



Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Hamburg University of Applied Sciences

Masterarbeit

Studiendepartment Fahrzeugtechnik und Flugzeugbau

**Geschlossen-analytische Lösungen zur Berechnung
von Spannungs- und Verschiebungsfeldern in
segmentierten Faserverbundstrukturen**

Vladimir Kletkin

17. September 2012

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Fakultät Technik und Informatik
Department Fahrzeugtechnik & Flugzeugbau
Berliner Tor 9
20099 Hamburg

in Zusammenarbeit mit:
Sogeti High Tech GmbH
Karnapp 25
21079 Hamburg



Verfasser: Vladimir Kletkin
Abgabedatum: 17. September 2012

1. Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Eckart Nast
2. Prüfer: PD Dr.-Ing. habil. Christian Mittelstedt

Industrieller Betreuer: PD Dr.-Ing. habil. Christian Mittelstedt

Erklärung

ich versichere, dass ich diese Masterarbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst habe. Nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel sind von mir benutzt worden. Wörtlich oder dem Sinn nach aus anderen Werken entnommene Stellen sind unter Angabe der Quelle kenntlich gemacht.

Ort/Datum

Unterschrift des Verfassers

Vorwort

Die vorliegende Masterarbeit entstand in der Zeit von März bis September 2012 im Rahmen der Prüfungsleistung der Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg. Sie wurde in Zusammenarbeit mit Sogeti High Tech GmbH erstellt. Die an die Bedürfnisse des modernen Flugzeugbaus angepasste Grundlagenforschung in der technischen Mechanik und die Möglichkeit der vielseitigen Anwendung der gewonnenen Erkenntnisse machten das bearbeitete Thema besonders reizvoll für mich.

An dieser Stelle möchte ich die Gelegenheit nutzen meinen beiden Betreuern und Prüfern seitens der Hochschule und des industriellen Partners – dem Herrn Prof. Dr.-Ing. Eckart Nast und dem Herrn PD. Dr.-Ing. habil. Christian Mittelstedt für ihre großartige Unterstützung bei der Erstellung dieser Arbeit zu danken. Ihre Ratschläge, Hinweise, Anregungen und Ideen haben diese Arbeit wesentlich geprägt. Ferner bedanke ich mich bei dem Herrn Dr.-Ing. Christian Heinrich für die vielen Hilfestellungen, den fachlichen Rat und die Geduld beim Beantworten meiner Fragen in allen Aspekten des Entstehungsprozesses dieser Arbeit. Nicht nur die fachliche Kompetenz der Kollegen, sondern auch ihre ständige Hilfsbereitschaft und die hervorragende Arbeitsatmosphäre innerhalb des Teams werde ich in sehr guter Erinnerung behalten.

Der grösste Dank gilt jedoch meiner Ehefrau und meiner Familie. Ohne ihren bedingungslosen Beistand wäre es mir nie möglich gewesen mein Studium und diese Arbeit abzuschließen.

Inhaltsverzeichnis

Symbol- und Abkürzungsverzeichnis	VI
Abbildungsverzeichnis	IX
Tabellenverzeichnis	XVI
1. Einleitung	1
1.1. Allgemeines	1
1.2. Themenstellung der Arbeit	4
2. Theoretische Grundlagen	5
2.1. Formeln und Grundlagen der linearen Elastizitätstheorie	5
2.1.1. Eingrenzung auf ebene Problemstellungen	5
2.1.2. Gleichgewichtsbedingungen	7
2.1.3. Kinematische Beziehungen	8
2.1.4. Materialgesetz des linear-elastischen Körpers	10
2.1.5. Lösungsansatz der linearen Elastizitätstheorie	13
2.2. Energieprinzipien	16
2.2.1. Allgemeiner Arbeitssatz	16
2.2.2. Prinzip der virtuellen Verrückungen	17
2.2.3. Prinzip vom Stationärwert des Gesamtpotentials	18
2.3. Grundlagen und Prinzip der Finite-Elemente-Methode	19
3. Teil I Behandlung der geraden balkenartigen Scheiben	23
3.1. Analytische Herleitung der Spannungs- und Verschiebungsfelder für orthotrope gerade balkenartige Scheiben	23
3.1.1. Beanspruchung durch die Normalkraft \mathbf{N}	23
3.1.2. Beanspruchung durch die Querkraft \mathbf{Q}	24
3.1.3. Beanspruchung durch das Biegemoment \mathbf{M}_0	29
3.2. Analytische Herleitung der Spannungs- und Verschiebungsfelder für isotrope gerade balkenartige Scheiben	31
3.3. Analytische Herleitung der Spannungs- und Verschiebungsfelder für orthotrop geschichtete Lamine	32
3.3.1. Beanspruchung durch Normalkraft \mathbf{N}	32
3.3.2. Beanspruchung durch Querkraft \mathbf{Q}	33
3.3.3. Beanspruchung durch das Randmoment \mathbf{M}_0	36
3.4. Verifikation der Ergebnisse	38
3.4.1. Erstellung des FE-Modells	39
3.4.2. Verifikation der Ergebnisse für eine orthotrope gerade balkenartige Scheibe	40
3.4.3. Verifikation der Ergebnisse für orthotrop geschichtete gerade balkenartige Lamine	47
4. Parameterstudie	55

4.1. Geometrische Parameter	55
4.1.1. Einfluss des Geometrieparameters auf das Spannungs- und Verschiebungsfeld einer orthotropen Scheibe	55
4.1.2. Einfluss des Geometrieparameters auf das Spannungs- und Verschiebungsfeld eines Laminats	67
4.2. Materialparameter	71
4.2.1. Auswirkung der Werkstoffeigenschaften auf das Verschiebungsfeld in der orthotropen Scheibe unter Normalkraftbelastung.	71
4.2.2. Auswirkung der Werkstoffeigenschaften auf das Verschiebungsfeld in der orthotropen Scheibe unter Querkraftbelastung.	72
4.2.3. Auswirkung der Werkstoffeigenschaften auf das Verschiebungsfeld in der orthotropen Scheibe unter Momentenbelastung	73
5. Teil II Kopplung des geraden und des gekrümmten Bereichs zu einem Profil	78
5.1. Kopplung der Lösungen für die gerade und die gekrümmte balkenartige Scheibe mit orthotropen Werkstoffverhalten	78
5.2. Kopplung der Lösungen für die gerade und die gekrümmte balkenartige Scheibe aus orthotrop geschichteten Laminaten	88
6. Teil III Kopplung des geraden und des gekrümmten Segments mit dem Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials.	100
7. Zusammenfassung und Ausblick	112
7.1. Zusammenfassung	112
7.2. Ausblick	114
Literatur	115
A. Untersuchung der Verläufe der Spannungs- und der Verschiebungskomponenten in orthotropen Profilen mit unterschiedlichen geometrischen Abmaßen	117
A.1. Verlauf der Normalspannungen σ_{xx} und $\sigma_{\varphi\varphi}$	117
A.2. Verlauf der Normalspannung σ_{rr}	119
A.3. Verlauf der Verschiebungskomponenten	121
B. Untersuchung der Verläufe der Spannungs- und Verschiebungskomponenten in orthotrop geschichteten Profilen mit unterschiedlichen geometrischen Abmaßen	126
B.1. Verlauf der Normalspannungen σ_{xx} und $\sigma_{\varphi\varphi}$	126
B.2. Verlauf der Normalspannungen σ_{yy} und σ_{rr}	128
B.3. Verlauf der Verschiebungskomponenten	130

Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

Symbole, Operatoren und Indices

∂	Symbol für partielle Deifferentiation
d	Symbol für die Differentiation einer Funktion mir einer Variablen
Δ	Laplace-Opereator
\dots_{el}	Kennzeichnung einer auf ein Element bezogener Größe
\dots^T	Kennzeichnung einer transponierten Matrix
\dots_{sS}	Kennzeichnung des geraden Bereichs (straight Section)
\dots_{cS}	Kennzeichnung des gekrümmten Bereichs (curved Section)

Lateinische Buchstaben

E	Elastizitätsmodul (isotroper Werkstoff)	MPa
E_i	Elastizitätsmodul mit $i = x, y, z$ bzw. $i = r, \varphi, z$	MPa
F	Airysehe Spannungsfunktion im kartesischen Koordinatensystem	
\mathcal{F}	Funktional	
G	Schubmodul (isotrooper Werkstoff)	MPa
G_{ij}	Schubmodul mit $i, j = x, y, z$ bzw. $i, j = r, \varphi, z$	MPa
I_z	Flächenträgheitsmoment 2. Ordnung bezüglich einer Rotation um die z -Achse	mm ⁴
M_0	Randmoment	Nmm
N	Normkraft	N
Q	Querkraft	N
W_a	äußere Arbeit	J
W_i	innere Arbeit	J
h	Höhe der geraden balkenartigen Scheibe	mm
i	Trägheitsradius	mm
l	Länge der geraden balkenartigen Scheibe	mm
n	Anzahl der Laminatschichten	-
r, φ, z	Koordinatenten des zylindrischen Koordinatensystems	
r_a	äußerer Radius	mm
r_i	innerer Radius	mm
r_m	mittlerer Radius	mm
s, k	Orthotropieparameter	-
t	Scheibendicke	mm
u	Verschiebung parallel zur x -Achse bzw. φ -Achse	mm
v	Verschiebung parallel zur y -Achse bzw. r -Achse	mm

x, y, z Koordinaten des kartesischen Koordinatensystem

Griechische Buchstaben

Π	Gesamtpotential	J
Π_a	äußeres Potential	J
Π_i	inneres Potential	J
γ_{ij}	Gleitung mit $i, j = x, y, z$ bzw. $i, j = r, \varphi, z$	-
δ	Kennzeichnung einer virtuellen Größe	
ε_{ii}	Dehnung mit $i = x, y, z$ bzw. $i = r, \varphi, z$	-
λ	Eigenwert	
λ	Schlankheitsgrad	
ν	Querkontraktionszahl / Querdehnzahl / Poisson-Zahl (isotrope Werkstoffe)	
ν_{ij}	Querkontraktionszahl mit $i, j = x, y, z$ bzw. $i, j = r, \varphi, z$	
σ_{ii}	Normalspannung mit $i = x, y, z$ bzw. $i = r, \varphi, z$	MPa
τ_{ij}	Schubspannung mit $i, j = x, y, z$ bzw. $i, j = r, \varphi, z$	MPa

Matrizen und Vektoren

$\underline{\underline{\varepsilon}}$	Verzerrungstensor	-
$\underline{\varepsilon}$	Verzerrungsvektor	-
$\underline{\sigma}$	Spannungsvektor	MPa
\underline{v}	Eigenvektor	
$\underline{\underline{B}}_{el}$	Kinematischer Zusammenhang zwischen Knotenverschiebungen und Verzerrungen eines Elements	
$\underline{\underline{C}}$	Steifigkeitsmatrix	MPa
$\underline{\underline{C}}_{el}$	Steifigkeitsmatrix eines Elements im Elementkoordinatensystem	MPa
\underline{I}	Eiheitsmatrix	
$\underline{\underline{K}}$	Gesamtsteifigkeitsmatrix	MPa
$\underline{\underline{K}}_{el}$	Steifigkeitsmatrix eines Elements im globalen Koordinatensystem	MPa
$\underline{\underline{N}}_{el}$	Matrix mit den Ansatzfunktionen für die Verschiebungen zwischen den Knoten eines finiten Elements	
$\underline{\underline{Q}}$	reduzierte Steifigkeitsmatrix	MPa
$\underline{\underline{\bar{Q}}}$	reduzierte Steifigkeitsmatrix im Laminat-Koordinatensystem	MPa
$\underline{\underline{S}}$	Spannungstensor	MPa
$\underline{\underline{\tilde{S}}}$	Nachgiebigkeitsmatrix	$\frac{\text{mm}^2}{\text{N}}$
$\underline{\underline{\tilde{S}}}$	reduzierte Nachgiebigkeitsmatrix	$\frac{\text{mm}^2}{\text{N}}$
$\underline{\underline{\bar{\tilde{S}}}}$	reduzierte Nachgiebigkeitsmatrix im Laminat-Koordinatensystem	$\frac{\text{mm}^2}{\text{N}}$

\underline{T}	Transformationsmatrix	
\underline{F}	Knotenkraftvektor der Gesamtstruktur	N
\underline{F}_{el}	Vektor mit Elementknotenlasten	N
\underline{f}	Volumenkraftvektor	$\frac{\text{N}}{\text{mm}^3}$
\underline{n}	Normalvektor	
\underline{t}	Spannungsvektor	MPa
\underline{u}	Verschiebungsvektor	mm
\hat{u}_{el}	Knotenverschiebungsvektor eines Elements	mm

Abkürzungen und weitere Bezeichnungen

DGL	Differentialgleichung
ESZ	Ebener Spannungszustand
EVZ	Ebener Verzerrungszustand
FEM	Finite Elemente Methode
MSC	MacNeal-Swendler Corporation
MPC	Multi Point Constraint
PMG	Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials
PSG	Prinzip vom Stationärwert des Gesamtpotentials
PvV	Prinzip des virtuellen Verrückungen
SPC	Single Point Constraint
UD	Unidirektional

Abbildungsverzeichnis

1.1.	Passagierflugzeug Boeing 787 „Dreamliner“ (Quelle: http://boeing.com)	1
1.2.	Schematische Darstellung eines Laminats (Quelle: [12])	2
1.3.	Schubwinkel (Clip) aus CFK (Quelle: www.reinforcedplastics.com)	3
1.4.	Schematische Darstellung eines Schubwinkelprofils	4
2.1.	Ebener Spannungszustand	6
2.2.	Kräfte am infinitesimalen Volumenelement [12]	7
2.3.	Definition der infinitesimalen Dehnungen und Gleitungen [12]	8
2.4.	Schematischer Laminataufbau	14
3.1.	Gerade balkenartige Scheibe unter Normalkraftbelastung	23
3.2.	Gerade balkenartige Scheibe unter Querkraftbelastung	25
3.3.	Gerade balkenartige Scheibe unter Momentenbelastung	29
3.4.	FE-Modell der geraden balkenartigen Scheibe	39
3.5.	Vergleich der Normalspannungsverläufe aus der analytischen und der FE-Rechnung bei Normalkraftbelastung	41
3.6.	Vergleich des Verschiebungsfeldes der orthotropen Scheibe unter Normalkraftbelastung aus der analytischen mit dem aus der FE-Rechnung a Verschiebung v_{oR} am oberen Rand aufgrund der Querkontraktion der Scheibe. b Verschiebung u in der Scheibenmitte bei allen betrachteten Längen-Höhen-Verhältnissen der Scheibe.	42
3.7.	Vergleich der Normalspannungsverläufe aus der analytischen und der FE-Rechnung bei Querkraftbelastung	43
3.8.	Vergleich der Schubspannungsverläufe aus der analytischen und der FE-Rechnung bei Querkraftbelastung	44
3.9.	Vergleich der Verschiebungskomponenten aus den analytischen Lösungen mit den aus der FE-Rechnung für eine gedrungene Scheibe ($\frac{l}{h} = 3$) a Querschnittsneigung in der Mitte der Scheibe, b Absenkung der neutralen Achse der Scheibe.	44
3.10.	Vergleich der Verschiebungskomponenten aus den analytischen Lösungen mit den aus der FE-Rechnung für eine Scheibe mit $\frac{l}{h} = 5$ a Querschnittsneigung in der Mitte der Scheibe b Absenkung der neutralen Achse der Scheibe	45
3.11.	Vergleich der Verschiebungskomponenten aus den analytischen Lösungen mit den aus der FE-Rechnung für eine Scheibe mit hohem Längen-Höhen-Verhältnis ($\frac{l}{h} = 10$). a Querschnittsneigung in der Mitte der Scheibe. b Absenkung der neutralen Achse der Scheibe.	45
3.12.	Vergleich der Normalspannungsverläufe aus der analytischen und der FE-Rechnung bei einer Randmomentenbelastung	46
3.13.	Vergleich der Verschiebungskomponenten aus den analytischen Lösungen mit den aus der FE-Rechnung für eine Scheibe mit den untersuchten Längen-Höhen-Verhältnissen $\frac{l}{h} = 3$, $\frac{l}{h} = 5$, $\frac{l}{h} = 10$ unter der Biegemomentenbelastung. a Querschnittsneigung in der Mitte der Scheibe. b Absenkung der neutralen Achse der Scheibe.	46

3.14. FE-Modell des orthotrop geschichteten Laminats	47
3.15. Spannungsverteilung im Laminat unter der Normalkraftbelastung	48
3.16. Analytisch bestimmtes Verschiebungsfeld des Laminats unter Normalkraftbelastung im Vergleich zur FE-Lösung a Verschiebung v an der Grenze zwischen zwei Laminatschichten. b Verschiebung u in der in der Mitte des Laminats ($x = \frac{l}{2}$) für alle betrachteten Längen-Höhen-Verhältnisse.	49
3.17. Vergleich der Normalspannungsverläufe im Laminat aus der analytischen und der FE-Rechnung bei Querkraftbelastung	50
3.18. Vergleich der Schubspannungsverläufe im Laminat aus der analytischen und der FE-Rechnung bei Querkraftbelastung	51
3.19. Analytisch bestimmtes Verschiebungsfeld des Laminats mit $\frac{l}{h} = 3$ unter Querkraftbelastung im Vergleich zur FE-Lösung a Verschiebung u bei $x = \frac{l}{2}$, b Verschiebung v an der Schichtgrenze.	52
3.20. Analytisch bestimmtes Verschiebungsfeld des Laminats mit $\frac{l}{h} = 5$ unter Querkraftbelastung im Vergleich zur FE-Lösung a Verschiebung u bei $x = \frac{l}{2}$, b Verschiebung v an der Schichtgrenze.	53
3.21. Analytisch bestimmtes Verschiebungsfeld des Laminats mit $\frac{l}{h} = 10$ unter Querkraftbelastung im Vergleich zur FE-Lösung a Verschiebung u bei $x = \frac{l}{2}$, b Verschiebung v an der Schichtgrenze.	53
3.22. Vergleich der Normalspannungsverläufe im Laminat aus der analytischen und der FE-Rechnung bei Biegemomentenbelastung	54
3.23. Vergleich der Verschiebungskomponenten aus den analytischen Lösungen für die Längen-Höhen-Verhältnisse von $\frac{l}{h} = 3$, $\frac{l}{h} = 5$, $\frac{l}{h} = 10$ des Laminats unter Biegemomentenbelastung mit den Ergebnissen der FE-Rechnung. a Querschnittsneigung in der Mitte des Laminats. b Verschiebung v an den Schichtgrenzen.	54
4.1. Einfluss von λ auf die Verschiebung u bei Normalkraftbelastung	57
4.2. Einfluss von λ auf die Normalspannung σ_{xx} bei Querkraftbelastung	58
4.3. Einfluss von λ auf die Normalverschiebung u bei Querkraftbelastung	59
4.4. S-Schlag in der Normalverschiebung u der gedrungenen Scheiben bei Querkraftbelastung	60
4.5. Konvergenz der Normalverschiebung u gegen die Querschnittsverschiebung in der Balkentheorie	61
4.6. Einfluss von λ auf die Verschiebung v bei Querkraftbelastung	62
4.7. Einfluss der Schubspannung auf den Verlauf der Verschiebung v der gedrungenen Scheiben	63
4.8. Konvergenz der Verschiebung v gegen den Biegelinienverlauf in der Balkentheorie	64
4.9. Vergleich der Normalverschiebungen u_1 und u_2 an der Einspannung der Scheibe .	65
4.10. Verschiebung v_2 und Referenz-Balkenbiegung mit steigendem Parameter λ	65
4.11. Normalverschiebung u bei „reiner“ Biegung der orthotropen Scheibe	66
4.12. Verschiebung v an der neutralen Achse der Scheibe mit steigendem λ bei „reiner“ Biegung	66

4.13. Normalspannung σ_{xx} mit steigendem Längen-Höhen-Verhältnis des Laminats bei Querkraftbelastung	68
4.14. Schubspannung τ_{xy} mit steigendem Längen-Höhen-Verhältnis des Laminats bei Querkraftbelastung	69
4.15. Verschiebung u mit steigendem Längen-Höhen-Verhältnis des Laminats bei Querkraftbelastung	69
4.16. Verschiebung u in gedrungeenen Laminaten unter Querkraftbelastung	70
4.17. Verschiebungsfeld der orthotropen Scheibe unter Normalkraftbelastung mit steigendem E-Modul E_x a Einfluss auf die Verschiebung u in der Mitte der Scheibe, b Einfluss auf die Verschiebung v am oberen Rand der Scheibe.	72
4.18. Einfluss der Querkontraktionszahl ν_{xy} auf die Verschiebung v am oberen Rand der Scheibe unter Normalkraftbelastung	73
4.19. Verschiebungsfeld der orthotropen Scheibe unter Querkraftbelastung mit steigendem E-Modul E_x a Einfluss auf die Verschiebung u in der Mitte der Scheibe, b Einfluss auf die Verschiebung v an der neutralen Achse der Scheibe	74
4.20. Einfluss der Querdehnzahl ν_{xy} auf den Verlauf der Verschiebung u bei Querkraftbelastung a Betrachtung des gesamten Scheibenquerschnitts, b 10000-fache Vergrößerung des Verschiebungsverlaufs aus a am oberen Scheibenrand	75
4.21. Einfluss der Querdehnzahl ν_{xy} auf den Verlauf der Verschiebung v am oberen Scheibenrand bei Querkraftbelastung a Betrachtung der Auswirkung der Querdehnzahl auf den Verlauf der Verschiebung v über die gesamte Scheibenlänge, b 10000-fache Vergrößerung des Verschiebungsverlaufs aus a in der Scheibenmitte ($x = \frac{l}{2}$).	75
4.22. Einfluss des Schubmoduls G_{xy} auf den Verlauf der Verschiebung u unter Querkraftbelastung a Betrachtung des gesamten Scheibenquerschnitts, b 10-fache Vergrößerung des Verschiebungsverlaufs aus a am oberen Scheibenrand	76
4.23. Einfluss des Schubmoduls G_{xy} auf die Verschiebung v der neutralen Achse der Scheibe unter Querkraftbelastung a Betrachtung der Auswirkung des Schubmoduls auf den Verlauf der Verschiebung v der neutralen Achse über die gesamte Scheibenlänge, b 10-fache Vergrößerung des Verschiebungsverlaufs aus a an der Einspannung der Scheibe	76
4.24. Verschiebungsfeld der orthotropen Scheibe unter Biegemomentenbelastung mit steigendem E-Modul E_x a Einfluss auf die Verschiebung u in der Mitte der Scheibe, b Einfluss auf die Verschiebung v an der neutralen Achse der Scheibe	77

4.25. Einfluss der Querdehnzahl ν_{xy} auf den Verlauf der Verschiebung v am oberen Scheibenrand bei Momentenbelastung	
a Betrachtung der Auswirkung der Querdehnzahl auf den Verlauf der Verschiebung v über die gesamte Scheibenlänge, b 10000-fache Vergrößerung des Verschiebungsverlaufs aus a in der Scheibenmitte ($x = \frac{l}{2}$).	77
5.1. Kopplung der geraden und der zylindrisch gekrümmten balkenartigen Scheiben	80
5.2. FE-Modell des Profils	83
5.3. Verlauf der Normalspannungen σ_{xx} und $\sigma_{\varphi\varphi}$ über die normierte Höhe des Profils h^*	84
5.4. Verlauf der Normalspannung σ_{rr} über die normierte Profilhöhe h^*	85
5.5. Verschiebung u an der Schnittstelle des geraden und des zylindrisch gekrümmten Segments dargestellt über die normierte Profilhöhe h^*	86
5.6. Verschiebungen v_s und v_c im kartesischen Koordinatensystem	86
5.7. Gesamtes Profil im verformten Zustand	88
5.8. FE-Modell des orthotrop geschichteten Profils mit $\frac{l}{h} = 3$ und $\frac{r_m}{h} = \frac{3}{2}$	91
5.9. Spannungsfeld im aus einem geraden und einem zylindrisch gekrümmten Segment bestehenden Profil mit langem Flansch ($\frac{l}{h} = 10$) und starker Krümmung des Winkels ($\frac{r_m}{h} = \frac{3}{2}$)	
a Normalspannung in Richtung der neutralen Faser des Profils, b Normalspannung quer zur neutralen Faser	93
5.10. Spannungsfeld im aus einem geraden und einem zylindrisch gekrümmten Segment bestehenden Profil mit kurzem Flansch ($\frac{l}{h} = 3$) und starker Krümmung des Winkels ($\frac{r_m}{h} = \frac{3}{2}$)	
a Normalspannung in Richtung der neutralen Faser des Profils, b Normalspannung quer zur neutralen Faser	94
5.11. Verschiebung u an der Schnittstelle des geraden und des zylindrisch gekrümmten Segments	95
5.12. Verschiebung v an der Grenze zwischen der Schicht 1 und 2	
a Verschiebung v im geraden Bereich b Verschiebung v im gekrümmten Bereich	96
5.13. Verformung der mittleren Sehne des orthotrop geschichteten Profils unter der Momentenbelastung	96
5.14. Spannungsfeld im aus einem geraden und einem zylindrisch gekrümmten Segment bestehenden orthotrop geschichteten Profil mit langem Flansch ($\frac{l}{h} = 10$) und starker Krümmung des Winkels ($\frac{r_m}{h} = \frac{3}{2}$) – bestimmt mit separatem Gleichungssystem	
a Normalspannung in Richtung der neutralen Faser des Profils, b Normalspannung quer zur neutralen Faser	97
5.15. Spannungsfeld im aus einem geraden und einem zylindrisch gekrümmten Segment bestehenden orthotrop geschichteten Profil mit langem Flansch ($\frac{l}{h} = 10$) und geringer Krümmung des Winkels ($\frac{r_m}{h} = 6$) – bestimmt mit separatem Gleichungssystem	
a Normalspannung in Richtung der neutralen Faser des Profils, b Normalspannung quer zur neutralen Faser	98

5.16. Verschiebung v an der Grenze zwischen der Schicht 1 und 2 – bestimmt mit separatem Gleichungssystem	
a Verschiebung v im geraden Bereich	b Verschiebung v im gekrümmten Bereich
5.17. Radialverschiebung v_c an der Grenze zwischen der Schicht 1 und der Schicht 2 im gekrümmten Segment des untersuchten orthotrop geschichteten Profils mit $l = 3h$ und $r_m = \frac{3}{2}h$	99
A.1. Verlauf der Normalspannungen σ_{xx} und $\sigma_{\varphi\varphi}$ in einem orthotropen Profil mit $\frac{l}{h} = 3$ und $\frac{r_m}{h} = \frac{3}{2}$	117
A.2. Verlauf der Normalspannungen σ_{xx} und $\sigma_{\varphi\varphi}$ in einem Profil mit $\frac{l}{h} = 3$ und $\frac{r_m}{h} = 3$	118
A.3. Verlauf der Normalspannungen σ_{xx} und $\sigma_{\varphi\varphi}$ in einem Profil mit $\frac{l}{h} = 3$ und $\frac{r_m}{h} = 6$	118
A.4. Verlauf der Normalspannungen σ_{rr} in einem orthotropen Profil mit $\frac{l}{h} = 3$ und $\frac{r_m}{h} = \frac{3}{2}$	119
A.5. Verlauf der Normalspannungen σ_{rr} in einem orthotropen Profil mit $\frac{l}{h} = 3$ und $\frac{r_m}{h} = 3$	120
A.6. Verlauf der Normalspannungen σ_{rr} in einem orthotropen Profil mit $\frac{l}{h} = 3$ und $\frac{r_m}{h} = 6$	120
A.7. Verlauf der Verschiebung u in orthotropen Profilen mit $\frac{l}{h} = 3, \frac{l}{h} = 5, \frac{l}{h} = 10,$ und $\frac{r_m}{h} = \frac{3}{2}$	121
A.8. Auslenkung der mittleren Sehne des orthotropen Profils mit $\frac{l}{h} = 3$ und $\frac{r_m}{h} = \frac{3}{2}$ unter der Momentenbelastung M_0	122
A.9. Auslenkung der mittleren Sehne des orthotropen Profils mit $\frac{l}{h} = 3$ und $\frac{r_m}{h} = 3$ unter der Momentenbelastung M_0	122
A.10. Auslenkung der mittleren Sehne des orthotropen Profils mit $\frac{l}{h} = 3$ und $\frac{r_m}{h} = 6$ unter der Momentenbelastung M_0	123
A.11. Auslenkung der mittleren Sehne des orthotropen Profils mit $\frac{l}{h} = 5$ und $\frac{r_m}{h} = \frac{3}{2}$ unter der Momentenbelastung M_0	123
A.12. Auslenkung der mittleren Sehne des orthotropen Profils mit $\frac{l}{h} = 5$ und $\frac{r_m}{h} = 3$ unter der Momentenbelastung M_0	124
A.13. Auslenkung der mittleren Sehne des orthotropen Profils mit $\frac{l}{h} = 5$ und $\frac{r_m}{h} = 6$ unter der Momentenbelastung M_0	124
A.14. Auslenkung der mittleren Sehne des orthotropen Profils mit $\frac{l}{h} = 10$ und $\frac{r_m}{h} = \frac{3}{2}$ unter der Momentenbelastung M_0	125
A.15. Auslenkung der mittleren Sehne des orthotropen Profils mit $\frac{l}{h} = 10$ und $\frac{r_m}{h} = 3$ unter der Momentenbelastung M_0	125
A.16. Auslenkung der mittleren Sehne des orthotropen Profils mit $\frac{l}{h} = 10$ und $\frac{r_m}{h} = 6$ unter der Momentenbelastung M_0	125
B.1. Verlauf der Normalspannungen σ_{xx} und $\sigma_{\varphi\varphi}$ in einem orthotrop geschichteten Profil mit $\frac{l}{h} = 10$ und $\frac{r_m}{h} = \frac{3}{2}$	126
B.2. Verlauf der Normalspannungen σ_{xx} und $\sigma_{\varphi\varphi}$ in einem orthotrop geschichteten Profil mit $\frac{l}{h} = 5$ und $\frac{r_m}{h} = 3$	127
B.3. Verlauf der Normalspannungen σ_{xx} und $\sigma_{\varphi\varphi}$ in einem orthotrop geschichteten Profil mit $\frac{l}{h} = 10$ und $\frac{r_m}{h} = 6$	127

B.4. Verlauf der Normalspannungen σ_{rr} in einem orthotrop geschichteten Profil mit $\frac{l}{h} = 10$ und $\frac{r_m}{h} = \frac{3}{2}$	128
B.5. Verlauf der Normalspannungen σ_{rr} in einem orthotrop geschichteten Profil mit $\frac{l}{h} = 5$ und $\frac{r_m}{h} = 3$	129
B.6. Verlauf der Normalspannungen σ_{rr} in einem orthotrop geschichteten Profil mit $\frac{l}{h} = 10$ und $\frac{r_m}{h} = 6$	129
B.7. Verlauf der Verschiebung u in orthotrop geschichteten Profilen mit $\frac{l}{h} = 3$, $\frac{l}{h} = 5$, $\frac{l}{h} = 10$, und $\frac{r_m}{h} = \frac{3}{2}$	130
B.8. Verschiebungskomponente quer zur Faserrichtung im Profil mit $\frac{l}{h} = 3$ und $\frac{r_m}{h} = \frac{3}{2}$; a im geraden Bereich, b im gekrümmten Bereich	130
B.9. Verschiebungskomponente quer zur Faserrichtung im Profil mit $\frac{l}{h} = 3$ und $\frac{r_m}{h} = 3$; a im geraden Bereich, b im gekrümmten Bereich	131
B.10. Verschiebungskomponente quer zur Faserrichtung im Profil mit $\frac{l}{h} = 3$ und $\frac{r_m}{h} = 6$; a im geraden Bereich, b im gekrümmten Bereich	131
B.11. Verschiebungskomponente quer zur Faserrichtung im Profil mit $\frac{l}{h} = 5$ und $\frac{r_m}{h} = \frac{3}{2}$; a im geraden Bereich, b im gekrümmten Bereich	131
B.12. Verschiebungskomponente quer zur Faserrichtung im Profil mit $\frac{l}{h} = 5$ und $\frac{r_m}{h} = 3$; a im geraden Bereich, b im gekrümmten Bereich	132
B.13. Verschiebungskomponente quer zur Faserrichtung im Profil mit $\frac{l}{h} = 5$ und $\frac{r_m}{h} = 6$; a im geraden Bereich, b im gekrümmten Bereich	132
B.14. Verschiebungskomponente quer zur Faserrichtung im Profil mit $\frac{l}{h} = 10$ und $\frac{r_m}{h} = \frac{3}{2}$; a im geraden Bereich, b im gekrümmten Bereich	132
B.15. Verschiebungskomponente quer zur Faserrichtung im Profil mit $\frac{l}{h} = 10$ und $\frac{r_m}{h} = 3$; a im geraden Bereich, b im gekrümmten Bereich	133
B.16. Verschiebungskomponente quer zur Faserrichtung im Profil mit $\frac{l}{h} = 10$ und $\frac{r_m}{h} = 6$; a im geraden Bereich, b im gekrümmten Bereich	133
B.17. Auslenkung der mittleren Sehne des orthotrop geschichteten Profils mit $\frac{l}{h} = 3$ und $\frac{r_m}{h} = \frac{3}{2}$ unter der Momentenbelastung M_0	134
B.18. Auslenkung der mittleren Sehne des orthotrop geschichteten Profils mit $\frac{l}{h} = 3$ und $\frac{r_m}{h} = 3$ unter der Momentenbelastung M_0	134
B.19. Auslenkung der mittleren Sehne des orthotrop geschichteten Profils mit $\frac{l}{h} = 3$ und $\frac{r_m}{h} = 6$ unter der Momentenbelastung M_0	135
B.20. Auslenkung der mittleren Sehne des orthotrop geschichteten Profils mit $\frac{l}{h} = 5$ und $\frac{r_m}{h} = \frac{3}{2}$ unter der Momentenbelastung M_0	135
B.21. Auslenkung der mittleren Sehne des orthotrop geschichteten Profils mit $\frac{l}{h} = 5$ und $\frac{r_m}{h} = 3$ unter der Momentenbelastung M_0	136
B.22. Auslenkung der mittleren Sehne des orthotrop geschichteten Profils mit $\frac{l}{h} = 5$ und $\frac{r_m}{h} = 6$ unter der Momentenbelastung M_0	136
B.23. Auslenkung der mittleren Sehne des orthotrop geschichteten Profils mit $\frac{l}{h} = 10$ und $\frac{r_m}{h} = \frac{3}{2}$ unter der Momentenbelastung M_0	137
B.24. Auslenkung der mittleren Sehne des orthotrop geschichteten Profils mit $\frac{l}{h} = 10$ und $\frac{r_m}{h} = 3$ unter der Momentenbelastung M_0	137

B.25. Auslenkung der mittleren Sehne des orthotrop geschichteten Profils mit $\frac{l}{h} = 10$
und $\frac{r_m}{h} = 6$ unter der Momentenbelastung M_0 138

Tabellenverzeichnis

3.1. Materialdaten	38
3.2. Materialeigenschaften der Einzelschichten	47
4.1. Umrechnung des Längen-Höhen-Verhältnisses $\frac{l}{h}$ der Scheibe auf den Parameter λ	56
5.1. Materialparameter des gekrümmten Balkens	78
5.2. Werkstoffparameter der Einzelschichten	92

1. Einleitung

1.1. Allgemeines

Faserverbundwerkstoffe finden aufgrund ihres hohen Leichtbaupotentials immer mehr Anwendung im modernen Flugzeugbau. So bestehen die modernsten Flugzeuge wie die sich noch in der Entwicklung befindende Airbus A350 XWB oder die Boeing 787 (s. Abb. 1.1) zu mehr als 50 Prozent ihres Gewichts aus faserverstärkten Kunststoffen. Die Eigenschaften dieser Werkstoffe können optimal ausgenutzt werden, sodass Material und Gewicht eingespart werden können. Nicht nur die hohen Werte der spezifischen Steifigkeit und Festigkeit der Faserverbunde, sondern auch die Möglichkeit der gezielten Einstellung der Werkstoffeigenschaften und somit des Werkstoffverhaltens unter Last macht diese Werkstoffe so attraktiv für den Einsatz im Flugzeugbau. Außerdem können weitere Vorteile mit der Funktionsintegration, wie z.B. der Schall- und der Wärmeschutz oder auch die Dämpfung, erreicht werden.



Abbildung 1.1: Passagierflugzeug Boeing 787 „Dreamliner“ (Quelle: <http://boeing.com>)

Faserverbundwerkstoffe bestehen mindestens aus zwei Komponenten, wobei die eine Komponente in Faserform vorliegt. Sie ist in die zweite Komponente eingebettet, die auch als Matrix bezeichnet wird. Die Fasern bestimmen sehr wesentlich die mechanischen Eigenschaften des Werkstoffs. Sie werden durch die Matrix in der definierten geometrischen Anordnung fixiert. Die Matrix hat auch weitere Funktionen. Sie überträgt die Kräfte auf die Fasern und schützt sie sowohl vor den umgebenden Medien als auch vor der Schädigung durch den Kontakt untereinander. Außerdem verleiht sie dem Werkstoff Stabilität bei einer Druckbelastung und sorgt für eine dem Anwendungsfall angepasste Verformbarkeit sowie für die Energieaufnahme bei Schlagbeanspruchung. Die Oberflächengüte, die Alterungs- und Chemikalienbeständigkeit des Werkstoffs werden ebenfalls von der Matrix gewährleistet.

Die Kombination der Fasern und der Matrix kann in unterschiedlichen Formen vorliegen. Die Matrix kann aus verschiedenen Werkstoffen bestehen, wobei im Flugzeugbau der Einsatz von Kunststoffen (hochwertige Duro- und Thermoplaste) den Hauptanteil bildet. Als Verstärkungsphase werden vor allem Kohlenstoff-, Glas-, und Aramidfasern verwendet. Diese können als

Kurz-, Lang oder als Endlosfasern vorliegen. Die ersten beiden sind jedoch für die mechanisch hoch belastete Bauteile der Primärstruktur eines Flugzeugs weniger geeignet. Die typische Anordnung der Fasern ist parallel zu einander, sodass zusammen mit der Matrix eine so genannte unidirektionale (UD-) Schicht gebildet wird. Solche UD-Schichten können unter verschiedenen Winkeln der Faserorientierung zu Mehrschichtverbunden – den Laminaten zusammengesetzt werden (s. Abb 1.2). Neben der UD-Schicht gibt es noch weitere Flächengebilde aus Fasern, wie z.B Gewebe, Geflechte und Gestricke, auf die hier jedoch nicht weiter eingegangen wird. Ausführliche Informationen zu textilen Flächen- und Halbzeugen sind in [8], [13] und [16] zu finden. In der Primärstruktur der Flugzeuge werden Faserverbunde aus hochfesten und hochsteifen Verstärkungsfasern und mechanisch, chemisch und thermisch hoch belastbaren Matrices eingesetzt.

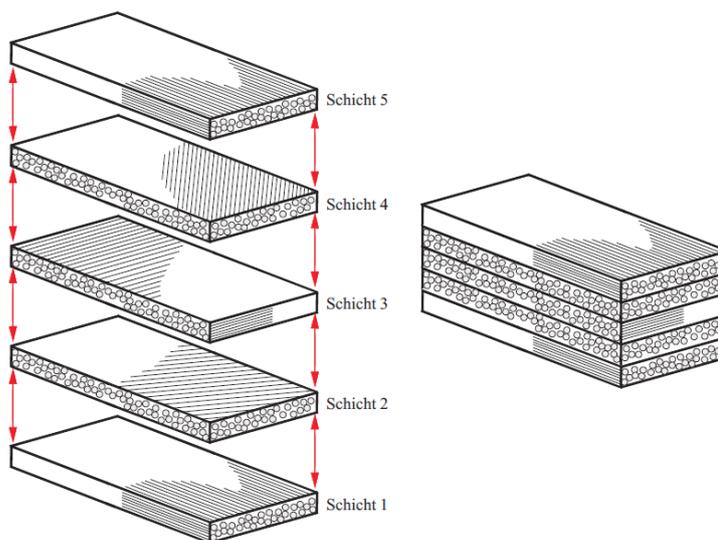


Abbildung 1.2: Schematische Darstellung eines Laminats (Quelle: [12])

Neben den Vorteilen bergen diese Werkstoffe jedoch auch einige materialtypische Probleme. Aufgrund der geschichteten Struktur der Laminats kann eine Trennung der Einzelschichten, die sogenannte Delamination, auftreten. Die geringe Impact-Toleranz der Faserverbundwerkstoffe und die teilweise schwierige (mit hohem Aufwand verbundene) Aufdeckung der Schäden sind ebenfalls typisch für Faserverbundwerkstoffe. Die genannten Schädigungen sind mit einer großen Abnahme der mechanischen Eigenschaften des Werkstoff verbunden und führen im schlimmsten Fall zum Strukturversagen.

Die Herstellung der Strukturkomponenten eines Flugzeugs kann in verschiedenen Bauweisen erfolgen. Hauptsächlich werden dabei die Integral-, die integrierende und die Differentialbauweise unterschieden. In der Integralbauweise werden die Flugzeugkomponenten aus einem „Materialblock“ erstellt. In dieser Bauweise lässt sich eine gewichtspotimierte Struktur realisieren, da das zusätzliche Gewicht der Verbindungselemente entfällt. Für die Herstellung großflächiger Bauteile in Integralbauweise eignen sich die Faserverbundwerkstoffe sehr gut. Dies ist auf die Besonderheit der Faserverbunde, dass der endgültige Werkstoff erst bei der Bauteilherstellung entsteht, zurückzuführen. So können mit dem Einsatz entsprechender Herstellungsverfahren (z.B. Lege- und Wickeltechniken) auch große Bauteile im Ganzen gefertigt werden, ohne dass dabei hohe Abfallmengen anfallen. Neben den Gewichtsvorteilen sowie den Vorteilen für die Montage der

Komponenten besitzt die Integralbauweise auch Nachteile. Als Beispiele können der ungehinderte Risswachstum und die Möglichkeit der großflächigen Delaminationen genannt werden.

Den Gegenteil zur Integralbauweise stellt die Differentialbauweise dar. In der Differentialbauweise ist die Struktur des Flugzeugs aus kleineren Komponenten, die mit Hilfe verschiedener Verbindungselemente gefügt werden, aufgebaut. So besteht die Schale eines Flugzeugumpfes, der in der Differentialbauweise gefertigt wurde, im Wesentlichen aus den Strukturelementen Stringer, Spante und Rumpfhaut, die in separaten Fertigungsschritten hergestellt worden sind. Die Stringer und die Rumpfhaut werden anschließend mittels Vernietung, Klebung oder Schweißung zusammengefügt. Die Verbindung der Spante mit der Haut erfolgt mit den sogenannten Schubwinkeln bzw. Clips (s. Abb. 1.3). Zu der geometrischen Komplexität dieser Verbindungs-

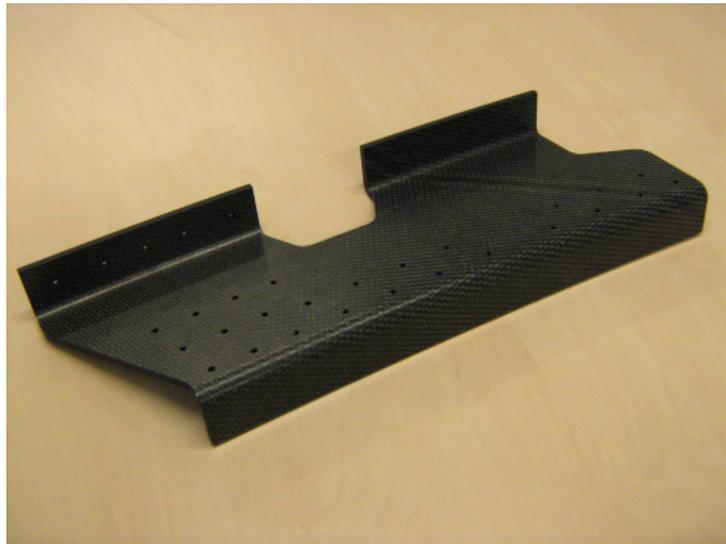


Abbildung 1.3: Schubwinkel (Clip) aus CFK (Quelle: www.reinforcedplastics.com)

elemente kommt im modernen Flugzeugbau die Komplexität des geschichteten Faserverbundwerkstoffs hinzu. Dies muss bereits bei der Vordimensionierung der Verbindungselemente in der Konstruktionsphase berücksichtigt werden. Die Vorauslegung und die Analyse des möglichen Versagens dieser Bauteile setzen eine genaue Spannungsberechnung voraus. Diese kann mithilfe der Finite Elemente Methode erbracht werden. Die FE-Rechnung ist jedoch mit sehr hohem Aufwand für die hinreichend genaue Modellierung des Bauteils und die benötigte Rechenzeit verbunden. Für viele Anwendungen ist die Entwicklung von analytischen Methoden zur Berechnung von Spannungs- und Verschiebungsfeldern im Bauteil, die sich durch ihre Schnelligkeit auszeichnen, sinnvoll.

In der Fachliteratur wie z.B [9], [11] und [17] sind Herleitungen der Gleichungen zur analytischen Bestimmung der Spannungs- und Verschiebungsfelder in verschiedenen Grundgeometrien mit isotropen, orthotropen und anisotropen Materialmodellen zu finden. Für die Berechnung der Verschiebungs- und der Spannungsfunktionen in Strukturen, deren Geometrie als eine Zusammensetzung verschiedener Grundformen betrachtet werden kann, hat die Herleitung einer analytischen Methode jedoch bislang noch nicht stattgefunden.

1.2. Themenstellung der Arbeit

Im Rahmen dieser Masterarbeit soll eine geschlossen-analytische Lösung für ein in mehrere Bereiche unterteiltes Profil (s. Abb. 1.4) eines Schubwinkels aus orthotropen und orthotrop geschichteten Werkstoffen entwickelt werden. In der Lösung sollen die bereits ermittelten Spannungs- und Verschiebungsfelder des gekrümmten Bereichs mit denen der geraden Bereiche gekoppelt werden. Die Lösung wird auf eine ebene Problemstellung eingegrenzt. Bei der Betrachtung der orthotrop geschichteten Profile erfolgt eine Einschränkung auf symmetrische Kreuzverbund-Lamine.

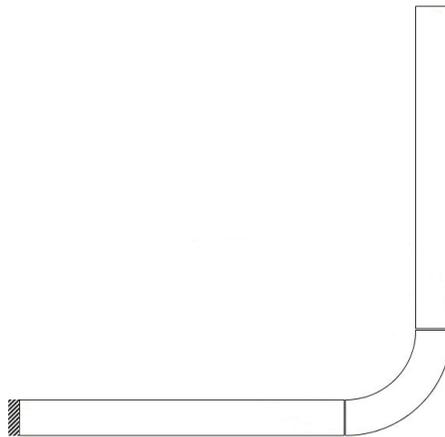


Abbildung 1.4: Schematische Darstellung eines Schubwinkelprofils

Im Wesentlichen lässt sich diese Arbeit in drei Abschnitte aufteilen. Im ersten Abschnitt werden die Beziehungen für die Spannungs- und die Verschiebungsfelder der geraden balkenartigen Scheiben nach den Ansätzen der linearen Elastizitätstheorie hergeleitet. Diese Herleitung erfolgt sowohl für Scheiben mit orthotropem als auch mit isotropem Werkstoffverhalten sowie für orthotrop geschichtete Lamine für die elementaren Belastungsfälle Normalkraft (Zug), Querkraft (einzelne Randlast) und Biegemoment (Randmoment). Anschließend findet eine Verifikation der hergeleiteten Beziehungen anhand eines Vergleichs mit den Ergebnissen einer FE-Rechnung statt. Hierfür werden stellvertretend für die verschiedenen Geometrievarianten der Scheibe drei FE-Modelle mit variierenden Längen-Höhen-Verhältnissen im Preprocessor MSC Patran erstellt. Die eigentliche FE-Rechnung wird mit dem Solver MSC Nastran durchgeführt. In einer anschließenden Parameterstudie werden die Auswirkungen der Geometrieparameter und der Werkstoffparameter auf die analytisch bestimmten Spannungs- und Verschiebungsfelder der geraden balkenartigen Schiebe und des Laminats untersucht.

Im zweiten Abschnitt der Arbeit wird die Kopplung der analytischen Lösungen des geraden und des gekrümmten Bereichs eines orthotropen und orthotrop geschichteten Profils durchgeführt. Hierfür werden Übergangsbedingungen für die Verschiebungsfelder an der Schnittstelle der Profilstücke formuliert. Die analytisch bestimmten Spannungs- und Verschiebungskomponenten des gesamten Profils werden ebenfalls anhand einer FE-Lösung verifiziert.

Im dritten Abschnitt wird ein Versuch unternommen, einen verbesserten Ansatz für die analytische Lösung der Spannungs- und Verschiebungsfelder innerhalb des Schubwinkelprofils bei Verwendung eines Energie- und Variationsprinzips herzuleiten. Die Herleitung beschränkt sich auf ein orthotropes Profil. Mit abschließender Zusammenfassung der Ergebnisse und einem Ausblick schließt die Arbeit.

2. Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die für diese Arbeit relevanten theoretischen Grundlagen der linearen Elastizitätstheorie erläutert. Außerdem wird es auf die für diese Arbeit relevanten Energie- und Variationsprinzipien sowie die Grundlagen der Methode der finiten Elemente eingegangen.

2.1. Formeln und Grundlagen der linearen Elastizitätstheorie

Die Gründung der linearen Elastizitätstheorie lässt sich auf die Wissenschaftler Galileo Galilei (1564 - 1642) und Robert Hooke (1635 - 1703) zurückführen. Galileo Galilei hat in seinem Werk „Discorsi“ als erster den Bruchvorgang spröder Körper systematisch untersucht und den Einfluss der Gestalt eines Körpers auf seine Festigkeit dargelegt. Hooke hat das „Fundamentalgesetz“ der linearen Elastizitätstheorie: „Dehnung und Spannung sind proportional“ formuliert. Mit Hilfe dieses Materialgesetzes wurde von weiteren Wissenschaftlern wie z.B. Mariotte (1620-1684), Leibniz (1646-1716), Bernoulli (1655-1705) und Euler (1707-1783) zunächst die Balkenbiegung behandelt.

Seitdem ist die Theorie von weiteren Wissenschaftlern ergänzt und erweitert worden. Als Beispiel kann man die Erweiterung auf Platten und Schalen durch Kirchhoff, Gauss, Mohr usw. nennen. Alle diese Arbeiten weisen die gleiche Einschränkung, die bereits in der Bezeichnung der Theorie enthalten ist, auf. Sie beschränken sich auf das linear elastische Stoffgesetz sowie auf kleine (infinitesimale) Verzerrungen.

Weitere Annahmen der linearen Elastizitätstheorie sind:

- Bei Wegnahme der Belastung verschwinden die Verzerrungen vollständig
- Die gespeicherte Energie wird bei Entlastung vollständig zurückgewonnen
- Das Materialverhalten wird von der Belastungsgeschwindigkeit nicht beeinflusst
- Alle Spannungen bleiben unter der Proportionalitätsgrenze

2.1.1. Eingrenzung auf ebene Problemstellungen

In dieser Arbeit wird darauf verzichtet die lineare Elastizitätstheorie vollständig und auf alle Problemstellungen anwendbar abzubilden. Es werden lediglich die Grundgleichungen der Theorie im allgemeinen, räumlichen Zustand aufgestellt und anschließend auf die für diese Arbeit relevanten ebenen Zustände angewandt. Weitere Informationen können der Fachliteratur, wie z.B. [4], [7],[9], [11] und [17] entnommen werden.

Die ebenen Zustände sind als Sonderfälle des allgemeinen räumlichen Zustandes definiert. Dabei unterscheidet man zwischen dem ebenen Spannungszustand und ebenen Verzerrungszustand.

Ebener Spannungszustand

Im Fall des ebenen Spannungszustandes (ESZ) wird ein Flächentragwerk (z. B. eine Scheibe) betrachtet, das tangential zur Fläche belastet wird. Für den ebenen Spannungszustand in einer Scheibe gelten folgende Annahmen:

- die Dicke der Scheibe ist klein gegenüber den anderen Dimensionen

- die Scheibe wird nur in ihrer Ebene belastet
- die Ober- und Unterseite der Scheibe sind unbelastet

Da es im ebenen Spannungszustand keine Belastung außerhalb der Scheibenebene gibt, kann man mit hinreichender Genauigkeit annehmen, dass die Spannungen in dieser Richtung ebenfalls nicht existieren [6].

Für die weitere Betrachtung wird das der Scheibe angehörige, kartesische Koordinatensystem so definiert, dass die Achsen x und y die Mittelebene der Scheibe aufspannen (s. Abb. 2.1). Die Normalspannung in z -Richtung σ_{zz} sowie die Schubspannungen τ_{xz} und τ_{yz} sind in diesem Fall gleich null.

$$\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (2.1)$$

Aufgrund der geringen Scheibendicke wird außerdem eine konstante Verteilung der Spannungen in der xy -Ebene über die Dicke angenommen.

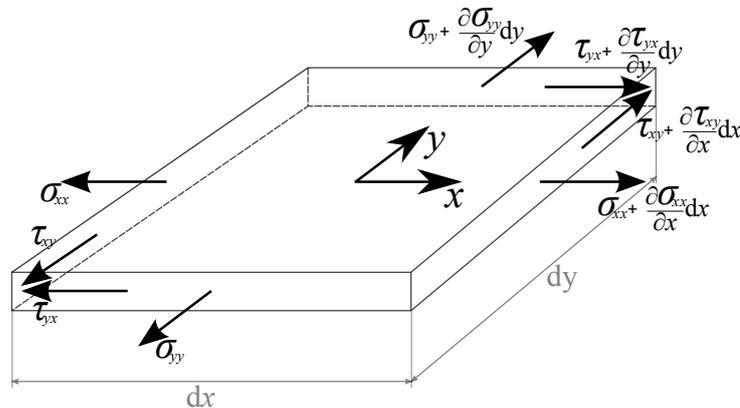


Abbildung 2.1: Ebener Spannungszustand

Die Verzerrung in z -Richtung ε_{zz} kann, wie es aus dem Materialgesetz (s. 2.1.4) folgt, durchaus auftreten. Die Schubverzerrungen γ_{xz} und γ_{yz} müssen jedoch verschwinden.

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (2.2)$$

Somit wirken im ebenen Spannungszustand die Normalspannungen σ_{xx} und σ_{yy} sowie die Schubspannungen τ_{xy} und τ_{yx} . Wobei aus dem Momentengleichgewicht (s. 2.1.2) um eine zur z -Achse parallelen Achse, die durch den Mittelpunkt der Scheibe verläuft folgt:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2.3)$$

Ebener Verzerrungszustand

Im ebenen Verzerrungszustand (EVZ) treten Verschiebungen und Verformungen nur in einer Ebene auf. Wenn diese Ebene ebenfalls durch die x - und y -Achse aufgespannt wird, sind die Verschiebungen u und v sowie die Verzerrungen ε_{xx} , ε_{yy} , γ_{xy} und γ_{yx} nur von den Koordinaten x und y abhängig. Die Verschiebung w sowie die Verzerrungen ε_{zz} , γ_{xz} und γ_{yz} verschwinden:

$$w = 0, \varepsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (2.4)$$

Aus dem Werkstoffgesetz (s. Abschnitt 2.1.4) geht hervor, dass die Normalspannung σ_{zz} im ebenen Verzerrungszustand auftreten kann, jedoch die Schubspannungen τ_{xz} und τ_{yz} verschwinden.

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (2.5)$$

2.1.2. Gleichgewichtsbedingungen

Für die Berechnung des gesamten Spannungsfeldes werden Gleichgewichtsbedingungen an einem infinitesimalen Volumenelement, das aus dem Körper freigeschnitten wird, aufgestellt (s. Abb. 2.2). In der linearen Elastizitätstheorie werden sehr kleine Verformungen vorausgesetzt, somit kann das Gleichgewicht am unverformten System aufgestellt werden (Theorie 1. Ordnung).

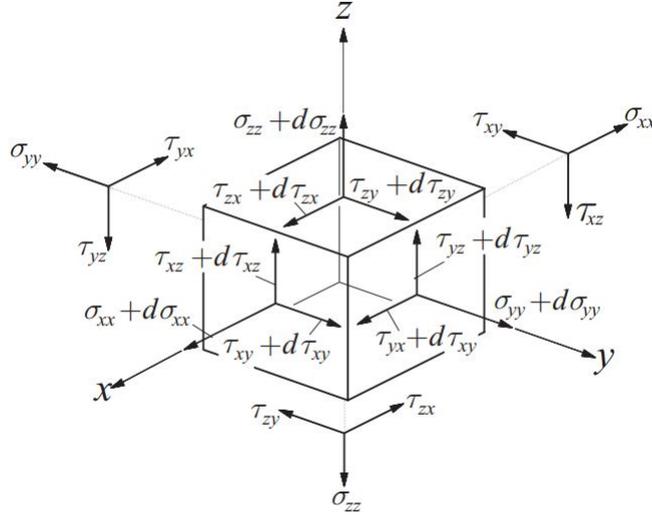


Abbildung 2.2: Kräfte am infinitesimalen Volumenelement [12]

Aus dem Kräftegleichgewicht am freigeschnittenen Volumenelement können unter der Berücksichtigung der Volumenkräfte f_i die Gleichgewichtsbedingungen in Indexschreibweise wie folgt formuliert werden:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial j} + f_i = 0 \quad (i, j = x, y, z) \quad (2.6)$$

Dabei ist die Schreibweise für die Schubspannungen $\sigma_{ij} \equiv \tau_{ij}$

Für die in dieser Arbeit betrachteten ebenen Probleme im kartesischen Koordinatensystem, sowie mit der Annahme, dass keine Volumenkräfte wirken, gelten folgende Beziehungen:

$$\sum F_x = 0 : \quad \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \quad (2.7)$$

$$\sum F_y = 0 : \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (2.8)$$

$$\sum M_z = 0 : (\tau_{xy} dy dz) dx = (\tau_{yx} dx dz) dy \quad (2.9)$$

Aus dem Momentengleichgewicht um die z -Achse (s. (2.9)) folgt:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2.10)$$

Aus den Momentengleichgewicht um die anderen Achsen erhält man:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (2.11)$$

Dies bedeutet, dass der Tensor $\underline{\underline{S}}$, der den Spannungszustand in einem Punkt des Körpers angibt, symmetrisch ist. Die Gleichung (2.12) gibt den Spannungstensor für den allgemeinen dreidimensionalen Spannungszustand an.

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}}^T = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \text{sym.} & & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Für die ebenen Zustände werden die entsprechenden Elemente des Spannungstensors (s. Abschnitt 2.1.1) zu null.

2.1.3. Kinematische Beziehungen

Mit den kinematischen Beziehungen werden die Verschiebungen mit den Verzerrungen verknüpft. Bei den Verzerrungen unterscheidet man zwischen den Dehnungen ε_{ij} und Schubverzerrungen γ_{ij} .

Bei der Betrachtung der Verformung von einem dreidimensionalen, infinitesimalen Element stehen die Dehnungen senkrecht auf seinen Schnittflächen. Sie beschreiben die Verformung des Elements entlang seiner parallel zu einander verlaufender Kanten. Das Auftreten von Dehnungen führt zur Veränderung der Elementabmessungen und somit zur Veränderung des Elementvolumens, wobei sich die Winkel zwischen den Elementkanten nicht ändern. Bei gleicher Dehnung des Elements in alle Koordinatenrichtungen bleibt die Gestalt des Elements unverändert.

Die Gleitungen bewirken die Änderung der Winkel zwischen den Elementkanten und führen somit bei gleich bleibendem Volumen des Elements zur Änderung seiner Gestalt (s. Abb. 2.3).

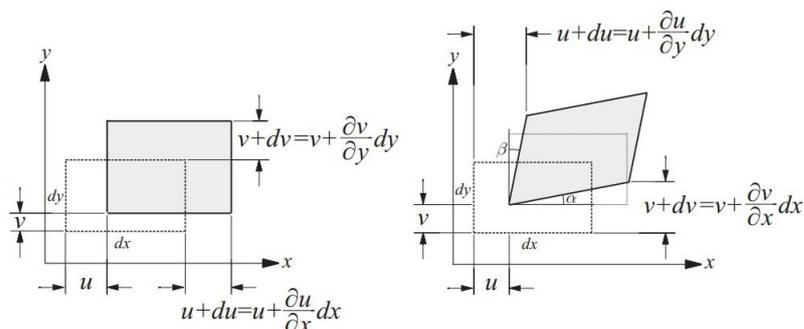


Abbildung 2.3: Definition der infinitesimalen Dehnungen und Gleitungen [12]

Mit der Einschränkung der linearen Elastizitätstheorie auf infinitesimal kleine Verzerrungen lassen sie sich wie nachfolgend beschrieben bestimmen.

Es sei ein beliebiger Verschiebungsvektor \underline{u} , der im Raum die Komponenten u , v und w hat, gegeben.

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Im kartesischen Koordinatensystem hängen diese von den Koordinaten x , y und z ab. Somit lassen sich im allgemeinen dreidimensionalen Zustand die Dehnungen wie in (2.14) und die Gleitungen in (2.15) dargestellt, bestimmen.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.14)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.15)$$

In der Indexschreibweise kann der Zusammenhang zwischen den Verschiebungskomponenten und den Verzerrungen wie folgt angeschrieben werden:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right) \quad (i, j = x, y, z) \quad (2.16)$$

Die Verschiebungskomponenten entsprechen in dieser Schreibweise je nach der indizierten Koordinate den Verschiebungskomponenten u , v und w in der gewählten Notation.

Die in (2.14) und (2.15) angegebenen Verzerrungen können in Form einer Matrix, dem infinitesimalen Verzerrungstensor (vgl. (2.17)) zusammengefasst werden.

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \text{sym.} & & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Aus drei Komponenten des Verschiebungsvektors sind somit sechs Komponenten des Verzerrungstensors durch die Differentiation eindeutig bestimmbar. Im umgekehrten Fall, wenn aus dem gegebenen Verzerrungszustand die Verschiebungen ermittelt werden sollen, ist die Lösung nicht mehr eindeutig, da zur Berechnung von drei Unbekannten sechs Gleichungen zur Verfügung stehen. Für eine eindeutige Lösung müssen die Verzerrungen voneinander abhängig sein. Der Zusammenhang zwischen den Verzerrungen wird gebildet, indem man nach der zweimaligen Differentiation der Gleichung (2.16) nach den jeweiligen Koordinaten die Verschiebungen durch die Verzerrungen nach den kinematischen Beziehungen (2.14) ersetzt. Diese Beziehungen werden als Kompatibilitäts- bzw. Verträglichkeitsbedingungen bezeichnet. Die Gleichung (2.18) gibt die Kompatibilitätsbedingungen im allgemeinen räumlichen Zustand in Indexschreibweise wieder.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial k \partial l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial i \partial j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial j \partial l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial i \partial k} = 0 \quad (i, j, k, l = x, y, z) \quad (2.18)$$

Wobei für die Gleitungen die Schreibweise $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij}$ verwendet wird. Mit der Berücksichtigung der Symmetrie des Verzerrungstensors erhält man somit insgesamt sechs Kompatibilitätsbedingungen, von denen jeweils drei voneinander unabhängig sind. In der Gleichung (2.19) ist die Kompatibilitätsbedingung zwischen ε_{xx} , ε_{yy} und γ_{xy} , die für die Lösung ebener Probleme in dieser Arbeit relevant ist, angegeben.

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} \quad (2.19)$$

2.1.4. Materialgesetz des linear-elastischen Körpers

Das Materialgesetz verknüpft die Spannungen mit den Verzerrungen und beschreibt somit das mechanische Verhalten des Werkstoffs. In der klassischen Elastizitätstheorie werden üblicherweise Körper mit linear-elastischem Materialverhalten behandelt. Dieses Verhalten ist durch die Reversibilität der Verformungen gekennzeichnet, d.h. es treten nach der Entlastung des Körpers keine bleibenden Dehnungen auf. Des weiteren ist der Zusammenhang zwischen den Spannungen und den Verzerrungen zeitunabhängig – die Dauer einer bestimmten Belastung hat keine Auswirkung auf die Verformung des Körpers. Die Annahme des linear-elastischen Werkstoffverhaltens ist für die Betrachtung einer Vielzahl technischer Probleme zulässig.

