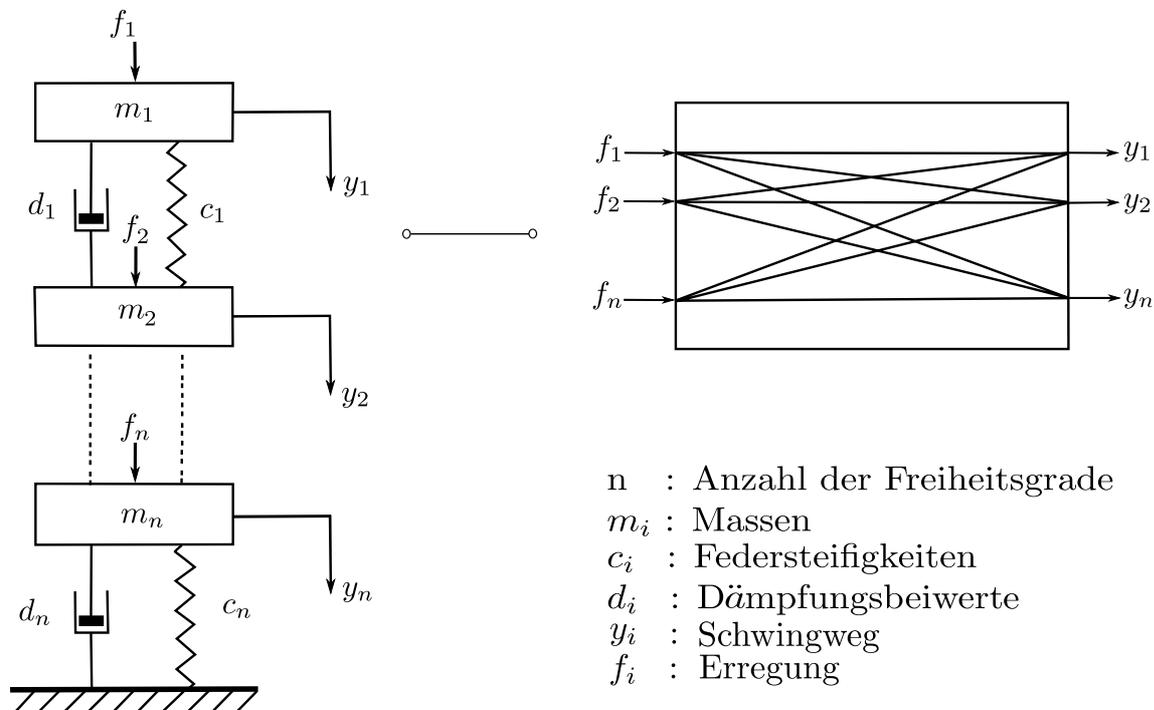


Abbildung 3.15: Gewichtungsfunktion, nach [7]

Für die weitere Untersuchung der Gewichtungsfunktion, wird zunächst der Faltungssatz mit dem Faltungsintegral nach Gleichung (3.71), sowie die Duhamelsche Integralgleichung (3.72) eingeführt.

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t-t^*) dt^* = f_1(t-t^*) f_2(t) dt^* = f_1(t) * f_2(t) \quad (3.71)$$

$$y(t) = \int_0^t h(t^*) f(t-t^*) dt^* = h(t) * f(t) \quad (3.72)$$

Mit $*$ als Faltungsoperator und t^* als Impulszeit.

Durch die Abbildung 3.15 wird deutlich, dass der Schwingweg von $y_{\mu}(t)$ sich durch Anwendung der Faltung nach Gleichung (3.72) der jeweiligen Gewichtungsfunktion $h(t)$ mit der Erregung f_v und anschließender Überlagerung zu Gleichung (3.73) ergibt.

$$y_{\mu}(t) = \int_0^t h_{\mu 1}(t^*) f_1(t-t^*) dt^* + \int_0^t h_{\mu 2}(t^*) f_2(t-t^*) dt^* + \dots + \int_0^t h_{\mu n}(t^*) f_n(t-t^*) dt^* \quad (3.73)$$

Entsprechend ergibt sich für das gesamte System mit n Freiheitsgraden folgende Matrize:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

Dies lässt sich auch wie folgt in Kurzform schreiben.

$$\mathbf{y} = \int_0^t \mathbf{P}(t^*) f(t - t^*) dt^* = \mathbf{P} * \mathbf{f} \quad (3.75)$$

Mit der Impulsmatrix \mathbf{P} , dem Faltungsoperator $*$ und der Impulszeit t^* . [7][2]

3.7.3 Bestimmung der Übertragungsfunktion

Die Grundlage der experimentellen Modalanalyse ist die Bestimmung der Übertragungsfunktion $H_{\mu\nu}(j\Omega)$, welche das Verhältnis zwischen der Systemantwort und der Erregung des Systems darstellt.

Die Übertragungsfunktion $H_{\mu\nu}(j\Omega)$ ist definiert als das Verhältnis der Fourier transformierten Ausgangsgröße $X(j\Omega)$ zur Fourier transformierten Eingangsgröße $Y(j\Omega)$ und liefert somit den Zusammenhang im Bildbereich nach [4].

$$H_{\mu\nu}(j\Omega) = \frac{\text{Fourier - Spektrum des Ausgangssignals}}{\text{Fourier - Spektrum des Eingangssignals}} = \frac{X(j\Omega)}{Y(j\Omega)} \quad (3.76)$$

Die Approximation mittels einer gebrochen rationalen Funktion liefert folgenden Zusammenhang.

$$H_{\mu\nu}(j\Omega) = \frac{a_0 + a_1 j\omega + a_2 j\omega^2 + \dots + a_k p^k}{b_0 + b_1 j\omega + b_2 j\omega^2 + \dots + b_m j\omega^m} \quad (3.77)$$

Für mechanische Systeme gilt $k < m$, $m = 2n$. Der Grad des Nennerpolynoms wird durch den Freiheitsgrad n des Systems festgelegt. Liegt das Interesse an den Pol- oder Nullstellen des Systems, so ist es möglich die Darstellung wie folgt in Produktform zu schreiben.

$$H_{\mu\nu}(j\Omega) = K_0 \frac{(j\omega - j\bar{\omega}_1)(j\omega - j\bar{\omega}_2)\dots(j\omega - j\bar{\omega}_l)}{(j\omega - j\omega_1)(j\omega - j\omega_2)\dots(j\omega - j\omega_m)} \quad (3.78)$$

Die Eigenwerte des Systems liegen an den Polstellen $j\omega_i$.

Wie Gleichung (3.78) zeigt, ist die Übertragungsfunktion bis auf den Faktor K_0 eindeutig durch ihre Null- und Polstellen bestimmt. Da die Koeffizienten der Übertragungsfunktion stets reell sind, sind die Pole auch stets reell oder paarweise konjugiert komplex. Die Imaginärteile der Pole stellen die Eigenkreisfrequenzen des mechanischen Systems dar.

Der Realteil der Pole ist bei stabilen Systemen stets negativ und bestimmt die zeitliche Abnahme der Schwingungsamplitude (modale Dämpfung). Dagegen ist ein positiver Realteil auf eine Instabilität des Systems zurückzuführen, nach [7].

Unter Verwendung von Gleichung (3.75) und unter Anwendung der Fourier Transformation, führt dies auf

$$\mathbf{Y}(j\Omega) = \mathbf{H}(j\Omega) \mathbf{F}(j\Omega). \quad (3.79)$$

mit der entsprechenden Übertragungsfunktionsmatrix:

$$\mathbf{H}_{\mu\nu}(j\Omega) = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & \cdots & H_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ H_{n1} & H_{n2} & \cdots & H_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

Da diese Matrix symmetrisch und quadratisch ist, folgt hieraus

$$H_{\mu\nu}(j\Omega) = H_{\nu\mu}(j\Omega). \quad (3.81)$$

Dieses kann auch für den Zeitbereich übernommen werden.

$$h_{\mu\nu}(t) = h_{\nu\mu}(t) \quad (3.82)$$

Im Bildbereich wird das Mehrfreiheitsgradsystem (MDOF) durch die Übertragungsfunktionsmatrix (3.80) beschrieben, wobei ein Element das Übertragungsverhalten zwischen der Antwortstelle μ und der Erregerstelle ν kennzeichnet.

Mit den Komponenten der Übertragungsmatrix $\mathbf{H}_{\mu\nu}(j\Omega)$ nach Gleichung (3.81) können die modalen Parameter des Systems bestimmt werden. Da alle hierfür notwendigen Informationen in einer Zeile oder Spalte enthalten sind, genügt es, eine Zeile oder Spalte der Matrix zu bestimmen. Aus diesem Grund ist die Anregung des Systems nur an einer Stelle notwendig, nach [2] und [7].

3.7.4 Graphische Darstellung der Übertragungsfunktion im Frequenzliniendiagramm

Das Frequenzkennliniendiagramm, auch Bode-Diagramm (Abbildung 3.16) genannt, umfasst die getrennte Darstellung von Betrag und der Phase der Übertragungsfunktion in Abhängigkeit von der Frequenz.

Auf der Abszisse wird die Frequenz in Hz aufgetragen. Die Ordinate wird im Allgemeinen linear geteilt und der Amplitudenfrequenzgang in Dezibel aufgetragen. Wobei sich der in Dezibel angegebene Betrag $|H|$ dB aus dem Betrag $|H_{\mu n}(j\Omega)|$ des Frequenzganges berechnen lässt, nach [12].

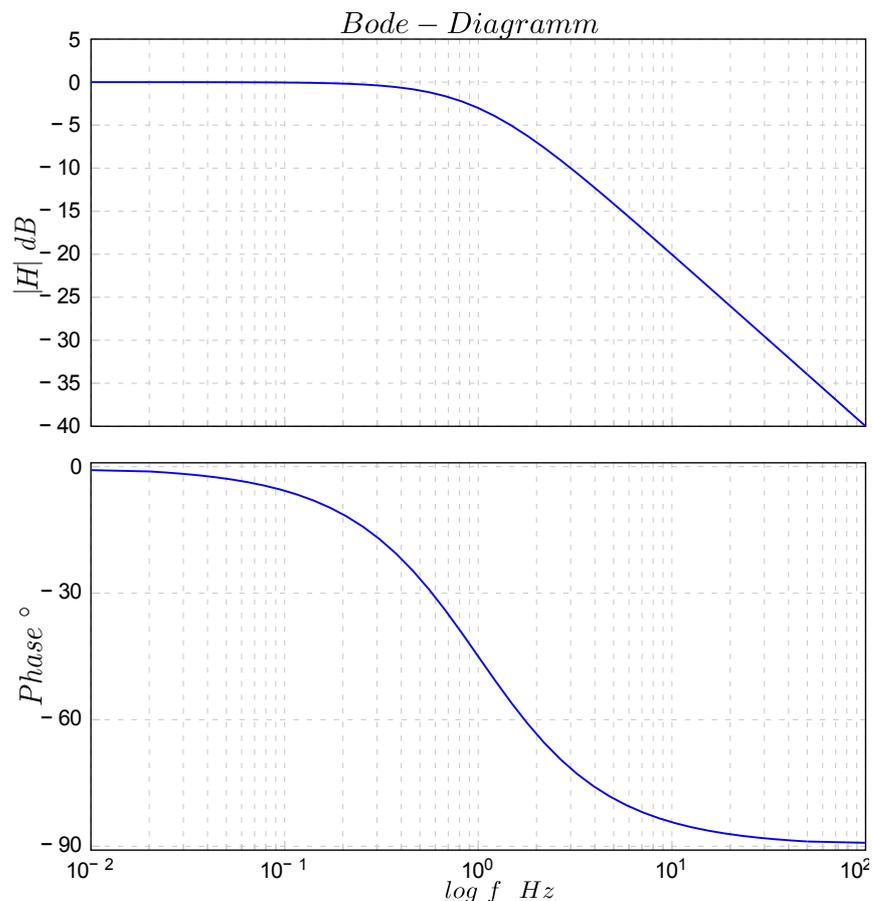


Abbildung 3.16: Amplitudenfrequenzgang im oberen Teil des Diagramms und Phasenfrequenzgang im unteren

Der Amplitudenfrequenzgang wird aus dem Betrag der komplexen Übertragungsfunktion mit der folgenden Gleichung berechnet.

$$|H_{\mu n}(j\Omega)| = H_{\mu n}(\Omega) = \sqrt{(\operatorname{Re}H_{\mu n}(j\Omega))^2 + (\operatorname{Im}H_{\mu n}(j\Omega))^2} \quad (3.83)$$

Für die Darstellung nach Bode, muss der Betrag des Amplitudenfrequenzgangs logarithmiert werden.

$$|H|_{dB} = 20 \log_{10}|H| \quad (3.84)$$

Der Phasenfrequenzgang ist die Darstellung der Phase als Funktion der Frequenz und wird mit nachfolgenden Gleichung bestimmt, nach [4].

$$\tan \varphi(\Omega) = -\frac{\text{Im}H_{\mu n}(j\Omega)}{\text{Re}H_{\mu n}(j\Omega)} \quad (3.85)$$

3.7.5 Der Dirac-Impuls

Die experimentelle Modalanalyse basiert auf der Untersuchung des freien Schwingungsverhaltens der Struktur nach einem Kraftimpuls $f_n(t)$ zum Zeitpunkt $t=0$. Der dabei mit einem Impulshammer erzeugte normierte Kraftimpuls kann näherungsweise durch einen Dirac-Impuls nach Gleichung (3.86) ersetzt werden. Für die Diracfunktion, auch Einheits-Stoßfunktion genannt, gilt bis auf den Punkt der Stoßanregung $f(t) = 0$. Die Ausnahme bildet ein kleines Zeitintervall $-\varepsilon \leq t \leq +\varepsilon$ in der Umgebung des Nullpunktes. Dies soll Abbildung 3.17 verdeutlichen.

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{für } t \neq 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(t) dt = 1 \quad (3.86)$$

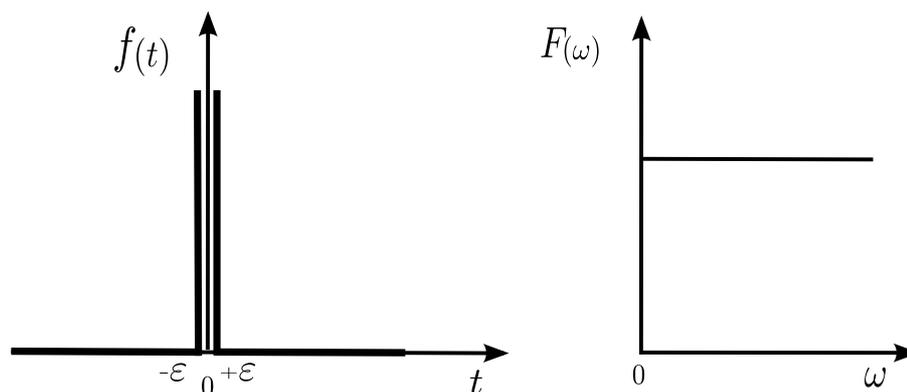


Abbildung 3.17: Dirac-Impuls im Zeitbereich(links) und im Bildbereich(rechts)

Das System wird vollständig durch die Impulsantwort $y_{\mu}(t)$ an den Stellen μ charakterisiert. Nach der Fourier Transformation kann sie durch Multiplikation der Fourier Transformierten Erregungsfunktion $\delta_v(t)$ mit der Übertragungsfunktion $H_{\mu v}(j\Omega)$ des Systems berechnet werden, nach [2].

$$Y_{\mu}(j\Omega) = H_{\mu v}(j\Omega) \mathcal{F}(\delta_v(t)) \quad (3.87)$$

3.7.6 Modal Assurance Criterion (MAC)

Eine in der Strukturdynamik übliche Methode zum Vergleich berechneter und gemessener Schwingungsformen ist das Aufstellen der sogenannten MAC-Matrix nach Gleichung (3.88). Die MAC-Matrix ist eine Rechteckmatrix, die so viele Spalten (**j**) hat, wie Eigenformen gemessen wurden und so viele Zeilen (**i**) hat, wie berechnete Eigenvektoren vorliegen. Jedes Element dieser Matrix stellt den Wert eines normierten Skalarproduktes von einem gemessenen Eigenvektor v_{je} und einem berechneten Eigenvektor v_{io} dar, womit die Korrelation zwischen diesen beiden Vektoren bewertet wird.

$$MAC(i, j) = \frac{(v_{je}^T v_{io})^2}{(v_{je}^T v_{je})(v_{io}^T v_{io})} \quad (3.88)$$

Das Matrizelement ist ein Maß für die Übereinstimmung zwischen den Vektoren v_{je} und v_{io} . Wenn diese beiden Vektoren übereinstimmen, dann ist das Matrizelement gleich eins, falls die beiden Vektoren zueinander orthogonal sind, ist es null. Praktisch haben die Matrizelemente Werte zwischen null und eins, weil die betrachteten Vektoren keine idealen Bedingungen erfüllen. Erfahrungsgemäß besteht bei einem Matrizelement $MAC(i, j) < 0,3$ zwischen den beiden Vektoren kaum eine Korrelation, aber bei $MAC(i, j) > 0,8$ (Abbildung 3.18) stimmen der berechnete und der gemessene Eigenvektor mit hoher Wahrscheinlichkeit überein.

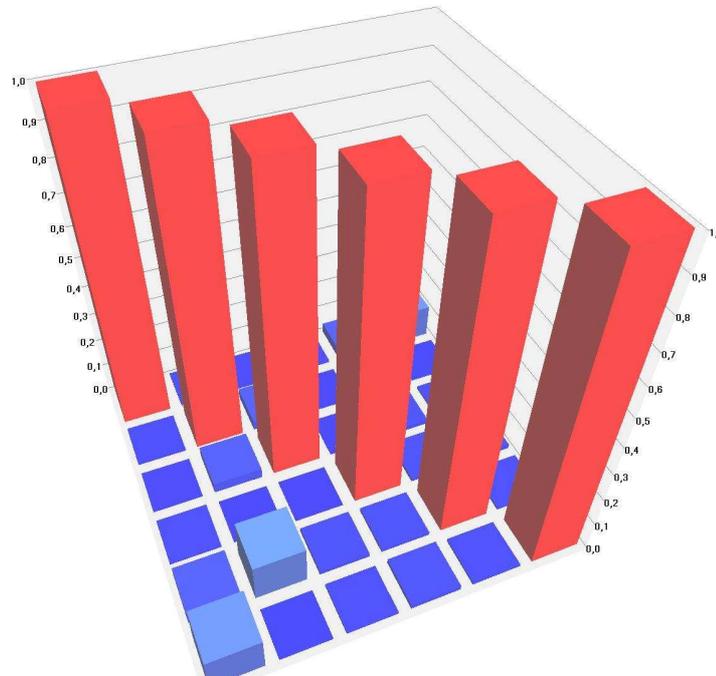


Abbildung 3.18: Modal Assurance Criterion MAC - Matrix

Die MAC-Matrix ist auch geeignet, um Eigenvektoren dicht benachbarter Eigenfrequenzen zu unterscheiden, nach [5]. Der MAC-Vergleich von Versuch und Simulation, bzw. die Berechnung führt somit auf eine Matrix, deren Hauptdiagonalelemente im Sinne einer guten Korrelation möglichst einen Betrag nahe 1 haben sollten, nach [2].

3.8 Berechnungsmodelle

3.8.1 Zweidimensionales Berechnungsmodell

3.8.1.1 Berechnung der Eigenfrequenzen und Eigenvektoren

Das Modell nach Abbildung 3.19 kann wie folgt analytisch untersucht werden. Die notwendigen Gleichungen liefert das dynamische Grundgesetz. Für die translatorische Bewegung dient der Schwerpunktsatz nach Gleichung (3.89), für ein rotatorisch linksdrehendes System der Momentensatz nach Gleichung (3.90).

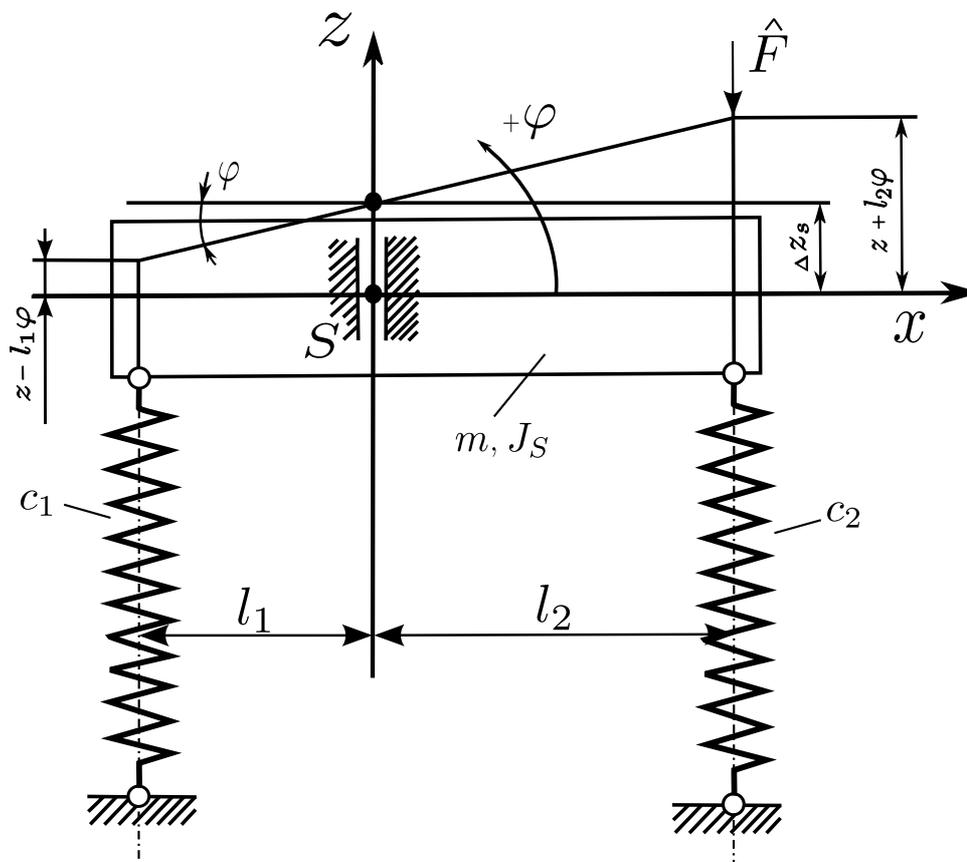


Abbildung 3.19: Zweidimensionales Modell nach [10]

$$m \ddot{z} = \Sigma(F) = -c_1 z_1 - c_2 z_2 - \hat{F}_1 \quad (3.89)$$

$$J_y \ddot{\varphi} = \Sigma(M) = -\hat{M} - c_2 z_2 l_2 + c_1 z_1 l_1 \quad (3.90)$$

Mit der Linearisierung des Systems für kleine Auslenkungen ($\sin \varphi \approx \varphi$) lassen sich folgende Beziehungen herstellen.

$$F_{c_1} = c_1(z - l_1 \varphi) \quad (3.91)$$

$$F_{c_2} = c_2(z + l_2 \varphi) \quad (3.92)$$

$$\hat{M} = \hat{F} l_2 \quad (3.93)$$

Die Bewegungsdifferentialgleichungen für das System lauten dem entsprechend:

$$\ddot{z} + \frac{c_1 + c_2}{m} z - \frac{c_1 l_1 - c_2 l_2}{m} \varphi = -F(t) \quad (3.94)$$

$$\ddot{\varphi} - \frac{c_1 l_1 - c_2 l_2}{J_y} z + \frac{c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2}{J_y} \varphi = -M(t) \quad (3.95)$$

Für die weitere Berechnung bietet sich die Matrizen Schreibweise an.

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_1 l_1 - c_2 l_2 \\ -c_1 l_1 - c_2 l_2 & c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F(t) \\ -M(t) \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (3.97)$$

Bei genauer Betrachtung der Steifigkeitsmatrix \mathbf{C} wird deutlich, dass die Matrizen-elemente $\mathbf{C}(1,2)$ und $\mathbf{C}(2,1)$ identisch sind. Hierdurch ergibt sich eine Abhängigkeit der Freiheitsgrade. Die Bewegungen sind miteinander gekoppelt. In der Literatur werden diese Elemente als Koppelungsfaktoren betitelt. Eine Entkoppelung und somit eine getrennte Betrachtung der Freiheitsgrade findet unter der folgenden Voraussetzung statt.

$$c_1 l_1 - c_2 l_2 = 0 \quad (3.98)$$

Nur dann können die Bewegungsgleichungen voneinander getrennt untersucht werden.

Da für die Berechnung der Eigenfrequenzen des Systems die Erregung und somit die Impulskraft keinen Einfluß hat, wird diese vorerst nicht weiter berücksichtigt. Um die Eigenfrequenzen zu bestimmen, wird der Lösungsansatz der folgenden Exponentialfunktion genutzt.

$$u(t) = \hat{u} e^{j\omega t} \quad (3.99)$$

Mit dem Einsetzen in Gleichung (3.97) ergibt sich:

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{C}) \hat{u} e^{j\omega t} = 0. \quad (3.100)$$

Da die Exponentialfunktion zu jeder Zeit ungleich Null ist, sind nur die Lösungen von Interesse, wenn die Determinante im Klammerausdruck zu Null wird. Der Amplitudenvektor muss ungleich Null sein, da sonst das System nicht schwingt.

$$\det(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{C}) = 0 \quad (3.101)$$

$$\det \begin{bmatrix} (c_1 + c_2) - m\omega^2 & -c_1 l_1 - c_2 l_2 \\ -c_1 l_1 - c_2 l_2 & (c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2) - J_y \omega^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.102)$$

Durch das Lösen des Gleichungssystems werden die Eigenfrequenzen ω_1 und ω_2 des Systems bestimmt und wie folgt geordnet $\omega_1 < \omega_2$. Die Schwingformen, werden durch die Eigenvektoren des Systems berechnet.

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{C}) \hat{u} = 0 \quad (3.103)$$

Hieraus folgt:

$$\underline{u}_1 = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix} \quad \underline{u}_2 = \begin{bmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{bmatrix}$$

Ergebnisse mit gleichem Vorzeichen liefern die translatorische Schwingform. Ergebnisse mit gegensätzlichem Vorzeichen liefern die rotatorische Schwingform.

3.8.1.2 Bestimmung des Amplitudenfrequenzgangs

Bei dem Amplitudenfrequenzgang handelt es sich um eine Frequenzgangmatrix. Diese Matrix umfasst vier Frequenzgänge, die die Auslenkungsamplituden \hat{u}_1 und \hat{u}_2 in den Koordinaten \underline{u}_1 und \underline{u}_2 in Abhängigkeit von der möglichen Kraftamplitude abbilden.

In komplexer Schreibweise formuliert mit dem Lösungsansatz nach Gleichung (3.99) lautet:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} = \hat{f}e^{j\omega t} \quad (3.104)$$

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{C}) \hat{u} e^{j\omega t} = \hat{f} e^{j\omega t} \quad (3.105)$$

Damit ergibt sich der Frequenzgang und somit die Relation zwischen Auslenkungsamplituden und Anregungsamplitude.

$$H(j\omega) = \frac{\hat{u}}{\hat{f}} = (-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{C})^{-1} \quad (3.106)$$

Die Lösung wird durch die Invertierung der Matrix bestimmt.

$$H(j\omega) = \frac{1}{\det(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{C})} \begin{bmatrix} (c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2) - J_y \omega^2 & c_1 l_1 + c_2 l_2 \\ c_1 l_1 + c_2 l_2 & (c_1 + c_2) - m \omega^2 \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

Die Frequenzgangmatrix lautet somit:

$$H(j\omega) = \begin{bmatrix} H(1,1) & H(1,2) \\ H(2,1) & H(2,2) \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

Aufgrund der Koppelung der Freiheitsgrade bei diesem System, sind die Frequenzgänge $F(1,2)$ und $F(2,1)$ identisch.

Die nachfolgende graphische Abbildung 3.20 zeigt die komplexen Amplitudenausgänge des Koppelschwingers über den Frequenzverlauf.

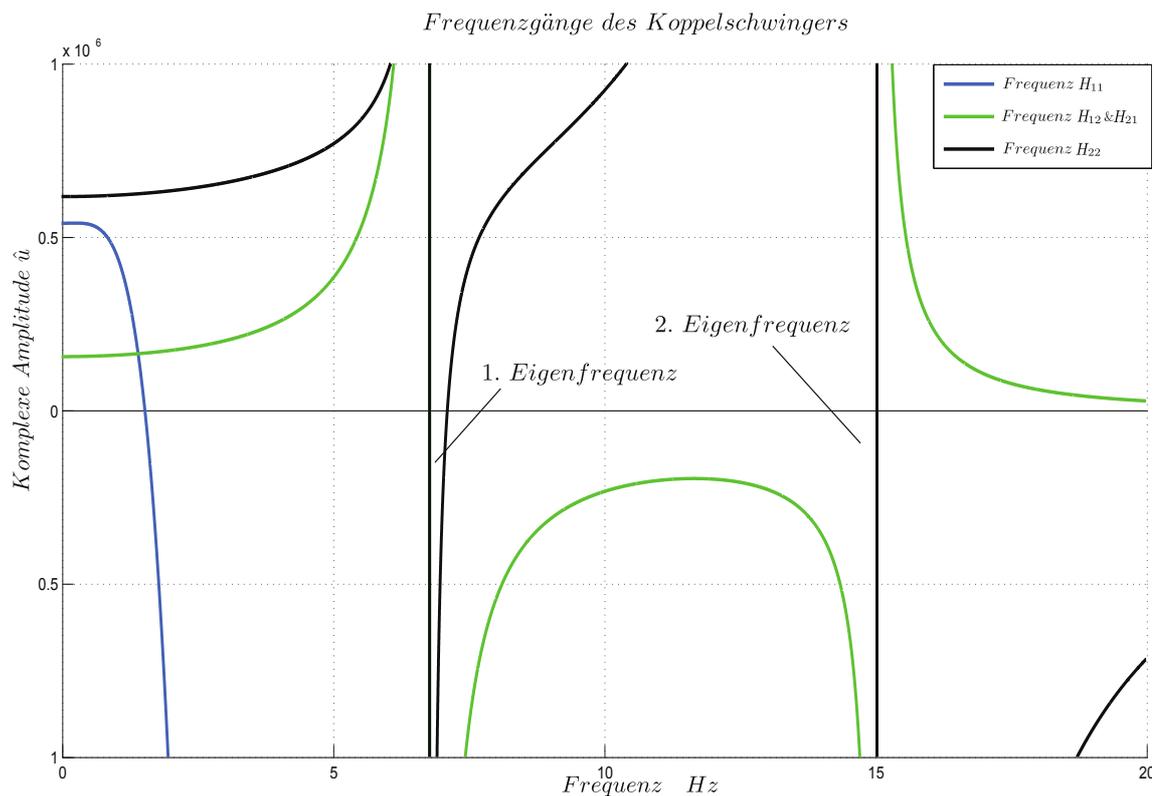


Abbildung 3.20: Frequenzgang des Koppelschwingers

Die Polstellen des Graphen stellen die Eigenfrequenzen des Systems dar. Die Darstellung entspricht dem mathematischen idealen Modell welches hier vorab untersucht wurde.

Bei einer experimentellen Messung ist der graphische Verlauf nicht so glatt wie bei dem mathematisch idealen Modell. Die Eigenfrequenzen des Systems lassen sich an den Polstellen leicht finden, nach [17].

3.8.2 Dreidimensionales Berechnungsmodell

Das dreidimensionale Berechnungsmodell und die damit verbundene Problemstellung ist nahezu analog zu der zweidimensionalen. Die Anzahl der Gleichungen erhöht sich entsprechend mit der Anzahl der Freiheitsgrade.

3.8.2.1 Bestimmung der Bewegungsgleichungen

Das Berechnungsmodell nach Abbildung 3.21 wird für die erste Untersuchung als vollständig symmetrisch angenommen, desweiteren wird die Dämpfung vernachlässigt. Die Koordinaten x, y, z legen die drei translatorischen und $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ die drei rotatorischen Freiheitsgrade fest.

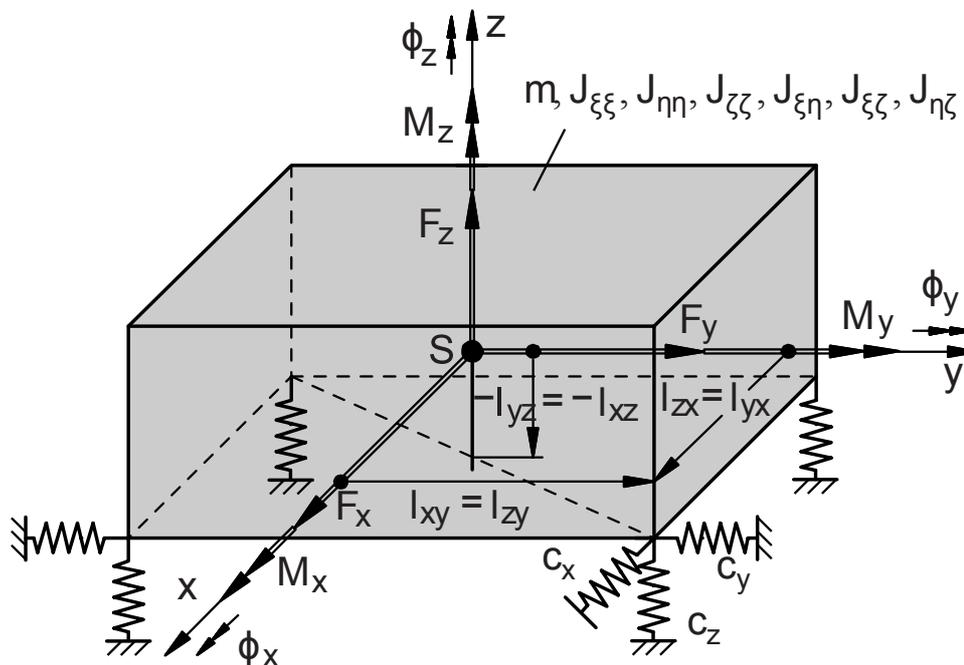


Abbildung 3.21: Dreidimensionales Berechnungsmodell nach [5]

Für die weitere Erörterung bietet sich die Zusammenfassung sämtlicher Koordinaten in den folgendem Vektor \mathbf{u} an.

$$\ddot{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\varphi}_x \\ \ddot{\varphi}_y \\ \ddot{\varphi}_z \end{bmatrix}^T \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{bmatrix}^T \quad (3.109)$$

Zur Aufstellung der sechs Bewegungsgleichungen dienen die Lagrangschen Gleichungen, diese haben gegenüber der Darstellung von Newton und Euler den Vorteil das

System nicht freischneiden zu müssen um die Reaktionskräfte bestimmen zu können. Die Lagrange-Funktion $L = L(\dot{z}, z)$ nach Gleichung (3.110) ist die Differenz der kinetischen Energie $T = T(\dot{z}, z)$ und der potenziellen Energie $U = U(z)$, nach [11].

$$L(\dot{z}, z) = T(\dot{z}, z) - U(z) \quad (3.110)$$

In die Bewegungsgleichungen werden die Trägheitseigenschaften des Körpers mit der Masse m , die axialen Trägheitsmomente $J_{\xi\xi}, J_{\eta\eta}, J_{\zeta\zeta}$ und Deviationsmomente $J_{\xi\eta}, J_{\xi\zeta}, J_{\eta\zeta}$ berücksichtigt. Somit lässt sich das System mit der Bewegungsgleichung der 2. Art nach Lagrange wie folgt darstellen.

Die kinetische Energie des Systems lautet:

$$m_{kl} = m_{lk} = \frac{\partial^2 W_{kin}}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_l} \quad (3.111)$$

$$2W_{kin} = m(\dot{x} + \dot{y} + \dot{z}) + J_{\xi\xi} \dot{\varphi}_x^2 + J_{\eta\eta} \dot{\varphi}_y^2 + J_{\zeta\zeta} \dot{\varphi}_z^2 + 2J_{\xi\eta} \dot{\varphi}_x \dot{\varphi}_y + 2J_{\xi\zeta} \dot{\varphi}_x \dot{\varphi}_z + 2J_{\eta\zeta} \dot{\varphi}_y \dot{\varphi}_z \quad (3.112)$$

Die potenzielle Energie des Systems lautet:

$$c_{kl} = c_{lk} = \frac{\partial^2 W_{pot}}{\partial q_k \partial q_l} \quad (3.113)$$

$$2W_{pot} = \sum_{cx} (x + \varphi_y l_{xz} - \varphi_z l_{xy})^2 + \sum_{cy} (y - \varphi_x l_{yz} + \varphi_z l_{yx})^2 + \sum_{cz} (z + \varphi_x l_{zy} - \varphi_y l_{zx})^2 \quad (3.114)$$

Die kinetische Energie enthält die Trägheitseigenschaften des Systems, die potenzielle Energie die Federsteifigkeiten. In Matrixschreibweise kann die Bewegungsgleichung wie folgt zusammengefasst werden.

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (3.115)$$

In Gleichung (3.115) ist \mathbf{f} der Erregerkraftvektor.

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

Die Massen- und die Steifigkeitsmatrix nehmen folgende Form an.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{\xi\xi} & J_{\xi\eta} & J_{\xi\zeta} \\ 0 & 0 & 0 & J_{\eta\xi} & J_{\eta\eta} & J_{\eta\zeta} \\ 0 & 0 & 0 & J_{\zeta\xi} & J_{\zeta\eta} & J_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 & c_{15} & c_{16} \\ 0 & c_{22} & 0 & c_{24} & 0 & c_{26} \\ 0 & 0 & c_{33} & c_{34} & c_{35} & 0 \\ 0 & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & 0 & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & 0 & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

Die Elemente der Steifigkeitsmatrix sind nachfolgend aufgelistet.

$$\begin{aligned} c_{11} &= \Sigma c_x & c_{15} &= c_{51} = \Sigma c_x l_{xz} & c_{16} &= c_{61} = -\Sigma c_x l_{xy} \\ c_{22} &= \Sigma c_y & c_{24} &= c_{42} = \Sigma c_y l_{yz} & c_{26} &= c_{62} = -\Sigma c_y l_{yx} \\ c_{33} &= \Sigma c_z & c_{34} &= c_{43} = \Sigma c_z l_{zy} & c_{35} &= c_{53} = -\Sigma c_z l_{zx} \\ c_{44} &= \Sigma c_y l_{yz}^2 + \Sigma c_z l_{zy}^2 & c_{45} &= c_{54} = -\Sigma c_z l_{zx} l_{zy}, \\ c_{46} &= c_{64} = -\Sigma c_y l_{yx} l_{yz} & c_{55} &= \Sigma c_x l_{xz}^2 + \Sigma c_z l_{zx}^2 \\ c_{56} &= c_{65} = -\Sigma c_x l_{xy} l_{xz} & c_{66} &= \Sigma c_x l_{xy}^2 + \Sigma c_y l_{yx}^2 \end{aligned} \quad (3.118)$$

3.8.2.2 Berechnung der Eigenfrequenzen

Wie bereits in Kapitel 3.8.1.1 erwähnt, hat der Kraftvektor keinen Einfluß auf die Eigenkreisfrequenzen des Systems und wird daher für die Berechnung der Eigenfrequenzen nicht berücksichtigt.

In Analogie zum zweidimensionalen Berechnungsmodell folgt hier ebenfalls der Lösungsansatz mit der Exponentialfunktion.

$$u(t) = \hat{u} e^{j\omega t} \quad (3.119)$$

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{C}) \hat{u} e^{j\omega t} = 0 \quad (3.120)$$

Somit folgt aus Gleichung (3.120) mit dem Ansatz (3.119) das Eigenwertproblem.

$$\det(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{C}) = 0 \quad (3.121)$$

Bei einem symmetrischen Körper sind die Deviationsmomente null und die körperfesten Achsen, sind die Hauptträgheitsachsen. Wenn zugleich die Federn symmetrisch angeordnet sind, gelingt es die Bewegungsgleichungen voneinander zu entkoppeln.

Durch die Symmetrie werden bestimmte Federzahlen zu null, da die Abstände der Federn vorzeichenbehaftet in die Rechnung eingehen.

Für den Fall, dass $c_{16} = c_{26} = c_{34} = c_{35} = c_{36} = c_{45} = c_{46} = c_{56} = 0$ ist, entstehen aus Gleichung (3.115) zwei voneinander unabhängige Matrixgleichungen.

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J_{\eta\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\varphi}_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & c_{15} \\ 0 & c_{33} & 0 \\ c_{15} & 0 & c_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \\ \varphi_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.122)$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & J_{\xi\xi} & 0 \\ 0 & 0 & J_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\varphi}_x \\ \ddot{\varphi}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{22} & c_{24} & 0 \\ c_{24} & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \varphi_x \\ \varphi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.123)$$

Die Lösung der Gleichungssysteme liefert die Ergebnisse der Eigenfrequenzen des Systems. Die Berechnung der normierten Amplituden der Eigenformen ist simultan zu dem zweidimensionalen Berechnungsmodell und wird daher nicht weiter erörtert, nach [5].

3.8.3 Experimentelle Dämpfungsbestimmung

Für die Berechnung von Schwingungsverläufen werden meist diverse Parameter vorgegeben, die in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen. Allerdings ist dies meist eine Idealevorstellung, da diese Parameter in der Praxis durch experimentelle Versuche ermittelt werden müssen.

Für die Bestimmung der Dämpfung aus der Abklingkurve. Werden die Amplitudenausschläge $\hat{u}(t)$ und $\hat{u}(t + T_d)$ genutzt und in das Amplitudenverhältnis eingesetzt.

$$\frac{\hat{u}(t)}{\hat{u}(t + T_d)} = e^{\frac{D\omega_0^2 2\pi}{\omega_d}} \quad (3.124)$$

Durch Logarithmieren folgt

$$\ln\left(\frac{\hat{u}(t)}{\hat{u}(t + T_d)}\right) = D\omega_0^2 \frac{2\pi}{\omega_d} = \Lambda \quad (3.125)$$

Durch den folgenden Zusammenhang kann der Dämpfungsgrad bestimmt werden.

$$\Lambda = D\omega_0^2 \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi D}{\sqrt{1 - D^2}} \quad (3.126)$$

Bei erzwungenen gedämpften Schwingungen ist der Ausgangspunkt zur Bestimmung der Dämpfung eine Resonanzkurve, siehe hierzu Abbildung 3.22.

Ohne die Kenntnis der Erregerkraft wird mittels Anwendung der Halbwertsbreite, bzw. Resonanzbreite die Dämpfung bestimmt. Dazu müssen die Erregerkreisfrequenzen Ω_1 und Ω_2 nach Abbildung 3.22 bestimmt werden.

Dazu muß zunächst der maximale Schwingungsausschlag \hat{u} auf der Ordinate angetragen werden. Anschließend lässt sich mit Kenntnis der Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems ω_0 der Dämpfungsgrad nach Gleichung (3.127) bestimmen, nach [7].

$$D = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2\omega_0} \quad (3.127)$$

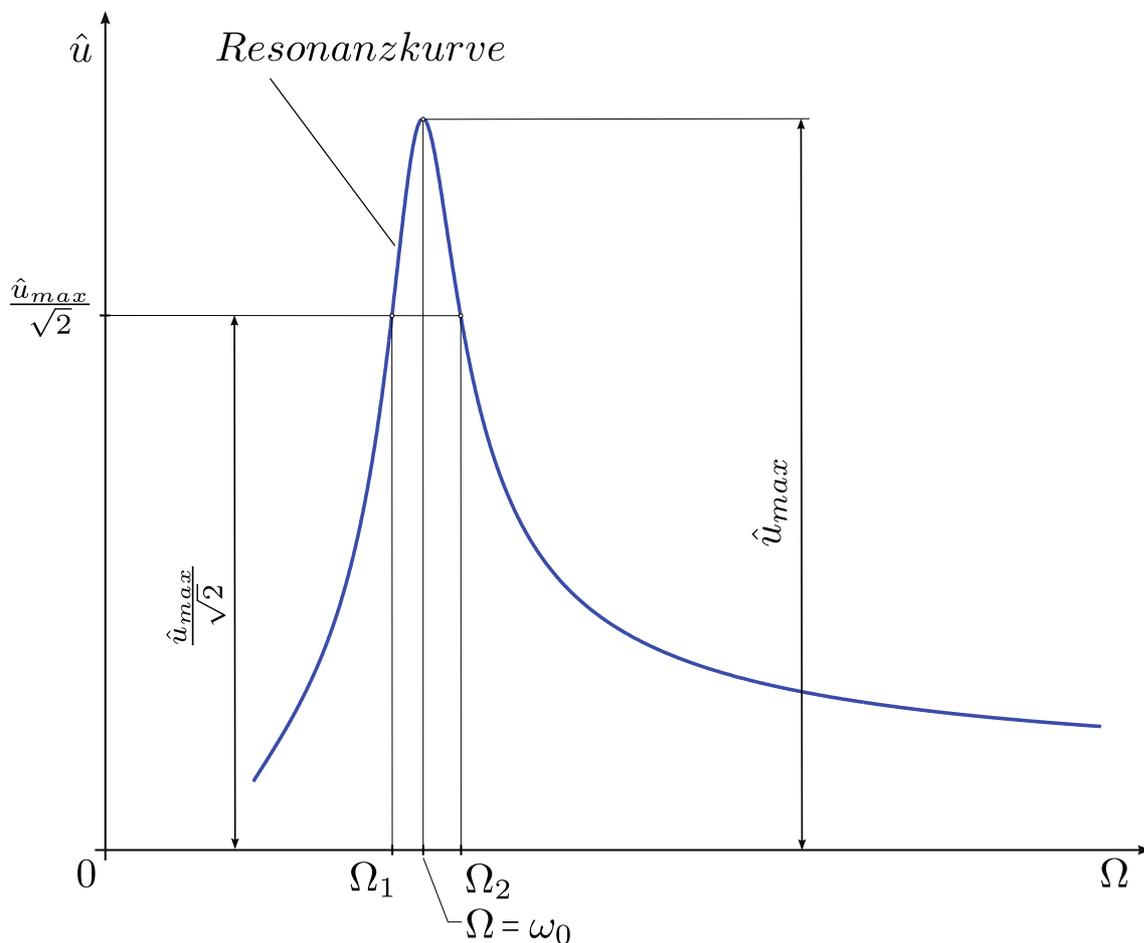


Abbildung 3.22: Experimentelle Bestimmung des Dämpfungsgrades, nach [7]

4 Versuchsvorbereitung und Versuchsdurchführung

Nachfolgend wird die Software für die simulatorische und experimentelle Versuchsvorbereitung und -durchführung vorgestellt. Die Simulationsmodelle, welche wegweisend für den Aufbau der Auswertesoftware mit MATLAB sind, werden je an einem Beispiel gezeigt. Sämtliche weitere befinden sich im Anhang.

4.1 Software für die simulatorische Versuchsvorbereitung und Versuchsdurchführung

4.1.1 Beschreibung SIMPACK

SIMPACK ist eine Mehr-Körper-Simulations (MKS) Software. Es wird genutzt um dynamisches Verhalten mechanischer Systeme zu analysieren. SIMPACK ist in der Lage mechanische Systeme zu analysieren und das Schwingungsverhalten, sowie Kräfte und Beschleunigungen zu berechnen.

Mit den analytischen Daten kann die Bewegung des Systems beschrieben werden. Beispielsweise ist es möglich einzelne Komponenten wie eine Getriebewelle bis hin zu kompletten Systemeinheiten wie Windkraftanlagen, Formel 1-Motoren und Gesamtfahrzeuge zu bewerten zu berechnen, siehe Abbildung (4.1).

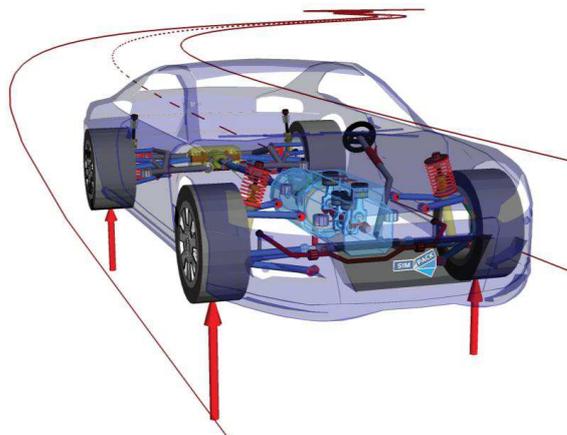


Abbildung 4.1: Beispiel eines SIMPACK - Modells[24]

Die Hauptfunktion von SIMPACK besteht darin, Bewegungsgleichungen für mechanische und mechatronische Systeme zu erstellen. Für die Simulation können unter

Anderem CAD-Modelle genutzt werden. Ebenso ist es möglich mit SIMPACK Modelle zu erstellen und diese entsprechend mit Kräften, Massen- und Trägheitskennwerten zu belegen und auszuwerten. Daher ist SIMPACK für die Erstellung von Simulationsmodellen bestens geeignet.

4.1.2 Beschreibung ME'Scope

Die ME'Scope Visual-Engineering-Series (VES) Software von Vibrant Technology ist ein professionelles Programmpaket zur Analyse von Schwingungen und für die Modalanalyse. Es ermöglicht die Darstellung und Dokumentation des statischen, dynamischen und akustischen Verhaltens von Maschinen und Strukturen.

Desweiteren ist es möglich analytische Daten, beispielsweise aus SIMPACK, einzulesen und zu verarbeiten. Die Messdaten ob experimenteller oder analytischer Basis, können als Daten aus dem Zeitbereich oder dem Frequenzbereich vorliegen. Eine Transformation, sowie eine inverse Transformation in den Frequenzbereich, bzw. in den Zeitbereich ist möglich, ebenso wie die Bildung der Übertragungsfunktion.

Mit der Modalanalyse ist es möglich die modalen Parameter Eigenfrequenzen, Dämpfung und Eigenvektoren zu bestimmen.

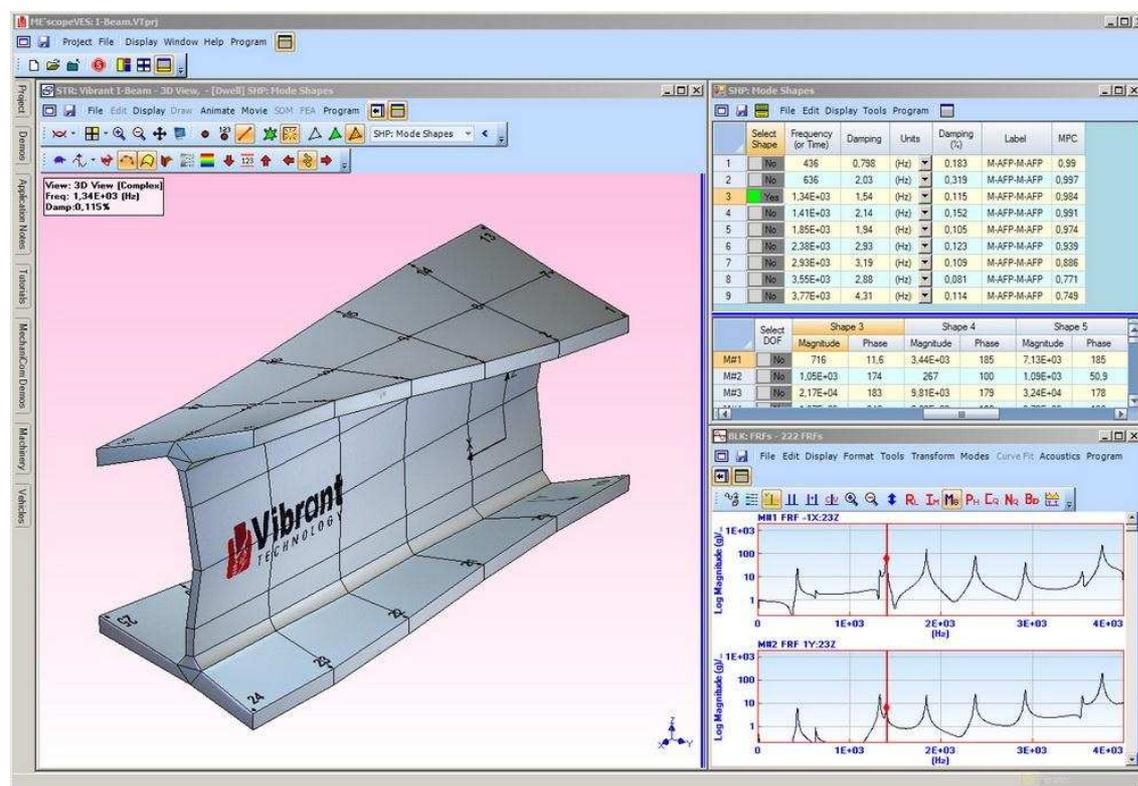


Abbildung 4.2: Beispiel einer Modalanalyse mit ME'Scope [23]

Für die visuelle Darstellung kann die zu untersuchende Struktur entweder graphisch generiert oder es können fotorealistische Modelle genutzt werden. Nach Durchführung der Modalanalyse ist eine Animierung der Eigenformen möglich.

Durch eine direkte Auswahl einer Eigenfrequenz, wird es ermöglicht die Eigenform

zu interpretieren, siehe hierzu Abbildung 4.2. Zur weiteren Bearbeitung können die Daten mit einer Textdatei exportiert werden.

4.1.3 Beschreibung MATLAB

MATLAB ist eine Programmierumgebung für die Entwicklung von Algorithmen, Datenanalysen, Visualisierungen und numerischen Berechnungen. Die MATLAB-Sprache unterstützt Vektor- und Matrizen-Operationen und ist damit für die Bewältigung wissenschaftlicher und technischer Probleme hervorragend geeignet.

Mathematische Funktionen für lineare Algebra, Statistik, Fourieranalyse, Filtern, Optimieren und numerische Integration sind bereits in MATLAB fest implementiert. MATLAB zeichnet sich durch eine hohe Entwicklungs- und Ausführungsgeschwindigkeit des Programmcodes aus.

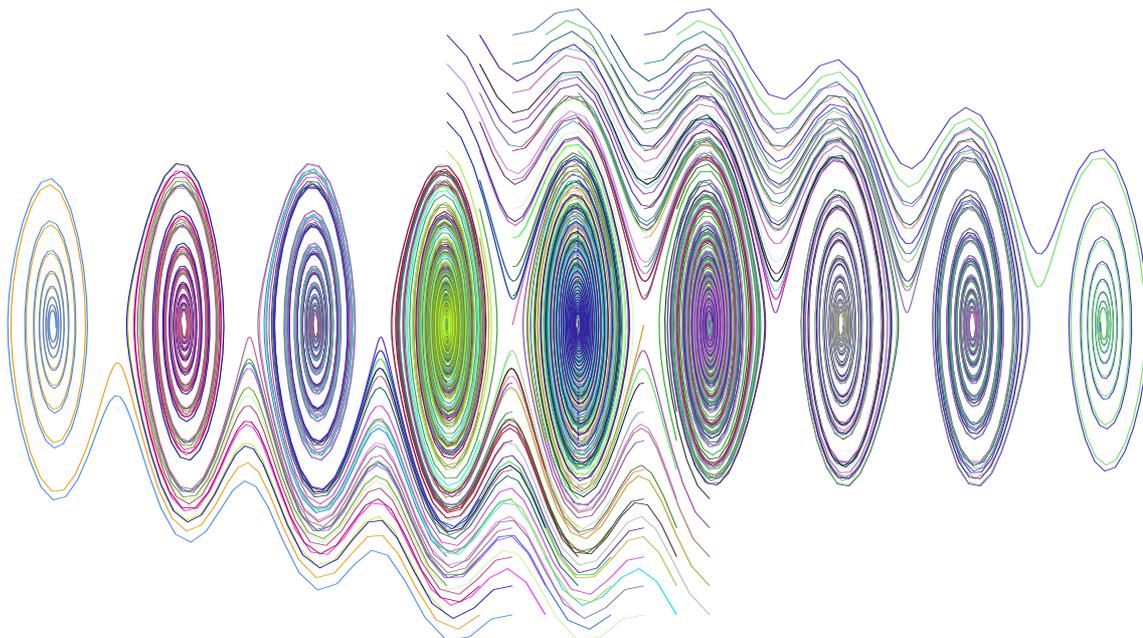


Abbildung 4.3: Graphische Darstellung eines Phasenportraits mit MATLAB

Die Programmierung erstreckt sich von der Generierung von Ablaufprogrammen (m-Files) bis hin zu der Erstellung von graphischen Benutzeroberflächen (GUI's). Es können arithmetische Operatoren, eine Ablaufsteuerung, Datenstrukturen, Datentypen und die objektorientierte Programmierung in die Programme integriert werden.

MATLAB bietet weiter die Möglichkeit einer Kommunikation mit externen Hardwaregeräten. So können beispielsweise Soundkarten oder Geräte, welche über eine serielle Schnittstelle verfügen, mit MATLAB kommunizieren.

Aufgrund dieser Eigenschaften von MATLAB eignet für die Erstellung von Programmen um die Problemstellung dieser Arbeit erfolgreich zu bewältigen.

4.2 Simulationsmodelle 2D

In diesem Abschnitt werden zwei der Simulationsmodelle, die mit SIMPACK erstellt wurden, vorgestellt. Beginnend mit einem Modell ohne Dämpfung (Variante 4). Darauf folgend eines mit Dämpfung (Variante 7), mit diesem sollte das reale Verhalten eines Körpers simuliert werden. Die Kennwerte der Modelle sind aus Gründen der Übersichtlichkeit in Tabellen zusammengefasst.

Die Modelle wurden ausgewählt, da diese die einzig verwertbaren Ergebnisse lieferten. Die Modelle Variante 1, 2 und 3, lieferten aufgrund falsch gesetzter Randbedingungen in SIMPACK, keine plausiblen Ergebnisse für Massenträgheitsmoment und Eigenkreisfrequenzen.

Die Modelle können sich translatorisch auf der z -Achse und rotatorisch um den Schwerpunkt bewegen. Die Modelle sind auf zwei Federn freischwingend gelagert. An den Positionen P_1 und P_2 sind Sensoren angebracht, welche die Beschleunigungen permanent aufzeichnen. Das System wurde am Punkt P_4 mit der Impulskraft $\hat{F}(t)$ angeregt und anschließend sich selbst überlassen.

4.2.1 Modell Variante 4

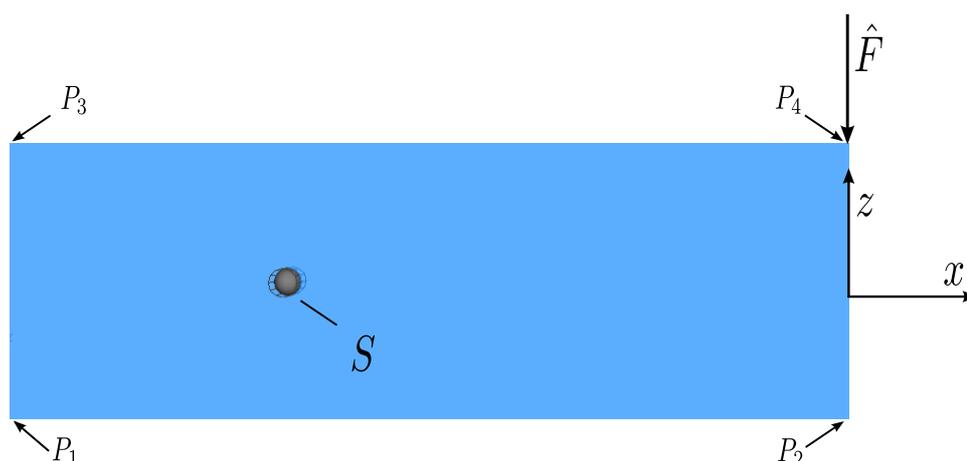


Abbildung 4.4: Simpack 2D-Simulationsmodelle

Tabelle 4.1: Kennwerte Simulationsmodell Variante 4

| Kennwert | Formelzeichen | Größe |
|-------------------------------|---------------|-------------|
| Abmaße mm | $x/y/z$ | 2500/0/250 |
| Schwerpunktskoordinaten mm | $x_s/y_s/z_s$ | -2000/0/125 |
| Masse kg | m | 2750 |
| Trägheitsmoment kgm^2 | J_S | 600 |
| Axiale Federsteifigkeit N/m | c_a | 1000000 |
| Impulskraft N | \hat{F} | 5000 |
| Impulsdauer s | t_i | 0.2 |
| Abtastrate Hz | f | 2000 |
| Messdauer s | t | 8 |
| Datenpunkte - | - | 16001 |

4.2.2 Modell Variante 7

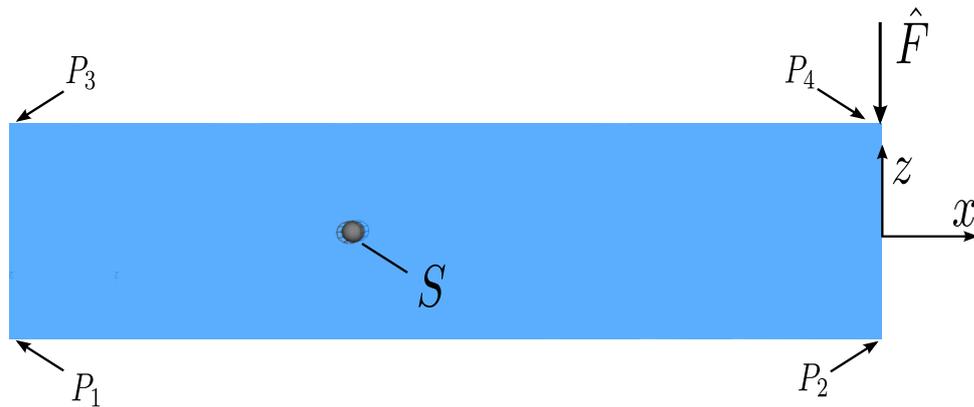


Abbildung 4.5: Simpack 2D-Simulationsmodell mit Dämpfung

Tabelle 4.2: Kennwerte Simulationsmodell Variante 7

| Kennwert | Formelzeichen | Größe |
|-------------------------------|---------------|-----------|
| Abmaße mm | $x/y/z$ | 500/0/80 |
| Schwerpunktskoordinaten mm | $x_s/y_s/z_s$ | -350/0/40 |
| Masse kg | m | 600 |
| Trägheitsmoment kgm^2 | J_S | 65 |
| Axiale Federsteifigkeit N/m | c_a | 1000000 |
| Dämpfungsbeiwert kg/s | d | 20 |
| Impulskraft N | \hat{F} | 5000 |
| Impulsdauer s | t_i | 0.2 |
| Abtastrate Hz | f | 2000 |
| Messdauer s | t | 8 |
| Datenpunkte - | - | 16001 |

4.3 Simulationsmodell 3D

Für die erste Untersuchung, wurde ein symmetrisches Modell gewählt. Mit der Zunahme der Freiheitsgrade von zwei auf sechs, verdreifachen sich auch die Anzahl der Gleichungen.

Die Anzahl der Messpositionen wurde von zwei auf vier erhöht. In Summe wurden aus drei aufgezeichneten Vektordaten, neununddreißig. Daher sollte ein symmetrischer Körper zunächst einen einfachen Einstieg ermöglichen.

Das Modell ist auf vier linearen Federn freischwingend gelagert. Translatorisch kann sich das Modell in jede Raumrichtung bewegen. Die Verdrehung um den körperfesten Schwerpunkt, entspricht der Rotation um die Hauptachsen.

Durch die Erhöhung der Freiheitsgrade werden die Federn nun auch radial belastet, dies wurde bereits in Kapitel 3.5 (20) erörtert.

Analog zu dem zweidimensionalen Modell wird an den Auflagepunkten die Beschleunigung aufgezeichnet. Verdeutlichen soll dies Abbildung 4.6.

Die Systemerregung findet an Position P_6 mit der Impulskraft $\hat{F}(t)$ statt. Anschließend wird das System sich selbst überlassen.

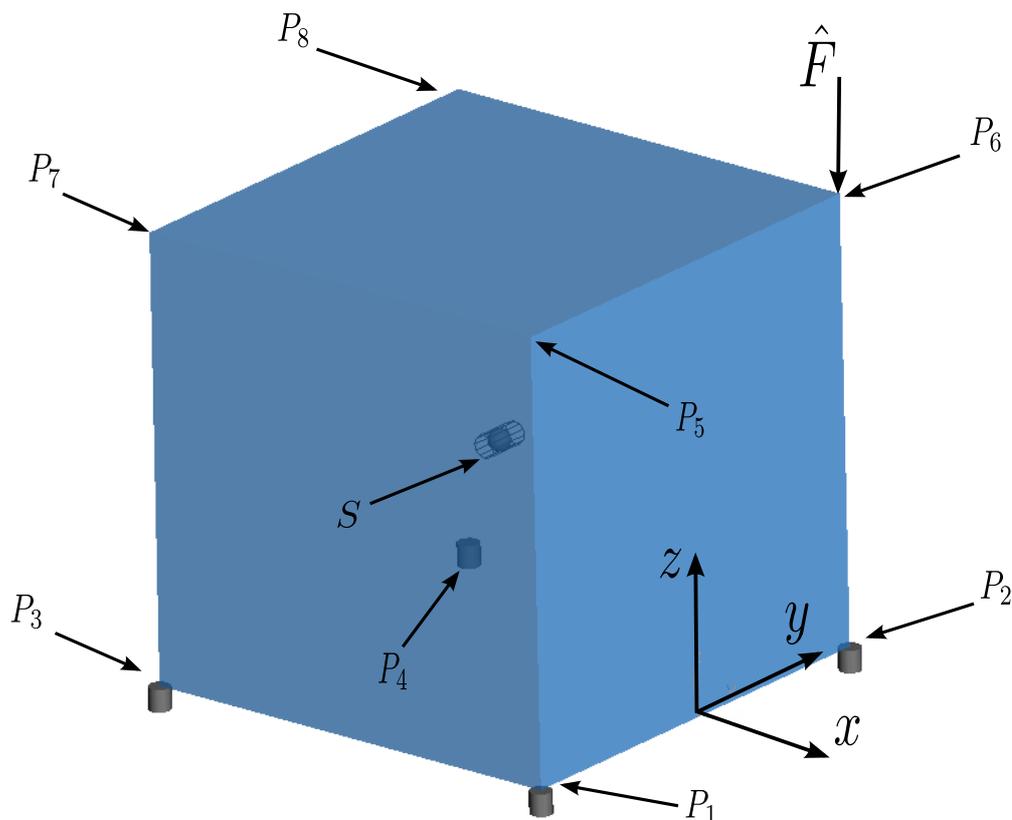


Abbildung 4.6: Symetrisches Modell

Tabelle 4.3: Kennwerte 3D Simulationsmodell Variante 1

| Kennwert | Formelzeichen | Größe |
|--|--|----------------|
| Abmaße mm | $x/y/z$ | 1000/1000/1000 |
| Schwerpunktskoordinaten mm | $x_s/y_s/z_s$ | -500/0/500 |
| Masse kg | m | 750 |
| Trägheitsmomente kgm^2 | $J_\xi/J_\eta/J_\zeta$ | 25/50/35 |
| ² Deviationsmomente kgm^2 | $J_{\xi\eta}/J_{\xi\zeta}/J_{\eta\zeta}$ | 5/5/5 |
| Axiale Federsteifigkeit N/m | c_a | 102198 |
| Radiale Federsteifigkeit N/m | c_r | 423074 |
| ^{1,2} Dämpfungsbeiwert kg/s | d | 5 |
| Impulskraft N | \hat{F} | 5000 |
| Impulsdauer s | t_i | 0.2 |
| Abtastrate Hz | f | 2000 |
| Messdauer s | t | 8 |
| Datenpunkte - | - | 16001 |

¹Bezieht nur auf Modell Variante 2 mit Dämpfung

²Bezieht nur auf Modell Variante 3 mit Dämpfung und Deviationsmomenten

4.4 Experimentelle Versuchsvorbereitung

4.4.1 MAN - Dieselmotoren D0834 & D0836

Für die experimentelle Bestimmung der Schwerpunktskoordinaten und der Massenträgheitsmomente stehen zwei MAN-Dieselmotoren zur Verfügung. Dieses sind die Motoren D0834 und D0836 (Abbildung 4.7). Die bekannten Eckdaten der Motoren sind in der Tabelle 4.4 zusammengefasst.