Im allgemeinen Fall kann der lineare Zusammenhang zwischen den Komponenten der Spannungs- und Verzerrungstensen mit (2.20) angeführt werden.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (i, j, k, l = x, y, z) \quad (2.20)$$

Dabei ist C_{ijkl} der sogenannte Elastizitätstensor 4. Stufe mit insgesamt $3^4 = 81$ Komponenten, der zur Kopplung von zwei Tensoren 2. Stufe mit jeweils $3^2 = 9$ Komponenten, dem Spannungs- und dem Verzerrungstensor, benötigt wird. Der Elastizitätstensor enthält Materialparameter, die nur experimentell ermittelt werden können. Aufgrund von Symmetrie von σ_{ij} und ε_{ij} können die Indizes des Elastizitätstensor ebenfalls vertauscht werden.

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk} \quad (2.21)$$

Somit enthält er nur 36 von einander unabhängige Werkstoffparameter.

Es ist üblich das Materialgesetz in Matrixform anzugeben.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (2.22)$$

Dabei ist die sog. Steifigkeitsmatrix $\underline{\underline{C}}$ eine 6×6 Matrix, die bei anisotropem Werkstoffverhalten voll belegt ist, wobei aufgrund der Symmetrie von $\underline{\underline{C}}$ nur 21 Werkstoffparameter voneinander unabhängig sind.

In dieser Arbeit werden orthotrope Werkstoffe betrachtet. Sie weisen drei Vorzugsrichtungen der Materialeigenschaften auf. Diese liegen normal zu den drei Symmetrieebenen, die orthogonal zueinander stehen. Somit sind nur 12 Komponenten der Steifigkeitsmatrix belegt, 9 von denen sind aufgrund der Symmetrie der Steifigkeitsmatrix voneinander unabhängig. Aufgrund der Symmetrien sind die Normalspannungen und Gleitungen sowie die Schubspannungen und Dehnungen vollständig voneinander entkoppelt. Demnach sieht das Materialgesetz für orthotro-

pe Werkstoffe wie folgt aus:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ \text{sym.} & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Mit den für einen ebenen Zustand definierten Annahmen (s. 2.1.1) reduziert sich die Anzahl der Terme in der Steifigkeitsmatrix $\underline{\underline{C}}$ und das Materialgesetz vereinfacht sich zu:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ & Q_{22} & 0 \\ \text{sym.} & & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Die reduzierte Steifigkeitsmatrix in der Gleichung (2.24) wird in der Fachliteratur auch mit dem Buchstaben Q bezeichnet. Sie findet Eingang in die Berechnung von Spannungsfeldern in den unidirektionalen Laminat einzelschichten bei gegebenen Verzerrungszuständen. In der Gleichung (2.25) ist das Materialgesetz mit der ausgeschriebenen, reduzierten Steifigkeitsmatrix $\underline{\underline{Q}}$ angegeben.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{\nu_{yx}E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ \frac{\nu_{xy}E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Bei einem gegebenen Spannungszustand ist es sinnvoll das Werkstoffgesetz in invertierter Form zu verwenden. Die Gleichung (2.26) gibt das in symbolischer Schreibweise wieder.

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{\sigma}} \quad (2.26)$$

In der invertierten Form des Materialgesetzes ist die Matrix $\underline{\underline{S}}$ die sogenannte Nachgiebigkeitsmatrix ($\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{C}}^{-1}$). In der Matrix-Schreibweise ist das Materialgesetz für ebene Zustände in der Gleichung (2.27) angeschrieben.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\tilde{S}}} \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{12} & 0 \\ & \tilde{S}_{22} & 0 \\ \text{sym.} & & \tilde{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Hierin ist $\underline{\underline{\tilde{S}}}$ die reduzierte Nachgiebigkeitsmatrix. Ausgeschrieben, d.h. mit den eingesetzten Materialparametern und unter der Berücksichtigung der Symmetriebeziehung (2.29) erhält man:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad (i, j = x, y \quad i \neq j) \quad (2.29)$$

Eine wichtige Kenngröße für die Analyse der orthotropen Werkstoffe ist der dimensionslose Orthotropiegrad s – das Verhältnis der E-Moduln entlang und quer zur Faserverrichtung (s. Gl. (2.30)). Ein weiterer Parameter k wird aus dem Verhältnis des E-Moduls entlang der Fasern und des Schubmoduls gebildet (vgl. (2.31)).

$$s = \sqrt{\frac{E_x}{E_y}} \quad (2.30)$$

$$k = \sqrt{\frac{E_x}{G_{xy}}} \quad (2.31)$$

Mit den beiden Orthotropieparametern und der Symmetriebeziehung (2.29) kann das verallgemeinerte Hookesche Gesetz (vgl. Gleichung (2.27)) im kartesischen Koordinatensystem in folgenden Beziehungen angeschrieben werden.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E_x} (\sigma_{xx} - \nu_{xy} \sigma_{yy}) \quad (2.32)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E_x} (s^2 \sigma_{yy} - \nu_{xy} \sigma_{xx}) \quad (2.33)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{k^2}{E_x} \tau_{xy} \quad (2.34)$$

Zusammenhang zwischen dem ebenen Spannungs- und dem ebenen Verzerrungszustand

Die einschränkenden Annahmen der beiden ebenen Zustände, wie sie in 2.1.1 definiert worden sind, haben zur Folge, dass die in der Scheibe auftretenden Verschiebungen, Verzerrungen und Spannungen von der Koordinate z unabhängig sind. Mit den Grundgleichungen der Elastizitätstheorie wird in [11] folgender Zusammenhang zwischen den Termen R_{ij} und S_{ij} der reduzierten Nachgiebigkeitsmatrices im EVZ und ESZ hergestellt.

$$R_{ij} = S_{ij} - \frac{S_{iz} S_{jz}}{S_{zz}}, \quad (i, j = x, y) \quad (2.35)$$

Der einzige Unterschied zwischen den Grundgleichungen im EVZ und ESZ besteht in den Materialkonstanten. Somit kann man aus der Lösung eines Problems im ESZ die Lösung des entsprechenden Problems im EVZ erhalten, indem man die Materialkonstanten gegeneinander austauscht.

Für die isotropen Werkstoffe, die lediglich zwei unabhängige Werkstoffparameter aufweisen, gilt zwischen den Materialkonstanten im EVZ und ESZ laut [7] folgender Zusammenhang:

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad \nu' = \frac{\nu}{1 - \nu} \quad (2.36)$$

Die mit dem Apostroph versehenen Größen gehören dabei zum EVZ. Zusätzlich ist im EVZ zu beachten, dass die Normalspannung σ_{zz} in Dickenrichtung der Scheibe auftritt. Sie ergibt sich jedoch aus den Verzerrungen in der Scheibenebene. Für das isotrope Materialverhalten kann σ_{zz} mit der Gleichung (2.37) berechnet werden.

$$\sigma_{zz} = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \quad (2.37)$$

Beim orthotropen Werkstoffverhalten kann die Beziehung (2.38) zur Bestimmung von σ_{zz} verwendet werden.

$$\sigma_{zz} = E_z \left[\frac{\nu_{xz}}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} (\varepsilon_{xx} + \nu_{yx}\varepsilon_{yy}) + \frac{\nu_{yz}}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} (\nu_{xy}\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \right] \quad (2.38)$$

2.1.5. Lösungsansatz der linearen Elastizitätstheorie

Zur Lösung ebener Probleme wird in der linearen Elastizitätslehre die Scheibengleichung herangezogen. Die Herleitung dieser erfolgt über die Kompatibilitätsbedingung (2.19), indem man die Verzerrungen in ihr durch die Spannungen gemäß dem Materialgesetz (s. Gln. (2.32) bis (2.34)) ersetzt. Somit erhält man folgende Gleichung:

$$k^2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} - \nu_{xy} \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + s^2 \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} - \nu_{xy} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} \quad (2.39)$$

Zusammen mit den Gleichgewichtsbedingungen (2.7) und (2.8) bildet die Gleichung (2.39) ein Gleichungssystem für die drei Spannungen σ_{xx} , σ_{yy} und τ_{xy} .

Durch das Einführen einer Funktion $F(x, y)$ reduziert sich die Anzahl der Gleichungen auf eine einzige homogene Differentialgleichung 4. Ordnung.

$$0 = \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + s^2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} (k^2 - 2\nu_{xy}) \quad (2.40)$$

Mit der Funktion $F(x, y)$ ergeben sich die Spannungen zu:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (2.41)$$

Die Funktion $F(x, y)$ wird nach dem englischen Mathematiker G. B. Airy als Airysche Spannungsfunktion bezeichnet. Sie muss der Scheibenbedingung (2.42) genügen. Diese Bedingung kann mit dem Laplace'schen Operator Δ (s. Gl. (2.43)) bei Isotropie wie folgt angeschrieben werden:

$$\Delta \Delta F = 0 \quad (2.42)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.43)$$

Die Gleichung (2.42) wird auch als Bipotenzialgleichung bezeichnet.

Spannungen, die mit der Airyschen Spannungsfunktion nach (2.41) ermittelt werden, erfüllen die Gleichgewichtsbedingungen (2.7) und (2.8) sowie die Kompatibilitätsbedingung (2.39). Für die Bipotenzialgleichung existieren jedoch unendlich viele Lösungen. In der Fachliteratur (z.B. [4] und [7]) findet man die Herleitung einiger spezieller Lösungen, die von den geltenden Randbedingungen abhängig sind. In dieser Arbeit wird nur der Ansatz mit Potenzreihen zur Lösung der Bipotenzialgleichung angewendet.

Lösungsansatz der Elastizitätstheorie für geschichtete Lamine

Es ist möglich, die Spannungsverteilung in einer aus beliebig vielen anisotropen Einzelschichten bestehenden geraden balkenartigen Scheibe mithilfe eines polynomen Lösungsansatzes zu bestimmen. Die einzelnen Schichten bestehen zwar aus gleichem Werkstoff und haben die gleiche Dicke (was für einen Großteil der technischen Anwendungen zutrifft), weisen jedoch aufgrund ihrer unterschiedlichen Orientierung im globalen Laminat-Koordinatensystem unterschiedliche elastische Eigenschaften auf.

Für die Bestimmung der Spannungs- und Verschiebungsfelder in Kapitel 3 ist die Betrachtung einer einseitig eingespannten Scheibe, die am freien Rand mit den elementaren Lasten (Normalkraft N , Querkraft Q und Biegemoment M) belastet wird, relevant. Außerdem wird in dieser Arbeit das orthotrope Werkstoffverhalten der Einzelschichten betrachtet. Mit dem oben beschriebenen Ansatz sind die Spannungen in jeder Schicht sowie die Verschiebungsfunktion zu bestimmen.

Abbildung 2.4 zeigt den schematischen Laminataufbau mit dem Ursprung des globalen Koordinatensystems an der Einspannstelle. Die vertikale Anordnung des Koordinatenursprungs entspricht der Scheibenmitte, sodass die x -Achse mit der Mittelebene der Scheibe im unverformten Zustand zusammenfällt. Die Nummerierung der Laminatschichten beginnt am oberen Scheibenrand (also bei $y = -\frac{h}{2}$) und es gelten folgende Bezeichnungen: n ist die Anzahl der Schichten, l ist die Scheibenlänge, h ist die Scheibenhöhe und t ist die Scheibendicke für alle Schichten. Die Komponenten des Spannungs- und des Verschiebungsfeldes einer Einzelschicht j sind $\sigma_{xx}^{(j)}$, $\sigma_{yy}^{(j)}$, $\tau_{xy}^{(j)}$ und u_j , v_j . Die Werkstoffkonstanten einer Einzelschicht j sind $E_x^{(j)}$, $E_y^{(j)}$, $\nu_{xy}^{(j)}$, $\nu_{yx}^{(j)}$ und $G_{xy}^{(j)}$. Der Abstand der Ränder einer Einzelschicht j von der x -Achse wird mit y_{j-1} für den oberen Rand und y_j für den unteren Rand der Schicht angegeben.

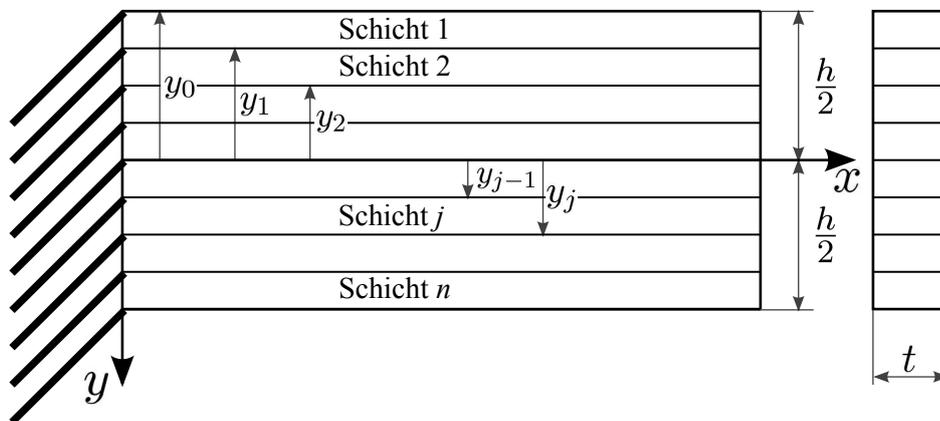


Abbildung 2.4: Schematischer Laminataufbau

Die Spannungskomponenten jeder Einzelschicht ergeben sich nach (2.41) zu

$$\sigma_{xx}^{(j)} = \frac{\partial^2 F_j}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy}^{(j)} = \frac{\partial^2 F_j}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy}^{(j)} = -\frac{\partial^2 F_j}{\partial x \partial y} \quad (2.44)$$

Die Airysche Spannungsfunktion F_j genügt der Scheibenbedingung der Einzelschicht (2.45).

$$0 = \frac{\partial^4 F_j}{\partial y^4} + s_j^2 \frac{\partial^4 F_j}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 F_j}{\partial x^2 \partial y^2} (k_j^2 - 2\nu_{xy}^{(j)}) \quad (2.45)$$

Die Komponenten des Verschiebungsvektors u_j und v_j werden mithilfe kinematischer Beziehungen (2.46) und konstitutiver Beziehungen (2.32) bis (2.34), die für eine orthotrope Einzelschicht j in (2.47) bis (2.49) angegeben sind, bestimmt.

$$\varepsilon_{xx}^{(j)} = \frac{\partial u_j}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy}^{(j)} = \frac{\partial v_j}{\partial y}, \quad \gamma_{xy}^{(j)} = \frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x} \quad (2.46)$$

$$\varepsilon_{xx}^{(j)} = \frac{1}{E_x^{(j)}} (\sigma_{xx}^{(j)} - \nu_{xy}^{(j)} \sigma_{yy}^{(j)}) \quad (2.47)$$

$$\varepsilon_{yy}^{(j)} = \frac{1}{E_x^{(j)}} (s_j^2 \sigma_{yy}^{(j)} - \nu_{xy}^{(j)} \sigma_{xx}^{(j)}) \quad (2.48)$$

$$\gamma_{xy}^{(j)} = \frac{k_j^2}{E_x^{(j)}} \tau_{xy}^{(j)} \quad (2.49)$$

Die Gleichungen (2.47) bis (2.49) sind im globalen Laminat-Koordinatensystem definiert, meistens ist jedoch das Materialgesetz für die Einzelschicht eines Laminats gegeben. Es lässt sich aus den lokalen Koordinaten der Einzelschicht in die globalen Laminat-Koordinaten mit einer sogenannten Transformationsmatrix \underline{T} überführen. Für eine bessere Übersicht werden die Komponenten des Werkstoffgesetzes im lokalen Koordinatensystem einer Einzelschicht mit einem Apostroph versehen. Somit lautet das Werkstoffgesetz für das Laminat:

$$\underline{\sigma} = \underline{T} \underbrace{\underline{Q} \underline{T}^T}_{\underline{\varepsilon}'} \underline{\varepsilon} = \underline{\bar{Q}} \underline{\varepsilon} \quad (2.50)$$

Die Matrix \underline{Q} ist im lokalen Koordinatensystem einer Einzelschicht und die Matrix $\underline{\bar{Q}} = \underline{T} \underline{Q} \underline{T}^T$ im globalen Koordinatensystem des Laminats definiert. (Die Matrix \underline{Q} ist in der Beziehung (2.25) ausgeschrieben). Die Transformationsmatrix \underline{T} ist in der Gleichung (2.51) angegeben:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \cos^2(\varphi) & \sin^2(\varphi) & -2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \\ \sin^2(\varphi) & \cos^2(\varphi) & 2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \sin(\varphi) & \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Der Winkel φ in der Transformationsmatrix ist der Winkel, um den das lokale Koordinatensystem der Einzelschicht gegenüber dem globalen Laminat-Koordinatensystem bezüglich der y -Achse gedreht ist.

In der invertierten Form des Werkstoffgesetzes wird anstelle der reduzierten Steifigkeitsmatrix \underline{Q} die reduzierte Nachgiebigkeitsmatrix $\underline{\tilde{S}}$ verwendet. Das Materialgesetz sieht dann wie folgt

aus:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{T}}^T \underbrace{\underline{\underline{\tilde{S}}} \underline{\underline{T}}^{-1}}_{\sigma'} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{\sigma}} \quad (2.52)$$

Hierin ist $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{T}}^T \underline{\underline{\tilde{S}}} \underline{\underline{T}}^{-1}$ die reduzierte Nachgiebigkeitsmatrix für jede Einzelschicht im globalen Koordinatensystem des Laminats. Mithilfe der Inversen der Transformationsmatrix können die Spannungen und Verzerrungen zurück in das lokale Koordinatensystem der jeweiligen Schicht umgerechnet werden.

2.2. Energieprinzipien

2.2.1. Allgemeiner Arbeitssatz

Der Zusammenhang zwischen einer beliebigen Gleichgewichtsgruppe von Spannungen und Kräften auf einer Seite und einem beliebigen kinematisch zulässigen Feld von Verzerrungen und Verschiebungen auf der anderen Seite kann mit dem allgemeinen Arbeitssatz hergestellt werden (s. auch [12]). Dieser wird aus den Gleichgewichtsbedingungen hergeleitet und bildet die Grundlage für verschiedene analytische Näherungsverfahren und numerische Methoden. In diesem Abschnitt findet die Herleitung des allgemeinen Arbeitssatzes statt. Diese erfolgt mit der Beziehung (2.6), die in Indexschreibweise die Gleichgewichtsbedingungen an einem Körper wiedergibt. Die Unterscheidung in der Schreibweise für die Normalspannungen σ und die Schubspannungen τ wird dabei anhand der verwendeten Indices vorgenommen. Aus der Multiplikation der Gleichung (2.6) mit den Verschiebungen u_i und der anschließenden Integration über das Volumen des Körpers erhält man:

$$\int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial j} u_i dV + \int_V f_i u_i dV = 0, \quad (i, j = x, y, z) \quad (2.53)$$

Mit der Produktregel der Differentialrechnung und der anschließenden Anwendung der kinematischen Beziehungen lässt sich der erste Integrand zu

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial j} u_i = \frac{\partial}{\partial j} (\sigma_{ij} u_i) - \frac{\partial u_i}{\partial j} \sigma_{ij} = \frac{\partial}{\partial j} (\sigma_{ij} u_i) - \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial j} \sigma_{ij} - \frac{1}{2} \frac{\partial u_j}{\partial i} \sigma_{ji} \quad (2.54)$$

umformen. Mit der Berücksichtigung der Symmetrie des Spannungstensors kann die Gleichung (2.54) wie folgt vereinfacht werden:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial j} u_i = \frac{\partial}{\partial j} (\sigma_{ij} u_i) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right) \sigma_{ij} = \frac{\partial}{\partial j} (\sigma_{ij} u_i) - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (2.55)$$

Somit ergibt sich folgende Gleichung:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial j} (\sigma_{ij} u_i) dV - \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV + \int_V f_i u_i dV = 0, \quad (2.56)$$

in der mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes das erste Teilintegral aus einem Volumenintegral über V in ein Flächenintegral bezüglich des Körperendes ∂V überführt wird.

$$\int_{\partial V} \sigma_{ij} u_i n_j dA - \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV + \int_V f_i u_i dV = 0 \quad (2.57)$$

Hierin ist n_j die Komponente des Normalvektors \underline{n} in Koordinatenrichtung j . Aus der Beziehung

$$\underline{t} = \underline{\sigma} \underline{n}, \quad (2.58)$$

die den Spannungszustand in einem Punkt an einem Schnitt eines Körpers beschreibt, kann für die i -te Komponente des Spannungsvektors \underline{t} mit der Anwendung der Einsteinschen Summenkonvention folgender Zusammenhang angeschrieben werden:

$$t_i = \sigma_{ij} n_j. \quad (2.59)$$

Wird dieser in die Gleichung (2.57) eingesetzt ergibt sich folgende Beziehung:

$$\int_{\partial V} t_i u_i dA - \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV + \int_V f_i u_i dV = 0 \quad (2.60)$$

Nach der anschließenden Aufteilung der Oberfläche ∂V des Körpers in den Teil ∂V_t , auf dem die Spannungen t_{i0} vorliegen, und den Teil ∂V_u , auf dem die Verschiebungen u_{i0} vorgegeben sind, erhält man einen Zusammenhang, der auch als allgemeiner Arbeitssatz bezeichnet wird.

$$\underbrace{\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV}_{W_i} = \underbrace{\int_{\partial V_t} t_{i0} u_i dA + \int_{\partial V_u} t_i u_{i0} dA}_{W_a} + \int_V f_i u_i dV \quad (2.61)$$

Auf der linken Seite des Arbeitssatzes steht die Arbeit der inneren Kräfte bzw. Spannungen entlang der ihnen zugeordneten Verzerrungen. Diese ist der Summe der Arbeiten, die von Oberflächenbelastungen (die ersten beiden Integrale auf der rechten Seite der Gleichung) und den Volumenkräften geleistet werden, gleich. Aus der Herleitung des Arbeitssatzes ist ersichtlich, dass er unabhängig vom Stoffgesetz ist. Die Terme zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens in der Beziehung (2.61) geben formelmäßig die Aussage: „Arbeit ist das Produkt aus der Kraft und dem zurückgelegten Weg“ wieder.

2.2.2. Prinzip der virtuellen Verrückungen

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen beruht auf dem Einführen virtueller (gedachter) Verschiebungen. Diese werden zusätzlich zu den aktuellen, tatsächlichen Verschiebungen in einem System im Gleichgewichtszustand definiert. Die virtuellen Verrückungen werden mit dem Symbol „ δ “ gekennzeichnet und müssen folgende Anforderungen erfüllen:

- gedachte („virtuelle“) Weggrößen
- infinitesimal klein
- im Einklang mit den geometrischen Randbedingungen

- ansonsten beliebig

Aus den virtuellen Verschiebungen werden die virtuellen Verzerrungen mit den kinematischen Beziehungen, die in Indexschreibweise die Beziehung (2.62) wiedergibt, bestimmt.

$$\delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial j} + \frac{\partial(\delta u_j)}{\partial i} \right) \quad (2.62)$$

Die virtuellen Weggrößen werden in den allgemeinen Arbeitssatz eingesetzt. Man erhält somit die virtuellen innere und äußere Arbeit (δW_i und δW_a). Diese sind dann wie folgt definiert:

$$\delta W_i = \int_V \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} dV \quad (2.63)$$

$$\delta W_a = \int_{\partial V_t} t_{i0} \delta u_i dA + \int_{\partial V_u} t_i \delta u_{i0} dA + \int_V f_i \delta u_i dV \quad (2.64)$$

Das PvV besagt, dass „eine deformierbare Struktur im Gleichgewicht ist, wenn bei einer beliebigen zulässigen virtuellen Verrückung δu aus einer Gleichgewichtslage heraus die virtuelle innere Arbeit δW_i gleich der virtuellen äußeren Arbeit δW_a ist“ [1].

$$\delta W_i = \delta W_a \quad (2.65)$$

2.2.3. Prinzip vom Stationärwert des Gesamtpotentials

Aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen lässt sich durch das Einführen des Begriffs der potentiellen Energie das Prinzip vom Stationärwert des Gesamtpotentials (PSG) herleiten. Wird eine elastische Struktur, die sich unter den gegebenen Belastung im Gleichgewicht befindet, einer zusätzlichen virtuellen Verrückung δu_i ausgesetzt, so entspricht die virtuelle innere Arbeit δW_i der aus dieser Verrückung resultierenden virtuellen Änderung der Gesamtformänderungsenergie δU oder auch des inneren Potentials $\delta \Pi_i$:

$$\delta W_i = \int_V \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} dV = \int_V \delta U dV = \delta \Pi_i \quad (2.66)$$

Die virtuelle äußere Arbeit δW_a , die bei einer virtuellen Verrückung von den äußeren eingepprägten Kräften geleistet wird, entspricht der gedachten Änderung des äußeren Potentials Π_a , allerdings mit dem entgegengesetzten Vorzeichen:

$$\delta W_a = \int_{\partial V_t} t_{i0} \delta u_i dA + \int_{\partial V_u} t_i \delta u_{i0} dA + \int_V f_i \delta u_i dV = -\delta \Pi_a \quad (2.67)$$

Das Gesamtpotential gleicht der Summe der inneren und äußeren Potentiale eines Systems:

$$\Pi = \Pi_a + \Pi_i \quad (2.68)$$

Somit kann das virtuelle Gesamtpotential, das sich bei einer virtuellen Verrückung aus einer Gleichgewichtslage ergibt, wie folgt angeschrieben werden:

$$\delta\Pi = \delta\Pi_i + \delta\Pi_a \quad (2.69)$$

Mit dem PSG wird gefordert, dass das virtuelle Gesamtpotential verschwindet. Dies bedeutet, dass bei einer beliebigen zulässigen virtuellen Verrückung die gesamte potentiellen Energie des Systems unverändert bleibt.

$$\delta\Pi = 0 \Rightarrow \Pi = \text{Extremum} \quad (2.70)$$

Bei linear-elastischem Strukturverhalten (Hooksche Körper) nimmt das Gesamtpotential des Systems ein Minimum an.

$$\delta\Pi = 0 \Rightarrow \Pi = \text{Minimum} \quad (2.71)$$

Dieser Sonderfall wird auch als das Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials (PMG) oder als das Green-Dirichletsche Minimumprinzip bezeichnet.

2.3. Grundlagen und Prinzip der Finite-Elemente-Methode

Die Finite-Elemente-Methode wird zur Lösung von physikalischen Problemen in ingenieurwissenschaftlichen Berechnungen angewandt. Es ist ein numerisches Verfahren, das ursprünglich für die Lösung der strukturmechanischen Probleme entwickelt worden ist. Seitdem ist die FE-Methode auf viele andere Bereiche des Ingenieurwesens ausgeweitet worden. So sind Strukturanalysen (Statik, Dynamik, . . . , Tiefziehsimulation, Crashsimulation), Akustik, Strömungsmechanik (CFD), Wärmeleitung und Optimierung von Bauteilen nur einige der Anwendungsgebiete der Methode der finiten Elemente. In allen Anwendungen wird mit FEM die Bestimmung einer oder mehrerer Feldgrößen angestrebt. Bei der Spannungsanalyse sind es beispielsweise das Spannungs- und das Verschiebungsfeld. Die FE-Rechnung liefert weder eine Formel als Lösung, noch löst sie eine Klasse von Problemen, sie liefert lediglich eine numerische Lösung eines spezifischen Problems. Dabei wird ein Satz algebraischer Gleichungen aufgestellt und gelöst. Die exakte Lösung wird mit FEM approximiert.

Die Finite Elemente Methode beruht prinzipiell auf dem Einteilen des Körpers bzw. des Kontinuums in finite (= endliche) Elemente, die über Knoten mit einander verknüpft sind. Die Verformung des Körpers/Kontinuums wird mittels der Verschiebung der Knoten beschrieben. Die Verschiebung in einem einzelnen Element (zwischen den Knoten) wird mit Hilfe der sogenannten Formfunktionen (auch Ansatzfunktionen) interpoliert. Die Ansatzfunktionen gelten nur für ein Element. Die Wahl eines geeigneten Ansatzes ist entscheidend, da die Genauigkeit der Lösung, aber auch der Rechenaufwand davon abhängig sind. Der Ansatz muss ebenfalls die geometrischen Randbedingungen erfüllen.

Die Ermittlung der Knotenverschiebungen erfolgt, indem für jedes Element mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen (PvV) die Gleichheit der inneren und äußeren virtuellen Arbeiten (s. Gleichung (2.65)) gefordert wird. Die virtuellen inneren und äußeren Arbeiten an einem Element werden in Vektorschreibweise in Gleichungen (2.72) und (2.73) wiedergegeben

$$\delta W_{i_{el}} = \int_{V_{el}} \delta \underline{\varepsilon}_{el}^T \underline{\sigma}_{el} dV = \int_{V_{el}} \delta \underline{\hat{u}}_{el}^T \underline{B}_{el} \underline{\sigma}_{el} dV \quad (2.72)$$

$$\delta W_{a_{el}} = \delta \hat{\underline{u}}_{el}^T \left(\underline{F}_{el} + \int_{V_{el}} \underline{N}_{el}^T \underline{f} dV \right) \quad (2.73)$$

Der Vektor $\delta \hat{\underline{u}}_{el}$ enthält hierin die virtuellen Knotenverrückungen eines Elements. Im Vektor \underline{F}_{el} werden die Knotenlasten zusammengefasst, und \underline{f} ist der Volumenkraftvektor. Die Matrix \underline{N} fasst die Ansatzfunktionen zusammen. Sie stellt somit den Zusammenhang zwischen den Knotenverschiebungen $\hat{\underline{u}}_{el}$ und der Verschiebung des Elements \underline{u}_{el} her. Die Gleichung (2.74) gibt diesen Zusammenhang am Beispiel eines Scheibenelements mit n Knoten wieder.

$$\underline{u}_{el} = \begin{bmatrix} u_{el1} \\ u_{el2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & N_n \end{bmatrix}}_{\underline{N}_{el}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{u}_{11} \\ \hat{u}_{12} \\ \hat{u}_{21} \\ \hat{u}_{22} \\ \vdots \\ \hat{u}_{n1} \\ \hat{u}_{n2} \end{bmatrix}}_{\hat{\underline{u}}_{el}} \quad (2.74)$$

N_1 bis N_n sind die gewählten Ansatzfunktionen. Der Vektor $\hat{\underline{u}}_{el}$ wird aus Elementknotenverschiebungen gebildet.

In der Matrix \underline{B} in der Gleichung (2.72) werden die aus der Kinematik ermittelten Beziehungen zwischen den Verzerrungen und Verschiebungen in einem Element zusammengefasst. Dieser Zusammenhang ist für ebene Elemente in der Gleichung (2.75) im Element-Koordinatensystem angeschrieben.

$$\underline{\varepsilon}_{el} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & 0 & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \cdots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial x_2} & \frac{\partial N_n}{\partial x_1} \end{bmatrix}}_{\underline{B}_{el}^T} \hat{\underline{u}}_{el} \quad (2.75)$$

Die Komponenten des Spannungsvektors werden mit Hilfe der konstitutiven Beziehungen

$$\underline{\sigma}_{el} = \underline{C}_{el} \underline{\varepsilon}_{el} \quad (2.76)$$

bestimmt. Eingesetzt in die Gleichung (2.72) ergibt sich für die innere virtuelle Arbeit folgender Zusammenhang:

$$\delta W_{i_{el}} = \delta \hat{\underline{u}}_{el}^T \underbrace{\int_{V_{el}} \underline{B}_{el} \underline{C}_{el} \underline{B}_{el}^T dV}_{\underline{K}_{el}} \hat{\underline{u}}_{el} \quad (2.77)$$

Mit der Gleichheit der virtuellen Arbeiten (s. Gleichung (2.65)) ergibt sich aus den Gleichungen (2.73) und (2.77) ein Gleichungssystem für die bisher unbekanntenen Knotenverschiebungen eines Elements:

$$\underline{\underline{K}}_{el} \hat{u}_{el} = \underline{F}_{el} + \int_{V_{el}} \underline{\underline{N}}_{el}^T \underline{f} dV \quad (2.78)$$

Hierin ist $\underline{\underline{K}}_{el}$ die so genannte Steifigkeitsmatrix eines finiten Elements.

Durch das Assemblieren der Elementsteifigkeitsmatrices aller Elemente wird die Gesamtsteifigkeitsmatrix $\underline{\underline{K}}$ des Körpers aufgestellt. Die Beziehung (2.78) sieht dann wie folgt aus.

$$\underline{\underline{K}} \underline{u} = \underline{F} + \int_V \underline{\underline{N}}^T \underline{f} dV \quad (2.79)$$

Hierin ist \underline{F} der Kraftvektor und \underline{u} der Knotenverschiebungsvektor des gesamten Modells. Die Wirkung der Volumenkräfte auf den Körper wird mit $\int_V \underline{\underline{N}}^T \underline{f} dV$ beschrieben. Bei Vernachlässigung der Volumenkräfte entfällt der entsprechende Summand der „rechten Seite“ und die Gleichung (2.79) kann wie folgt angeschrieben werden.

$$\underline{\underline{K}} \underline{u} = \underline{F} \quad (2.80)$$

Allgemein besteht folgender Anspruch an das Näherungsverfahren: Die Näherungslösung muss im Rahmen der Modellannahmen bei der Verfeinerung des Elementenrasters gegen die exakte Lösung konvergieren. Dies wird an die Erfüllung folgender Konvergenzkriterien geknüpft.

1. Kriterium der Koordinateninvarianz. Eine Drehung des Koordinatensystems darf keinen Einfluss auf das Ergebnis der Rechnung haben
2. Kriterium der mindestens konstanten Verzerrungen (sonst $\delta W_i = 0$).
3. Kriterium der Starrkörperverschiebung. Bei einer Starrkörperverschiebung dürfen keine Elementverzerrungen auftreten
4. Kriterium der konformen Ansätze. Die Verschiebungen sowohl innerhalb als auch über die Grenzen der Elemente hinweg müssen kompatibel sein. Somit wird sichergestellt, dass im FE-Netz bei Belastung keine Lücken zwischen den Elementen klaffen. So müssen mindestens C^0 -konforme Ansätze (stetige Verschiebung an den Elementgrenzen) genommen werden, falls in den Element-Knoten nur translatorische Freiheitsgrade definiert sind (wie z.B. beim Dehnstab). Wenn die rotatorischen Freiheitsgrade in den Element-Knoten ebenfalls definiert sind, wie es z.B. bei einem Biegebalken der Fall ist, muss die Kontinuität der entsprechenden ersten Verschiebungsableitungen gleichwohl erfüllt werden (C^1 -konforme Ansätze).

Abschließend ist zu erwähnen, dass heutzutage das Aufstellen der Steifigkeitsmatrizen und das Lösen des Gleichungssystems computergestützt mit diversen Finite-Elemente-Programmen erfolgt. Die meisten dieser Programme bestehen aus den folgenden drei Komponenten, in denen die einzelnen Schritte der Methode der finiten Elemente durchgeführt werden.

- Preprocessor:
 - Erzeugen der Geometrie
 - Idealisieren der FE-Struktur (Vernetzen)

- Zuweisen der Eigenschaften
- Definition der Randbedingungen
- Aufbringen der Lasten
- Solver:
 - Aufstellen der Elementsteifigkeitsmatrices
 - Aufstellen der Gesamtsteifigkeitsmatrix
 - Lösen des Gleichungssystems
 - * Berechnung der Knotenverschiebungen
 - * Berechnung der Elementverzerrungen
 - * Berechnung der Elementspannungen
- Postprocessor
 - Graphische Ausgabe der Ergebnisse
 - Auswertung der Ergebnisse

Die ausführliche Behandlung der Finite-Elemente-Methode kann aus [2] und [18] entnommen werden.

In dieser Arbeit wird die Finite-Elemente-Methode zur Verifikation der analytisch bestimmten Spannungs- und Verschiebungskomponenten verwendet. Zum Einsatz kommt der Solver MSC Nastran (MSC ist die Abkürzung von MacNeal-Schwendler Corporation). Das FE-Modell wird mit dem Preprocessor und Postprocessor MSC Patran erstellt. Nach der erfolgten FE-Rechnung findet die Auswertung der Ergebnisse ebenfalls in MSC Patran statt.

3. Teil I Behandlung der geraden balkenartigen Scheiben

3.1. Analytische Herleitung der Spannungs- und Verschiebungsfelder für orthotrope gerade balkenartige Scheiben

In Folgendem wird eine analytische Lösung für eine gerade balkenartige Scheibe für die drei Grundlastfälle – Normalkraft N , Querkraft Q und Biegemoment M_0 hergeleitet. Für alle Lastfälle wird die balkenartige Scheibe an einem Ende fest eingespannt. Die Belastung wird am freien Rand angebracht. Die Herleitung findet im kartesischen Koordinatensystem statt. Die verwendeten Ansatzfunktionen F genügen der Scheibenbedingung (2.40). Man findet sie in der Fachliteratur z.B. bei [4], [9] und [11].

3.1.1. Beanspruchung durch die Normalkraft N

Spannungsfeld

Betrachtet man die orthotrope, balkenartige Scheibe, die durch eine Normalkraft N belastet wird (s. Abb 3.1), so stellt sich nach der klassischen Festigkeitslehre folgendes Spannungsfeld ein:

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{ht}, \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (3.1)$$

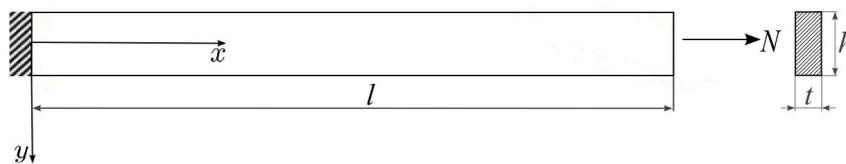


Abbildung 3.1: Gerade balkenartige Scheibe unter Normalkraftbelastung

Mit der Airyschen Spannungsfunktion

$$F = Ay^2 \quad (3.2)$$

lässt sich dieses Spannungsfeld ebenfalls leicht herleiten. Aus der Vorschrift (2.41) lassen sich die Spannungen wie folgt anschreiben:

$$\sigma_{xx} = 2A, \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (3.3)$$

Die Unbekannte A kann aus der folgenden Bedingung

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} dy = \frac{N}{t} \quad (3.4)$$

als

$$A = \frac{N}{2ht} \quad (3.5)$$

berechnet werden. Eingesetzt in die Beziehung (3.3) ergibt sich das aus der klassischen Festig-

keitslehre bekannte Spannungsfeld (vgl. Gl. (3.1)).

Verschiebungsfeld

Mit dem Materialgesetz (s. Gln. (2.32) bis (2.34)) und den kinematischen Beziehungen (2.16) können die Verzerrungen wie folgt angeschrieben werden:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = S_{11}\sigma_{xx} = \frac{N}{htE_x} \quad (3.6)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = S_{12}\sigma_{xx} = -\frac{\nu_{xy}N}{htE_x} \quad (3.7)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = S_{66}\tau_{xy} = 0 \quad (3.8)$$

Die Verschiebungen u und v werden nach dem allgemeinen Umformen in Gleichung (3.9) durch die Integration der Verzerrungen bestimmt (3.10). Da die Dehnungen in den Gleichungen (3.6) und (3.7) in diesem Lastfall nicht von mehreren Variablen abhängig sind, kann bei weiterer Berechnung des Verschiebungsfeldes das Symbol für partielle Differentiation ∂ durch das Differentiationssymbol d ersetzt werden.

$$du = \frac{N}{htE_x} dx, \quad dv = -\frac{\nu_{xy}N}{htE_x} dy \quad (3.9)$$

$$u(x) = \frac{N}{htE_x} x + G_1, \quad v(y) = -\frac{\nu_{xy}N}{htE_x} y + G_2 \quad (3.10)$$

Aus den Randbedingungen (3.11) ergibt sich, dass die Konstanten G_1 und G_2 gleich null sind.

$$u(x=0) = 0, \quad v(y=0) = 0 \quad (3.11)$$

Somit ist die Scheibe durch das Verschiebungsfeld

$$u(x) = \frac{N}{htE_x} x, \quad v(y) = -\frac{\nu_{xy}N}{htE_x} y \quad (3.12)$$

vollständig berechenbar.

3.1.2. Beanspruchung durch die Querkraft Q

Spannungsfeld

Für die Bestimmung des Spannungsfeldes in der geraden balkenartigen Scheibe unter der Querkraftbelastung (s. Abb. 3.2) wird folgende Airysche Funktion F als Lösungsansatz der Differentialgleichung (2.40) gewählt.

$$F = Axy + Bxy^3 \quad (3.13)$$

In dieser Form ist die Airysche Spannungsfunktion in einem Koordinatensystem definiert, das dem $\hat{x}\hat{y}$ -Koordinatensystem in der Abbildung 3.2 entspricht. Dies muss bei der Definition der Randbedingungen berücksichtigt werden.

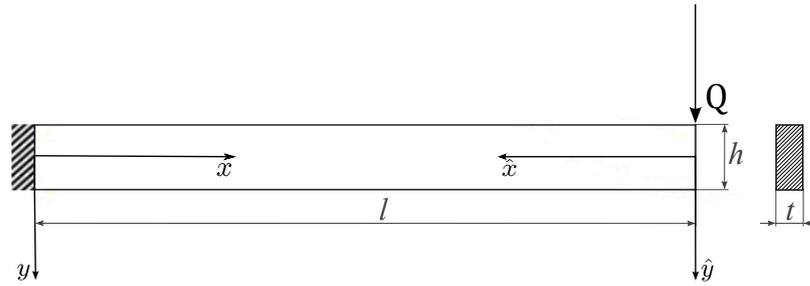


Abbildung 3.2: Gerade balkenartige Scheibe unter Querkraftbelastung

Der Einfachheit halber und aufgrund von Überprüfbarkeit bzw. Vergleichbarkeit der erzielten Ergebnisse mit der Literatur werden zuerst die Spannungen in Abhängigkeit von den Variablen \hat{x} und \hat{y} bestimmt (s. Abb. 3.2). Anschließend werden sie mittels einer Koordinatentransformation (s. Gl. (3.22)) in das xy -Koordinatensystem überführt, um einheitliche Koordinatenorientierung über das gesamte Profil des Balkens zu erzeugen. Somit lautet die Airysche Spannungsfunktion im $\hat{x}\hat{y}$ -Koordinatensystem:

$$F = A\hat{x}\hat{y} + B\hat{x}\hat{y}^3 \quad (3.14)$$

Aus der zweifachen Differentiation der Spannungsfunktion nach \hat{x} und \hat{y} gemäß (2.41) folgt:

$$\sigma_{\hat{x}\hat{x}} = 6B\hat{x}\hat{y}, \quad \sigma_{\hat{y}\hat{y}} = 0, \quad \tau_{\hat{x}\hat{y}} = -(A + 3B\hat{y}^2) \quad (3.15)$$

Die unbekanntenen Koeffizienten A und B lassen sich aus dem Kräftegleichgewicht

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{\hat{x}\hat{y}} d\hat{y} = -\frac{Q}{t} \quad (3.16)$$

und aus der Bedingung der spannungsfreien Oberflächen

$$\tau_{\hat{x}\hat{y}}(\hat{y} = \pm \frac{h}{2}) = 0 \quad (3.17)$$

bestimmen. Nach dem Lösen des Gleichungssystems erhält man:

$$A = \frac{3Q}{2ht}, \quad B = -\frac{2Q}{h^3t} \quad (3.18)$$

Mit den beiden Koeffizienten lässt sich leicht zeigen, dass das Momentengleichgewicht (3.19) erfüllt wird.

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\hat{x}\hat{x}} \hat{y} d\hat{y} = -\frac{Q}{t} \hat{x} \quad (3.19)$$

Somit ergibt sich das Spannungsfeld zu:

$$\sigma_{\hat{x}\hat{x}} = -\frac{12Q}{h^3t}\hat{x}\hat{y} = -\frac{Q}{I_z}\hat{x}\hat{y} \quad (3.20)$$

$$\tau_{\hat{x}\hat{y}} = -\frac{Q}{2I_z}\left(\frac{h^2}{4} - \hat{y}^2\right) \quad (3.21)$$

I_z ist dabei das Flächenträgheitsmoment 2. Ordnung des Scheibenquerschnitts bezüglich einer Rotation um die z -Achse. Aus der Festigkeitslehre ist bekannt, dass für Rechteckquerschnitte $I_z = \frac{h^3t}{12}$ gilt.

Die Gleichungen (3.20) und (3.21) zeigen eine aus der klassischen Biegelehre bekannte Spannungsverteilung, die sich in einer rechteckigen Scheibe unter einer einzelnen Randlast einstellt. Die Normalspannung $\sigma_{\hat{x}\hat{x}}$ ist dabei linear von \hat{x} und \hat{y} abhängig. Die Schubspannung $\tau_{\hat{x}\hat{y}}$ ist über \hat{x} konstant, weist aber eine quadratische Verteilung über \hat{y} auf – mit dem Maximum an der Stelle $\hat{y} = 0$, mit $\tau_{\hat{x}\hat{y},max} = -\frac{3Q}{2ht}$. Die Normalspannung $\sigma_{\hat{y}\hat{y}}$ ist, wie es schon der Gleichung (3.15) entnommen werden kann, gleich null.

Mit den Beziehungen der Koordinatentransformation (3.22) werden die berechneten Spannungen in das xy -Koordinatensystem überführt (3.23).

$$\hat{x} = (l - x) \text{ und } \hat{y} = -y \quad (3.22)$$

$$\sigma_{xx} = -\frac{Q}{I_z}(l - x)y, \quad \tau_{xy} = \frac{Q}{2I_z}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \quad (3.23)$$

Verschiebungsfeld

Die Bestimmung des Verschiebungsfeldes erfolgt durch die Integration der Verzerrungen in Verbindung mit dem Materialgesetz (s. (2.22)). Somit ergeben sich für die Verzerrungen folgende Gleichungen:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = S_{11}\sigma_{xx} = -\frac{Q}{E_x I_z}(l - x)y \quad (3.24)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = S_{12}\sigma_{xx} = \frac{\nu_{xy}Q}{E_x I_z}(l - x)y \quad (3.25)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = S_{66}\tau_{xy} = \frac{k^2Q}{2E_x I_z}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \quad (3.26)$$

Der Koeffizient k in der Gleichung (3.26) ist einer der im Abschnitt 2.1.4 eingeführten Orthotropieparameter. Es ist anzumerken, dass die Verzerrungen und somit die Verschiebungen in der durch einzelne Randlast beanspruchten, balkenartigen, orthotropen Scheibe vom Orthotropieparameter s unabhängig sind. Stellt man die Gleichung (3.24) nach ∂u und die Gleichung (3.25) nach ∂v um, erhält man:

$$\partial u = -\frac{Q}{E_x I_z}(l - x)y\partial x \quad (3.27)$$

$$\partial v = \frac{\nu_{xy}Q}{E_x I_z}(l - x)y\partial y \quad (3.28)$$

Die Verschiebungsfunktionen u und v bekommt man durch die anschließende Integration der Beziehungen (3.27) und (3.28). Diese sind jeweils von zwei Variablen abhängig. Aus diesem Grund muss bei der unbestimmten Integration beider Gleichungen nach den Regeln der Integralrechnung anstelle einer Integrationskonstanten eine Integrationsfunktion eingeführt werden. Diese hängt nicht von der Integrationsvariablen, sondern von der zweiten Veränderlichen ab.

$$u(x, y) = \frac{Q}{2E_x I_z} (l - x)^2 y + f_1(y) \quad (3.29)$$

$$v(x, y) = \frac{\nu_{xy} Q}{2E_x I_z} (l - x) y^2 + f_2(x) \quad (3.30)$$

So enthalten die Beziehungen (3.29) und (3.30) für die Verschiebungen u und v jeweils eine unbekannte noch zu bestimmende Funktion $f_1(y)$ bzw. $f_2(x)$. Setzt man die Ausdrücke (3.29) und (3.30) in die Gleichung (3.26) ein, dann erhält man:

$$\frac{Q}{2E_x I_z} x^2 - \frac{Q}{E_x I_z} lx + \frac{Ql^2}{2E_x I_z} + \frac{df_1(y)}{dy} - \frac{\nu_{xy} Q}{2E_x I_z} y^2 + \frac{df_2(x)}{dx} = \frac{k^2 Q}{2E_x I_z} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (3.31)$$

Hierin darf das Differentiationssymbol d verwendet werden, da die Funktionen $f_1(y)$ und $f_2(x)$ jeweils nur von einer Variablen abhängig sind. Durch das Einführen einer zusätzlichen unbekanntenen Konstanten D_1 kann man die Beziehung (3.31) in zwei Differentialgleichungen aufteilen, die jeweils nur von einer der Variablen abhängig sind. Dabei gehen die konstanten Terme $\frac{k^2 Q h^2}{8E_x I_z}$ und $\frac{Ql^2}{2E_x I_z}$ zu gleichen Anteilen in beide Gleichungen ein.

$$\frac{df_1(y)}{dy} = \frac{\nu_{xy} Q}{2E_x I_z} y^2 + \frac{k^2 Q h^2}{16E_x I_z} - \frac{k^2 Q}{2E_x I_z} y^2 - \frac{Ql^2}{4E_x I_z} + D_1 \quad (3.32)$$

$$\frac{df_2(x)}{dx} = \frac{k^2 Q h^2}{16E_x I_z} - \frac{Q}{2E_x I_z} x^2 + \frac{Ql}{E_x I_z} x - \frac{Ql^2}{4E_x I_z} - D_1 \quad (3.33)$$

Durch die anschließende Integration erhält man die beiden Integrationsfunktionen $f_1(y)$ und $f_2(x)$:

$$f_1(y) = \frac{\nu_{xy} Q}{6E_x I_z} y^3 + \frac{k^2 Q h^2}{16E_x I_z} y - \frac{k^2 Q}{6E_x I_z} y^3 - \frac{Ql^2}{4E_x I_z} y + D_1 y + G_2 \quad (3.34)$$

$$f_2(x) = \frac{k^2 Q h^2}{16E_x I_z} x - \frac{Ql^2}{4E_x I_z} x + \frac{Ql}{2E_x I_z} x^2 - \frac{Q}{6E_x I_z} x^3 - D_1 x + G_1 \quad (3.35)$$

Die noch unbekanntenen Größen D_1 , G_1 und G_2 sind konstant und lassen sich an die gegebenen Verschiebungsrandbedingungen anpassen. Die Verschiebungen u und v können dann wie folgt angeschrieben werden.

$$u(x, y) = \frac{Q}{2E_x I_z} (l - x)^2 y + \frac{\nu_{xy} Q}{6E_x I_z} y^3 + \frac{k^2 Q h^2}{16E_x I_z} y - \frac{k^2 Q}{6E_x I_z} y^3 - \frac{Ql^2}{4E_x I_z} y + D_1 y + G_2 \quad (3.36)$$

$$v(x, y) = \frac{\nu_{xy}Q}{2E_x I_z}(l-x)y^2 + \frac{k^2 Q h^2}{16E_x I_z}x - \frac{Ql^2}{4E_x I_z}x + \frac{Ql}{2E_x I_z}x^2 - \frac{Q}{6E_x I_z}x^3 - D_1x + G_1 \quad (3.37)$$

Aus der Lagerungsart der Scheibe können folgende Bedingungen für die Bestimmung der Konstanten D_1 , G_1 und G_2 abgeleitet werden:

$$u(x=0, y=0) = 0 \quad (3.38)$$

$$v(x=0, y=0) = 0 \quad (3.39)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{x=0, y=0} = 0 \quad (3.40)$$

Aus (3.38) und (3.39) folgt, dass die Konstanten G_1 und G_2 verschwinden. Die konstante Größe D_1 ergibt sich aus der Randbedingung (3.40) zu:

$$D_1 = -\frac{k^2 Q h^2}{16E_x I_z} - \frac{Ql^2}{4E_x I_z} \quad (3.41)$$

Für die gerade, balkenartige, orthotrope Scheibe, die an einem Ende fest eingespannt ist und am freien Rand mit einer Querkraft belastet wird, können somit folgende Beziehungen für die Verschiebungen u und v angeschrieben werden:

$$u(x, y) = \frac{Q}{2E_x I_z}(l-x)^2 y - \frac{k^2 Q}{6E_x I_z}y^3 - \frac{Ql^2}{2E_x I_z}y + \frac{\nu_{xy}Q}{6E_x I_z}y^3 \quad (3.42)$$

$$v(x, y) = \frac{\nu_{xy}Q}{2E_x I_z}(l-x)y^2 + \frac{k^2 Q h^2}{8E_x I_z}x + \frac{Ql}{2E_x I_z}x^2 - \frac{Q}{6E_x I_z}x^3 \quad (3.43)$$

Mit der Angabe der Verschiebungsfunktionen (3.42) und (3.43) ist die orthotrope balkenartige Scheibe vollständig berechenbar.

Eine zweite Möglichkeit die Konstante D_1 zu bestimmen liefert die Gleichung (3.44).

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0, y=0} = 0 \quad (3.44)$$

In diesem Fall ergibt sich die Konstante D_1 zu:

$$D_1 = \frac{k^2 Q h^2}{16E_x I_z} - \frac{Ql^2}{4E_x I_z} \quad (3.45)$$

Eingesetzt in die Gleichungen (3.36) und (3.37) liefert diese Beziehung folgende Verschiebungsfunktionen

$$u(x, y) = \frac{Q}{2E_x I_z}(l-x)^2 y - \frac{k^2 Q}{6E_x I_z}y^3 - \frac{Ql^2}{2E_x I_z}y + \frac{\nu_{xy}Q}{6E_x I_z}y^3 + \frac{k^2 Q h^2}{8E_x I_z}y \quad (3.46)$$

$$v(x, y) = \frac{\nu_{xy}Q}{2E_x I_z}(l-x)y^2 + \frac{Ql}{2E_x I_z}x^2 - \frac{Q}{6E_x I_z}x^3 \quad (3.47)$$

Im Unterschied zu der Lösung aus der Randbedingung (3.40) befindet sich hier der Term $\frac{k^2 Q h^2}{8 E_x I_z}$ in der Beziehung für die Normalverschiebung $u(x, y)$. Welche Auswirkung dies auf das Verschiebungsfeld der geraden balkenartigen Scheibe unter der Querkraftbelastung hat, wird bei der Verifikation der Ergebnisse im Abschnitt 3.4 untersucht sowie bei der Durchführung der Parameterstudie im Abschnitt 4.1.1 aufgegriffen.

3.1.3. Beanspruchung durch das Biegemoment M_0

Spannungsfeld

Nun wird die gerade balkenartige Scheibe, die an einem ihrer Enden fest eingespannt ist und an dem anderen mit einem Biegemoment um die z -Achse M_0 beaufschlagt wird, betrachtet (s. Abb. 3.3). Nach der klassischen Biegetheorie stellt sich folgender Spannungszustand ein:

$$\sigma_{xx} = -\frac{M_0}{I_z} y, \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (3.48)$$

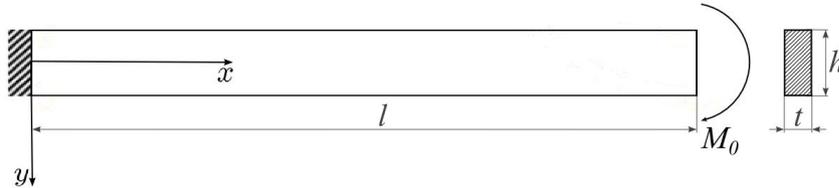


Abbildung 3.3: Gerade balkenartige Scheibe unter Momentenbelastung

Die zugehörige Airysche Spannungsfunktion F sieht nach [4] für den Sonderfall der reinen Biegung der balkenartigen Scheibe durch das Biegemoment M_0 wie folgt aus:

$$F = Ay^3 \quad (3.49)$$

Aus den Beziehungen (2.41) ergeben sich somit die Spannungen:

$$\sigma_{xx} = 6Ay, \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (3.50)$$

Der Faktor A (s. Gl. (3.52)) kann aus dem Momentengleichgewicht (3.51) ermittelt werden.

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx}(x=0, y) y dy = -\frac{M_0}{t} \quad (3.51)$$

$$A = -\frac{2M_0}{h^3 t} \quad (3.52)$$

Eingesetzt in die Gleichung (3.50) ergibt sich für σ_{xx} die der technischen Biegelehre entsprechende Lösung (3.48). Die Spannungen σ_{yy} und τ_{xy} sind bereits in der Gleichung (3.50) der Lösung aus der Biegetheorie gleich. Die Airysche Spannungsfunktion sieht dann nach einer kleinen Umformung wie folgt aus:

$$F = -\frac{M_0}{6I_z} y^3 \quad (3.53)$$

Verschiebungsfeld

Mithilfe der kinematischen Beziehungen und des Materialgesetzes für orthotropes Werkstoffverhalten und unter der Berücksichtigung der ermittelten Spannungen (3.48) lassen sich die Verzerrungen in der xy -Ebene wie folgt angeben:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = S_{11}\sigma_{xx} = -\frac{M_0}{E_x I_z} y \quad (3.54)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = S_{21}\sigma_{xx} = \frac{\nu_{xy} M_0}{E_x I_z} y \quad (3.55)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = S_{66}\tau_{xy} = 0 \quad (3.56)$$

Nach dem allgemeinen Umstellen der Beziehung (3.54) nach ∂u

$$\partial u = -\frac{M_0}{E_x I_z} y \partial x \quad (3.57)$$

und anschließender Integration kann die Verschiebung u wie folgt angeschrieben werden:

$$u(x, y) = -\frac{M_0}{E_x I_z} xy + f_1(y) \quad (3.58)$$

Analog zu ∂u wird die Beziehung (3.55) nach ∂v umgestellt

$$\partial v = \frac{\nu_{xy} M_0}{E_x I_z} y \partial y \quad (3.59)$$

und integriert

$$v = \frac{\nu_{xy} M_0}{2E_x I_z} y^2 + f_2(x) \quad (3.60)$$

Somit erhält man die Funktionsgleichungen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ für die Verschiebung der balkenartigen Scheibe in Abhängigkeit von x und y im kartesischen Koordinatensystem. Aufgrund der Abhängigkeit der Verschiebungsfunktion u von zwei Variablen wird bei der unbestimmten Integration von dieser Funktion nach den Regeln der Integrationsrechnung über mehrere Integrationsräume anstelle einer Integrationskonstanten die Integrationsfunktion $f_1(y)$ eingeführt (s. Gl. (3.58)). Die Integration der Gleichung (3.59) muss ebenfalls mehrdimensional erfolgen. So enthält die Beziehung (3.60) für die Verschiebung v nach der Integration die Integrationsfunktion $f_2(x)$.

Nach dem Einsetzen der Verschiebungsfunktionen (3.58) und (3.60) in die Beziehung (3.56) bekommt man

$$-\frac{M_0}{E_x I_z} x + \frac{df_1(y)}{dy} + \frac{df_2(x)}{dx} = 0 \quad (3.61)$$

Da die Integrationsfunktionen jeweils nur von einer Variablen abhängen kann das Symbol ∂ für die partielle Differentiation in (3.61) durch das Differentiationssymbol d ersetzt werden.

Analog zu dem Vorgehen bei der Bestimmung der Verschiebungsfunktionen unter der Querkraftbelastung kann die Gleichung (3.61) durch das Einführen einer Unbekannten D_1 separiert

werden zu-

$$-\frac{M_0}{E_x I_z} x + \frac{df_2(x)}{dx} = D_1 \implies df_2(x) = \left(D_1 + \frac{M_0}{E_x I_z} x \right) dx \quad (3.62)$$

$$\frac{df_1(y)}{dy} = -D_1 \implies df_1(y) = -D_1 dy \quad (3.63)$$

Aus der Integration dieser Beziehungen erhält man die bisher unbekanntenen Integrationsfunktionen $f_1(y)$ und $f_2(x)$, die eingesetzt in die Verschiebungsfunktionen folgende Beziehungen ergeben.

$$u(x, y) = -\frac{M_0}{E_x I_z} xy - D_1 y + C_2 \quad (3.64)$$

$$v(x, y) = \frac{M_0}{2E_x I_z} (\nu_{xy} y^2 + x^2) + D_1 x + C_1 \quad (3.65)$$

Die drei unbekanntenen Konstanten lassen sich aus den Randbedingungen (3.66) bis (3.68) bestimmen.

$$u(x = 0, y = 0) = 0 \implies C_2 = 0 \quad (3.66)$$

$$v(x = 0, y = 0) = 0 \implies C_1 = 0 \quad (3.67)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{x=0} = 0 \implies D_1 = 0 \quad (3.68)$$

Da bei der „reinen Biegung“ der Scheibe die Verschiebungskomponenten von der Schubspannung τ_{xy} nicht beeinflusst werden, kann anstelle der Randbedingung (3.68) auch die folgende Beziehung verwendet werden.

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \implies D_1 = 0 \quad (3.69)$$

Somit ergeben sich für eine einseitig eingespannte, gerade, balkenartige Scheibe unter der Randmomentenbelastung folgende Verschiebungsfunktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$, mit denen sie vollständig berechenbar ist.

$$u(x, y) = -\frac{M_0}{E_x I_z} xy \quad (3.70)$$

$$v(x, y) = \frac{M_0}{2E_x I_z} (\nu_{xy} y^2 + x^2) \quad (3.71)$$

3.2. Analytische Herleitung der Spannungs- und Verschiebungsfelder für isotrope gerade balkenartige Scheiben

Die Betrachtung der isotropen geraden balkenartigen Scheibe, die durch die gewählten Grundlastfälle: Normalkraft N , Querkraft Q und Randmoment M_0 beansprucht wird, liefert keine neuen Erkenntnisse. Der Grund hierfür ist, dass der Orthotropieparameter s bei der Betrachtung der genannten Lastfälle für orthotrope Scheiben herausfällt, da σ_{yy} zu null wird. Der Parameter k ,

der das Verhältnis des E-Moduls in Faserrichtung zum Schubmodul angibt, kann auch für isotrope Werkstoffe definiert werden, indem man den E-Modul in Faserrichtung durch den E-Modul des isotropen Materials ersetzt.

$$k = \sqrt{\frac{E}{G}} = \sqrt{2(1+\nu)} \quad (3.72)$$

Auch die Querkontraktionszahl ν_{xy} muss bei der Betrachtung von isotropen Werkstoffen durch ν ersetzt werden.

Somit können die im Abschnitt 3.1 hergeleiteten Formeln auch bei der Berechnung der Spannungs- und Verschiebungsfelder in geraden balkenartigen Scheiben aus isotropen Werkstoffen benutzt werden.

3.3. Analytische Herleitung der Spannungs- und Verschiebungsfelder für orthotrop geschichtete Lamine

Bisher wurden orthotrope Scheiben behandelt. Nun folgt eine Erweiterung auf ein orthotrop geschichtetes Laminat, das aus n orthotropen UD-Schichten besteht. Es wird dabei angenommen, dass alle Laminatschichten aus gleichem Werkstoff bestehen.

Die orthotrope geschichtete gerade balkenartige Scheibe wird ebenfalls den drei elementaren Belastungsarten Normalkraft N , Querkraft Q (Randlast) und Biegemoment M_0 (Randmoment), ausgesetzt.

3.3.1. Beanspruchung durch Normalkraft N

Bei der Bestimmung des Spannungsfeldes wird für jede einzelne Schicht die gleiche Spannungsfunktion wie bei der Behandlung von Scheiben aus orthotropen Werkstoffen (s.o.), verwendet.

$$F_j = A_j y^2 \quad (3.73)$$

Nach den Beziehungen (2.44) ergeben sich für jede einzelne Laminatschicht folgende Spannungs-komponenten:

$$\sigma_{xx}^{(j)} = 2A_j, \quad \sigma_{yy}^{(j)} = 0, \quad \tau_{xy}^{(j)} = 0 \quad (3.74)$$

Dem Kräftegleichgewicht in der gesamten Scheibe kann folgende Bedingung entnommen werden:

$$\sum_{j=1}^n \left[\int_{y_{j-1}}^{y_j} \sigma_{xx}^{(j)} dy \right] = \frac{N}{t} \quad (3.75)$$

Die Komponenten des Verschiebungsvektors \underline{u}_j können für jede Einzelschicht j aus der unbestimmten Integration der Verzerrungsfunktionen $\varepsilon_{xx}^{(j)}$ und $\varepsilon_{yy}^{(j)}$ nach der Anwendung des Werkstoffgesetzes für das globale Koordinatensystem (s. Gln. (2.47) bis (2.49)) des Laminats aus (3.76) bis (3.78) ermittelt werden.

$$\varepsilon_{xx}^{(j)} = \frac{\partial u_j}{\partial x} = \bar{S}_{11} \sigma_{xx}^{(j)} = \frac{1}{E_x^{(j)}} \sigma_{xx}^{(j)} \quad (3.76)$$

$$\varepsilon_{yy}^{(j)} = \frac{\partial v_j}{\partial y} = \bar{S}_{12} \sigma_{xx} = -\frac{\nu_{xy}^{(j)}}{E_x^{(j)}} \sigma_{xx}^{(j)} \quad (3.77)$$

$$\gamma_{xy}^{(j)} = \frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x} = \bar{S}_{66} \tau_{xy}^{(j)} = 0 \quad (3.78)$$

In den Gleichungen (3.79) und (3.80) sind die Verschiebungsfunktionen für eine Schicht j angegeben.

$$\partial u_j = \frac{2}{E_x^{(j)}} A_j \partial x \implies u_j = \frac{2}{E_x^{(j)}} A_j x + G_1^{(j)} \quad (3.79)$$

$$\partial v_j = -\frac{2\nu_{xy}^{(j)}}{E_x^{(j)}} A_j \partial y \implies v_j = -\frac{2\nu_{xy}^{(j)}}{E_x^{(j)}} A_j y + G_2^{(j)} \quad (3.80)$$

Die Verschiebungsfunktionen u_j und v_j einer Schicht besitzen drei unbekannte Größen A_j , $G_1^{(j)}$ und $G_2^{(j)}$. Dies bedeutet, dass für die Verschiebungen aller Schichten der Scheibe $3 \cdot n$ Unbekannte zu bestimmen sind.

Mithilfe des Kräftegleichgewichts (3.75) \rightarrow 1 Bedingung, der Randbedingungen an der Festspannung (3.81) und (3.82) $\rightarrow n+1$ Bedingungen, und der Kontinuitätsbedingungen (3.83) und (3.84) $\rightarrow 2n-2$ Bedingungen lassen sich alle Unbekannten im Gleichungssystem für die gesamte Scheibe eindeutig bestimmen.

$$u_j(x=0, y) = 0 \quad (3.81)$$

$$v_j(x=0, y=0) = 0 \quad (3.82)$$

$$u_j(x, y) = u_{j+1}(x, y) \quad (3.83)$$

$$v_j(x, y) = v_{j+1}(x, y) \quad (3.84)$$

3.3.2. Beanspruchung durch Querkraft Q

Die Bestimmung des Spannungs- und Verschiebungsfeldes in einer orthotrop geschichteten Scheibe unter einer Randlast erfolgt ebenfalls separat für jede einzelne Laminatschicht. Dabei lautet die Airysche Spannungsfunktion mit der Berücksichtigung des gewählten Koordinatensystems:

$$F_j = A_j(l-x)y + B_j(l-x)y^3 \quad (3.85)$$

Aus der Vorschrift (2.44) ergeben sich für eine Einzelschicht j folgende Spannungen:

$$\sigma_{xx}^{(j)} = 6B_j(l-x)y, \quad \sigma_{yy}^{(j)} = 0, \quad \tau_{xy}^{(j)} = A_j + 3B_jy^2 \quad (3.86)$$

Das Kräftegleichgewicht an der gesamten Scheibe liefert die Beziehungen (3.87) und (3.88) für die Schicht j

$$\sum_{j=1}^n \left[\int_{y_{j-1}}^{y_j} \tau_{xy}^{(j)} dy \right] = \frac{Q}{t} \quad (3.87)$$

$$\sum_{j=1}^n \left[\int_{y_{j-1}}^{y_j} \sigma_{xx}^{(j)} y dy \right] = \frac{Q}{t} (l - x) \quad (3.88)$$

Außerdem soll am oberen und unteren Rand der Scheibe keine Schubspannung τ_{xy} vorhanden sein. Dies bedeutet, dass

$$\tau_{xy}^{(0)}(y = y_0) = 0, \quad \tau_{xy}^{(n)}(y = y_n) = 0 \quad (3.89)$$

Aus den Verzerrungen $\varepsilon_{xx}^{(j)}$, $\varepsilon_{yy}^{(j)}$ und $\gamma_{xy}^{(j)}$ und den konstitutiven Beziehungen kann man die Verschiebungskomponenten u_j und v_j für jede einzelne Laminatschicht bestimmen. Somit ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\partial u_j = \left(\frac{6B_j}{E_x^{(j)}} (l - x) y \right) \partial x \implies u_j = -\frac{3B_j}{E_x^{(j)}} (l - x)^2 y + f_1^{(j)}(y) \quad (3.90)$$

$$\partial v_j = \left(-\frac{6\nu_{xy}^{(j)} B_j}{E_x^{(j)}} (l - x) y \right) \partial y \implies v_j = -\frac{3\nu_{xy}^{(j)} B_j}{E_x^{(j)}} (l - x) y^2 + f_2^{(j)}(x) \quad (3.91)$$

Analog zu dem Vorgehen bei der Bestimmung der Verschiebungskomponenten u und v in der orthotropen Scheibe (s.o.) werden in Beziehungen (3.90) und (3.91) noch unbekannte Integrationsfunktionen $f_1^{(j)}(y)$ bzw. $f_2^{(j)}(x)$ eingeführt. Eingesetzt in (2.46) in die Beziehung für $\gamma_{xy}^{(j)}$ ergibt sich folgende Gleichung:

$$-\frac{3B_j}{E_x^{(j)}} (l - x)^2 + \frac{df_1^{(j)}(y)}{dy} + \frac{3\nu_{xy}^{(j)} B_j}{E_x^{(j)}} y^2 + \frac{df_2^{(j)}(x)}{dx} = \frac{k_j^2}{E_x^{(j)}} (A_j + 3B_j y^2) \quad (3.92)$$

Durch das Einführen einer Konstanten $D_1^{(j)}$ kann die Beziehung (3.92) in zwei Differentialgleichungen, die entweder nur von x oder nur von y abhängig sind, aufgeteilt werden.

$$-\frac{3B_j l^2}{2E_x^{(j)}} + \frac{6B_j l}{E_x^{(j)}} x - \frac{3B_j}{E_x^{(j)}} x^2 - \frac{k_j^2 A_j}{2E_x^{(j)}} + \frac{df_2^{(j)}(x)}{dx} = D_1^{(j)} \quad (3.93)$$

$$-\frac{3B_j l^2}{2E_x^{(j)}} + \frac{3\nu_{xy}^{(j)} B_j}{E_x^{(j)}} y^2 - \frac{3k_j^2 B_j}{E_x^{(j)}} y^2 - \frac{k_j^2 A_j}{2E_x^{(j)}} + \frac{df_1^{(j)}(y)}{dy} = -D_1^{(j)} \quad (3.94)$$

Aus der Integration dieser Gleichungen ergeben sich die bisher noch unbekanntenen Integrationsfunktionen $f_1^{(j)}(y)$ und $f_2^{(j)}(x)$ zu:

$$f_1^{(j)}(y) = \frac{B_j}{E_x^{(j)}} \left(k_j^2 - \nu_{xy}^{(j)} \right) y^3 + \frac{k_j^2 A_j}{2E_x^{(j)}} y + \frac{3B_j l^2}{2E_x^{(j)}} y - D_1^{(j)} y + G_1^{(j)} \quad (3.95)$$

$$f_2^{(j)}(x) = \frac{B_j}{E_x^{(j)}} x^3 - \frac{3B_j l}{E_x^{(j)}} x^2 + \frac{k_j^2 A_j}{2E_x^{(j)}} x + \frac{3B_j l^2}{2E_x^{(j)}} x + D_1^{(j)} x + G_2^{(j)} \quad (3.96)$$

Somit können die beiden Verschiebungsfunktionen einer Einzelschicht j wie folgt angegeben werden:

$$u_j(x, y) = -\frac{3B_j}{E_x^{(j)}}(l-x)^2 y + \frac{B_j}{E_x^{(j)}}(k_j^2 - \nu_{xy}^{(j)})y^3 + \frac{k_j^2 A_j}{2E_x^{(j)}}y + \frac{3B_j l^2}{2E_x^{(j)}}y - D_1^{(j)}y + G_1^{(j)} \quad (3.97)$$

$$v_j(x, y) = -\frac{3\nu_{xy}^{(j)} B_j}{E_x^{(j)}}(l-x)y^2 + \frac{B_j}{E_x^{(j)}}x^3 - \frac{3B_j l}{E_x^{(j)}}x^2 + \frac{k_j^2 A_j}{2E_x^{(j)}}x + \frac{3B_j l^2}{2E_x^{(j)}}x + D_1^{(j)}x + G_2^{(j)} \quad (3.98)$$

Wie man an den Gleichungen (3.97) und (3.98) sehen kann, hängt das Verschiebungsfeld einer Einzelschicht in der orthotrop geschichteten, geraden, balkenartigen Scheibe von 5 unbekanntem Größen ab. Somit müssen für eine eindeutige Bestimmung des Spannungs- und Verschiebungsfeldes in der gesamten Scheibe, die aus n Schichten besteht, $5 \cdot n$ Bedingungen definiert werden.

Aus der Festeinspannung der Scheibe ergeben sich 2 Randbedingungen pro Lage:

$$u_j \left(x = 0, y = \frac{y_j + y_{j+1}}{2} \right) = 0 \quad (3.99)$$

$$\left. \frac{\partial u_j}{\partial y} \right|_{x=0, y=\frac{y_j+y_{j+1}}{2}} = 0 \quad (3.100)$$

An der neutralen Achse des Laminats ist die Verschiebung v_j ebenfalls gleich null.

$$v_j(x = 0, y = 0) = 0 \quad (3.101)$$

Weitere Bedingungen können aus der Kontinuität der Verschiebungen und der Schubspannung an den Grenzen der benachbarten Laminatschichten abgeleitet werden. Die Bedingungen der kontinuierlichen Verschiebungen können dabei nur im Mittel über die Länge des Laminats erfüllt werden, da sonst kein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten vorliegt.

$$\int_0^l u_j(x, y = y_j) dx = \int_0^l u_{j+1}(x, y = y_j) dx \quad (3.102)$$

$$\int_0^l v_j(x, y = y_j) dx = \int_0^l v_{j+1}(x, y = y_j) dx \quad (3.103)$$

$$\tau_{xy}^{(j)} = \tau_{xy}^{(j+1)} \quad (3.104)$$

Die letzten beiden Randbedingungen für die eindeutige Lösung des Gleichungssystems liefern das Kräftegleichgewicht an der orthotrop geschichteten, geraden, balkenartigen Scheibe (s. (3.87)) und die Bedingung der schubspannungsfreien Scheibenränder. Aufgrund der Symmetrie der Schubspannung τ_{xy} bezüglich der y -Achse ist nur eine der Bedingungen aus (3.89) erforderlich.

3.3.3. Beanspruchung durch das Randmoment M_0

Als ein weiterer Fall wird die einseitig eingespannte orthotrop geschichtete Scheibe betrachtet, die am anderen Ende mit einem Randmoment belastet wird. Für die Bestimmung des Spannungsfeldes jeder einzelnen Schicht j wird die gleiche Airysche Spannungsfunktion wie bei der orthotropen Scheibe unter der Randmomentenbelastung verwendet.

$$F_j = A_j y^3 \quad (3.105)$$

Für jede Laminaschicht ergeben sich nach dem Einsetzen der Gleichung (3.105) in die Beziehungen (2.44) folgende Spannungskomponenten:

$$\sigma_{xx}^{(j)} = 6A_j y, \quad \sigma_{yy}^{(j)} = 0, \quad \tau_{xy}^{(j)} = 0 \quad (3.106)$$

Mit den Spannungskomponenten können aus den konstitutiven Beziehungen die Verzerrungen der Einzelschicht bestimmt werden:

$$\varepsilon_{xx}^{(j)} = \frac{1}{E_x^{(j)}} \sigma_{xx} = \frac{6A_j}{E_x^{(j)}} y \quad (3.107)$$

$$\varepsilon_{yy}^{(j)} = -\frac{\nu_{xy}^{(j)}}{E_x^{(j)}} \sigma_{xx} = -\frac{6\nu_{xy}^{(j)} A_j}{E_x^{(j)}} y \quad (3.108)$$

$$\gamma_{xy}^{(j)} = \frac{1}{G_{xy}^{(j)}} \tau_{xy}^{(j)} = 0 \quad (3.109)$$

Aus der Kinematik können anschließend mit einer unbestimmten Integration der Gleichungen (3.107) und (3.108) die Verschiebungsfunktionen wie folgt ermittelt werden.

$$\partial u_j = \varepsilon_{xx}^{(j)} \partial x = \frac{6A_j}{E_x^{(j)}} y \partial x \implies u_j = \frac{6A_j}{E_x^{(j)}} xy + f_1^{(j)}(y) \quad (3.110)$$

$$\partial v_j = \varepsilon_{yy}^{(j)} \partial y = -\frac{6\nu_{xy}^{(j)} A_j}{E_x^{(j)}} y \partial y \implies v_j = -\frac{3\nu_{xy}^{(j)} A_j}{E_x^{(j)}} y^2 + f_2^{(j)}(x) \quad (3.111)$$

Durch das Einsetzen der beiden Gleichungen in die kinematische Beziehung (2.46) für $\gamma_{xy}^{(j)}$ erhält man

$$\frac{6A_j}{E_x^{(j)}} x + \frac{df_1^{(j)}(y)}{dy} + \frac{df_2^{(j)}(x)}{dx} = 0 \quad (3.112)$$

Diese Beziehung kann durch das Einführen einer Konstanten $D_1^{(j)}$ in zwei nur von einer Variablen abhängige Gleichungen zerlegt werden.

$$\frac{6A_j}{E_x^{(j)}} x + \frac{df_2^{(j)}(x)}{dx} = D_1^{(j)} \quad (3.113)$$

$$\frac{df_1^{(j)}(y)}{dy} = -D_1^{(j)} \quad (3.114)$$

Formt man die beiden Gleichungen nach den gesuchten Funktionen um und integriert sie anschließend, dann erhält man für die bisher unbekanntenen Integrationsfunktionen folgende Beziehungen:

$$f_1^{(j)}(y) = -D_1^{(j)}y + G_1^{(j)} \quad (3.115)$$

$$f_2^{(j)}(x) = D_1^{(j)}x - \frac{3A_j}{E_x^{(j)}}x^2 + G_2^{(j)} \quad (3.116)$$

Nach dem Einsetzen in die Beziehungen (3.110) und (3.111) ergeben sich die Verschiebungskomponenten für eine Einzelschicht. Diese sind von 4 Konstanten abhängig, die aus Randbedingungen ermittelt werden können.

$$u_j(x, y) = \frac{6A_j}{E_x^{(j)}}xy - D_1^{(j)}y + G_1^{(j)} \quad (3.117)$$

$$v_j(x, y) = -\frac{3A_j}{E_x^{(j)}}\left(\nu_{xy}^{(j)}y^2 + x^2\right) + D_1^{(j)}x + G_2^{(j)} \quad (3.118)$$

Die gesamte Scheibe, die aus n Laminatlagen besteht, erfordert somit $4 \cdot n$ Randbedingungen für die eindeutige Bestimmung des Spannungs- und Verschiebungsfeldes in allen Schichten. An der Festeinspannung der Scheibe können folgende Randbedingungen für jede Schicht definiert werden:

$$u_j(x = 0, y = \frac{y_{j-1} + y_j}{2}) = 0 \quad (3.119)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial y} \Big|_{x=0} = 0 \quad (3.120)$$

Die Kontinuitätsbedingungen an den Schichtgrenzen:

$$\int_0^l u_j(x, y = y_j) dx = \int_0^l u_{j+1}(x, y = y_j) dx \quad (3.121)$$

$$\int_0^l v_j(x, y = y_j) dx = \int_0^l v_{j+1}(x, y = y_j) dx \quad (3.122)$$

können nur über die Laminatlänge gemittelt erfüllt werden. Die noch fehlenden zwei Randbedingungen bekommt man aus dem Momentengleichgewicht (3.123) und aus der Bedingung, dass die neutrale Achse der Scheibe an der Einspannung ebenfalls keine vertikale Verschiebungskomponente v_j besitzt (3.124).

$$\sum_{j=1}^n \left[\int_{y_{j-1}}^{y_j} \sigma_{xx}^{(j)} y dy \right] = -\frac{M_0}{t} \quad (3.123)$$

$$v_j(x = 0, y = 0) = 0 \quad (3.124)$$

3.4. Verifikation der Ergebnisse

Nach der Herleitung der analytischen Lösungen für die Spannungs- und Verschiebungsfelder in orthotropen und orthotrop geschichteten geraden balkenartigen Scheiben folgt nun die Verifikation der Ergebnisse anhand einer FE-Rechnung. Dafür wird ein FE-Modell mit dem Preprozessor MSC Patran erstellt. Anschließend wird die FE-Rechnung mit dem Solver MSC Nastran durchgeführt. Folgend werden die analytisch hergeleiteten Ergebnisse mit den Ergebnissen aus der FE-Rechnung miteinander verglichen.

Die Verifikation der Ergebnisse erfolgt sowohl für gedrungene Scheiben ($\frac{l}{h} < 5$) als auch für Scheiben mit hohem Längen-Höhen-Verhältnis ($\frac{l}{h} \geq 10$). Zusätzlich wird die Lösung für das fünffache Verhältnis der Scheibenlänge zu der Scheibenhöhe betrachtet, denn ab diesem Verhältnis kann bei isotropen Werkstoffen nach [6] die Schubabsenkung vernachlässigt werden. In den betrachteten Lastfällen kann dies auch für die orthotropen Scheiben angenommen werden, da der Orthotropiegrad in den hergeleiteten Gleichungen herausfällt. Für die Untersuchung aller betrachteten Lastfälle in orthotropen Scheiben und orthotrop geschichteten Laminaten ist die Höhe der Scheibe h konstant. Die verschiedenen Längen-Höhen-Verhältnisse der Scheibe werden durch das Variieren der Scheibenlänge eingestellt.

Die Verifikation der analytischen Ergebnisse erfolgt anhand einer statischen linearen strukturellen Berechnung eines zweidimensionalen Schnitts durch ein dreidimensional ausgedehntes gerades balkenartiges Profil. So werden die Rechenzeit sowie die Rechen- und Speicherkapazitäten bei gleichzeitig hoher Genauigkeit der Rechnung minimiert. Im betrachteten Schnitt des Profils herrscht ein ebener Verzerrungszustand. Dieser kann durch die Umrechnung der entsprechenden Terme der Nachgiebigkeitsmatrix aus dem ebenen Spannungszustand (vgl. Gl. (2.35)) hergeleitet werden [12]. Somit werden sowohl die analytische als auch die FE-Rechnung im ebenen Spannungszustand durchgeführt.

Die bisherige Betrachtung der Spannungs- und Verschiebungsfelder in einer geraden balkenartigen Scheibe galt allgemein für isotrope und orthotrope Werkstoffe sowie orthotrop geschichtete Lamine ohne die spezifischen Materialeigenschaften zu erfordern. Für die Verifikation der Ergebnisse müssen diese jedoch angenommen werden. Im ebenen Spannungszustand genügt die Kenntnis der Materialparameter in der betrachteten Ebene. Die herangezogenen Werkstoffeigenschaften werden in der Tabelle 3.1 zusammengefasst.

Tabelle 3.1: Materialdaten

Materialparameter	Wert
E_x [MPa]	135000
E_y [MPa]	10000
G_{xy} [MPa]	5000
ν_{xy} [-]	0,27
ν_{yx} [-]	0,02

3.4.1. Erstellung des FE-Modells

Es werden drei Modelle mit unterschiedlichen Längen-Höhen-Verhältnissen erstellt. In diesen Modellen werden alle Lastfälle in verschiedenen „subcases“ untersucht. Für die Untersuchung der Spannungs- und Verschiebungsfelder in einer gedrungenen Scheibe wird das Verhältnis von $\frac{l}{h} = 3$ gewählt. Für hohe Verhältnisse der Scheibenlänge zu ihrer Höhe wird exemplarisch die Scheibe mit $\frac{l}{h} = 10$ betrachtet. Das dritte Modell weist ein Verhältnis $\frac{l}{h} = 5$ auf.

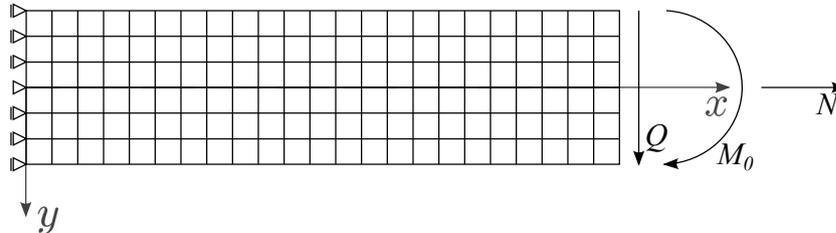


Abbildung 3.4: FE-Modell der geraden balkenartigen Scheibe

Die Finite Elemente Methode liefert eine Näherungslösung für die Spannungs- und Verschiebungsfelder der Scheibe. Diese muss eine hohe Genauigkeit aufweisen, um als Referenz zur analytischen Lösung verwendet zu werden. Es gibt zwei Möglichkeiten zur Verbesserung der FE-Lösung. Die erste Möglichkeit ist die so genannte h-Methode. Bei dieser wird eine höhere Genauigkeit der Lösung durch die Verwendung von mehr Elementen bei der Vernetzung des Modells erreicht. Die zweite Möglichkeit liegt in der Erhöhung der Ansatzordnung bei der Formulierung der Ansatzfunktionen zur Interpolation der Verschiebungen innerhalb eines Elements. Diese wird als p-Methode bezeichnet.

Nach der Erstellung der Geometrie der Scheibe wird diese mit finiten Elementen vernetzt. Dafür muss als Erstes ein geeigneter Elementtyp gewählt werden. Die Geometrie des Modells legt eine Vernetzung mit rechteckigen Elementen nahe. Für die Vernetzung des Modells werden somit die in MSC Nastran zur Verfügung stehenden Elemente mit linearen (CQUAD4) und quadratischen (CQUAD8) Ansatzfunktionen betrachtet. Die Genauigkeit bzw. die Konvergenz der FE-Rechnung gegen die exakte Lösung mit der Verwendung eines Elementtyps kann mit dem so genannten Patch-Test überprüft werden. Dabei wird ein Beispielpfad, für das die Lösung bekannt ist, mit einigen verzerrten Elementen des untersuchten Elementtyps nachgerechnet. Stimmt das Ergebnis der Rechnung mit der Referenz-Lösung überein, so bestehen die Elemente den Test. Korrekt formulierte verschiebungsbezogene Elemente in kompatiblen Netzen bestehen laut K.-J. Bathe in [2] den Patch-Test automatisch. Dieser Test ist mit den beiden betrachteten Elementtypen durchgeführt worden. Der Patch-Test hat gezeigt, dass bei einer Beanspruchung der verzerrten Elemente durch eine Normalkraft sich im aus CQUAD4-Elementen bestehenden Netz der erwartete konstante Spannungszustand einstellt. Das Netz aus CQUAD8-Elementen wies beim identischen Aufbau diese Spannungsverteilung nicht auf. Im dem Modell konnte kein Fehler gefunden werden. Für das Abweichen der FE-Lösung vom erwarteten Zustand konnte auch keine Erklärung gefunden werden. Somit ist für die Verifikation der analytischen Ergebnisse die FE-Lösung mit einem feinerem Netz aus CQUAD4-Elementen (h-Methode) verwendet worden. Die Patch-Tests für die beiden Elementtypen sind auf der beigefügten CD-ROM abgelegt.

Alle drei FE-Modelle der orthotropen Scheibe werden mit 20 CQUAD4-Elementen über die

Scheibenhöhe vernetzt. Über die Länge der Scheibe gleicht die Anzahl der Elemente einem dem jeweiligen Längen-Höhen-Verhältnis entsprechenden Vielfachen der Elemente über die Scheibenhöhe. So wird das FE-Modell der Scheibe bei einer Scheibenhöhe h von 2, 5 mm aus quadratischen Elementen mit der Elementkantenlängen von 0, 125 mm aufgebaut.

Die Festeinspannung wird im FE-Modell mittels der so genannten *Single Point Constraints* (SPCs) an einem Rand der Scheibe simuliert. Dabei werden die Knotenverschiebungen des gesamten Scheibenrands in x -Richtung gesperrt. Da das zweidimensionale Modell der Scheibe in einer dreidimensionalen Umgebung erstellt ist, muss zusätzlich noch der translatorische Freiheitsgrad dieser Knoten in z -Richtung gesperrt werden. Am Randknoten der neutralen Achse der Scheibe werden außerdem die Verschiebung in y -Richtung und die Rotation um die y -Achse blockiert. Am freien Scheibenrand werden die angreifenden Kräfte und Momente angebracht. Die Normal- und Querkraftbelastung wird auf die Randknoten verteilt angebracht. Das Randmoment wird an einem außerhalb der Scheinengeometrie liegenden Knoten angebracht und mittels der sogenannten *Multi Point Constraints* (MPCs), die die Freiheitsgrade der Knoten koppeln, in das Scheibenmodell eingeleitet. Nach der Definition der Material- und der Zuweisung der Elementeneigenschaften wird die FE-Rechnung durchgeführt. Das FE-Modell ist schematisch in der Abbildung 3.4 dargestellt.

3.4.2. Verifikation der Ergebnisse für eine orthotrope gerade balkenartige Scheibe

Beanspruchung durch die Normalkraft N

Als Erstes werden die Ergebnisse aus der analytischen Berechnung der Spannungs- und Verschiebungsfelder unter der Normalkraftbelastung und der FE-Lösung mit einander verglichen. Dazu wird die Scheibe exemplarisch mit einer Normalkraft N von 10 N beaufschlagt. In der Abbildung 3.5 ist der Verlauf der analytisch ermittelten Normalspannung σ_{xx} über die Scheibenhöhe h im Vergleich zu den Lösungen aus der FE-Rechnung dargestellt. Dieser ist für alle Verhältnisse $\frac{l}{h}$ bei konstanter Scheibenhöhe vom gleichen Betrag. Der Vergleich der Ergebnisse erfolgt für die Scheibenmitte (also bei $x = \frac{l}{2}$), damit keine störenden Einflüsse aus der Einspannung und der Lasteinleitung Wirkung zeigen.

Der konstante Verlauf der Normalspannung σ_{xx} über die Scheibenhöhe aus der analytischen Rechnung stimmt mit der FE-Lösung überein. Die Ergebnisse für die Normalspannung σ_{yy} und die Schubspannung τ_{xy} stimmen ebenfalls überein. In beiden Lösungen sind diese Spannungen gleich Null.

Das aus den Verschiebungen u und v bestehende Verschiebungsfeld zeigt die Abbildung 3.6. Die Verschiebung u wird ebenfalls in der Mitte der Scheibe betrachtet. In der Abbildung 3.6a wird die Verschiebung v des oberen Scheibenrandes ($y = -\frac{h}{2}$) dargestellt. Diese ergibt sich aufgrund der Querkontraktion der Scheibe und ist bei konstanter Scheibenhöhe ebenfalls für alle Verhältnisse $\frac{l}{h}$ gleich.

In der Abbildung 3.6b ist die Verschiebung u der Scheibe für die drei betrachteten Längen-Höhen-Verhältnisse in absoluten Koordinaten dargestellt. Relativ zur jeweiligen Scheibenlänge betrachtet ist diese für alle Verhältnisse ebenfalls gleich.

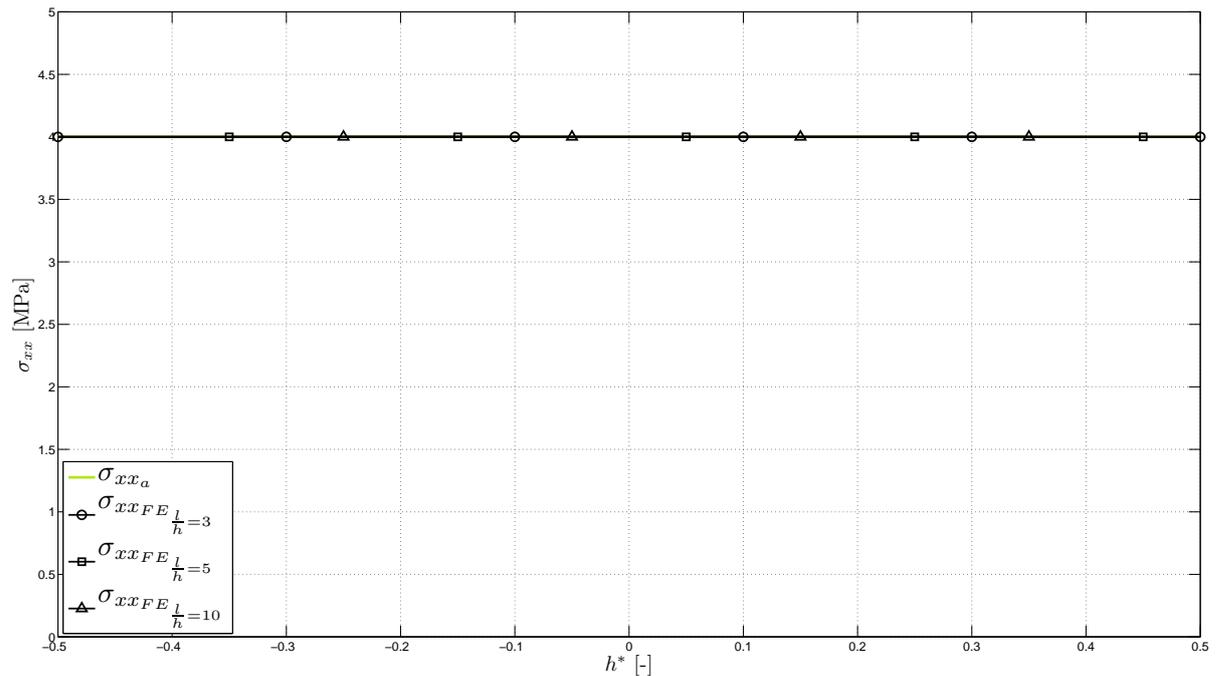


Abbildung 3.5: Vergleich der Normalspannungsverläufe aus der analytischen und der FE-Rechnung bei Normalkraftbelastung

Beanspruchung durch die Querkraft Q

Für die Verifikation der Spannungs- und Verschiebungskomponenten wird die orthotrope Scheibe in allen untersuchten Längen-Höhen-Verhältnissen durch eine exemplarische Querkraft: $Q = 10 \text{ N}$ beansprucht. Die Verifikation des Spannungsfeldes erfolgt dabei ebenfalls an der Stelle $x = \frac{l}{2}$. Dieses wird durch die Normalspannung σ_{xx} und die Schubspannung τ_{xy} gebildet. In der Abbildung 3.7 ist der analytisch bestimmte Verlauf der Normalspannung σ_{xx} über die Scheibenhöhe im Vergleich zu den Normalspannungsverläufen aus der FE-Rechnung für alle drei betrachteten Längen-Höhen-Verhältnisse dargestellt.

Der Verlauf der Schubspannung τ_{xy} ist bei konstanter Höhe h in der analytischen Lösung für alle Längen-Höhen-Verhältnisse der Scheibe gleich. Dieser wird in der Abbildung 3.8 mit den Schubspannungsverläufen aus der FE-Rechnung verglichen.

In der Abbildung 3.8 sieht man, dass die Abweichung der Ergebnisse mit dem steigenden Verhältnis der Scheibenlänge zur Scheibenhöhe abnimmt. An den Rändern der Scheibe wird die Bedingung der spannungsfreien Ränder ($\tau_{xy} = 0$) in den FE-Lösungen nicht erfüllt. Mit der Verwendung einer höheren Anzahl der Elemente über die Scheibenhöhe könnte diese Bedingung besser approximiert werden.

In der analytischen Lösung für das Verschiebungsfeld der Scheibe gibts es zwei Möglichkeiten, die Verschiebungskomponenten u und v zu bestimmen. Diese sind im Abschnitt 3.1.2 beschrieben. Neben der Verifikation der Verschiebungsfunktionen anhand der Ergebnisse aus der FE-Rechnung wird in den Abbildungen 3.9 bis 3.11 ebenfalls die Auswirkung der beiden Randbedingungen (3.40) und (3.44) auf den Verlauf der Verschiebungsfunktionen untersucht. Die Lösung, die eine bessere Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus der FE-Rechnung aufweist, wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit betrachtet. Die Lösung mit der größeren Abweichung wird verworfen.

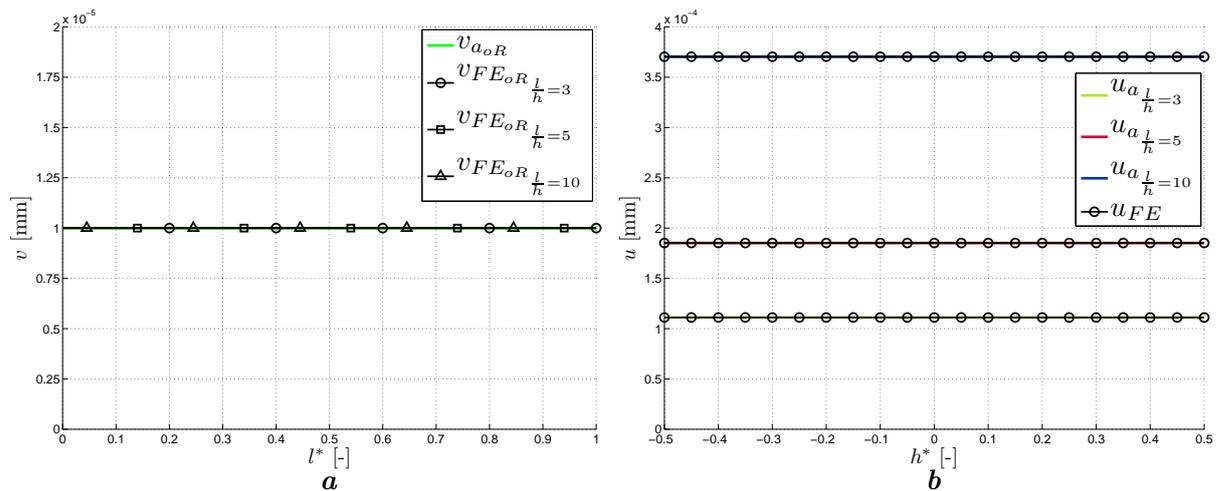


Abbildung 3.6: Vergleich des Verschiebungsfeldes der orthotropen Scheibe unter Normalkraftbelastung aus der analytischen mit dem aus der FE-Rechnung
a Verschiebung v_{oR} am oberen Rand aufgrund der Querkontraktion der Scheibe. **b** Verschiebung u in der Scheibenmitte bei allen betrachteten Längen-Höhen-Verhältnissen der Scheibe.

Die Verschiebungsfunktionen beider analytischen Lösungen werden in den Abbildungen 3.9 bis 3.11 mit unterschiedlichen Indices gekennzeichnet. So werden die mit der Beziehung (3.40) bestimmten Verschiebungsfunktionen mit dem Index „1“ versehen. Die Verschiebungsfunktionen, für deren Bestimmung die Bedingung (3.44) verwendet worden ist, erhalten den Index „2“. Verschiebungskomponenten aus der FE-Rechnung werden mit „FE“ indiziert.

Der Verlauf der Verschiebungsfunktionen u_1 und v_1 zeigt eine deutlich höhere Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus der FE-Rechnung. Dies liegt unter anderem an der Umsetzung der Festeinspannung der Scheibe im FE-Modell durch die Sperrung der Knotenverschiebung am eingespannten Scheibenrand (s. Abb. 3.4). Diese entspricht der Bedingung (3.40) im analytischen Modell der Scheibe. Die Verformung der Scheibe unter Querkraftbelastung setzt sich aus dem Biege- und Schubanteil zusammen. Bei der Betrachtung der Verläufe der Verschiebungsfunktionen aus der analytischen Rechnung erkennt man auch ohne den direkten Vergleich mit den FE-Ergebnissen, dass die Verschiebungskomponenten mit dem Index „1“ dieser Verformung besser entsprechen. Somit werden in den nachfolgenden Teilen dieser Arbeit bei der Betrachtung des Lastfalls mit der Querkraft die Verschiebungsfunktionen (3.42) und (3.43) herangezogen. Die Beziehungen (3.46) und (3.47) werden jedoch nochmal während der Untersuchung der Auswirkung vom Geometrieparameter λ auf das Verschiebungsfeld der Scheibe aufgegriffen.

In den Abbildungen 3.9b und 3.10b ist ein deutlicher Knick im Verlauf der Verschiebung v_{FE} zu erkennen. Dieser ist auch beim hohen Längen-Höhen-Verhältnis der Scheibe in der Abbildung 3.11 vorhanden, ist jedoch aufgrund der im Vergleich zur maximalen Auslenkung der Scheibe geringen Dimension nicht mehr auffällig. Dieser Knick ist mit der Störung zu erklären, die von dem „eingespannten“ Randknoten der neutralen Achse verursacht wird. An diesem Knoten werden alle Freiheitsgrade der Translation und ein Freiheitsgrad der Rotation gesperrt.

In den Abbildungen 3.9 bis 3.11 ist die Annäherung der Verschiebungsverläufe aus der analytischen und der FE-Lösung mit dem steigenden Längen-Höhen-Verhältnis der Scheibe deutlich zu erkennen. Das Verhalten der Scheibe mit wachsenden Verhältnis der Scheibenlänge zur Schei-

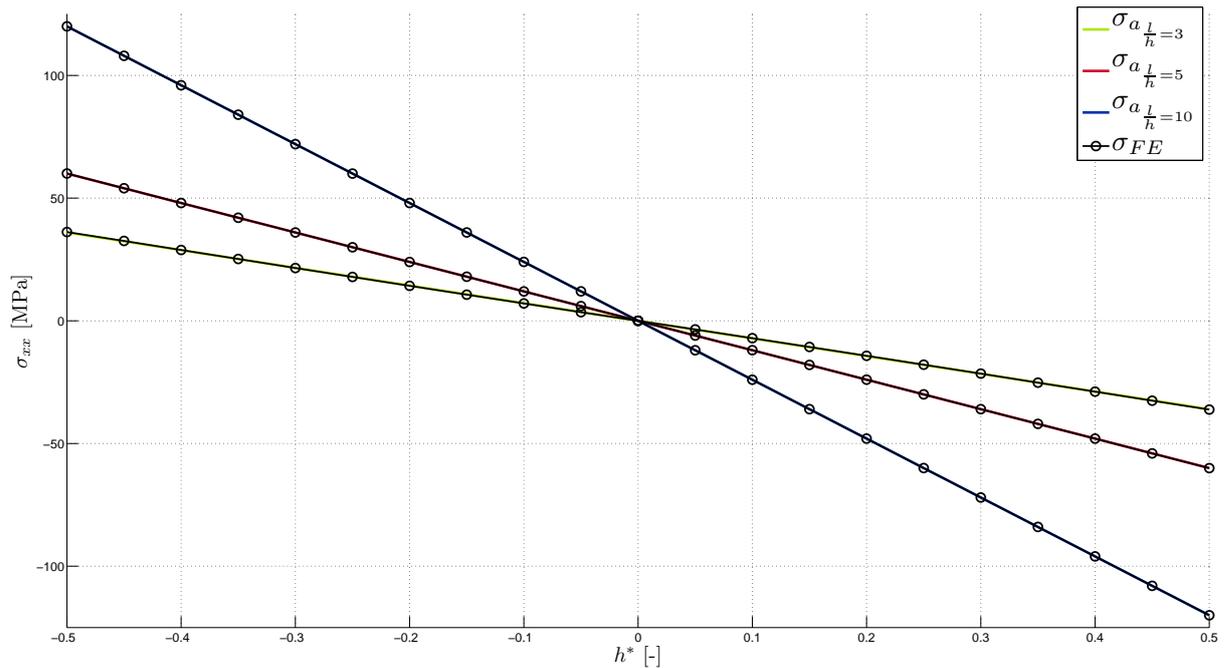


Abbildung 3.7: Vergleich der Normalspannungsverläufe aus der analytischen und der FE-Rechnung bei Querkraftbelastung

benhöhe wird im Abschnitt 4.1.1 untersucht.

Beanspruchung durch das Randmoment M_0

Nun werden die Ergebnisse für die mit einem Randmoment ($M_0 = 250 \text{ Nmm}$) belastete Scheibe betrachtet. Die Verifikation des Spannungsfeldes erfolgt ebenfalls, wie auch in den vorangegangenen Abschnitten, in der Mitte der Scheibe. Aus der Gleichung (3.48) geht hervor, dass in der analytischen Lösung der Verlauf der Normalspannung σ_{xx} bei einer konstanten Scheibenhöhe für alle Längen-Höhen-Verhältnisse gleich bleibt. Die Abbildung 3.12 zeigt den Verlauf der analytisch bestimmten Normalspannung σ_{xx} über die Scheibenhöhe im Vergleich zu den Spannungsverläufen aus den FE-Lösungen für die drei untersuchten Längen-Höhen-Verhältnisse.

Es ist eine sehr gute Übereinstimmung der Spannungsverläufe aus den analytischen und FE-Lösungen festzustellen. Das gleiche gilt auch für das Verschiebungsfeld der Scheibe, das in der Abbildung 3.13 dargestellt ist.

In abschließender Betrachtung kann man eine sehr gute Übereinstimmung in den Spannungsverläufen der analytischen und der FE-Lösung für alle untersuchten Lastfälle feststellen. Dies gilt für alle betrachteten Längen-Höhen-Verhältnisse der Scheibe. Beim Vergleich der Verschiebungsfelder wurden größere Abweichungen in den Ergebnissen aus analytischer und FE-Lösung für gedrungene Scheiben unter Querkraftbelastung festgestellt. Mit steigendem Verhältnis der Scheibenlänge zur Scheibenhöhe minimieren sich diese, sodass sie für das Verhältnis von $\frac{l}{h} = 10$ vernachlässigt werden können. Die Verschiebungsverläufe aus den anderen untersuchten Lastfällen zeigen ebenfalls eine sehr gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus der FE-Rechnung.

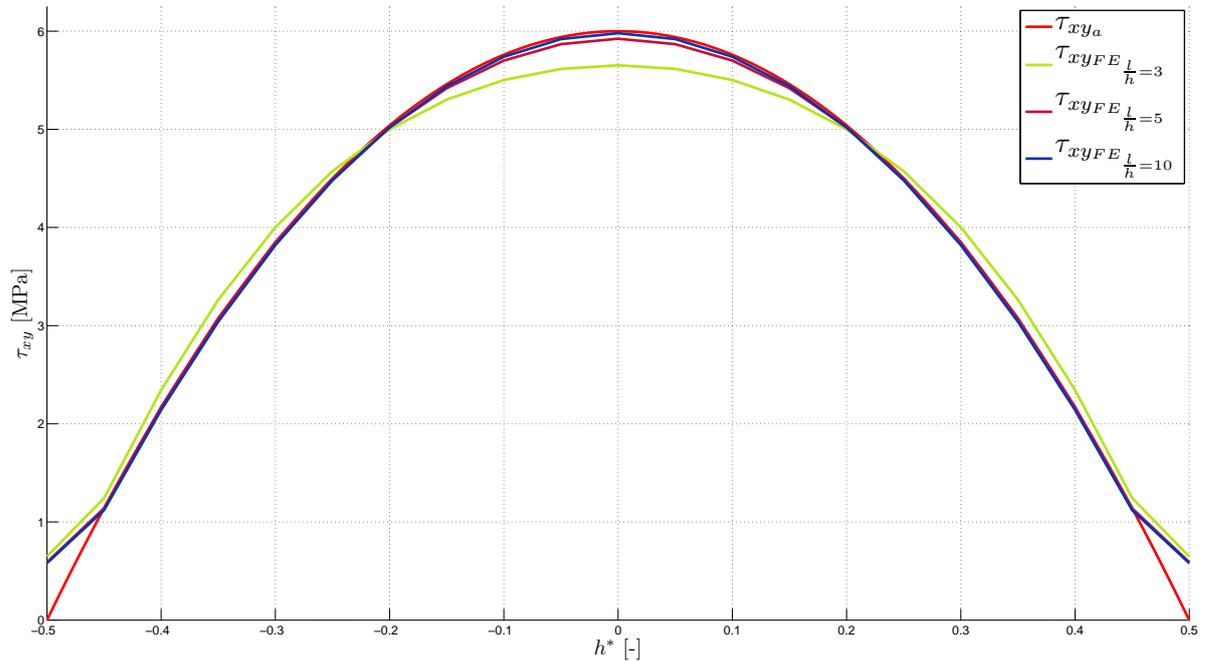


Abbildung 3.8: Vergleich der Schubspannungsverläufe aus der analytischen und der FE-Rechnung bei Querkraftbelastung

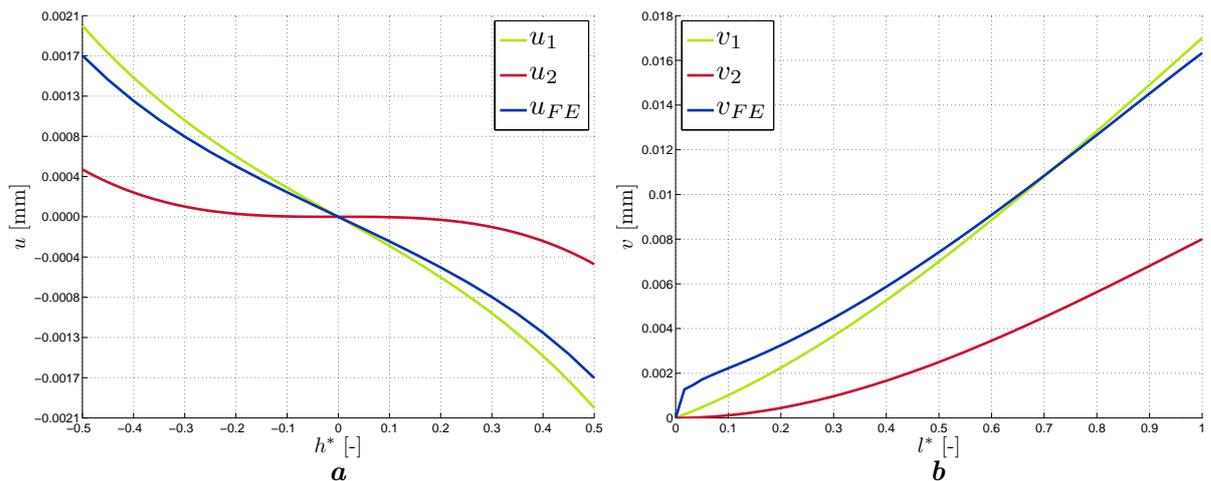


Abbildung 3.9: Vergleich der Verschiebungskomponenten aus den analytischen Lösungen mit den aus der FE-Rechnung für eine gedrungene Scheibe ($\frac{l}{h} = 3$)
a Querschnittsneigung in der Mitte der Scheibe, **b** Absenkung der neutralen Achse der Scheibe.

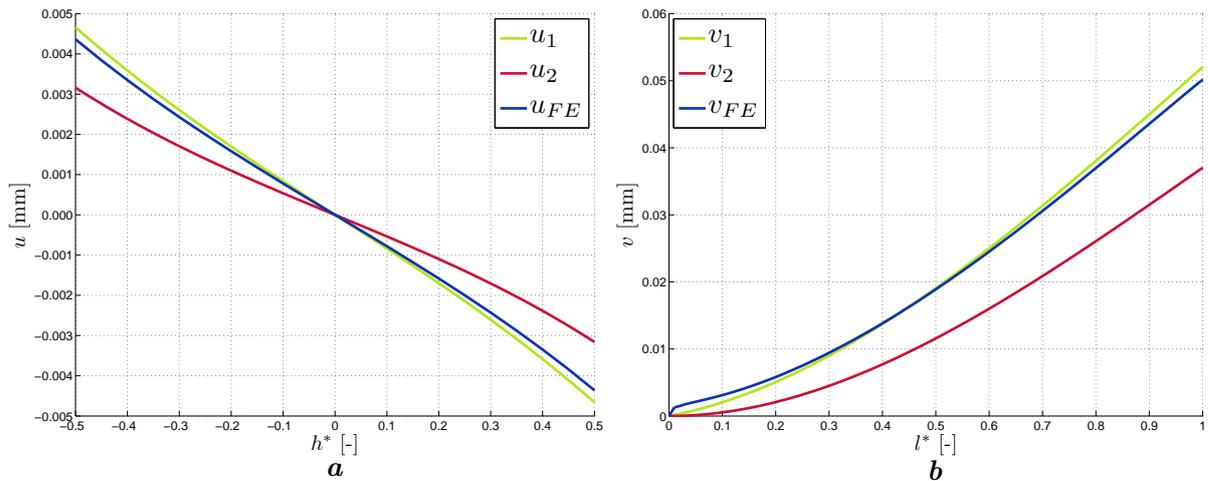


Abbildung 3.10: Vergleich der Verschiebungskomponenten aus den analytischen Lösungen mit den aus der FE-Rechnung für eine Scheibe mit $\frac{l}{h} = 5$
a Querschnittsneigung in der Mitte der Scheibe **b** Absenkung der neutralen Achse der Scheibe

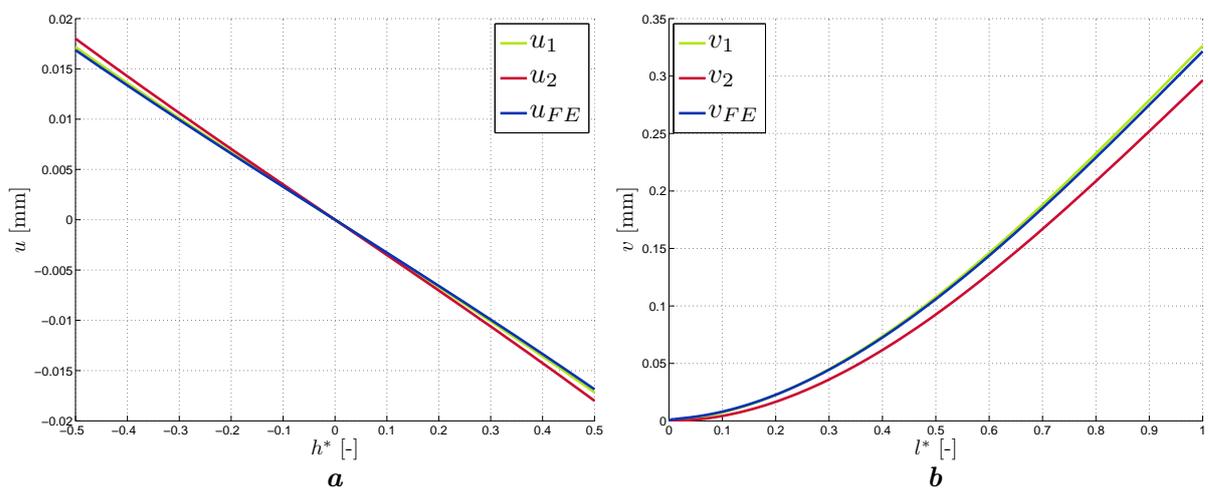


Abbildung 3.11: Vergleich der Verschiebungskomponenten aus den analytischen Lösungen mit den aus der FE-Rechnung für eine Scheibe mit hohem Längen-Höhen-Verhältnis ($\frac{l}{h} = 10$).
a Querschnittsneigung in der Mitte der Scheibe. **b** Absenkung der neutralen Achse der Scheibe.

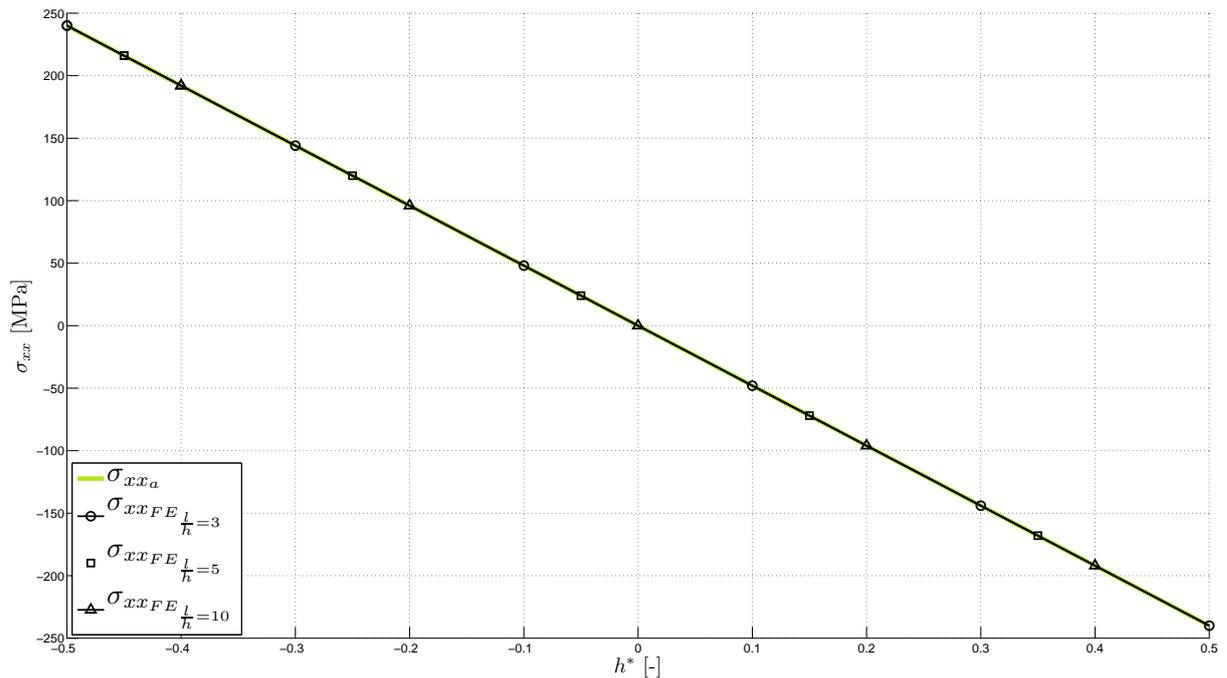


Abbildung 3.12: Vergleich der Normalspannungsverläufe aus der analytischen und der FE-Rechnung bei einer Randmomentenbelastung

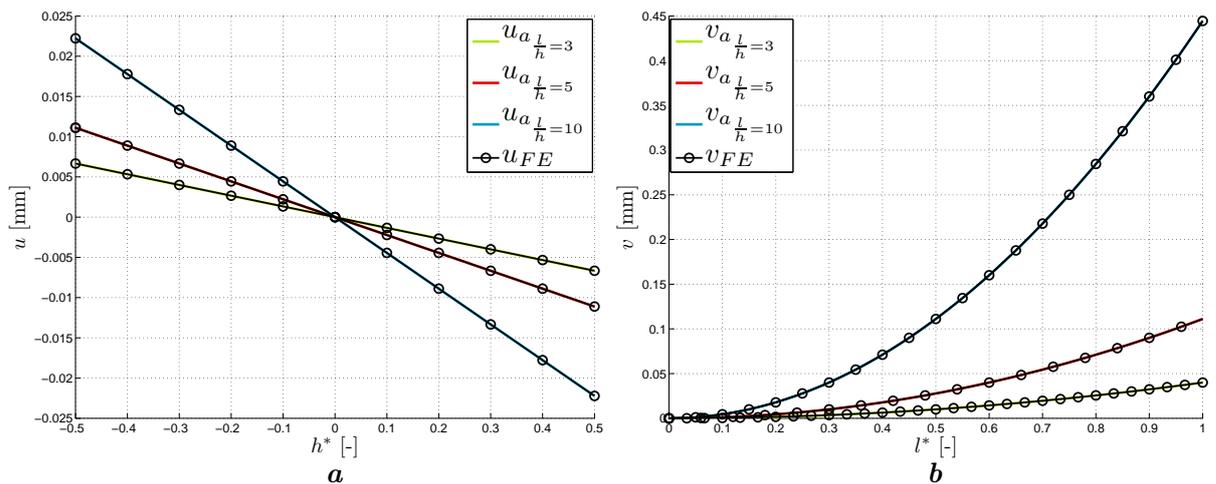


Abbildung 3.13: Vergleich der Verschiebungskomponenten aus den analytischen Lösungen mit den aus der FE-Rechnung für eine Scheibe mit den untersuchten Längen-Höhen-Verhältnissen $\frac{l}{h} = 3$, $\frac{l}{h} = 5$, $\frac{l}{h} = 10$ unter der Biegemomentenbelastung. **a** Querschnittsneigung in der Mitte der Scheibe. **b** Absenkung der neutralen Achse der Scheibe.

3.4.3. Verifikation der Ergebnisse für orthotrop geschichtete gerade balkenartige Laminat

Die Verifikation der im Abschnitt 3.3 analytisch hergeleiteten Beziehungen für die Spannungs- und Verschiebungsfelder in einer orthotrop geschichteten Scheibe erfolgt anhand eines symmetrisch aufgebauten Laminats. Dieses besteht aus drei Lagen. Die beiden äußeren Lagen im Laminat weisen die 0° - und die innere Lage die 90° -Orientierung der Fasern im globalen Laminat-Koordinatensystem auf. Das Laminat hat eine Höhe h von 2,5 mm und wird mit den vordefinierten Längen-Höhen-Verhältnissen entsprechenden Längen l von 7,5 mm, 12,5 mm und 25 mm untersucht. Die Untersuchung wird mit gleichen den Lastfällen, wie bei der orthotropen Scheibe, durchgeführt.

In dieser Arbeit werden die im Abschnitt 3.3 aufgestellten Gleichungssysteme numerisch mit dem Berechnungsprogramm MATLAB aufgelöst. Die erzeugten m-files mit dem Programm-Code für die einzelnen Lastfälle und Längen-Höhen-Verhältnisse des Laminats sind auf der beigegeführten CD-ROM enthalten.

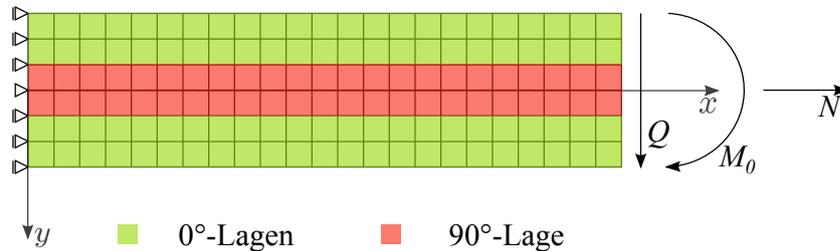


Abbildung 3.14: FE-Modell des orthotrop geschichteten Laminats

Im FE-Modell der orthotrop geschichteten Scheibe werden die einzelnen Laminatschichten durch die Aufteilung des Netzes in drei Bereiche gleicher Höhe simuliert. Diesen Bereichen werden die in das globale Laminat-Koordinatensystem umgerechneten Werkstoffeigenschaften der Einzelschichten zugewiesen. Jede Schicht wird mit acht Elementen über die Schichthöhe vernetzt. Im ebenen Spannungszustand kann die Rechnung mit den Werkstoffparametern der betrachteten Ebene durchgeführt werden. Die im ebenen Spannungszustand relevanten Materialeigenschaften der 0° - und 90° -Schichten im globalen Koordinatensystem des Laminats sind in der Tabelle 3.2 zusammengefasst. In der Abbildung 3.14 wird das FE-Modell des orthotrop geschichteten Laminats schematisch dargestellt.

Tabelle 3.2: Materialeigenschaften der Einzelschichten

	0°-Schicht	90°-Schicht
E_x	135000 [MPa]	10000 [MPa]
E_y	10000 [MPa]	10000 [MPa]
G_{xy}	5000 [MPa]	5000 [MPa]
ν_{xy}	0.27 [-]	0.27 [-]

Beanspruchung durch die Normalkraft N

Für die analytische Bestimmung der Spannungs- und Verschiebungsfeldes im betrachteten Laminat unter Zugbelastung muss ein lineares Gleichungssystem aus insgesamt neun Gleichungen

gelöst werden. In Vektor-Matrix-Schreibweise kann dieses Gleichungssystem wie folgt angeschrieben werden:

$$\begin{bmatrix}
 2(y_1 - y_0) & 2(y_2 - y_1) & 2(y_3 - y_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{2}{E_x^{(1)}}x & -\frac{2}{E_x^{(2)}}x & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{2}{E_x^{(2)}}x & -\frac{2}{E_x^{(3)}}x & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{2\nu_{xy}^{(1)}}{E_x^{(1)}}y_1 & \frac{2\nu_{xy}^{(2)}}{E_x^{(2)}}y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
 0 & -\frac{2\nu_{xy}^{(2)}}{E_x^{(2)}}y_2 & \frac{2\nu_{xy}^{(3)}}{E_x^{(3)}}y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 A_1 \\
 A_2 \\
 A_3 \\
 G_1^{(1)} \\
 G_1^{(2)} \\
 G_1^{(3)} \\
 G_2^{(1)} \\
 G_2^{(2)} \\
 G_2^{(3)}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \frac{N}{t} \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}
 \quad (3.125)$$

Hierin sind y_0, y_1, y_2 und y_3 die Koordinaten der Einzelschichtgrenzen entsprechend der Abbildung 2.4. Die Variable x verschwindet beim Auflösen des Gleichungssystems.

An den einzelnen Termen in der Gleichung (3.125) ist zu erkennen, dass bei konstanter Höhe das Längen-Höhen-Verhältnis keinen Einfluss auf die gesuchten Koeffizienten hat. So kann die Verteilung der Normalspannung σ_{xx} über die Laminathöhe mit einem Graphen, siehe Abbildung 3.15, für alle untersuchten Verhältnisse der Scheibenlänge zur Scheibenhöhe gezeigt werden.

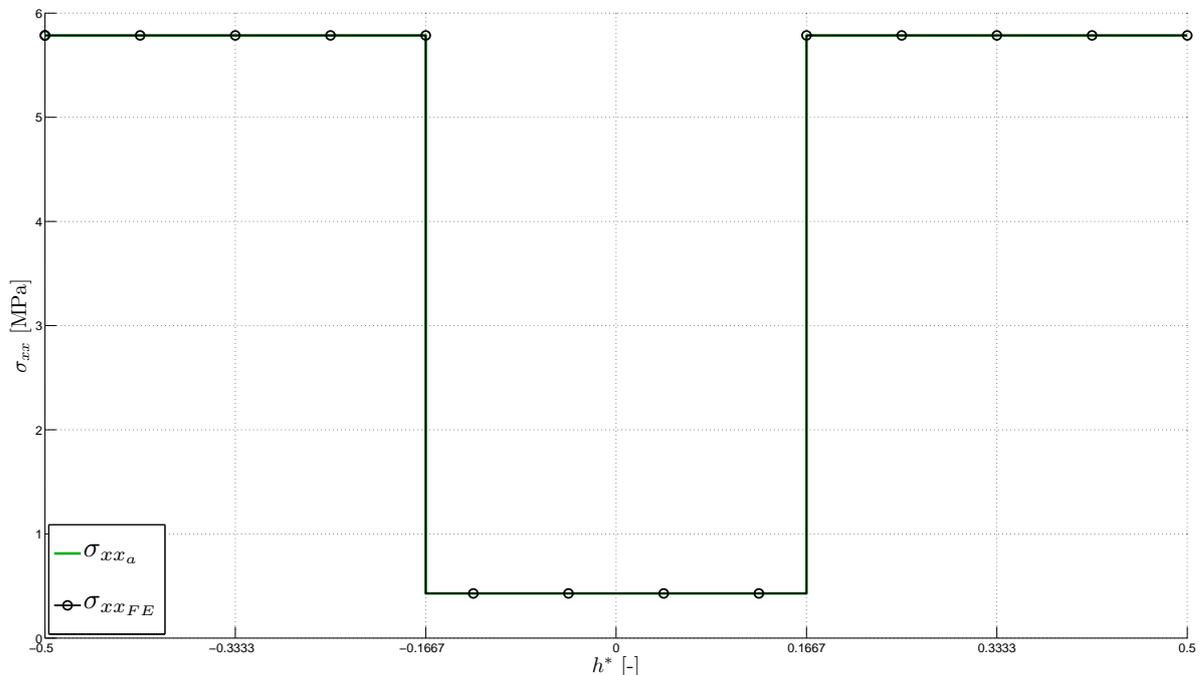


Abbildung 3.15: Spannungsverteilung im Laminat unter der Normalkraftbelastung

Die analytisch bestimmte Normalspannung σ_{xx} ist in der Abbildung 3.15 mit dem Index „a“ und die Referenzspannung aus der FE-Rechnung mit dem Index „FE“ gekennzeichnet. Die beiden Lösungen stimmen überein. An den Grenzen der Einzelschichten tritt der erwartete Sprung im

Spannungsverlauf aufgrund des Steifigkeitsunterschiedes zwischen den einzelnen Laminatschichten auf.