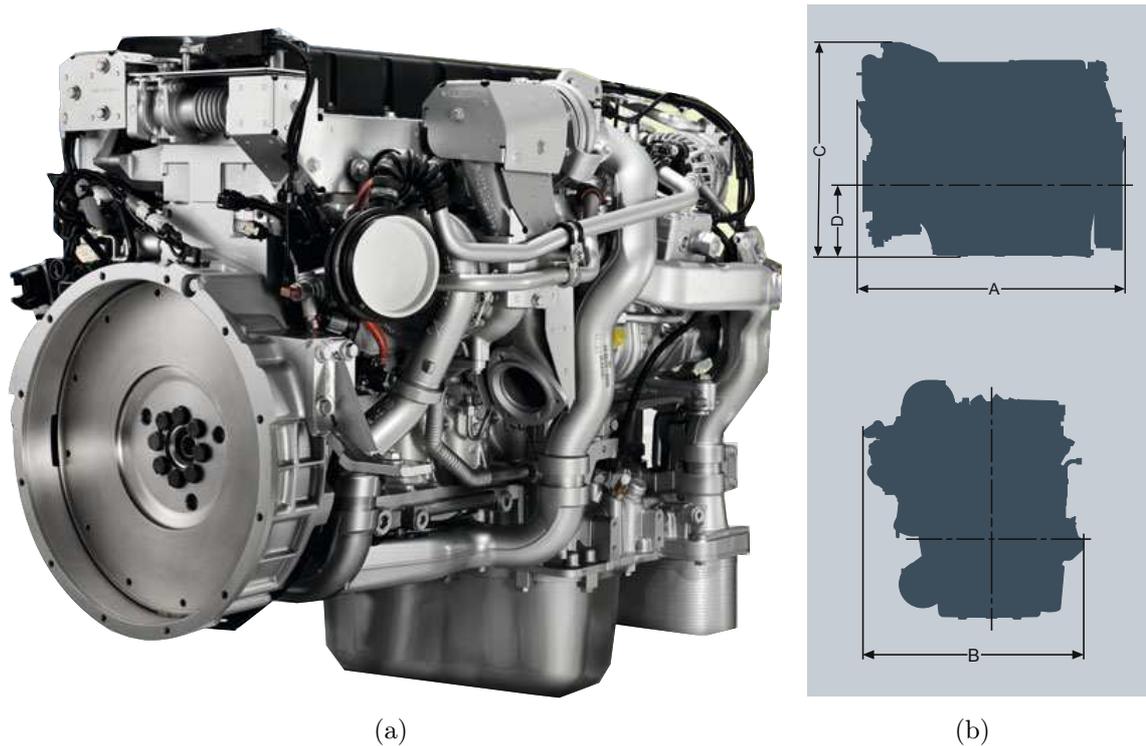


Abbildung 4.7: MAN Dieselmotor D0836 (a) und Abmaße der Motoren (b) [18]

Tabelle 4.4: Kennwerte MAN Dieselmotoren D0834 & D0836 nach [18]

| Kennwert | Formelzeichen | D0834 | D0836 |
|---|------------------------|--------------------|--------------------|
| Abmaße mm | A/B | 937/882 | 1180/877 |
| Abmaße mm | C/D | 926/378 | 994/443 |
| Schwerpunktskoordinaten mm | $x_s/y_s/z_s$ | unbekannt | unbekannt |
| Masse kg | m | unbekannt | unbekannt |
| Trägheitsmomente kgm^2 | $J_\xi/J_\eta/J_\zeta$ | unbekannt | unbekannt |
| ¹ Axiale Federsteifigkeit N/m | c_a | $2.053 \cdot 10^5$ | $2.053 \cdot 10^5$ |
| ¹ Radiale Federsteifigkeit N/m | c_r | $1.487 \cdot 10^5$ | $1.484 \cdot 10^5$ |
| Abtastrate Hz | f | 1000 | 1000 |
| Messdauer s | t | 4 | 8 |
| Datenpunkte - | - | 8001 | 16001 |

¹Berechnung erfolgte mit den Gleichungen aus Kapitel 3.5 auf Seite (20).

4.4.2 Prüfstands Aufbau experimentelle Schwingungsmessung

Der Prüfstand für die Bestimmung der Massen- und Trägheitskennwerte, auf welchem die Motorbauvarianten montiert werden, ist ein speziell für dieses Verfahren entwickelter und konstruierter Tragrahmen.

Zur Bestimmung der Masse der Motoren muss eine starre Verbindung zwischen dem Grundgestell und dem Motor herrschen. Die Grundkomponenten des Prüfstandes sind in Abbildung 4.8 dargestellt.

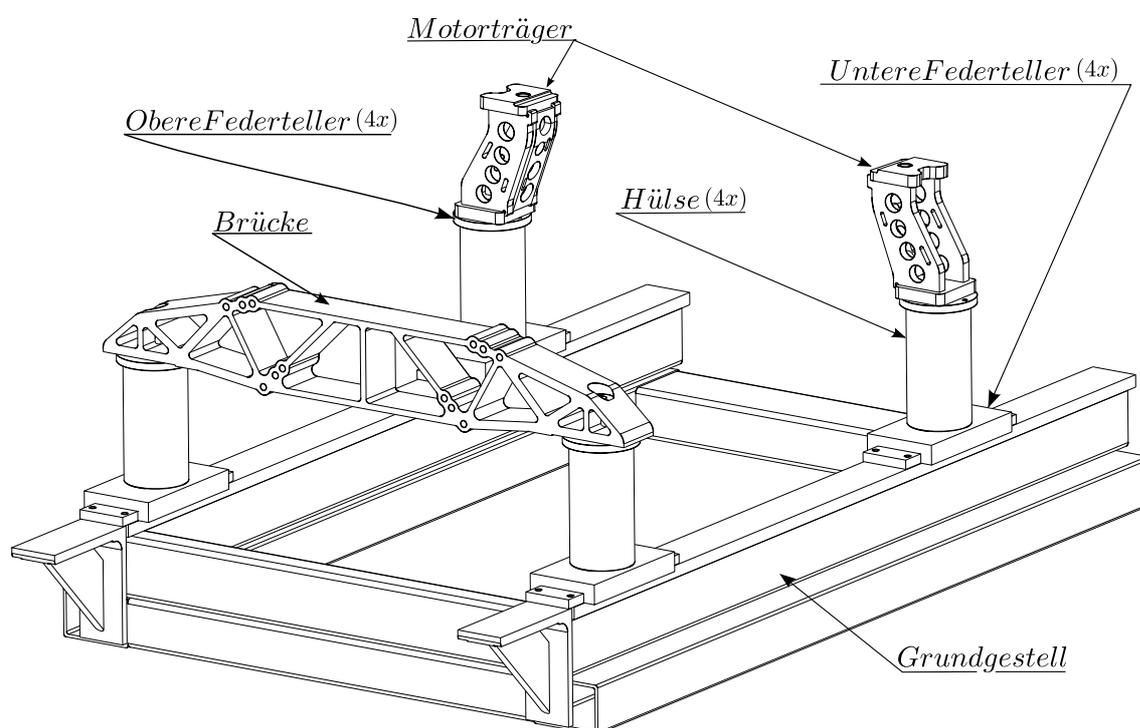


Abbildung 4.8: Prüfstands Aufbau

Das Grundgestell des Prüfstands besteht aus verschweißten Stahlträgern. Auf dem linken und rechten Stahlträger werden die unteren Federteller mittels einer Arretier Vorrichtung (nicht in der Abbildung vorhanden) verklemmt und bilden damit eine starre lösbare Verbindung.

Die zur Bestimmung der Masse der Motoren notwendige starre Verbindung zwischen dem Grundgestell und dem Motor wird mittels Hülsen realisiert.

Die Aufspannung des Motors auf der Schwungradseite erfolgt über die „Brücke“ (Abbildung 4.9). Vorteilhaft wirkt sich die Brücke dadurch aus, dass diese an nahezu jedes Schwungradgehäuse der MAN-Motorenbauvarianten verbaut werden kann.

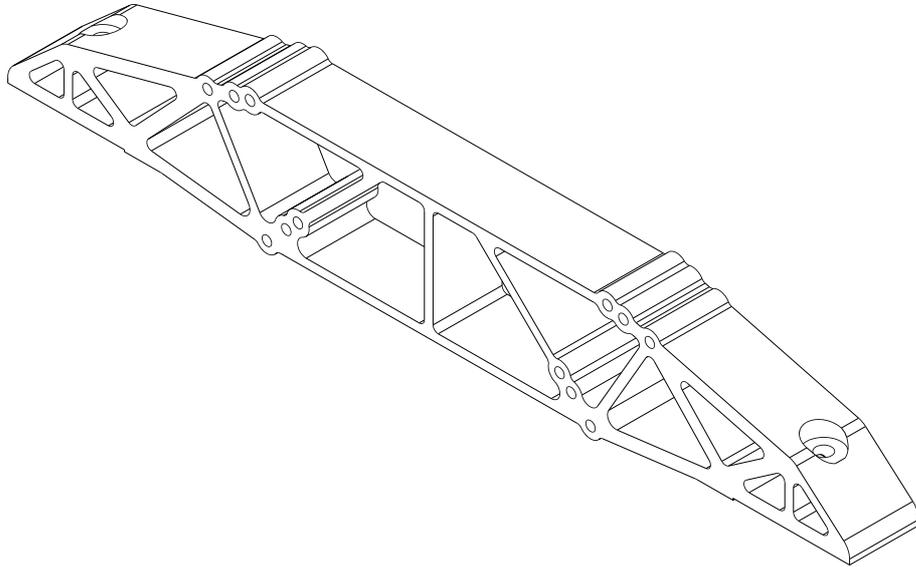


Abbildung 4.9: Schwungradseitige Brücke

Die vordere Befestigung erfolgt über die „Motorträger“. Die Motorträger (Abbildung 4.10) werden in der Konstruktionsabteilung der Motorenvorentwicklung speziell für die zu prüfende Motorvariante konstruiert.

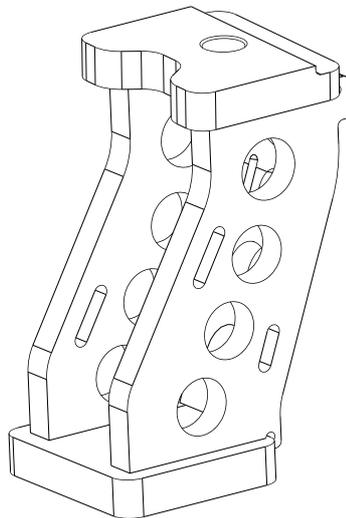


Abbildung 4.10: Motorträger für Motor D0834

Die Verbindung zwischen Motorträger und Motorgehäuse kann zum Einen über die Motorfüße erfolgen, über die der Motor nachfolgend im Fahrzeug montiert wird. Die Motorfüße sind direkt mit dem Kurbelgehäuse verschraubt. Zum Anderen kann die Montage der Motorträger auch direkt am Kurbelgehäuse erfolgen. Dieses richtet sich gänzlich nach dem Verwendungszweck des Kunden.

Für die Schwingungsmessung werden die Hülsen aus Abbildung 4.8 durch lineare zylindrische Schraubenfedern ersetzt. Die Enden der Federn sind angeschmiedet und plangeschliffen um eine optimale Auflage auf den Federtellern zu gewährleisten. Für die Vielzahl der Motoren sind zwei unterschiedliche Federpakete vorhanden.



Abbildung 4.11: Kleine zylindrische Schraubenfeder

In Abbildung 4.11 ist eine Feder aus dem Federpaket mit niedriger Federsteifigkeit abgebildet, wie sie für Motoren mit einer geringen Gesamtmasse genutzt werden. Der Motor und die Komponenten des Schwingungsprüfstandes, welche sich oberhalb der Federn befinden, sind somit „freigelagert“, was die Grundvoraussetzung der Schwingungsmessung ist. Die Kennwerte der Federpakete sind unbekannt und werden in der vorliegenden Arbeit analytisch ermittelt.

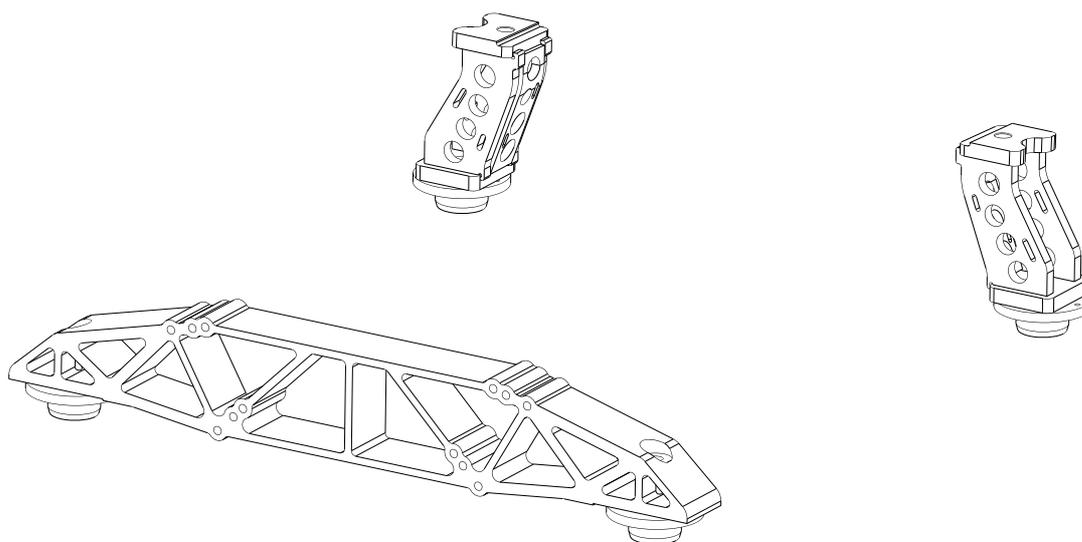


Abbildung 4.12: Freischwingende Prüfstandskomponenten

Das Grundgestell inklusive der unteren Federteller und Hülsen wird nur bei der Berechnung der Masse berücksichtigt. Die freischwingenden Prüfstandskomponenten Brücke, obere Federteller und Motorträger nach Abbildung 4.12 werden hingegen bei

der nachfolgenden Berechnung und Auswertung der Messergebnisse berücksichtigt und bei den Massen- und Trägheitskennwerten herausgerechnet.

Grundlage bilden die mittels CAD ermittelten Kennwerte. Mit dem CAD - Programm Catia V5R19 ist es möglich diese Daten mittels eines „Screenshots“ oder durch Export in eine Text-Datei auszugeben. Die folgende Abbildung 4.13 zeigt am Beispiel des Motorträgers (Abbildung 4.10) für die Motorbauvarianten D0834 und D0836 die Bildschirmausgabe der Kennwerte.

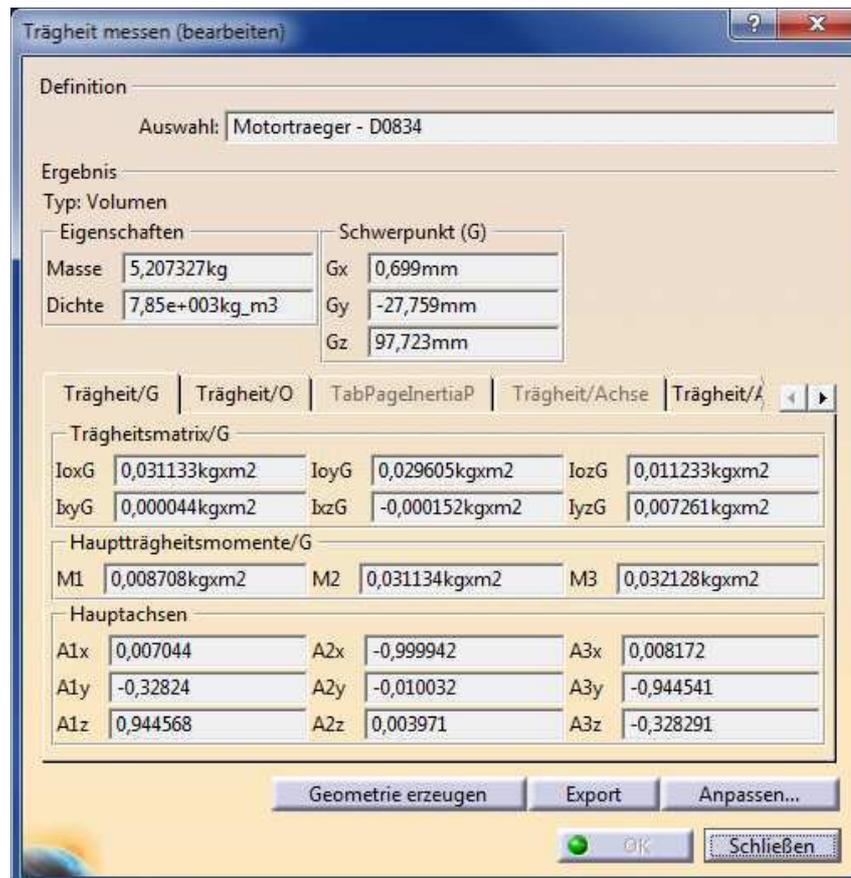


Abbildung 4.13: Trägheitskennwerte Motorträger D0834 & D0836

Die Ausgabe nach Abbildung 4.13 enthält folgende Informationen:

- Materialkennwerte:** Masse, Dichte
- Schwerpunkt:** Gx, Gy, Gz
- Trägheitsmatrix:** In Bezug auf den körperfesten Schwerpunkt G
IoxG, IoyG, IozG, IxyG, IxzG, IyzG
- Hauptträgheitsmomente:** Geordnet, in Bezug auf den körperfesten Schwerpunkt
M1, M2, M3
- Hauptachsen:** Lage der Hauptachsen in Bezug auf den körperfesten Schwerpunkt
Aix, Aiy, Aiz (i=1,2,3)

Die sich anschließende Berechnung und Auswertung der Messergebnisse erfolgt nach dem Superpositionsprinzip. Als Referenz zu dem aus den Messdaten ermittelte Schwerpunkt dient das Koordinatensystem des Motors. Dieses liegt exakt auf der Kurbelwellenachse und schließt mit dem Schwungradgehäuse ab. Abbildung 4.14 verdeutlicht dies.

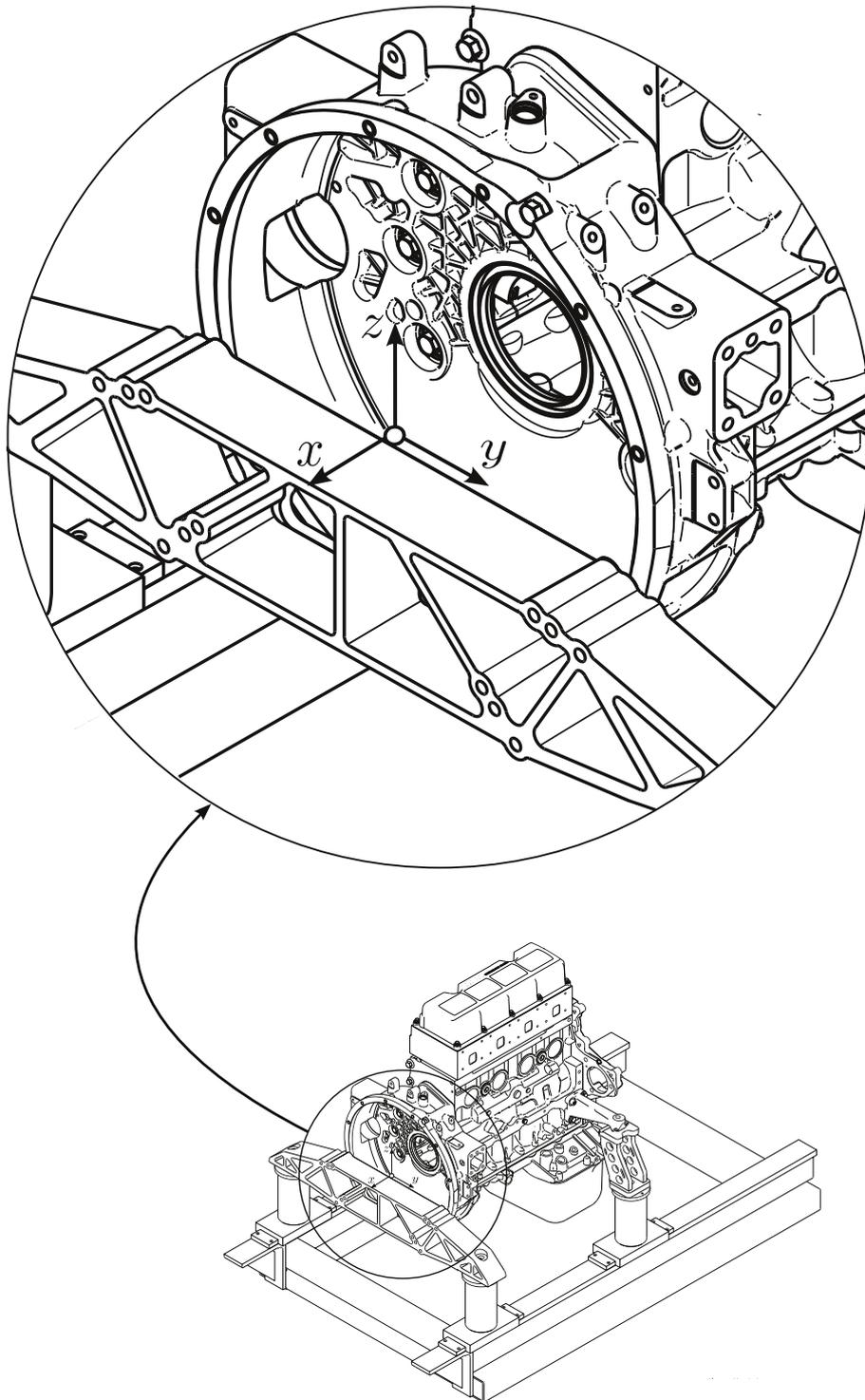


Abbildung 4.14: D0834 Prüfstands Aufbau

4.4.3 Auswahl Messfreiheitsgrade

Um das Schwingungsverhalten des Motors beschreiben zu können, werden die zeitlichen Verläufe der Beschleunigungen in den drei Raumrichtungen mittels eines triaxialen Beschleunigungsaufnehmer aufgenommen, siehe hierzu Abbildung 4.15a.

Um die aufgenommenen Signale des Beschleunigungsaufnehmers weiterzuleiten, werden rauscharme Verbindungskabel Abbildung 4.15b genutzt. Die wichtigsten technischen Daten des triaxialen Beschleunigungsaufnehmer sind in der folgenden Tabelle 4.5 aufgelistet.



(a)



(b)

Abbildung 4.15: PCB - Beschleunigungssensor (a) und Messkabel (b)

Tabelle 4.5: Technische Daten PCB - triaxialer Beschleunigungsaufnehmer [21]

| Phy. Größe/Eigenschaft/Merkmal | Wert/Bezeichnung |
|------------------------------------|--|
| Typenbezeichnung | ICP® triaxial accelerometer, 356A15 |
| Breitbandauflösung | 1...10000 Hz (0,001 m/s^2 rms) |
| Messbereich | $\pm 50 g pk$ ($\pm 490 m/s^2 pk$) |
| Empfindlichkeit | ($\pm 10\%$) 100 mV/g (10,2 $mV/(m/s^2)$) |
| Frequenzbereich | ($\pm 5\%$) 2....5000 Hz |
| Resonanzfrequenz | ≥ 25 kHz |
| Elektrischer Anschluss | 1/4-28 4-Pin |
| Masse | 10,5g |
| Abmessungen (Höhe x Länge x Tiefe) | 14,0 mm x 20,3mm x 14,0 mm |

Der Beschleunigungsaufnehmer sollte auf der Struktur so positioniert werden, dass dieser für möglichst alle Schwingformen brauchbare Informationen liefert. Würde ein Schwingungsknoten mit der Position des Beschleunigungsaufnehmer zusammenfallen, würden diese Information in den Messdaten fehlen.

Der Aufnehmer wird mittels eines angeklebten Kunststoffadapters an der Struktur befestigt. Die Messpositionen wurden hier analog zum Simulationsmodell in der Nähe der Auflagepunkten der Federn positioniert (siehe Abbildung 4.16). Es sollte dadurch ermöglicht werden die Absenkung und somit die eingeleitete Federkraft in das Systems möglichst exakt zu bestimmen.

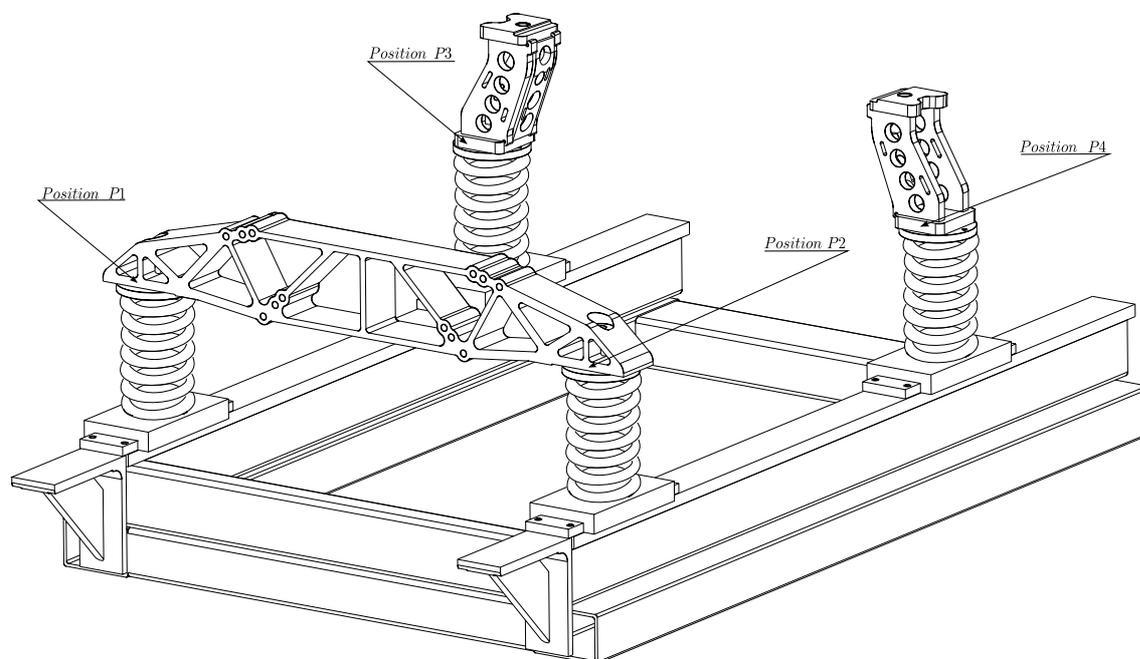


Abbildung 4.16: Zuordnung der Messstellen der Sensoren

Der Prüfstand wurde nach der Montage der Motoren vermessen. Die folgende Tabelle ordnet die Abmessungen in Bezug auf das Motorkoordinatensystem zu.

Tabelle 4.6: Zuordnung der Messpositionen (Angaben in mm)

| Messposition | | Motor | |
|--------------|---|--------|--------|
| | | D0834 | D0836 |
| Position P1 | x | 100 | 100 |
| | y | -471.5 | -417.5 |
| | z | -178 | -178 |
| Position P2 | x | 100 | 100 |
| | y | 471.5 | 417.5 |
| | z | -178 | -178 |
| Position P3 | x | -560 | -830 |
| | y | -471.5 | -417.5 |
| | z | -178 | -178 |
| Position P4 | x | -570 | -824 |
| | y | 471.5 | 417.5 |
| | z | -178 | -178 |

4.4.4 Auswahl Erregerfreiheitsgrade

Bei der Auswahl der Erregerfreiheitsgrade ist es entscheidend, Anregungspunkte und Anregungsrichtungen zu wählen um die Schwingformen analysieren zu können. Durch die Anregung sollen alle Eigenformen und Eigenfrequenzen im betrachteten Frequenzbereich angeregt werden. Dazu wird die Struktur mit dem Modalhammer in jede Raumrichtung nacheinander angeregt.



Abbildung 4.17: PCB - Modalhammer

Der Modalhammer oder auch Impulshammer genannt, ist mit einer im Hammerkopf integrierten Kraftmesseinheit versehen und liefert ein zur Aufschlags-Kraft proportionales Spannungssignal.

Je nach Art der zu untersuchenden Struktur und der erwarteten Eigenfrequenzen kann die Hammerspitze entsprechend gewählt werden. Für Strukturen mit hohen Eigenfrequenzen werden harte Hammerspitzen genutzt. Für Strukturen mit niedrigen Frequenzen ist hingegen eine weiche Hammerspitze zu wählen.

Abbildung 4.17 zeigt den Modalhammer mit für niedrige Eigenfrequenzen passenden Hammerspitze. Dies ist zu erkennen an der roten Messspitze.

Tabelle 4.7: Technische Daten Modalhammer [20]

| Phy. Größe/Eigenschaft/Merkmal | Wert/Bezeichnung |
|--------------------------------|--|
| Typenbezeichnung | ICP [®] Impact Hammer, 086C03 |
| Empfindlichkeit | 2,25 mV/N |
| Messbereich | ±2224 N pk |
| Resonanzfrequenz | ≥22 kHz |
| Masse | 160g |
| Zusatzmasse | 76g |

Die Erregung mittels des Modalhammers findet an der Position P2 statt. Die Anregungsrichtung liegt jeweils in negativer Richtung der Achse entsprechend des Motorkoordinatensystems aus Abbildung 4.14.

4.4.5 Beschreibung Signalanalysesystems

Für die Datenaufzeichnung der Messsignale steht ein Signalanalysesystem von National Instruments zur Verfügung. Verwendet wird das in Abbildung 4.18 abgebildete Modul NI USB-4431.

Das Modul besitzt insgesamt vier analoge Eingangskanäle und einen analogen Ausgangskanal. Die Übermittlung der Daten zum Computer erfolgt über ein USB-Kabel (Universal-Serial-Bus). Die wichtigsten technischen Daten sind in Tabelle 4.8 zusammengefasst.



Abbildung 4.18: Signalanalysesystem NI USB-4431

Tabelle 4.8: Technische Daten Signalanalysesystem NI USB-4431[19]

| Phy. Größe/Eigenschaft/Merkmal | Wert/Bezeichnung |
|------------------------------------|-------------------------|
| Typenbezeichnung | NI USB-4431 |
| Auflösung | 24 bit |
| Abtastung Eingangskanäle | 102.4 kS/s |
| Abtastung der Kanäle | Simultan |
| Dynamischer Bereich Eingangskanäle | 100 dB |
| Gewicht | 675 g |
| Abmessungen | 142 mm x 180 mm x 38 mm |

4.5 Vorbereitung experimentelle Modalanalyse

Für die Messdatenaufzeichnung während der Versuchsdurchführung wurde die Software LabVIEW SignalExpress 2011 von National Instruments genutzt.

Nach dem Aufbau des Messequipments, siehe Abbildung 4.19 und dem Verbinden mit dem Signalanalysesystem, wurden in der Messsoftware die Einstellungen und das Zuordnen des Eingangskanals sowie der Ausgangskanäle vorgenommen.