In der Abbildung 3.16 ist das analytisch bestimmte Verschiebungsfeld des Laminats im Vergleich zur FE-Lösung dargestellt. Die Verschiebung v ergibt sich aus der Querkontraktion des Laminats und ist bei konstanter Höhe für alle Verhältnisse von $\frac{l}{h}$ gleich. Sie wird an der Grenze zwischen zwei Laminatlagen betrachtet, denn so kann gleichzeitig die Stimmigkeit der analytischen Lösungen für die verschiedenen Schichten an gleicher Stelle überprüft werden. Der in der Abbildung 3.16a dargestellte Verlauf der Verschiebung v gilt für alle untersuchten Längen-Höhen-Verhältnisse. Die Verschiebung der beiden betrachteten Lagen des Beispiel-Laminats wird dabei mit der jeweiligen Nummer der Schicht indiziert.

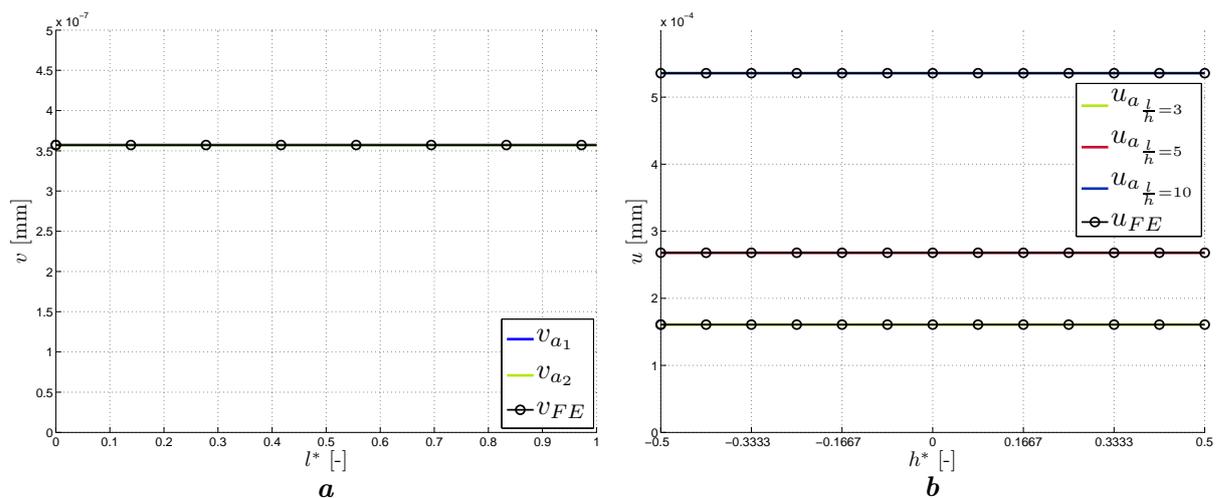


Abbildung 3.16: Analytisch bestimmtes Verschiebungsfeld des Laminats unter Normalkraftbelastung im Vergleich zur FE-Lösung
a Verschiebung v an der Grenze zwischen zwei Laminatschichten. **b** Verschiebung u in der Mitte des Laminats ($x = \frac{l}{2}$) für alle betrachteten Längen-Höhen-Verhältnisse.

Die Darstellung der Verschiebung u in der Abbildung 3.16b ist, wie auch bei der Betrachtung der orthotropen Scheibe unter der Normalkraftbelastung, absolut angegeben. Hier ist auch eine eindeutige Korrelation der Ergebnisse aus der analytischen und der FE-Rechnung feststellbar.

Beanspruchung durch die Querkraft Q

Für die analytische Bestimmung der Spannungs- und Verschiebungsfelder ist ein lineares Gleichungssystem aus insgesamt 15 Gleichungen zu lösen. Dabei sind die Kontinuitätsbedingungen für die beiden Verschiebungskomponenten zwischen den benachbarten Laminatlagen nur gemittelt erfüllbar (s. Gln. (3.102) und (3.103)). Die Lösung des Gleichungssystems erfolgt mit dem Berechnungsprogramm MATLAB. Die zugehörigen m-files sind der beigefügten CD-ROM zu entnehmen.

Die sich unter der Querkraftbelastung einstellenden Verteilungen der Normal- und Schubspannung werden an der Stelle $x = \frac{l}{2}$ betrachtet. In der Abbildung 3.17 ist die Verteilung der Normalspannung σ_{xx} über die Laminanthöhe für die untersuchten drei Längen-Höhen-Verhältnisse dargestellt. Für alle untersuchten Verhältnisse stimmt die analytische Lösung mit der FE-Lösung

überein.

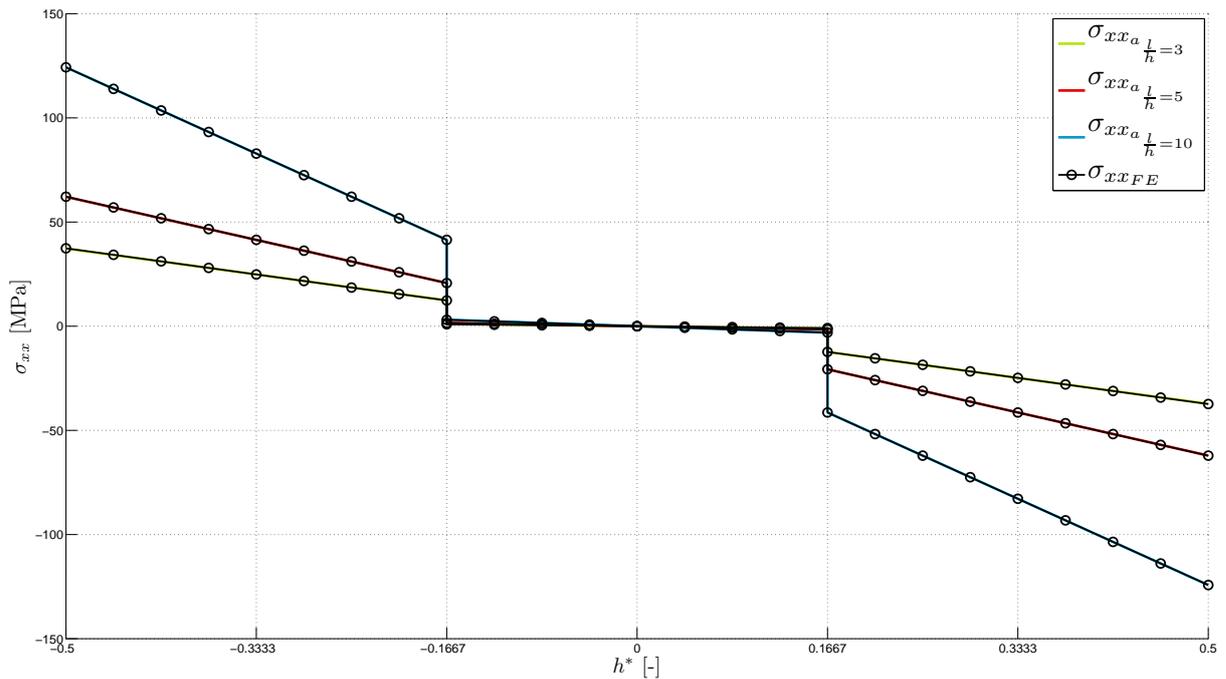


Abbildung 3.17: Vergleich der Normalspannungsverläufe im Laminat aus der analytischen und der FE-Rechnung bei Querkraftbelastung

Im Verlauf der Schubspannung, der in der Abbildung 3.18 dargestellt ist, kann für gedrungene Laminats eine Abweichung zwischen den Ergebnissen der analytischen und der FE-Rechnung festgestellt werden. Bei höheren Längen-Höhen-Verhältnissen ist diese Abweichung analog zum Verlauf der Schubspannung in der orthotropen Scheibe nicht mehr vorhanden. An den Rändern des Laminats und an den Schichtgrenzen kann der Verlauf der Schubspannung in der FE-Lösung nicht genau approximiert werden, daher sind Sprünge in den Verläufen aufgetreten. Mit der Verwendung einer höheren Anzahl an Elementen wird diese Abweichung zunehmend geringer.

Das Verschiebungsfeld des gedrungenen Laminats ist in der Abbildung 3.19 dargestellt. Der Verlauf der analytisch bestimmten Verschiebung u_a (s. Abbildung 3.19a) weist an den Schichtgrenzen Unstetigkeiten und relativ hohe Abweichungen vom kontinuierlichen Verlauf der FE-Lösung auf. Mit den im Abschnitt 3.3.2 definierten Randbedingungen wird jedoch der kontinuierliche Verlauf der Verschiebung u über die Laminathöhe nicht gefordert. Dieser Verlauf kann mit den Bedingungen

$$\left. \frac{du_{j-1}}{dy} \right|_{y=y_{j-1}} = \left. \frac{du_j}{dy} \right|_{y=y_{j-1}}, \quad j > 1 \quad (3.126)$$

und

$$u_j(x=0, y=0) = 0 \quad (3.127)$$

anstelle der Beziehung (3.99) erreicht werden. Die Beziehungen (3.126) und (3.127) werden in dieser Arbeit nicht weiter betrachtet, da die Festeinspannung im mathematischen Modell mit der Bedingung (3.99) besser erfüllt wird. An den Rändern des Laminats nähern sich die beiden Lösungen wieder an.

Die Verschiebung v wird wie auch bei der Untersuchung des Laminats unter der Zugbelastung an der Grenze zwischen zwei Laminatlagen verifiziert. Durch die Mittlung der Kontinuitäts-

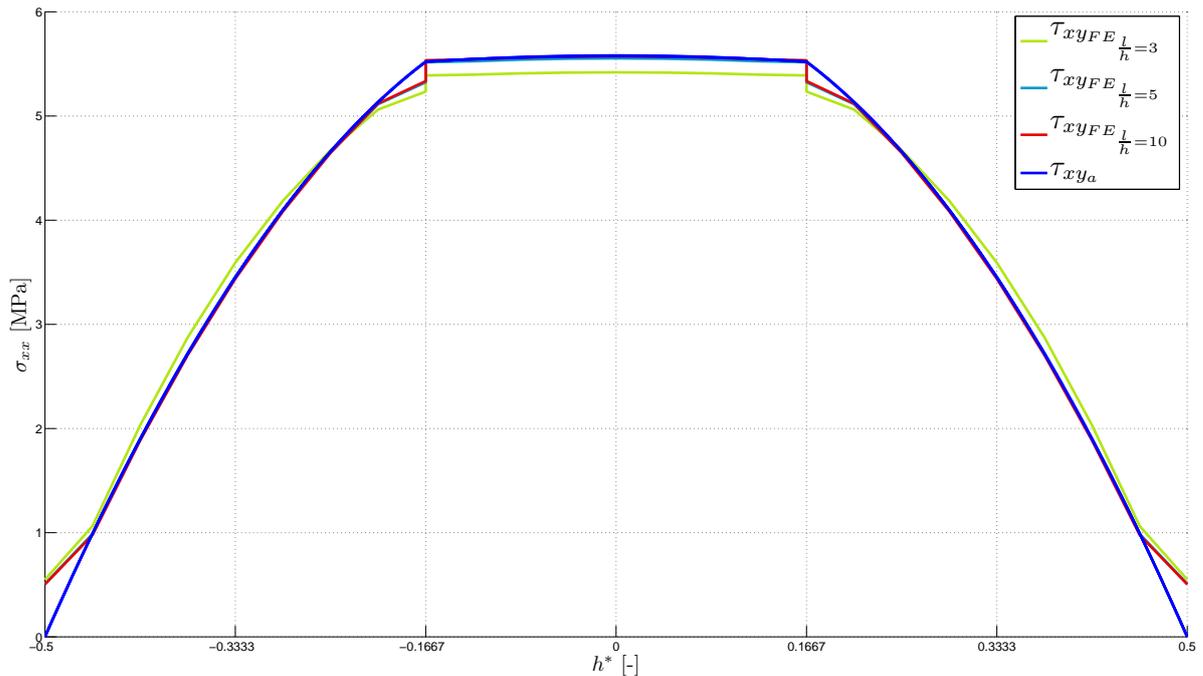


Abbildung 3.18: Vergleich der Schubspannungsverläufe im Laminat aus der analytischen und der FE-Rechnung bei Querkraftbelastung

bedingungen (s. Gl. (3.102) und (3.103)) für die Verschiebungen an den Schichtgrenzen über die Länge ergeben sich hier jedoch große Abweichungen. Die Verläufe der Verschiebungen aus den analytischen Lösungen für die beiden benachbarten Schichten weisen nicht nur einen Unterschied zur Referenz-Lösung aus der FE-Rechnung auf, sondern sind auch untereinander unterschiedlich (s. Abb. 3.19b).

Für die beiden höheren untersuchten Verhältnisse der Länge zur Höhe konvergieren die Verläufe der analytisch bestimmten Verschiebungskomponenten gegen den Verlauf beider Verschiebungskomponenten aus der FE-Lösung. Bei dem Verhältniss $\frac{l}{h} = 10$ (s. Abb. 3.21) beträgt die maximale Abweichung der Verschiebung v am freien Rand des Laminats weniger als fünf Prozent. Dies ist in den Abbildungen 3.20 und 3.21 deutlich zu erkennen.

Die Spannungsverläufe aus der analytischen Lösung weisen eine sehr gute Korrelation der Ergebnisse mit der FE-Lösung für alle untersuchten Längen-Höhen-Verhältnisse des Laminats auf. Die Verschiebungskomponenten können aufgrund der über die Laminatlänge gemittelten Kontinuitätsbedingungen an den Schichtgrenzen nur bei hohen Verhältnissen der Laminatlänge zur Laminathöhe mit hinreichender Genauigkeit berechnet werden.

Beanspruchung durch das Randmoment M_0

Die im Abschnitt 3.3.3 hergeleiteten Gleichungen zur Bestimmung der Spannungs- und Verschiebungsfelder in einem durch ein Randmoment beanspruchten Laminat werden nun verifiziert. Das zu lösende Gleichungssystem besteht dabei aus 12 Gleichungen. Die Kontinuitätsbedingungen für die Verschiebungskomponenten an den Schichtgrenzen können hier ebenfalls nur über die Laminatlänge gemittelt erfüllt werden (s. Abschnitt 3.3.3). In der Abbildung 3.22 ist der Vergleich der Verläufe der analytisch und numerisch bestimmten Normalspannungen für die untersuchten Längen-Höhen-Verhältnisse dargestellt.

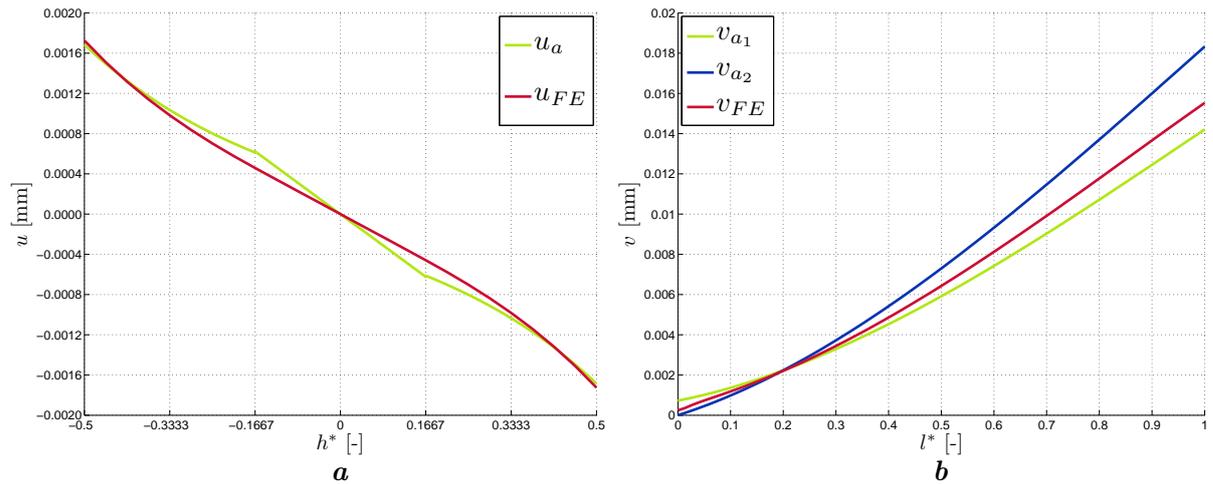


Abbildung 3.19: Analytisch bestimmtes Verschiebungsfeld des Laminats mit $\frac{l}{h} = 3$ unter Querkraftbelastung im Vergleich zur FE-Lösung
a Verschiebung u bei $x = \frac{l}{2}$, **b** Verschiebung v an der Schichtgrenze.

Die Übereinstimmung dieser Verläufe ist deutlich. Der Sprung im Verlauf der Normalspannung tritt wie erwartet an den Schichtgrenzen auf. Die analytisch bestimmten Verschiebungskomponenten für alle betrachteten Längen-Höhen-Verhältnisse des Laminats stimmen ebenfalls mit den Ergebnissen aus der FE-Rechnung überein. Die Mittlung der Kontinuitätsbedingungen für die Verschiebungskomponenten an den Schichtgrenzen des Laminats hat hier keinen negativen Einfluss auf das Verschiebungsfeld.

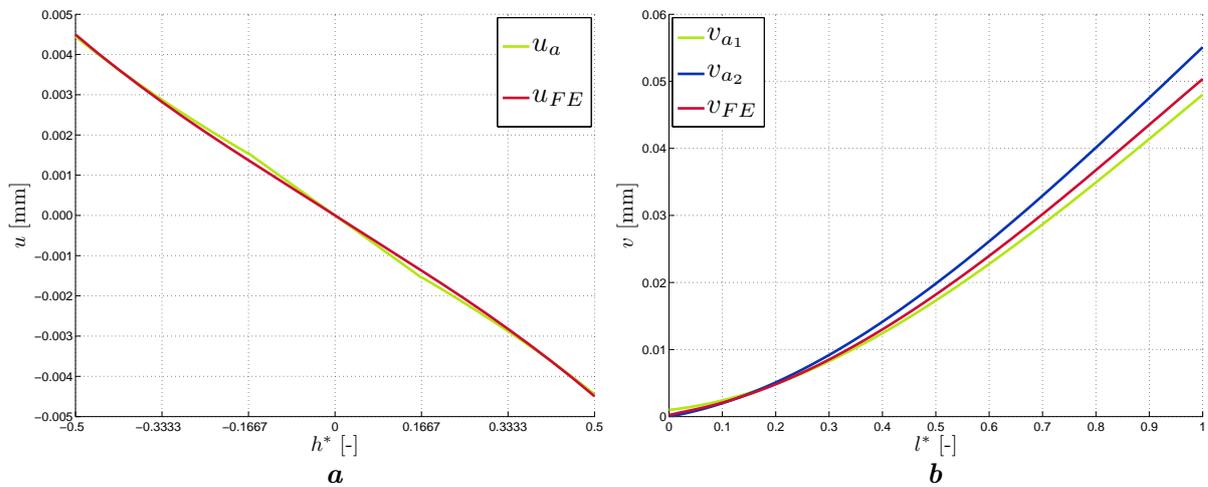


Abbildung 3.20: Analytisch bestimmtes Verschiebungsfeld des Laminats mit $\frac{l}{h} = 5$ unter Querkraftbelastung im Vergleich zur FE-Lösung
a Verschiebung u bei $x = \frac{l}{2}$, **b** Verschiebung v an der Schichtgrenze.

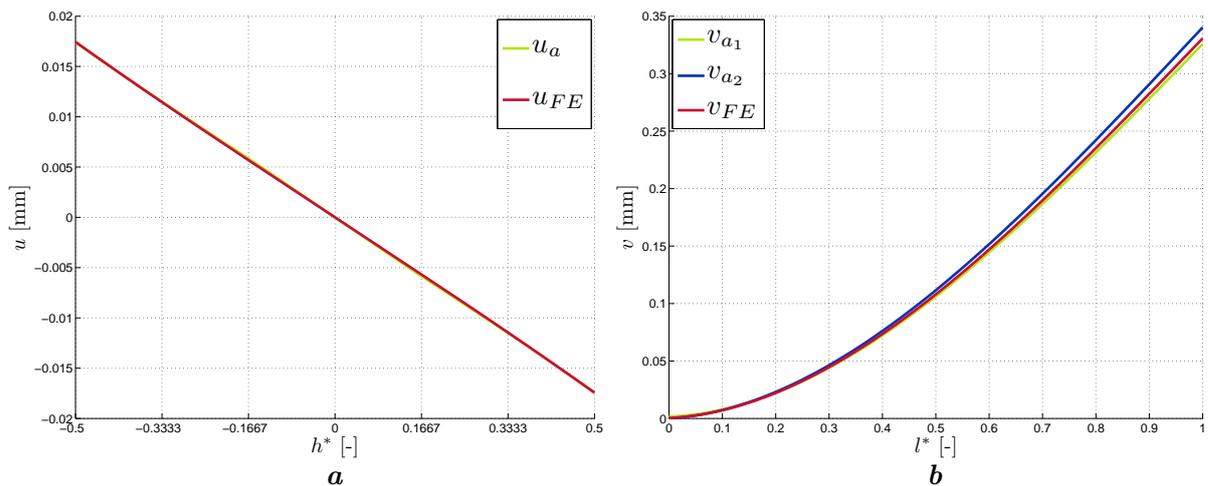


Abbildung 3.21: Analytisch bestimmtes Verschiebungsfeld des Laminats mit $\frac{l}{h} = 10$ unter Querkraftbelastung im Vergleich zur FE-Lösung
a Verschiebung u bei $x = \frac{l}{2}$, **b** Verschiebung v an der Schichtgrenze.

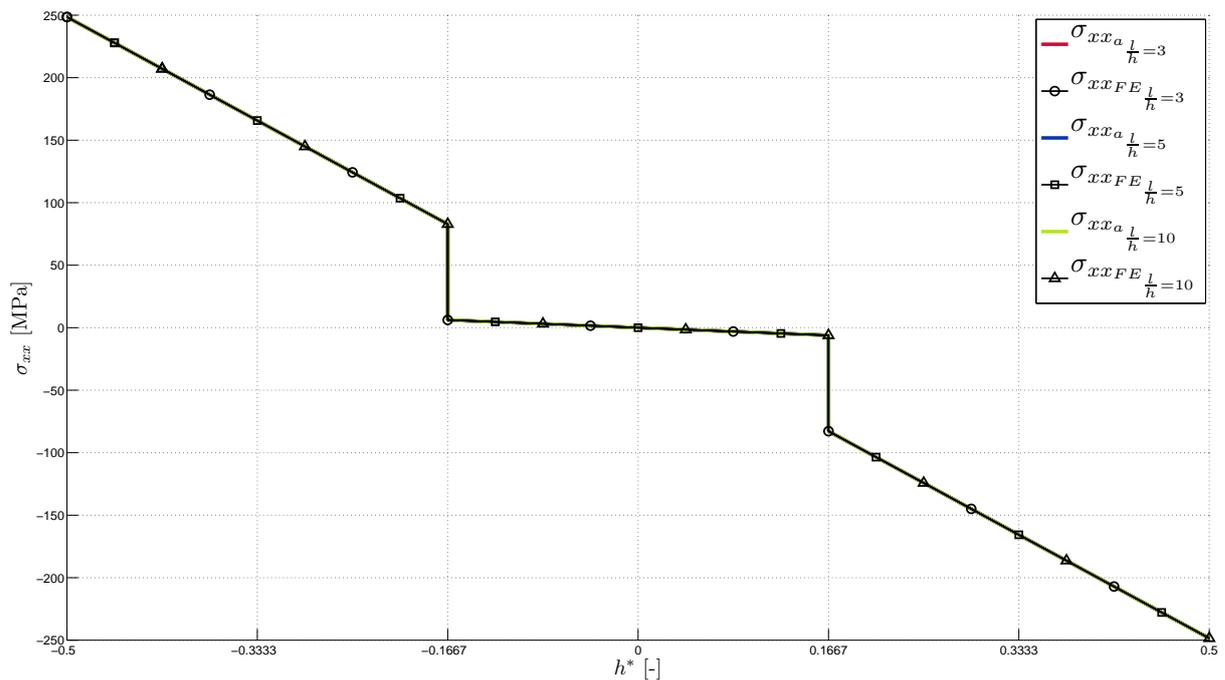


Abbildung 3.22: Vergleich der Normalspannungsverläufe im Laminat aus der analytischen und der FE-Rechnung bei Biegemomentenbelastung

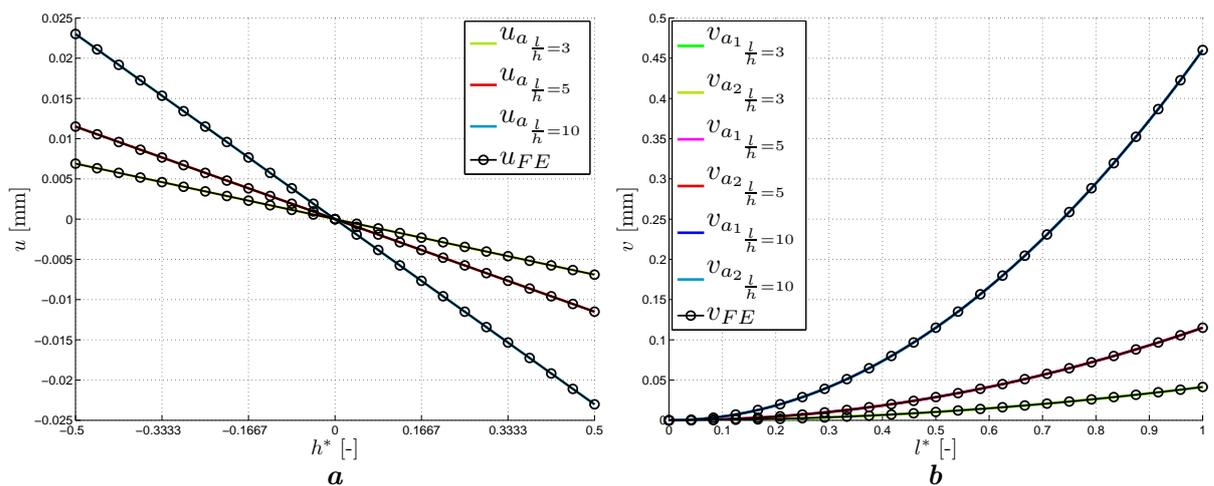


Abbildung 3.23: Vergleich der Verschiebungskomponenten aus den analytischen Lösungen für die Längen-Höhen-Verhältnisse von $\frac{l}{h} = 3$, $\frac{l}{h} = 5$, $\frac{l}{h} = 10$ des Laminats unter Biegemomentenbelastung mit den Ergebnissen der FE-Rechnung.

a Querschnittsneigung in der Mitte des Laminats. **b** Verschiebung v an den Schichtgrenzen.

4. Parameterstudie

In diesem Abschnitt soll die Auswirkung verschiedener Parameter auf die Spannungs- und Verschiebungsfelder in einer geraden balkenartigen Scheibe, die sich unter den elementaren Belastungsarten einstellen, untersucht werden. Dabei werden die geometrischen und die Materialparameter betrachtet.

4.1. Geometrische Parameter

4.1.1. Einfluss des Geometrieparameters auf das Spannungs- und Verschiebungsfeld einer orthotropen Scheibe

Für die Untersuchung des Einflusses von Geometrieparametern auf die Spannungs- und Verschiebungskomponenten der Scheibe werden die gleichen Werkstoffparameter wie bei der Verifizierung der Ergebnisse im Abschnitt 3.4 herangezogen (s. Tabelle 3.1). Die angebrachten Lasten entsprechen ebenfalls denen aus dem Abschnitt 3.4

Als geometrische Einflussgröße auf die Spannungsverteilung und Verformung der Scheibe wird nun der Schlankheitsgrad λ untersucht. In der klassischen Festigkeitslehre ist er wie folgt definiert:

$$\lambda = \frac{l}{i} \quad (4.1)$$

Wobei i der aus der Festigkeitslehre bekannte Trägheitsradius ist, der im Koordinatensystem der Scheibe wie folgt angegeben werden kann

$$i = \sqrt{\frac{I_z}{th}} \quad (4.2)$$

Da die Scheibe einen rechteckigen Querschnitt hat, kann i nach einer kleinen Umformung auch als

$$i = \frac{h}{\sqrt{12}} \quad (4.3)$$

angeschrieben werden.

Für die Untersuchung der Auswirkungen des Schlankheitsgrades auf die Spannungs- und Verschiebungsfelder müssen die im Abschnitt ... hergeleiteten Beziehungen entsprechend umgestellt werden. Die Spannungs- und Verschiebungsfelder werden dabei auf die dimensionslosen Einheitslänge oder -höhe der Scheibe normiert.

Um die Vorstellung der Auswirkung vom Parameter λ auf die Geometrie der Scheibe einfacher zu gestalten, werden in dieser Arbeit ganzzahlige Verhältnisse der Scheibenlänge zu ihrer Höhe betrachtet. Dabei beschränkt sich die Betrachtung auf die Verhältnisse von $\frac{l}{h} = 1$ bis $\frac{l}{h} = 10$. Die Umrechnung des Längen-Höhen-Verhältnisses $\frac{l}{h}$ auf λ erfolgt für rechteckige Querschnitte mit der Gleichung (4.4).

$$\lambda = \sqrt{12} \cdot \frac{l}{h} \quad (4.4)$$

Die umgerechneten Längen-Höhen-Verhältnisse werden in der Tabelle 4.1 auf drei Nachkommastellen gerundet angegeben.

Tabelle 4.1: Umrechnung des Längen-Höhen-Verhältnisses $\frac{l}{h}$ der Scheibe auf den Parameter λ

$\frac{l}{h}$	$\lambda = \sqrt{12} \cdot \frac{l}{h}$
1	3,464
2	6,928
3	10,392
4	13,856
5	17,321
6	20,785
7	24,249
8	27,713
9	31,177
10	34,641

Grundsätzlich gibt es zwei einfache Möglichkeiten, den Schlankheitsgrad λ einer rechteckigen Scheibe zu variieren. Entweder lässt man die Scheibenhöhe h konstant und verändert die Scheibenlänge l , oder man variiert die Scheibenhöhe h bei konstant gehaltener Länge der Scheibe l . Bei der Durchführung dieser Parameterstudie hat es sich jedoch als geschickter herausgestellt, die Dimension der Scheibe (Länge oder Höhe) konstant zu lassen, über die auch die betrachtete unabhängige Variable deklariert wird. Somit wird bei der Betrachtung der Verläufe der Normal- und ggf. Schubspannungen sowie der Normalverschiebung der Scheibe $u(x, y)$ die Scheibenhöhe h konstant gehalten. Bei der Betrachtung der Verschiebung $v(x, y)$ ist die Scheibenlänge l konstant. Damit wird sichergestellt, dass man die Veränderung der jeweiligen Größen absolut über die jeweilige Koordinate betrachtet.

Die Auswirkung vom steigendem Schlankheitsgrad λ auf das Spannungsfeld der Scheibe wird an der Stelle $x = \frac{l}{2}$ untersucht. Die Analyse der Verschiebung $u(x, y)$ wird für alle Lastfälle ebenfalls an der Stelle $x = \frac{l}{2}$ durchgeführt. Die Untersuchung der Verschiebung $v(x, y)$ erfolgt anhand der Verschiebung der neutralen Achse der Scheibe (also bei $y = 0$).

Auswirkung vom Parameter λ bei Normalkraftbelastung

Unter der Normalkraftbelastung wird das Spannungsfeld der geraden, balkenartigen Scheibe von der Normalspannung σ_{xx} gebildet. Diese ist konstant über den Querschnitt und ist bei variierender Scheibenlänge und konstanter -höhe vom Parameter λ unabhängig.

Die Verschiebung $u(x, y)$ zeigt eine lineare Abhängigkeit von dem Schlankheitsgrad der Scheibe. Dies ist auch in der Abbildung 4.1 für die beispielhafte Belastung $N = 10 \text{ N}$ und Scheibenhöhe $h = 2,5 \text{ mm}$ zu sehen. Das Erhöhen des Längen-Höhen-Verhältnis der Scheibe um das Zehnfache führt zu einer zehnfach höheren Verschiebung $u(x, y)$, wobei sie konstant über den Querschnitt der Scheibe für alle Schlankheitsgrade ist. Die umgestellte Verschiebungsfunktion $u(x, y)$ an der Stelle $x = \frac{l}{2}$ sieht wie folgt aus:

$$u(x, y) = \frac{N}{4\sqrt{3}E_x t} \lambda \quad (4.5)$$

Die Verschiebung $v(x, y)$ ist an der neutralen Achse der Scheibe für alle Verhältnisse der

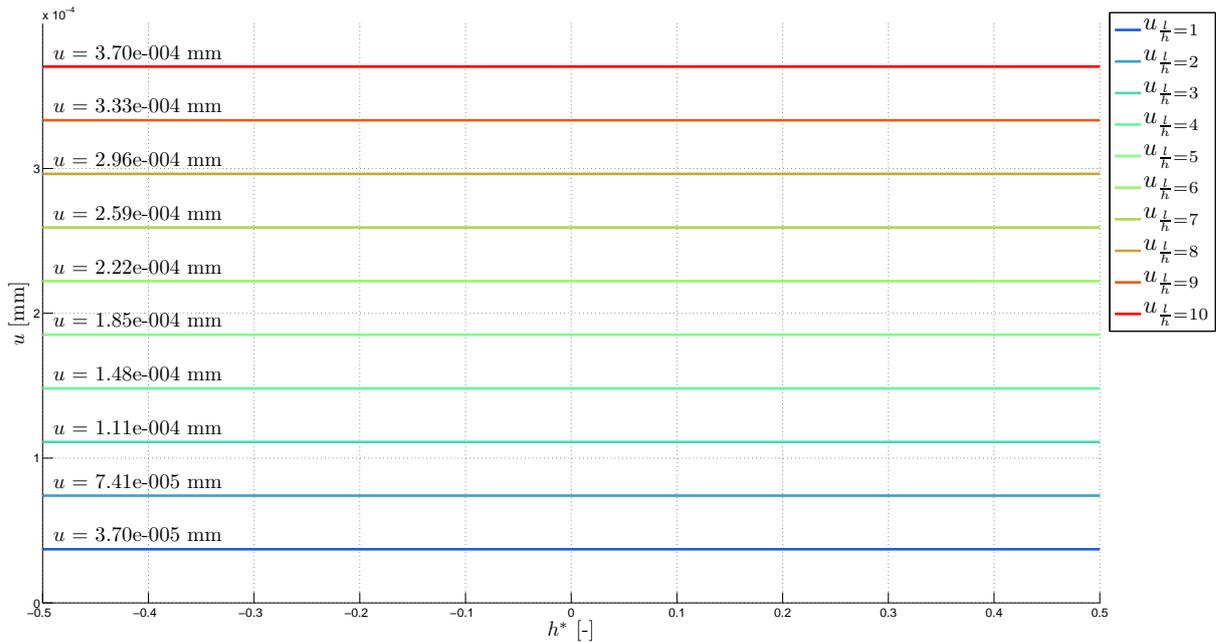


Abbildung 4.1: Einfluss von λ auf die Verschiebung u bei Normalkraftbelastung

Scheibenlänge zu ihrer Höhe bei der Belastung mit einer Normalkraft gleich Null. Die Querkontraktion ist über die Scheibenlänge konstant und hängt ebenfalls nicht von λ ab.

Auswirkung vom Parameter λ bei Querkraftbelastung

Bei der Belastung der Scheibe mit einer Querkraft (so wie es in der Abb. 3.2 gezeigt wird) zeigt in dem sich ausbildenden Spannungsfeld nur die Normalspannung σ_{xx} eine Abhängigkeit vom Parameter λ . Die Schubspannung τ_{xy} ist bei konstanter Scheibenhöhe h von λ unabhängig. Die Normalspannung σ_{xx} ist an der Stelle $x = \frac{l}{2}$:

$$\sigma_{xx} = -\frac{Q}{2I}ly \tag{4.6}$$

Nach der Umstellung mit Hilfe der Gleichungen (4.1) und (4.3) sowie der Normierung über die Scheibenhöhe mit $y = ah$, $-0,5 \leq a \leq 0,5$ kann man die Gleichung (4.6) wie folgt angeben.

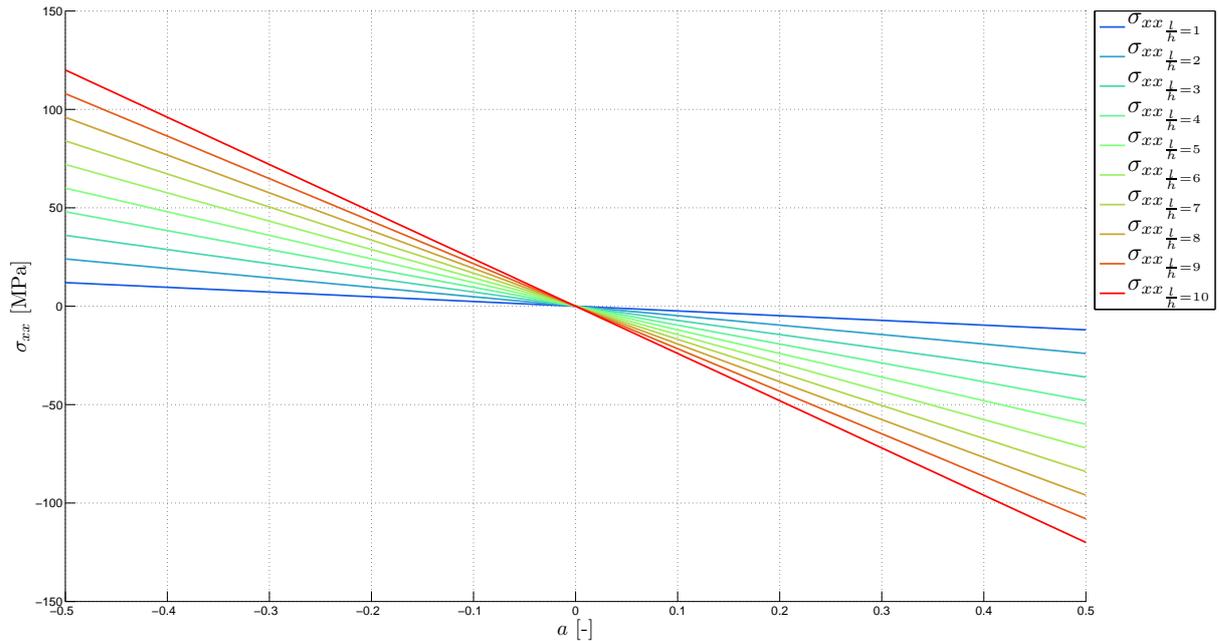
$$\sigma_{xx} = -\frac{\sqrt{12}Q}{2ht} \lambda a = -\frac{\sqrt{3}Q}{ht} \lambda a \tag{4.7}$$

Man erkennt einen linearen Verlauf der Normalspannung σ_{xx} über den Querschnitt der Scheibe und eine ebenfalls lineare Abhängigkeit vom Parameter λ . Dies wird auch in der Abbildung 4.2 dargestellt.

Die lineare Abhängigkeit der Normalspannung σ_{xx} vom Parameter λ ist in der Abbildung 4.2 an der konstanten Winkeldifferenz zwischen benachbarten Graphen erkennbar.

Der Schlankheitsgrad λ hat keinen Einfluss auf die Schubspannung τ_{xy} , die für alle Längen-Höhen-Verhältnisse der Scheibe den gleichen parabelförmigen Verlauf aufweist.

Die Untersuchung der Auswirkung vom Schlankheitsgrad der Scheibe auf die Normalverschiebung $u(x, y)$ über den Querschnitt der Scheibe wird ebenfalls bei der halben Scheibenlänge durchgeführt. Die Gleichung für die Verschiebung lautet dabei:


 Abbildung 4.2: Einfluss von λ auf die Normalspannung σ_{xx} bei Querkraftbelastung

$$u\left(x = \frac{l}{2}, y\right) = -\frac{3Ql^2}{8E_x I_z} y + \frac{\nu_{xy} Q}{6E_x I_z} y^3 - \frac{k^2 Q}{6E_x I_z} y^3 \quad (4.8)$$

Für die Bestimmung der Abhängigkeit von λ wird diese mit Zuhilfenahme der Beziehungen (4.1) und (4.3) umgestellt und über den Querschnitt normiert. Die Gleichung (4.9) gibt die Normalverschiebung in Abhängigkeit von λ und einer dimensionslosen Variablen a ($-0,5 \leq a \leq 0,5$) an.

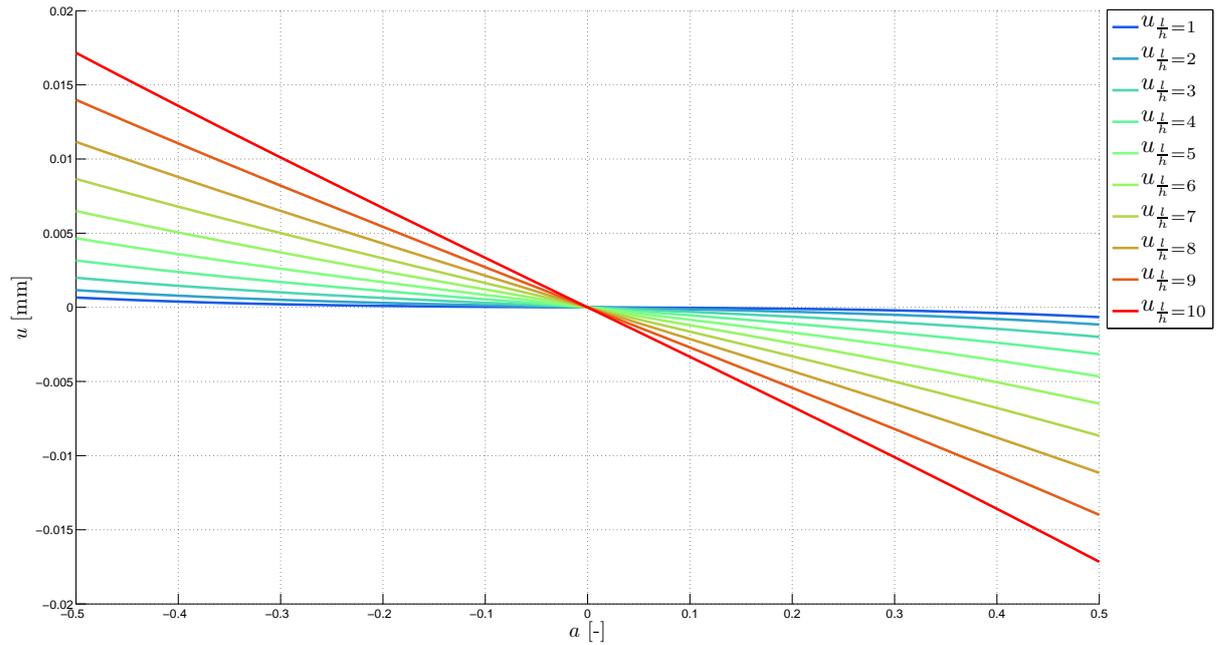
$$u = -\frac{3Q}{8E_x t} \lambda^2 a + \frac{2\nu_{xy} Q}{E_x t} a^3 - \frac{2k^2 Q}{E_x t} a^3 \quad (4.9)$$

Der Abbildung 4.3 kann man den Verlauf der Normalverschiebung u über den Querschnitt der Scheibe an der Stelle $x = \frac{l}{2}$ entnehmen.

Man sieht nicht nur, dass der Verlauf der Normalverschiebung über dem Querschnitt der Scheibe mit steigendem λ steiler wird, sondern auch, dass er sich dabei dem linearen Verlauf der Normalverschiebung aus der Balkentheorie immer weiter annähert. Der so genannte S-Schlag in der Normalverschiebung der gedrunenen Scheiben ($\lambda \leq 17,321$) ist in der Abbildung 4.3 aufgrund der relativ kleinen Verschiebungen nicht ausgeprägt darstellbar. Wenn man jedoch die ersten drei Längen-Höhen-Verhältnisse in der Abbildung 4.4 gesondert betrachtet, ist die Nichtlinearität des Verlaufs der Normalverschiebung über den Querschnitt eindeutig zu erkennen.

Mit der Normierung der maximalen Verschiebung der Scheibe an den Rändern auf den Betrag 1, wie es in der Abbildung 4.5 gezeigt wird, erkennt man mit steigendem Schlankheitsgrad λ eine eindeutige Konvergenz des Verlaufs der Normalverschiebung $u(x, y)$ der Scheibe gegen den linearen Verlauf der Querschnittsverschiebung des Bernoulli-Euler-Balkens.

Die Verschiebung v quer zur Längsachse wird hier an der neutralen Achse der Scheibe betrachtet. Für die Verschiebungsfunktion bedeutet dies, dass y zu Null wird. Somit lautet die Gleichung 3.43 für die neutrale Achse:


 Abbildung 4.3: Einfluss von λ auf die Normalverschiebung u bei Querkraftbelastung

$$v(x, y = 0) = \frac{k^2 Q h^2}{8 E_x I_z} x + \frac{Q l}{2 E_x I_z} x^2 - \frac{Q}{6 E_x I_z} x^3 \quad (4.10)$$

Nach der gleichen Umformung wie oben erhält man für die Verschiebung v

$$v = \frac{\sqrt{3} k^2 Q}{4 E_x t} \lambda a + \frac{Q}{4 \sqrt{3} E_x t} \lambda^3 a^2 - \frac{Q}{12 \sqrt{3} E_x t} \lambda^3 a^3 \quad (4.11)$$

mit der Variablen $a = \frac{x}{l} \Rightarrow 0 \leq a \leq 1$. Die Veränderung der Verschiebung v mit dem steigenden Schlankheitsgrad λ ist in der Abbildung 4.6 dargestellt. Darin ist die mit dem steigendem Schlankheitsgrad abnehmende Steifigkeit der Scheibe (wie erwartet) an der zunehmenden Verschiebung der neutralen Achse erkennbar. Bei konstant gehaltener Länge der Scheibe kann dies dem abnehmenden Flächenträgheitsmoment der Scheibe erklärt werden. Bei konstant gehaltener Scheibenhöhe bleibt das Flächenträgheitsmoment zwar konstant, jedoch wird die Belastung an der betrachteten Stelle mit dem wachsenden Abstand zur am freien Rand der Scheibe angreifenden Kraft höher. Somit ist der gleiche Effekt zu beobachten.

Der Einfluss des Schubes auf die Verschiebung der Scheibe v äußert sich durch die Neigung der Biegelinie der Scheibe an der Einspannung. Laut [6] kann er ab einem Verhältnis von Scheibenhöhe zu Scheibenhöhe von fünf vernachlässigt werden, für gedrungene Scheiben jedoch nicht. Dies ist auch in der Abbildung 4.7 mit den Biegelinien der gedrungenen Scheiben zu sehen.

Wenn man den Verlauf der Verschiebungen v in der Abbildung 4.6 mit dem steigenden Parameter λ ebenfalls über die maximale Verschiebung am freien Rand der Scheibe normiert (s. Abbildung 4.8), erkennt man, dass der Verlauf der Verschiebung v über die Scheibenhöhe l mit dem steigenden λ gegen den ebenfalls normierten Verlauf der Biegelinie eines Bernoulli-Euler-Balkens konvergiert.

Bei der Bestimmung des Verschiebungsfeldes in einer geraden balkenartigen Scheibe unter der Querkraftbelastung mit der Randbedingung (3.44) ergeben sich andere Verschiebungsfunktio-

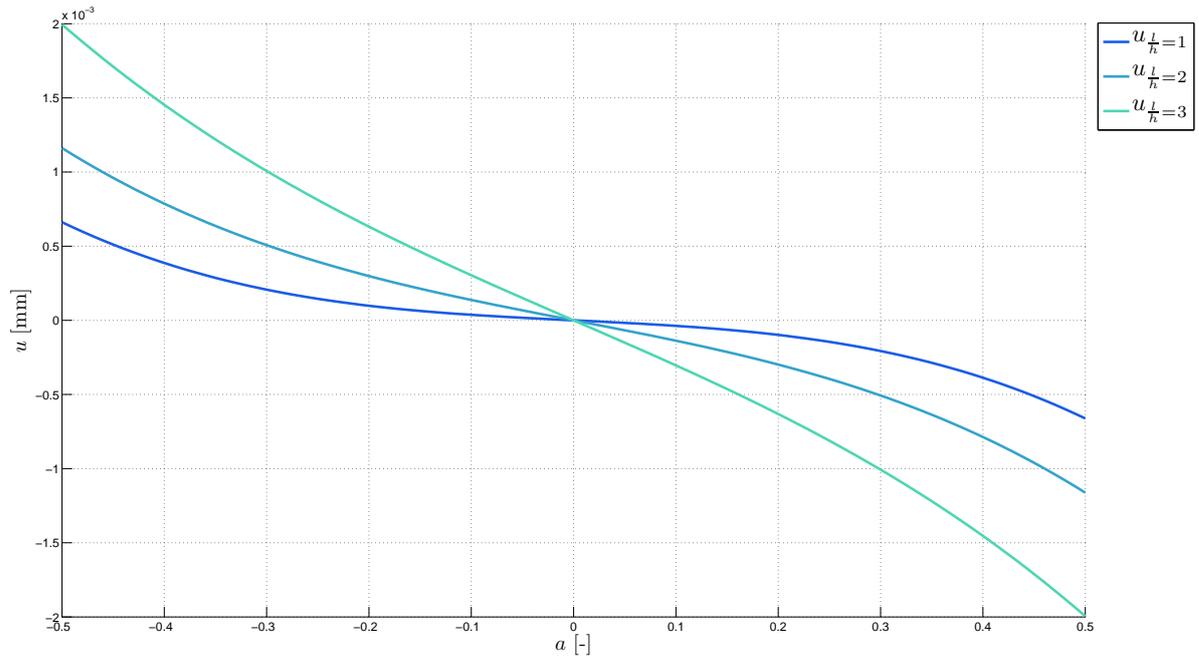


Abbildung 4.4: S-Schlag in der Normalverschiebung u der gedrunghenen Scheiben bei Querkraftbelastung

nen (s. Gl. (3.46) und (3.47)). Diese sind bei der Verifizierung der Ergebnisse im Abschnitt 3.4 bereits verworfen worden. Bei der Durchführung dieser Parameterstudie werden sie jedoch noch einmal betrachtet, um einen interessanten Effekt aufzuzeigen. Dazu wird als Erstes die Normalverschiebung u aus beiden Randbedingungen (3.40) und (3.44) an der Einspannung der Scheibe betrachtet. Um eine mögliche Verwirrung bei der Bezeichnung zu vermeiden, erhalten die beiden Verschiebungsfunktionen in dieser Betrachtung die Indices 1 und 2.

Die Verschiebungen u_1 und u_2 an der Stelle $x = 0$ können wie folgt angegeben werden:

$$u_1(x = 0, y) = -\frac{k^2 Q}{6E_x I_z} y^3 + \frac{\nu_{xy} Q}{6E_x I_z} y^3 \quad (4.12)$$

$$u_2(x = 0, y) = \frac{k^2 Q h^2}{8E_x I_z} y + \frac{\nu_{xy} Q}{6E_x I_z} y^3 - \frac{k^2 Q}{6E_x I_z} y^3 \quad (4.13)$$

Analog zur Gleichung (4.8) können diese umgeformt werden:

$$u_1 = \frac{2Q}{E_x t} a^3 (\nu_{xy} - k^2) \quad (4.14)$$

$$u_2 = \frac{3k^2 Q}{2E_x t} a + \frac{2Q}{E_x t} a^3 (\nu_{xy} - k^2) \quad (4.15)$$

Mit den Gleichungen (4.14) und (4.15) stellt man fest, dass die beiden Normalverschiebungen u_1 und u_2 an der Einspannung der Scheibe unabhängig vom Schlankheitsgrad der Scheibe λ sind. Der einzige Unterschied zwischen den beiden Verschiebungen ist der Term $\frac{k^2 Q h^2}{8E_x I_z} y$ in der Gleichung (4.13) bzw. $\frac{3k^2 Q}{2E_x t} a$ in der Gleichung (4.15). Dieser Term bewirkt eine Drehung der Verschiebungsfunktion u_2 im Ursprung des Koordinatensystems der Scheibe um einen Winkel α gegenüber der Normalverschiebung u_1 . Dies ist in der Abbildung 4.9 dargestellt.

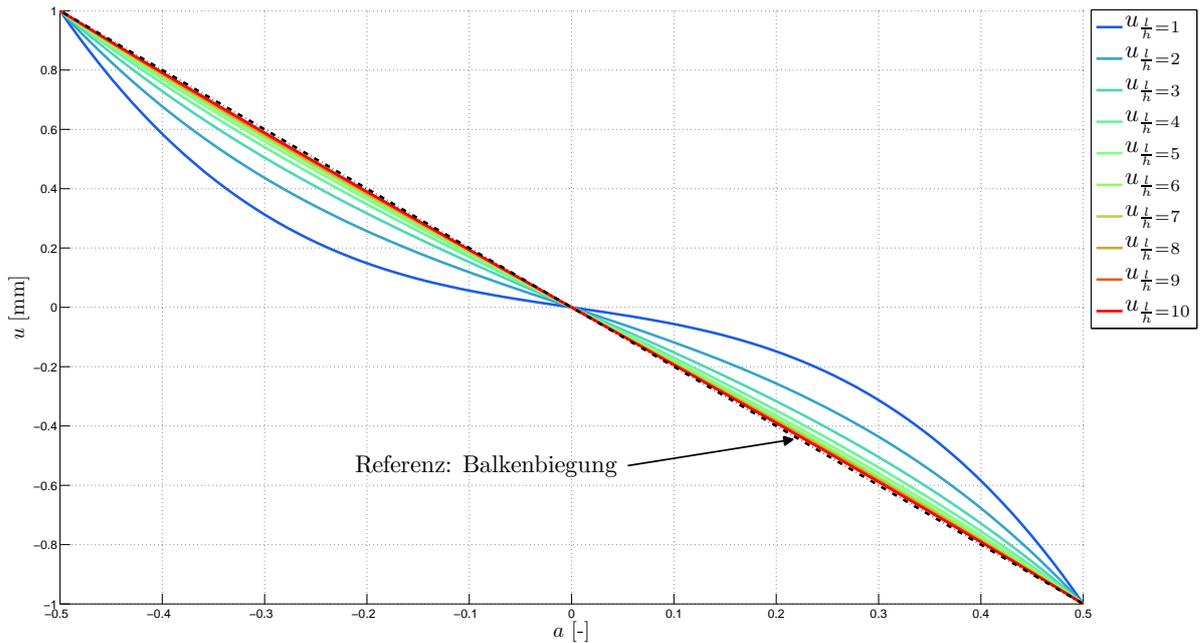


Abbildung 4.5: Konvergenz der Normalverschiebung u gegen die Querschnittsverschiebung in der Balkentheorie

Der Winkel α kann wie folgt angegeben werden:

$$\alpha = \arctan \left(\frac{3k^2 Q}{2E_x t} \right) \approx \frac{3k^2 Q}{2E_x t} \quad (4.16)$$

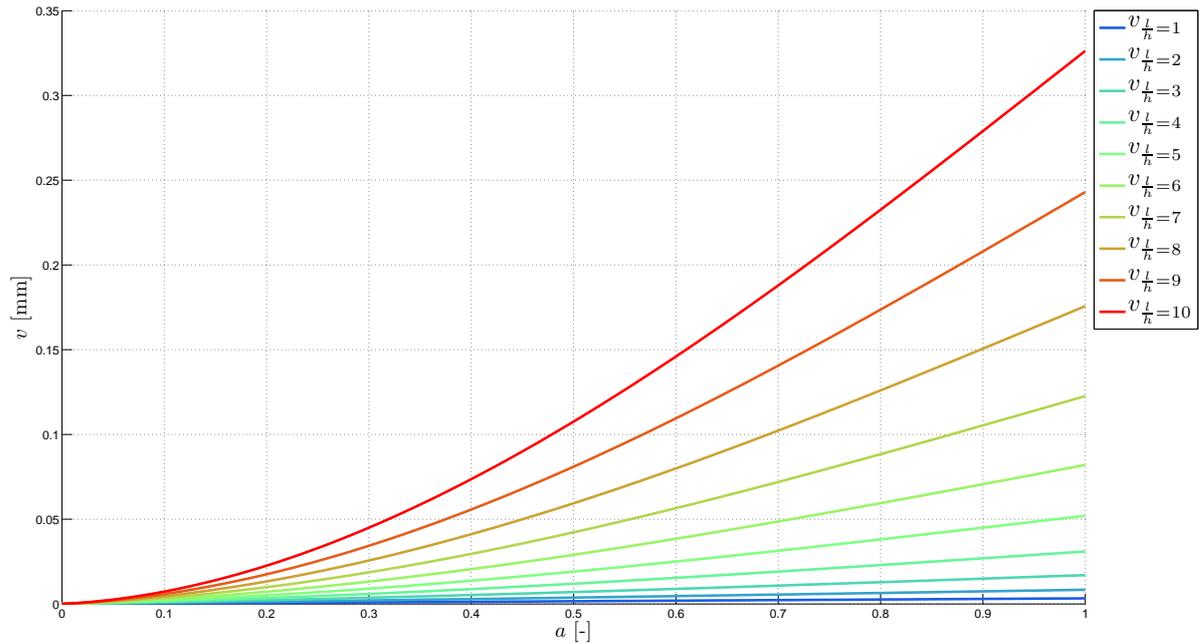
Im Verschiebungsfeld, das mit der Randbedingung (3.40) bestimmt wird, ist der Koeffizient $\frac{k^2 Q h^2}{8E_x I_z}$ in der Verschiebungsfunktion $v(x, y)$ anzutreffen (s. Gl. (4.10)). Dieser bewirkt die Neigung der Verschiebungsfunktion $v(x, y)$ für die neutrale Achse der Scheibe an der Einspannung (s. Abb. 4.7), die sich infolge des Schubes einstellt. Die Verschiebungsfunktion $v(x, y)$ weist jedoch eine Abhängigkeit vom Schlankheitsgrad der Scheibe λ auf (s. Gl. (4.11)). Aus der Gleichung (4.11) kann man aber herleiten, dass für eine quadratische Scheibe ($\frac{l}{h} = 1$) der Neigungswinkel der neutralen Achse an der Einspannung dem Winkel α entspricht. Für jedes höhere Längen-Höhen-Verhältnis der Scheibe ergibt sich der Neigungswinkel der neutralen Achse gemäß der Gleichung (4.17).

$$\alpha_i = \left(\frac{l}{h} \right)_i \alpha \quad (4.17)$$

Nun betrachten wir die Funktion für die Verschiebung $v(x, y)$, die aus der Randbedingung (3.44) hergeleitet wird. Wie auch die Funktion für die Normalverschiebung u_2 wird sie mit dem Index 2 versehen. An der neutralen Achse der Scheibe kann diese dann wie folgt angeschrieben werden:

$$v_2(x, y = 0) = \frac{Ql}{2E_x I_z} x^2 - \frac{Q}{6E_x I_z} x^3 = \frac{Q}{6E_x I_z} x^2 (3l - x) \quad (4.18)$$

Nach der Umstellung mit den Gleichungen (4.1) bis (4.3) erhält man:


 Abbildung 4.6: Einfluss von λ auf die Verschiebung v bei Querkraftbelastung

$$v_2 = \frac{Q}{12\sqrt{3}E_x t} \lambda^3 a^2 (3 - a) \quad (4.19)$$

Die Verschiebungsfunktion v_2 weist gemäß der Randbedingung (3.44) keinen Neigungswinkel der neutralen Achse an der Enspannung der Scheibe auf. Somit ergibt der naheliegende Vergleich dieser Verschiebungsfunktion mit der Biegelinie eines Bernoulli-Euler-Balkens v_B , der am freien Rand mit einer Querkraft Q belastet wird (s. Gl. (4.20)), eine vollständige Übereinstimmung der Funktionsverläufe für alle Schlankheitsgrade λ .

$$v_B(x) = \frac{Ql^3}{6E_x I_z} \left(-\frac{x^3}{l^3} + \frac{3x^2}{l^2} \right) \quad (4.20)$$

In Abhängigkeit vom Parameter λ kann die Gleichung (4.20) wie folgt angegeben werden:

$$v_B = \frac{Q}{12\sqrt{3}E_x t} \lambda^3 a^2 (3 - a) \quad (4.21)$$

In der Abbildung 4.10 wird die Verschiebung v_2 für die Längen-Höhen-Verhältnisse $\frac{l}{h} = 1$ bis $\frac{l}{h} = 10$ zusammen mit den Biegelinien der entsprechenden Balken dargestellt.

Auswirkung vom Parameter λ bei Momentenbelastung

Das Spannungsfeld bei der „reinen“ Biegung, wie es in der Abbildung 3.3 dargestellt ist, wird durch die Normalspannung σ_{xx} gebildet. Diese ist über die Scheibenlänge l konstant. Die Umstellung der Beziehung für σ_{xx} (s. Gl. (3.48)) mit den Gleichungen (4.1) bis (4.4) zeigt, dass diese bei konstanter Scheibenhöhe h und variierender Scheibenlänge l nicht vom Schlankheitsgrad der Scheibe λ abhängig ist. Die Gleichung (4.22) gibt die umgestellte und über die Scheibenhöhe normierte Beziehung für die Normalspannung σ_{xx} bei der Belastung der Scheibe mit einem Randmoment wieder.

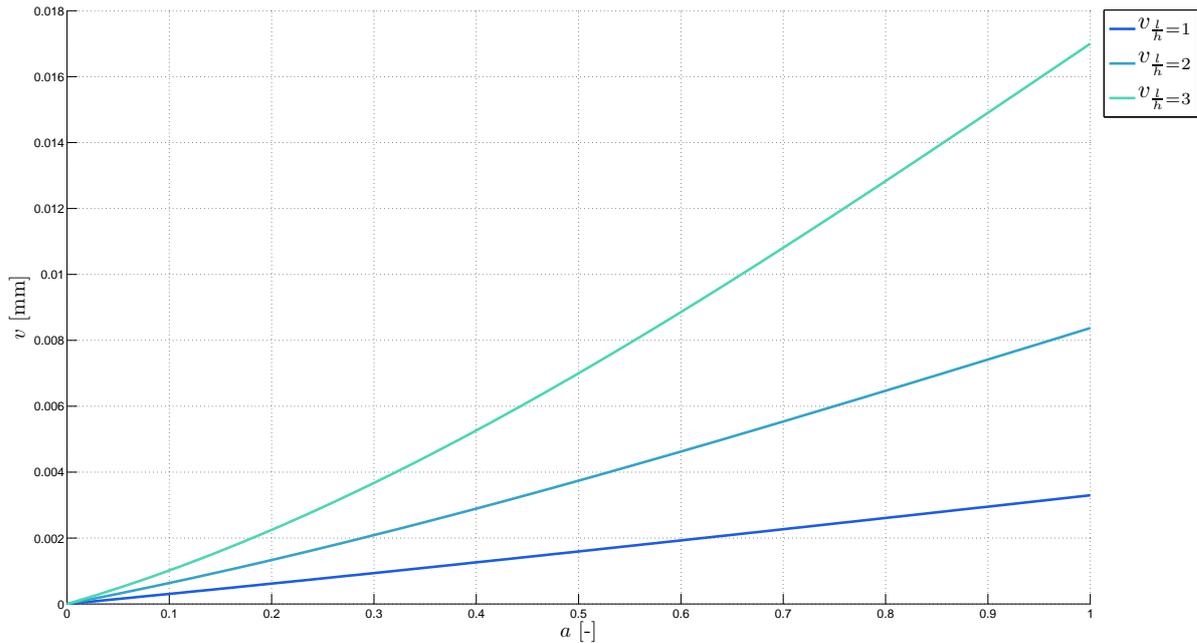


Abbildung 4.7: Einfluss der Schubspannung auf den Verlauf der Verschiebung v der gedungenen Scheiben

$$\sigma_{xx} = -\frac{2\sqrt{3}M_0}{ht}a \quad (4.22)$$

Die Normalspannung σ_{xx} ist in der Gleichung (4.22) ist von einer dimensionslosen Variablen a mit dem Wertebereich $(-0,5 \leq a \leq 0,5)$ abhängig.

Die Untersuchung des Einflusses vom Schlankheitsgrad λ auf die Normalverschiebung $u(x, y)$ erfolgt wie auch bei den anderen zwei Lastfällen an der Stelle $x = \frac{l}{2}$. Die Verschiebungsfunktion wird dabei zu:

$$u\left(x = \frac{l}{2}, y\right) = -\frac{M_0 l}{2E_x I_z} y \quad (4.23)$$

Nach der Umstellung mit Hilfe von Gleichungen (4.1) und (4.3) sowie der Normierung über die Scheibenhöhe mit $y = ah$, $(-0,5 \leq a \leq 0,5)$ zeigt die Funktion für die Normalverschiebung u eine lineare Abhängigkeit von λ (s. Gl. (4.24)).

$$u = -\frac{\sqrt{3}M_0}{E_x ht} \lambda a \quad (4.24)$$

In der Abbildung 4.11 wird die über den Querschnitt der Scheibe normierte Normalverschiebung u an der Stelle $x = \frac{l}{2}$ dargestellt.

Für alle Schlankheitsgrade der Scheibe bleibt der Verlauf der Normalverschiebung u linear über den Querschnitt.

Der Einfluss von λ auf die Verschiebung $v(x, y)$ wird an der neutralen Achse der Scheibe untersucht. Bei $y = 0$ sieht die Beziehung für die Verschiebung v wie folgt aus:

$$v(x, y) = \frac{M_0}{2E_x I_z} x^2 \quad (4.25)$$

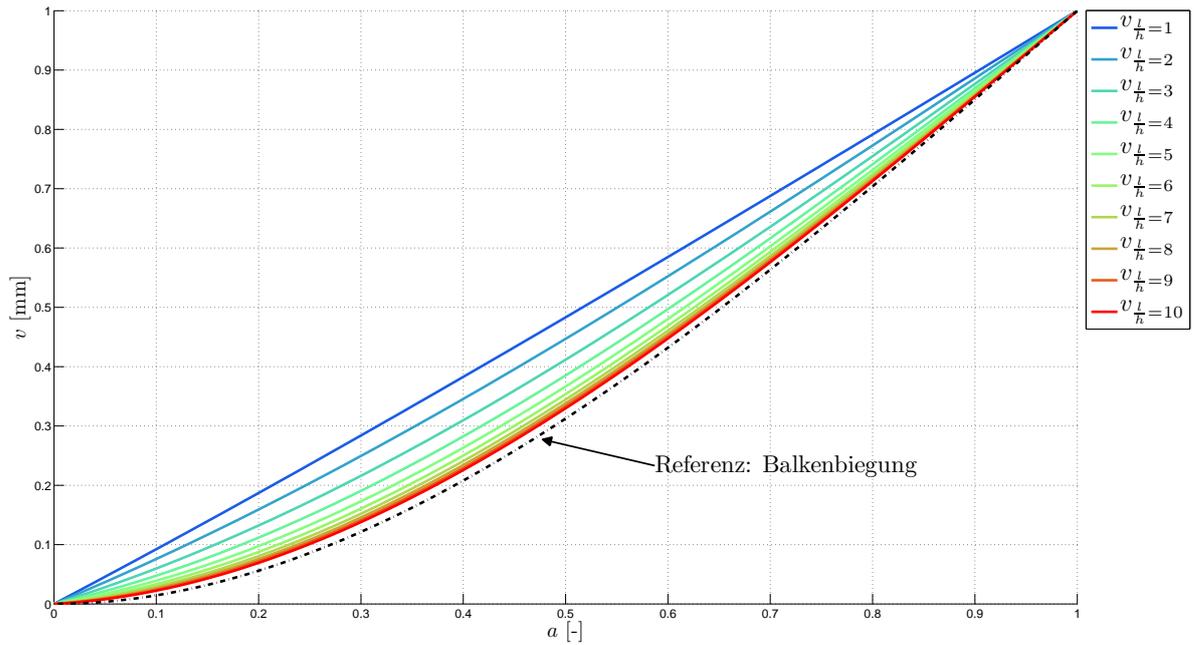


Abbildung 4.8: Konvergenz der Verschiebung v gegen den Biegelinienverlauf in der Balkentheorie

Nach der Normierung der Gleichung (4.25) mit $x = al$, ($0 \leq a \leq 1$) kann man die Verschiebungsfunktion mit den Gleichungen (4.1) und (4.4) umstellen. Die Verschiebungsfunktion v kann dann in Abhängigkeit vom Parameter λ bei konstanter Scheibenlänge und variierender Scheibenhöhe wie folgt angeschrieben werden:

$$v = \frac{M_0}{4\sqrt{3}E_x l t} \lambda^3 a^2 \quad (4.26)$$

Die Änderung des Verlaufs der Verschiebung v mit steigendem λ wird in der Abbildung 4.12 gezeigt.

Die Verschiebungsfunktion v weist für jeden Wert von λ einen parabolischen Verlauf mit dem Extremum an der Festeinspannung der Scheibe auf.

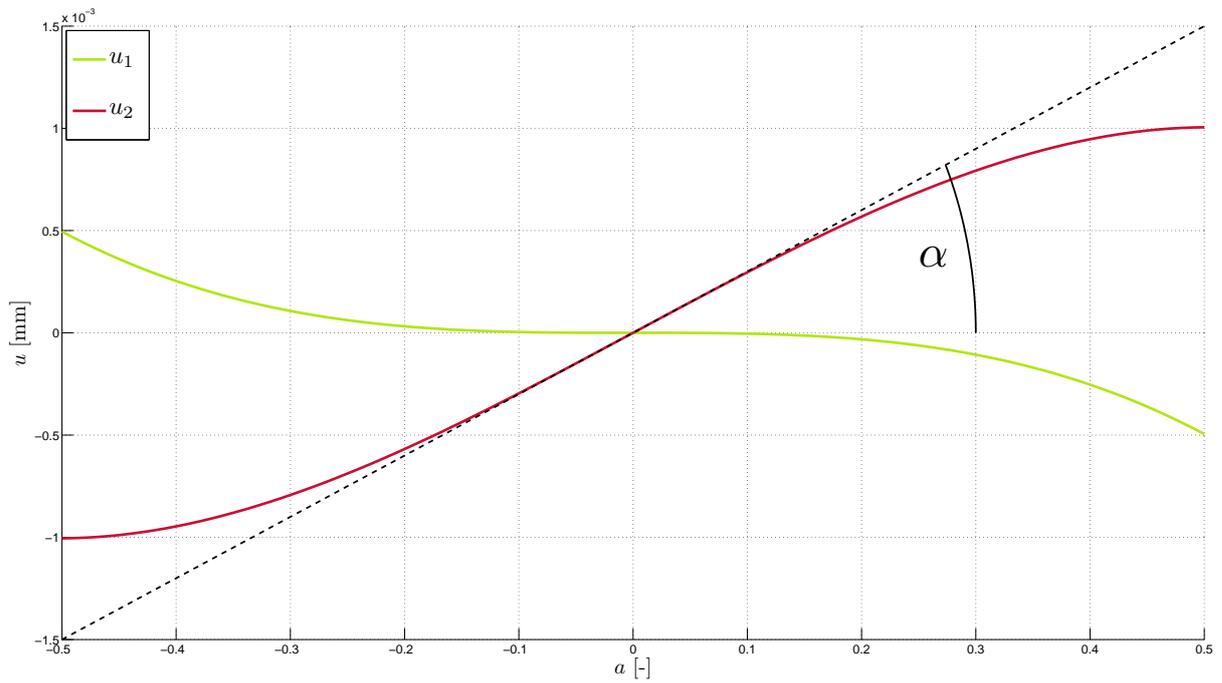


Abbildung 4.9: Vergleich der Normalverschiebungen u_1 und u_2 an der Einspannung der Scheibe

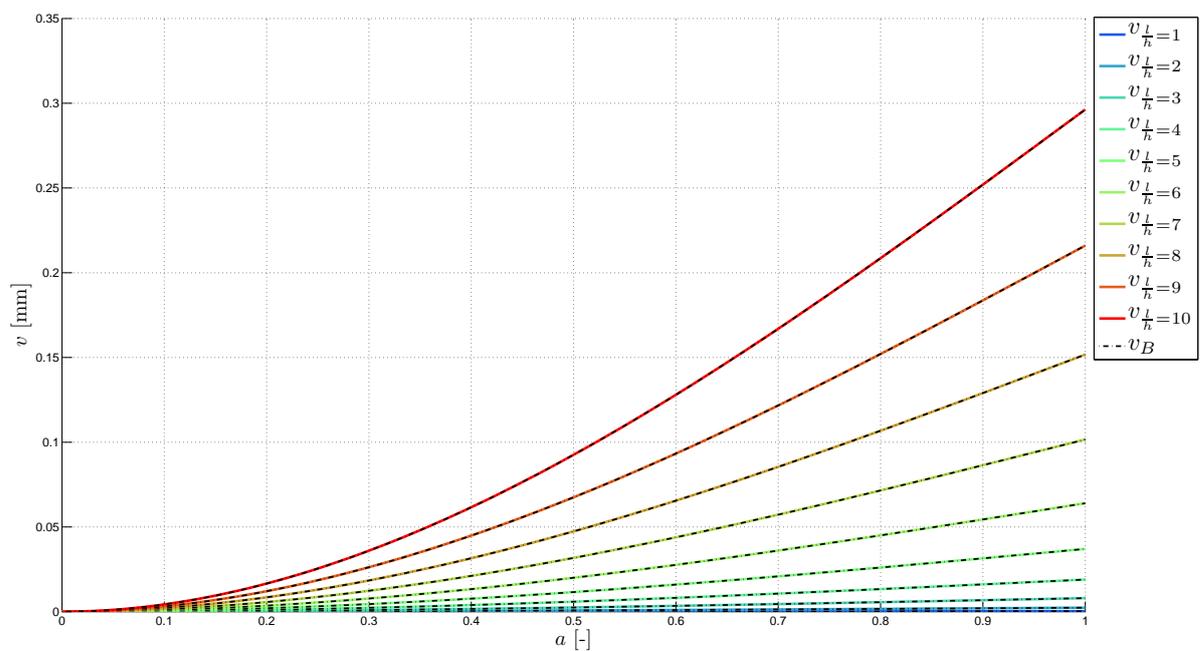


Abbildung 4.10: Verschiebung v_2 und Referenz-Balkenbiegung mit steigendem Parameter λ

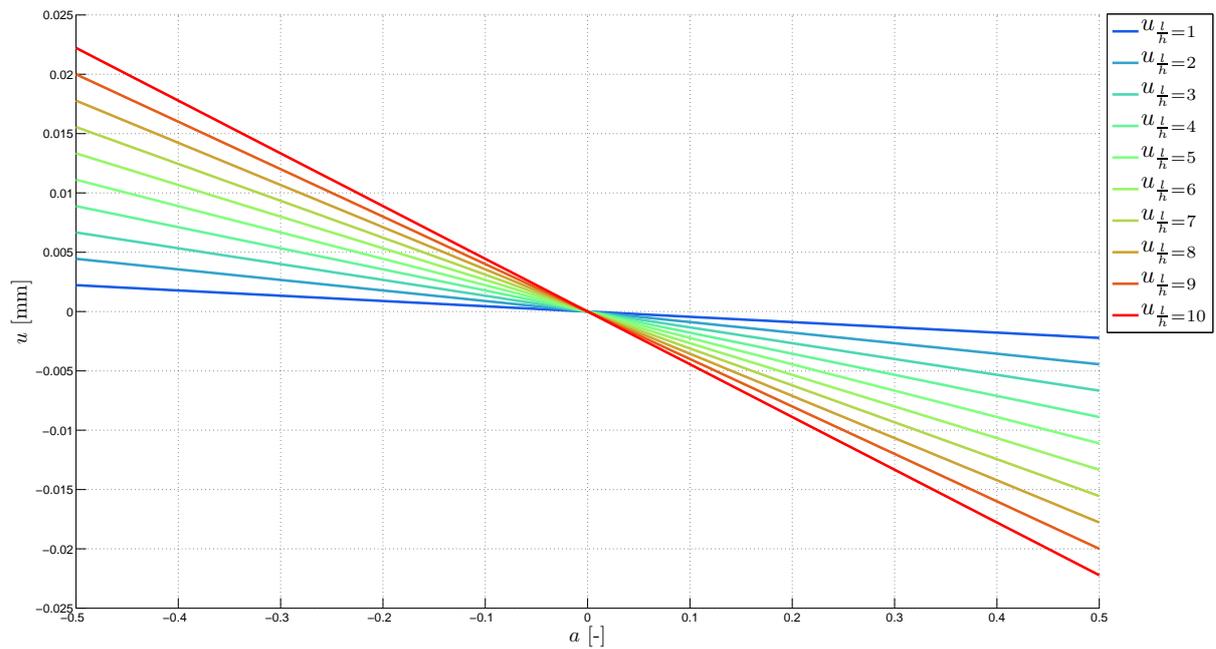


Abbildung 4.11: Normalverschiebung u bei „reiner“ Biegung der orthotropen Scheibe

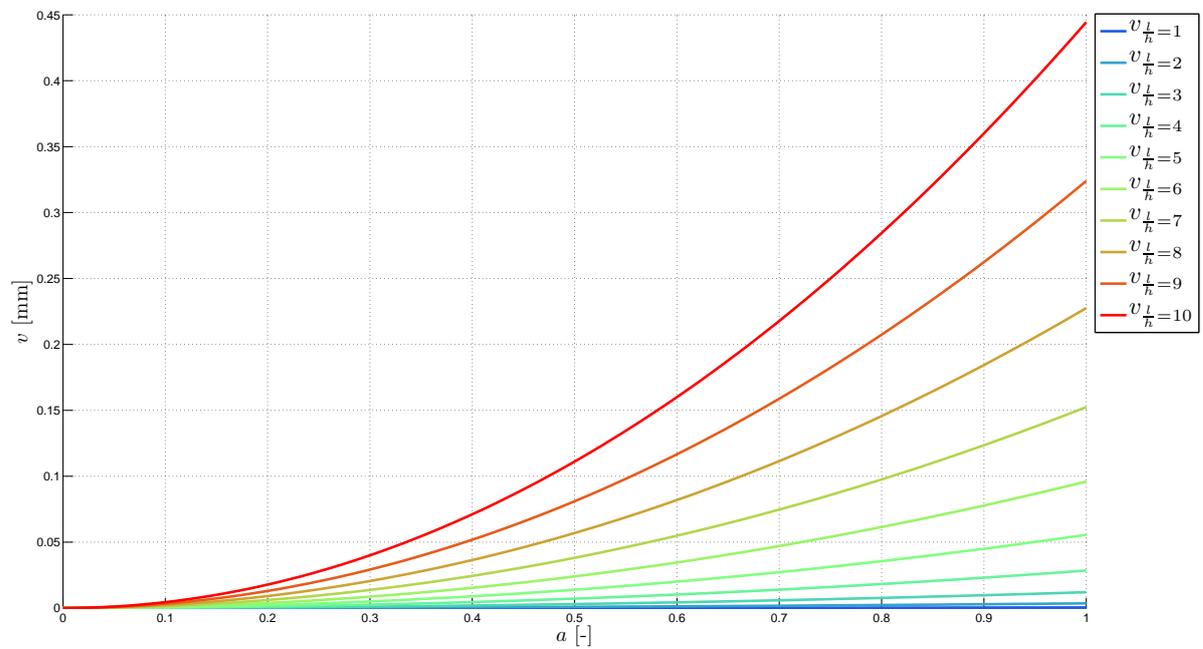


Abbildung 4.12: Verschiebung v an der neutralen Achse der Scheibe mit steigendem λ bei „reiner“ Biegung

4.1.2. Einfluss des Geometrieparameters auf das Spannungs- und Verschiebungsfeld eines Laminats

Nun werden das Spannungs- und das Verschiebungsfeld eines Laminats mit dem sich ändernden Längen-Höhen-Verhältnis des Laminats untersucht. Auf die Einführung des Schlankheitsgrades λ wird hier verzichtet, da dessen Definition auch die Koeffizienten einschließt, die erst durch das Lösen des Gleichungssystems bestimmt werden. Die Untersuchung wird an Laminaten konstanter Höhe und variierender Länge durchgeführt, deren Lagenaufbau dem Beispiel-Laminat aus dem Abschnitt 3.4 gleicht. Die elastischen Eigenschaften der einzelnen Lagen und die angebrachten Lasten sind ebenfalls dem Abschnitt 3.4 zu entnehmen. Diese Parameterstudie wird für die Längen-Höhen-Verhältnisse von 1 bis 10 durchgeführt.

Das Spannungsfeld des Laminats und die Querschnittsverschiebung u werden an der Stelle $x = \frac{l}{2}$ betrachtet. Die Untersuchung der Verschiebung v erfolgt an der neutralen Achse des Laminats. Dabei müssen die für die mittlere Laminatschicht des Beispiel-Laminats bestimmten Koeffizienten A_2 bis $G_2^{(2)}$ benutzt werden. Die Ergebnisse für die Verschiebung v werden mittels einer Normierung auf eine Einheitslänge l^* vergleichbar gemacht.

Einfluss des Geometrieparameters auf das Spannungs- und Verschiebungsfeld des Laminats bei Normalkraftbelastung

Die Untersuchung des Verhaltens des Laminats unter Normalkraftbelastung liefert keine neuen Erkenntnisse. Mit den oben definierten geometrischen Bedingungen der Untersuchung ergibt sich der in der Abbildung 3.15 dargestellte Verlauf der Normalspannung σ_{xx} über die Höhe des Laminats für alle Längen-Höhen-Verhältnisse. Das Verschiebungsfeld des Laminats zeigt mit dem steigenden Verhältnis $\frac{l}{h}$ tendentiell das gleiche Verhalten wie das der orthotropen Scheibe.

Einfluss des Geometrieparameters auf das Spannungs- und Verschiebungsfeld des Laminats bei Querkraftbelastung

Bei Querkraftbelastung des Laminats treten im Verlauf der Normal- und Schubspannungen Besonderheiten auf. Diese werden durch die geschichtete Struktur des Laminats mit den Steifigkeitssprüngen an den Schichtgrenzen bedingt. So treten im Verlauf der Normalspannung σ_{xx} , der in der Abbildung 4.13 für alle untersuchten Längen-Höhen-Verhältnisse dargestellt wird, an den Grenzen der einzelnen Laminatlagen Sprünge auf. Diese werden mit steigendem Längen-Höhen-Verhältnis des Laminats immer größer. Die Steigung des Normalspannungsverlaufs in den beiden äußeren Schichten des Beispiel-Laminats nimmt bei höheren Längen-Höhen-Verhältnissen zu, wobei der Verlauf der Spannung in der mittleren Schicht beinahe konstant bleibt.

Der in der Abbildung 4.14 gezeigte Verlauf der Schubspannung über die Laminathöhe bleibt wie auch bei der orthotropen Scheibe für alle Längen-Höhen-Verhältnisse des Laminats unverändert. Die einzige Abweichung tritt bei dem Laminat mit einer quadratischen Form ($\frac{l}{h} = 1$) auf. Der Knick im Verlauf der Schubspannung, der an den Schichtgrenzen auftritt, ist für alle Verhältnisse gemeinsam.

Im Verlauf der Verschiebung u über die Laminathöhe ist in der Abbildung 4.15 erstmal kein Unterschied zu dem Verschiebungsverlauf der orthotropen Scheibe festzustellen. Dieser wird jedoch bei der Betrachtung der gedrungenen Laminats in der Abbildung 4.16 sichtbar.

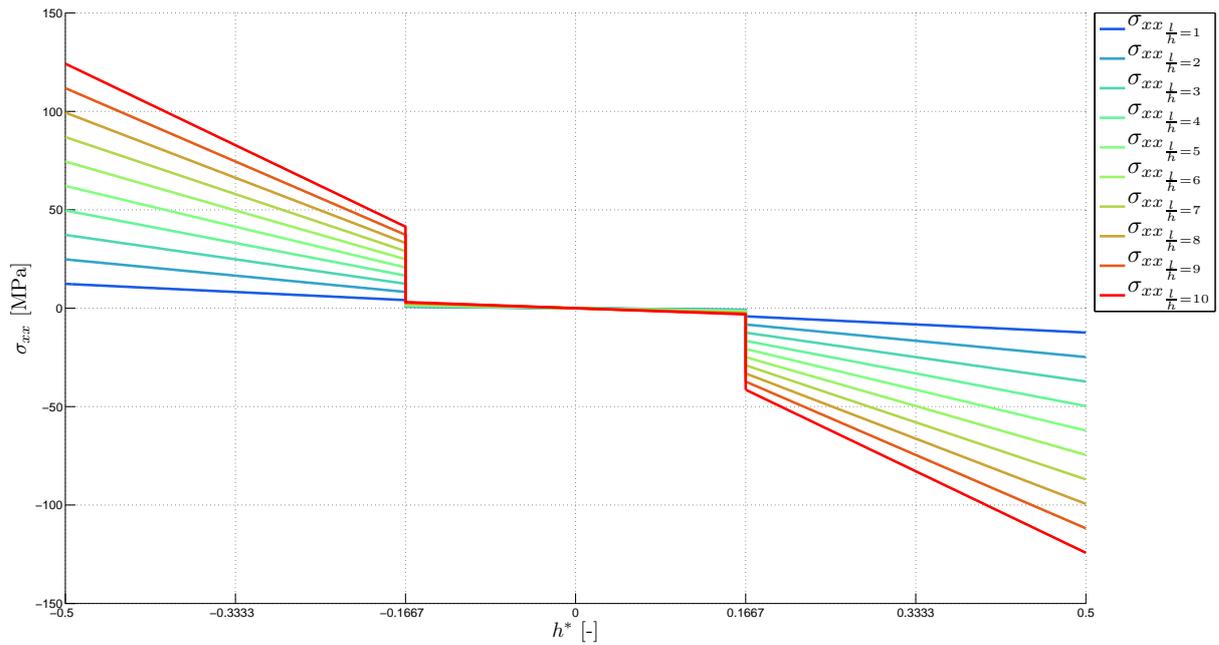


Abbildung 4.13: Normalspannung σ_{xx} mit steigendem Längen-Höhen-Verhältnis des Laminats bei Querkraftbelastung

Die auftretenden Knickstellen an den Schichtgrenzen wurden bereits bei der Verifikation der Ergebnisse im Abschnitt 3.4 angegangen. In den Abbildungen 4.15 und 4.16 ist zu erkennen, dass diese aus dem mathematischen Modell resultierende Abweichung mit steigendem Längen-Höhen-Verhältnis immer geringer wird.

Der Verlauf der Verschiebung v der neutralen Achse des Laminats ändert sich mit dem steigendem Längen-Höhen-Verhältnis in gleicher Weise wie bei der orthotropen Scheibe.

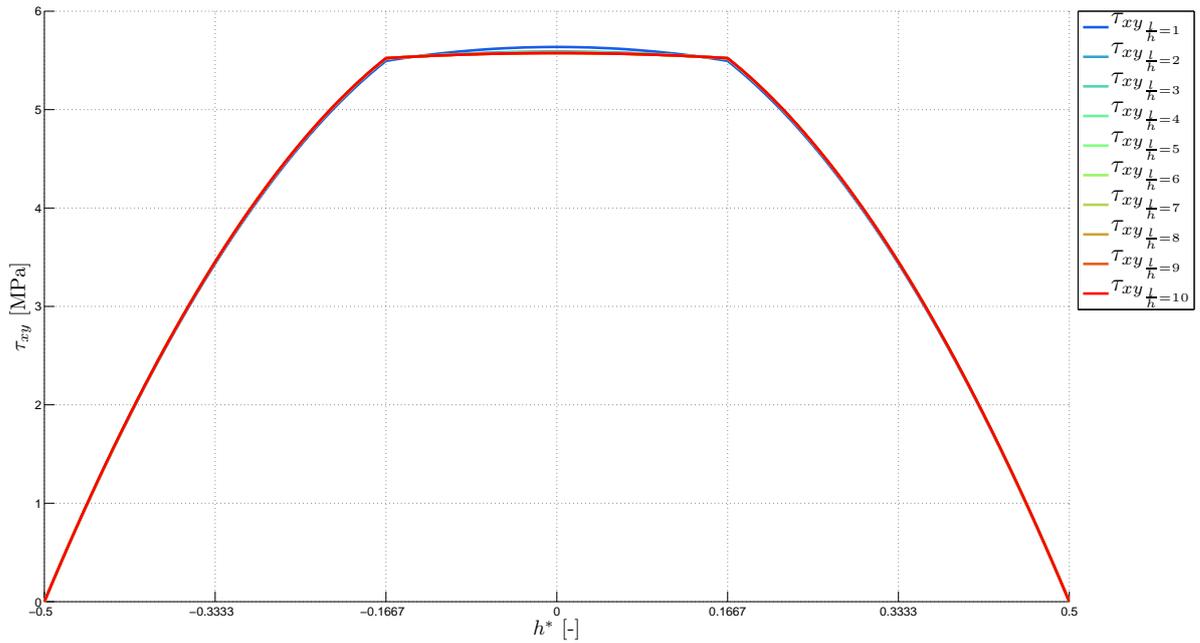


Abbildung 4.14: Schubspannung τ_{xy} mit steigendem Längen-Höhen-Verhältnis des Laminats bei Querkraftbelastung

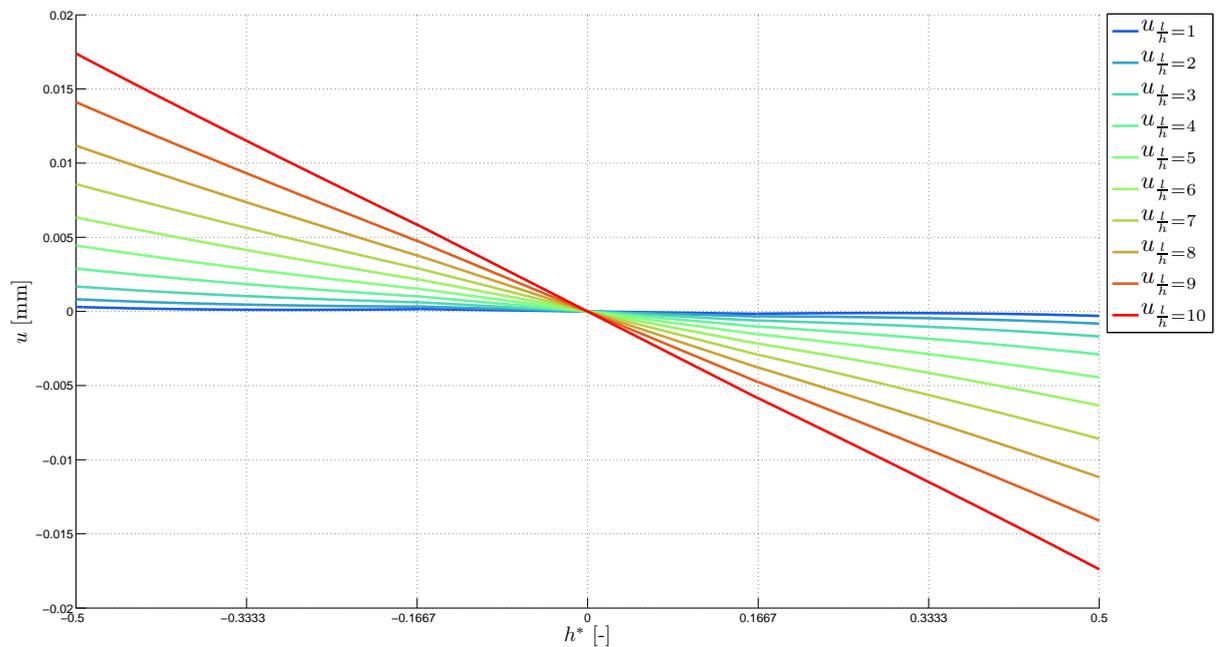


Abbildung 4.15: Verschiebung u mit steigendem Längen-Höhen-Verhältnis des Laminats bei Querkraftbelastung

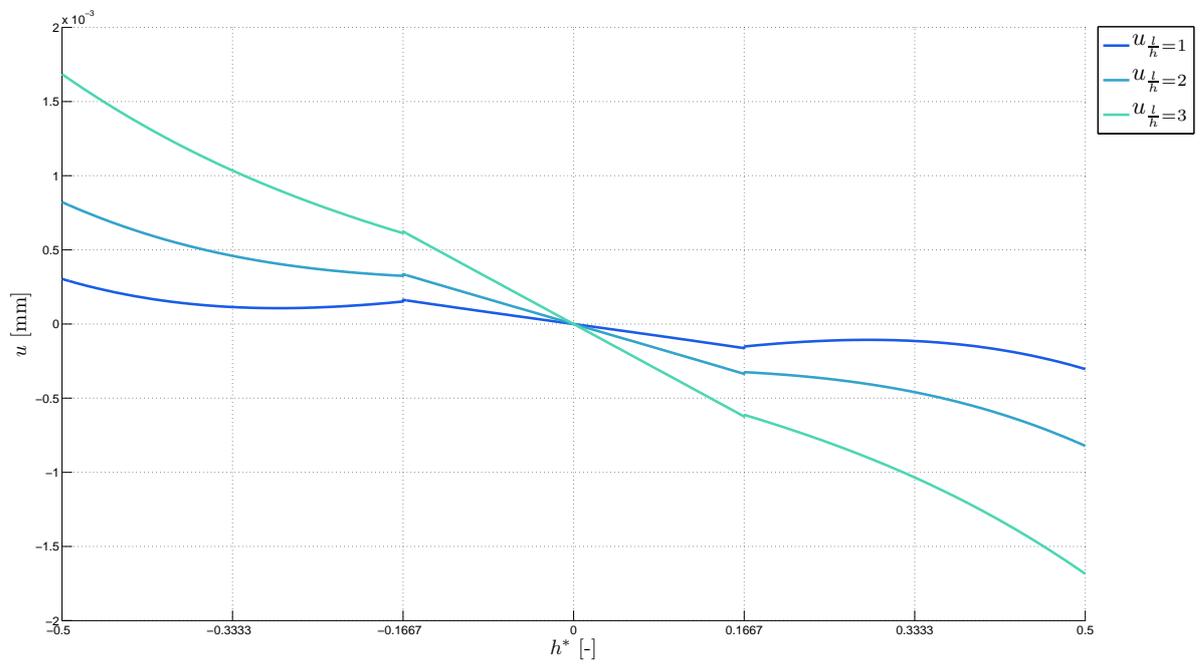


Abbildung 4.16: Verschiebung u in gedruckten Laminaten unter Querkraftbelastung

Einfluss des Geometrieparameters auf das Spannungs- und Verschiebungsfeld des Laminats bei Momentenbelastung

Das Spannungs- und das Verschiebungsfeld des Laminats zeigen mit dem steigenden Längen-Höhen-Verhältnis keinen Unterschied im Verhalten gegenüber der orthotropen Scheibe. Der Verlauf des Spannungsfeldes bleibt für alle Verhältnisse der Laminatlänge zur Laminathöhe unverändert und wird bereits bei der Verifikation der Ergebnisse im Abschnitt 3.4 behandelt (s. Abb. 3.22). Der Einfluss auf den Verlauf der Verschiebungsfunktionen gleicht dem der orthotropen Scheibe (s. Abb. 4.11 und Abb. 4.12).

4.2. Materialparameter

In diesem Abschnitt werden die Auswirkungen der variierenden Materialparameter E_x , ν_{xy} und G_{xy} auf die sich unter den Normalkraft-, Querkraft- und Momentenbelastung in der orthotropen Scheibe einstellenden Verschiebungsfelder behandelt. Es wird angenommen, dass die Änderung der Werkstoffparameter den gleichen Einfluss auf das Verschiebungsfeld eines Laminats wie in einer orthotropen Scheibe, hat. Die Materialparameter haben im Lösungsansatz mit der Airyschen Spannungsfunktion keinen Einfluss auf die Spannungsfelder, da sie erst mit den konstitutiven Beziehungen bei der Berechnung der Verzerrungen den Eingang in die Rechnung finden. Dies kann den im Abschnitt 3.1 hergeleiteten Gleichungen entnommen werden. Der Einfluss des E-Moduls in y -Richtung wird hier nicht behandelt, da er in den untersuchten Lastfällen aus der Rechnung herausfällt. Bei der Untersuchung der Veränderung der Verschiebungsfelder mit den sich ändernden Materialparametern wird die orthotrope Scheibe mit den im Abschnitt 3 verwendeten Lasten beaufschlagt. Bei der Untersuchung der Auswirkung von einem der betrachteten Materialparameter auf das Verschiebungsfeld der Scheibe werden in allen Lastfällen für die anderen Beiden die Standardwerte aus der Tabelle 3.1 genommen.

4.2.1. Auswirkung der Werkstoffeigenschaften auf das Verschiebungsfeld in der orthotropen Scheibe unter Normalkraftbelastung.

Als Erstes wird der Einfluss des E-Moduls E_x auf das Verschiebungsfeld der Scheibe untersucht. Dabei wird die Verschiebung u in der Scheibenmitte, also bei $x = \frac{l}{2}$, betrachtet. Die Verschiebung v ist an der neutralen Achse der Scheibe gleich Null. Die Auswirkung der Materialparameter auf diese Verschiebungskomponente wird deswegen in diesem Lastfall am oberen Scheibenrand ($y = -\frac{h}{2}$) untersucht. Auf den Verlauf beider Verschiebungskomponenten hat die Änderung des E-Moduls keine Auswirkung, sondern nur auf deren Betrag. Die Abbildung 4.17 zeigt die Verschiebungskomponenten u und v in der Scheibe mit unterschiedlichen E-Moduln zwischen 130000 MPa und 150000 MPa.

Die erwartete Abnahme im Betrag beider Verschiebungskomponenten mit dem steigenden E-Modul des Werkstoffs ist in der Abbildung deutlich erkennbar.

Der zweite Werkstoffparameter, der auf die Verformung der orthotropen Scheibe unter Normalkraftbelastung Einfluss hat, ist die Querkontraktionszahl ν_{xy} . Dieser Parameter wirkt sich auf die Verschiebung v aus. Die Verschiebung u wird von ν_{xy} nicht beeinflusst. So nimmt bei gleich bleibender Verschiebung u die Verschiebung v am oberen Rand der Scheibe mit steigender Querkontraktionszahl, wie es in der Abbildung 4.18 dargestellt wird, zu.

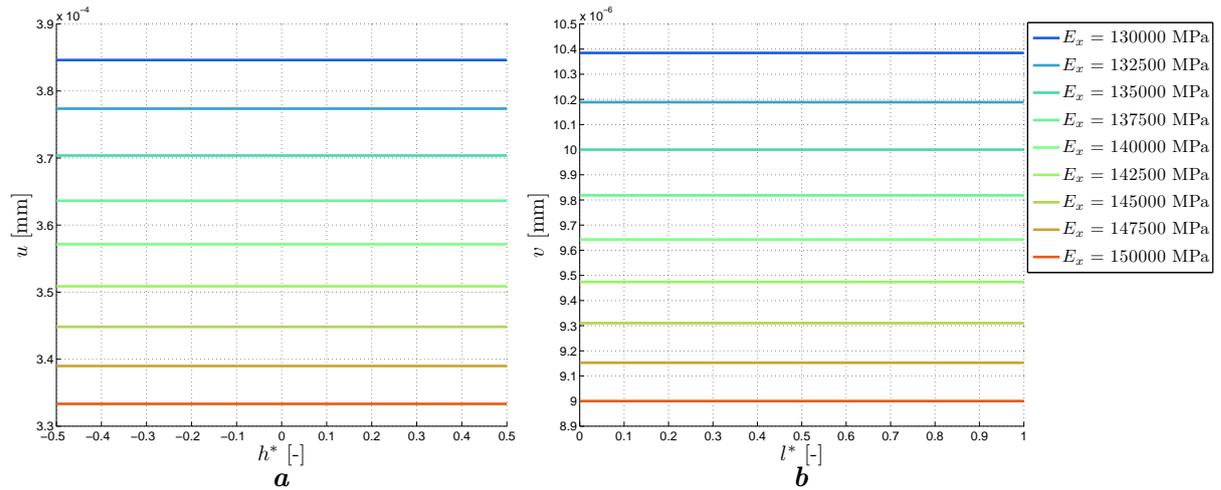


Abbildung 4.17: Verschiebungsfeld der orthotropen Scheibe unter Normalkraftbelastung mit steigendem E-Modul E_x
a Einfluss auf die Verschiebung u in der Mitte der Scheibe, **b** Einfluss auf die Verschiebung v am oberen Rand der Scheibe.

Der Schubmodul G_{xy} hat keinen Einfluss auf das Verschiebungsfeld der Scheibe bei Normalkraftbelastung.

4.2.2. Auswirkung der Werkstoffeigenschaften auf das Verschiebungsfeld in der orthotropen Scheibe unter Querkraftbelastung.

Unter der Querkraftbelastung wird das Verschiebungsfeld der orthotropen Scheibe von den Werkstoffparametern E_x , ν_{xy} und G_{xy} beeinflusst. So nimmt die Neigung des Scheibenquerschnitts mit dem steigenden E-Modul (s. Abb. 4.19a), und damit auch die Verschiebung u an einem Punkt des Querschnitts mit den Koordinaten $(x = \frac{l}{2}, y)$, linear ab. Die Absenkung der neutralen Achse der Scheibe wird, wie es in der Abbildung 4.19b dargestellt ist, mit zunehmendem E-Modul ebenfalls geringer.

Der Einfluss der Querdehnzahl ν_{xy} auf die Verschiebung u ist über die Scheibenhöhe konstant. Über die Scheibenhöhe variiert die Auswirkung von ν_{xy} , sodass sie an den oberen und unteren Scheibenrändern maximal und an der neutralen Achse der Scheibe gleich Null ist.

Auf die Verschiebung v ist die Auswirkung von ν_{xy} an der Einspannung der Scheibe maximal und nimmt mit fortschreitendem x ab, so dass sie bei $x = l$ zu Null wird. Des Weiteren hat ν_{xy} keinen Einfluss auf die Auslenkung der neutralen Achse der Scheibe. Aus diesem Grund findet die Untersuchung des Verlaufs der Verschiebung v am oberen Scheibenrand statt. Im Vergleich zu den eintretenden Verschiebungen ist die durch die Veränderung der Querdehnzahl hervorgerufene Änderung des Verschiebungsverlaufs sehr gering. So ist bei der Betrachtung des gesamten Scheibenquerschnitts in der Abbildung 4.20a der Einfluss der Querdehnzahl auf die Verschiebung u nicht zu erkennen. Dieser ist erst bei einer starker Vergrößerung des Verschiebungsverlaufs, wie es in der Abbildung 4.20b dargestellt ist, sichtbar. In der Abbildung 4.20b ist die Verringerung der Querschnittsneigung mit der steigender Querdehnzahl erkennbar.

Der Einfluss der Querdehnzahl ν_{xy} auf die Verschiebung v ist in der Abbildung 4.21 dargestellt. Dieser ist ebenfalls erst mit starker Vergrößerung erkennbar. Mit steigender Querdehnzahl nimmt

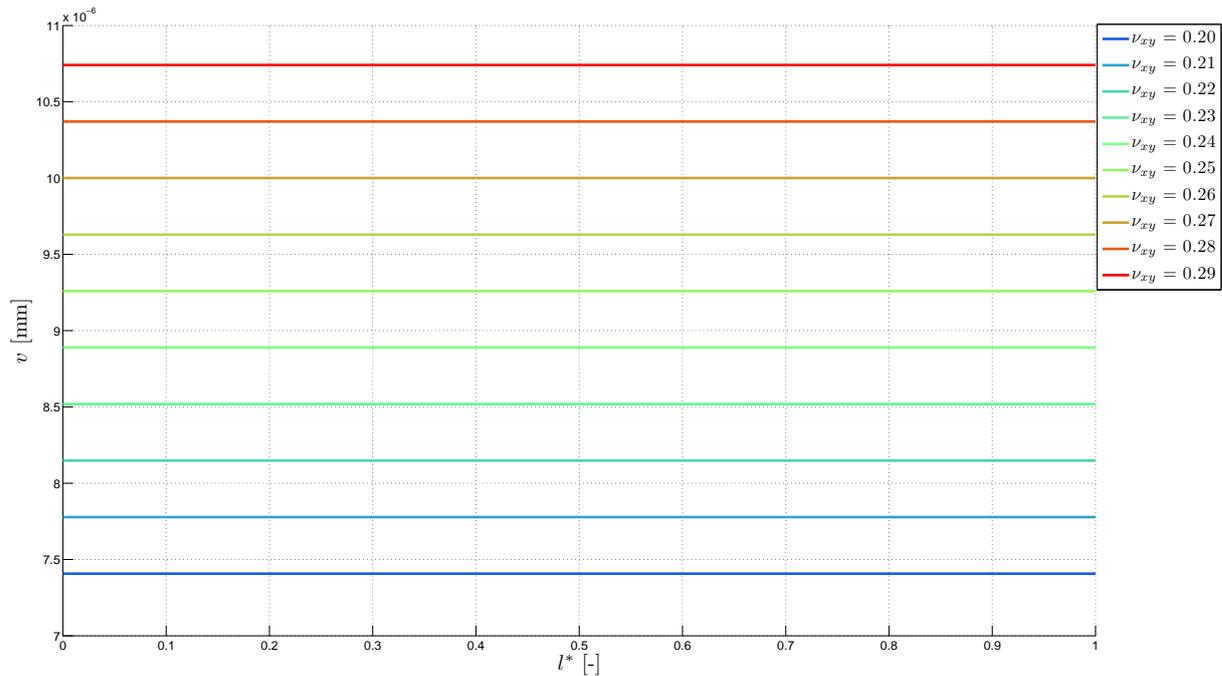


Abbildung 4.18: Einfluss der Querkontraktionszahl ν_{xy} auf die Verschiebung v am oberen Rand der Scheibe unter Normalkraftbelastung

die Verschiebung v am oberen Scheibenrand zu, wie es in der Abbildung 4.21 **b** zu sehen ist.

Der höhere Schubmodul G_{xy} bewirkt eine Verringerung der Neigung des Scheibenquerschnitts. Somit tritt der maximale Einfluss dieses Werkstoffparamters auf die Verschiebung u am oberen und unteren Scheibenrand auf. In der Abbildung 4.22 **a** wird der Verlauf der Verschiebung u über die Scheibenhöhe für die in technischen Anwendungen gängigen Schubmoduln zwischen 2000 MPa und 8000 MPa dargestellt. Am zehnfach vergrößerten Verlauf der Verschiebung u am oberen Scheibenrand, der in der Abbildung 4.22 **b** angegeben ist, ist der nichtlineare Zusammenhang zwischen dem Verschiebungsverlauf und dem Schubmodul zu erkennen.

Die Auswirkung des Schubmoduls auf den Verlauf der Verschiebung v wird an der neutralen Achse der Scheibe untersucht. An den Verschiebungsverläufen in der Abbildung 4.23 **a** ist die Verringerung der Verschiebung v mit höheren Schubmodul deutlich zu erkennen. Nach der zehnfachen Vergrößerung der Verschiebungsverläufe an der Einspannung der Scheibe, wie es in der Abbildung 4.23 **b** gezeigt ist, wird die Verringerung der Neigung der neutralen Achse infolge des Schubs mit dem steigenden Schubmodul deutlich sichtbar. Des weiteren ist der nicht lineare Zusammenhang zwischen dem Schubmodul und der Verschiebung v erkennbar.

4.2.3. Auswirkung der Werkstoffeigenschaften auf das Verschiebungsfeld in der orthotropen Scheibe unter Momentenbelastung

Unter der Momentenbelastung gehen die Materialparameter E_x und ν_{xy} in die Berechnung des Verschiebungsfeldes ein. Somit wird hier der Einfluss dieser Kennwerte auf den Verlauf beider Verschiebungskomponenten untersucht. Die Veränderung des Verschiebungsfeldes mit dem steigenden E-Modul ist in der Abbildung 4.24 dargestellt. Dabei wird die Verschiebung u an

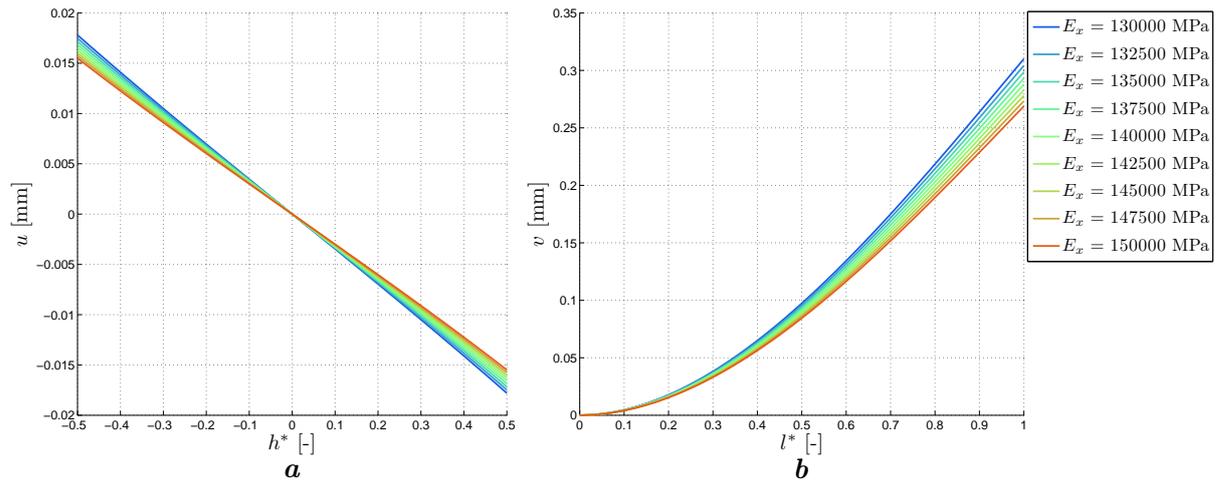


Abbildung 4.19: Verschiebungsfeld der orthotropen Scheibe unter Querkraftbelastung mit steigendem E-Modul E_x
a Einfluss auf die Verschiebung u in der Mitte der Scheibe, **b** Einfluss auf die Verschiebung v an der neutralen Achse der Scheibe

der Stelle $x = \frac{l}{2}$ (s. Abb.4.24**a**) und die Verschiebung v an der neutralen Achse der Scheibe (s. Abb.4.24**b**) betrachtet. Die Verringerung der beiden Verschiebungskomponenten mit dem steigenden E-Modul ist deutlich zu erkennen.

In der durch ein Biegemoment beanspruchten Scheibe hat die Querkontraktionszahl ν_{xy} Einfluss auf die Verschiebung v . Dieser Einfluss ist über die gesamte Scheibenlänge konstant. Über die Scheibenhöhe nimmt er mit dem Quadrat von y zu, so dass er an der neutralen Achse der Scheibe gleich Null und an den Scheibenrändern maximal ist. Somit wird die Auswirkung dieses Materialkennwertes am oberen Scheibenrand untersucht (s. Abb. 4.25). Am unteren Scheibenrand ist der gleiche Einfluss zu beobachten. Wie es in der Abbildung 4.25**a** zu sehen ist, ist die Änderung im Verlauf der Verschiebung v , die durch die sich ändernde Querdehnzahl hervorgerufen wird, im Vergleich zur Auslenkung der momentenbelasteten Scheibe sehr gering. Diese ist in der Abbildung 4.25**b** nach einer starken Vergrößerung erkennbar.

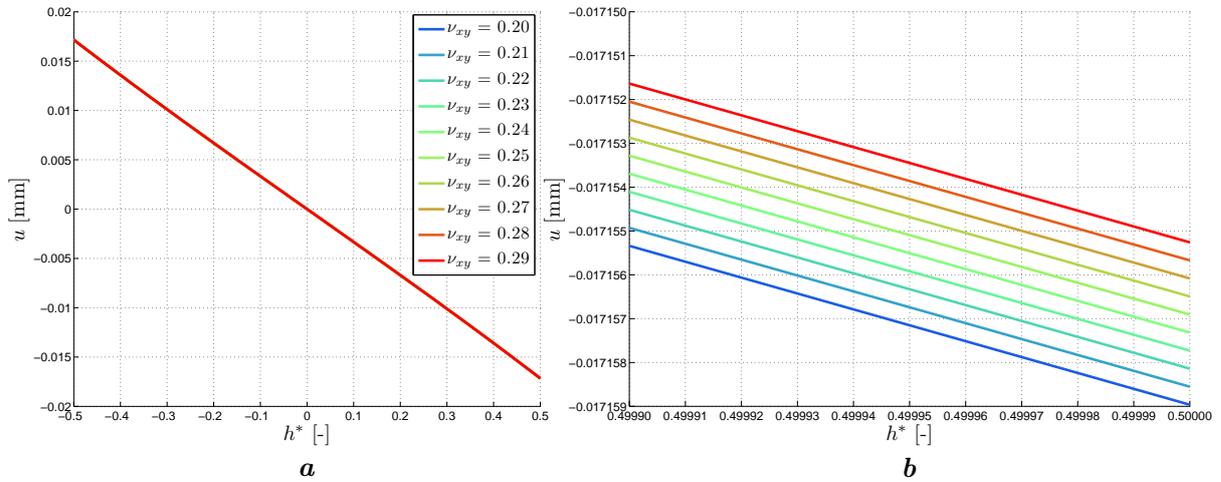


Abbildung 4.20: Einfluss der Querdehnzahl ν_{xy} auf den Verlauf der Verschiebung u bei Querkraftbelastung
a Betrachtung des gesamten Scheibenquerschnitts, **b** 10000-fache Vergrößerung des Verschiebungsverlaufs aus **a** am oberen Scheibenrand

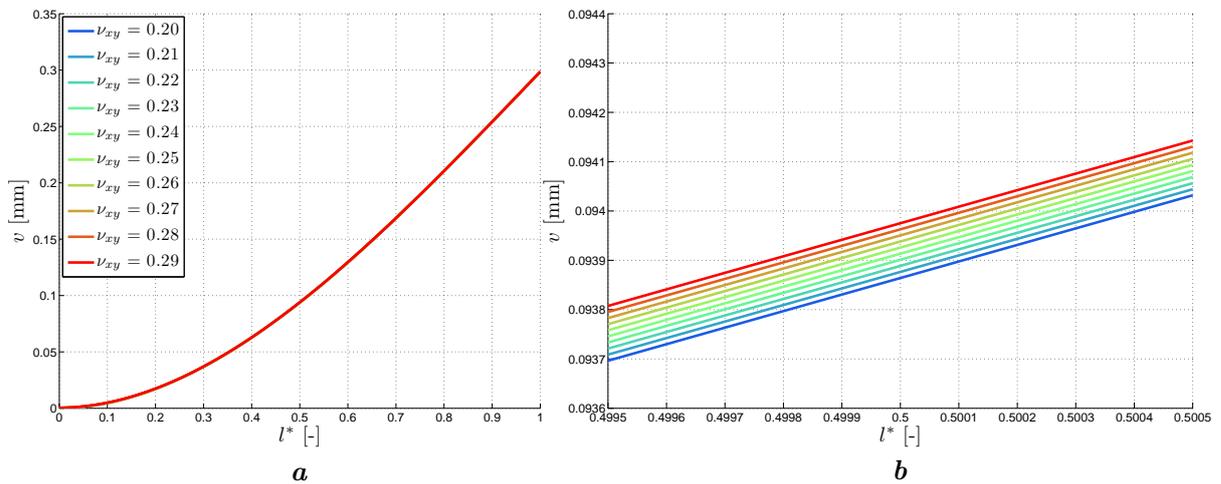


Abbildung 4.21: Einfluss der Querdehnzahl ν_{xy} auf den Verlauf der Verschiebung v am oberen Scheibenrand bei Querkraftbelastung
a Betrachtung der Auswirkung der Querdehnzahl auf den Verlauf der Verschiebung v über die gesamte Scheibenlänge, **b** 10000-fache Vergrößerung des Verschiebungsverlaufs aus **a** in der Scheibenmitte ($x = \frac{l}{2}$).

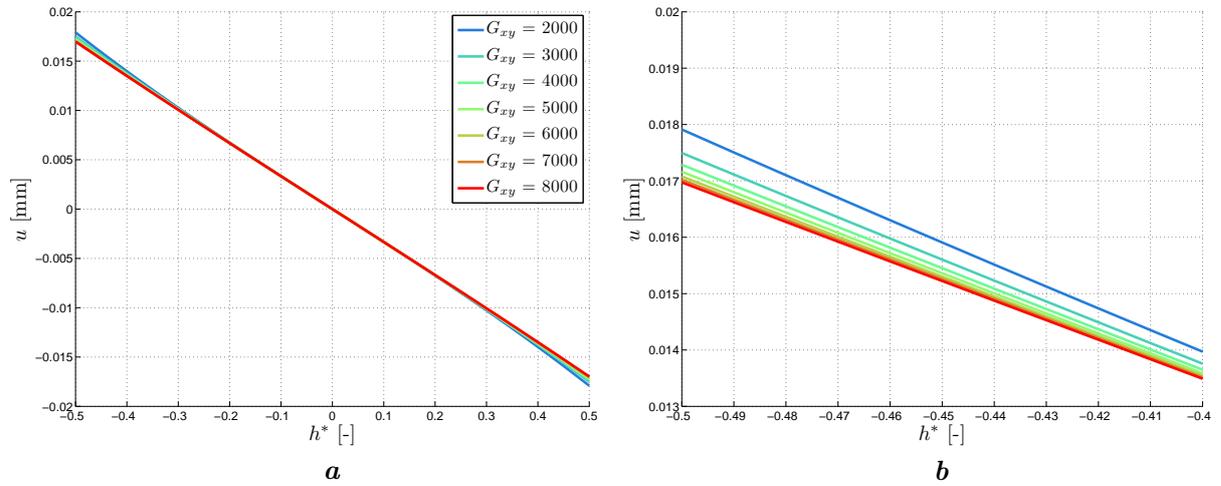


Abbildung 4.22: Einfluss des Schubmoduls G_{xy} auf den Verlauf der Verschiebung u unter Querkraftbelastung
a Betrachtung des gesamten Scheibenquerschnitts, **b** 10-fache Vergrößerung des Verschiebungsverlaufs aus **a** am oberen Scheibenrand

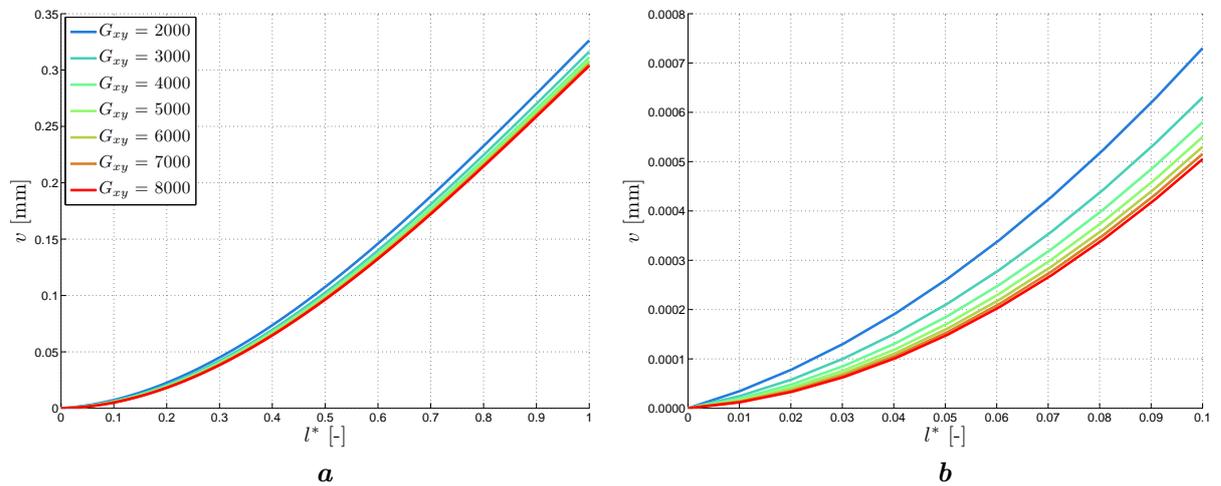


Abbildung 4.23: Einfluss des Schubmoduls G_{xy} auf die Verschiebung v der neutralen Achse der Scheibe unter Querkraftbelastung
a Betrachtung der Auswirkung des Schubmoduls auf den Verlauf der Verschiebung v der neutralen Achse über die gesamte Scheibenlänge, **b** 10-fache Vergrößerung des Verschiebungsverlaufs aus **a** an der Einspannung der Scheibe

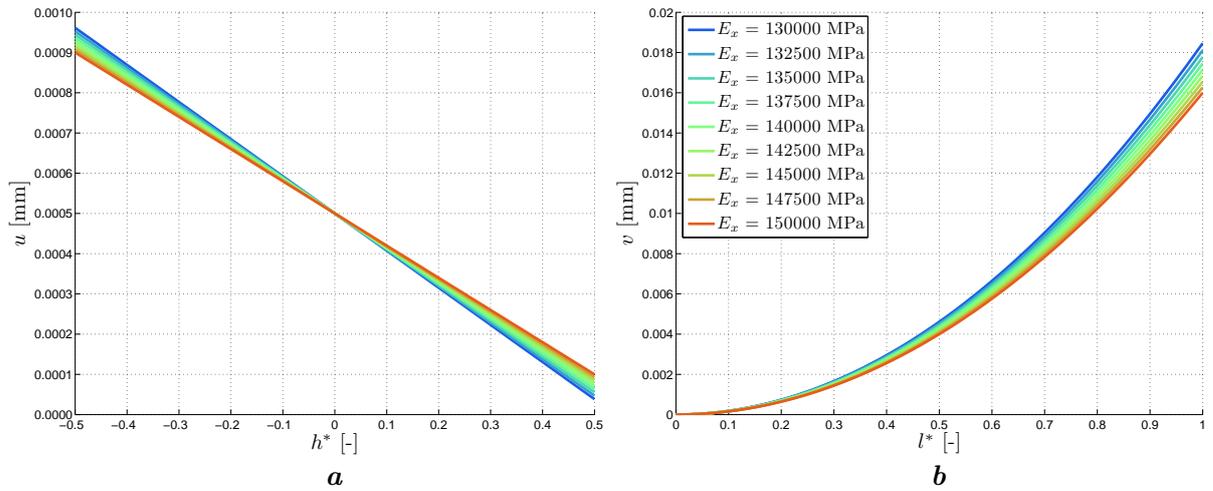


Abbildung 4.24: Verschiebungsfeld der orthotropen Scheibe unter Biegemomentenbelastung mit steigendem E-Modul E_x
a Einfluss auf die Verschiebung u in der Mitte der Scheibe, **b** Einfluss auf die Verschiebung v an der neutralen Achse der Scheibe

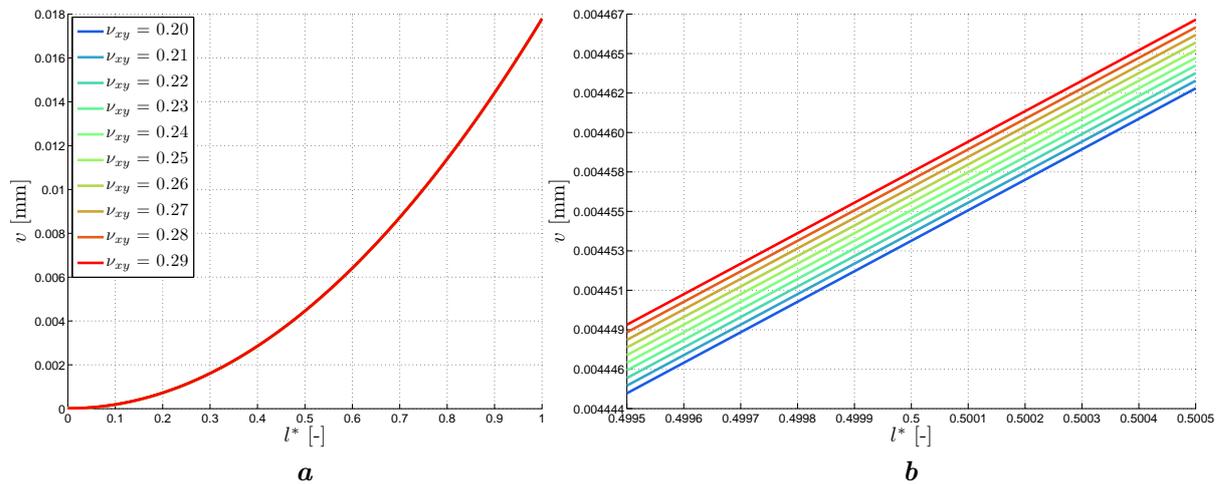


Abbildung 4.25: Einfluss der Querdehnzahl ν_{xy} auf den Verlauf der Verschiebung v am oberen Scheibenrand bei Momentenbelastung
a Betrachtung der Auswirkung der Querdehnzahl auf den Verlauf der Verschiebung v über die gesamte Scheibenlänge, **b** 10000-fache Vergrößerung des Verschiebungsverlaufs aus **a** in der Scheibenmitte ($x = \frac{l}{2}$).

5. Teil II Kopplung des geraden und des gekrümmten Bereichs zu einem Profil

In diesem Teil werden die analytisch bestimmten Spannungs- und Verschiebungsfelder der geraden und gekrümmten balkenartigen Scheiben unter „reiner“ Biegebelastung miteinander gekoppelt. Es werden Scheiben mit dem orthotropen Materialverhalten sowie orthotrop geschichtete Lamine betrachtet. Für den gekrümmten Bereich werden die in [10] hergeleiteten Beziehungen verwendet. Alle Untersuchungen finden an Scheiben mit gleicher Geometrie und bei gleicher Belastung statt. Die Rechnung erfolgt im ebenen Spannungszustand. Die Ergebnisse lassen sich mit der Beziehung (2.35) in den ebenen Verzerrungszustand überführen.

In diesem Teil wird das isotrope Werkstoffverhalten nicht betrachtet. Im Teil I ist es bereits gezeigt worden, dass die für das orthotrope Werkstoffverhalten im geraden Segment des Profils hergeleiteten Gleichungen auch für die Bestimmung der Spannungs- und der Verschiebungsfelder in Scheiben mit isotropen Werkstoffeigenschaften verwendet werden können. In [10] wird ebenfalls gezeigt unter welcher Einschränkung die hier verwendeten Gleichungen für den zylindrisch gekrümmten Bereich auch für isotrope Werkstoffe gelten.

5.1. Kopplung der Lösungen für die gerade und die gekrümmte balkenartige Scheibe mit orthotropen Werkstoffverhalten

Zunächst wird die Kopplung der Lösungen für gerade und gekrümmte balkenartige Scheiben mit orthotropem Werkstoffverhalten vollzogen. Die verwendeten Werkstoffparameter des geraden Balkens können der Tabelle 3.1 entnommen werden. Für den gekrümmten Balken werden die Materialeigenschaften aus [10] übernommen. Die für den ebenen Spannungszustand relevanten Werkstoffparameter des gekrümmten Bereichs sind in der Tabelle 5.1 zusammengefasst.