(a)



(b)

Abbildung 4.19: Messcomputer, Signalanalysesystem und Versuchsaufbau

Die Aufnahmedauer und die Abtastrate werden entsprechend 4.4 (46) eingestellt. Die Messdatenaufnahme erfolgt für jede Messung und wird jeweils in einer einzelnen Textdatei gespeichert. Um eine möglichst hohe Anzahl brauchbarer Messdaten zu erhalten, wird eine Mindestanzahl von fünf Messungen je Anregungsrichtung gewählt.

Die Messung kann nur dann als gültig gesehen werden, wenn es nicht zu einem Doppelimpuls durch den Hammerschlag kommt. Auf die Auswirkung eines Doppelimpulses wird später noch eingegangen. Eine nahezu ideale Anregung ist in Abbildung 4.20 dargestellt.

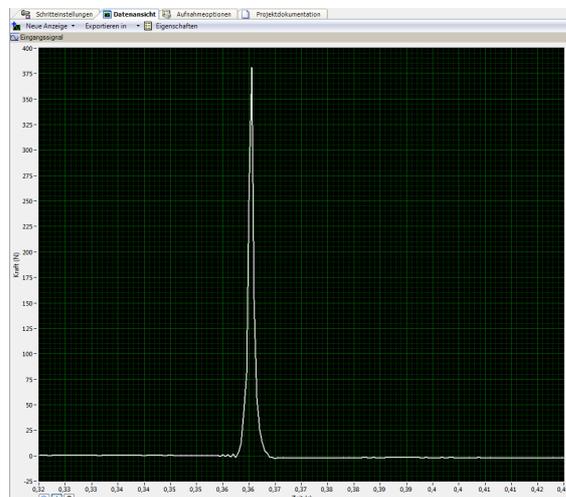


Abbildung 4.20: Aufzeichnung des Kraft-Zeitverlauf mit SignalExpress

Der maximal nutzbare Frequenzbereich der Messung wird durch die Anwendung der Fast-Fourier-Transformation des Eingangssignals bestimmt und erfolgt nach der 10 dB Regel. Diese Regel besagt, dass nur der Frequenzbereich verwertbare Informationen enthält, bei dem die Amplitude des Kraftsignals um nicht mehr als 10 dB abgefallen ist. Durch Abbildung 4.21 wird deutlich, dass Frequenzen bis über 400 Hz korrekt angeregt werden können.

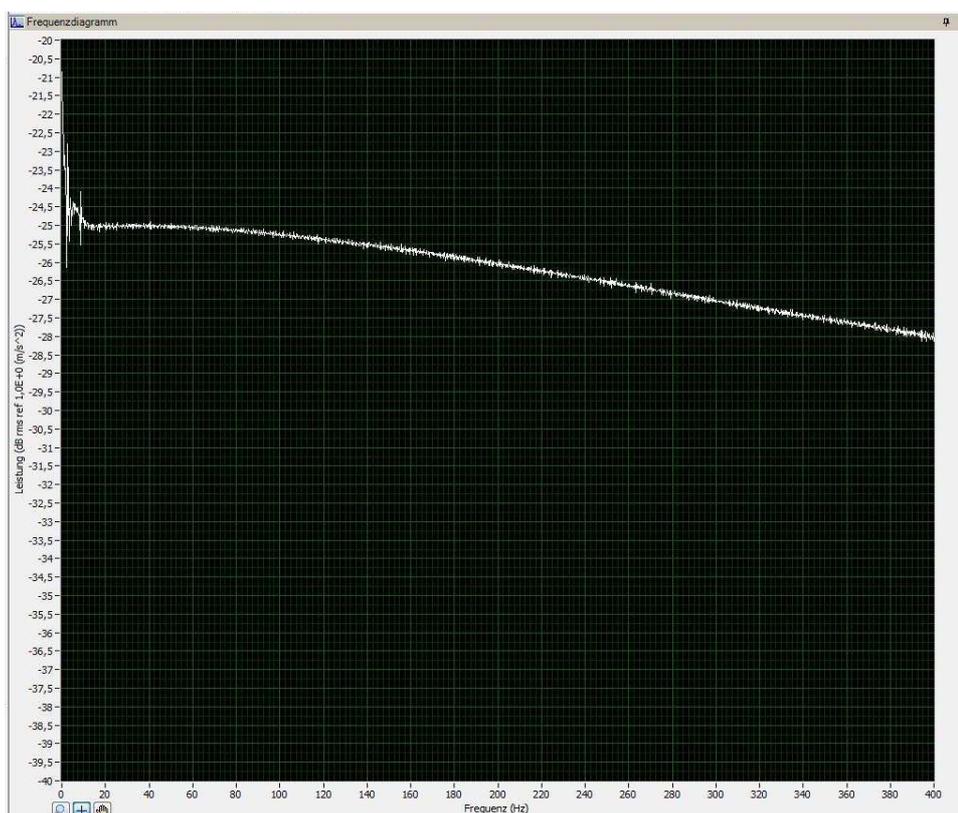


Abbildung 4.21: Fourierspektrum des Eingangssignals

Bei der Modalanalyse wird das komplexe Verhältnis zwischen dem Ort der Erregung v und dem Ort der Systemantwort μ als linear angenommen. Um diese Linearität zu überprüfen dient die Kohärenzfunktion, sie ist wie folgt definiert:

$$\gamma_{v\mu}^2(\omega) = \frac{|G_{v\mu}(\omega)|^2}{G_{v\mu}(\omega) G_{v\mu}(\omega)} \quad (4.1)$$

Im Allgemeinen besagt die Kohärenz mit dem Wert 1, dass das Signal der Systemantwort μ , die Ursache des Signals der Erregung v ist. Daher sollten die Werte der Kohärenzfunktion für die aufgezeichneten Messdaten nahe dem Wert $\gamma = 1$ liegen, nach [2] und [14].

4.6 Experimentelle Versuchsdurchführung

Nachdem alle Messeinstellungen in der Software vorgenommen wurden und der Beschleunigungssensor positioniert wurde, kann die experimentelle Modalanalyse durchgeführt werden. Begonnen mit der ersten Messposition P1 und der fünfmaligen Systemanregung in jede Achsrichtung an Position P2. Nach erfolgreicher Messung wird die Position geändert und analog alle Richtung fünf mal gemessen. Dies geschieht für alle 4 Messpunkte.

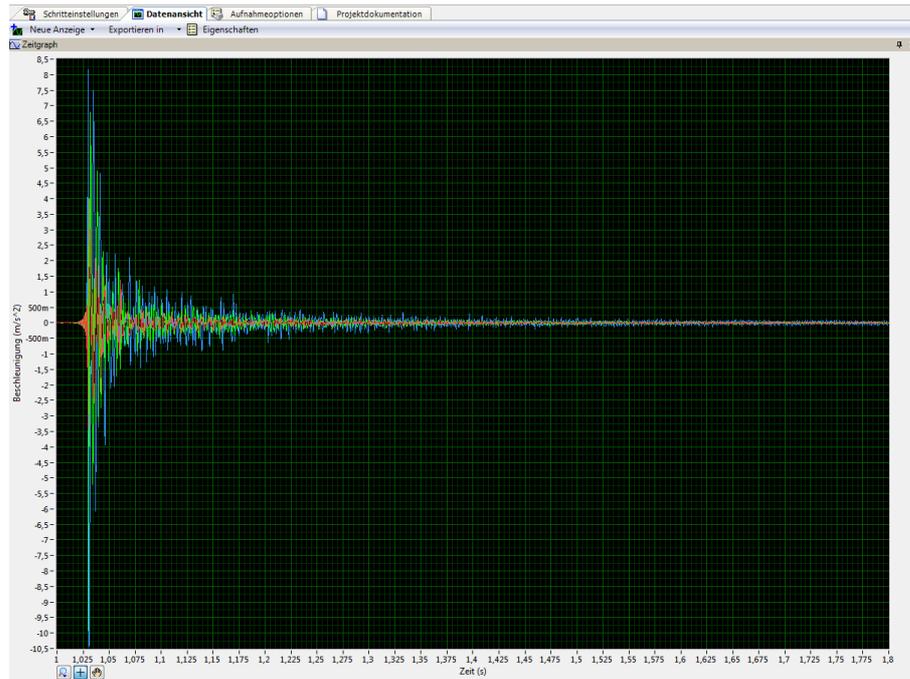


Abbildung 4.22: Aufgezeichnete Beschleunigung

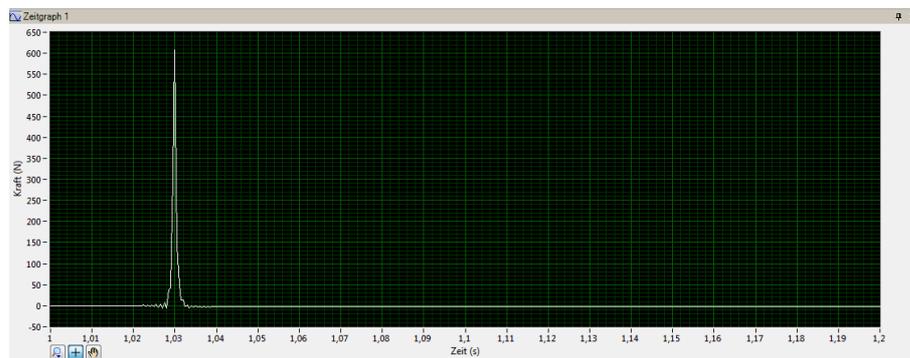


Abbildung 4.23: Aufgezeichnete Kraftverlauf

Um Sicherzustellen, dass der Ort der Anregung keinen Einfluss auf die Systemantwort hat, wird im Anschluss an die Messwertaufnahme der Ort der Systemanregung für die nächste Messung gewechselt. In Abbildungen 4.22 ist der zeitliche Verlauf der Beschleunigung an Position P2 und in Abbildung 4.23 der Kraftverlauf der Systemerregung in negativer x-Achsrichtung dargestellt.

Mit der Fast-Fourier-Transformation (FFT) werden die aufgenommen Zeitsignale der Systemerregung und der Systemantwort in den Frequenzbereich transformiert. In Abbildung 4.24 ist das Frequenzspektrum der Systemerregung und in Abbildung 4.25 der Systemantwort über den aufgenommenen Frequenzbereich abgebildet.

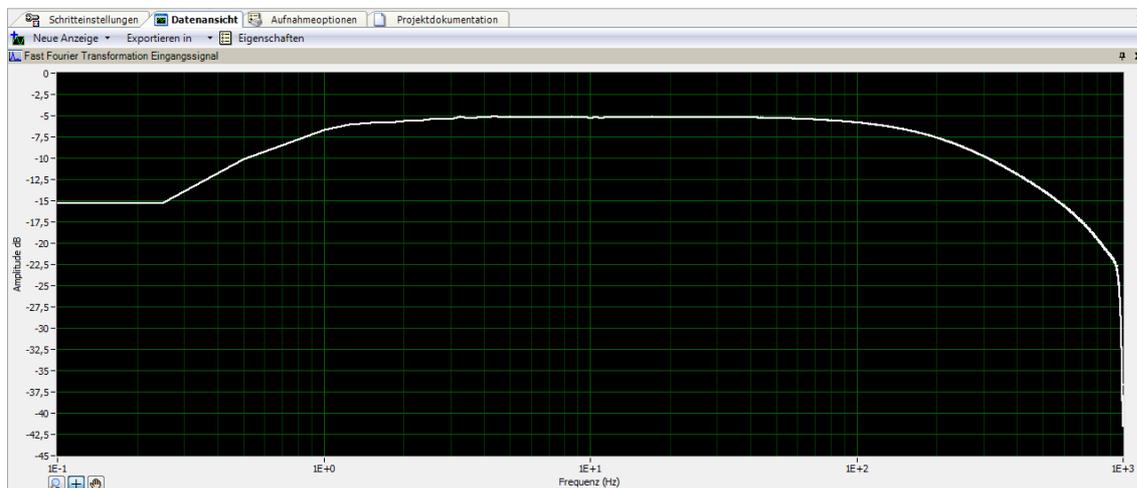


Abbildung 4.24: FFT des Kraftimpulssignales

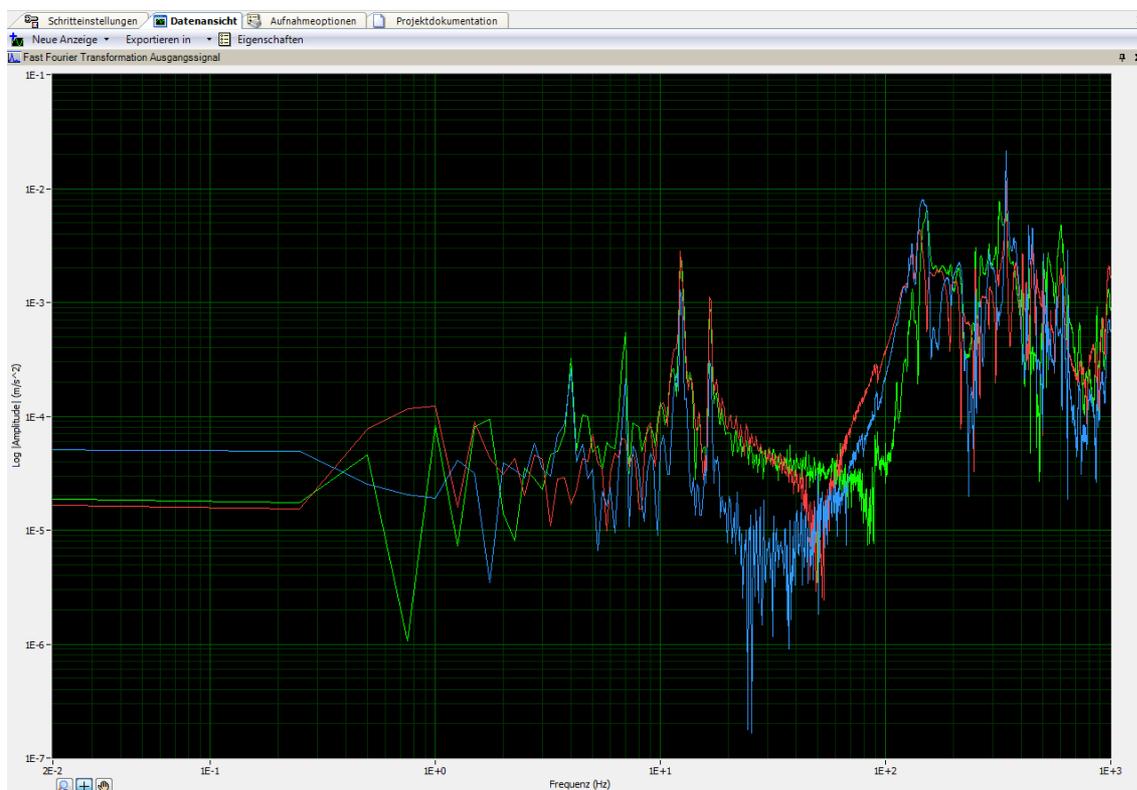


Abbildung 4.25: FFT der Beschleunigungssignale

Die Übertragungsfunktion, welche der Quotient aus dem Fourier-Transformierten Signalen der Systemantwort und dem Fourier-Transformierten Signal der Systemerregung ist, (vergl. 3.76 Seite 26) kann unterschiedlich dargestellt werden. Im Bode-Diagramm werden Betrag und Phase getrennt dargestellt. Dies zeigt die folgende Abbildung.

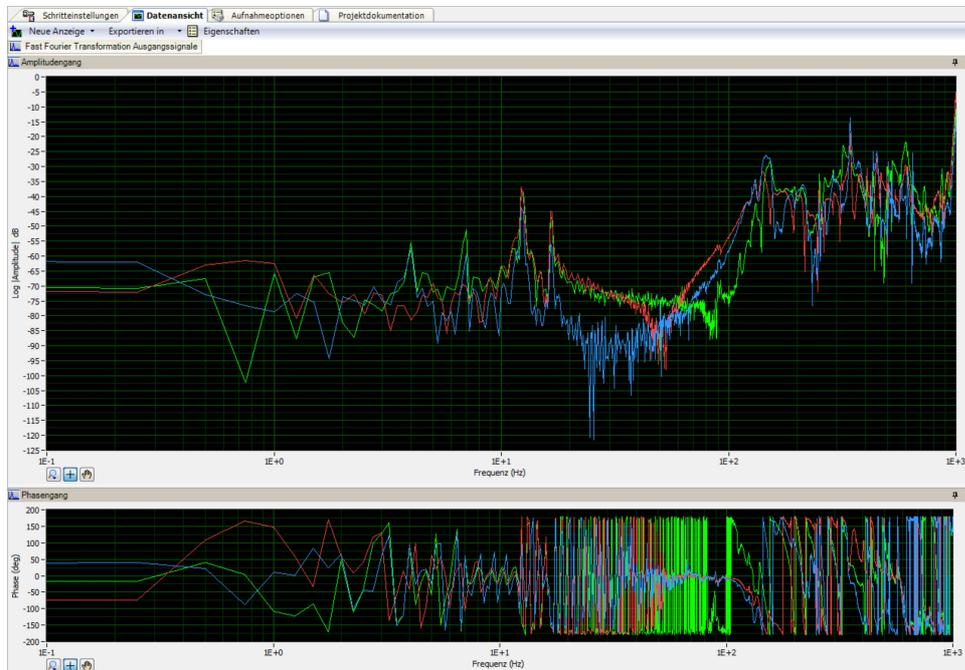


Abbildung 4.26: Bode-Diagramm der Übertragungsfunktion

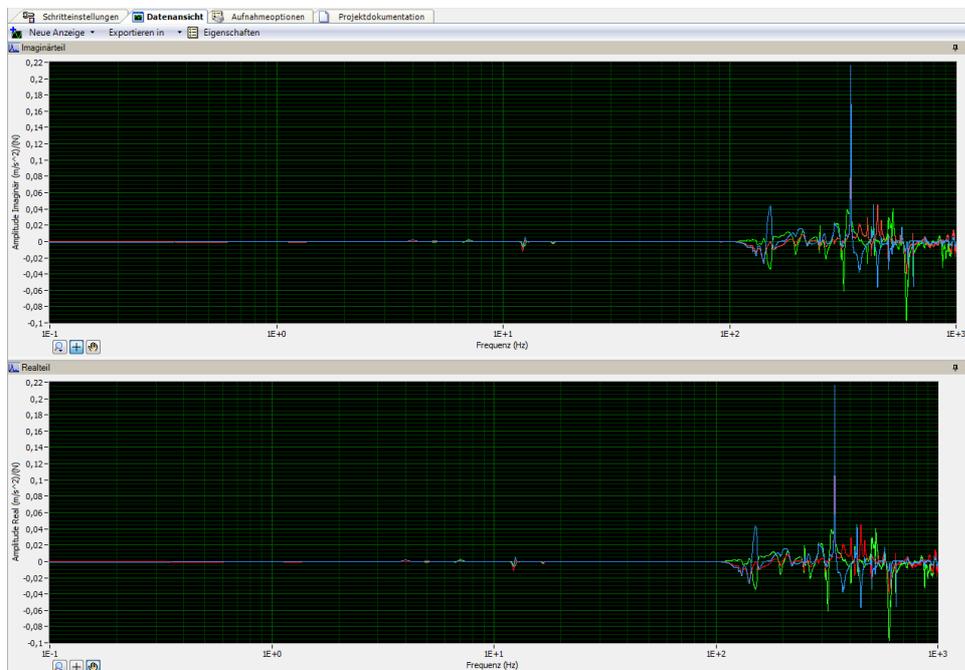


Abbildung 4.27: Real und Imaginärteil der Übertragungsfunktion

Die Darstellungsweise der Übertragungsfunktion kann auch in getrennter Form, entsprechend Abbildung 4.27 als Real- und Imaginärteil erfolgen.

Die für die Berechnung der Massenträgheitsmomente interessanten Eigenfrequenzen liegen im Bereich bis 20 Hz, siehe Abbildung 4.28.

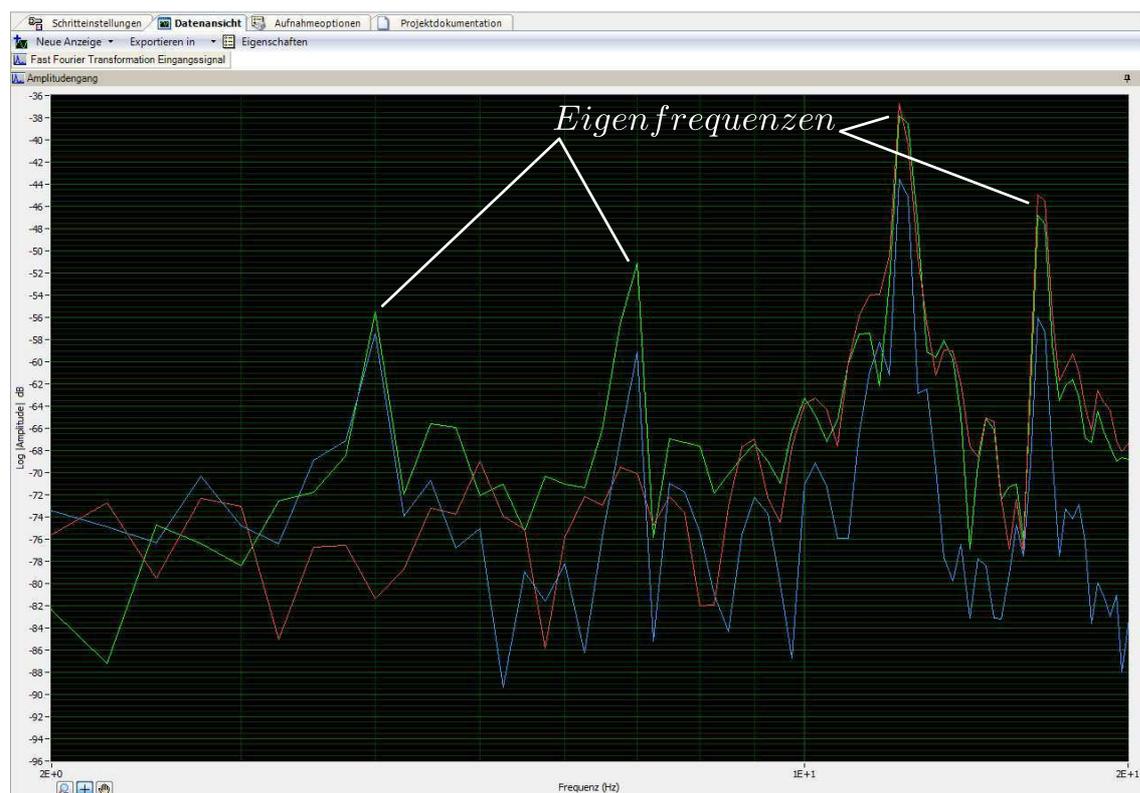


Abbildung 4.28: Amplitudengang bis 20 Hz

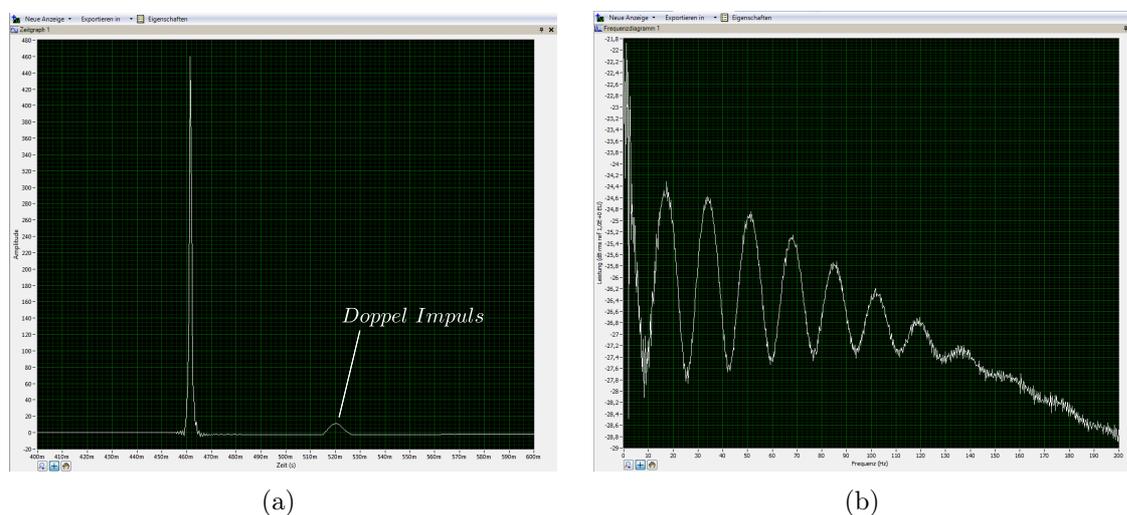


Abbildung 4.29: Doppel Impuls (a) im Zeitbereich und (b) im Frequenzbereich

Durch die Anzeige der Messdaten nach der Systemerregung kann sofort eine Aussage über die Qualität der Messung getroffen werden. Bei einem Doppelimpuls durch den Hammerschlag ist die Messung für die weitere Untersuchung ungeeignet. Dies zeigt Abbildung 4.29 (a). Entsprechend der fehlerhaften Systemerregung stellt sich auch das Fourierspektrum in Abbildung 4.29 (b) fehlerhaft dar.

5 Auswertung

Die Auswertung der Versuche erfolgt in zwei Schritten. Der erste Teil der Auswertung mit der Modalanalyse-Software ME'Scope. Hier wird die Struktur mit den geometrischen Daten hinterlegt. Aus den Zeitdaten wird die Übertragungsfunktion gebildet und nachfolgend die modalen Parameter bestimmt. Die Eigenformen können animiert und dargestellt werden.

Die modalen Parameter werden mittels einer Textdatei exportiert und in MATLAB für den zweiten Teil der Auswertung importiert. In MATLAB erfolgt die Berechnung der Federsteifigkeiten, die Schwerpunktsbestimmung und die Berechnung der Massenträgheitsmomente. Desweiteren ist es auch möglich diverse graphische Darstellung aus dem Zeitbereich und dem Frequenzbereich zu visualisieren.

5.1 Auswertung 2D Modelle

5.1.1 Programmbeschreibung „FreQuenCy 2D“

Für die Messdatenauswertung mit MATLAB wurde das Programm FreQuenCy 2D erstellt. Das Programm ist ein Graphical User Interface oder kurz GUI. Nachfolgend wird das Programm FreQuenCy 2D (Abbildung 5.1) mit seinen einzelnen Funktionen und Ablaufstrukturen erörtert.



Abbildung 5.1: Messdatenauswertesoftware FreQuenCy 2D

Das Programm FreQuenCy 2D ist für die Berechnung der Schwerpunktlage und des Massenträgheitsmomentes, sowie die Visualisierung der Schwingungs- und Frequenzverläufe programmiert worden.

Die Ablaufstruktur des Programmes ist so hinterlegt worden, dass jegliche Fehlein-gabe in den Aufruffunktionen bzw. ein falsches Vorgehen bei der Auswahl der Funk-tionsbuttons eine Fortführung des Programmes nicht zulässt. Der Benutzer wird durch einen Warndialog auf seinen Fehler und auf die vorrangig durchzuführende Auswahl hingewiesen.

Die Funktionsbuttons, welche sich in der linken oberen Ecke der Programmoberflä- che befinden, werden von oben nach unten nacheinander betätigt. Durch die Betäti- gung des „Eingabe Federkennwerte“-Buttons, erscheint die Menüoberfläche „Auswahl Federpakete“ nach Abbildung 5.2.



Abbildung 5.2: Auswahl der Federpakete (a) und Federberechnung (b)

An dieser Stelle wird bereits auf die nachfolgenden Auswertungen der dreidimensio- nalen Modelle und der Motoren, in Bezug auf die Federkennwerte und die Federbe- rechnung vorgegriffen.

Hinter den „Federpakete kleine Federn“- und „Federpakete große Federn“, sind die Fe- derpakete des Prüfstandes mit den Kennwerten der axialen Federsteifigkeiten bereits hinterlegt.

Für die Berechnung der radialen Federsteifigkeit, wird in einem Inputdialog die Länge der Feder nach der Belastung, also in der statischen Ruhelage abgefragt. Nach der Eingabe erfolgt im Hintergrund die Berechnung der radialen Federsteifigkeit nach 3.49 (Seite 20). Für nachfolgende Programmzugriffe auf den Wert der radialen Federsteifigkeit wird diese in einer internen GUI - Struktur gespeichert.

Durch die Betätigung des „Federkennwerte berechnen“-Button öffnet sich ein In- putdialog (Abbildung 5.2),in dem alle notwendigen geometrischen Daten und das materialbezogene Schubmodul abgefragt werden. Sind die Federkennwerte bekannt, so können diese direkt durch die Wahl des „Federkennwerte Eingeben“-Button über- nommen werden.

Nach der getroffenen Auswahl im Menü und der anschließenden Eingabe im Input- dialog öffnet sich ein Hinweisenfenster, welches dem Benutzer die Eingabe bestätigt.

Über den „Kennwerte eingeben“-Button werden nachfolgend die Abtastrate der Messung, die Distanz zwischen den Sensoren und die Masse des Körpers abgefragt.

Sind die Eingaben der Kennwerte erfolgt, können die Messdaten durch Aktivierung des „Messdaten einlesen“-Buttons eingelesen werden.

Da die Messdaten der ungedämpften Simulationsmodelle als MATLAB-Datei und die Messdaten der gedämpften Modelle als Textdatei zur Verfügung standen, musste hier ein Menü eingefügt werden, welches die Auswahl zwischen den Dateitypen ermöglicht.

Unabhängig davon, welcher Dateityp gewählt wurde, werden die Messdaten eingelesen und in Vektoren, welcher in einer Struktur hinterlegt sind, gespeichert. Im Hintergrund erfolgen hierbei in diesem Abschnitt diverse Berechnungen, welche nachfolgend erörtert werden.

Zunächst wird mit den Beschleunigungsvektoren \ddot{z}_1 und \ddot{z}_2 sowie der Länge L mittels (3.4) (Seite 7) die Winkelbeschleunigung berechnet und ebenfalls in einem Vektor gespeichert.

Im nächsten Schritt wird die Geschwindigkeit und der Weg aus den Beschleunigungsvektoren durch Integration berechnet. Die Werte der Wege werden für die später erfolgende Schwerpunktsberechnung benötigt.

Da die Beschleunigung ein Funktion der Zeit ist ($\ddot{z}=\ddot{z}(t)$), erfolgt die Integration unter Berücksichtigung von Anfangsbedingungen.

Die Anfangsbedingungen der Integration lauten:

$$\begin{aligned}\dot{z}(t = t_0) &= \dot{z}_0 \\ z(t = t_0) &= z_0\end{aligned}\tag{5.1}$$

Die Basis für die Integration der Geschwindigkeit liefert folgende Gleichung:

$$\ddot{z} = \frac{d\dot{z}}{dt}\tag{5.2}$$

Und nach Trennung der Veränderlichen

$$d\dot{z} = \ddot{z}dt\tag{5.3}$$

Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen (5.2) wird die Geschwindigkeit nun durch die bestimmte Integration berechnet.

$$\int_{\dot{z}_0}^{\dot{z}} d\dot{z} = \int_{t_0}^t \ddot{z} dt\tag{5.4}$$

$$\dot{z} = \dot{z}_0 + \int_{t_0}^t \ddot{z} dt = \dot{z}_0 + \ddot{z}(t - t_0) \quad (5.5)$$

Die Integration des Weges verläuft analog zur Integration der Geschwindigkeit und wird daher nicht noch einmal untersucht. Da zu Beginn der Integration von der Beschleunigung auf die Geschwindigkeit ein Datenpunkt fehlt und bei der Integration auf den Weg somit ein weiterer, sind die ersten zwei Datenpunkte dieser Vektoren mit einer Null besetzt. Dies beeinflusst die weitere Berechnung allerdings nicht, denn sie werden durch gezielte Schleifendurchläufe berücksichtigt.

Die durch Integration bestimmten Werte von z_1 und z_2 gehen in die nachfolgende Berechnung der Schwerpunktsbeschleunigung ein. Die Berechnung dieser erfolgt mit dem umgestellten Schwerpunktsatz nach Gleichung (3.89) auf Seite 31 zu:

$$\ddot{z}(t) = \frac{-c_1 z_1(t) - c_2 z_2(t) - \hat{F}(t)}{m} \quad (5.6)$$

Durch das Einlesen der Messdaten werden im Folgendem die drei Popupmenüs aktiviert. In diesen sind diverse graphische Darstellung der Schwingungsverläufe im Zeitbereich und im Frequenzbereich auswählbar.

Nach der Auswahl eines beliebigen Feldes aus einem der Popupmenüs, kann die graphische Darstellung durch den nebenstehenden „Plotten“-Button in dem Axes-Fenster erfolgen. Die Funktionen und Optionen der graphischen Darstellungen und der Inhalt der Popupmenüs wird nun erörtert.

Das obere Popupmenü beinhaltet die zeitlichen Verläufe der eingelesenen Messungen und der berechneten Beschleunigungen. Der Inhalt vom ersten Popupmenü ermöglicht folgende Darstellungen:

- ◆ Beschleunigung $\ddot{z}_1(t)$
- ◆ Beschleunigung $\ddot{z}_2(t)$
- ◆ Kraftverlauf $\hat{F}(t)$
- ◆ Berechnete Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}(t)$
- ◆ Berechnete Schwerpunktsbeschleunigung $\ddot{z}(t)$
- ◆ Gemessene Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}(t)$
- ◆ Gemessene Schwerpunktsbeschleunigung $\ddot{z}(t)$

Die zeitlichen Funktionen werden im Axes-Fenster auf der rechten Seite der Oberfläche geplottet. In der nachfolgenden Abbildung 5.3 ist die Schwerpunktsbeschleunigung bereits skaliert dargestellt.