Tabelle 5.1: Materialparameter des gekrümmten Balkens

Materialparameter	Wert
E_r [MPa]	10000
E_φ [MPa]	135000
$G_{r\varphi}$ [MPa]	5000
$\nu_{\varphi r}$ [-]	0,27
$\nu_{r\varphi}$ [-]	0.02

Die Gleichungen für die Spannungs- und Verschiebungsfelder in der geraden balkenartigen Scheibe sind im Abschnitt 3.1 hergeleitet worden. Das Spannungsfeld, das unter der Momentenbelastung durch die Normalspannung σ_{xx} gebildet wird, kann wie folgt angeschrieben werden:

$$\sigma_{xx} = 6A_s y \quad (5.1)$$

Die Komponenten des Verschiebungsfeldes lauten:

$$u_s = \frac{6A_s}{E_x} xy - D_s y + G_{s,1} \quad (5.2)$$

$$v_s = -\frac{3A_s}{E_x} (\nu_{xy} y^2 + x^2) + D_s x + G_{s,2} \quad (5.3)$$

Das Spannungsfeld des gekrümmten Balkens wird durch die Spannungen σ_{rr} und $\sigma_{\varphi\varphi}$ gebildet. Diese sind im polaren Koordinatensystem wie folgt definiert:

$$\sigma_{rr} = 2B_c + (1+s) C_c r^{s-1} + (1-s) D_c r^{-s-1} \quad (5.4)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = 2B_c + s(1+s) C_c r^{s-1} - s(1-s) D_c r^{-s-1} \quad (5.5)$$

Die Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ ist in einer durch ein Biegemoment belasteten gekrümmten Scheibe gleich Null. Das Verschiebungsfeld der zylindrisch gekrümmten balkenartigen Scheibe setzt sich aus der Verschiebungskomponente u_c in Umfangsrichtung und der Verschiebungskomponente v_c in Radialrichtung zusammen. Diese lauten:

$$u_c = \frac{2B_c r \varphi}{E_\varphi} (1-s^2) + G_{c,2} \cos(\varphi) - G_{c,3} \sin(\varphi) + G_{c,4} r + G_{c,6} \quad (5.6)$$

$$v_c = \frac{1}{E_\varphi} [2B_c r (s^2 - \nu_{\varphi r}) + (s - \nu_{\varphi r}) (1+s) C_c r^s - (s + \nu_{\varphi r}) (1-s) D_c r^{-s}] + G_{c,2} \sin(\varphi) + G_{c,3} \cos(\varphi) \quad (5.7)$$

Die Abbildung 5.1 zeigt ein Profil bestehend aus einem geraden und einem zylindrisch gekrümmten Bereich. Die obigen Gleichungen beschreiben die Spannungs- und Verschiebungsfelder, die sich unter einer Momentenbelastung in den beiden Bereichen des Profils einstellen. Sie enthalten noch 11 unbekannte Koeffizienten A_s bis $G_{c,6}$, die mit Hilfe der Rand- und Übergangsbedingungen an der Schnittstelle der beiden Bereiche bestimmt werden. Die Herleitung der Beziehungen (5.4) bis (5.7) erfolgte in [10] in einem polaren Koordinatensystem, das dem $\hat{r}\hat{\varphi}$ -Koordinatensystem in der Abbildung 5.1 entspricht. Damit eine einheitliche Koordinatenrichtung ausgehend von der Einspannung des Profils in beiden Bereichen herrscht, werden vor der Kopplung der Spannungs- und Verschiebungsfelder die Gleichungen des gekrümmten Bereichs in das $r\varphi$ -Koordinatensystem (vgl. Abb. 5.1) mit den Beziehungen der Koordinatentransformation (5.8) überführt.

$$r = \hat{r}, \quad \hat{\varphi} = \frac{\pi}{2} - \varphi \quad (5.8)$$

Die Funktionen beider Spannungskomponenten ändern sich bei der Koordinatentransformation nicht. Sie können den Beziehungen (5.4) und (5.5) entnommen werden. Die beiden Verschiebungskomponenten sind von der Koordinatentransformation betroffen, und können nach der Anwendung der trigonometrischen Additionstheoreme wie folgt angeschrieben werden.

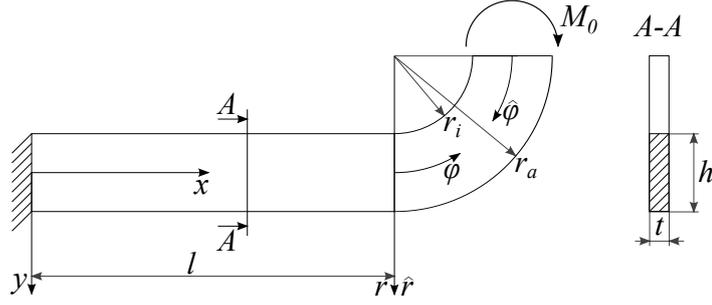


Abbildung 5.1: Kopplung der geraden und der zylindrisch gekrümmten balkenartigen Scheiben

$$u_c = \frac{2B_c r}{E_\varphi} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) (1 - s^2) + G_{c,2} \sin(\varphi) - G_{c,3} \cos(\varphi) + G_{c,4} r + G_{c,6} \quad (5.9)$$

$$v_c = \frac{1}{E_\varphi} \left[2B_c r (s^2 - \nu_{\varphi r}) + (s - \nu_{\varphi r}) (1 + s) C_c r^s - (s + \nu_{\varphi r}) (1 - s) D_c r^{-s} \right] + G_{c,2} \cos(\varphi) + G_{c,3} \sin(\varphi) \quad (5.10)$$

Die Verschiebungskomponente u_c im gekrümmten Balken ist in Faserrichtung entlang der Koordinate φ definiert. Somit stimmt sie an der Schnittstelle der beiden Scheiben mit der Verschiebungskomponente u_s des geraden Balkens in ihrer Richtung überein. Das Gleiche gilt für die Verschiebungskomponenten v_s und v_c .

An den Spannungskomponenten beider Bereiche ist einzusehen, dass der Spannungszustand weder vom Abstand x im geraden Segment noch vom Winkel φ im gekrümmten Segment des Profils abhängig ist. Somit kann das Momentengleichgewicht für beide Bereiche separat von einander aufgestellt werden. So lautet das Momentengleichgewicht für den geraden Bereich des Profils:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} y dy = -\frac{M_0}{t} \quad (5.11)$$

Im gekrümmten Bereich ergibt sich das Momentengleichgewicht aus der Forderung:

$$\int_{r_i}^{r_a} \sigma_{\varphi\varphi} r dr = -\frac{M_0}{t} \quad (5.12)$$

Anschließend sei gefordert, dass sowohl am inneren ($r = r_i$) als auch am äußeren Rand ($r = r_a$) des gekrümmten Bereichs die Spannung σ_{rr} verschwindet.

$$\sigma_{rr}(r = r_i) = 0, \quad \sigma_{rr}(r = r_a) = 0 \quad (5.13)$$

Aus der Festigkeitslehre ist bekannt, dass sich bei Biegung stark gekrümmter Balken eine Normalspannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ mit näherungsweise hyperbolischem Verlauf über die Höhe des Balkens einstellt. Dieser ist nicht kompatibel mit dem linearen Verlauf der Normalspannung σ_{xx} im geraden

Bereich des Profils. Das Gleiche gilt für die Normalspannung σ_{rr} , denn die entsprechende Normalspannung σ_{yy} im geraden Bereich des Profils ist unter Randmomentenbelastung gar nicht vorhanden. Somit muss beachtet werden, dass beim gegenwärtigen Ansatz der Kopplung die Spannungsfelder beider Profildsegmente inkompatibel bleiben. Die Herleitung eines verbesserten Ansatzes zur Kopplung beider Bereiche, bei dem auch die Kompatibilität der Spannungsfelder sichergestellt wird, erfolgt im Teil III dieser Arbeit.

Mit den Beziehungen (5.11) bis (5.13) lassen sich die Konstanten A_s , B_c , C_c und D_c bestimmen. Für die Bestimmung übriger Konstanten (D_s bis $G_{c,6}$) werden Randbedingungen an der Einspannung des Profils sowie Übergangsbedingungen an der Schnittstelle beider Segmente aufgestellt. Wie auch bei der Behandlung gerader, balkenartiger, orthotroper Scheiben im Teil I werden diese an der neutralen Achse des geraden Bereichs angebracht. An dieser Stelle ist es anzumerken, dass die neutralen Fasern des geraden und des gekrümmten Bereichs nicht übereinstimmen. Dieser Umstand wird hier jedoch nicht weiter verfolgt.

Aus der Einspannung des Profils folgt, dass die Konstanten D_s , $G_{s,1}$ und $G_{s,2}$, wie auch bei der alleinigen Betrachtung des geraden Segments unter der Momentenbelastung (s. Abschnitt 3.1.3) null sind. Somit reduziert sich das zu lösende Gleichungssystem (zusammen mit den Beziehungen (5.11) bis (5.13) betrachtet) auf acht Gleichungen. Die noch fehlenden Beziehungen werden aus den Übergangsbedingungen zwischen den beiden Profildsegmenten abgeleitet. So sei es gefordert, dass die Verschiebungskomponenten an der neutralen Faser ($y = 0$) des geraden Bereichs an der Stelle $x = l$ den Verschiebungskomponenten des gekrümmten Bereichs am mittleren Radius $r_m = \frac{r_a+r_i}{2}$ an der Stelle $\varphi = 0$ gleich sind.

$$u_s(x = l, y = 0) = u_c(r = r_m, \varphi = 0) \quad (5.14)$$

$$v_s(x = l, y = 0) = v_c(r = r_m, \varphi = 0) \quad (5.15)$$

Abschließend wird die Forderung formuliert, dass die Querschnittneigung und die Neigung der neutralen Faser bei $x = l$ des geraden Bereichs denen des gekrümmten Bereichs am mittleren Radius und an der Stelle $\varphi = 0$ gleichen. Man beachte hierbei, dass die Ableitungen der Verschiebungsfunktion beider Bereiche die gleichen Dimensionen aufweisen müssen. So muss die Ableitung der Verschiebung v_c nach dem Winkel φ noch zusätzlich durch den mittleren Radius r_m dividiert werden (s. Gl. (5.17)).

$$\left. \frac{\partial u_s}{\partial y} \right|_{x=l, y=0} = \left. \frac{\partial u_c}{\partial r} \right|_{r=r_m, \varphi=0} \quad (5.16)$$

$$\left. \frac{\partial v_s}{\partial x} \right|_{x=l, y=0} = \left. \frac{\partial v_c}{r_m \partial \varphi} \right|_{r=r_m, \varphi=0} \quad (5.17)$$

Mit den Bedingungen (5.11) bis (5.17) können die bisher unbekanntenen Koeffizienten eindeutig bestimmt werden. Diese Rand- und Übergangsbedingungen werden in einer Vektor-Matrix-Form zusammengefasst und zur Lösung an das mathematische Programm MATLAB übergeben. In symbolischer Schreibweise ist das Gleichungssystem in der Beziehung (5.18) angeschrieben.

$$\underline{\underline{R}} \underline{\underline{p}} = \underline{\underline{q}} \quad (5.18)$$

Die 8×8 große Koeffizientenmatrix \underline{R} setzt sich aus den nachfolgend aufgeführten Termen zusammen.

$$\begin{aligned}
 R_{11} &= \frac{1}{2}h^3, & R_{22} &= r_a^2 - r_i^2, & R_{23} &= s(r_a^{s+1} - r_i^{s+1}), \\
 R_{24} &= -s(r_a^{-s+1} - r_i^{-s+1}), & R_{32} &= 2, & R_{33} &= (1+s)r_i^{s-1}, \\
 R_{34} &= (1-s)r_i^{-s-1}, & R_{42} &= 2, & R_{43} &= (1+s)r_a^{s-1}, \\
 R_{44} &= (1-s)r_a^{-s}, & R_{52} &= -\frac{\pi}{E_\varphi}r_m(1-s^2), & R_{56} &= 1, \\
 R_{57} &= -r_m, & R_{58} &= -1, & R_{61} &= -\frac{3}{E_x}l^2, \\
 R_{62} &= -\frac{2}{E_\varphi}r_m(s^2 - \nu_{\varphi r}), & R_{63} &= -\frac{1}{E_\varphi}r_m^s(s - \nu_{\varphi r})(s+1), & R_{64} &= \frac{1}{E_\varphi}r_m^s(s + \nu_{\varphi r})(s-1), \\
 R_{65} &= -1, & R_{71} &= \frac{6}{E_x}l, & R_{72} &= -\frac{\pi}{E_\varphi}(1-s^2), \\
 R_{77} &= -1, & R_{81} &= -\frac{6}{E_x}l, & R_{86} &= -\frac{1}{r_m}
 \end{aligned}$$

Die übrigen Terme dieser Matrix sind gleich Null. Der Vektor \underline{p} enthält die gesuchten Konstanten.

$$\underline{p}^T = [A_s \ B_c \ C_c \ D_c \ G_{c,2} \ G_{c,3} \ G_{c,4} \ G_{c,6}]$$

Im Vektor \underline{q} werden die Kraftgrößen, die Eingang in die Rechnung finden, zusammengefasst.

$$\underline{q}^T = \left[-\frac{M_0}{t} \ -\frac{M_0}{t} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right]$$

Die Rechnung wurde für mehrere Profile mit variierenden geometrischen Abmaßen des geraden und des zylindrisch gekrümmten Segments durchgeführt. So wurden in Anlehnung an die im Teil I untersuchten geraden balkenartigen Scheiben die Längen-Höhen-Verhältnisse des geraden Segments $\frac{l}{h} = 3$, $\frac{l}{h} = 5$ und $\frac{l}{h} = 10$ betrachtet. Die Geometrie des gekrümmten Segments wurde ebenfalls mit drei unterschiedlichen mittleren Radien erstellt. Der kleinste betrachtete mittlere Radius r_m wurde so gewählt, dass der innere Radius r_i des gekrümmten Bereichs gleich der Scheibenhöhe h ist. Die übrigen mittleren Radien ergeben sich aus der Verdopplung des jeweils davor betrachteten Radius und entsprechen somit der dreifachen und der sechsfachen Höhe der Scheibe.

$$r_{m1} = \frac{3}{2}h, \quad r_{m2} = 3h, \quad r_{m3} = 6h$$

Die analytisch bestimmten Verläufe der Spannungs- und der Verschiebungskomponenten der untersuchten Profilgeometrien werden den Ergebnissen aus der FE-Rechnung gegenübergestellt. So kann auch geprüft werden, ob die geometrischen Parameter einen Einfluss auf die Genauigkeit der analytischen Rechnung haben. Insgesamt werden neun Profilgeometrien untersucht, die der gleichen beispielhaften Momentenbelastung $M_0 = 250$ Nmm ausgesetzt werden. Im Folgenden werden jedoch die Spannungs- und Verschiebungsfelder in einem Profil mit dem Längen-Höhen-Verhältnis des geraden Bereichs $\frac{l}{h} = 10$ und dem mittleren Radius des gekrümmten Bereichs $r_m = \frac{3}{2}h$ dargestellt. Die Verläufe der Spannungs- und Verschiebungskomponenten aus den Untersuchungen übriger Profilgeometrien sind im Anhang A zusammengefasst.

Die FE-Modelle zur Verifikation der analytischen Lösungen für Profile mit variierenden geometrischen Parametern l und r_m werden analog zu den im Teil I verwendeten Modellen mit rechteckigen Elementen mit linearen Ansatzfunktionen (CQUAD4) vernetzt. Die Feinheit des FE-Netzes wird in allen Modellen mit 20 Elementen über die Profilhöhe eingestellt. Die Anzahl der Elemente über die Länge des geraden Bereichs wird aus der Multiplikation der Elementzahl über die Höhe mit dem Längen-Höhen-Verhältnis des Flansches bestimmt, so dass die Elemente eine quadratische Form aufweisen. Die Elementgröße im gekrümmten Bereich wird mit der Vorgabe der Elementkantenlänge, die der im geraden Segment entspricht, am äußeren Rand festgelegt. Damit wird erreicht, dass die Elemente am äußeren Rand des gekrümmten Segments nicht größer als die des geraden Bereichs werden. Das Netz wird zum inneren Profilrand hin aufgrund der sich verringernden Länge des Bogens immer feiner. Die Abbildung 5.2 zeigt das FE-Modell eines Profils mit den geometrischen Parametern $l = 3h$ und $r_m = \frac{3}{2}h$. Damit das FE-Modell

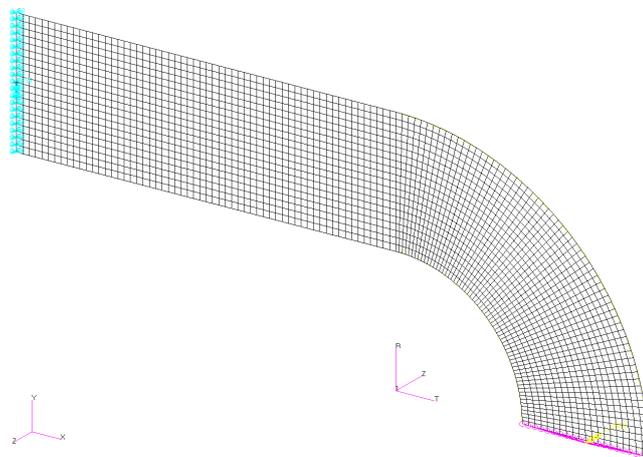


Abbildung 5.2: FE-Modell des Profils

und das analytische Modell des Profils identisch sind, werden die Knoten beider Segmente in unterschiedlichen Koordinatensystemen definiert. Die Rechnung im geraden Bereich erfolgt im kartesischen Koordinatensystem. Für die Analyse des gekrümmten Bereichs wird ein zylindrisches Koordinatensystem eingeführt, in dessen Ursprung sich der Mittelpunkt der Kreisbögen des Segments befindet (s. auch Abb. 5.1). Die Lagerung und die Anbringung der Last werden analog zu den FE-Modellen im Teil I modelliert. Bei der Zuweisung der Elementeigenschaften müssen die verwendeten Koordinatensysteme beachtet werden, denn per Definition verlaufen die Fasern im geraden Segment in x -Richtung (1. Koordinatenrichtung) und im gekrümmten Bereich in φ -Richtung (2. Koordinatenrichtung). Dementsprechend müssen auch die Materialeigenschaften so definiert werden, dass unabhängig vom Koordinatensystem übereinstimmen.

Für alle untersuchten Profilgeometrien weisen die Verläufe der analytisch bestimmten Spannungsfelder beider Segmente eine sehr gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen der FE-Rechnung in der Mitte des jeweiligen Bereichs auf. Zu dem aus der FE-Rechnung resultierenden Spannungszustand an der Schnittstelle beider Segmente bestehen jedoch, wie erwartet, erhebliche Unterschiede in den analytischen Lösungen. Dies ist in den Abbildungen 5.3 und 5.4 dargestellt. Die lokalen Koordinatenachsen r und φ im polaren Koordinatensystem des gekrümmten Bereichs fallen an der Stelle $\varphi = 0$ in ihren Richtungen mit den Achsen des kartesischen Koordinatensystems des geraden Bereichs zusammen. Somit bedarf die Darstellung der Spannungsverläufe

in den Abbildungen 5.3 und 5.4 lediglich einer Parallelverschiebung der Spannungskomponenten des gekrümmten Bereichs um den Betrag des mittleren Radius r_m in r -Richtung. Zusätzlich wird hier noch die Normierung über die Profilhöhe h vorgenommen. Die Verläufe der Spannungskomponenten sind, wie bereits oben erklärt, nicht kompatibel. Der tatsächliche Verlauf der Spannungskomponenten an der Schnittstelle beider Profilstimente wird in den Abbildungen 5.3 und 5.4 durch den roten Graphen abgebildet ($\sigma_{Sst_{FE}}$ und $\sigma_{rr,Sst_{FE}}$). In der Abbildung 5.4

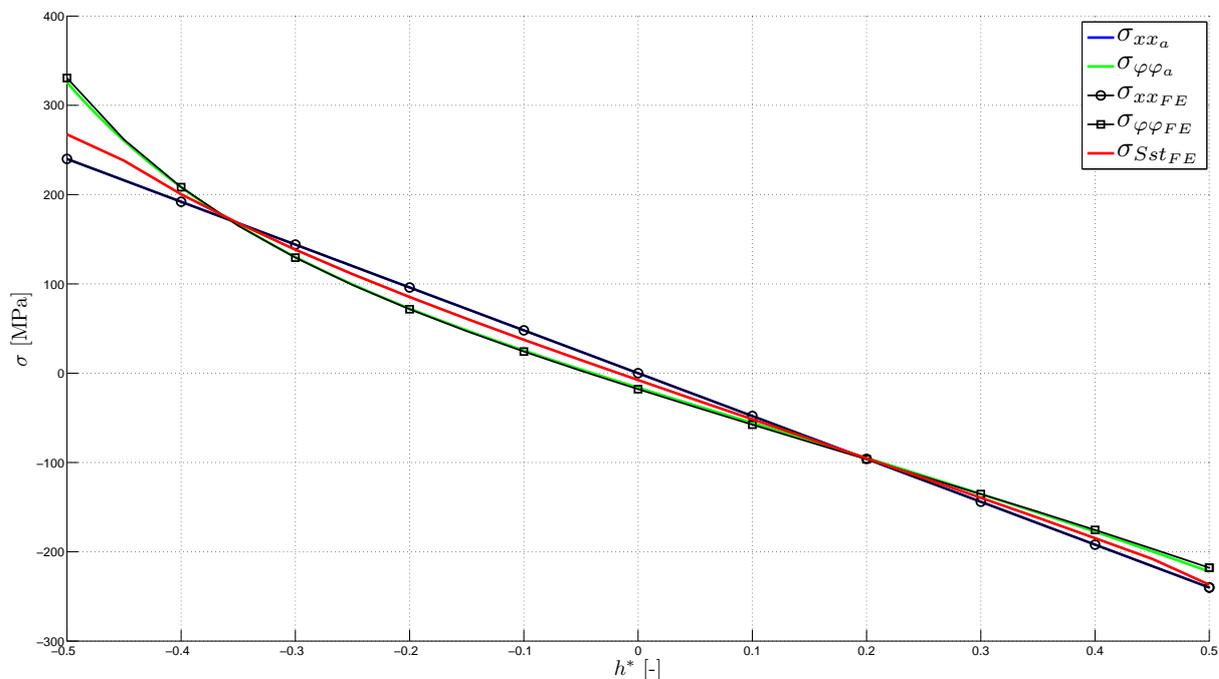


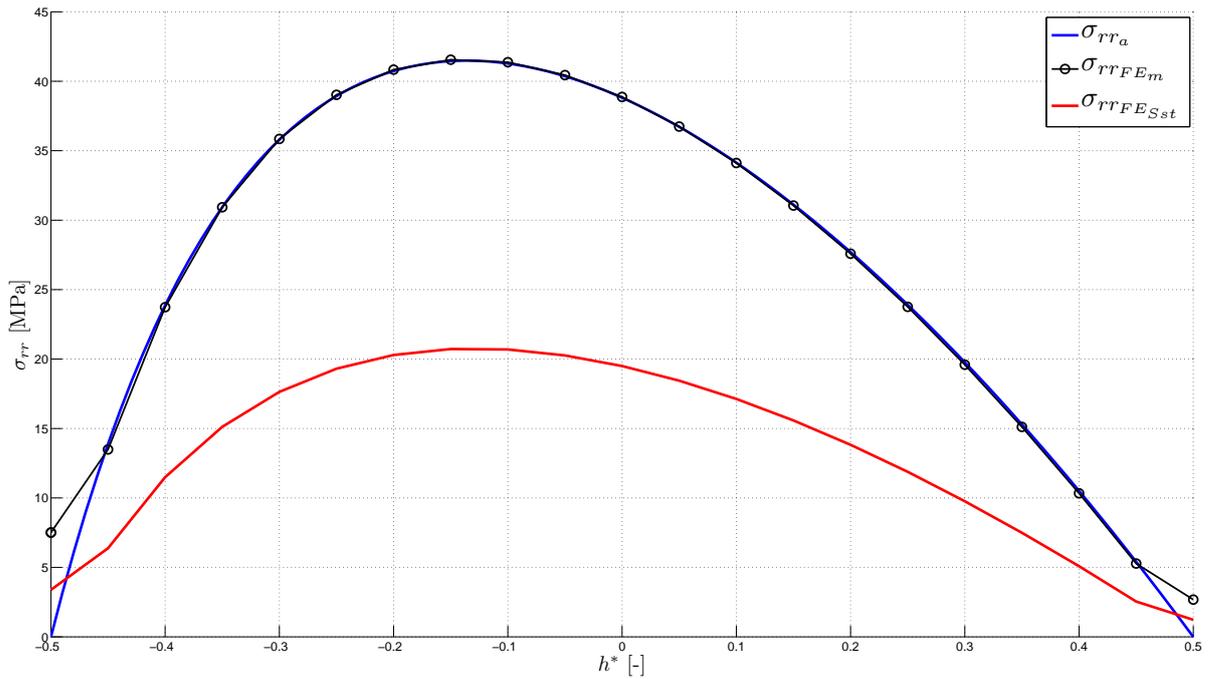
Abbildung 5.3: Verlauf der Normalspannungen σ_{xx} und $\sigma_{\varphi\varphi}$ über die normierte Höhe des Profils h^*

wird der Verlauf der Normalspannung σ_{yy} im geraden Profilstiment, die der dargestellten Spannungskomponente σ_{rr} äquivalent ist, nicht dargestellt, da diese Null über die gesamte Höhe des Profils ist.

Die Spannungsfelder beider Profilstimente unterliegen einem Einfluss von der an der Schnittstelle durch die Geometrieänderung erzeugten Störung. Der kontinuierliche Übergang des Spannungszustandes im geraden Profilstiment in den Spannungszustand des zylindrisch gekrümmten Bereichs wird hier von der analytischen Lösung jedoch nicht erfasst.

In der Abbildung 5.4 ist zu erkennen, dass die Forderung nach den spannungsfreien Ober- und Unterkante des Profils (s. Gl. (5.13)) in der FE-Rechnung mit dem verwendeten Netz, das über die Profilhöhe 20 Elemente (CQUAD4) aufweist, nicht erfüllt wird. Mit der Verwendung eines feineren Netzes wird diese Forderung besser approximiert. Dies ist am FE-Modell des Profils mit den kleinsten untersuchten geometrischen Verhältnissen $\frac{l}{h} = 3$ und $\frac{r_m}{h} = \frac{3}{2}$ mit der Verwendung eines FE-Netzes mit 100 Elementen über die Profilhöhe nachgewiesen worden. Die Abbildungen mit den Spannungskomponenten in diesem Profil sind im Anhang A untergebracht. Die FE-Modelle der untersuchten Profilgeometrien sind auf der dieser Arbeit beigefügten CD-ROM enthalten.

Nun wird das Verschiebungsfeld im zusammengesetzten Profil betrachtet. Die Kopplung der Verschiebungskomponenten in beiden Segmenten erfolgt mit den Übergangsbedingungen (5.14)


 Abbildung 5.4: Verlauf der Normalspannung σ_{rr} über die normierte Profilhöhe h^*

bis (5.17). Somit weist das analytisch bestimmte Verschiebungsfeld an der Schnittstelle beider Segmente für alle untersuchten Profilgeometrien im Gegensatz zu den Spannungsverläufen eine vollständige Kompatibilität auf. Die Verschiebungskomponenten in Faserrichtung u_{s_a} und u_{c_a} sind an der Schnittstelle äquivalent. Sie weisen ebenfalls eine hohe Übereinstimmung mit dem Verlauf der Verschiebungskomponente u_{FE} aus der FE-Rechnung auf. In der Abbildung 5.5 sind die Verläufe der Normalverschiebungen u_{s_a} und u_{c_a} über den Querschnitt an der Schnittstelle beider Bereiche dargestellt. Diese Darstellung wird analog der Darstellung der Spannungskomponenten in den Abbildungen 5.3 und 5.4 nach der Parallelverschiebung der Verschiebungsfunktion u_{c_a} um den Betrag des mittleren Radius r_m in r -Richtung erzeugt.

Die Verschiebungskomponenten v_s und v_c stimmen an der Schnittstelle im Schwerpunkt des Querschnittes ebenfalls miteinander überein. Mit den in der Beziehung (5.18) bestimmten Koeffizienten ergibt sich aus der Verschiebungsfunktion v_s (s. Gleichung (5.3)) an der Stelle $x = l$ und $y = 0$ der gleiche Betrag der Verschiebung wie aus der Verschiebungsfunktion v_c (s. Gleichung (5.10)) an der Stelle $r = r_m$ und $\varphi = 0$. Des Weiteren stimmt die Neigung der neutralen Achse des geraden Segments an der Schnittstelle mit der Neigung der Faser am mittleren Radius im gekrümmten Bereich überein. Für die Darstellung beider Verschiebungskomponenten in einem Diagramm müssen diese zuerst in ein gemeinsames Koordinatensystem transformiert werden. Die Transformation der Verschiebungskomponenten des gekrümmten Bereichs in das kartesische Koordinatensystem des geraden Bereichs erfolgt mit folgenden Transformationsbeziehungen.

$$u_c^{(s)} = (r_m + v_c) \sin(\varphi) + l \quad (5.19)$$

$$v_c^{(s)} = (r_m + v_c) \cos(\varphi) - r_m \quad (5.20)$$

Dabei wird mit dem zusätzlichen Summand l bzw. r_m am Ende der jeweiligen Transformationsbeziehung die Verschiebung des Koordinatenursprungs vorgenommen. Die Abbildung 5.6 zeigt

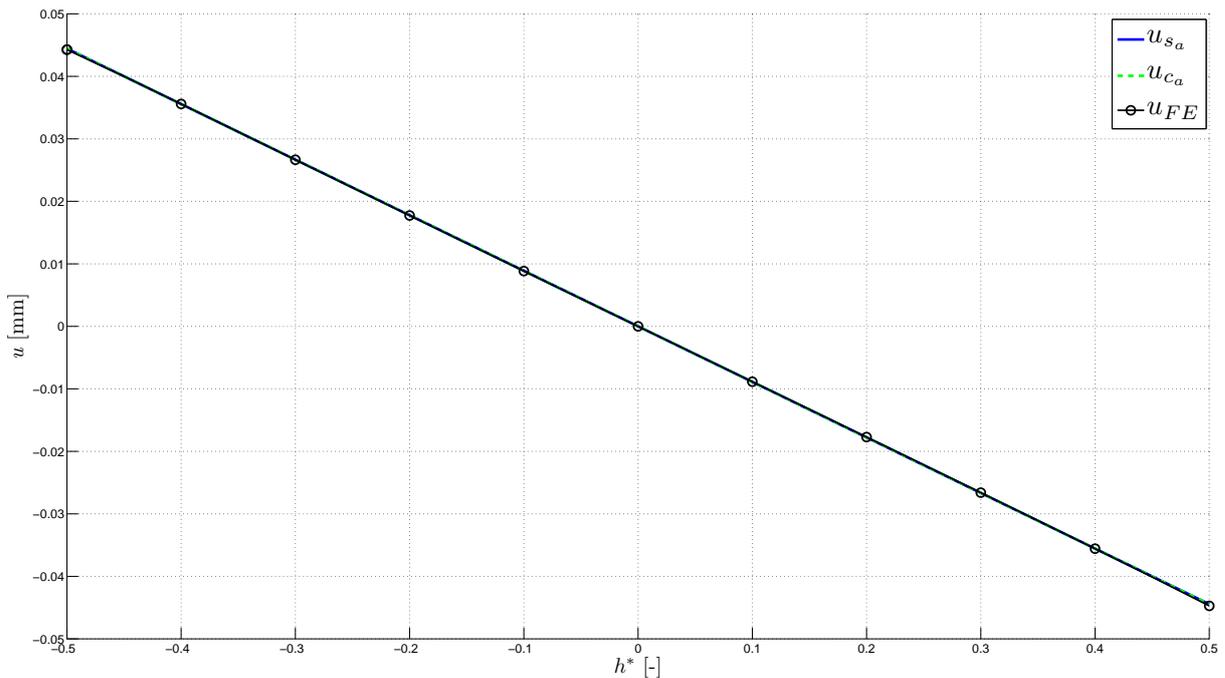


Abbildung 5.5: Verschiebung u an der Schnittstelle des geraden und des zylindrisch gekrümmten Segments dargestellt über die normierte Profilhöhe h^*

die Verschiebungen v_s und v_c im kartesischen Koordinatensystem des geraden Bereichs. Für eine übersichtlichere Darstellung wird dabei nicht das gesamte Profil abgebildet, sondern nur das gekrümmte Segment mit dem anschließenden Teil des geraden Bereichs.

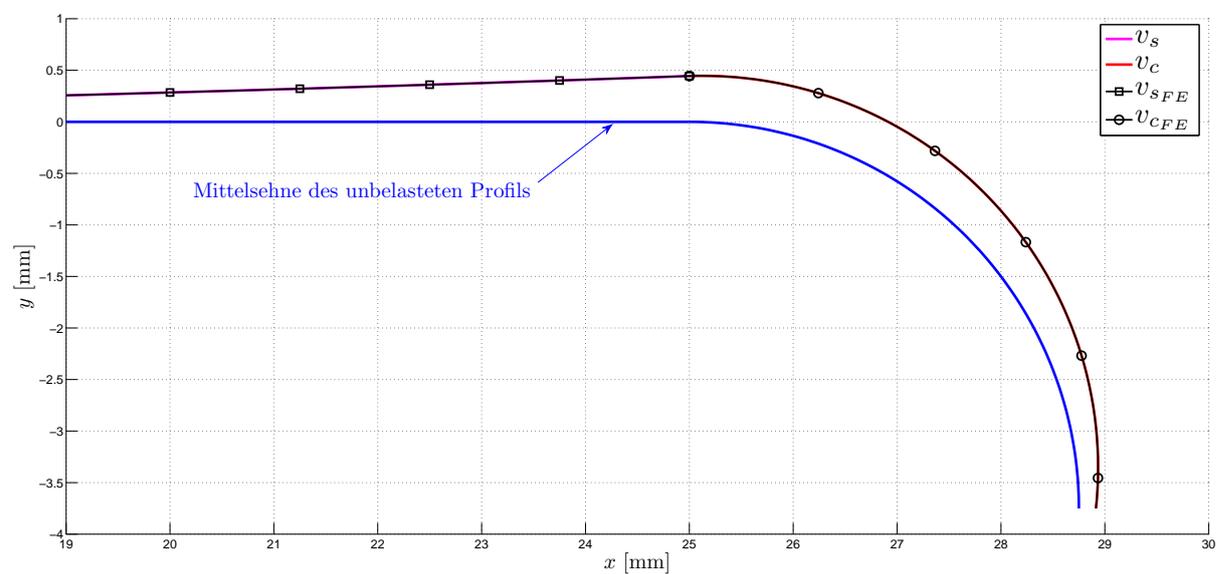


Abbildung 5.6: Verschiebungen v_s und v_c im kartesischen Koordinatensystem

In der Abbildung 5.6 ist deutlich zu erkennen, dass die Verschiebungskomponente v_c an der Schnittstelle des geraden und des gekrümmten Bereichs in Richtung der y -Achse zeigt. Am freien Rand des Profils entspricht ihre Richtung jedoch der x -Achse. Zusätzlich wird in der Abbildung 5.6 der Vergleich mit den Ergebnissen der FE-Rechnung durchgeführt. Der Verschiebungsvektor des gekrümmten Segments muss dabei ebenfalls mit den Beziehungen der Koordinaten-

transformation (5.19) und (5.20) in das kartesische Koordinatensystem des geraden Bereichs überführt werden. Die Übereinstimmung der analytischen Ergebnisse mit den Ergebnissen der FE-Rechnung ist sehr gut.

Mit der Berücksichtigung der Verschiebungskomponente u_c in φ -Richtung bei der Transformation der Verschiebung v_c in kartesische Koordinaten lässt sich die resultierende Verformung der mittleren Faser des Profils, wie sie in der Abbildung 5.7 dargestellt ist, abbilden. Die modifizierten Transformationsbeziehungen können hierbei wie folgt angeschrieben werden.

$$u_c^{(s)} = (r_m + v_c) \sin \left(\varphi + \frac{u_c}{r_m} \right) + l \quad (5.21)$$

$$v_c^{(s)} = (r_m + v_c) \cos \left(\varphi + \frac{u_c}{r_m} \right) - r_m \quad (5.22)$$

Dabei muss beachtet werden, dass der Winkel φ entgegen dem mathematisch positiven Drehsinn gemessen wird. Somit muss u_c mit negativen Vorzeichen in die Beziehungen (5.21) und (5.22) bei der Transformation der analytischen Ergebnisse eingeführt werden. Die Transformation der FE-Ergebnisse erfolgt ohne den Vorzeichenwechsel. Aufgrund der dreidimensionalen Umgebung des verwendeten FE-Modells wird in der FE-Rechnung anstelle des polaren Koordinatensystems ein zylindrisches verwendet. Bei der Definition des Winkels φ mit dem gleichen Drehsinn wie in der analytischen Rechnung dreht sich das gesamte Koordinatensystem, sodass die z -Achse entgegengesetzt zur z -Richtung des geraden Segments zeigt (s. Abb. 5.2). Somit wird im FE-Modell bei gleicher Anordnung der Koordinatenachsen in der Profilebene der Winkel φ positiv gemessen. Die Abbildung 5.7 zeigt ebenfalls eine sehr hohe Übereinstimmung des analytisch bestimmten Verschiebungsfeldes des gesamten Profils mit der Verformung aus der FE-Rechnung.

Abschließend kann angemerkt werden, dass mit der Beziehung (5.18) zur Kopplung einer geraden und einer gekrümmten balkenartigen Scheiben zu einem Profil nur für das Verschiebungsfeld zufriedenstellende Ergebnisse erzielt werden. Der Einfluss der aus der Geometrieänderung an der Schnittstelle beider Bereiche resultierenden Störung im Spannungsfeld des Profils wird in der analytischen Lösung nicht erfasst. Die Kopplung der Spannungsfelder bedarf einer weiteren Betrachtung. Dies geschieht im Teil III dieser Arbeit. Mit dem zunehmenden Radius des gekrümmten Bereichs nähern sich die Verläufe der Spannungskomponente beider Segmente an. Dies wird auch mit der Parameterstudie zur Auswirkung des Krümmungsverhältnisses auf den Spannungshaushalt des gekrümmten Bereichs in der Arbeit von P. Merkel (s. [10]) bestätigt.

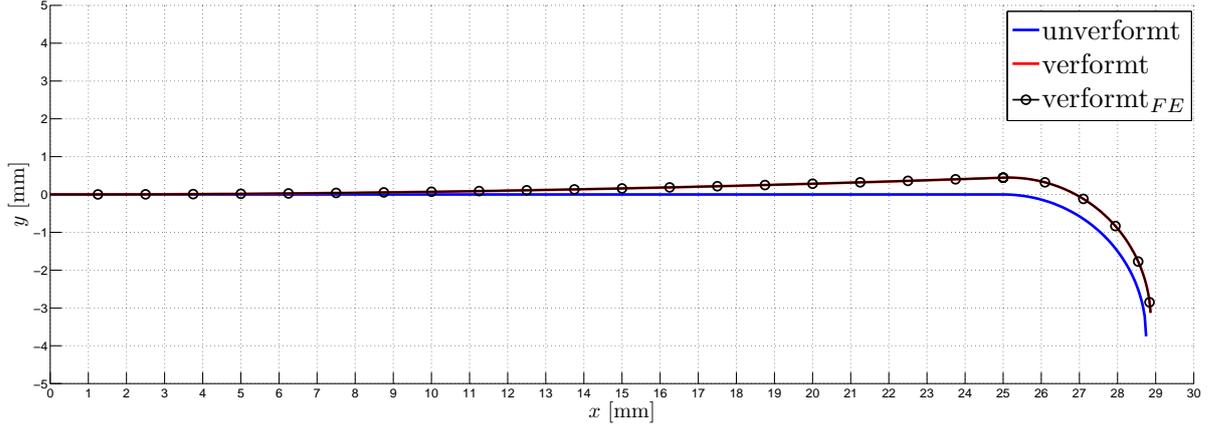


Abbildung 5.7: Gesamtes Profil im verformten Zustand

5.2. Kopplung der Lösungen für die gerade und die gekrümmte balkenartige Scheibe aus orthotrop geschichteten Laminaten

Nun wird die Kopplung des orthotrop geschichteten geraden und gekrümmten Segments vorgenommen. Dies erfolgt in der gleichen Art und Weise, wie die Kopplung der orthotropen Scheiben. Die beiden Bereiche bestehen aus gleicher Anzahl n der orthotropen UD-Schichten. Zur Beschreibung der jeweils betrachteten Laminatschicht wird analog zur Betrachtung des Laminats im Teil I ein hochgestellter Index j verwendet. Die verwendeten Beziehungen für die Spannungs- und die Verschiebungsfelder gelten somit nur innerhalb der jeweiligen Laminatlage. Für das gerade Segment können die Gleichungen für die Spannungs- und die Verschiebungskomponenten aus dem Abschnitt 3.3 übernommen werden. Unter der hier betrachteten Momentenbelastung kann das Spannungsfeld in der j -ten Laminatlage des geraden Bereichs demnach mit

$$\sigma_{xx}^{(j)} = 6A_s^{(j)}y \quad (5.23)$$

beschrieben werden. Die Komponenten des Verschiebungsfeldes einer Einzelschicht sind wie folgt definiert

$$u_s^{(j)}(x, y) = \frac{6A_s^{(j)}}{E_x^{(j)}}xy - D_{s,1}^{(j)}y + G_{s,1}^{(j)} \quad (5.24)$$

$$v_s^{(j)}(x, y) = -\frac{3A_s^{(j)}}{E_x^{(j)}}\left(\nu_{xy}^{(j)}y^2 + x^2\right) + D_{s,1}^{(j)}x + G_{s,2}^{(j)} \quad (5.25)$$

Die Gleichungen zur Bestimmung der Spannungskomponenten einer Einzelschicht im zylindrisch gekrümmten Bereich können ebenfalls unverändert aus [10] übernommen werden. Diese sind wie folgt definiert

$$\sigma_{rr}^{(j)} = 2B_c^{(j)} + (1 + s_j)C_c^{(j)}r^{s_j-1} + (1 - s_j)D_c^{(j)}r^{-s_j-1} \quad (5.26)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(j)} = 2B_c^{(j)} + s_j(1 + s_j)C_c^{(j)}r^{s_j-1} - s_j(1 - s_j)D_c^{(j)}r^{-s_j-1} \quad (5.27)$$

Die Verschiebungskomponenten der Einzelschicht j des gekrümmten Segments lassen sich nach

einer einer kleinen Umformung aufgrund der Drehung des Koordinatensystems wie folgt anschreiben.

$$u_c^{(j)} = \frac{2B_c^{(j)} r}{E_\varphi^{(j)}} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) (1 - s_j^2) + G_{c,2}^{(j)} \sin(\varphi) - G_{c,3}^{(j)} \cos(\varphi) + G_{c,4}^{(j)} r + G_{c,6}^{(j)} \quad (5.28)$$

$$v_c^{(j)} = \frac{1}{E_\varphi^{(j)}} \left[2B_c^{(j)} r \left(s_j^2 - \nu_{\varphi r}^{(j)} \right) + \left(s_j - \nu_{\varphi r}^{(j)} \right) (1 + s_j) C_c^{(j)} r^{s_j} - \left(s_j + \nu_{\varphi r}^{(j)} \right) (1 - s_j) D_c^{(j)} r^{-s_j} \right] + G_{c,2}^{(j)} \cos(\varphi) + G_{c,3}^{(j)} \sin(\varphi) \quad (5.29)$$

In den Beziehungen (5.23) bis (5.29) sind insgesamt elf unbekannte Koeffizienten enthalten. Somit sind für die Bestimmung der Spannungs- und der Verschiebungsfelder in beiden aus n Lagen bestehenden Segmenten $11 \cdot n$ Rand- bzw. Übergangsbedingungen erforderlich. An der Einspannung des Profils können in der Mitte jeder Einzelschicht folgende Randbedingungen definiert werden:

$$u_s^{(j)}(x = 0, y = \frac{y_{j-1} + y_j}{2}) = 0 \quad (5.30)$$

$$\left. \frac{\partial u_s^{(j)}}{\partial y} \right|_{x=0, y=\frac{y_{j-1}+y_j}{2}} = 0 \quad (5.31)$$

$$v_s^{(j)}(x = 0, y = 0) = 0 \quad (5.32)$$

Bei der Herleitung der Kontinuitätsbedingungen für die Verschiebungskomponenten an den Schichtgrenzen in einer geraden orthotrop geschichteten Scheibe im Abschnitt 3.3.3 ist es festgestellt worden, dass diese nur über die Scheibenlänge l gemittelt erfüllbar sind. Diese Bedingungen werden auch hier verwendet.

$$\int_{x=0}^l u_s^{(j)}(x, y = y_j) dx = \int_0^l u_s^{(j+1)}(x, y = y_j) dx \quad (5.33)$$

$$\int_{x=0}^l v_s^{(j)}(x, y = y_j) dx = \int_0^l v_s^{(j+1)}(x, y = y_j) dx \quad (5.34)$$

Im gekrümmten Segment des Profils ist die Mittlung für die Erfüllung der Kontinuitätsbedingungen über den Winkel φ ebenfalls erforderlich. Diese können wie folgt angeschrieben werden:

$$\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} u_c^{(j)}(r = r_a^{(j)}, \varphi) d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} u_c^{(j+1)}(r = r_i^{(j+1)}, \varphi) d\varphi \quad (5.35)$$

$$\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} v_c^{(j)}(r = r_a^{(j)}, \varphi) d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} v_c^{(j+1)}(r = r_i^{(j+1)}, \varphi) d\varphi \quad (5.36)$$

Hierin sind $r_a^{(j)}$ und $r_i^{(j+1)}$ der äußere und der innere Radius der benachbarten Einzelschichten. An der Schnittstelle beider Segmente gelten folgende Übergangsbedingungen:

$$u_s^{(j)}(x = l, y = \frac{y_{j-1} + y_j}{2}) = u_c^{(j)}(r = r_m^{(j)}, \varphi = 0) \quad (5.37)$$

$$v_s^{(j)}(x = l, y = \frac{y_{j-1} + y_j}{2}) = v_c^{(j)}(r = r_m^{(j)}, \varphi = 0) \quad (5.38)$$

$$\left. \frac{\partial u_s^{(j)}}{\partial y} \right|_{x=l, y=\frac{y_{j-1}+y_j}{2}} = \left. \frac{\partial u_c^{(j)}}{\partial r} \right|_{r=r_m^{(j)}, \varphi=0} \quad (5.39)$$

$$\left. \frac{\partial v_s^{(j)}}{\partial x} \right|_{x=l, y=\frac{y_{j-1}+y_j}{2}} = \left. \frac{\partial v_c^{(j)}}{r_m^{(j)} \partial \varphi} \right|_{r=r_m^{(j)}, \varphi=0} \quad (5.40)$$

mit $r_m^{(j)} = \frac{r_a^{(j)} + r_i^{(j)}}{2}$ als mittleren Radius der jeweiligen Einzelschicht.

Im gekrümmten Bereich des Profils tritt die Radialspannung σ_{rr} auf. Für diese wird am oberen und unteren Rand des Segments die Bedingungen der spannungsfreien Profilränder aufgestellt:

$$\sigma_{rr}^{(1)}(r = r_i) = 0 \quad (5.41)$$

$$\sigma_{rr}^{(n)}(r = r_a) = 0 \quad (5.42)$$

Außerdem wird die Kontinuität der Radialspannung σ_{rr} an den Grenzen zwischen den benachbarten Laminatlagen gefordert.

$$\sigma_{rr}^{(j)}(r = r_a^{(j)}) = \sigma_{rr}^{(j+1)}(r = r_i^{(j+1)}) \quad (5.43)$$

Mit der Formulierung der Momentengleichgewichte für die beiden Profilsegmente

$$\sum_{j=1}^n \left[\int_{y_{j-1}}^{y_j} \sigma_{xx}^{(j)} y dy \right] = -\frac{M_0}{t} \quad (5.44)$$

$$\sum_{j=1}^n \left[\int_{r_i^{(j)}}^{r_a^{(j)}} \sigma_{\varphi\varphi}^{(j)} r dr \right] = -\frac{M_0}{t} \quad (5.45)$$

ist das Gleichungssystem, mit dem die bisher unbekanntenen Koeffizienten berechnet werden, eindeutig lösbar.

Analog zur Untersuchung des zusammengesetzten Profils mit orthotropen Werkstoffeigenschaften im Abschnitt 5.1 werden die Spannungs- und die Verschiebungsfelder in orthotrop geschichteten Profilen unterschiedlicher Geometrien bestimmt und mit den Ergebnissen der FE-Rechnung verglichen. Diese Untersuchung erfolgt an einem bereits aus Teil I bekannten Beispiel-Laminat, das aus drei Lagen besteht, mit dem Lagenaufbau $[0 \mid 90 \mid 0]$. Als konstanter geometrischer Parameter wird die Höhe des Profils gewählt. Die Länge des geraden Flansches l und der mittlere Radius r_m des zylindrisch gekrümmten Segments sind variabel. Bei der Erstellung des

FE-Modells des Profils wird ein feines FE-Netz mit 60 quadratischen Elementen (CQUAD4) über die Profilhöhe gelegt, so dass die FE-Rechnung mit 20 Elementen über die Höhe einer Einzelschicht durchgeführt wird. Eines der verwendeten FE-Modelle mit dem Längen-Höhen-Verhältnis des Flansches $\frac{l}{h} = 3$ und dem mittleren Radius des gekrümmten Segments $r_m = \frac{3}{2}h$ ist in der Abbildung 5.8 gezeigt. Bei der Zuweisung der Elementeneigenschaften muss wie auch in den FE-

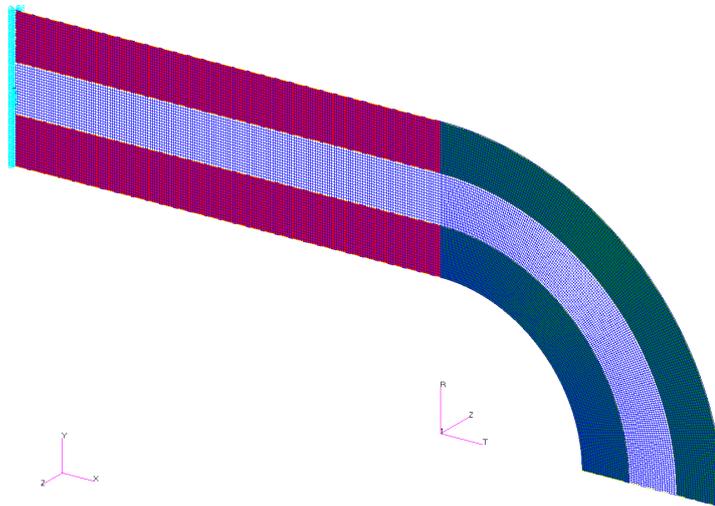


Abbildung 5.8: FE-Modell des orthotrop geschichteten Profils mit $\frac{l}{h} = 3$ und $\frac{r_m}{h} = \frac{3}{2}$

Modellen des Profils aus orthotropem Werkstoff das Koordinatensystem beachtet werden. Des weiteren verlaufen die Fasern in der 90°-Lage normal zu der Ebene, in der das Profil konstruiert wurde. Dies muss bei der Definition der Materialeigenschaften sowohl in der analytischen als auch in der FE-Rechnung berücksichtigt werden. Im FE-Modell des Profils wird der 90°-Lage aus diesem Grund ein Werkstoff mit isotropen Eigenschaften ($E = 10000$ MPa, $\nu = 0,27$) zugewiesen.

In der analytischen Rechnung hat der Faserverlauf der 90°-Lage unterschiedliche Auswirkungen auf die Annahmen für das Materialmodell in beiden Segmenten. Im geraden Segment muss lediglich berücksichtigt werden, dass die richtigen Materialparameter in der Rechnung verwendet werden. Im gekrümmten Bereich muss zusätzlich eine geringe künstliche Orthotropie eingeführt werden, da das Gleichungssystem mit den verwendeten Gleichungen und dem Orthotropieparameter $s = 1$ nicht lösbar ist. Die in der Rechnung verwendeten Werkstoffparameter sind in Tabelle 5.2 zusammengefasst. Die Angaben gelten im globalen Koordinatensystemen des Laminats.

An dem zu lösenden Gleichungssystem (s. Gl. (5.30) bis (5.45)) ist zu erkennen, dass die Bestimmung des Spannungsfeldes in beiden Segmenten des Profils nicht mehr völlig entkoppelt von dem Verschiebungsfeld (wie es im orthotropen Profil der Fall ist) erfolgen kann. So werden für die Bestimmung der Normalspannung σ_{xx} in einem aus n Lagen bestehenden geraden Segment auch n Gleichungen benötigt. Mit dem in der Beziehung (5.44) aufgestellten Momentengleichgewicht steht nur eine Gleichung zur Verfügung. Diese war bei der Behandlung des Profils aus orthotropem Werkstoff völlig ausreichend. Mit den Kontinuitätsbedingungen für die Verschiebungskomponenten an den Schichtgrenzen stehen insgesamt genügend Gleichungen zur Verfügung, um alle Koeffizienten eindeutig zu bestimmen. Bei der Verifikation der Ergebnisse im Teil I zeigt sich, dass dies auf den Verlauf der Normalspannung über den Querschnitt der gera-

Tabelle 5.2: Werkstoffparameter der Einzelschichten

gerader Bereich		gekrümmter Bereich	
Werkstoffparameter	Wert	Werkstoffparameter	Wert
$E_{xx}^{(1)} = E_{xx}^{(3)}$ [MPa]	135000	$E_{rr}^{(1)} = E_{rr}^{(2)} = E_{rr}^{(3)}$ [MPa]	10000
$E_{xx}^{(2)}$ [MPa]	10000	$E_{\varphi\varphi}^{(1)} = E_{\varphi\varphi}^{(3)}$ [MPa]	135000
$E_{yy}^{(1)} = E_{yy}^{(2)} = E_{yy}^{(3)}$ [MPa]	10000	$E_{\varphi\varphi}^{(2)}$ [MPa]	9999
$\nu_{xy}^{(1)} = \nu_{xy}^{(3)} = \nu_{xy}^{(3)}$ [-]	0,27	$\nu_{\varphi r}^{(1)} = \nu_{\varphi r}^{(3)} = \nu_{\varphi r}^{(3)}$ [-]	0,27
		$s_1 = s_3$	[-] 3,6742
		s_2	[-] 0,9999

den orthotrop geschichteten Scheibe unter der Momentenbelastung keine negative Auswirkung hat. Die Ergebnisse der analytischen Rechnung wiesen eine sehr gute Übereinstimmung mit der FE-Lösung auf.

Die Beziehungen für die Spannungskomponenten im gekrümmten Segment des Profils, das aus n orthotropen Lagen besteht, enthalten drei unbekannte Konstanten und erfordern somit $3 \cdot n$ Gleichungen zu deren Bestimmung. Mit dem Momentengleichgewicht im gekrümmten Bereich (5.45), den Bedingungen der spannungsfreien Profiliränder (5.41) und (5.42), sowie der Forderung nach der Kontinuität der Radialspannung σ_{rr} an den Schichtgrenzen (5.43) erhält man $n + 2$ Gleichungen. Die restlichen $2n - 2$ erforderlichen Bedingungen werden ebenfalls dem Verschiebungsfeld entnommen. Bei der Betrachtung der gekrümmten orthotrop geschichteten Scheibe, die an einem Ende fest eingespannt und am anderen Ende mit einem Randmoment beaufschlagt wird, ist dies nicht weiter kritisch. Die Untersuchung des gekrümmten Bereichs ist in [10] durchgeführt worden.

Nach der Kopplung beider orthotrop geschichteten Segmente zu einem Profil ist das Verschiebungsfeld des gekrümmten Bereichs von der Länge l des geraden Flansches abhängig. Der Umstand, dass für die Bestimmung der Koeffizienten in den Beziehungen zur Berechnung der Spannungskomponenten auch die Randbedingungen für das Verschiebungsfeld herangezogen werden, führt in der analytischen Lösung zu einem Einfluss der Länge l des geraden Bereichs auf den Verlauf der Spannungskomponenten im gekrümmten Segment. Dieser Einfluss beruht nur auf den mathematischen Zusammenhängen im Gleichungssystem und ist in der realen Struktur nicht vorhanden. Dies wird auch von der FE-Rechnung bestätigt. In der Abbildung 5.9 ist das Spannungsfeld im orthotrop geschichteten Profil bestehend aus einem langen Flansch ($\frac{l}{h} = 10$) und einem zylindrisch gekrümmten Segment mit hoher Krümmung ($r_m = \frac{3}{2}h$) dargestellt. Abgebildet sind die Spannungsverläufe der Normalspannungen in Richtung der neutralen Faser des Profils (Abb. 5.9a) und quer zur neutralen Faser des Profils (Abb. 5.9b). Die Inkompatibilität der analytisch bestimmten Spannungskomponenten an der Schnittstelle beider Segmente ist wie auch bei der Betrachtung des Profils aus orthotropen Werkstoff gegeben. Der Verlauf der Normalspannung σ_{xx_a} im geraden Bereich des Profils entspricht der Spannungskomponente $\sigma_{xx_{FE}}$ aus der FE-Rechnung, die sich in der Mitte des Segmentes einstellt. Im gekrümmten Bereich stimmen die Verläufe der Normalspannungen $\sigma_{\varphi\varphi_a}$ und $\sigma_{\varphi\varphi_{FE}}$ nicht mehr miteinander über-

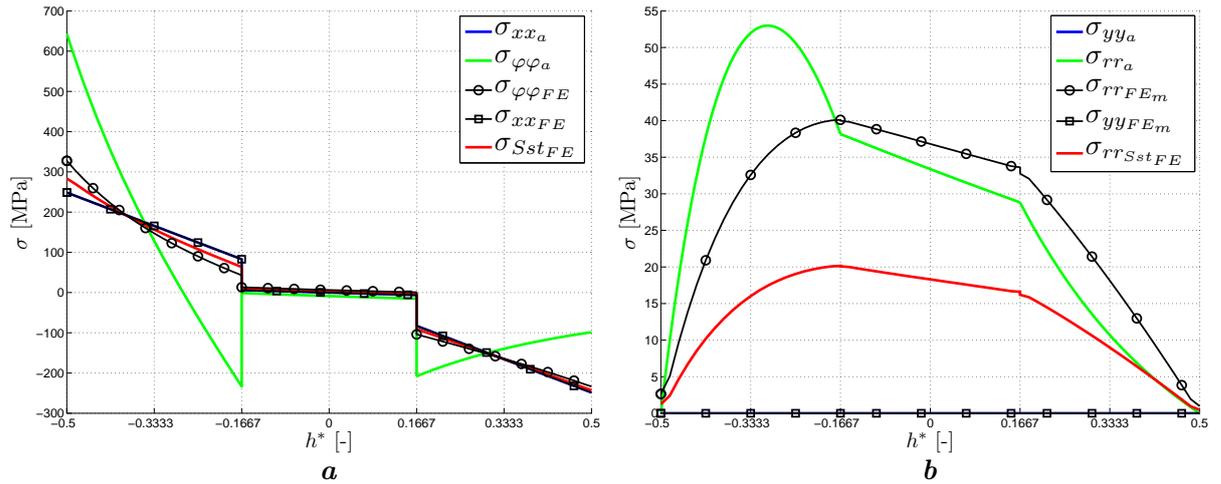


Abbildung 5.9: Spannungsfeld im aus einem geraden und einem zylindrisch gekrümmten Segment bestehenden Profil mit langem Flansch ($\frac{l}{h} = 10$) und starker Krümmung des Winkels ($\frac{r_m}{h} = \frac{3}{2}$)

a Normalspannung in Richtung der neutralen Faser des Profils, **b** Normalspannung quer zur neutralen Faser

ein. Sie weisen bei der oben genannten Geometrie des Profils sehr hohe Abweichungen auf. Der Verlauf der Radialspannung σ_{rr_a} aus der analytischen Rechnung weicht ebenfalls stark von den FE-Ergebnissen ab. Die Spannungen $\sigma_{Sst_{FE}}$ und $\sigma_{rr_{Sst_{FE}}}$ stellen die tatsächlichen Spannungsverläufe in Richtung der neutralen Faser des Profils und quer zu dieser an der Schnittstelle beider Segmente dar.

Die Spannungsverläufe aus der analytischen Rechnung mit einem kürzeren Flansch ($\frac{l}{h} = 3$) weisen eine viel geringere Abweichung von den Ergebnissen der FE-Rechnung auf. Dies ist in der Abbildung 5.10 dargestellt.

Die analytisch bestimmten Verschiebungskomponenten des Profils sind an der Schnittstelle beider Segmente mit einander kompatibel. Sie weisen außerdem eine hohe Übereinstimmung mit den Verschiebungskomponenten aus der FE-Rechnung auf. Die Abbildung 5.11 zeigt den Verlauf der Verschiebung u über die Höhe des Profils an der Schnittstelle. Es ist auch zu erkennen, dass diese Verschiebungskomponente an den Schichtgrenzen des Laminats kontinuierlich ist – es treten keine Sprünge oder Knicke im Verlauf der Verschiebungsfunktion auf.

Die Kontinuität der Verschiebungskomponente v an der Grenze zwischen zwei Schichten wird ebenfalls geprüft (s. Abb. 5.12). Im geraden Segment des Profils verlaufen die Verschiebungsfunktionen identisch. Die Mittelung dieser Verschiebungskomponente über die Segmentlänge in der Beziehung (5.34) wirkt sich somit wie auch bei der Betrachtung der orthotrop geschichteten geraden balkenartigen Scheibe im Abschnitt 3.3.3 nicht negativ aus. Des Weiteren ist eine sehr hohe Übereinstimmung mit dem Verlauf der Verschiebung v aus der FE-Rechnung feststellbar (s. Abb. 5.12a). Im gekrümmten Segment weichen aufgrund der Mittelung (s. Gl. (5.36)) die Verläufe der Verschiebungsfunktionen aus benachbarten Schichten an der Grenze von einander ab. Dies ist in der Abbildung 5.12b dargestellt. Mit der Verringerung der Krümmung (größerer Radius r_m) wird die Übereinstimmung der Verläufe besser (s. Anhang B).

Analog der Untersuchung des Profils mit orthotropem Werkstoffverhalten wird der verformte Zustand des Laminats betrachtet. Dies erfolgt ebenfalls an der mittleren Sehne des geschichteten

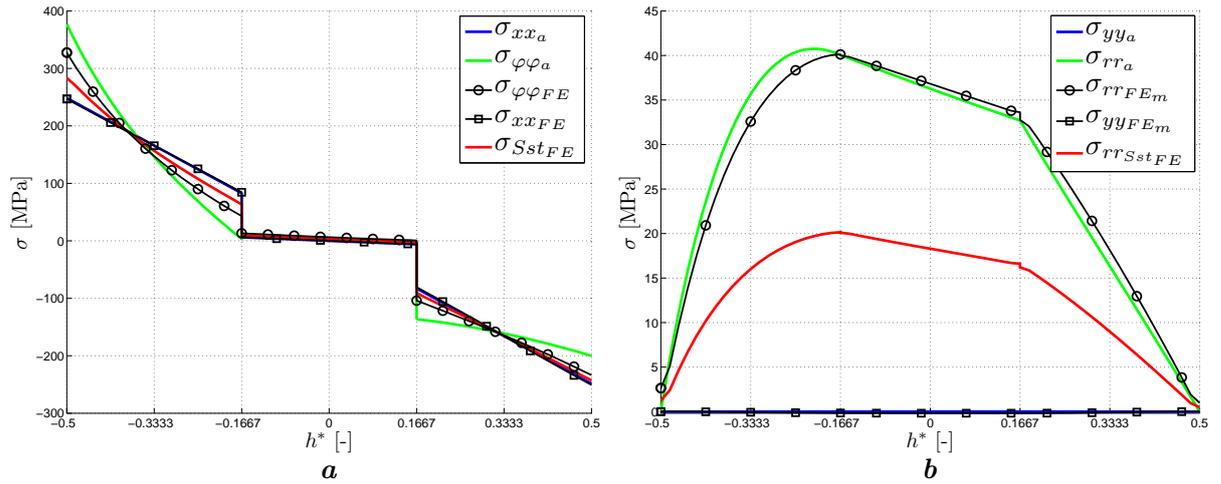


Abbildung 5.10: Spannungsfeld im aus einem geraden und einem zylindrisch gekrümmten Segmenten bestehenden Profil mit kurzem Flansch ($\frac{l}{h} = 3$) und starker Krümmung des Winkels ($\frac{r_m}{h} = \frac{3}{2}$)
a Normalspannung in Richtung der neutralen Faser des Profils, **b** Normalspannung quer zur neutralen Faser

Profils (2. Laminatlage). In der Abbildung 5.13 sieht man eine deutliche Übereinstimmung mit den FE-Ergebnissen.

Die analytische Lösung für das Spannungs- und das Verschiebungsfeld eines orthotrop geschichteten Profils unter einer Momentenbelastung, in der das Spannungsfeld des gekrümmten Bereichs eine Abhängigkeit von der Geometrie des geraden Bereichs aufweist, ist nicht zweckmäßig. Des weiteren sind in den Ergebnissen für das Spannungsfeld des gekrümmten Bereichs sehr hohe Abweichungen von der Referenz-Lösung aus einer FE-Rechnung feststellbar. Die Erwartung, dass beide Spannungskomponenten σ_{rr} und $\sigma_{\varphi\varphi}$ aus der analytischen Lösung einen identischen Verlauf wie die entsprechenden Spannungen aus der FE-Rechnung in der Mitte des gekrümmten Segments aufweisen, wird für das orthotrop geschichtete Profil nicht erfüllt. Die Diskrepanz in den Verläufen der Spannungskomponenten ist in den Lösungen für die Profile mit langem geraden Segment und hoher Krümmung des gekrümmten Bereichs am größten. Sie nehmen mit den abnehmenden Länge und Krümmung der jeweiligen Bereiche ab (s. Diagramme im Anhang B).

Unter einer Momentenbelastung ist das Spannungsfeld des geraden Bereichs von dessen Länge unabhängig. Beide Spannungskomponenten, die sich im gekrümmten Bereich einstellen, weisen keine Abhängigkeit von dem Winkel φ auf. Somit kann angenommen werden, dass sich in der Mitte des gekrümmten Segments vom Profil unter einer Momentenbelastung der gleiche Spannungszustand einstellt, wie in der einseitig eingespannten zylindrisch gekrümmten Scheibe. Diese ist in [10] betrachtet worden. Des weiteren kann angenommen werden, dass die Verformung des geraden Bereichs keinen Einfluss auf das Spannungsfeld des gekrümmten Segments hat.

Basierend auf den genannten Annahmen werden zur Bestimmung der gesuchten Koeffizienten $A_s^{(j)}$ bis $G_{c,6}^{(j)}$ drei separate Gleichungssysteme aufgestellt. Mit dem ersten Gleichungssystem werden die Koeffizienten $A_s^{(j)}$ bis $G_{s,2}^{(j)}$, die zur Ermittlung des Spannungs- und des Verschiebungsfeldes im geraden Bereich des Profils notwendig sind, bestimmt. Dieses Gleichungssystem wird durch die Gleichungen (5.30) bis (5.34) sowie das Momentengleichgewicht im geraden Seg-

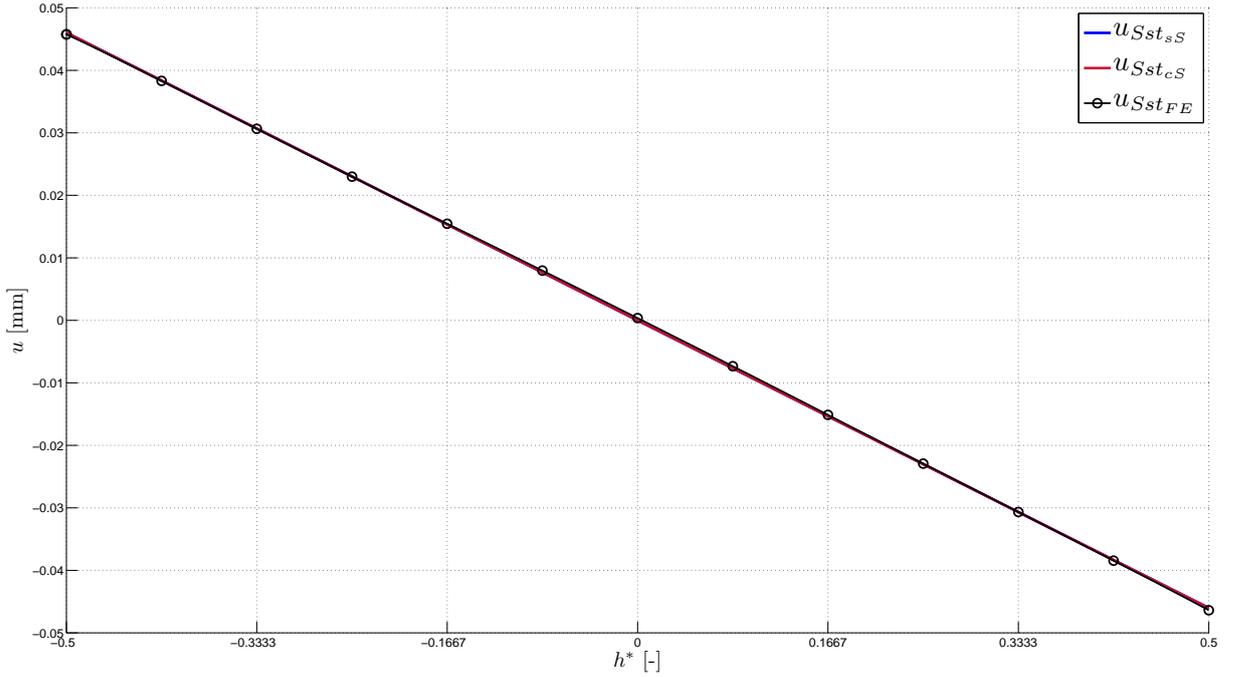


Abbildung 5.11: Verschiebung u an der Schnittstelle des geraden und des zylindrisch gekrümmten Segments

ment (5.44) gebildet. Im zweiten Gleichungssystem werden die Koeffizienten $B_c^{(j)}$ bis $D_c^{(j)}$, die in den Gleichungen zur Bestimmung des Spannungsfeldes im gekrümmten Bereich vorkommen, berechnet. Dieses System enthält das Momentengleichgewicht im gekrümmten Segment (5.45), die Bedingungen zur Radialspannung an den Segmenträndern und den Schichtgrenzen (5.41) bis (5.43), die Kontinuitätsbedingungen für das Verschiebungsfeld an den Schichtgrenzen (5.35) und (5.36) sowie die Bedingungen aus der Einspannung der zylindrisch gekrümmten orthotrop geschichteten Scheibe. Diese sind in den Gleichungen (5.46) und (5.49) angeschrieben.

$$u_c^{(j)}(r = r_m^{(j)}, \varphi = 0) = 0 \quad (5.46)$$

$$v_c^{(j)}(r = r_m^{(j)}, \varphi = 0) = 0 \quad (5.47)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} u_c^{(j)} \right|_{r=r_m^{(j)}, \varphi=0} = 0 \quad (5.48)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varphi} v_c^{(j)} \right|_{r=r_m^{(j)}, \varphi=0} = 0 \quad (5.49)$$

So wird sichergestellt, dass die Geometrie des geraden Bereichs keinen Einfluss auf das Spannungsfeld des gekrümmten Segments hat. Die Koeffizienten $G_{c,2}^{(j)}$ bis $G_{c,6}^{(j)}$, die sich ebenfalls bei der Lösung des Gleichungssystems ergeben, werden in der weiteren Rechnung nicht berücksichtigt. Zu deren Bestimmung wird ein weiteres Gleichungssystem aufgestellt, in das die Koeffizienten $A_s^{(j)}$ bis $D_c^{(j)}$ als bekannte Größen eingehen. Für die Bestimmung der vier unbekanntenen Konstanten pro Einzelschicht j werden die Gleichungen (5.37) bis (5.40) sowie die Kontinuitätsbedingungen an den Schichtgrenzen des gekrümmten Segments (s. Gl. (5.35) und (5.36)) herangezogen. Die Bedingung zur Querschnittsneigung an der Schnittstelle beider Segmente in der Mitte des

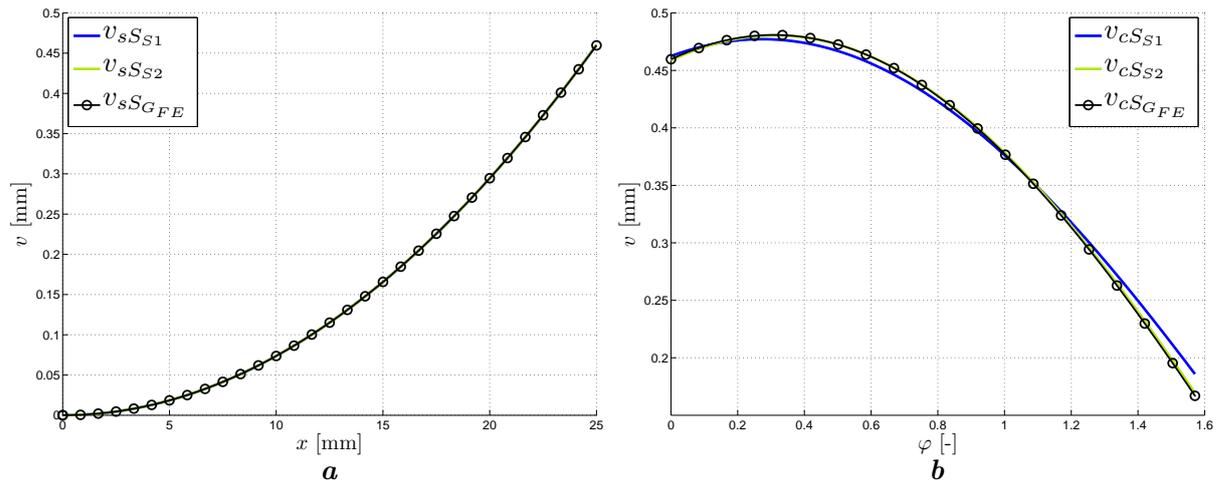


Abbildung 5.12: Verschiebung v an der Grenze zwischen der Schicht 1 und 2
a Verschiebung v im geraden Bereich **b** Verschiebung v im gekrümmten Bereich

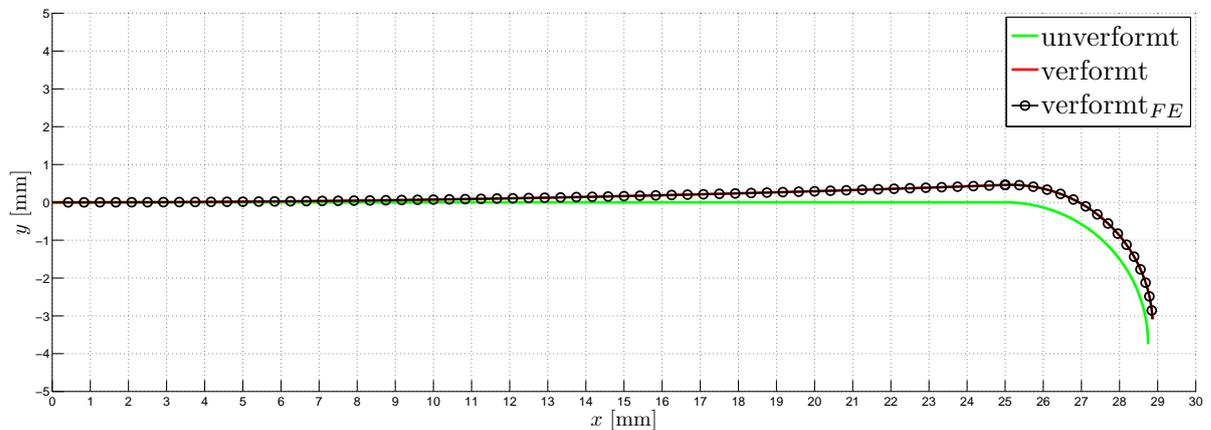


Abbildung 5.13: Verformung der mittleren Sehne des orthotrop geschichteten Profils unter der Momentenbelastung

Profilquerschnitts, die mit der Gleichung (5.39) aufgestellt wird, sowie die Neigung der mittleren Sehne (s. Gl. (5.40)) des Profils sind die beiden letzten Beziehungen, die dieses Gleichungssystem vervollständigen. Die Kopplung der Verschiebungsfelder beider Segmente (bzw. die Formulierung der Anfangsbedingungen für das Verschiebungsfeld des gekrümmten Bereichs) erfolgt somit über die Koeffizienten $G_{c,2}^{(j)}$ bis $G_{c,6}^{(j)}$.

Die Rechnung wurde für orthotrop geschichtete Profile mit gleichen geometrischen Parametern wie oben durchgeführt. Es ist dabei festgestellt worden, dass die Spannungskomponenten des gekrümmten Bereichs σ_{rr} und $\sigma_{\varphi\varphi}$ bei hoher Krümmung auch hier relativ hohe Abweichungen von den mit FEM bestimmten Spannungen aufweisen. Diese sind jedoch für alle untersuchten Längen des geraden Bereichs gleich. In der Abbildung 5.14 sind die Spannungskomponenten, die sich in beiden Segmenten eines orthotrop geschichteten Profils mit den geometrischen Parametern $l = 10h$ und $r_m = \frac{3}{2}h$ unter einer Momentenbelastung $M_0 = 250$ Nmm einstellen, dargestellt. Mit dem steigendem mittleren Radius r_m des Segments wird die Abweichung geringer. So ist die Übereinstimmung der analytisch und der mit FEM bestimmten Spannungsfelder in einem Profil mit geringer Krümmung des zylindrisch gekrümmten Segments sehr gut. Die Abbildung 5.15

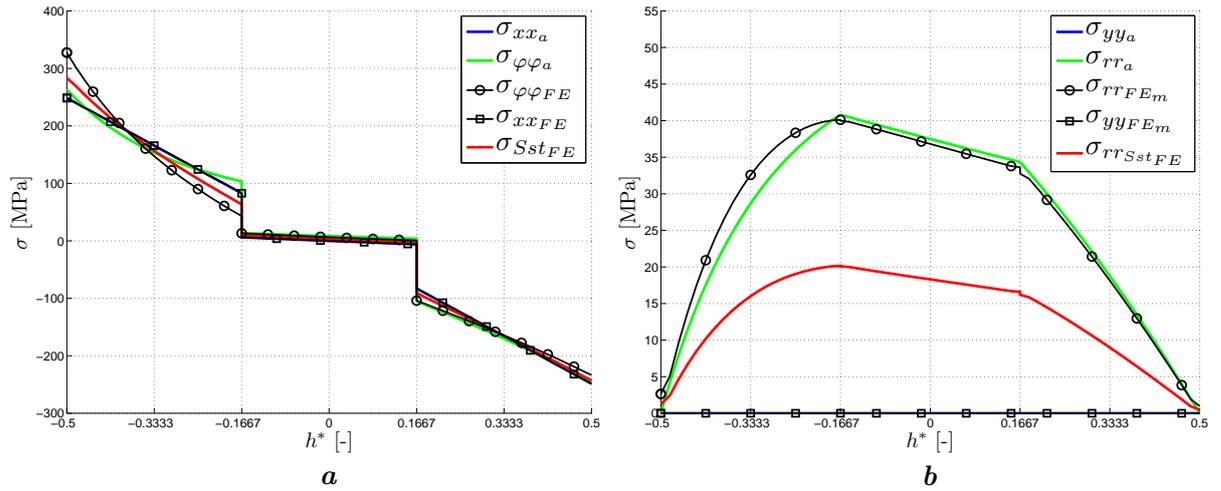


Abbildung 5.14: Spannungsfeld in aus einem geraden und einem zylindrisch gekrümmten Segmenten bestehenden orthotrop geschichteten Profil mit langem Flansch ($\frac{l}{h} = 10$) und starker Krümmung des Winkels ($\frac{r_m}{h} = \frac{3}{2}$) – bestimmt mit separatem Gleichungssystem

a Normalspannung in Richtung der neutralen Faser des Profils, **b** Normalspannung quer zur neutralen Faser

zeigt die Spannungscomponenten in einem Profil mit dem mittleren Radius des gekrümmten Bereichs $r_m = 6h$.

Die analytische Lösung für das Verschiebungsfeld im geraden Bereich des Profils weist trotz der Mittelung in den Kontinuitätsbedingungen (s. Gl. (5.33) und (5.34)) über die Länge l eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse an den Grenzen der benachbarten Laminatlagen auf. Außerdem stimmt der Verlauf der Verschiebungsfunktionen mit dem der Verschiebungscomponenten aus der FE-Rechnung überein. Dies ist in der Abbildung 5.16 **a** für die Verschiebung v an der Grenze zwischen der Schicht 1 und 2 des Beispiel-Laminats (die Indices $S1$ und $S2$ kennzeichnen die jeweilige Laminatschicht) dargestellt.

Die Kontinuitätsbedingungen für die Verschiebungscomponenten des gekrümmten Bereichs sind ebenfalls nur gemittelt erfüllbar, und zwar über den Winkel φ (s. Gl. (5.35) und (5.36)). Dies bedeutet, dass die analytisch bestimmten Verläufe der Verschiebungsfunktionen an einer Schichtgrenze von einander abweichen können. In der Abbildung 5.16 **b** verlaufen die Graphen der Verschiebungsfunktionen $v_{cS_{S1}}$ und $v_{cS_{S2}}$ an der Grenze zwischen der ersten und zweiten Lage des Beispiel-Laminats beinahe identisch. Sie wiesen auch eine gute Übereinstimmung mit dem Verschiebungsverlauf aus der FE-Rechnung auf. Die Koeffizienten der Verschiebungsfunktionen u_c und v_c hängen von der Länge des geraden Bereichs und dem Krümmungsradius des gekrümmten Bereichs ab. Dies führt dazu, dass die Übereinstimmung der Verschiebungsverläufe im gekrümmten Segment mit der Geometrie des Profils variiert. So sind im Profil mit einem kurzen Flansch und kleinem Krümmungsradius relativ große Abweichungen in den Verläufen der analytisch bestimmten Radialverschiebung v_c aus den benachbarten Schichten an der Schichtgrenze feststellbar (s. Abb. 5.17). Des weiteren weichen die Verläufe beider Verschiebungsfunktionen ebenfalls von der Radialverschiebung aus der FE-Rechnung ab. In Profilen, bei denen eines der beiden geometrischen Parameter größer wird, nähern sich die Verläufe an. Die Übereinstimmung mit den FE-Ergebnissen wird ebenfalls besser.

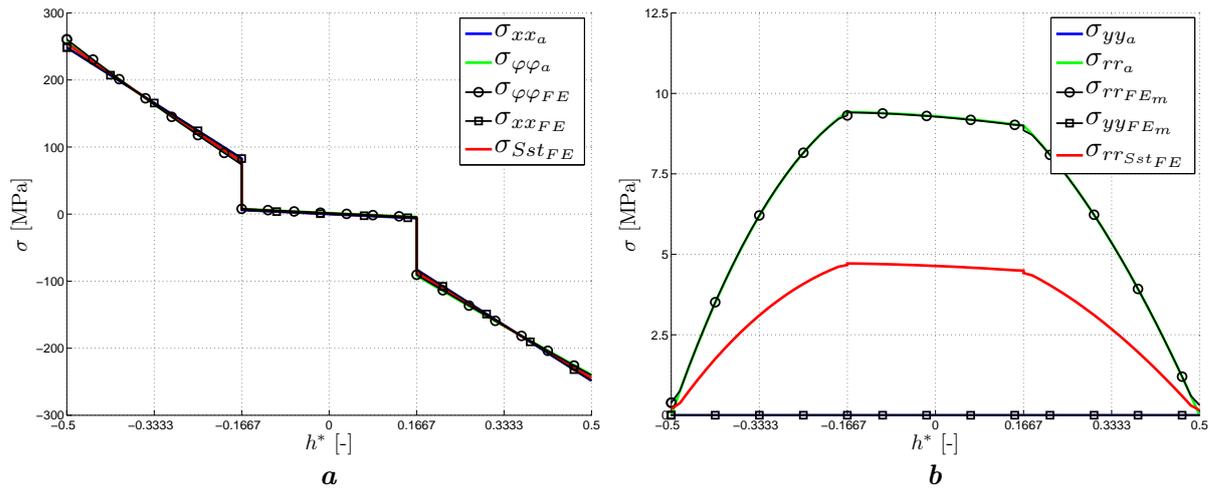


Abbildung 5.15: Spannungsfeld in aus einem geraden und einem zylindrisch gekrümmten Segmenten bestehenden orthotrop geschichteten Profil mit langem Flansch ($\frac{l}{h} = 10$) und geringer Krümmung des Winkels ($\frac{r_m}{h} = 6$) – bestimmt mit separatem Gleichungssystem

a Normalspannung in Richtung der neutralen Faser des Profils, **b** Normalspannung quer zur neutralen Faser

Die analytische Lösung für das orthotrop geschichtete Laminat bedarf weiterer Untersuchungen. Es ist empfehlenswert eine analytische Lösung für das zylindrisch gekrümmte Segment mit isotropen Werkstoffverhalten herzuleiten, sodass die Bestimmung des Spannungs- und des Verschiebungsfeldes in den 90° -Schichten des Laminats ohne eine Einführung der künstlichen Orthotropie in der Rechnung erfolgen kann. Ferner ist der Einfluss des Krümmungsradius auf das Spannungsfeld im gekrümmten Segment des orthotrop geschichteten Profils zu untersuchen, um die Abweichungen im Verlauf der Spannungskomponenten bei höherer Krümmung des Segments zu ergründen. Es ist auch vorstellbar eine andere Ayrische Spannungsfunktion für den gekrümmten Bereich zu verwenden, um diesen Einfluss zu vermeiden, bzw. ihn zu minimieren.

Die Kopplung des geraden und zylindrisch gekrümmten Segments eines Profils mit orthotrop geschichtetem Werkstoffverhalten konnte hier nur mit der separaten Berechnung des Spannungsfeldes im gekrümmten Bereich durchgeführt werden. Dies erforderte weitere Annahmen bezüglich des Spannungsfeldes im Profil (s. S. 94). Bei der Kopplung beider Segmente mit einem Gleichungssystem analog zur Betrachtung des Profils aus orthotropem Material wären diese überflüssig. Die Lösung wäre somit einfacher und genauer. Als eine Option wäre an dieser Stelle die Verwendung eines anderen Satzes an Rand- und Übergangsbedingungen möglich.

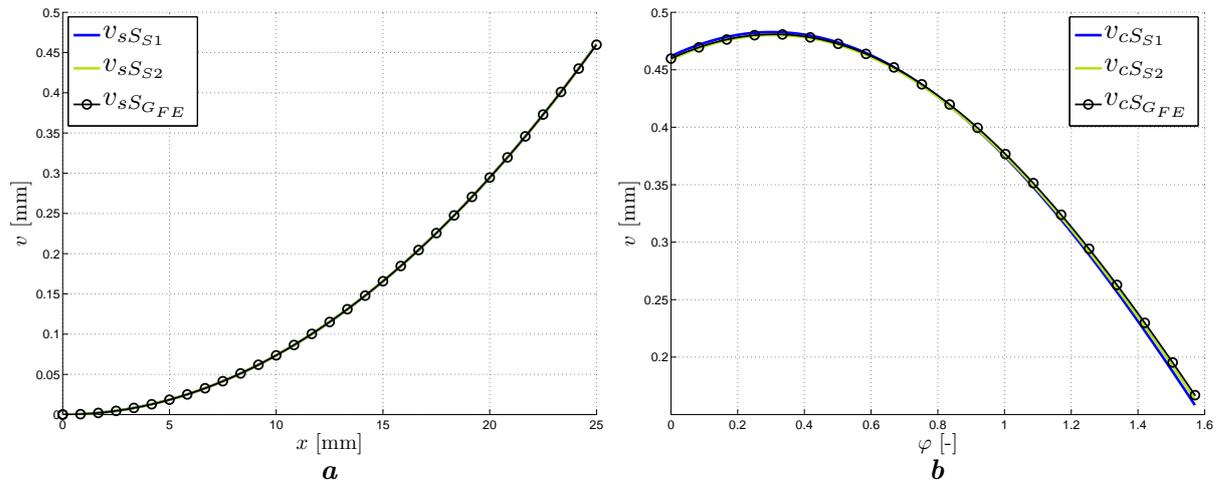


Abbildung 5.16: Verschiebung v an der Grenze zwischen der Schicht 1 und 2 – bestimmt mit separatem Gleichungssystem
a Verschiebung v im geraden Bereich **b** Verschiebung v im gekrümmten Bereich

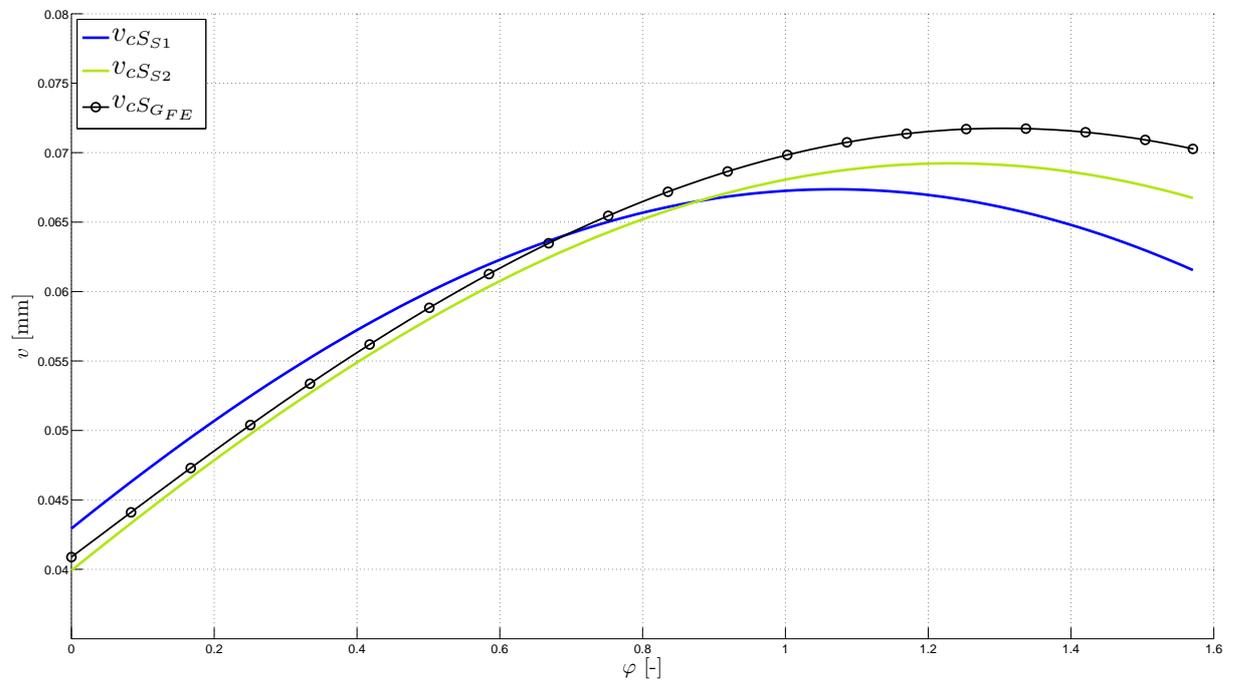


Abbildung 5.17: Radialverschiebung v_c an der Grenze zwischen der Schicht 1 und der Schicht 2 im gekrümmten Segment des untersuchten orthotrop geschichteten Profils mit $l = 3h$ und $r_m = \frac{3}{2}h$

6. Teil III Kopplung des geraden und des gekrümmten Segments mit dem Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials.

Im vorangegangenen Teil dieser Arbeit ist festgestellt worden, dass bei der analytischen Kopplung des geraden und des zylindrisch gekrümmten Segments eines unter Momentenbelastung stehenden Profils die Spannungskomponenten an der Schnittstelle beider Bereiche inkompatibel bleiben. Der kontinuierliche Übergang des Spannungszustandes des geraden Bereichs in den Spannungszustand des gekrümmten Bereichs wird bisher von der analytischen Lösung nicht erfasst. Die berechneten Spannungen entsprechen mit hoher Genauigkeit den Spannungskomponenten aus der FE-Rechnung, die sich in der Mitte beider Segmente des Profils mit orthotropen Werkstoffeigenschaften einstellen. An der Schnittstelle beider Bereiche tritt im Spannungsverlauf aufgrund der Geometrieänderung eine Störung auf, die mit der Entfernung vom Störungsursprung abklingt. Des Weiteren resultiert aus der Änderung der Normalspannungen an der Schnittstelle beider Segmente nach den Gleichgewichtsbeziehungen (s. Gl. (2.7) und (2.8)) das Auftreten einer Schubspannung, das in der bisherigen analytischen Lösung ebenfalls nicht berücksichtigt wird. In diesem Abschnitt wird der Versuch unternommen die Inkompatibilität der Spannungskomponenten aus dem geraden Bereich und dem zylindrisch gekrümmten Bereich des Profils zu eliminieren. Zum Einsatz kommt dabei das Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials.

Als Erstes wird für die Verschiebungsfelder beider Segmente angenommen, dass deren Komponenten sich aus einer bekannten Anfangsverschiebung, die in den Gleichungen (6.1) bis (6.4) mit dem Index „0“ gekennzeichnet ist, und einer bislang unbekanntem Verschiebung (mit dem Index „1“) zusammensetzen.

$$u_s = u_{s,0} + u_{s,1} \quad (6.1)$$

$$v_s = v_{s,0} + v_{s,1} \quad (6.2)$$

$$u_c = u_{c,0} + u_{c,1} \quad (6.3)$$

$$v_c = v_{c,0} + v_{c,1} \quad (6.4)$$

Für die Anfangsverschiebungen können die im Abschnitt 5.1 verwendeten Verschiebungsfunktionen eingesetzt werden. Die unbekanntem Verschiebungen können als ein Produkt aus zwei Funktionen, die jeweils nur von einer Variablen abhängig sind – von x oder von y im geraden Bereich bzw. von r oder von φ im gekrümmten Bereich des Profils, definiert werden. Die Gleichungen (6.1) bis (6.4) lassen sich dann wie folgt anschreiben:

$$u_s(x, y) = \frac{6A_s}{E_x} xy + U_{s,1,x}(x) U_{s,1,y}(y) \quad (6.5)$$

$$v_s(x, y) = -\frac{3A_s}{E_x} (\nu_{xy} y^2 + x^2) + V_{s,1,x}(x) V_{s,1,y}(y) \quad (6.6)$$

$$u_c(r, \varphi) = \frac{2B_c r}{E_\varphi} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) (1 - s^2) + G_{c,2} \sin(\varphi) - G_{c,3} \cos(\varphi) + G_{c,4} r + G_{c,6} + U_{c,1,r}(r) U_{c,1,\varphi}(\varphi) \quad (6.7)$$

$$v_c(r, \varphi) = \frac{1}{E_\varphi} [2B_c r (s^2 - \nu_{\varphi r}) + (s - \nu_{\varphi r}) (1 + s) C_c r^s - (s + \nu_{\varphi r}) (1 - s) D_c r^{-s}] + G_{c,2} \cos(\varphi) + G_{c,3} \sin(\varphi) + V_{c,1,r}(r) V_{c,1,\varphi}(\varphi) \quad (6.8)$$

Die Konstanten A_s bis $G_{c,6}$ können mit dem Gleichungssystem aus dem Abschnitt 5.1 bestimmt werden. Sie werden hier als bekannt vorausgesetzt.

Basierend auf der Änderung der Funktionsverläufe von Anfangsverschiebungen $u_{s,0}$ und $v_{s,0}$ mit der Variablen y werden für die Terme der unbekannt Verschiebungsfunktionen $U_{s,1,y}(y)$ und $V_{s,1,y}(y)$ des geraden Segments Annahmen getroffen. Da die Verschiebung $u_{s,0}$ eine lineare und die Verschiebung $v_{s,0}$ eine quadratische Abhängigkeit von y aufweisen, werden folgende Funktionsterme von $U_{s,1,y}(y)$ und $V_{s,1,y}(y)$ definiert:

$$U_{s,1,y}(y) = y, \quad V_{s,1,y}(y) = y^2 \quad (6.9)$$

Im gekrümmten Bereich werden die Verschiebungsfunktionen $U_{c,1,r}(r)$ und $V_{c,1,r}(r)$ mittels der Annahmen festgelegt, da diese an der Schnittstelle beider Segmente den Verschiebungen $U_{s,1,y}(y)$ und $V_{s,1,y}(y)$ des geraden Bereichs äquivalent sind. Der Einfachheit halber werden sie in gleicher Potenzordnung wie die Verschiebungsfunktionen des geraden Bereichs formuliert und lauten:

$$U_{c,1,r}(r) = r, \quad V_{c,1,r}(r) = r^2. \quad (6.10)$$

Für die Bestimmung der übrigen Verschiebungsfunktionen werden mit dem Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials und den Euler-Lagrange-Gleichungen Differentialgleichungen aufgestellt und anschließend gelöst. An die Verschiebungsfunktionen $U_{s,1,x}(x)$, $V_{s,1,x}(x)$, $U_{c,1,\varphi}(\varphi)$ und $V_{c,1,\varphi}(\varphi)$ werden folgende Anforderungen gestellt:

- Reelle Funktionsterme
- Abklingendes Verhalten

Die virtuelle Änderung vom Gesamtpotential $\delta\Pi$, die sich bei einer virtuellen Verrückung aus dem Gleichgewichtszustand des Profils ergibt, kann als eine Summe der virtuellen Änderungen der inneren Potentiale im geraden und gekrümmten Bereich des Profils $\delta\Pi_{i_s}$ und $\delta\Pi_{i_c}$ und des äußeren Potentials $\delta\Pi_a$ aufgefasst werden, die nach dem PMG gleich Null ist.

$$\delta\Pi = \delta(\Pi_{i_s} + \Pi_{i_c} + \Pi_a) = 0 \quad (6.11)$$

Die virtuelle Änderung der inneren Potentiale beider Bereiche kann nach Gleichung (2.66) wie

folgt angeschrieben werden.

$$\delta\Pi_{i_s} = \frac{1}{2}t\delta \int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dxdy \quad (i, j = x, y) \quad (6.12)$$

$$\delta\Pi_{i_c} = \frac{1}{2}t\delta \int_{r_i}^{r_a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_{kl}\varepsilon_{kl}rd\varphi dr \quad (k, l = r, \varphi) \quad (6.13)$$

Bei einer Momentenbelastung ist die virtuellen Änderung des äußeren Potentials als

$$\delta\Pi_a = \delta(-M_0\psi) = -M_0\delta\psi \quad (6.14)$$

definiert. Hierin ist $\delta\psi$ die virtuelle Änderung des Verdrehungswinkels am Angriffspunkt des Biegemoments. Die virtuelle Änderung des Gesamtpotentials nimmt somit die folgende Form an:

$$\delta\Pi = \delta \left[\frac{1}{2}t \left(\int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dxdy + \int_{r_i}^{r_a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_{kl}\varepsilon_{kl}rd\varphi dr \right) - M_0\delta\psi \right] = 0 \quad (6.15)$$

Mit den kinematischen Beziehungen (s. Gl. (2.16)) können aus den Verschiebungsfunktionen, die mit den getroffenen Annahmen wie folgt angeschrieben werden können:

$$u_s(x, y) = \frac{6A_s}{E_x}xy + U_{s,1,x}(x)y \quad (6.16)$$

$$v_s(x, y) = -\frac{3A_s}{E_x}(\nu_{xy}y^2 + x^2) + V_{s,1,x}(x)y^2 \quad (6.17)$$

$$u_c(r, \varphi) = \frac{2B_cr}{E_\varphi} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) (1 - s^2) + G_{c,2} \sin(\varphi) - G_{c,3} \cos(\varphi) + G_{c,4}r + G_{c,6} + rU_{c,1,\varphi}(\varphi) \quad (6.18)$$

$$v_c(r, \varphi) = \frac{1}{E_\varphi} [2B_cr(s^2 - \nu_{\varphi r}) + (s - \nu_{\varphi r})(1 + s)C_cr^s - (s + \nu_{\varphi r})(1 - s)D_cr^{-s}] + G_{c,2} \cos(\varphi) + G_{c,3} \sin(\varphi) + r^2V_{c,1,\varphi}(\varphi). \quad (6.19)$$

die Verzerrungen bestimmt werden. Für den geraden Bereich lauten diese:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{6A_s}{E_x}y + \frac{dU_{s,1,x}(x)}{dx}y \quad (6.20)$$

$$\varepsilon_{yy} = -\frac{6A_s}{E_x}\nu_{xy}y + 2V_{s,1,x}(x)y \quad (6.21)$$

$$\gamma_{xy} = U_{s,1,x}(x) + \frac{dV_{s,1,x}(x)}{dx}y^2 \quad (6.22)$$

Für die Bestimmung der Verzerrungen im gekrümmten Segment des Profils müssen kinematische Beziehungen im polaren Koordinatensystem, deren Herleitung in [17] vorgenommen wird, herangezogen werden. Die Verzerrungen des gekrümmten Bereichs können wie folgt angeschrieben werden.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} = \frac{\partial v_c(r, \varphi)}{\partial r} = \frac{1}{E_\varphi} [2B_c (s^2 - \nu_{\varphi r}) + s (s - \nu_{\varphi r}) (1 + s) C_c r^{s-1} \\ + s (s + \nu_{\varphi r}) (1 - s) D_c r^{-s+1}] + 2V_{c,1,\varphi}(\varphi) \end{aligned} \quad (6.23)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_c(r, \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{v_c(r, \varphi)}{r} = \frac{1}{E_\varphi} [2B_c (\nu_{\varphi r} + 1 - s^2) + (s - \nu_{\varphi r}) (1 + s) C_c r^{s-1} \\ - (s + \nu_{\varphi r}) (1 - s) D_c r^{-s-1}] + \frac{2}{r} G_{c2} \cos(\varphi) + \frac{2}{r} G_{c3} \sin(\varphi) \\ + \frac{dU_{c,1,\varphi}(\varphi)}{d\varphi} + rV_{c,1,\varphi}(\varphi) \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_c(r, \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_c(r, \varphi)}{\partial r} - \frac{u_c(r, \varphi)}{r} = \frac{2}{r} (G_{c3} \cos(\varphi) - G_{c2} \sin(\varphi)) \\ + \frac{rdV_{c,1,\varphi}(\varphi)}{d\varphi} - \frac{1}{r} G_{c6} \end{aligned} \quad (6.25)$$

Anschließend erhält man mit Hilfe der konstitutiven Beziehungen die Spannungskomponenten in beiden Profildsegmenten. Die Bestimmung der Spannungen im geraden Bereich erfolgt mit der Beziehung (2.24).

$$\sigma_{xx} = Q_{s11} \varepsilon_{xx} + Q_{s12} \varepsilon_{yy} \quad (6.26)$$

$$\sigma_{yy} = Q_{s21} \varepsilon_{xx} + Q_{s22} \varepsilon_{yy} \quad (6.27)$$

$$\tau_{xy} = Q_{s66} \gamma_{xy} \quad (6.28)$$

Die Spannungskomponenten des gekrümmten Bereichs lassen sich in gleicher Weise berechnen. Die jeweiligen Steifigkeiten gelten dabei bezüglich des polaren Koordinatensystems.

$$\sigma_{rr} = Q_{c11} \varepsilon_{rr} + Q_{c12} \varepsilon_{\varphi\varphi} \quad (6.29)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = Q_{c21} \varepsilon_{rr} + Q_{c22} \varepsilon_{\varphi\varphi} \quad (6.30)$$

$$\tau_{r\varphi} = Q_{c66} \gamma_{r\varphi} \quad (6.31)$$

Nach dem Einsetzen der Gleichungen (6.26) bis (6.31) in die Beziehung (6.15) und der Berücksichtigung der Symmetrie der Steifigkeitsmatrizen in den konstitutiven Beziehungen ergibt sich

die virtuelle Änderung des Gesamtpotentials im Profil zu:

$$\begin{aligned}
 \delta\Pi &= \frac{t}{2} \delta \int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{s11} \varepsilon_{xx}^2 + 2Q_{s12} \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + Q_{s22} \varepsilon_{yy}^2 + Q_{s66} \gamma_{xy}^2 dy dx \\
 &+ \frac{t}{2} \delta \int_{r_i}^{r_a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (Q_{c11} \varepsilon_{rr}^2 + 2Q_{c12} \varepsilon_{rr} \varepsilon_{\varphi\varphi} + Q_{c22} \varepsilon_{\varphi\varphi}^2 + Q_{c66} \gamma_{r\varphi}^2) r d\varphi dr \\
 &- M_0 \delta\psi = 0
 \end{aligned} \tag{6.32}$$

Auf das weitere symbolische Auflösen – das Einsetzen der Verzerrungen in die Beziehung (6.32) und die anschließende Integration, wird hier verzichtet. Stattdessen wird die Gleichung (6.32) an das Berechnungsprogramm Maple übergeben. Für die weitere Betrachtung ist es mit den Gleichungen (6.20) bis (6.25) bereits ersichtlich, dass das Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials auch als

$$\delta\Pi = \delta \int_0^l \mathcal{F}_s (U_s, U'_s, V_s, V'_s, x) dx + \delta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{F}_c (U_c, U'_c, V_c, V'_c, \varphi) d\varphi = 0 \tag{6.33}$$

angeschrieben werden kann. Aufgrund der getroffenen Annahmen (s. Gl. (6.9) und (6.10)) können die Integrale über y und r aufgelöst werden. Der Integrand \mathcal{F} des jeweiligen Bereichs ist somit nur von den gesuchten Verschiebungsfunktionen U und V , deren Ableitungen U' und V' , sowie einer unabhängigen Integrationsvariablen x bzw. φ abhängig. In der Beziehung (6.33) fällt das äußere Potential heraus, da das Moment am Rand des Profils angreift. Der Integrand \mathcal{F} wird auch als Funktional bezeichnet. Aus dieser Form des PMG können mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{F}_s}{\partial U_s} - \left(\frac{\partial \mathcal{F}_s}{\partial U'_s} \right)' = 0 \tag{6.34}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_s}{\partial V_s} - \left(\frac{\partial \mathcal{F}_s}{\partial V'_s} \right)' = 0 \tag{6.35}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_c}{\partial U_c} - \left(\frac{\partial \mathcal{F}_c}{\partial U'_c} \right)' = 0 \tag{6.36}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_c}{\partial V_c} - \left(\frac{\partial \mathcal{F}_c}{\partial V'_c} \right)' = 0 \tag{6.37}$$

vier gewöhnliche Differentialgleichungen aufgestellt werden. Diese sind in zwei Differentialgleichungssystemen für den geraden Bereich und den gekrümmten Bereich des Profils zusammengefasst. Die Lösung dieser Differentialgleichungen liefert die gesuchten Funktionen $U_{s,1,x}(x)$, $V_{s,1,x}(x)$, $U_{c,1,\varphi}(\varphi)$ und $V_{c,1,\varphi}(\varphi)$.

Für den geraden Bereich erhält man mit den Beziehungen (6.34) und (6.35) aus dem ersten Integral der Gleichung (6.33) ein Differentialgleichungssystem, das im Allgemeinen wie folgt

angeschrieben werden kann:

$$K_{s_{11}} \left(\frac{d^2 U_{s,1,x}(x)}{dx^2} \right) + K_{s_{12}} \left(\frac{dV_{s,1,x}(x)}{dx} \right) + K_{s_{13}} U_{s,1,x}(x) = 0 \quad (6.38)$$

$$K_{s_{21}} \left(\frac{d^2 V_{s,1,x}(x)}{dx^2} \right) + K_{s_{22}} \left(\frac{dU_{s,1,x}(x)}{dx} \right) + K_{s_{23}} V_{s,1,x}(x) = K_{s_{24}} \quad (6.39)$$

Hierin sind die Koeffizienten $K_{s_{11}}$ bis $K_{s_{24}}$ bekannt. Die beiden Differentialgleichungen können mit den ausgeschriebenen Koeffizienten wie folgt angegeben werden:

$$-\frac{1}{6} Q_{s_{11}} h^3 \left(\frac{d^2 U_{s,1,x}(x)}{dx^2} \right) + 2Q_{s_{66}} h U_{s,1,x}(x) + \frac{1}{6} (Q_{s_{66}} - 2Q_{s_{12}}) h^3 \left(\frac{dV_{s,1,x}(x)}{dx} \right) = 0 \quad (6.40)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{40} Q_{s_{66}} h^5 \left(\frac{d^2 V_{s,1,x}(x)}{dx^2} \right) + \frac{2}{3} Q_{s_{22}} h^3 V_{s,1,x}(x) + \\ + \frac{1}{6} (2Q_{s_{12}} - Q_{s_{66}}) h^3 \left(\frac{dU_{s,1,x}(x)}{dx} \right) = \frac{2A_s}{E_x} (\nu_{xy} Q_{s_{22}} - Q_{s_{12}}) h^3 \end{aligned} \quad (6.41)$$

Dieses Gleichungssystem wird mit dem Berechnungsprogramm Maple aufgelöst. Die beiden gesuchten Verschiebungsfunktionen $U_{s,1,x}(x)$ und $V_{s,1,x}(x)$ im geraden Profilstück ergeben sich zu:

$$U_{s,1,x}(x) = S_1 e^{-\frac{1}{2} J_1 x} + S_2 e^{\frac{1}{2} J_1 x} + S_3 e^{-\frac{1}{2} J_2 x} + S_4 e^{\frac{1}{2} J_2 x} \quad (6.42)$$

$$\begin{aligned} V_{s,1,x}(x) = \frac{1}{4 K_{s_{21}} K_{s_{11}} K_{s_{12}} K_{s_{23}}} \left[(K_{s_{23}} K_{s_{11}} + K_{s_{22}} K_{s_{12}} - K_{s_{13}} K_{s_{21}}) \left(Z_1 e^{-\frac{1}{2} J_1 x} S_1 + \right. \right. \\ \left. \left. - Z_1 e^{\frac{1}{2} J_1 x} S_2 + Z_2 e^{-\frac{1}{2} J_2 x} S_3 - Z_2 e^{\frac{1}{2} J_2 x} S_4 \right) + \right. \\ \left. + P \left(Z_1 \left(e^{-\frac{1}{2} J_1 x} S_1 - e^{\frac{1}{2} J_1 x} S_2 \right) - Z_2 \left(e^{-\frac{1}{2} J_2 x} S_3 - e^{\frac{1}{2} J_2 x} S_4 \right) \right) \right] + \frac{K_{s_{24}}}{K_{s_{23}}}. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Als Abkürzungen wurden hierin die folgenden Terme festgelegt:

$$J_1 = \frac{\sqrt{-2K_{s_{21}} K_{s_{11}} (K_{s_{23}} K_{s_{11}} - K_{s_{22}} K_{s_{12}} + K_{s_{21}} K_{s_{13}} + P)}}{K_{s_{21}} K_{s_{11}}}$$

$$J_2 = \frac{\sqrt{-2K_{s_{21}} K_{s_{11}} (K_{s_{23}} K_{s_{11}} - K_{s_{22}} K_{s_{12}} + K_{s_{21}} K_{s_{13}} - P)}}{K_{s_{21}} K_{s_{11}}}$$

$$\begin{aligned} P = \sqrt{K_{s_{23}} K_{s_{11}} (K_{s_{23}} K_{s_{11}} - 2K_{s_{22}} K_{s_{12}} - 2K_{s_{21}} K_{s_{13}})} \\ + \sqrt{K_{s_{22}}^2 K_{s_{12}}^2 - 2K_{s_{22}} K_{s_{12}} K_{s_{21}} K_{s_{13}} + K_{s_{21}}^2 K_{s_{13}}^2} \end{aligned}$$

$$Z_1 = \sqrt{-2K_{s21}K_{s11} (K_{s23}K_{s11} - K_{s22}K_{s12} + K_{s21}K_{s13} + P)}$$

$$Z_2 = \sqrt{-2K_{s21}K_{s11} (K_{s23}K_{s11} - K_{s22}K_{s12} + K_{s21}K_{s13} - P)}$$

Die Verschiebungsfunktionen müssen das abklingende Verhalten der Störung von deren Ursprung wiedergeben. Für die Funktionen $U_{s,1,x}(x)$ und $V_{s,1,x}(x)$ des geraden Segments bedeutet dies das zum freien Rand hin ansteigende Verhalten, da sie im entgegengesetzt orientierten Koordinatensystem definiert sind. Somit werden in der weiteren Betrachtung nur die Terme mit positiven Exponenten betrachtet. Nach dem Einsetzen der Zahlenwerte stellt sich heraus, dass dies die Terme mit den Konstanten S_2 und S_4 sind. Demnach reduzieren sich die Gleichungen (6.42) und (6.43) zu:

$$U_{s,1,x}(x) = S_2 e^{\frac{1}{2}J_1 x} + S_4 e^{\frac{1}{2}J_2 x} \quad (6.44)$$

$$V_{s,1,x}(x) = \frac{1}{4} \frac{1}{K_{s21}K_{s11}K_{s12}K_{s23}} \left[(K_{s23}K_{s11} + K_{s22}K_{s12} - K_{s13}K_{s21}) \left(Z_1 e^{\frac{1}{2}J_1 x} S_2 + \right. \right. \\ \left. \left. - Z_2 e^{\frac{1}{2}J_2 x} S_4 \right) + P \left(-Z_1 e^{\frac{1}{2}J_1 x} S_2 + Z_2 e^{\frac{1}{2}J_2 x} S_4 \right) \right] + \frac{K_{s24}}{K_{s23}} \quad (6.45)$$

Die unbekanntenen Konstanten S_2 und S_4 werden zusammen mit den Konstanten des gekrümmten Bereichs aus den Übergangsbedingungen an der Schnittstelle beider Segmente bestimmt.

Mit dem zweiten Satz der Euler-Lagrange-Gleichungen (s. Gln. (6.36) und (6.37)) werden die Differentialgleichungen zur Bestimmung der Verschiebungsfunktionen $U_{c,1,\varphi}(\varphi)$ und $V_{c,1,\varphi}(\varphi)$ gewonnen. Diese lauten:

$$K_{c11} \left(\frac{d^2 U_{c,1,\varphi}(\varphi)}{d\varphi^2} \right) + K_{c12} \left(\frac{dV_{s,1,x}(x)}{dx} \right) = K_{c13} \sin(\varphi) + K_{c14} \cos(\varphi) \quad (6.46)$$

$$K_{c21} \left(\frac{d^2 V_{c,1,\varphi}(\varphi)}{d\varphi^2} \right) + K_{c22} \left(\frac{dU_{c,1,\varphi}(\varphi)}{d\varphi} \right) + K_{c23} V_{c,1,\varphi}(\varphi) = K_{c24} \sin(\varphi) + \\ + K_{c25} \cos(\varphi) + K_{c26} \quad (6.47)$$

Die Koeffizienten K_{c11} bis K_{c26} setzen sich aus bekannten Größen zusammen und können wie folgt angegeben werden:

$$K_{c11} = -Q_{c22} (r_a^2 - r_i^2)$$

$$K_{c12} = -\frac{2}{3} (r_a^3 - r_i^3) (Q_{c22} + 2Q_{c12})$$

$$K_{c13} = 4Q_{c22} G_{c,2} (r_a - r_i)$$

$$K_{c14} = -4Q_{c22}G_{c,3}(r_a - r_i)$$

$$K_{c21} = \frac{1}{2}Q_{c66}(r_i^4 - r_a^4)$$

$$K_{c22} = \frac{2}{3}(Q_{c22} + 2Q_{c12})(r_a^3 - r_i^3)$$

$$K_{c23} = \frac{1}{2}(r_a^4 - r_i^4)(4Q_{c11} + 4Q_{c12} + Q_{c22})$$

$$K_{c24} = 2G_{c,3}(r_a^2 - r_i^2)(2Q_{c12} + Q_{c22} + Q_{c66})$$

$$K_{c25} = 2G_{c,2}(r_a^2 - r_i^2)(2Q_{c12} + Q_{c22} + Q_{c66})$$

$$\begin{aligned} K_{c26} = & [3D_c(r_a^{2-s} - r_i^{2-s})(2+s)(s-1)(s+\nu_{\varphi r})(Q_{c12}s + 2Q_{c11}s - Q_{c22} - 2Q_{c12}) + \\ & - 3C_c(r_a^{2+s} - r_i^{2+s})(1+s)(s-2)(\nu_{\varphi r} - s)(Q_{c12}s + 2Q_{c11}s + Q_{c22} + 2Q_{c12}) + \\ & - 2B_c(r_a^3 - r_i^3)(s^2 - 4)[\nu_{\varphi r}(3Q_{c12} + 2Q_{c11} + Q_{c22}) - s^2(2Q_{c11} + 2Q_{c22} + 5Q_{c12}) + \\ & + Q_{c22} + 2Q_{c12}] \frac{2}{3E_{\varphi}(s^2 - 4)} \end{aligned}$$

Die Differentialgleichungen (6.46) und (6.47) zur Bestimmung der Verschiebungsfunktionen im gekrümmten Segment können vom Berechnungsprogramm Maple nicht aufgelöst werden. Der Grund hierfür sind die in den Störgliedern enthaltenen sin- und cos-Funktionen. Um das Differentialgleichungssystem zu lösen, wird es zunächst in die Matrixform überführt.

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} K_{c11} & 0 \\ 0 & K_{c21} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{M}}_1} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{d^2 U_{c,1,phi}(\varphi)}{d\varphi^2} \\ \frac{d^2 V_{c,1,phi}(\varphi)}{d\varphi^2} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{M}}_2} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & K_{c12} \\ K_{c22} & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{M}}_2} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{dU_{c,1,phi}(\varphi)}{d\varphi} \\ \frac{dV_{c,1,phi}(\varphi)}{d\varphi} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{M}}_3} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{c23} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{M}}_3} \underbrace{\begin{bmatrix} U_{c,1,\varphi}(\varphi) \\ V_{c,1,\varphi}(\varphi) \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{M}}_3} = \\ = \begin{bmatrix} K_{c13} & K_{c14} \\ K_{c24} & K_{c25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_{c26} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.48)$$

Für die homogene Lösung des Differentialgleichungssystems wird die rechte Seite der Beziehung (6.48) zu null gesetzt. Mit dem Lösungsansatz

$$\underline{U} = \sum_{i=1}^n K_i \underline{v}_i e^{\lambda_i \varphi} \quad (6.49)$$

erhält man ein quadratisches Eigenwertproblem

$$\left(\underline{\underline{M}}_1 \lambda^2 + \underline{\underline{M}}_2 \lambda + \underline{\underline{M}}_3 \right) \underline{v} = 0. \quad (6.50)$$

Zur Lösung der Gleichung (6.50) wird diese zunächst mit Hilfe der Beziehung:

$$\underline{\omega} = \lambda \underline{v} \quad (6.51)$$

linearisiert. Es ergibt sich ein lineares Gleichungssystem, das aus vier Gleichungen besteht und in Matrixform wie folgt angeschrieben werden kann:

$$\left(\begin{bmatrix} \underline{M}_1 & \underline{M}_2 \\ 0 & \underline{I} \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 0 & \underline{M}_3 \\ -\underline{I} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \underline{\omega} \\ \underline{v} \end{bmatrix} = (\underline{W}\lambda + \underline{Z}) \underline{\ell} = 0 \quad (6.52)$$

Hierin ist \underline{I} eine 2×2 -Einheitsmatrix. Die Beziehung (6.52) stellt das sogenannte generalisierte Eigenwertproblem dar. Aus der Multiplikation mit der Inversen der Matrix \underline{W} ergibt sich ein lineares Eigenwertproblem:

$$(\underline{Z}\underline{W}^{-1} + \underline{I}\lambda) \underline{\ell} = 0, \quad (6.53)$$

in dem mit der Berechnung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\det(\underline{Z}\underline{W}^{-1} + \underline{I}\lambda) = 0 \quad (6.54)$$

die Eigenwerte λ bestimmt werden können. Hierfür wird ebenfalls das Berechnungsprogramm Maple eingesetzt. Nach der Durchführung der oben beschriebenen Rechenschritte ergeben sich die gesuchten Eigenwerte als:

$$\lambda_1 = 0 \quad (6.55)$$

$$\lambda_2 = 0 \quad (6.56)$$

$$\lambda_3 = \frac{\sqrt{-K_{c11}K_{c21}(K_{c11}K_{c23} - K_{c22}K_{c12})}}{K_{c11}K_{c21}} \quad (6.57)$$

$$\lambda_4 = -\frac{\sqrt{-K_{c11}K_{c21}(K_{c11}K_{c23} - K_{c22}K_{c12})}}{K_{c11}K_{c21}} \quad (6.58)$$

Die ersten beiden Eigenwerte ergeben in dem Ansatz (6.49) konstante Verschiebungsfunktionen für alle Werte von φ . Dies entspricht einer Starrkörperverschiebung. Somit werden λ_1 und λ_2 in weiterer Rechnung nicht mehr berücksichtigt. Die Störfunktion an der Schnittstelle beider Segmente besitzt ein abklingendes Verhalten mit der Entfernung vom ihren Ursprung. Somit wird in weiterer Rechnung der Eigenwert λ_4 verwendet, um das gleiche Verhalten der homogenen Lösung zu erreichen. Der ausgewählte Eigenwert wird in die Beziehung (6.50) eingesetzt. So erhält man den zugehörigen Eigenvektor \underline{v} . Dieser lautet:

$$\underline{v}_4 = \begin{bmatrix} -\frac{K_{c21}K_{c12}}{\sqrt{-K_{c11}K_{c21}(K_{c11}K_{c23} - K_{c22}K_{c12})}} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.59)$$

Die homogenen Lösungen für die gesuchten Verschiebungsfunktionen können dann wie folgt

angeschrieben werden:

$$U_{c,1,\varphi}^{(h)}(\varphi) = -\frac{K_{c21}K_{c12}}{\sqrt{-K_{c11}K_{c21}(K_{c11}K_{c23} - K_{c22}K_{c12})}} K_4 e^{-\left(\frac{\sqrt{-K_{c11}K_{c21}(K_{c11}K_{c23} - K_{c22}K_{c12})}}{K_{c11}K_{c21}}\right)\varphi} \quad (6.60)$$

$$V_{c,1,\varphi}^{(h)}(\varphi) = K_4 e^{-\left(\frac{\sqrt{-K_{c11}K_{c21}(K_{c11}K_{c23} - K_{c22}K_{c12})}}{K_{c11}K_{c21}}\right)\varphi} \quad (6.61)$$

Für die gesamte Lösung des Differentialgleichungssystems ist noch die Bestimmung der Partikulärlösung erforderlich. Dies erfolgt mit dem Ansatz der rechten Seite. Für die gesuchten Verschiebungsfunktionen werden folgende Ansätze gewählt:

$$U_{c,1,\varphi}^{(p)}(\varphi) = C_1 \sin(\varphi) + C_2 \cos(\varphi) + C_3 \varphi^2 \quad (6.62)$$

$$V_{c,1,\varphi}^{(p)}(\varphi) = C_4 \sin(\varphi) + C_5 \cos(\varphi) + C_6. \quad (6.63)$$

Nach dem Bilden der ersten und zweiten Ableitungen der beiden Ansatzfunktionen werden sie in die Differentialgleichungen (6.46) und (6.47) eingesetzt. Die in den Ansätzen enthaltenen unbekanntenen Koeffizienten C_1 bis C_6 werden mithilfe des Koeffizientenvergleichs bestimmt. Sie lauten:

$$C_1 = \frac{K_{c12}K_{c25} - K_{c13}K_{c21} + K_{c13}K_{c23}}{K_{c11}K_{c21} - K_{c11}K_{c23} + K_{c22}K_{c12}} \quad (6.64)$$

$$C_2 = -\frac{K_{c12}K_{c24} - K_{c14}K_{c21} + K_{c14}K_{c23}}{K_{c11}K_{c21} - K_{c11}K_{c23} + K_{c22}K_{c12}} \quad (6.65)$$

$$C_3 = 0 \quad (6.66)$$

$$C_4 = -\frac{K_{c11}K_{c24} - K_{c14}K_{c22}}{K_{c11}K_{c21} - K_{c11}K_{c23} + K_{c22}K_{c12}} \quad (6.67)$$

$$C_5 = -\frac{K_{c13}K_{c22} - K_{c11}K_{c25}}{K_{c11}K_{c21} - K_{c11}K_{c23} + K_{c22}K_{c12}} \quad (6.68)$$

$$C_6 = \frac{K_{c26}}{K_{c23}} \quad (6.69)$$

Die Gesamtlösung des Differentialgleichungssystem setzt sich aus der homogenen und der partikulären Lösung zusammen. Somit können die beiden Verschiebungsfunktionen des gekrümmten

Bereichs wie folgt angegeben werden:

$$\begin{aligned}
 U_{c,1,\varphi}(\varphi) = & -\frac{K_{c21}K_{c12}}{\sqrt{-K_{c11}K_{c21}(K_{c11}K_{c23}-K_{c22}K_{c12})}}K_4e^{-\left(\frac{\sqrt{-K_{c11}K_{c21}(K_{c11}K_{c23}-K_{c22}K_{c12})}}{K_{c11}K_{c21}}\right)\varphi} + \\
 & +\frac{K_{c12}K_{c25}-K_{c13}K_{c21}+K_{c13}K_{c23}}{K_{c11}K_{c21}-K_{c11}K_{c23}+K_{c22}K_{c12}}\sin(\varphi) + \\
 & -\frac{K_{c12}K_{c24}-K_{c14}K_{c21}+K_{c14}K_{c23}}{K_{c11}K_{c21}-K_{c11}K_{c23}+K_{c22}K_{c12}}\cos(\varphi)
 \end{aligned} \tag{6.70}$$

$$\begin{aligned}
 V_{c,1,\varphi}(\varphi) = & K_4e^{-\left(\frac{\sqrt{-K_{c11}K_{c21}(K_{c11}K_{c23}-K_{c22}K_{c12})}}{K_{c11}K_{c21}}\right)\varphi} + \\
 & -\frac{K_{c11}K_{c24}-K_{c14}K_{c22}}{K_{c11}K_{c21}-K_{c11}K_{c23}+K_{c22}K_{c12}}\sin(\varphi) + \\
 & -\frac{K_{c13}K_{c22}-K_{c11}K_{c25}}{K_{c11}K_{c21}-K_{c11}K_{c23}+K_{c22}K_{c12}}\cos(\varphi) + \frac{K_{c26}}{K_{c23}}
 \end{aligned} \tag{6.71}$$

Aufgrund der getroffenen Annahmen bezüglich des Verhaltens der Verschiebungsfunktion enthalten die Gleichungen (6.70) und (6.71) eine unbekannte Integrationskonstante K_4 . Es sind somit drei Bedingungen erforderlich, um die Konstanten in den Verschiebungsfunktionen im geraden und gekrümmten Segment zu bestimmen. Für die Bestimmung dieser Konstanten werden folgende Übergangsbedingungen an der Schnittstelle beider Bereiche gewählt:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} u_s(x=l, y) dy = \int_{r_i}^{r_a} u_c(r, \varphi=0) dr \tag{6.72}$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} v_s(x=l, y) dy = \int_{r_i}^{r_a} v_c(r, \varphi=0) dr \tag{6.73}$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dy = \int_{r_i}^{r_a} \tau_{r\varphi} dr \tag{6.74}$$

Die Übergangsbedingungen können nur über die Scheibenhöhe h gemittelt erfüllt werden.