Die Skalierung der Achsen erfolgt über die oberhalb des Axes-Fenster gelegenen Funktionsbuttons „X-Achse Skalieren“ und „Y-Achse Skalieren“, wenn die voreingestellte Skalierung ungenügend ist.

Durch den Radiobutton „Grid“ kann nach Wunsch des Benutzers das Raster im Hintergrund zur besseren Identifikation der Messwerte wahlweise an oder ausgeschaltet werden.

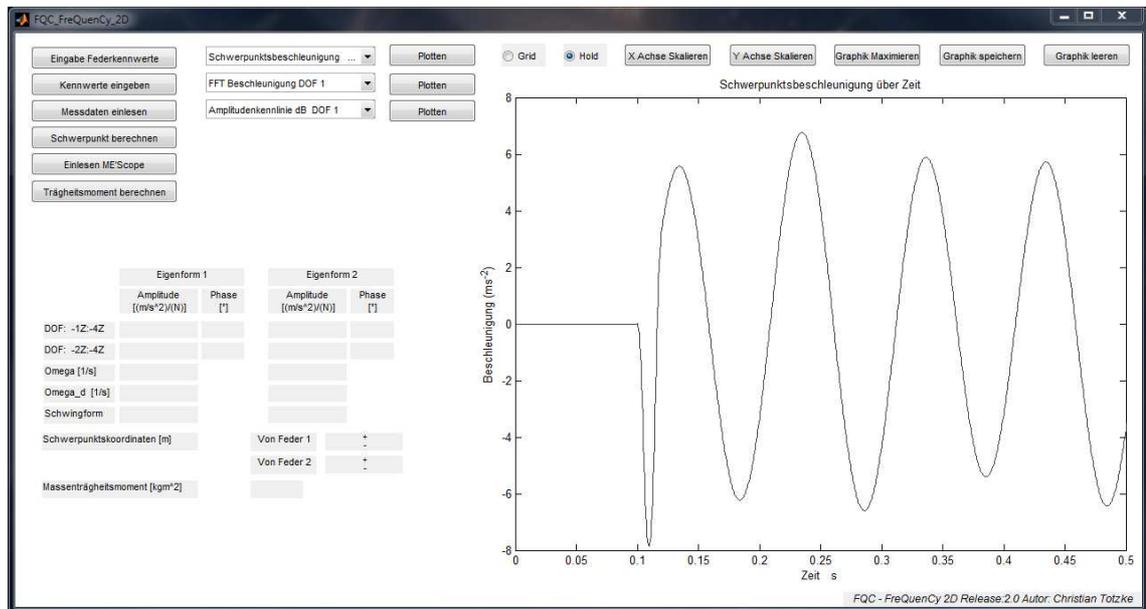


Abbildung 5.3: Schwerpunktsbeschleunigung in FreQuenCy 2D

Das mittlere Pop-upmenü enthält die Fast-Fourier-Transformierten (FFT) Daten der eingelesenen und berechneten Messdaten. Die Auswahl beinhaltet folgende Möglichkeiten der Darstellung:

- ◆ Fourierspektrum Beschleunigung an P1
- ◆ Fourierspektrum Beschleunigung an P2
- ◆ Fourierspektrum Kraftimpuls in dB
- ◆ Fourierspektrum Kraftimpuls
- ◆ Fourierspektrum Schwerpunktsbeschleunigung
- ◆ Fourierspektrum Beschleunigung an P2
- ◆ Fourierspektrum Winkelbeschleunigung
- ◆ Frequenzgang Real und Imaginärteil an P1
- ◆ Frequenzgang Real und Imaginärteil an P2

Durch die Aktivierung des Radiobuttons „Hold“ ist es möglich einen weiteren Plot im Axes-Fenster darzustellen. Dies dient dem direkten Vergleich zwischen den graphischen Kurvenverläufen. Des Weiteren ist oberhalb des Axes-Fensters der Pushbutton „Graphik Maximieren“. Durch die Betätigung des „Buttons“ wird der Fensterinhalt des „Axes-Fensters“ in einem separaten Figure (Abbildung 5.4) geöffnet. Diese kann nachfolgend im Property-Editor untersucht und bearbeitet werden.

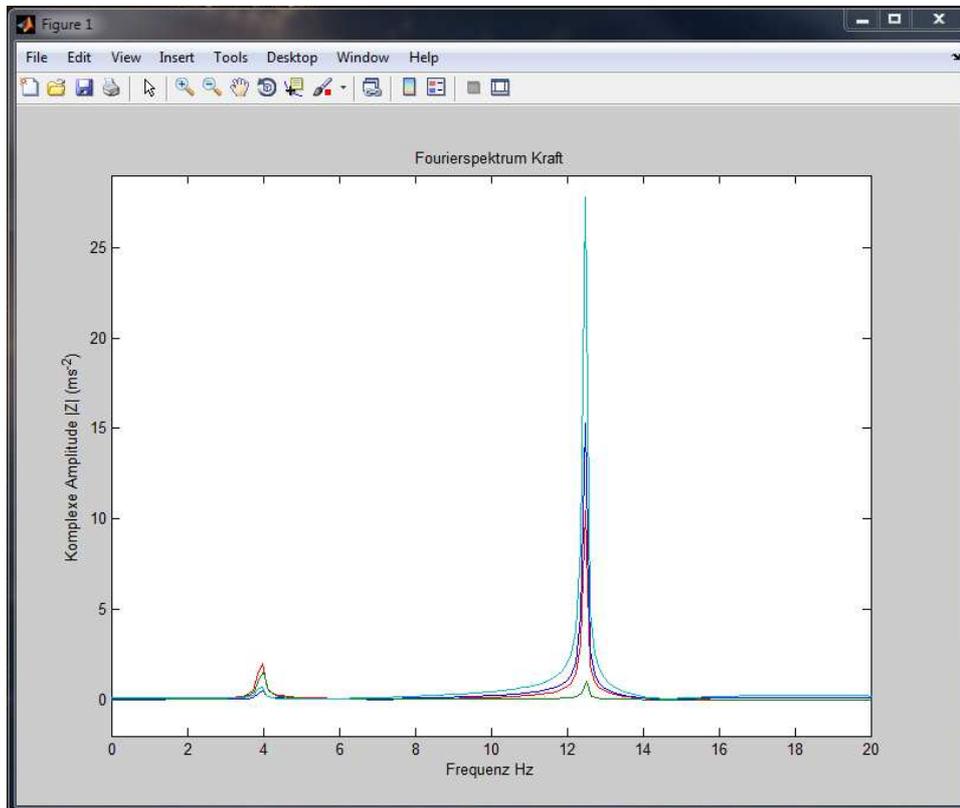


Abbildung 5.4: Graphik maximieren

Das untere Popupmenü beinhaltet folgende Darstellungsvarianten der Übertragungsfunktion:

- ◆ Amplitudengang $|H(j\Omega)1|$ dB
- ◆ Amplitudengang $|H(j\Omega)2|$ dB
- ◆ Phasengang $\varphi(\Omega)1$
- ◆ Phasengang $\varphi(\Omega)2$
- ◆ Logarithmierter Amplitudengang $|H(j\Omega)1|$
- ◆ Logarithmierter Amplitudengang $|H(j\Omega)2|$
- ◆ Imaginärteil $\text{jIm}H(j\Omega)1$
- ◆ Imaginärteil $\text{jIm}H(j\Omega)2$

Die Analyse einer graphischen Darstellung im Property-Editor wird nun am Beispiel einer gedämpften Schwingung näher erläutert.

Durch die Auswahl des Data-Cursors kann der exakte Funktionswert eines Punktes des Graphen bestimmt werden (Abbildung 5.5).

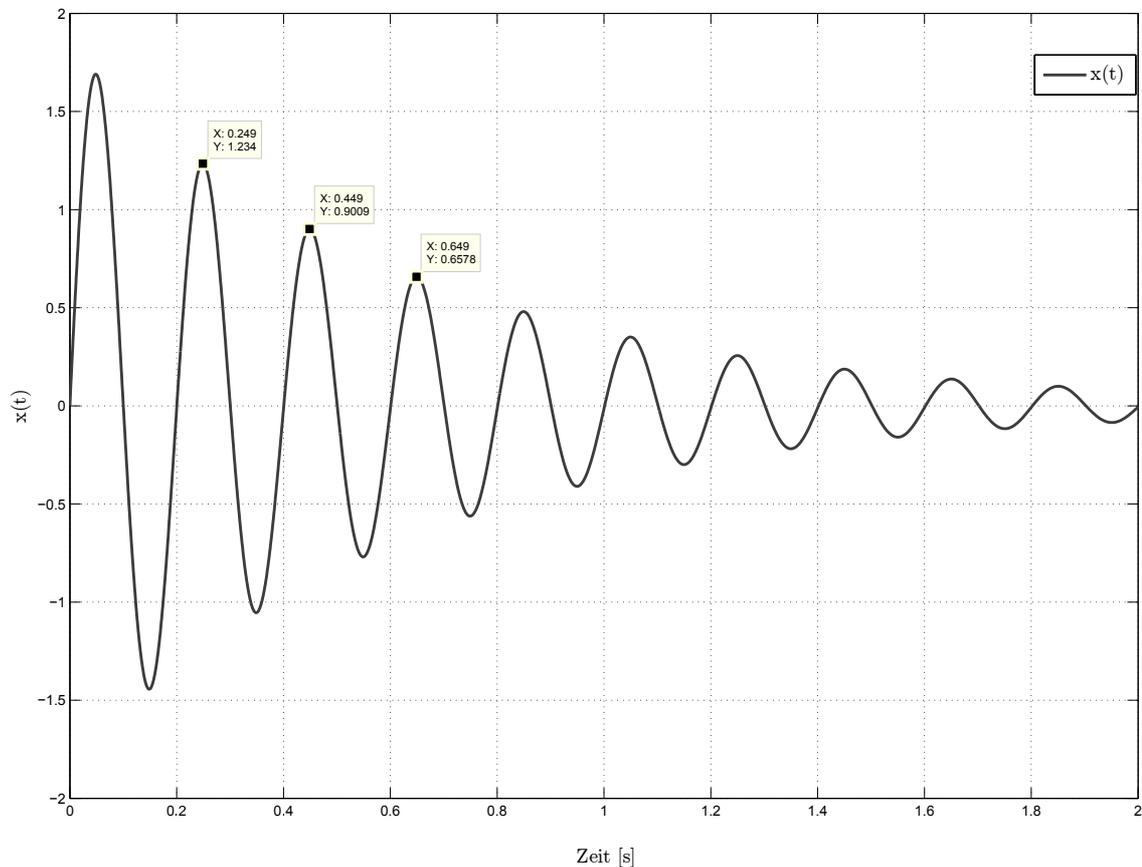


Abbildung 5.5: Funktionen des Property Inspectors

Der „Graphik speichern“-Button hat die Funktionalität, dass entweder ein von MATLAB erzeugtes Figure oder der Inhalt des GUI internen Axes-Fensters abgespeichert werden kann. Die Graphik kann nachfolgend in allen üblichen Bildformaten abgespeichert werden.

Die skalierbaren Vektorgraphiken sind im Vergleich zu der Qualität gewöhnlicher Bildformate wesentlich hochwertiger. Für die Dokumentation der ausgeführten Messdatenuntersuchung ist diese Funktion unersetzlich. Der „Graphik leeren“-Button dient der Wiederherstellung des Startbildes in dem Axes-Fenster und löscht somit alle Graphiken.

Im Anschluss kann über den „Schwerpunkt berechnen“-Buttons der Schwerpunkt ausgegeben werden. Die Berechnung erfolgt in einer separaten MATLAB-Funktion mit den zeitlichen Daten der translatorischen und rotatorischen Beschleunigungen. Um sicherzustellen, dass die Berechnung nicht durch den Kraftimpuls beeinflusst wird, wurde zur Bestimmung der Zeitpunkte an dem der Kraftimpuls beginnt, sein Maximum besitzt und der Impuls vorüber ist eine separate MATLAB-Funktion geschrieben.

An die Funktion „Impulsdauer“ wird der Kraftvektor und der Zeitvektor überge-

ben. Nachfolgend werden die Funktionswerte des Kraftvektors nach einem plötzlich steil ansteigender Werte hin untersucht. Wenn ein Anstieg der Höhe der Werte des Kraftvektors vorhanden ist, so ist dies der Beginn der Impulsdauer (Abbildung 5.6). Dieser Datenpunkt wird in der Variablen „ t_a “ gespeichert.

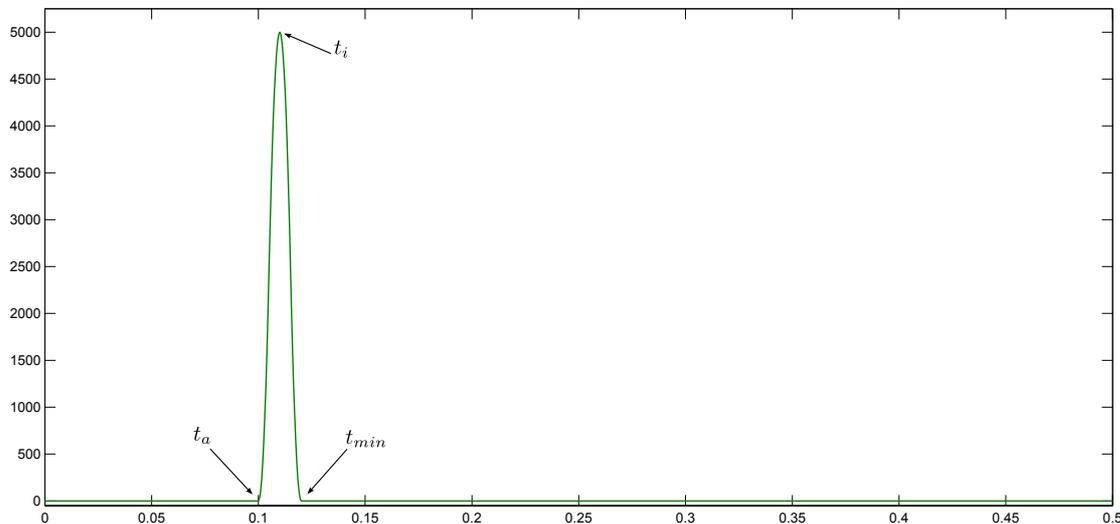


Abbildung 5.6: Zeitverlauf des Kraftimpulses

Bei der Suche nach dem Impulsende wird genau gegensätzlich verfahren zu der Suche nach dem Beginn des Impulses. Hier werden die Werte des Kraftvektors nach dem ersten Wert, der den Wert null einnimmt hin untersucht. Wurde dieser gefunden, ist dies der Zeitpunkt an dem der Kraftimpuls keinen Einfluss mehr hat. Das System schwingt, nach einer kurzen Übergangsphase, frei. Dieser Datenpunkt wird in der Variablen „ t_{min} “ gespeichert.

Die Suche nach dem Kraftmaximum könnte auch mit der MATLAB eigenen „Max-Function“ erfolgen, aber da das Interesse an dem Zeitpunkt des Maximums liegt, wird dieser auch durch die „Impulsdauer-Function“ bestimmt. Bei der Suche nach dem Maximum wird der Funktionswert des Kraftvektors gesucht, der größer ist als der Vorherige und kleiner als der Folgende. Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, ist das Kraftmaximum bestimmt worden. Der Datenpunkt wird in der Variablen „ t_i “ gespeichert.

Die drei Variablen werden von der „Function“ an das GUI zurückübergeben. Für die nachfolgende Berechnung des Schwerpunktes wird die Variable „ t_{min} “, ebenso wie die Vektoren der Beschleunigungen und der Zeit an die Funktion „Schwerpunktsberechnung“ übergeben. Die Variablen t_i und t_a können für die Bestimmung der Impulsdauer und des Impulsbetrages genutzt werden.

In der Funktion „Schwerpunktsberechnung“ wird zunächst mit der Variablen „ t_{min} “ und dem Zeitvektor eine Schleife definiert. In der Schleife werden dann für jeden aufgezeichneten und berechneten Messwert mit den Gleichungen (3.5) und (3.6) zwei Vektoren erzeugt, welche die Werte der Längen L_1 und L_2 für jeden Schleifendurchlauf berechnen.

Die Vektoren beinhalten eine Anzahl nicht auswertbarer Datenpunkte, dies wird nachfolgend mit den Gleichungen (3.4) und (3.5) veranschaulicht. Für die Winkelbeschleunigung gilt:

$$\ddot{\varphi} = f(\ddot{z}_1, \ddot{z}_2) \quad (5.7)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{z}_1 - \ddot{z}_2}{L} \quad (5.8)$$

Mit der Betrachtung wird deutlich, dass wenn die Funktionswerte beider Beschleunigungsvektoren sich aneinander angleichen, der Wert der Winkelbeschleunigung gegen Null geht. Wird diese Erkenntnis nun auf Gleichung (3.5) übertragen, so kann die Berechnung der Länge L_1 auch mit der Grenzwertbetrachtung wie folgt untersucht werden.

$$L_1 = f(\ddot{z}_1, \ddot{z}) \quad (5.9)$$

$$L_1(\varphi \neq 0) = \lim_{\ddot{\varphi} \rightarrow \pm 0} \frac{\ddot{z}_1 - \ddot{z}}{\ddot{\varphi}} = \pm \infty \quad (5.10)$$

Durch die Erkenntnis aus (5.8) wird deutlich, dass wenn der Funktionswert der Winkelbeschleunigung gegen Null geht, das Ergebnis der Gleichung 5.10 ein Extremalwert einnimmt. Die Filterung der Extremalwerte erfolgt mit der nachfolgenden Bedingung:

$$L_1 = \frac{\ddot{z}_1 - \ddot{z}}{\varphi} < L \quad (5.11)$$

Die Bedingung aus Gleichung (5.11) wird sinngemäß auf Gleichung (3.6) übertragen. Die Filterung erfolgt hier gemäß der Bedingung:

$$L_2 = \frac{\ddot{z} + \ddot{z}_2}{\varphi} < L \quad (5.12)$$

Die für die Berechnung der Schwerpunktslage entscheidende Bedingung ist, dass die berechneten Längen L_1 und L_2 in Summe den Wert der Länge L ergeben. Diese Bedingung wird als weiteres Filterkriterium festgelegt.

Die Filterung der Messdaten erfolgt in einer Wiederholungsschleife. Dazu werden zunächst für die Längen L_1 und L_2 je ein neuer Vektor erzeugt. Diese Vektoren \overline{L}_1 und \overline{L}_2 sind über ihre gesamte Länge mit Nullen vorbesetzt.

Diese Vorbesetzung der Vektoren hat einen Hintergrund. Sollten die aufgelisteten Bedingungen nicht erfüllt sein, würde kein Wert in den Vektor eingetragen werden. Dieses würde zu einer Fehlermeldung in MATLAB führen. Mit der Vorbesetzung wird dies umgangen. Die Datenpunkte der Vektoren, welche den Wert Null haben, werden nach der Wiederholungsschleife herausgefiltert.

Sind alle Bedingungen erfüllt, erfolgt die Iteration der Schwerpunktslage und die Eintragung des iterierten Wertes in den jeweiligen Vektor, anschließend wird die Zählvariable n um den Wert 1 erhöht. Die Berechnung der Längen L_1 und L_2 erfolgt daraufhin mit folgenden Gleichungen:

$$L_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \bar{L}_1 \quad (5.13)$$

$$L_2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \bar{L}_2 \quad (5.14)$$

Daraufhin erfolgt mit MATLAB die Berechnung der Standardabweichung. Der Benutzer wird daraufhin über die Anzahl der Messwerte zur Berechnung der Schwerpunktskoordinaten durch ein Dialog-Fenster informiert. Die berechneten Werte werden nachfolgend in die dafür vorgesehenen Textfelder eingetragen.

Als nächstes wird die ME'Scope Text-Datei, welche die modalen Parameter enthält, importiert. Durch die Betätigung des „Einlesen ME'Scope“-Buttons wird der Benutzer zunächst aufgefordert die entsprechende Datei auszuwählen. Durch das Bestätigen erfolgt das Einlesen.

ME'Scope nutzt für die Fließkommadarstellung der modalen Parameter in der Textdatei „Kommas“, MATLAB hingegen mit „Punkte“. Um den Weg einer externen Bearbeitung der Textdatei in einem Editor zu umgehen, wurde eine Funktion geschrieben, welche zunächst die Textdatei einliest, die „Kommas“ gegen „Punkte“ ersetzt und anschließend mit dem gleichen Name wieder abspeichert.

Anschließend wird die Datei erneut eingelesen, um die Anzahl der Zeilen zu identifizieren. Daraufhin wird jede Zeile in einer Wiederholungsschleife ausgelesen und in einem Cell-Objekt (Datencontainer) gespeichert.

In der nachfolgenden Schleife, wird das Cell-Objekt ausgelesen. Es werden nur die Daten importiert, welche als Zahlenwert erkannt werden. Da die Reihenfolge der Parameter in der Textdatei gleichbleibend ist, können diese statisch übergeben werden. Aufgrund eines MATLAB - Problems mit der Erkennung von zwei aufeinander folgenden Anführungszeichen, muss die Einlesung der Daten wie beschrieben erfolgen.

Für die Bestimmung der Schwingform ist es notwendig den Wert der Phasenkennlinie zu dem dazugehörigen Amplitudenwert beider Frequenzgänge in der Eigenfrequenz zu kennen. Sind die Werte der Phase an den Freiheitsgraden DOF1 und DOF2 gegensätzlich bzw. vorzeichenverkehrt zueinander, handelt es sich um eine Rotation um den Schwerpunkt.

Bei einer translatorischen Schwingform sind die Werte der Phase stets gleich. Die Phase ist somit der wichtigste Indikator und kann somit als Zeiger der Schwingform interpretiert werden.

Um die Schwingform zu erkennen werden die Phasenwerte der eingelesenen ME'Scope Datei genutzt. Nachdem die Abfrage der Phasenwerte erfolgt ist und die Schwingform erkannt wurde, wird diese in das entsprechende Textfeld eingetragen.

Durch die Betätigung des Pushbuttons „Trägheitsmoment berechnen“ erfolgt dessen Berechnung. Das Trägheitsmoment wird mit den eingegebenen Werten der axialen Federsteifigkeit, der Masse, der berechneten Schwerpunktslage und den eingelesenen Eigenfrequenzen berechnet und in das formatierte Textfeld eingetragen.

Zur weiteren Berechnung des Massenträgheitsmomentes werden zunächst die Bewegungsdifferentialgleichungen 3.89 und 3.90 noch ein weiteres mal analysiert und folgende Abkürzungen getroffen.

$$\omega_{01}^2 = \frac{c_1 + c_2}{m} \quad \omega_{02}^2 = \frac{c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2}{J_y} \quad (5.15)$$

$$\omega_{12}^2 = \frac{c_1 l_1 - c_2 l_2}{m} \quad \omega_{21}^2 = \frac{c_1 l_1 - c_2 l_2}{J_y} \quad (5.16)$$

Mit Kenntnis über die Beziehungen zwischen den Kopplungsfaktoren nach den Gleichungen (5.16) und (5.15), welche die Eigenfrequenzen eines entkoppelten Systems darstellen, kann mit den gemessenen Eigenfrequenzen ω_1^2 und ω_2^2 folgende Beziehung hergestellt werden [9].

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 \quad (5.17)$$

$$\omega_1^2 \omega_2^2 = \omega_{01}^2 \omega_{02}^2 - \omega_{12}^2 \omega_{21}^2 \quad (5.18)$$

Nach einsetzen der gemessenen Frequenzen und Umformen von Gleichung (5.18), kann das Trägheitsmoment mit folgender Gleichung (5.19) berechnet werden.

$$J_y = \frac{c_1 c_2 (l_1^2 + 2l_1 l_2 + l_2^2)}{m \omega_1^2 \omega_2^2} \quad (5.19)$$

5.1.2 Auswertung mit ME'Scope

Nachfolgend wird die Auswertung mit ME'Scope am Beispiel des zweidimensionalen Modells Variante 4 aus 4.2.1 (Seite 43) vollzogen.

Für die Analyse der Messdaten wird die Programmunterfunktion „Basic Modal Analysis“ ausgewählt. Die graphische Darstellung und die Animation von dem zu untersuchenden Körper kann auf mehrer Weisen erfolgen.

Die Simulation bzw. Animation der Struktur ist beispielsweise durch ein Drahtmodell, ein fotorealistisches Modell oder auch als Starrkörper möglich. Für die weiterführende Untersuchung der Fläche wird diese als Starrkörper angenommen. Dies hat den Hintergrund, dass nur Interesse an den Schwingformen des Körpers besteht und die Informationen über Verformungen, Spannungen oder der Gleichen keine für die Auswertung brauchbaren Informationen liefert.

Nachfolgend wird die Fläche in dem „Structure Window“ gebildet. Die geometrischen Parameter des Modells werden in dem Menü „Measurement Axes“ eingepflegt. Die Anordnung des Koordinatensystems, erfolgte in gleicher Weise zu der Wahl in SIMPACK.

Weiterhin werden die realen Abmessungen, bzw. die skalierbare Abmessungen genutzt um diese dann auf die reale Struktur übernehmen zu können. Die Freiheitsgrade des Systems und die Zuordnung an welchen Punkten die Beschleunigungssensoren liegen oder die Krafteinleitung erfolgt, wird in dem Menüpunkt „Animation Equations“ durchgeführt.

Entscheidend ist hier die Einstellung der gemessenen Achsrichtung vorzugeben. Die Positionen der Sensoren wurden simultan aus SIMPACK übertragen und sind an den Positionen P1 und P2 hinterlegt. Somit erfolgt auch die Erregung des Systems in der oberen rechten Ecke der Fläche an Position P4. Das Ergebnis, nach erfolgter Eingabe der Daten ist in Abbildung 5.7 dargestellt.

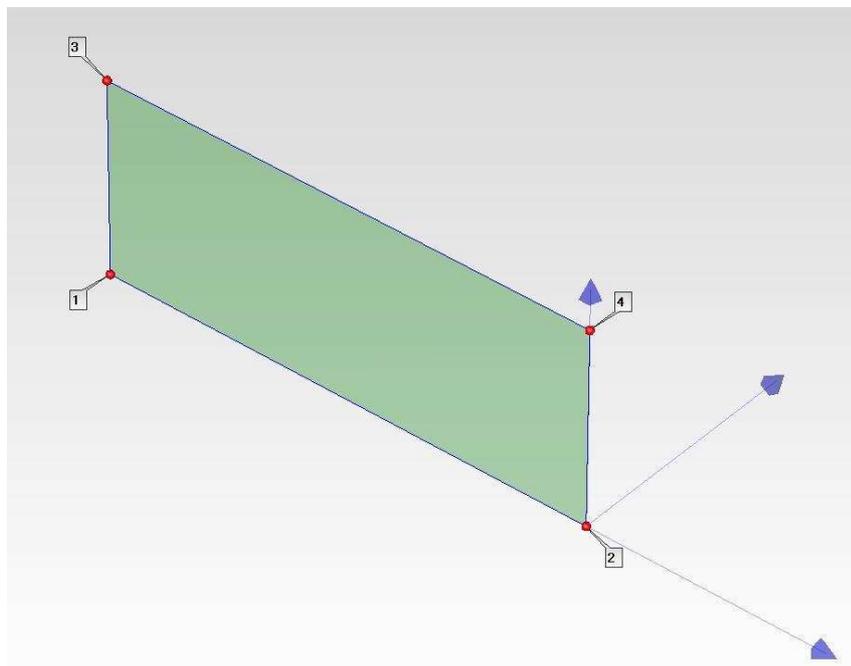


Abbildung 5.7: Modellierter zweidimensionaler Starrkörper

Die Importierung der aufgezeichneten zeitlichen Verläufe der Sensoren ist der nächste Schritt. Hierbei ist es entscheidend die richtige Auswahl des Erregersignals und der Antwortsignale, sowie die Zuordnung der Freiheitsgrade und der Einheiten zu treffen.

Der in SIMPACK angelegte Zeitvektor muss nicht eingepflegt werden. Die Zeitachse wird mit der Kenntnis über die Zeitdauer, die Abtastrate und somit über die Anzahl

der Datenpunkte von der Messung entsprechend skaliert. Ist dies geschehen, sind die zeitlichen Verläufe in den „Data Block (BLK) File“ hinterlegt worden. Die Verläufe sind in Abbildung 5.8 graphisch dargestellt.

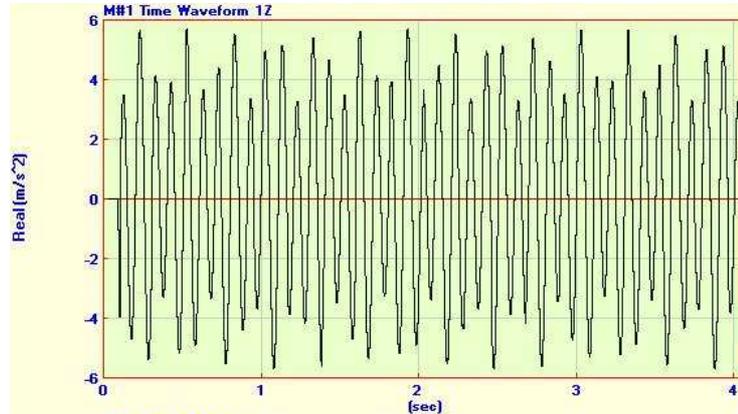


Abbildung 5.8: Verlauf der ungedämpften Schwingung in ME'Scope

Obwohl es sich bei dem Simulationsmodell um ein mathematisches Modell handelt, wird das Vorgehen entsprechend der Analyse eines realen Systems erfolgen. Dazu werden zunächst die Zeitdaten mittels einer Fast-Fourier-Transformation (FFT) in den Frequenz-, bzw. in den Bildbereich transformiert.

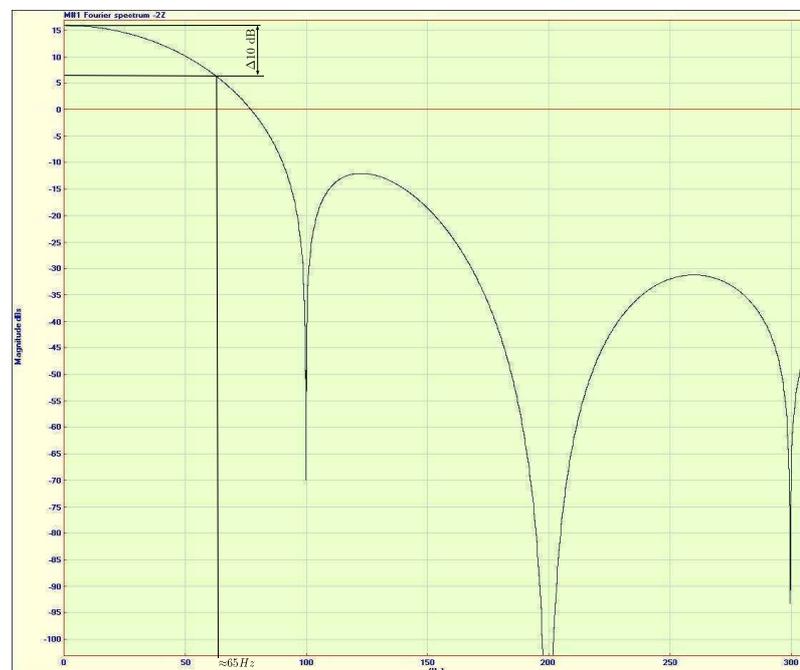


Abbildung 5.9: Fourierspektrum des Eingangssignals

Weiterführend wird nun das Erregersignal analysiert, ob es den Kriterien der 10 dB - Regel entspricht (Abbildung 5.9). Aus der Darstellung des transformierten Erregersignals geht für das Modell Variante 4 somit hervor, dass der verwertbare

Frequenzbereich bis etwa 65 Hz reicht. Die Eigenfrequenzen des Modells liegen in dem Bereich von 0 bis 20 Hz, somit kann die Auswertung fortgeführt werden.

Für die Bestimmung der Übertragungsfunktion, vergleiche 3.7.3 (Seite 26), wird aus der Menübar der Reiter „Transform“ die Option „MIMO (Multi Input Multi Output)“ und anschließend „Transfer Functions“ ausgewählt, woraufhin folgendes Abfragefenster (5.10) erscheint.

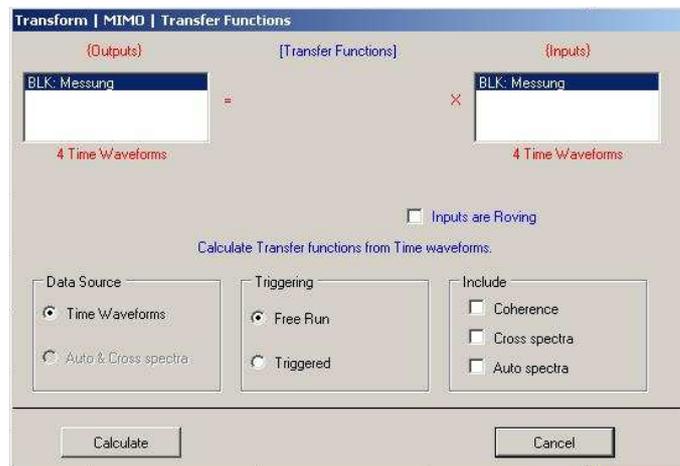


Abbildung 5.10: Bestimmung der Übertragungsfunktion in ME'Scope

Nachdem die Übertragungsfunktionen gebildet wurden, zeigt sich zunächst die logarithmierte Darstellung der Amplitudenfrequenzgänge (FRF - Frequency Response Function) (Abbildung 5.11). In der Abbildung sind diverse Resonanzen sichtbar, welche nicht von Interesse für die Auswertung sind.

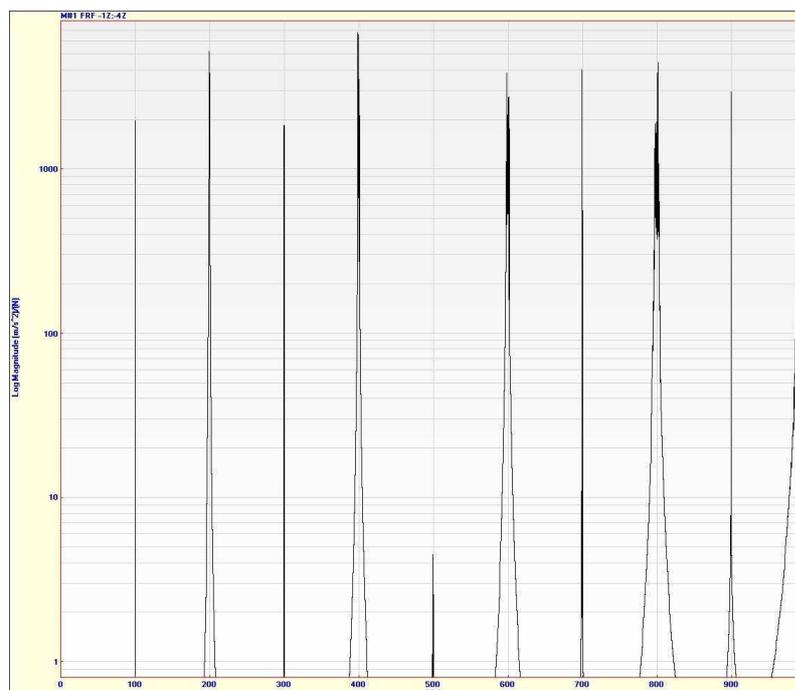


Abbildung 5.11: Logarithmierter Amplitudenfrequenzgang

In dem Frequenzbereich bis 20 Hz stellen sich die Amplitudenfrequenzgänge der

Übertragungsfunktionen wie in Abbildung 5.12 dar. Bereits in dieser Darstellung werden die Eigenfrequenzen deutlich an den Resonanzüberhöhungen sichtbar. Für die exakte Ermittlung der modalen Parameter wird nun der „Mode Indicator“ aufgerufen.

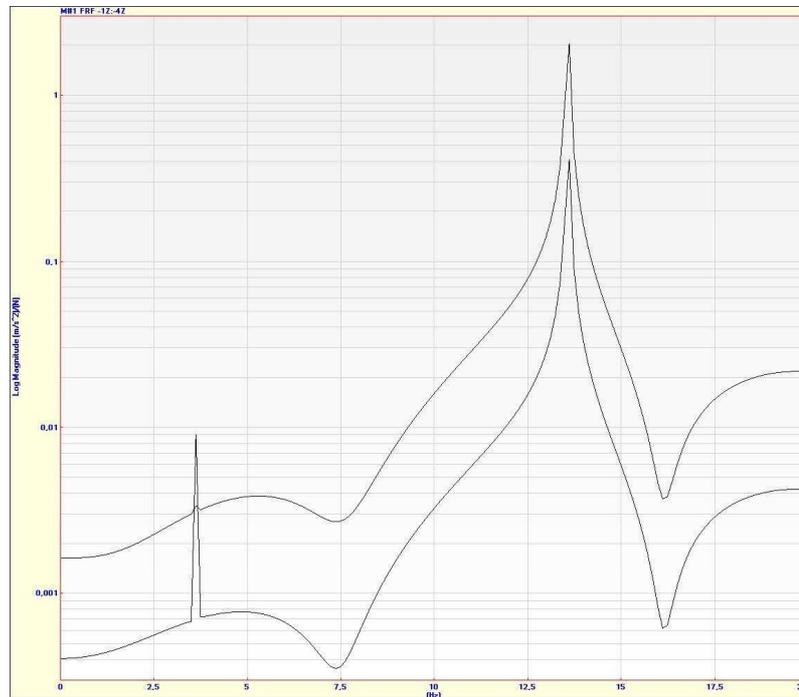


Abbildung 5.12: Logarithmierter Amplitudengang bis 20 Hz

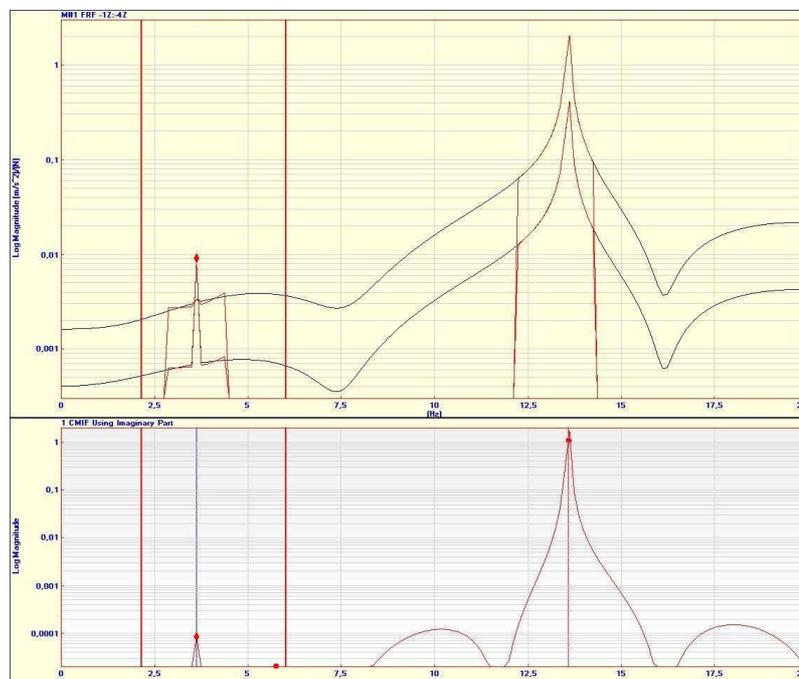


Abbildung 5.13: Gefitteter Amplitudengang

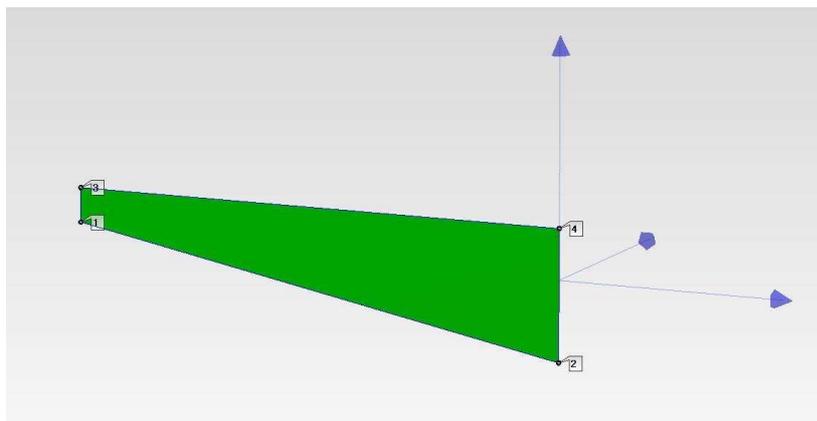
Die horizontalen Begrenzungen des Frequenzbereichs werden mittels der vertikalen roten Schiebeleisten vorgenommen, so dass nur der begrenzte Bereich untersucht wird. Durch das Aktivieren der „Complex Mode Indicator Function (CMIF)“ und

der zusätzlichen Ansicht des Imaginäranteils der Übertragungsfunktion, werden an den Polstellen dieser die modalen Parameter lokalisiert (Abbildung 5.13).

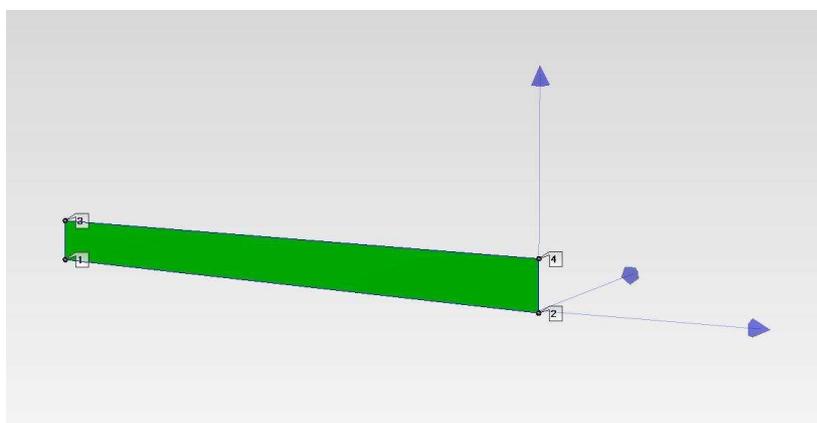
In der Abbildung erfolgte bereits das sogenannte „Curve Fitting“. Das „Curve Fitting“ ist eine mathematische Beschreibung bzw. Annäherung an den Verlauf des Amplitudenfrequenzgangs, wodurch die modalen Parameter bestimmt werden. Die Eigenfrequenzen der Schwingformen können bereits mit hinreichender Genauigkeit an der Frequenzachse abgelesen werden. Die Amplitudenwerte entsprechend an der Ordinate des Diagramms.

Durch das „Curve Fitting“ werden die ermittelten Parameter in den Programminterne „Shape Table“ übernommen. Durch die Auswahl „Animate Structure“ werden die modalen Parameter mit den Freiheitsgraden der angelegten Struktur verbunden. Nach Aktivierung der „Sweep Animation“ werden die Schwingformen visualisiert.

Die rotatorische Schwingform ist in Abbildung 5.14a und die translatorische in Abbildung 5.14b ersichtlich. Die Amplituden können für eine deutlichere Identifikation der Schwingform beliebig skaliert werden. Die Animation in ME'Scope bezieht sich nur auf die gemessenen Freiheitsgrade des Systems und somit werden die Punkte P3 und P4 nicht in die Animation einbezogen.



(a)



(b)

Abbildung 5.14: (a) Rotatorische und (b) translatorische Schwingform

Bei der Untersuchung der ermittelten Parameter fällt sehr deutlich eine Dämpfungsfrequenz auf. Da diese allerdings einen sehr geringen Wert von $\pm 0.002\%$ der ungedämpften Eigenfrequenz hat, wird hier die Annahme getroffen, dass dies Aufgrund des „Curve Fittings“ und der Näherung an den Kurvenverlauf des Amplitudengangs erfolgte.

Der „Shape Table“ enthält alle Informationen der modalen Parameter und wird für die weitere Messdatenauswertung in MATLAB in eine Textdatei exportiert.

5.1.3 Auswertung mit FreQuenCy 2D

Die Auswertung mit dem Programm FreQuenCy 2D erfolgt an dem zweidimensionalen Simulationsmodell aus 4.2.2 (Seite 44) mit Dämpfung Variante 2.

Nach erfolgter Eingabe sämtlicher Kennwerte und dem Einlesen der Beschleunigungsdaten erfolgt zunächst die Überprüfung der berechneten Daten. Dazu werden die Beschleunigungen übereinander geplottet. Dies wird am Beispiel der Winkelbeschleunigung in den folgenden Abbildungen dargestellt.

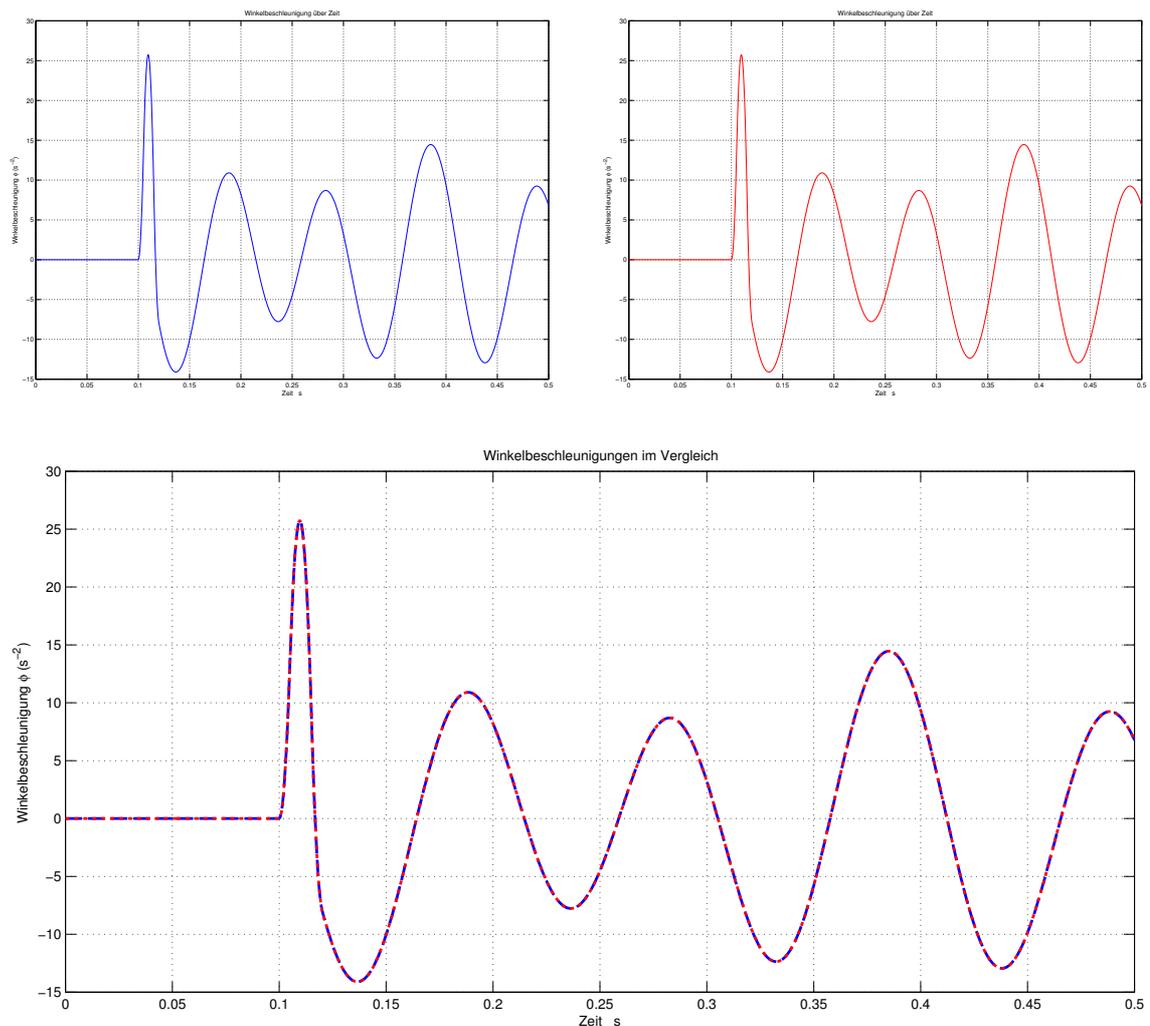


Abbildung 5.15: Oben links Winkelbeschleunigung nach SIMPACK, oben rechts berechnete Winkelbeschleunigung, unten beide Winkelbeschleunigung im Vergleich

Die Darstellungen zeigen, dass die Berechnung der Winkelbeschleunigung exakt ist und keine Differenz zwischen den Funktionswerten vorhanden ist.

Bei der Schwerpunktsbeschleunigung hingegen zeigt sich eine Differenz gegenüber der realen Schwerpunktsbeschleunigung. Um diese darzustellen wird hier auf die nachfolgenden Abbildungen verwiesen.

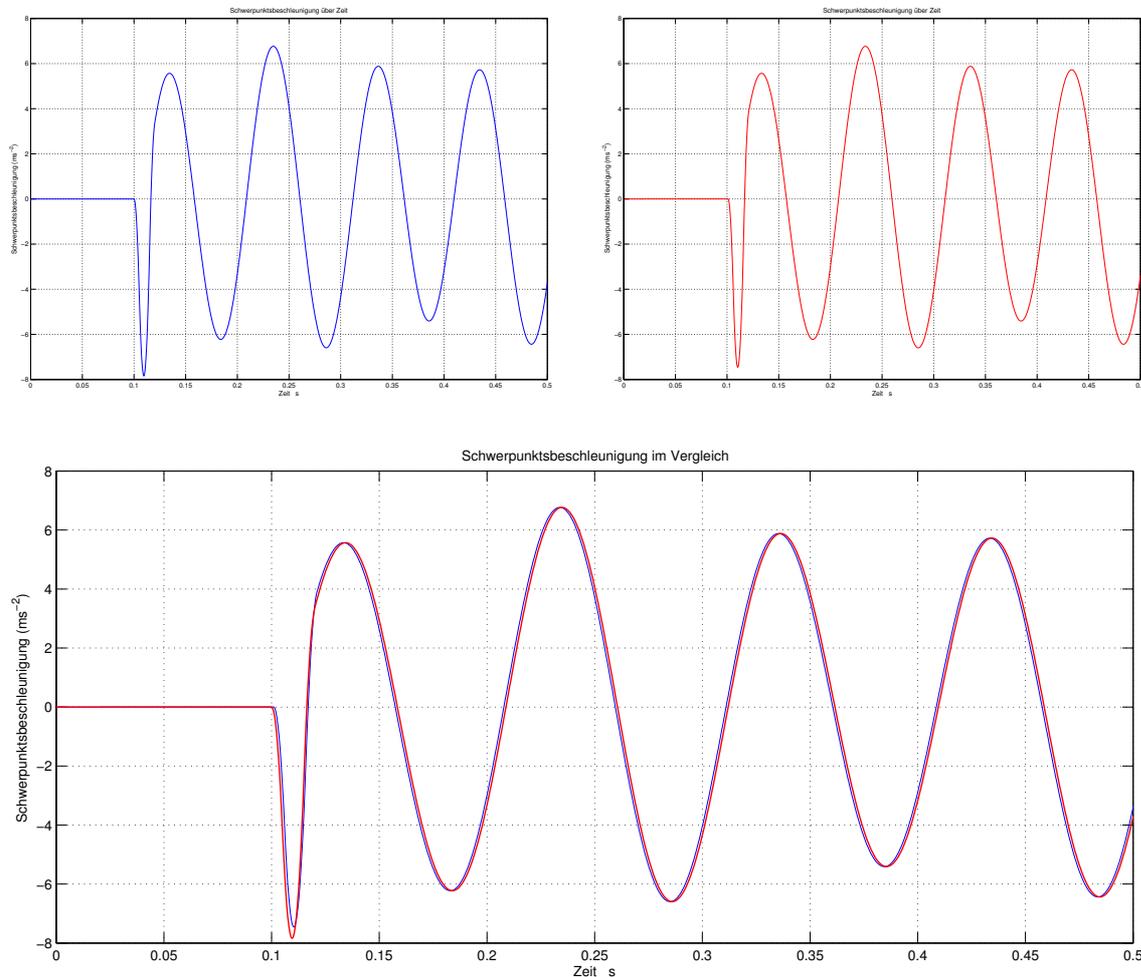


Abbildung 5.16: Oben links Schwerpunktsbeschleunigung nach SIMPACK; oben rechts berechnete Schwerpunktsbeschleunigung; unten beide Beschleunigungen im Vergleich

Die Differenz zwischen der berechneten und der real ausgegebenen Schwerpunktsbeschleunigung ist sehr gering.

An dieser Stelle wird daher die Annahme getroffen, dass die Abweichung aufgrund der zweimaligen Integration der Beschleunigungen erfolgte.

Wie auch bereits bei der Auswertung mit ME'Scope wird das Erregerkraftsignal nach den Kriterien der 10 dB - Regel untersucht. Die Abbildung 5.17 stellt das transformierte Erregerkraftsignal dar. Identisch zu der ME'Scope Abbildung 5.9 auf Seite 74 reicht auch hier der verwertbare Frequenzbereich bis etwa 65 Hz reicht.

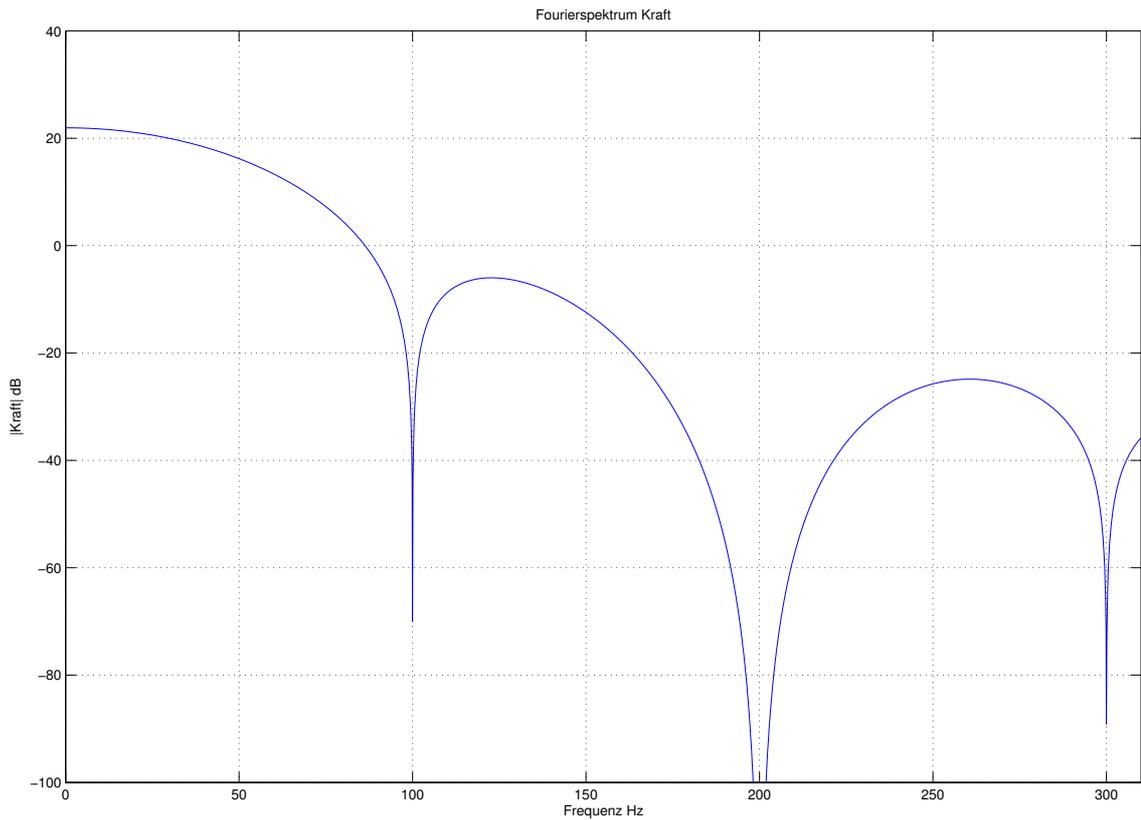


Abbildung 5.17: Fourierspektrum des Erregerkraftsignals

Anschließend erfolgt die Berechnung des Schwerpunktes. Das Massenträgheitsmoment wird aus den Daten der Eigenformen, welche aus ME'Scope als Text-Datei exportiert wurden berechnet.

Die Ausgabe der berechneten Parameter stellt den Inhalt der nachfolgenden Abbildung 5.18 dar.

| | Eigenform 1 | | Eigenform 2 | |
|---|--|--------------|--|--------------|
| | Amplitude [(m/s ²)/(N)] | Phase [°] | Amplitude [(m/s ²)/(N)] | Phase [°] |
| DOF: -1Z:-4Z | 0.039297 | 153.44 | 0.051141 | 30.641 |
| DOF: -2Z:-4Z | 0.01782 | -34.796 | 0.11438 | 30.792 |
| Omega [1/s] | 40.3167 | | 62.7684 | |
| Omega_d [1/s] | 0.252402 | | 0.530313 | |
| Schwingform | Rotation | | Translation | |
| Schwerpunktskoordinaten [m] | | | Von Feder 1 | 0.16 ± 0.07 |
| | | | Von Feder 2 | 0.34 ± 0.07 |
| Massenträgheitsmoment [kgm ²] | | | | 65.0634 |

Abbildung 5.18: Ausgabe der Parameter durch FreQuenCy 2D

Die graphische Darstellungen der Amplitudenfrequenzgänge, in der nachfolgenden Abbildung bestätigen die ermittelten Werte der Eigenfrequenzen aus der Modalanalyse mit ME'Scope.

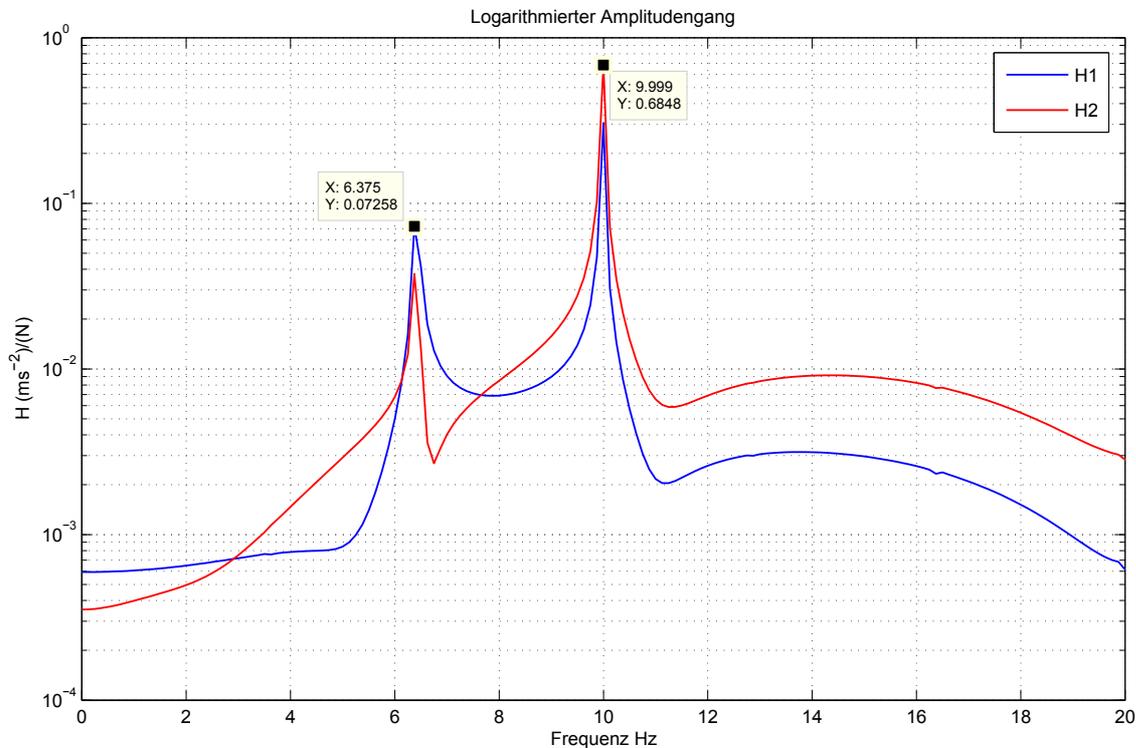


Abbildung 5.19: Amplitudenfrequenzgänge

5.1.4 Validierung der Messergebnisse

5.1.4.1 Analytische Berechnung der Eigenfrequenzen

Der Vergleich der Messwerte erfolgt an den allen Simulationsmodellen inklusive derer aus dem Anhang.

Die analytische Berechnung der Eigenfrequenzen erfolgt mit der nachfolgender Gleichung und mit den getroffenen Abkürzungen aus (5.15) und (5.16) (Seite 72).

$$\omega_{12}^2 = \frac{1}{2} (\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4} (\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2)^2 + \omega_{12}^2 \omega_{21}^2} \quad (5.20)$$

Die Zuordnung der Eigenfrequenzen erfolgte mittels der Schwingformanalyse durch FreQuenCy 2D.

Der Abgleich der Kennwerte erfolgt mit den Daten der Simpackmodelle. Zur Verbesserung der Übersichtlichkeit werden die Ergebnisse in Tabellen dargestellt.

5.1.4.2 Soll-Ist-Vergleich der Simulationsmodelle

Die Berechnungsergebnisse der Modelle sind in den folgenden zwei Tabellen zusammengefasst. Die weiteren Ergebnisse befinden sich im Anhang.

Tabelle 5.1: Soll-Ist-Vergleich Simulationsmodell Variante 4

| Formelzeichen | Einheit | Soll-Wert | Ist-Wert | Differenz % |
|---------------|----------|-----------|--------------|-------------|
| ω_1 | s^{-1} | 22.79 | 22.78 | 0.04 |
| ω_2 | s^{-1} | 85.39 | 85.38 | 0.01 |
| J_s | $kgms^2$ | 600.00 | 600.71 | 0.12 |
| x_s | m | 2.00 | 2 ± 0.05 | 0 |

Tabelle 5.2: Soll-Ist-Vergleich Simulationsmodell Variante 7

| Formelzeichen | Einheit | Soll-Wert | Ist-Wert | Differenz % |
|---------------|----------|-----------|-----------------|-------------|
| ω_1 | s^{-1} | 40.36 | 40.32 | 0.09 |
| ω_2 | s^{-1} | 62.73 | 62.77 | 0.06 |
| J_s | $kgms^2$ | 65.00 | 65.06 | 0.09 |
| x_s | m | 0.35 | 0.36 ± 0.07 | 2.9 |

5.2 Auswertung 3D Modell

Aufgrund eines Fehlers bei der Berechnung der Federsteifigkeit der dreidimensionalen Modelle, konnte die Schwerpunktsbestimmung aus zeitlichen Gründen nicht weiter verfolgt werden. Daher wird nachfolgend nur die Bestimmung der modalen Parameter diskutiert.

Die Auswertung der dreidimensionalen Simulationsmodelle erfolgt am Beispiel des symmetrischen Modells Variante 3 nach Abbildung 5.20.

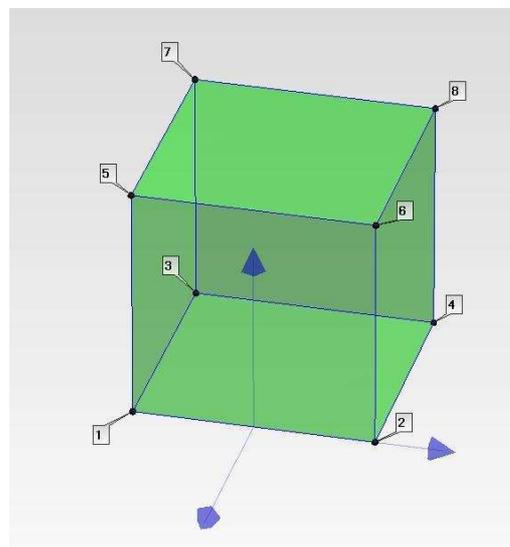


Abbildung 5.20: Symmetrisches dreidimensionales Modell

Zu jeder Anregung des Modells erfolgte eine simultane Aufzeichnung der Beschleunigungen an den Punkten P1 bis P4. In Summe ergeben sich auf jede Anregungsrichtung zwölf Beschleunigungssignale und ein Kraftessignal. Optional können alle Signal eingelesen werden um diese gemeinsam auszuwerten. Nach Bestimmung der Übertragungsfunktionen werden somit sechshundertsechzig Amplitudenfrequenzgänge gebildet. Dies zeigt Abbildung 5.21.

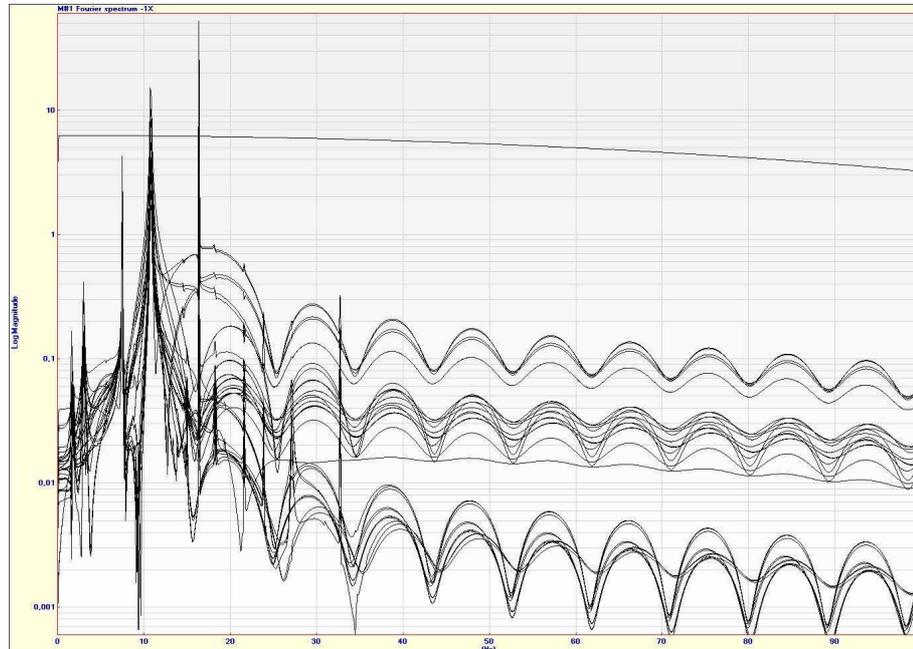


Abbildung 5.21: Überlagerung der Amplitudenfrequenzgänge aller Anregungsrichtungen

In dem relevanten Frequenzbereich bis 20 Hz stellen sich die Amplitudenfrequenzgänge wie folgt dar.

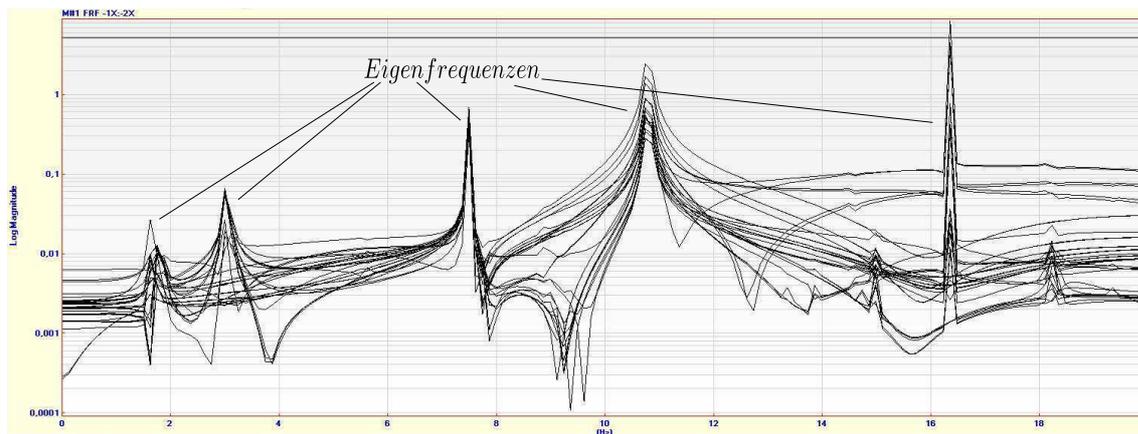


Abbildung 5.22: Amplitudenfrequenzgänge bis 20 Hz

Bereits in dieser Ansicht wird deutlich, dass nur fünf Resonanzüberhöhungen zu identifizieren sind. Daher wird davon Annahme getroffen, dass zwei Frequenzen sehr dicht beieinander liegen und somit ist eine Auswertung mit allen Übertragungsfunktionen nicht möglich. Ein „Curve-Fitting“ und die Bestimmung der modalen Parameter würde keine verwertbaren Ergebnisse liefern, so dass eine gemeinsame Auswertung der Übertragungsfunktionen ausgeschlossen wird.

Bei der Untersuchung einzelner Amplitudenfrequenzgänge zeigte sich, dass durch die Anregungsrichtung bestimmte Eigenfrequenzen sichtbar werden, während andere in der Systemantwort fehlen. Dieser Sachverhalt wird durch die nachfolgenden Abbildungen verdeutlicht.

Die Systemantwort der x-Richtung (Abbildung 5.23) zeigt sehr deutlich vier ausgeprägte Resonanzüberhöhungen, anhand derer ein „Curve-Fitting“ möglich wäre.

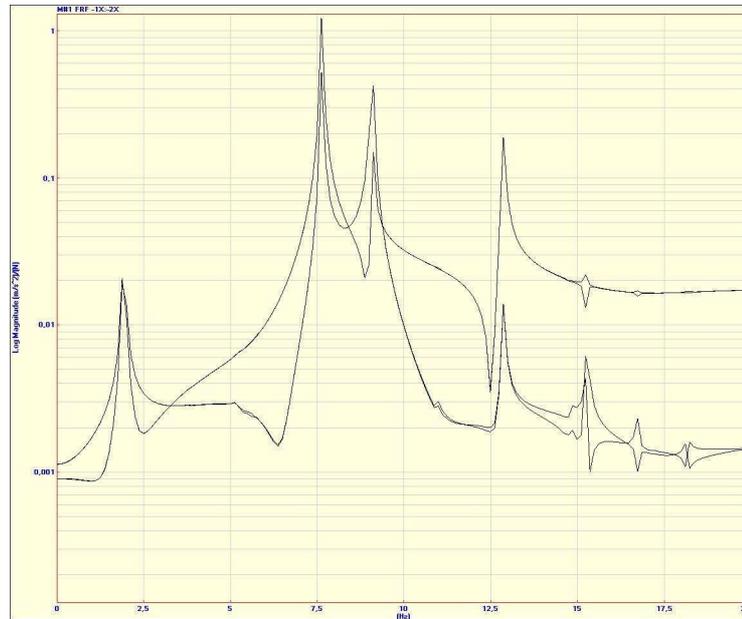


Abbildung 5.23: Systemantwort x auf Erregung in x-Richtung

In der Systemantwort der y-Richtung (Abbildung 5.24) wird die Vorgehensweise bestätigt. Die Zahl der ausgeprägten Resonanzüberhöhungen kann hier nur mit drei beziffert werden. Auffällig zeigt sich, dass die Resonanzstellen bei 7,5 Hz und 8,5 Hz einen nahezu identischen Verlauf annehmen.

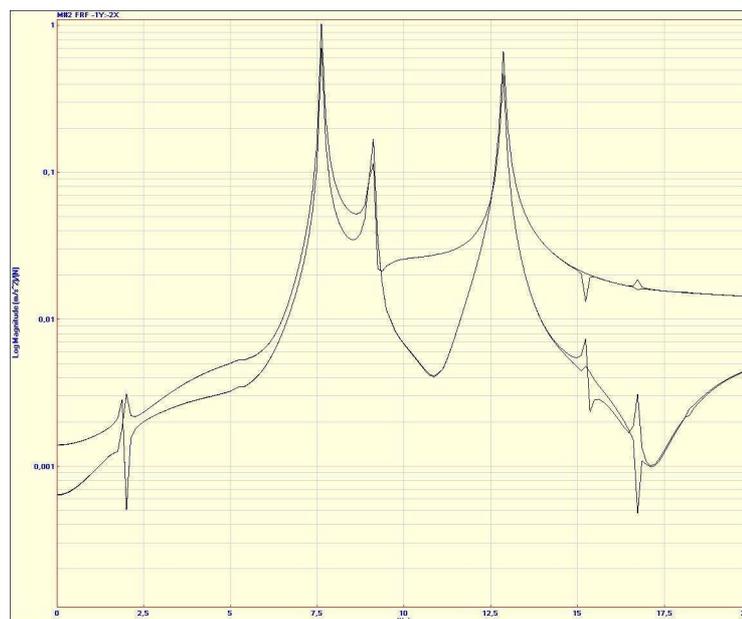


Abbildung 5.24: Systemantwort y auf Erregung in x-Richtung

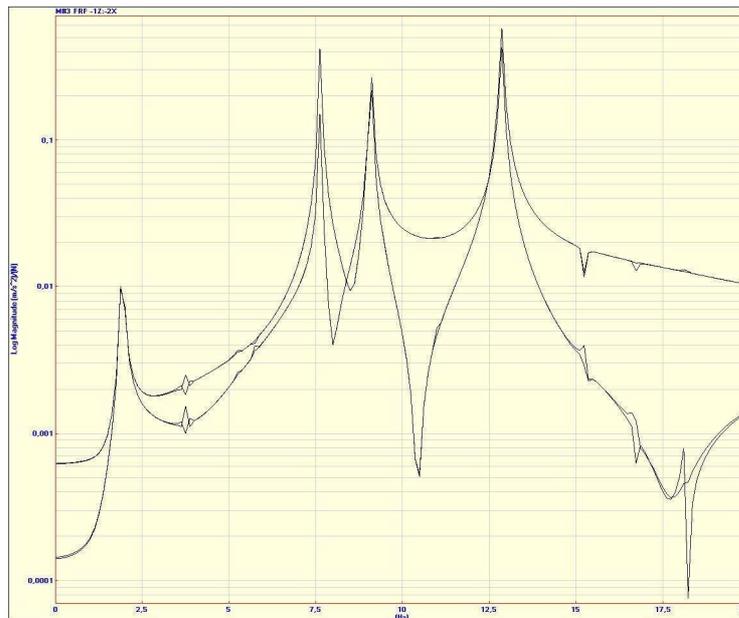


Abbildung 5.25: Systemantwort z auf Erregung in x-Richtung

Die Systemantwort der z-Richtung (Abbildung 5.25) zeigt vier deutlich ausgeprägte Resonanzüberhöhungen.

Nachfolgend wurde durch Überlagern der Amplitudenfrequenzgänge das „Curve-Fitting“ (Abbildung 5.26) durchgeführt um die modalen Parameter zu bestimmen. Die Identifikation erfolgt mit der lokalen Begrenzung durch die roten vertikalen Schiebeleisten.

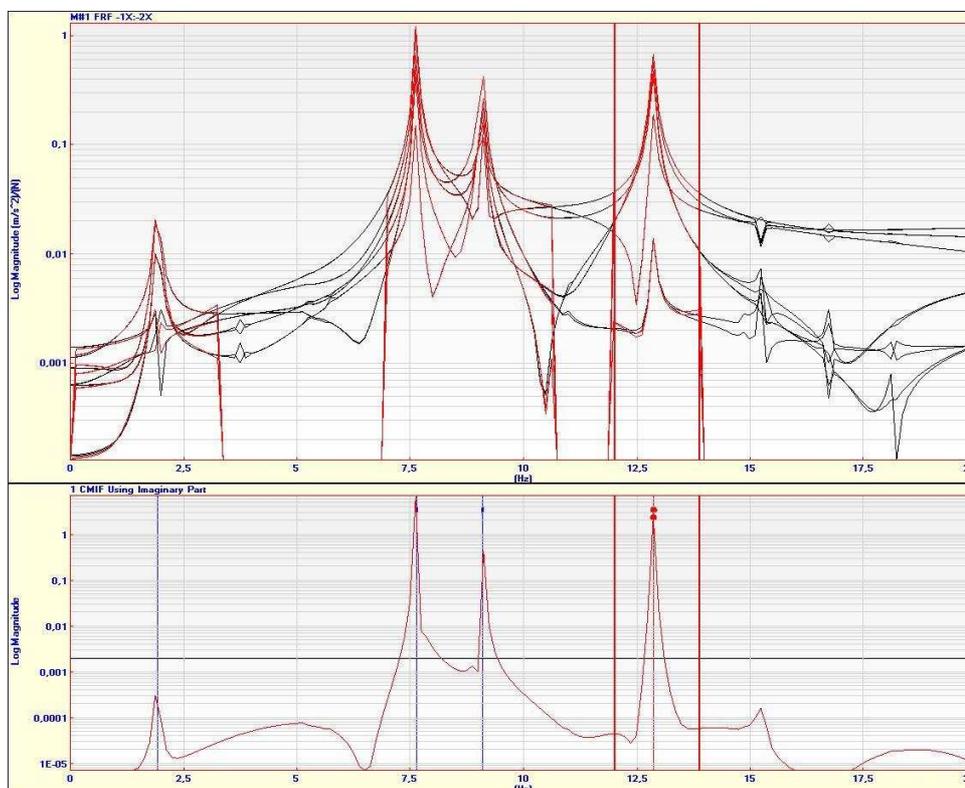


Abbildung 5.26: „Curve-Fitting“ der Amplitudenfrequenzgänge bei Anregung in x-Richtung

Nachfolgend werden die Eigenformen dargestellt, die durch Anregung in x-Richtung entstehen. In der Abbildung 5.27(a), ist die Eigenform als Schubbewegung in Richtung der x-Achse abgebildet und die Drehbewegung um die z-Achse wird in Abbildung 5.27(b) dargestellt.

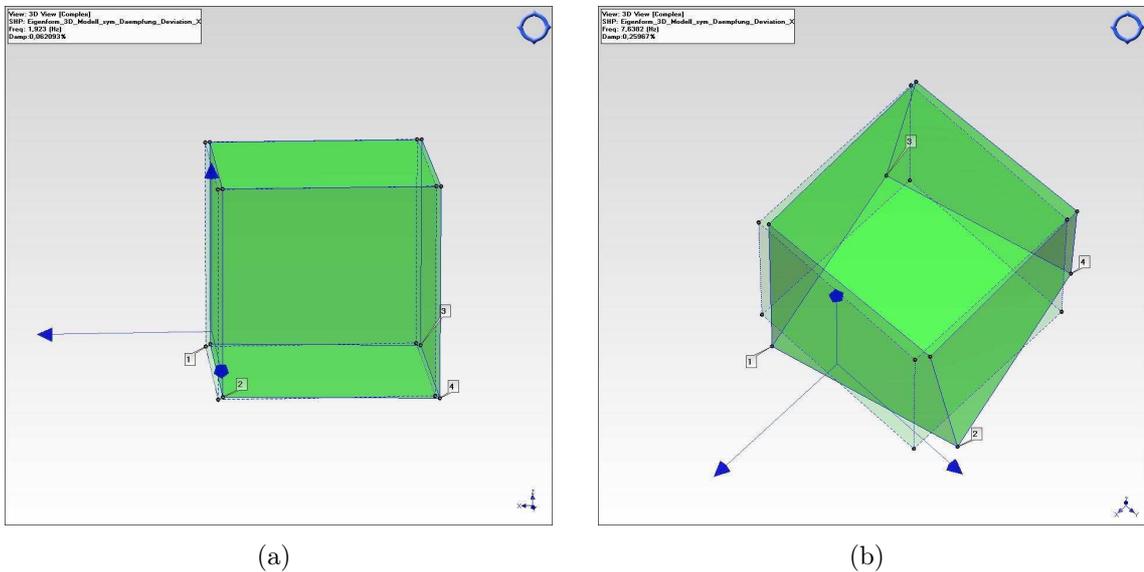


Abbildung 5.27: Eigenformen in x-Richtung (a) und um die z-Achse (b)

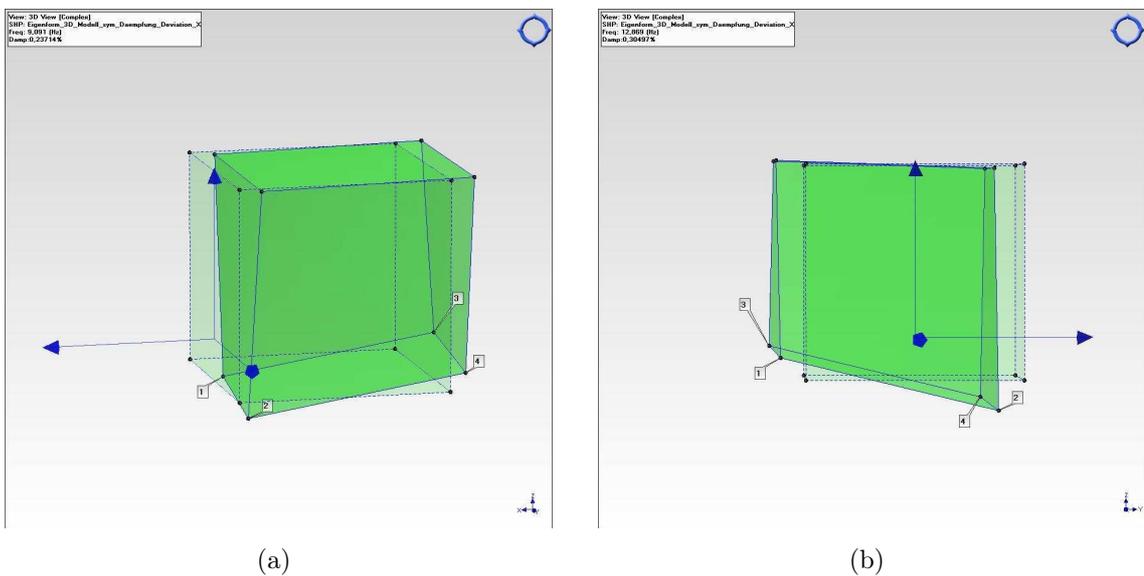


Abbildung 5.28: Eigenformen um y-Achse (a) und um x-Achse (b)

Bei der Rotation um die y-Achse (Abbildung 5.28(a)) zeigt sich zugleich eine Translation in Richtung der x-Achse. Die Rotation um die x-Achse (Abbildung 5.28(b)) zeigt ein ähnliches Verhalten, so dass hier ebenfalls eine Translation in Richtung der y-Achse festzustellen ist.

Die Auswertung durch die Systemanregung in negativer y -Achse zeigt ein gleiches Verhalten der Amplitudenfrequenzgänge. Die nachfolgende Abbildung stellt in Bezug auf den Ort der Systemantwort durch den Ort der Systemerregung in gleicher Achsrichtung dar. Dies zeigt die zwei Frequenzen im gleichem Frequenzbereich. Hieraus bestätigt sich die Annahme, dass zwei Frequenzen sehr nah beieinander liegen.

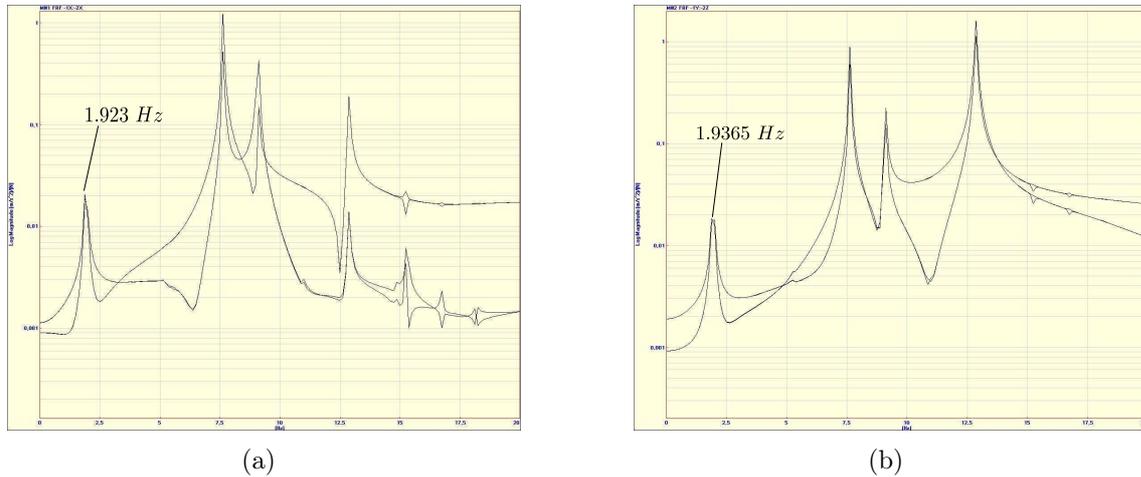


Abbildung 5.29: Systemantwort auf Systemerregung, jeweils in x -Richtung (a) und Systemantwort auf Systemerregung, jeweils in y -Richtung (b)

Die Weiteren Amplitudenfrequenzgänge zeigten ein ähnliches Verhalten, so dass hier auf die Darstellungen im einzelnen verzichtet wird und nur zwei Eigenformen dargestellt werden. In Abbildung 5.30(a) ist die Translatorisch Schwingform in y -Richtung dargestellt.

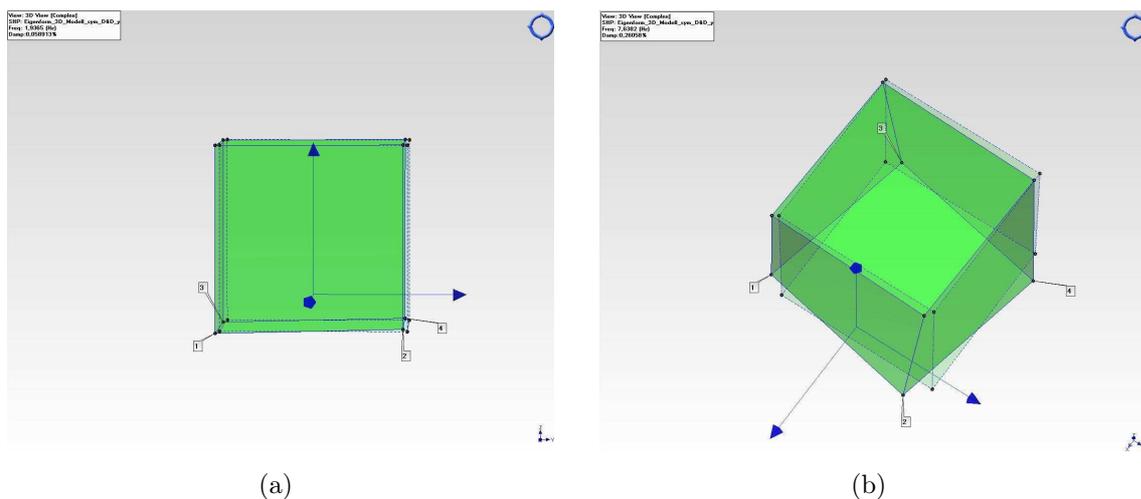


Abbildung 5.30: Eigenformen in y -Achsrichtung (a) und um z -Achse (b)

Erneut zeigt sich die rotatorische Schwingform um die z -Achse in Abbildung 5.30(b). Die weiteren Eigenformen gleichen den Eigenformen der x -Anregung und liefern keine neuen Informationen.

$$\omega_{2,4}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{c_{44}}{J_{\xi\xi}} + \frac{c_{22}}{m} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{c_{44}}{J_{\xi\xi}} + \frac{c_{22}}{m} \right)^2 + \frac{c_{24}^2 - c_{22}c_{44}}{J_{\xi\xi} m}} \quad (5.23)$$

$$\omega_6^2 = \frac{c_{66}}{J_{\zeta\zeta}} \quad (5.24)$$

5.2.1.2 Berechnung der Massenträgheitsmomente

Für die Berechnung des symmetrischen Modells, werden die Gleichungen (5.23) nach den Trägheitsmomenten umgestellt.

$$J_{\xi\xi} = \frac{c_{15}^2 - c_{11} c_{55} + \omega_{1,5}^2 m c_{55}}{\omega_{1,5}^4 m - \omega_{1,5}^2 c_{11}} \quad (5.25)$$

$$J_{\eta\eta} = \frac{c_{24}^2 - c_{22} c_{44} + \omega_{2,4}^2 m c_{44}}{\omega_{2,4}^4 m - \omega_{2,4}^2 c_{22}} \quad (5.26)$$

$$J_{\zeta\zeta} = \frac{c_{66}}{\omega_6^2} \quad (5.27)$$

5.2.1.3 Soll-Ist-Vergleich des dreidimensionalen Modells

Die Ergebnisse sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengefasst. Weitere Berechnungsergebnisse können im Anhang eingesehen werden.

Tabelle 5.3: Soll-Ist-Vergleich 3D Simulationsmodell Variante 3

| Formelzeichen | Einheit | Soll-Wert | Ist-Wert | Differenz % |
|---------------------------------|-----------|-----------|----------|-------------|
| ω_x | s^{-1} | 12.63 | 12.08 | 4.55 |
| ω_y | s^{-1} | 12.57 | 12.17 | 3.29 |
| ω_z | s^{-1} | 23.37 | 23.35 | 0.09 |
| $\omega_{\varphi_{\xi\xi}}$ | s^{-1} | 54.60 | 57.12 | 1.84 |
| $\omega_{\varphi_{\eta\eta}}$ | s^{-1} | 76.72 | 80.86 | 1.72 |
| $\omega_{\varphi_{\zeta\zeta}}$ | s^{-1} | 49.64 | 48.00 | 3.42 |
| $J_{\xi\xi}$ | $kgm s^2$ | 25.00 | 24.13 | 0.12 |
| $J_{\eta\eta}$ | $kgm s^2$ | 50.00 | 48.17 | 0.12 |
| $J_{\zeta\zeta}$ | $kgm s^2$ | 35.00 | 34.97 | 0.12 |
| $J_{\xi\eta}$ | $kgm s^2$ | 5 | / | / |
| $J_{\xi\zeta}$ | $kgm s^2$ | 5 | / | / |
| $J_{\eta\zeta}$ | $kgm s^2$ | 5 | / | / |

5.3 Auswertung der Motoren

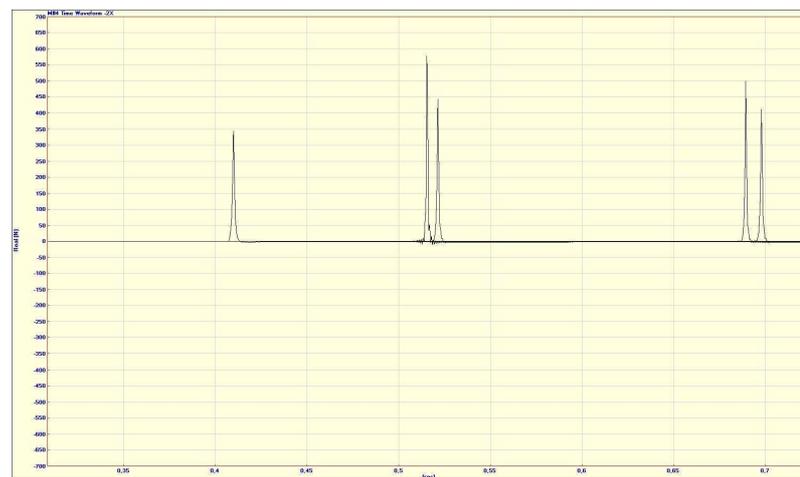
Wie bereits bei dem 3D-Modell, wird die Bestimmung der Schwerpunktskoordinaten nicht weiter verfolgt.

Da Schwerpunktskoordinaten und Motormasse nicht bekannt sind, ist die Berechnung der Massenträgheitsmomente aus den gemessenen Eigenfrequenzen nicht möglich.

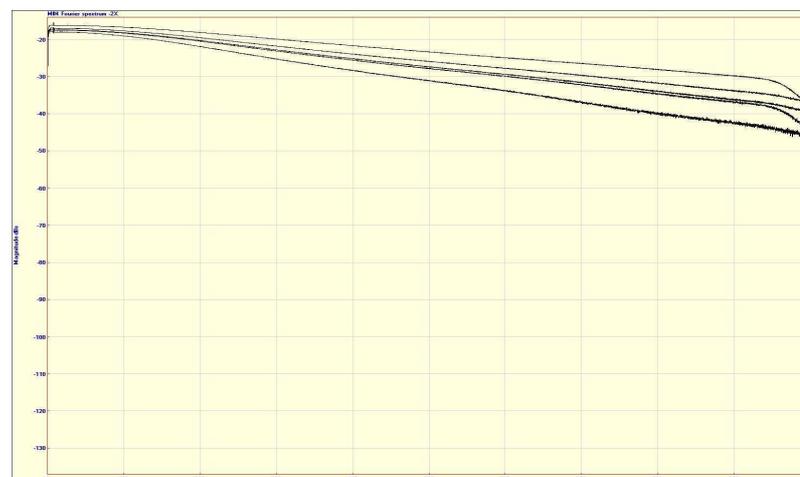
Im Weiteren werden somit nur die Messdaten des Dieselmotor D0834 ausgewertet und die modalen Parameter bestimmt.

5.3.1 Bestimmung der modalen Parameter

Nach Importierung sämtlicher Messdaten, wurden diese wiederholt auf die Qualität der Systemerregung im Zeitbereich und Frequenzbereich hin untersucht, siehe hierzu die Abbildungen 5.32.



(a)



(b)

Abbildung 5.32: Systemerregung im Zeitbereich (a) und im Frequenzbereich (b)

Jedes der Signale wäre nach den Kriterien der 10dB - Regel für die Untersuchung der Starrkörperfrequenzen nutzbar. Um die Datenmenge zu reduzieren, wurde je Messwertaufnahme nur ein Datensatz für die weitere Untersuchung übernommen.

Die Auswahl der Daten erfolgte nach dem geringsten Abfall der Amplitude des Kraftsignals im Fourierspektrum (Abbildung 5.32 (b)).

Nachfolgend wurden mittels der Zeitdaten die Übertragungsfunktionen gebildet. Dies stellt der Inhalt der nachfolgenden Abbildungen 5.33 dar.

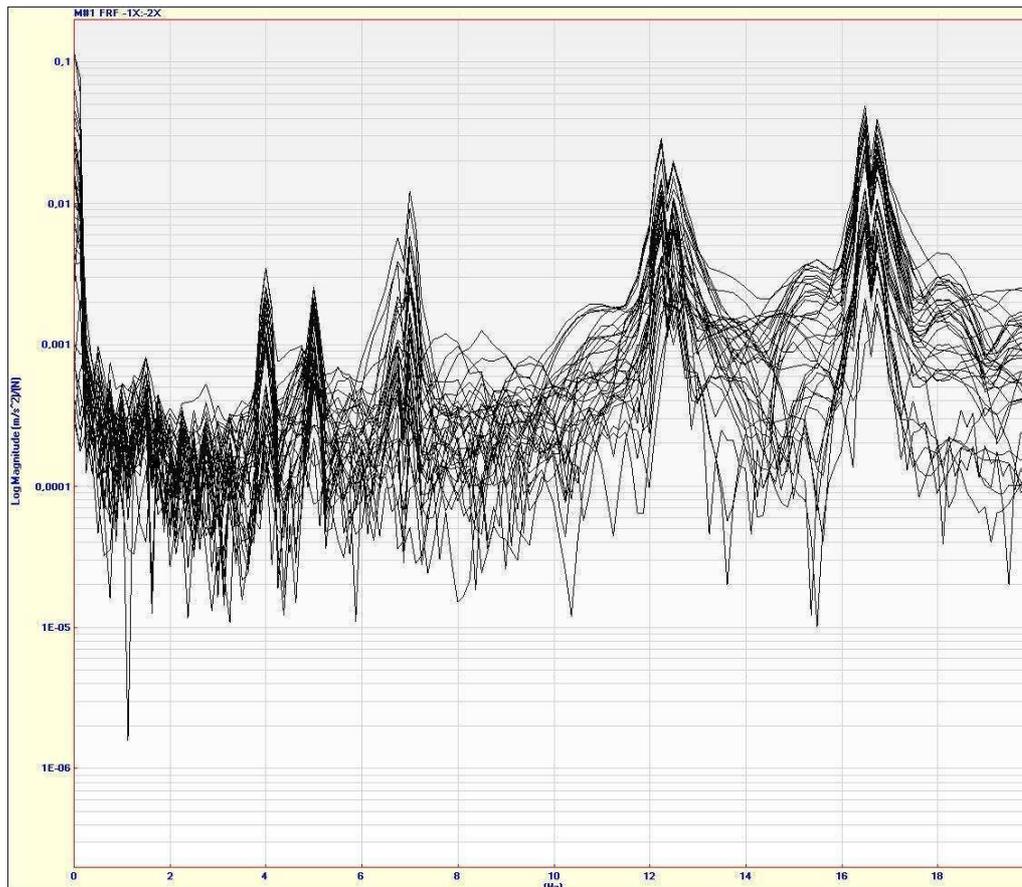


Abbildung 5.33: Amplitudenfrequenzgänge der Übertragungsfunktionen bis 20 Hz

Die graphischen Verläufe der Amplitudenfrequenzgänge weichen sehr von den idealen mathematischen Modellen ab. In der Ansicht der Amplitudenfrequenzgänge bis 20 Hz zeigen sich bereits an den Resonanzstellen die Eigenfrequenzen. Auffällig ist, dass nur fünf Eigenfrequenzen sichtbar sind.

Im Frequenzbereich von 12 bis 14 Hz und von 16 bis 18 Hz sind zwei Resonanzüberhöhungen in einem kleinen Frequenzband nebeneinander.

Ein ähnliches, aber nicht so ausgeprägtes Verhalten der Kurvenverläufe ist auch im Frequenzbereich von 6 bis 8 Hz zu sehen.

Ob es sich hier um zwei Frequenzen handelt oder der Kurvenverlauf nur auf eine fehlerhafte Softwareeinstellung der Frequenzauflösung, bzw. der Messdauer zurückzuführen ist, konnte nicht durch eine weitere Messung an den Motoren überprüft werden.

Es wurde die Annahme getroffen, dass eine fehlerhafte Einstellungen in der Software der Grund für die sehr rauen Kurvenverläufe in Abbildung 5.34 sind. Durch diese Einstellung wurden „Doppelfrequenzen“ hervorgerufen.

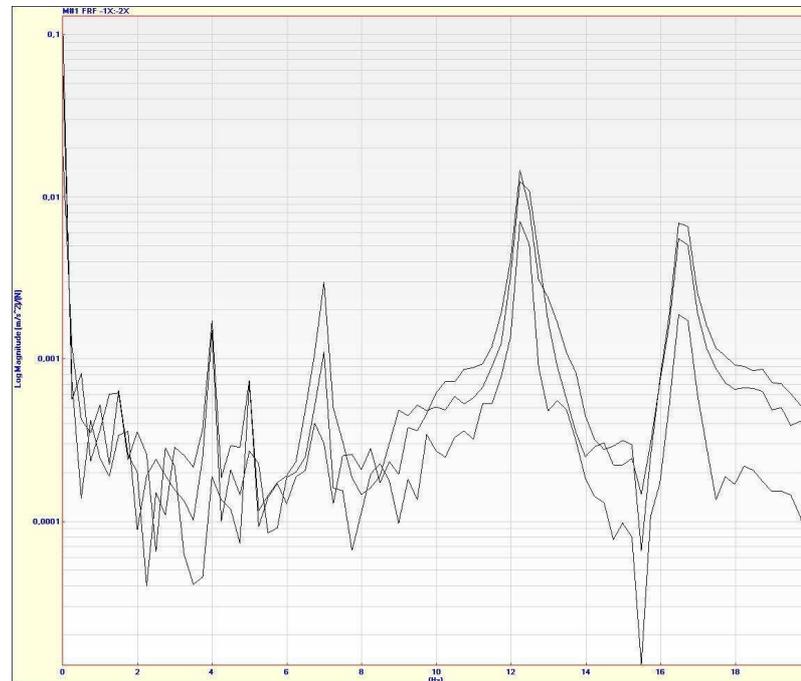


Abbildung 5.34: Amplitudenfrequenzgang auf Anregung in x-Richtung

Für das weitere Vorgehen wurde die Annahme getroffen, dass in den genannten Frequenzbereichen nur eine Eigenfrequenz vorhanden ist.

Bei dem „Curve-Fitting“ wurde der Versuch mit einer Mittelung zwischen diesen „Doppelfrequenzen“ erfolgreich durchgeführt. Siehe hierzu Abbildung 5.35, die das entsprechende Vorgehen visualisiert.

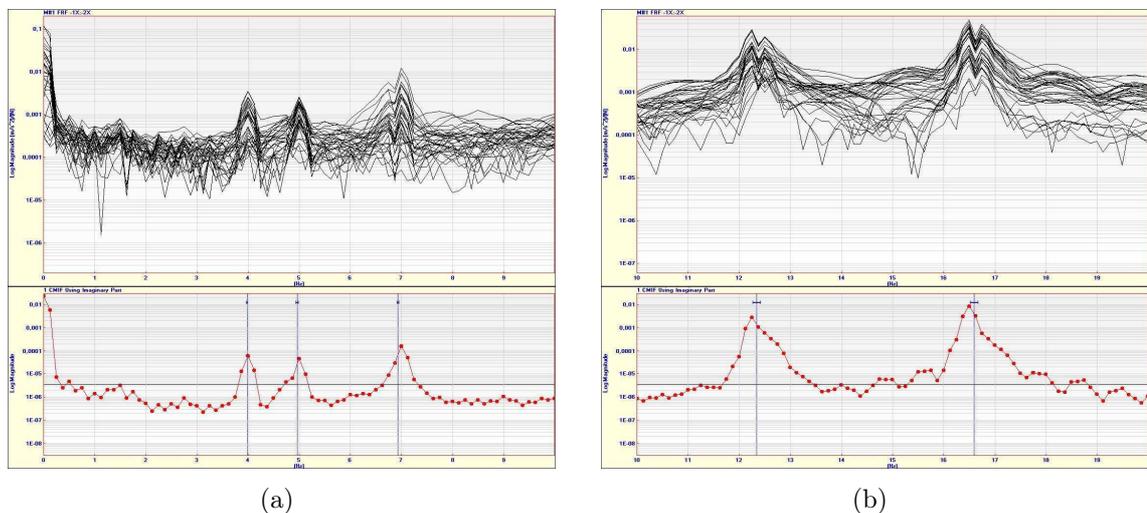


Abbildung 5.35: Curve-Fitting bis 10 Hz (a) und 10 bis 20 Hz (b)

In Abbildung 5.36 ist die Umsetzung des „Curve-Fittings“ dargestellt.

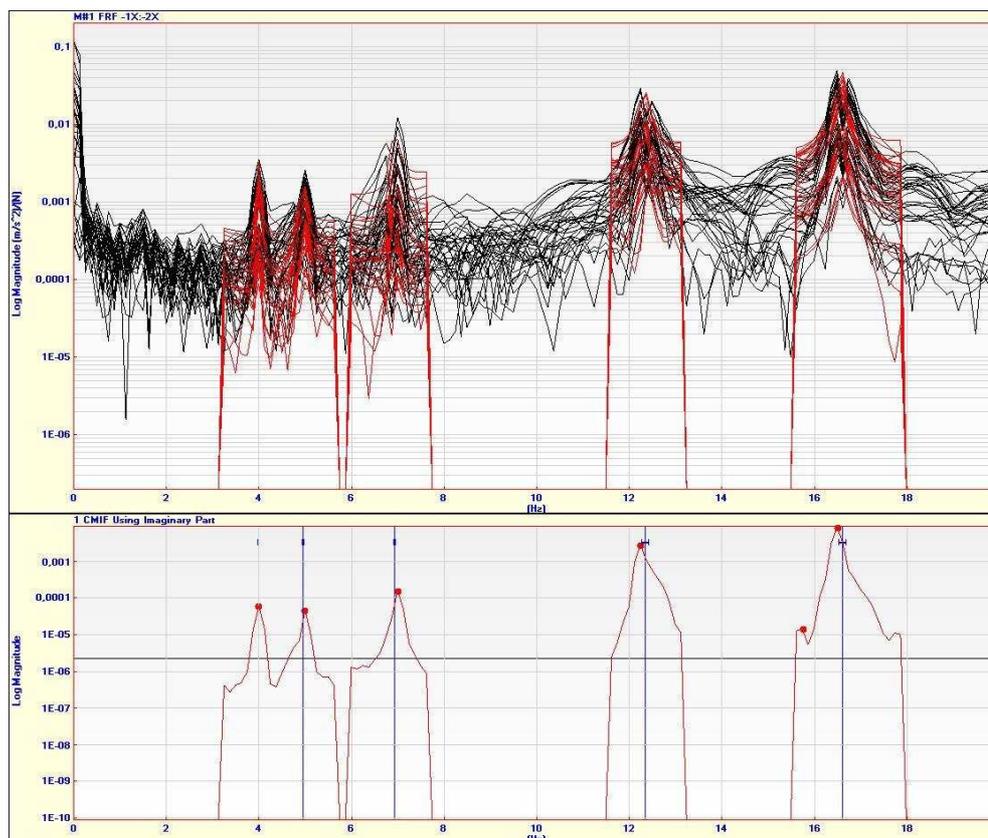


Abbildung 5.36: Curve Fitting der Amplitudenfrequenzgänge

Für die Visualisierung der Eigenformen des Motors wurden die Abmessungen der Tabelle 4.5 genutzt und das Referenzkoordinatensystem entsprechend der in 4.4.2 Seite 51 getroffenen Vereinbarung gesetzt.

Die nachfolgenden Abbildungen zeigen die Eigenformen des Motors, sowie deren Interpretation.

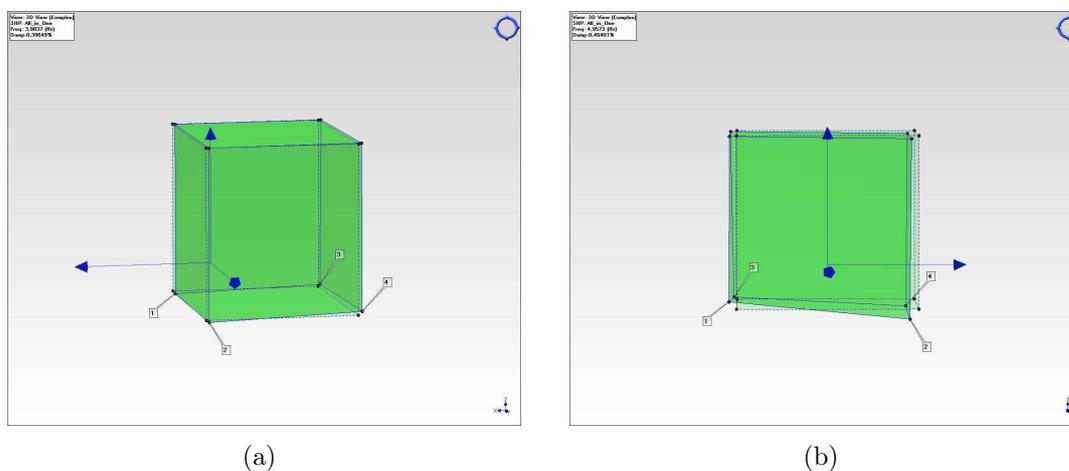


Abbildung 5.37: Eigenformen Rotation um z-Achse (a) und Kombination aus Rotation um y-Achse und Translation in x-Richtung (b)

Die in Abbildung 5.37(a) dargestellte Eigenform mit 3.98 Hz, ist eine Drehbewegung des Motors um die z-Achse. Abbildungen 5.37(b) zeigt eine kombinierte Eigenform mit der Frequenz von 4.96 Hz. Diese besteht aus einer Drehbewegung um die y-Achse und einer translatorischen Bewegung des Motors in Richtung der x-Achse.

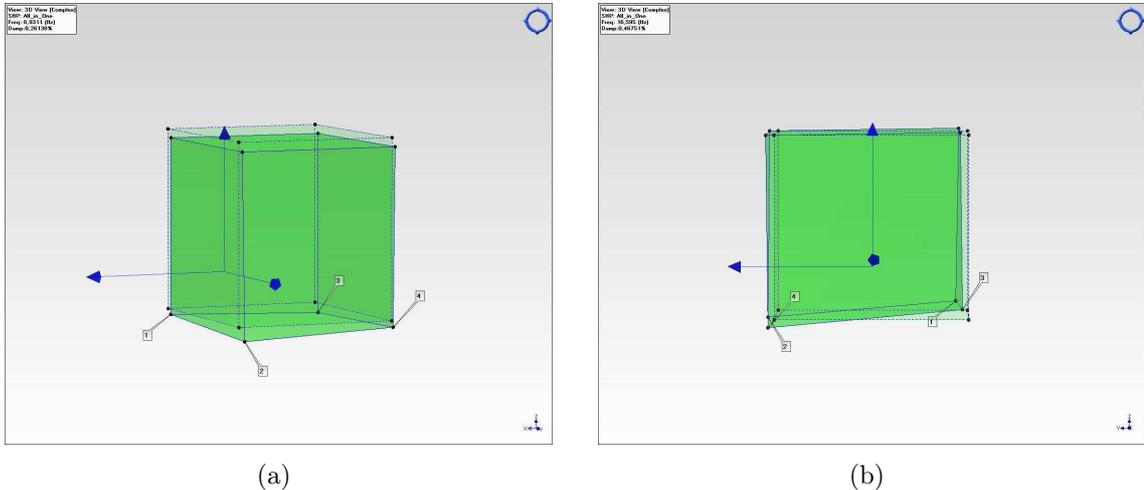


Abbildung 5.38: Eigenformen Translation in z-Richtung (a) und Kombination aus Rotation um x-Achse und Translation in y-Richtung (b)

Die Abbildung 5.38(a) zeigt die translatorische Eigenform in Richtung der z-Achse mit einer Frequenz 6.93 Hz. Die kombinierte Eigenform in Abbildung 5.38(b) mit einer Frequenz von 16.6 Hz, besteht aus einer Drehbewegung um die x-Achse und einer Schubbewegung in Richtung der y-Achse.

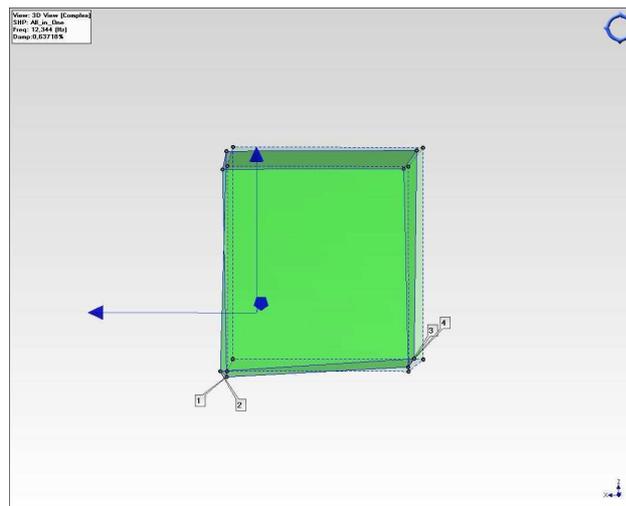


Abbildung 5.39: Kombinierte Eigenform aus Rotation um y-Achse und Translation in x-Richtung

Die kombinierte Eigenform mit 12.34 Hz in Abbildung 5.39, setzt sich wiederum aus einer Drehbewegung um die y-Achse und einer Schubbewegung in x-Richtung zusammen.

5.3.2 Untersuchung Ergebnisse

Die Messdatenauswertung des D0834 Motors zeigte, dass nur fünf Eigenfrequenzen eindeutig identifiziert werden konnten. Dieses wurde auch bei dem D0836 Motor festgestellt. Letztlich kann die Ursache für das Fehlen einer Eigenfrequenz nicht vollständig geklärt werden, so dass hierzu nur Annahmen getroffen werden können.

Eine Überlagerung von zwei Eigenfrequenzen, wie dies bereits bei dem dreidimensionalen Simulationsmodell festgestellt wurde, kann aufgrund der inhomogenen Massenverteilung dieser Motoren nahezu ausgeschlossen werden.

Die Frequenzauflösung der Messungen stellte sich nachfolgend als nicht ideal heraus. Ob mit einer erneuten Messung mit höherer Abtastrate, bzw. einer längeren Messdauer die fehlende Eigenfrequenz zu identifizieren wäre, kann abschließend nicht geklärt werden.

Der genutzte PCB-Beschleunigungssensor verfügt über einen Frequenzbereich von 2 bis 5000 Hz. Wenn die fehlende Eigenfrequenz unterhalb dieses Bereiches liegen sollte, würde ein geeigneter Sensor die Erfassung in diesem Frequenzbereich gewährleisten. Um dieses zu bestätigen, wäre eine weitere Messung erforderlich.

Da der Sensor bei jeder Messung an einem Schwingungsknoten angebracht wurde und somit die fehlende Eigenfrequenz klären würde, kann mit hoher Wahrscheinlichkeit ausgeschlossen werden.

Durch die Animierung mit ME'Scope, konnten die Schwingformen des Motors nicht eindeutig identifiziert werden, so dass hier sehr viel Interpretationsspielraum ist.

Bereits die Autoren DRESIG und HOLZWEISSIG [5] schrieben in Bezug auf das „Blockfundament“, dass unsymmetrische Strukturen komplizierte Eigenformen haben. In den Eigenformen treten aufgrund der gekoppelten Bewegungsgleichungen mehrere Translationsbewegungen und Drehbewegungen gleichzeitig auf. Die Kopplungen beeinflussen die Eigenformen und es kommt zu schraubenförmig verlaufenden Eigenformen um schräg im Raum liegende Hauptachsen. Gleiches konnte bei den Eigenformen der Motoren festgestellt werden.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassung

Im Rahmen der Arbeit sollte ein Verfahren zur Bestimmung von Schwerpunktskoordinaten und Massenträgheitsmomenten aus Messdaten umgesetzt werden.

Bei den zweidimensionalen Simulationsmodellen wurde die Schwerpunktsbestimmung durch ein Iterationsverfahren erfolgreich umgesetzt. Mit den Eigenfrequenzen aus den Messdaten konnten das Massenträgheitsmoment berechnet werden. Die Phasenlage der Übertragungsfunktion als Indikator, gab einen sicheren Aufschluss über die Eigenformen der Modelle, auch ohne eine Animation.

Für die dreidimensionalen Modelle war dies nicht möglich. Aufgrund eines Fehlers bei der Berechnung der Federsteifigkeiten, endeten die Versuche ein Iterationsverfahren zu entwickeln erfolglos. Durch die späte Erkenntnis dieses Fehlers, war es aus zeitlicher Sicht nicht mehr möglich diesen Punkt der Arbeit weiter zu bearbeiten. Die Berechnung der Trägheitsmomente konnte nur mit Kenntnis der Schwerpunktskoordinaten erfolgen.

Der vollständig symmetrische Körper, sollte zunächst eine einfache Herangehensweise an die komplexe dreidimensionale Problemstellung bieten. Die Wahl erwies sich als ungünstig, da sich zwei der gesuchten Eigenfrequenzen im gleichen Frequenzbereich befanden. Diese Wahl hat die Messdatenauswertung unnötig erschwert.

Der direkte Vergleich anhand der idealen mathematischen Modelle zeigte bereits, dass die Bestimmung der Massenträgheitsmomente aus modalen Parametern nur als eine Näherung angesehen werden kann.

Ausblick

Auf Basis der gewonnenen Erkenntnisse dieser Arbeit, sollte in einer aufbauenden Arbeit die Möglichkeit bestehen sich umfassender mit der eigentlichen Thematik zu befassen. Die Nutzung der Modalanalyse-Software konnte in diesem kurzen Zeitraum nicht vollständig autodidaktisch erlernt werden, gleiches gilt für die Messtechnik.

Die Unterstützung der MAN-Abteilung EMTS und die Nutzung des unternehmensinternen Messequipments war aus terminlicher Lage nicht möglich. Dieses erschwerte die experimentelle Versuchsdurchführung. Bei einer weiteren Untersuchung, sollte der zeitliche Rahmen entsprechend angepasst werden.

Anhand der zweidimensionalen Modelle konnte bewiesen werden, dass mit einem Iterationsverfahren die Bestimmung von Schwerpunktslage und Massenträgheitsmo-

ment aus Messdaten möglich ist. Somit sollte dies auch für dreidimensionale Körper erfolgreich umgesetzt werden können.

Literaturverzeichnis

- [1] Bauer, M.: Abgleich eines Berechnungsmodells für den Kurbeltrieb eines V8-Dieselmotors mithilfe experimenteller Modalanalysen, Kempten, Hochschule Kempten, Fakultät Maschinenbau, Diplomarbeit, 2012
- [2] Boerner, E.: Schwingungstechnische Optimierung einer Motor-Generator-Struktur (GenSet) eines Bahnfahrzeuges, Dresden, Technischen Universität, Fakultät Maschinenwesen, Diplomarbeit, 2010
- [3] Dankert, J. Dankert, H.: Technische Mechanik: Statik, Festigkeitslehre, Kinematik/Kinetik, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2006, ISBN: 3-835-10006-8
- [4] DIN 1311 Teil 2 August 2002. Schwingungen und schwingungsfähige Systeme, Teil 2: Lineare, zeitinvariante schwingungsfähige Systeme mit einem Freiheitsgrad
- [5] Dresig, H., Holzweißig, F.: Maschinendynamik, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2008, ISBN: 978-3-540-72032-4
- [6] Genta, G.: Vibration Dynamics and Control (Mechanical Engineering Series), Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2009, ISBN: 978-0-3877-9579-9
- [7] Hardtke, H.-J., Heimann B., Sollmann H.: Lehr- und Übungsbuch Technische Mechanik Band II – Kinematik/Kinetik - Systemdynamik - Mechatronik, Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser-Verlag München, Wien, 1997, ISBN: 3-446-18623-9.
- [8] Irretier, H.: Grundlagen der Schwingungstechnik 1, Kinematik, Modellbildung, Systeme mit einem Freiheitsgrad, Vieweg+Teubner Verlag GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden, 2000, ISBN: 3-528-03906-X
- [9] Irretier, H.: Grundlagen der Schwingungstechnik 2, Systeme mit mehreren Freiheitsgraden, Kontinuierliche Systeme, Vieweg+Teubner Verlag GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden, 2001, ISBN: 978-3-5280-3907-8
- [10] Knaebel, M., Jäger, H, Mastel, R.: Technische Schwingungslehre, Vieweg+Teubner GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2009, ISBN: 978-3-8351-0180-7
- [11] Kraft, D.: Kompendium der Maschinendynamik, Vorlesungsskript, Fachhochschule München, Fachbereich Maschinenbau, 1999/2000

- [12] Lunze, J.: Regelungstechnik 1: Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008, ISBN: 978-3-540-68907-2
- [13] Magnus, K., Popp, K., Sextro, W.: Schwingungen - Eine Einführung in die physikalischen Grundlagen und die theoretische Behandlung von Schwingungsproblemen, Vieweg+Teubner Verlag GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden, 2008, ISBN: 978-3-8351-0193-7
- [14] Möser, M.: Messtechnik der Akustik, Springer Heidelberg Dordrecht London New York, 2010, ISBN: 978-3-540-68086-4
- [15] Niemann G., Winter H., Höhn, B.-R.: Maschinenelemente Band 1 Konstruktion und Berechnung von Verbindungen, Lagern, Wellen, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2005, ISBN: 3-540-25125-1
- [16] Totzke, C., Korn, H.: Konstruktions Hausarbeit, Konstruktion eines dreistufigen Stirnradgetriebes, Hamburg, HAW-Hamburg, Department Maschinenbau & Produktion, 4. Semester , 2010
- [17] Vöth, S.: Dynamik schwingungsfähiger Systeme, Von der Modellbildung bis zur Betriebsfestigkeitsrechnung mit MATLAB/SIMULINK, Vieweg & Sohn Verlag GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden, 2006, ISBN: 978-3-8348-0111-1

Internetquellen

- [18] Hersteller Angaben MAN Truck & Bus AG,
URL http://www.man-engines.com/man/media/migrated/doc/mn_muk_1/D0834_truck_engine_EN.pdf, 21.09.2012 um 14:23
- [19] Herstellerangaben National Instruments,
URL http://pcb.com/spec_sheet.asp?model=356A15, 14.08.2012 um 23:06
- [20] Herstellerangaben PCB Piezotronics,
URL http://pcb.com/spec_sheet.asp?model=086C03, 14.08.2012 um 22:19
- [21] Herstellerangaben PCB Piezotronics,
URL http://pcb.com/spec_sheet.asp?model=356A15, 14.08.2012 um 22:34
- [22] Polytec, URL: <http://www.polytec.com/de/ueber-uns/kernkompetenzen/>, 20.08.2012 um 15:14
- [23] ROGA Instruments Vertriebsbüro für Messtechnik, ME'Scope Datenblatt,
URL <http://www.sigmatest.ch/pics/mescope52scr>, 26.08.2012 um 14:45
- [24] SIMPACK, URL http://www.simpack.com/fileadmin/simpack/doc/flyer/RAIL_WEAR_Flyer.pdf, 22.08.2012 um 21:39



Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Hamburg University of Applied Sciences

Erklärung zur selbständigen Bearbeitung einer ausgeführten Bachelorthesis

Zur Erläuterung des Zwecks dieses Blattes:

§ 16 Abs. 5 der APSO-TI-BM lautet::

„Zusammen mit der Thesis ist eine schriftliche Erklärung abzugeben, aus der hervorgeht, dass die Arbeit - bei einer Gruppenarbeit die entsprechend gekennzeichneten Teile der Arbeit (§18 Absatz 1) - ohne fremde Hilfe selbständig verfasst und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt wurden. Wörtlich oder dem Sinn nach aus anderen Werken entnommene Stellen sind unter Angabe der Quellen kenntlich zu machen.“

Dieses Blatt mit der folgenden Erklärung ist nach Fertigstellung der Arbeit durch jede/n Kandidat/en/in auszufüllen und jeweils mit Originalunterschrift (keine Ablichtungen!) als letztes Blatt des als Prüfungsexemplar der Bachelorthesis gekennzeichneten Exemplars einzubinden.

Eine unrichtig abgegebene Erklärung kann - auch nachträglich - zur Ungültigkeit des Bachelor-Abschlusses führen.

Erklärung

Hiermit versichere ich,

Name: Totzke Vorname: Christian

daß ich die vorliegende Bachelorthesis mit dem Thema:

„Experimentelle Bestimmung der Schwerpunktskoordinaten und Massenträgheitsmomente von Dieselmotoren“

ohne fremde Hilfe selbständig verfaßt und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Wörtlich oder dem Sinn nach aus anderen Werken entnommene Stellen sind unter Angabe der Quellen kenntlich gemacht.

Ort

Datum

Unterschrift im Original

A Anhang

A.1 Zweidimensionale Simulationsmodelle

Tabelle A.1: Kennwerte Simulationsmodell Variante 1

| Kennwert | Formelzeichen | Größe |
|-------------------------------|---------------|------------|
| Abmaße mm | $x/y/z$ | 1500/0/500 |
| Schwerpunktskoordinaten mm | $x_s/y_s/z_s$ | -500/0/250 |
| Masse kg | m | 1000 |
| Trägheitsmoment kgm^2 | J_S | 150 |
| Axiale Federsteifigkeit N/m | c_a | 200000 |
| Impulskraft N | \hat{F} | 5000 |
| Impulsdauer s | t_i | 0.2 |
| Abtastrate Hz | f | 2000 |
| Messdauer s | t | 8 |
| Datenpunkte – | - | 16001 |

Tabelle A.2: Kennwerte Simulationsmodell Variante 2

| Kennwert | Formelzeichen | Größe |
|-------------------------------|---------------|-------------|
| Abmaße mm | $x/y/z$ | 2500/0/1000 |
| Schwerpunktskoordinaten mm | $x_s/y_s/z_s$ | -750/0/250 |
| Masse kg | m | 2750 |
| Trägheitsmoment kgm^2 | J_S | 600 |
| Axiale Federsteifigkeit N/m | c_a | 1000000 |
| Impulskraft N | \hat{F} | 5000 |
| Impulsdauer s | t_i | 0.2 |
| Abtastrate Hz | f | 2000 |
| Messdauer s | t | 8 |
| Datenpunkte – | - | 16001 |

Tabelle A.3: Kennwerte Simulationsmodell Variante 3

| Kennwert | Formelzeichen | Größe |
|-------------------------------|----------------------|--------------|
| Abmaße mm | $x/y/z$ | 2500/0/0 |
| Schwerpunktskoordinaten mm | $x_s/y_s/z_s$ | -750/0/0 |
| Masse kg | m | 2750 |
| Trägheitsmoment kgm^2 | J_S | 600 |
| Axiale Federsteifigkeit N/m | c_a | 1000000 |
| Impulskraft N | \hat{F} | 5000 |
| Impulsdauer s | t_i | 0.2 |
| Abtastrate Hz | f | 2000 |
| Messdauer s | t | 8 |
| Datenpunkte - | - | 16001 |

Tabelle A.4: Kennwerte Simulationsmodell Variante 5

| Kennwert | Formelzeichen | Größe |
|-------------------------------|----------------------|--------------|
| Abmaße mm | $x/y/z$ | 500/0/80 |
| Schwerpunktskoordinaten mm | $x_s/y_s/z_s$ | -350/0/40 |
| Masse kg | m | 600 |
| Trägheitsmoment kgm^2 | J_S | 65 |
| Axiale Federsteifigkeit N/m | c_a | 200000 |
| Impulskraft N | \hat{F} | 5000 |
| Impulsdauer s | t_i | 0.2 |
| Abtastrate Hz | f | 2000 |
| Messdauer s | t | 8 |
| Datenpunkte - | - | 16001 |

Tabelle A.5: Kennwerte Simulationsmodell Variante 6

| Kennwert | Formelzeichen | Größe |
|-------------------------------|----------------------|--------------|
| Abmaße mm | $x/y/z$ | 2500/0/80 |
| Schwerpunktskoordinaten mm | $x_s/y_s/z_s$ | -2000/0/125 |
| Masse kg | m | 2750 |
| Trägheitsmoment kgm^2 | J_S | 600 |
| Axiale Federsteifigkeit N/m | c_a | 200000 |
| Dämpfungsbeiwert kg/s | d | 20 |
| Impulskraft N | \hat{F} | 5000 |
| Impulsdauer s | t_i | 0.2 |
| Abtastrate Hz | f | 2000 |
| Messdauer s | t | 8 |
| Datenpunkte - | - | 16001 |

A.2 Berechnungsergebnisse

A.2.1 Zweidimensionale Modelle

Tabelle A.6: Soll-Ist-Vergleich Simulationsmodell Variante 1

| Formelzeichen | Einheit | Soll-Wert | Ist-Wert | Differenz % |
|---------------|----------|-----------|-----------------|-------------|
| ω_1 | s^{-1} | 18.7 | 18.18 | 2.86 |
| ω_2 | s^{-1} | 41.44 | 34.78 | 19.15 |
| J_s | $kgms^2$ | 150 | 123.97 | 21.00 |
| x_s | m | 0.500 | 0.5 ± 0.053 | 0 |

Tabelle A.7: Soll-Ist-Vergleich Simulationsmodell Variante 2

| Formelzeichen | Einheit | Soll-Wert | Ist-Wert | Differenz % |
|---------------|----------|-----------|-----------------|-------------|
| ω_1 | s^{-1} | 24.81 | 24.88 | 0.28 |
| ω_2 | s^{-1} | 78.44 | 93.01 | 18.58 |
| J_s | $kgms^2$ | 600.00 | 424.34 | 41.4 |
| x_s | m | 0.75 | 0.75 ± 0.07 | 0 |

Tabelle A.8: Soll-Ist-Vergleich Simulationsmodell Variante 3

| Formelzeichen | Einheit | Soll-Wert | Ist-Wert | Differenz % |
|---------------|----------|-----------|-----------------|-------------|
| ω_1 | s^{-1} | 24.81 | 26.04 | 4.96 |
| ω_2 | s^{-1} | 78.44 | 93.01 | 18.58 |
| J_s | $kgms^2$ | 600.00 | 424.34 | 41.4 |
| x_s | m | 0.75 | 0.75 ± 0.06 | 0 |

Tabelle A.9: Soll-Ist-Vergleich Simulationsmodell Variante 5

| Formelzeichen | Einheit | Soll-Wert | Ist-Wert | Differenz % |
|---------------|----------|-----------|-----------------|-------------|
| ω_1 | s^{-1} | 40.36 | 40.32 | 0.09 |
| ω_2 | s^{-1} | 62.73 | 62.74 | 0.02 |
| J_s | $kgms^2$ | 65.00 | 65.06 | 0.09 |
| x_s | m | 0.35 | 0.36 ± 0.07 | 2.9 |

Tabelle A.10: Soll-Ist-Vergleich Simulationsmodell Variante 6

| Formelzeichen | Einheit | Soll-Wert | Ist-Wert | Differenz % |
|---------------|----------|-----------|--------------|-------------|
| ω_1 | s^{-1} | 22.79 | 22.78 | 0.04 |
| ω_2 | s^{-1} | 85.39 | 85.38 | 0.01 |
| J_s | $kgms^2$ | 600.00 | 600.71 | 0.12 |
| x_s | m | 2.00 | 2 ± 0.05 | 0 |

A.2.2 Dreidimensionale Modelle

Tabelle A.11: Soll-Ist-Vergleich 3D Simulationsmodell Variante 1

| Formelzeichen | Einheit | Soll-Wert | Ist-Wert | Differenz % |
|---------------------------------|----------|-----------|----------|-------------|
| ω_x | s^{-1} | 12.63 | 12.08 | 4.55 |
| ω_y | s^{-1} | 12.57 | 12.13 | 3.63 |
| ω_z | s^{-1} | 23.37 | 23.35 | 0.09 |
| $\omega_{\varphi_{\xi\xi}}$ | s^{-1} | 54.60 | 55.57 | 1.78 |
| $\omega_{\varphi_{\eta\eta}}$ | s^{-1} | 76.72 | 76.42 | 1.74 |
| $\omega_{\varphi_{\zeta\zeta}}$ | s^{-1} | 49.64 | 49.61 | 0.06 |
| $J_{\xi\xi}$ | $kgms^2$ | 25.00 | 24.13 | 3.65 |
| $J_{\eta\eta}$ | $kgms^2$ | 50.00 | 48.17 | 3.80 |
| $J_{\zeta\zeta}$ | $kgms^2$ | 35.00 | 35.00 | 0.00 |
| $J_{\xi\eta}$ | $kgms^2$ | 0 | 0 | / |
| $J_{\xi\zeta}$ | $kgms^2$ | 0 | 0 | / |
| $J_{\eta\zeta}$ | $kgms^2$ | 0 | 0 | / |

Tabelle A.12: Soll-Ist-Vergleich 3D Simulationsmodell Variante 2

| Formelzeichen | Einheit | Soll-Wert | Ist-Wert | Differenz % |
|---------------------------------|----------|-----------|----------|-------------|
| ω_x | s^{-1} | 12.63 | 12.08 | 4.55 |
| ω_y | s^{-1} | 12.57 | 12.17 | 3.29 |
| ω_z | s^{-1} | 23.37 | 23.35 | 0.09 |
| $\omega_{\varphi_{\xi\xi}}$ | s^{-1} | 54.60 | 55.58 | 1.80 |
| $\omega_{\varphi_{\eta\eta}}$ | s^{-1} | 76.72 | 78.05 | 1.74 |
| $\omega_{\varphi_{\zeta\zeta}}$ | s^{-1} | 49.64 | 49.61 | 0.06 |
| $J_{\xi\xi}$ | $kgms^2$ | 25.00 | 24.12 | 3.63 |
| $J_{\eta\eta}$ | $kgms^2$ | 50.00 | 49.61 | 0.79 |
| $J_{\zeta\zeta}$ | $kgms^2$ | 35.00 | 35.00 | 0.00 |
| $J_{\xi\eta}$ | $kgms^2$ | 0 | / | / |
| $J_{\xi\zeta}$ | $kgms^2$ | 0 | / | / |
| $J_{\eta\zeta}$ | $kgms^2$ | 0 | / | / |