Die Durchführung der beschriebenen Rechenschritte mit den in den Tabellen 3.1 und 5.1 zusammengefassten Werkstoffdaten ergibt komplexe Beziehungen für die Verschiebungskomponenten beider Bereiche. In den reellen Verschiebungen können jedoch keine imaginären Terme auftreten. Somit sind die in (6.9) und (6.10) getroffenen Annahmen nicht zielführend, denn die bestimmten Funktionen erfüllen die gestellten Anforderungen nicht. Die Rechnung wird trotzdem bis zum Schluss durchgeführt. Dabei werden zwei Lösungswege betrachtet. Im ersten Lösungsweg werden die Verschiebungskomponenten mit der eulerschen Formel (6.75) aus der

Exponentialform in die trigonometrische Form überführt.

$$e^{(i\varphi)} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi) \quad (6.75)$$

Die imaginären Terme werden dann vernachlässigt, sodass man für die weitere Rechnung rein reelle Verschiebungsfunktionen erhält. Anschließend findet die Bestimmung der Verzerrungs- und der Spannungskomponenten mit den Beziehungen (6.20) bis (6.31) statt. Die bestimmten Verschiebungs- und Spannungsfunktionen werden nachfolgend in die Übergangsbedingungen (6.72) bis (6.74) eingesetzt, um die Konstanten S_1 , S_2 und K_4 zu berechnen. Es ist festgestellt worden, dass die Beziehung (6.72) mit den vorliegenden Verschiebungsfunktionen reell nicht lösbar ist. Dies bedeutet auch, dass die Forderung nach einer kontinuierlichen Verschiebung u in Faserrichtung über den Querschnitt des Profils nicht erfüllbar ist.

Im zweiten Lösungsweg werden die Verzerrungs- und die Spannungskomponenten aus den komplexen Verschiebungsfunktionen bestimmt. Die komplexen Verschiebungen $u_s(x, y)$, $v_s(x, y)$, $u_c(r, \varphi)$ und $v_c(r, \varphi)$ sowie die ebenfalls komplexen Schubspannungen τ_{xy} und $\tau_{r\varphi}$ werden in die Beziehungen (6.72) bis (6.74) eingesetzt und liefern die bislang noch unbekanntenen Konstanten S_1 , S_2 und K_4 . Die Konstanten S_1 und S_2 sind komplex und K_4 ist imaginär. Da beide Lösungswege keine befriedigende Ergebnisse mit den bisherigen Übergangsbedingungen liefern, wird eine zusätzliche Bedingung mit der Gleichheit der Momente an der Schnittstelle beider Bereiche formuliert:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} y dy = \int_{r_i}^{r_a} \sigma_{\varphi\varphi} r dr \quad (6.76)$$

Diese wird anstelle der Beziehung (6.72) in der Rechnung verwendet. Mit der Beziehung (6.76) ergeben sich im ersten Lösungsweg drei reelle Konstanten. Im zweiten Lösungsweg sind sie komplex. Die Imaginärteile werden jedoch bei der Überführung der Spannungs- und der Verschiebungsfunktionen in den reellen Bereich vernachlässigt. Beide Lösungswege führen auch mit der Übergangsbedingung (6.76) zu keinen sinnvollen Ergebnissen. An dieser Stelle wird es darauf verzichtet die Verläufe der Spannungs- und Verschiebungsfunktionen abzubilden. Diese sind in entsprechenden Maple-Arbeitsblättern zusammen mit der durchgeführten Rechnung auf der beigelegten CD-Rom zu finden.

Der gesamte Lösungsansatz mit dem Minimum des Gesamtpotentials ist auf den zu Beginn der Rechnung getroffenen Annahmen für die Verschiebung in eine der Koordinatenrichtungen aufgebaut. Die in (6.9) und (6.10) angeschriebenen Funktionen haben sich als nicht geeignet erwiesen, um den Verlauf der Störfunktion an der Schnittstelle des geraden und des gekrümmten Bereichs in y - bzw. in r -Richtung zu beschreiben. Die Kontinuität der Spannungskomponenten an der Schnittstelle beider Segmente kann hier somit nicht sichergestellt werden. Weitere Forschung mit der Verwendung anderer Annahmen ist erforderlich.

7. Zusammenfassung und Ausblick

7.1. Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde die Herleitung eines analytischen Ansatzes zur Bestimmung der Spannungs- und der Verschiebungsfelder in einem segmentierten Profil angestrebt. Dabei wurde das Profil eines Schubwinkels als der Gegenstand der Untersuchung gewählt. Das Schubwinkelprofil kann in mehrere Segmente mit einfacher Grundgeometrie aufgeteilt werden. So besteht es aus zwei geraden Bereichen und einem zylindrisch gekrümmten Bereich. Mit der Untersuchung eines Profils erfolgte auch eine Einschränkung auf ebene Problemstellungen.

Zu Beginn der Arbeit wurden analytische Funktionen zur Bestimmung der Spannungs- und Verschiebungskomponenten im geraden Segment des Profils für die drei elementaren Lastfälle Normalkraft-, Querkraft- und Biegemomentbelastung hergeleitet. Die Herleitung fand sowohl für eine orthotrope Scheibe als auch ein orthotrop geschichtetes Laminat statt. Die Lösung erfolgte dabei über das Lösen der beschreibenden Scheibengleichung. Während der Herleitung ist festgestellt worden, dass die Beziehungen zur Bestimmung der Spannungs- und Verschiebungskomponenten in einer orthotropen Scheibe ebenfalls im isotropen Materialmodell gültig sind, da der Orthotropieparameter s in den untersuchten Lastfällen herausfällt.

Nach der Bestimmung der Spannungs- und Verschiebungsfunktionen wurden diese anhand eines Vergleichs mit den Ergebnissen einer FE-Rechnung verifiziert. Die Verifikation der Ergebnisse fand für Scheiben mit unterschiedlichen geometrischen Abmaßen statt. Dies lieferte die Erkenntnis, ob die Genauigkeit der analytischen Lösung mit der Geometrie der Scheibe variiert. Für das Spannungs- und das Verschiebungsfeld der orthotropen Scheibe ergab der Vergleich eine sehr gute Übereinstimmung in den Ergebnissen mit der FE-Lösung für jede untersuchte Scheibengeometrie. Die analytisch bestimmten Spannungskomponenten im orthotrop geschichteten Laminat weisen ebenfalls eine sehr gute Übereinstimmung der Ergebnissen der FE-Rechnung für alle betrachteten Lastfälle auf. Im Verlauf der Verschiebungskomponenten in einem Laminat unter der Querkraftbelastung treten Abweichungen auf. Diese sind auf die über die Laminatlänge gemittelt erfüllbaren Kontinuitätsbedingungen für die Verschiebungen an den Grenzen benachbarter Laminatlagen zurückzuführen. Die Abweichungen sind bei gedrunenen Laminaten ausgeprägt. Für höhere Längen-Höhen-Verhältnisse der geschichteten Scheibe fallen sie geringer aus. Die Untersuchung der Verschiebungsfelder in Laminaten unter Normalkraft- und Biegemomentbelastung zeigte, dass bei diesen Lastfällen die Abweichungen nicht auftreten, obwohl die Kontinuitätsbedingungen bei der Belastung mit einem Biegemoment ebenfalls nur über die Länge gemittelt erfüllt werden.

Im darauf folgenden Abschnitt wurden mit den analytischen Lösungen für die Spannungs- und die Verschiebungsfunktionen Parameterstudien durchgeführt. Dabei sind die Einflüsse des Schlankheitsgrades λ und der Werkstoffparameter E_x , ν_{xy} und G_{xy} auf die Verläufe der Spannungs- und der Verschiebungskomponenten sowohl in einer orthotropen Scheibe als auch im orthotrop geschichteten Laminat untersucht worden. Die Erhöhung des Schlankheitsgrades führt zur erwarteten Veränderung der Spannungs- und der Verschiebungskomponenten. Diese steigen entweder an wie z.B. die Verschiebung v bei Biegemomentbelastung, oder bleiben unverändert wie das Spannungsfeld unter Normalkraftbelastung bei konstant gehaltener Höhe der Scheibe. Von den Materialparametern wird nur das Verschiebungsfeld der Scheibe beeinflusst. Dabei hat

der E-Modul in Faserrichtung den größten Einfluss auf die Verläufe der Verschiebungskomponenten der Scheibe.

Im zweiten Teil der Arbeit ist eine Kopplung einer geraden und einer zylindrisch gekrümmten Scheibe zu einem Profil unter reiner Biegebelastung durchgeführt worden. Dabei wurden das orthotrope und das orthotrop geschichtete Materialmodell betrachtet. Für die zylindrisch gekrümmte Scheibe wurden die in [10] hergeleiteten Beziehungen für die Spannungs- und Verschiebungskomponenten verwendet. Die Kopplung erfolgte über die Kontinuitätsbedingungen für die Verschiebungsfunktionen an der Schnittstelle beider Segmente. Das Spannungsfeld bleibt bei diesem Kopplungsansatz jedoch inkompatibel. Im orthotropen Profil weisen die Spannungs-komponenten eine sehr gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen der FE-Rechnung in der Mitte des jeweiligen Bereichs, also bei $x = \frac{l}{2}$ und $\varphi = \frac{\psi}{2}$ (l – Länge des geraden Segments, ψ – Öffnungswinkel des gekrümmten Segments), auf. Der kontinuierliche Übergang aus dem Spannungszustand des geraden Bereichs in den Spannungszustand des gekrümmten Bereichs wird in der analytischen Lösung nicht erfasst, da die aus der Geometrieänderung resultierende Störung im Spannungsverlauf an der Schnittstelle beider Segmente nicht berücksichtigt wird. Der Verlauf der analytischen Verschiebungsfunktionen beider Bereiche stimmt mit den Verschiebungsverläufen aus der FE-Rechnung sehr gut überein.

Bei der Kopplung der Segmente eines orthotrop geschichteten Profils, das an einem Rand des geraden Bereichs fest eingespannt ist und am freien Rand des zylindrisch gekrümmten Bereichs mit einem Randmoment beaufschlagt wird, ist festgestellt worden, dass in der analytischen Lösung der Verlauf der Spannungs-komponenten im gekrümmten Segment eine Abhängigkeit von der Länge des geraden Segments aufweist. Diese Abhängigkeit ist durch die mathematischen Zusammenhänge im Gleichungssystem zur Kopplung beider Bereiche bedingt. Sie tritt auf, weil für die Bestimmung der Koeffizienten in den Beziehungen für das Spannungsfeld des Profils ebenfalls die Kontinuitätsbedingungen für die Verschiebung an den benachbarten Schichtgrenzen des Laminats herangezogen werden. Mit der Verwendung eines separaten Gleichungssystems für die Bestimmung der Koeffizienten in den Spannungsfunktionen, in dem die Bedingungen einer Festspannung an einem Rand des gekrümmten Bereichs aufgestellt werden, lässt sich dieses Problem umgehen. Die Kopplung der Verschiebungen beider Bereiche findet dann nur über die übrigen Koeffizienten des Verschiebungsfeldes statt. Das Spannungsfeld des gekrümmten Bereichs hängt von der Segmentkrümmung ab. Die Untersuchung unterschiedlicher Profilgeometrien hat gezeigt, dass bei einer höheren Krümmung die analytische Lösung für das Spannungsfeld des gekrümmten Segments relative hohe Abweichungen zu dem mit FEM bestimmten Verlauf der Referenzlösung aufweist. Mit höherem Krümmungsradius wird diese Abweichung geringer.

Im dritten Teil der Arbeit wurde der Versuch unternommen, mit dem Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials die Kontinuität der Spannungsfelder an der Schnittstelle beider Bereiche sicherzustellen. Dabei sollte die aufgrund der Geometrieänderung an der Schnittstelle der Segmente auftretende Störung berücksichtigt werden. Aufgrund der am Anfang der Rechnung getroffenen Annahmen, die den Verlauf der Störungsfunktion im Verschiebungsfeld beider Profilsegmente quer zur Faserrichtung beschreiben, konnte der kontinuierliche Übergang aus dem Spannungszustand des geraden Segments in den Spannungszustand des gekrümmten Segments nicht erzielt werden.

7.2. Ausblick

In dieser Arbeit konnten keine zufriedenstellenden analytischen Ergebnisse für das Spannungsfeld im segmentierten Schubwinkelprofil erzielt werden. So bleibt bei dem Kopplungsansatz über die Verschiebungskontinuität das Spannungsfeld an der Schnittstelle beider Bereiche des Profils inkompatibel. Mit dem Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials konnte der kontinuierliche Übergang zwischen den Spannungen des geraden und des gekrümmten Bereichs ebenfalls nicht erreicht werden. Dieser Lösungsansatz ist jedoch von den zu Beginn der Rechnung getroffenen Annahmen abhängig. So ist eine Anwendung eines Energieprinzips mit anderen Verschiebungsfunktionen denkbar. Aus diesem Grund sind hier weitere Studien erforderlich. Nach der Entwicklung eines funktionierenden Ansatzes mit dem Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials für ein orthotropes Profil ist eine Erweiterung für ein Laminat zu erarbeiten. Im Weiteren ist die Entwicklung eines Kopplungsansatzes für ein mit einer Randkraft belastetes Profil vorstellbar.

Einer weiteren Untersuchung bedarf die analytische Lösung für das Spannungs- und das Verschiebungsfeld einer orthotrop geschichteten zylindrisch gekrümmten Scheibe. Die Herleitung einer analytischen Lösung mit der Verwendung der im isotropen Materialmodell gültigen Spannungs- und Verschiebungsfunktionen für die 90° -Lagen hätte zur Folge, dass auf die Einführung der künstlichen Orthotropie verzichtet werden könnte. Des Weiteren ist auch das Verhalten des zylindrisch gekrümmten Laminats mit unterschiedlichen Krümmungsradien des Segments zu untersuchen.

In dieser Arbeit wurde die analytische Lösung für das Spannungs- und das Verschiebungsfeld in geraden geschichteten Strukturen anhand eines Laminats mit symmetrischen Lagenaufbau der 0° - und 90° -Schichten verifiziert. Der Einfluss des Lagenaufbaus auf die Spannungs- und Verschiebungskomponenten des Laminats ist jedoch nicht weiter untersucht worden. Einer eingehender Untersuchung bedürfen ebenfalls Laminats mit unsymmetrischen Lagenaufbau.

Literatur

- [1] BAARAN, J.: *Berechnung der Faserverbunde*. Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg, 2011. – Skript zur Vorlesung
- [2] BATHE, K.-J.: *Finite Elemente Methoden*. 2. Auflage. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002
- [3] DEHMEL, W.: *Methode der Finiten Elemente*. Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg, 2008. – Skript zur Vorlesung
- [4] ESCHENAUER, H. ; SCHNELL, W.: *Elastitätstheorie*. 3. Auflage. B I Wissenschaftsverlag Mannheim Leipzig, 1993
- [5] FLÜH, H.: *Einführung in die Finite Element Methode*. Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg, 2008. – Skript zur Vorlesung
- [6] GROSS, D. ; HAUGER, W. ; J.SCHRÖDER ; WALL, W. A.: *Technische Mechanik, Band 2: Elastostatik*. 9. Auflage. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007
- [7] GROSS, D. ; HAUGER, W. ; SCHNELL, W. ; WRIGGERS, P.: *Technische Mechanik, Band 4: Hydromechanik, Elemente der höheren Mechanik, Numerische Methoden*. 4. Auflage. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002
- [8] LANGE, J. H.: *Fertigungstechnologie für Faserverbundwerkstoffe*. Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg, 2011
- [9] LEKHNITSKII, S. G.: *Anisotropic Plates*. Gordon and Breach Science Publication New York London, 1978
- [10] MERKEL, P.: *Numerische und analytische Behandlung von Spannungsfeldern in gekrümmten Composite-Laminat-Strukturen*. Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg, 2011. – Masterarbeit
- [11] MITTELSTEDT, C.: *Berechnung anisotroper Strukturen mit Hilfe von Spannungsfunktionen*. 2012. – Entwurfsversion LTH Faserverbund und Leichtbau
- [12] MITTELSTEDT, C. ; BECKER, W.: *Strukturmechanik ebener Laminat*. 2012. – Buchmanuskript
- [13] NAST, E.: *Faserverbundtechnologie*. Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg, 2009. – Kompendium zur Vorlesung
- [14] PAPULA, L.: *Mathematische Formelsammlung*. 9. Auflage. Vieweg Verlag, 2006
- [15] PESTEL, E. ; WITTENBURG, J.: *Technische Mechanik, Band 2: Festigkeitslehre*. 2. Auflage. B I Wissenschaftsverlag Mannheim Leipzig, 1992
- [16] SCHÜRMAN, H.: *Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden*. 9. Auflage. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004

- [17] TIMOSHENKO, S. ; GOODIER: *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill Book Company Inc. New York Toronto London, 1951
- [18] WISSMANN, J. ; SARNES, K.-D.: *Finite Elemente in der Strukturmechanik*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006

A. Untersuchung der Verläufe der Spannungs- und der Verschiebungskomponenten in orthotropen Profilen mit unterschiedlichen geometrischen Abmaßen

Die nachstehenden Diagramme zeigen den Verlauf der Spannungs- und der Verschiebungskomponenten in orthotropen Profilen. Die Darstellung der Spannungscomponenten findet sowohl an der Schnittstelle der beiden Bereiche als auch in deren Mitte quer zur Faserrichtung statt. Die Darstellung der Spannungscomponenten erfolgt nur für verschiedene Krümmungsradien des gekrümmten Bereichs, da die Änderung der Flanschlänge keinen Einfluss auf deren Verlauf in einem Profil aus orthotropem Werkstoff hat. Die Verschiebung u in Faserrichtung wird an der Schnittstelle der beiden Bereiche abgebildet. Die Darstellung der Verschiebung v (quer zu Fasern) findet an der mittleren Faser des jeweiligen Bereichs im kartesischen Koordinatensystem statt. Bei der Transformation des Verschiebungsfeldes des gekrümmten Bereichs in das kartesische Koordinatensystem wird die Verschiebung u mitberücksichtigt, sodass die Diagramme den verformten Zustand des Profils an der neutralen Achse zeigen. In den Diagrammen findet ebenfalls die Gegenüberstellung der analytischen und der FE-Ergebnisse.

A.1. Verlauf der Normalspannungen σ_{xx} und $\sigma_{\varphi\varphi}$

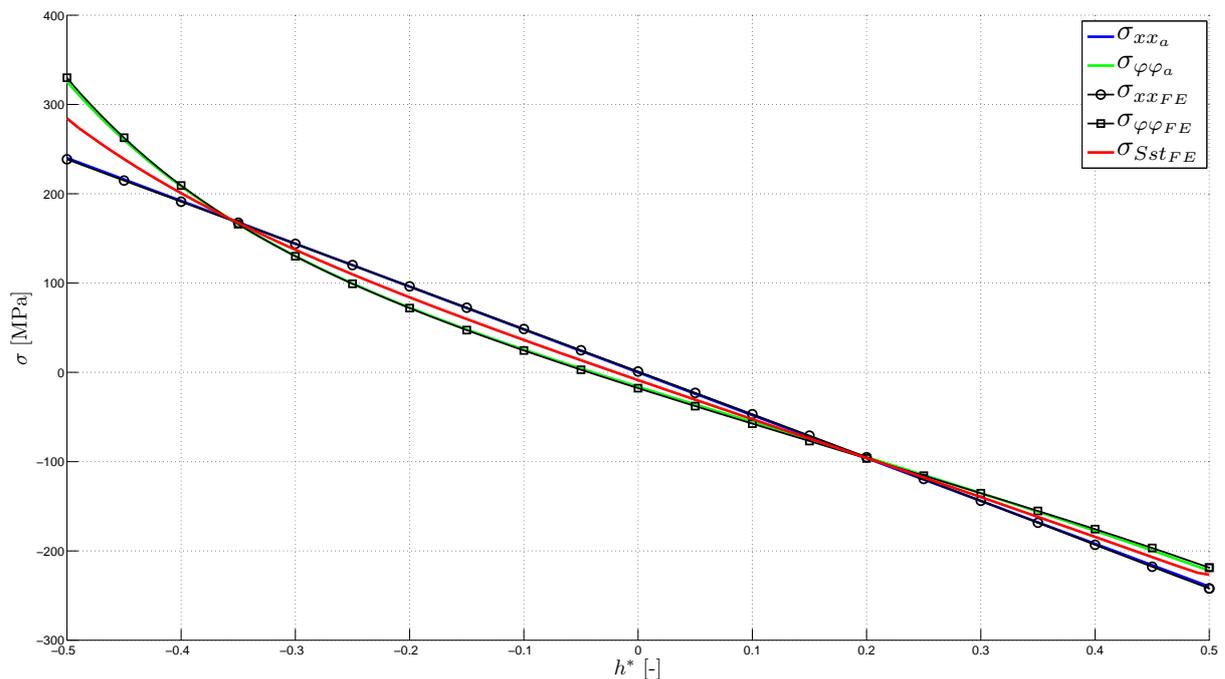


Abbildung A.1: Verlauf der Normalspannungen σ_{xx} und $\sigma_{\varphi\varphi}$ in einem orthotropen Profil mit $\frac{l}{h} = 3$ und $\frac{r_m}{h} = \frac{3}{2}$

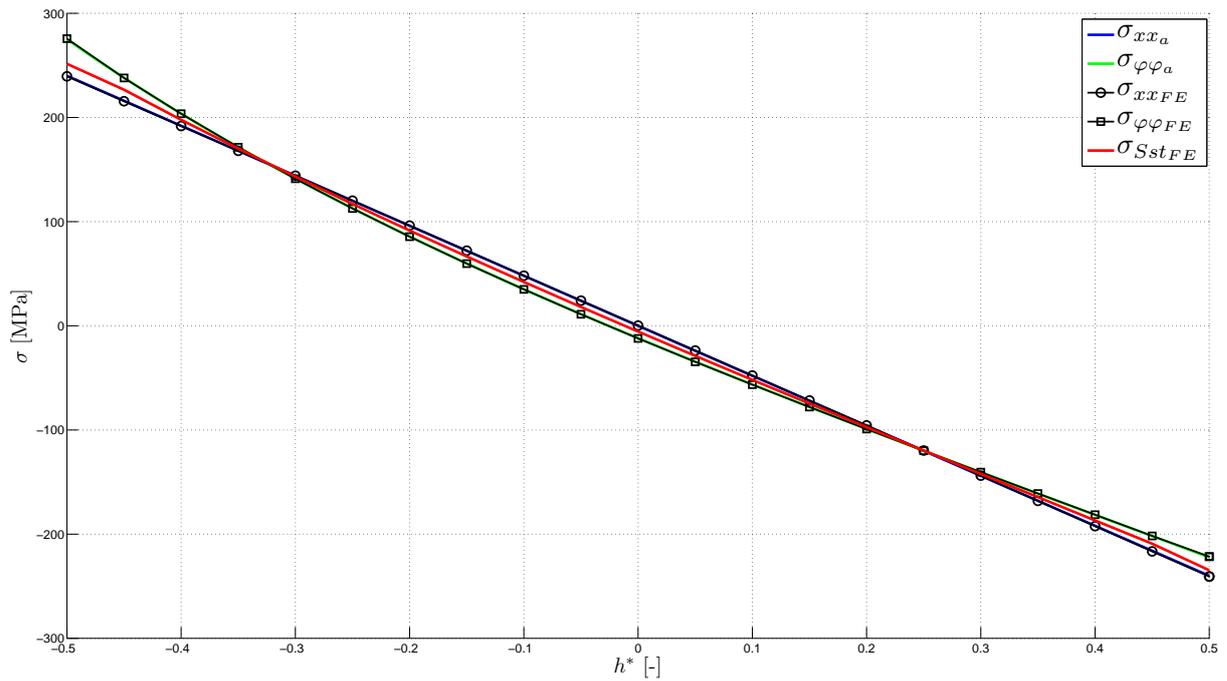


Abbildung A.2: Verlauf der Normalspannungen σ_{xx} und $\sigma_{\varphi\varphi}$ in einem Profil mit $\frac{l}{h} = 3$ und $\frac{r_m}{h} = 3$

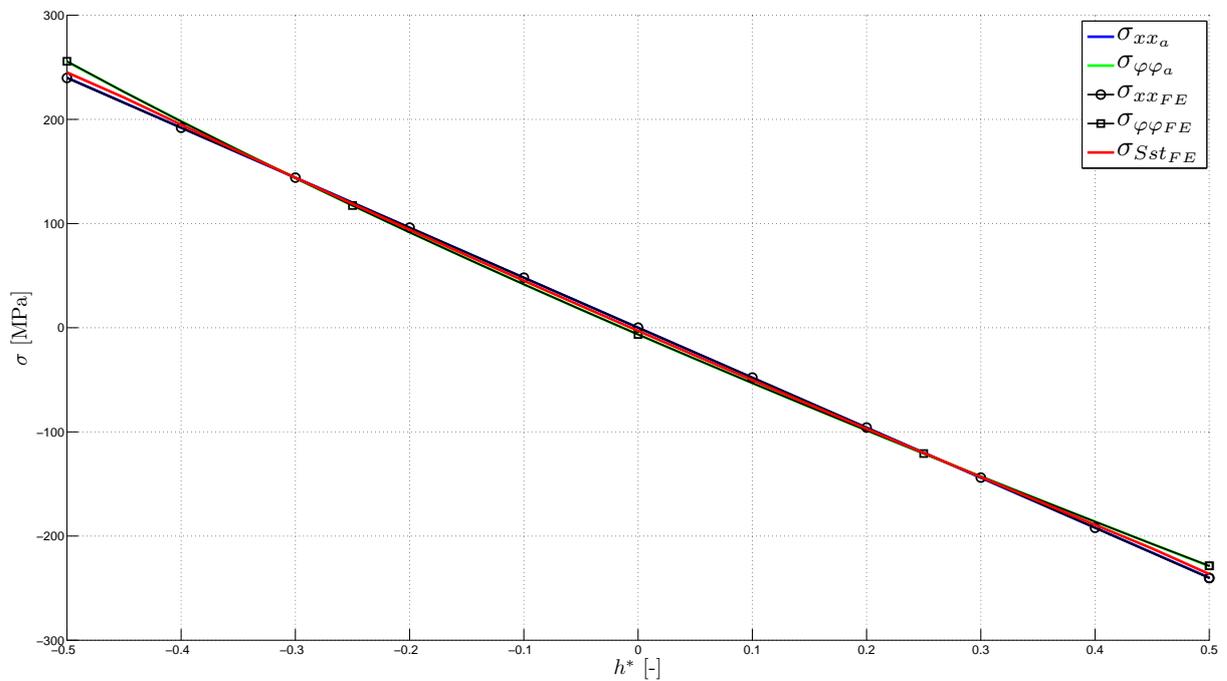


Abbildung A.3: Verlauf der Normalspannungen σ_{xx} und $\sigma_{\varphi\varphi}$ in einem Profil mit $\frac{l}{h} = 3$ und $\frac{r_m}{h} = 6$

A.2. Verlauf der Normalspannung σ_{rr}

Auf die Darstellung des Verlaufs der Normalspannung σ_{yy} wurde hier verzichtet, da diese gleich Null ist.

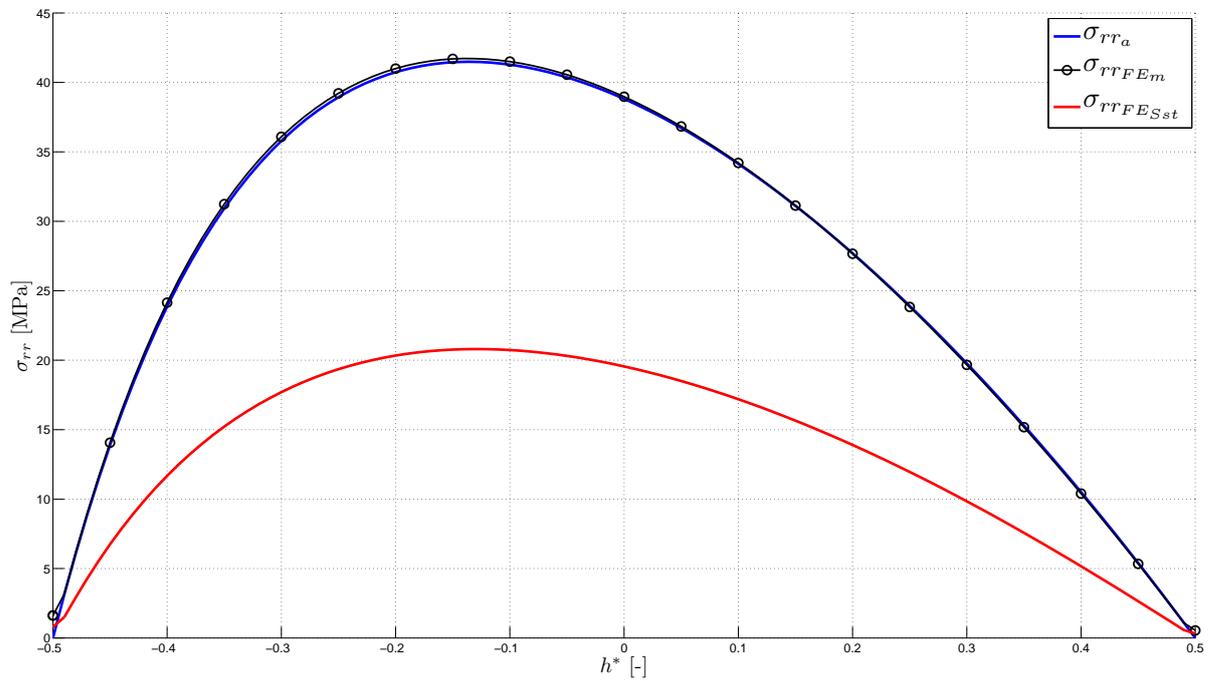


Abbildung A.4: Verlauf der Normalspannungen σ_{rr} in einem orthotropen Profil mit $\frac{l}{h} = 3$ und $\frac{r_m}{h} = \frac{3}{2}$

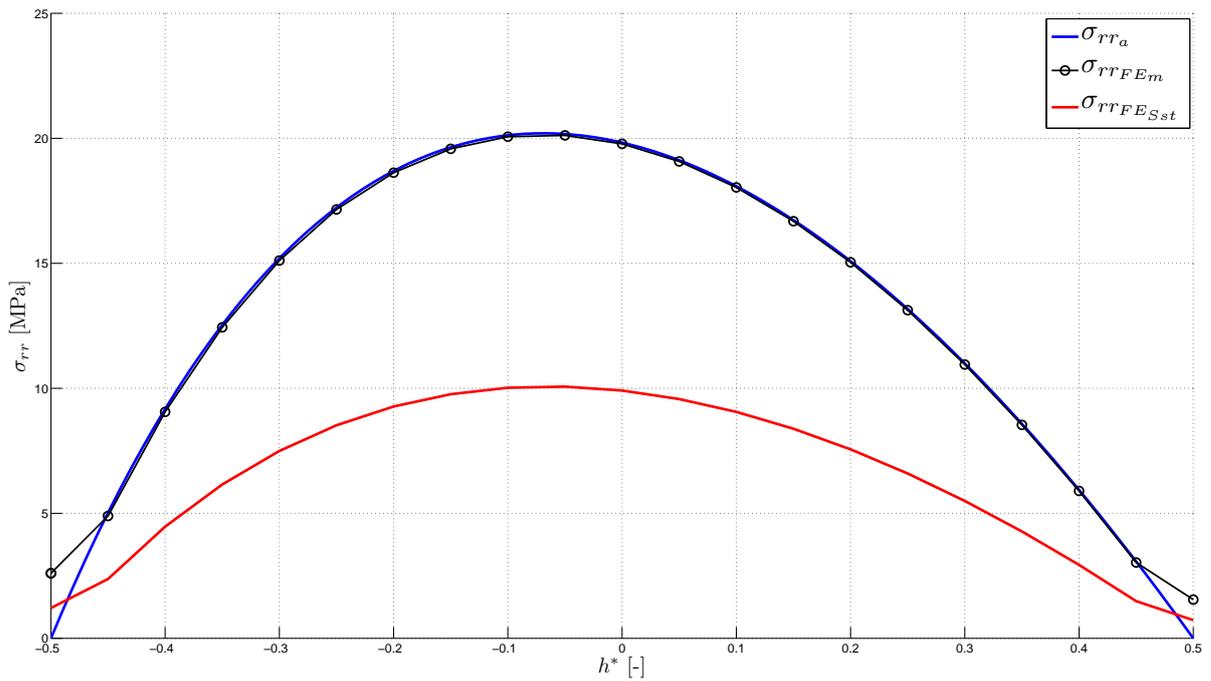


Abbildung A.5: Verlauf der Normalspannungen σ_{rr} in einem orthotropen Profil mit $\frac{l}{h} = 3$ und $\frac{r_m}{h} = 3$

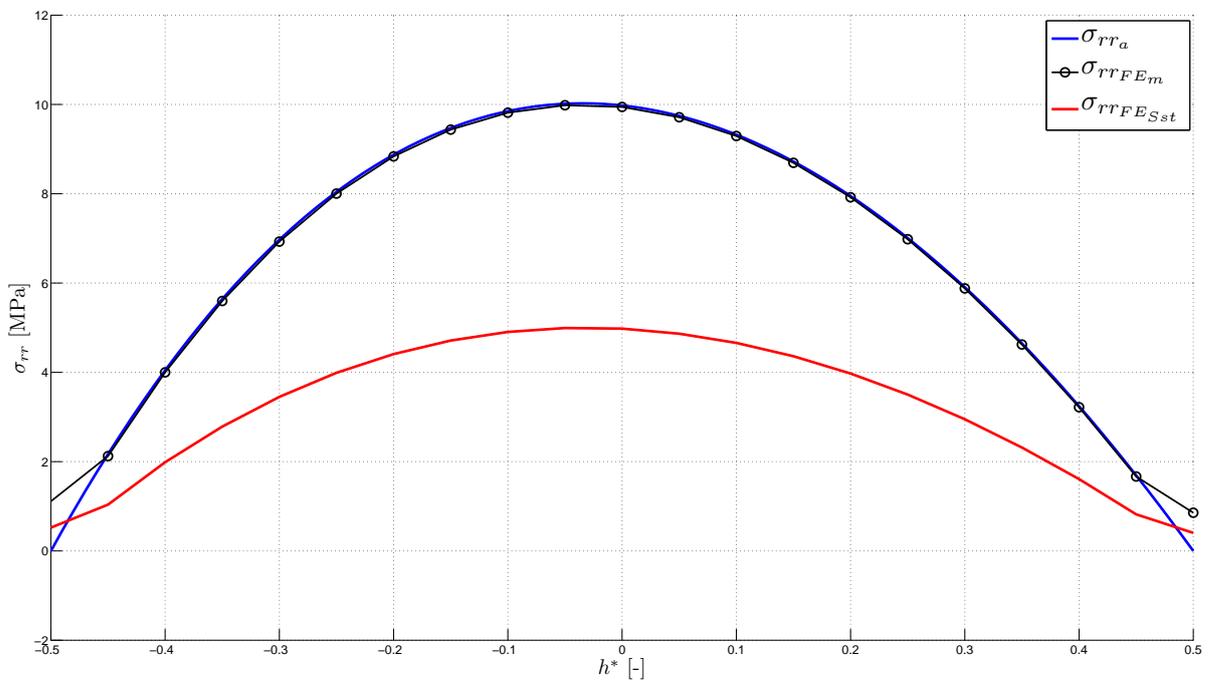


Abbildung A.6: Verlauf der Normalspannungen σ_{rr} in einem orthotropen Profil mit $\frac{l}{h} = 3$ und $\frac{r_m}{h} = 6$

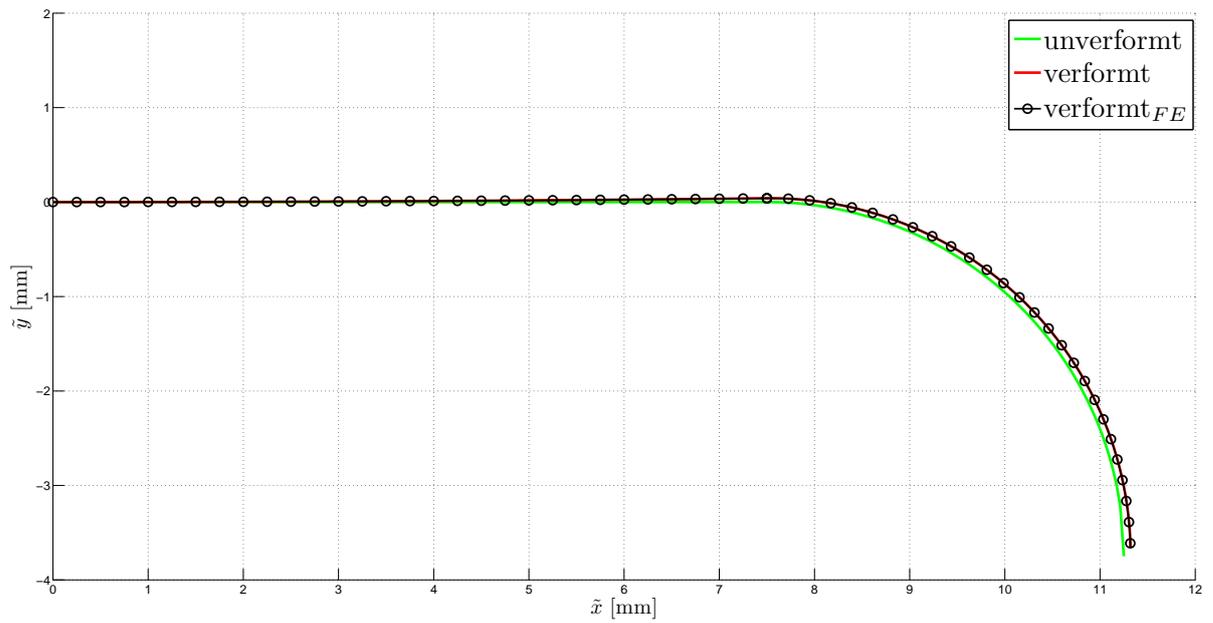


Abbildung A.8: Auslenkung der mittleren Sehne des orthotropen Profils mit $\frac{l}{h} = 3$ und $\frac{r_m}{h} = \frac{3}{2}$ unter der Momentenbelastung M_0

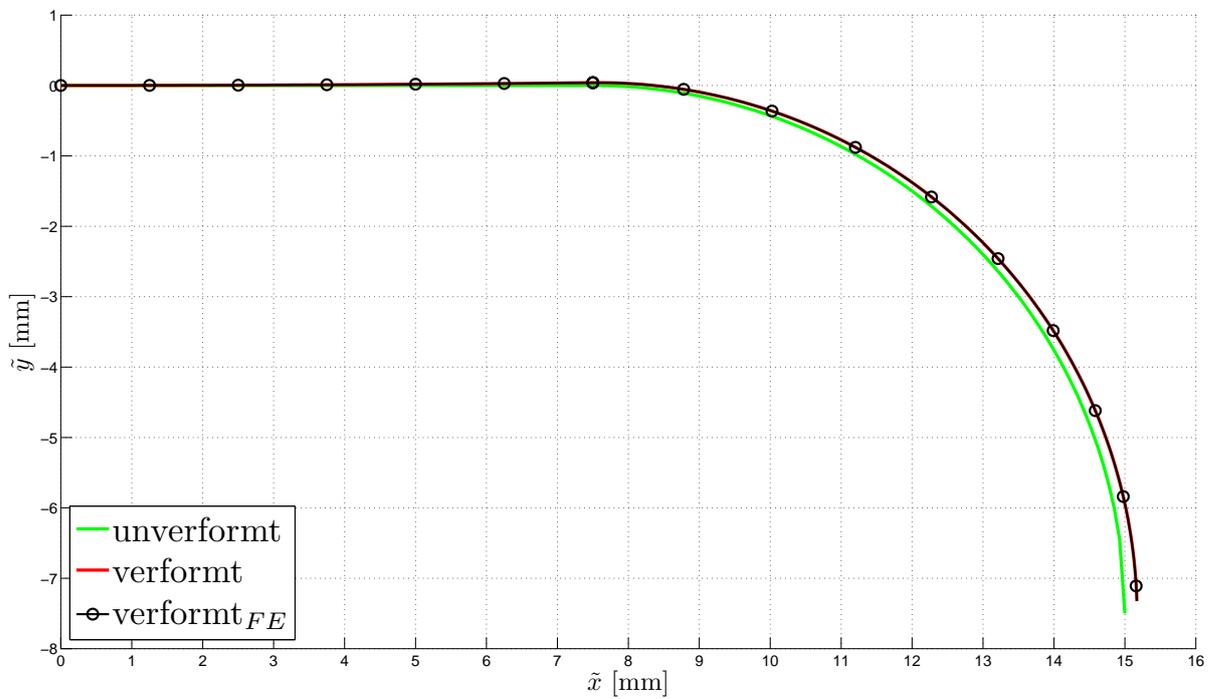


Abbildung A.9: Auslenkung der mittleren Sehne des orthotropen Profils mit $\frac{l}{h} = 3$ und $\frac{r_m}{h} = 3$ unter der Momentenbelastung M_0

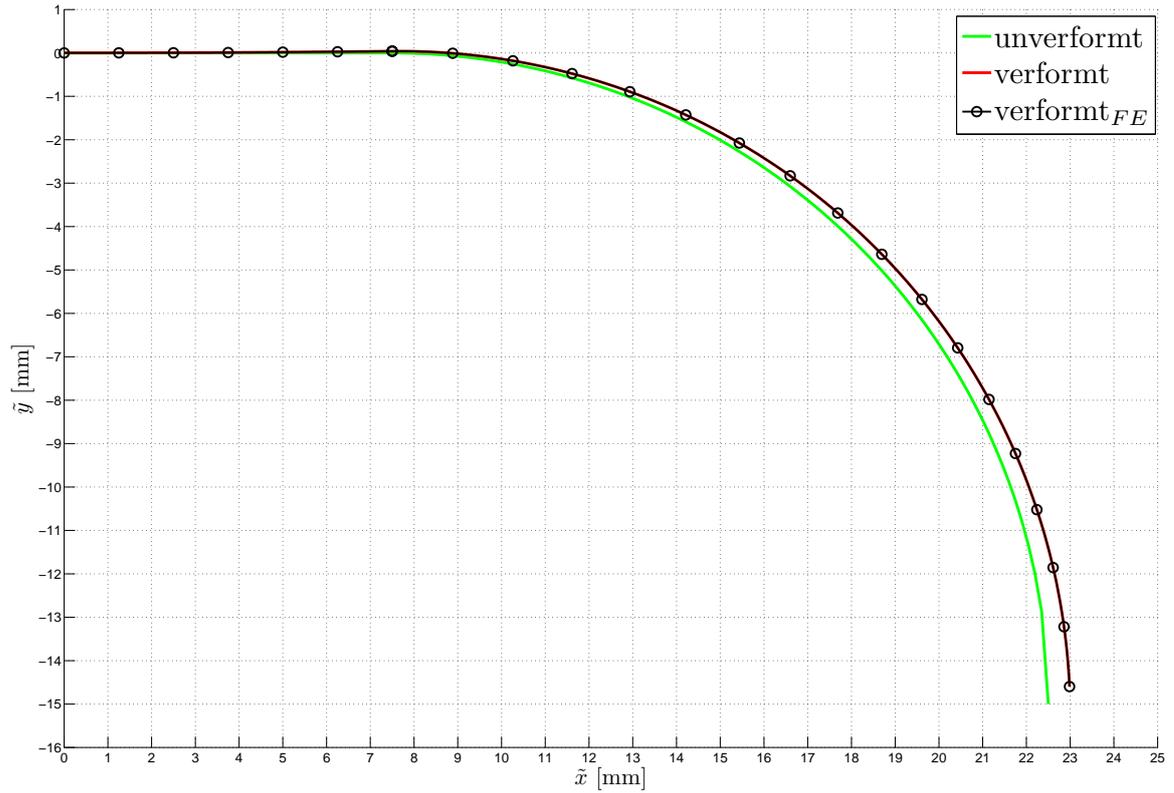


Abbildung A.10: Auslenkung der mittleren Sehne des orthotropen Profils mit $\frac{l}{h} = 3$ und $\frac{r_m}{h} = 6$ unter der Momentenbelastung M_0

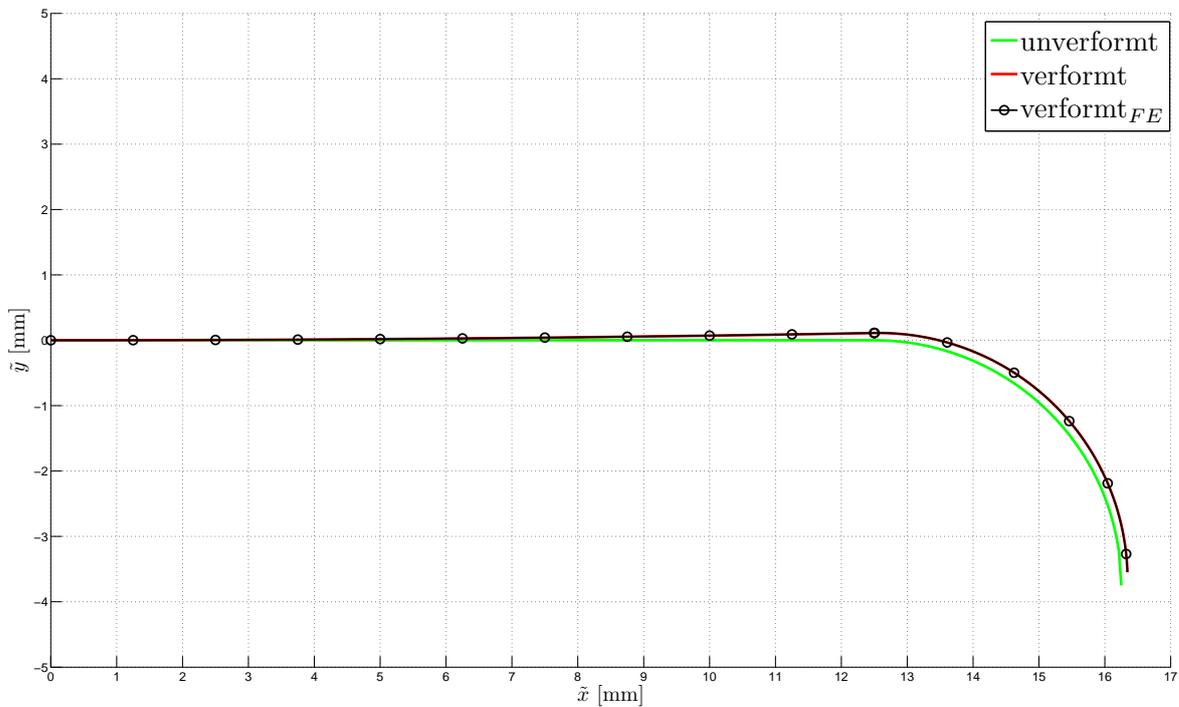


Abbildung A.11: Auslenkung der mittleren Sehne des orthotropen Profils mit $\frac{l}{h} = 5$ und $\frac{r_m}{h} = \frac{3}{2}$ unter der Momentenbelastung M_0

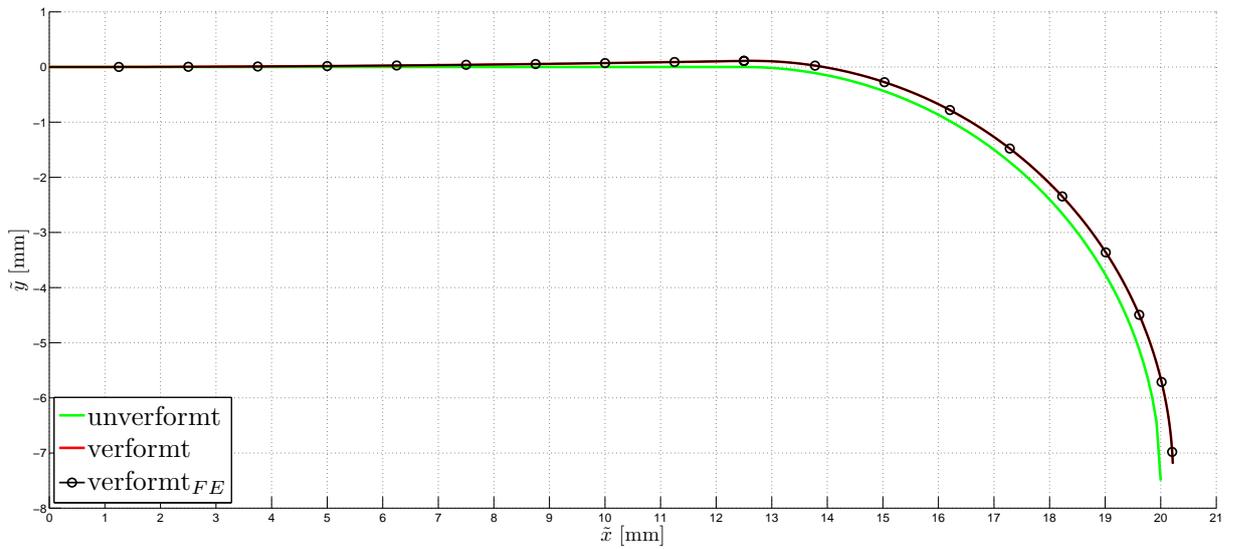


Abbildung A.12: Auslenkung der mittleren Sehne des orthotropen Profils mit $\frac{l}{h} = 5$ und $\frac{r_m}{h} = 3$ unter der Momentenbelastung M_0

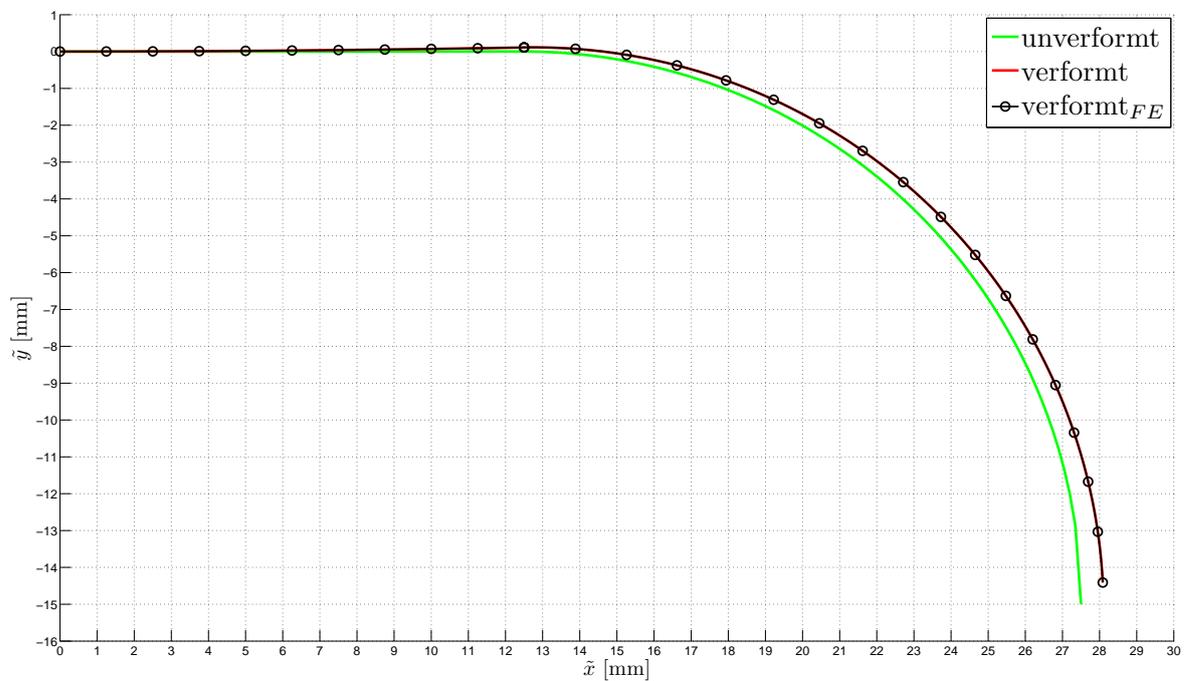


Abbildung A.13: Auslenkung der mittleren Sehne des orthotropen Profils mit $\frac{l}{h} = 5$ und $\frac{r_m}{h} = 6$ unter der Momentenbelastung M_0

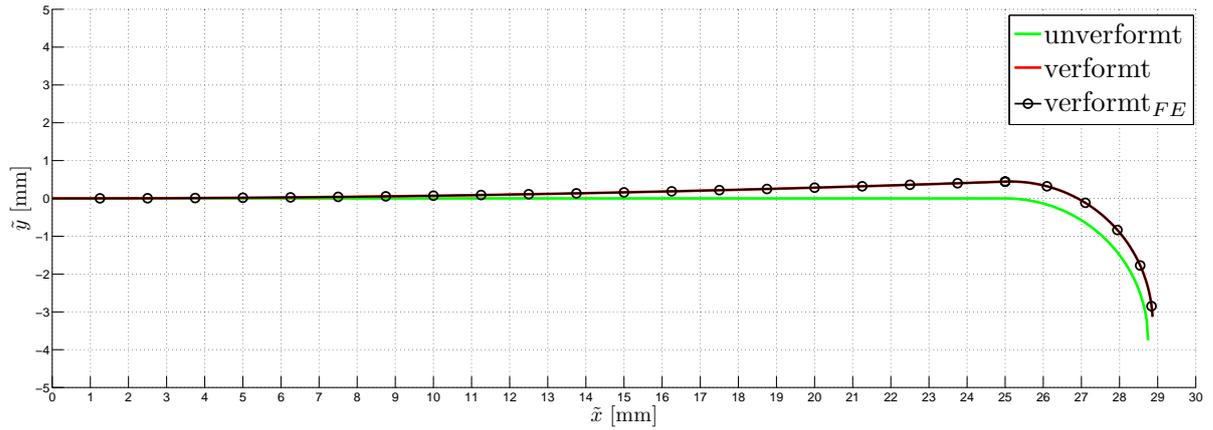


Abbildung A.14: Auslenkung der mittleren Sehne des orthotropen Profils mit $\frac{l}{h} = 10$ und $\frac{r_m}{h} = \frac{3}{2}$ unter der Momentenbelastung M_0

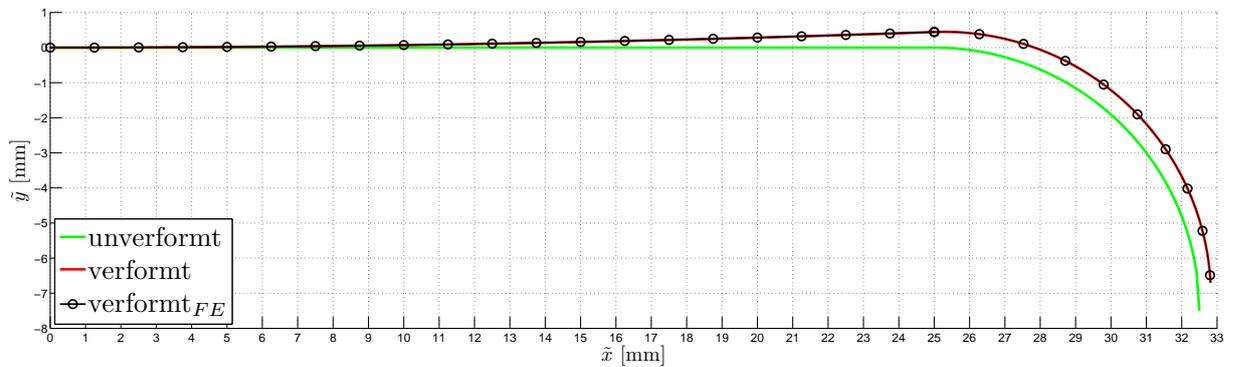


Abbildung A.15: Auslenkung der mittleren Sehne des orthotropen Profils mit $\frac{l}{h} = 10$ und $\frac{r_m}{h} = 3$ unter der Momentenbelastung M_0

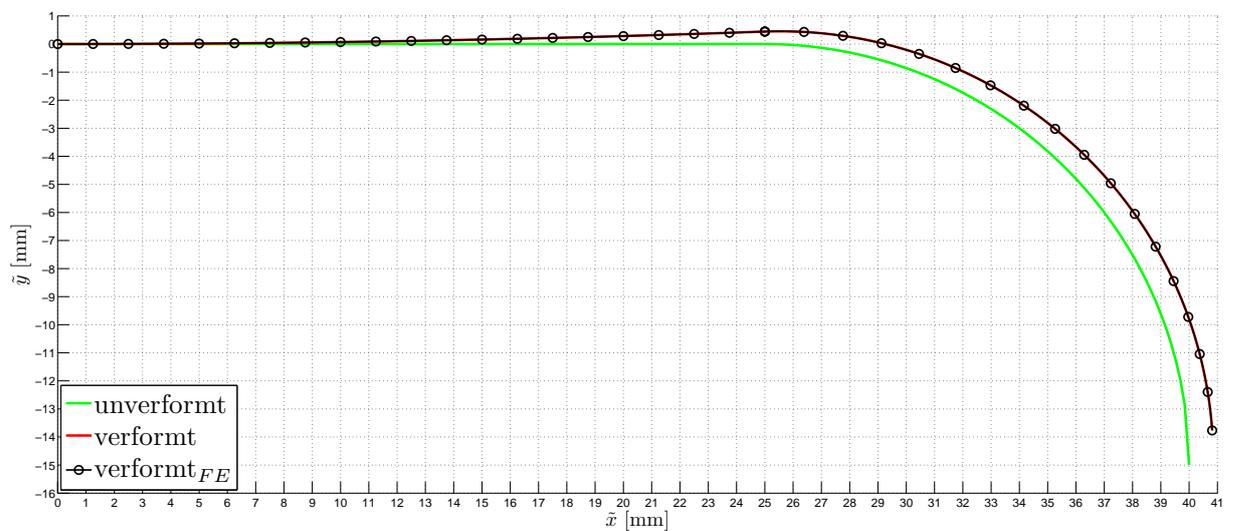


Abbildung A.16: Auslenkung der mittleren Sehne des orthotropen Profils mit $\frac{l}{h} = 10$ und $\frac{r_m}{h} = 6$ unter der Momentenbelastung M_0

B. Untersuchung der Verläufe der Spannungs- und Verschiebungskomponenten in orthotrop geschichteten Profilen mit unterschiedlichen geometrischen Abmaßen

B.1. Verlauf der Normalspannungen σ_{xx} und $\sigma_{\varphi\varphi}$

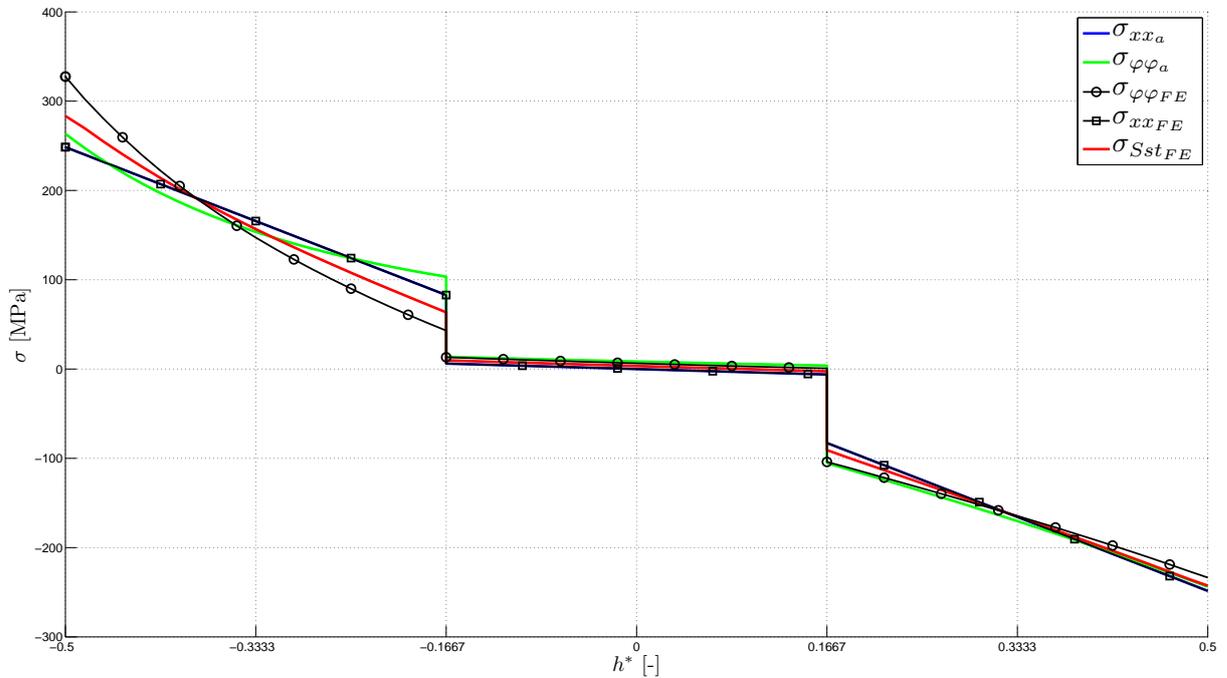


Abbildung B.1: Verlauf der Normalspannungen σ_{xx} und $\sigma_{\varphi\varphi}$ in einem orthotrop geschichteten Profil mit $\frac{l}{h} = 10$ und $\frac{r_m}{h} = \frac{3}{2}$

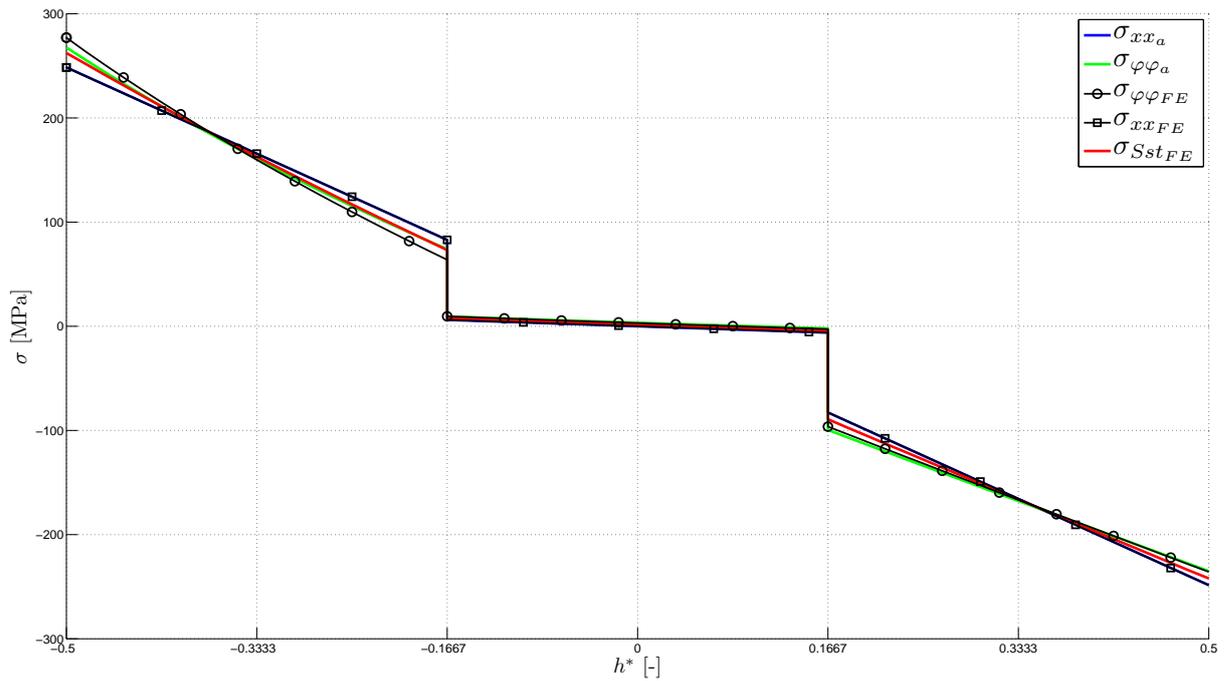


Abbildung B.2: Verlauf der Normalspannungen σ_{xx} und $\sigma_{\varphi\varphi}$ in einem orthotrop geschichteten Profil mit $\frac{l}{h} = 5$ und $\frac{r_m}{h} = 3$

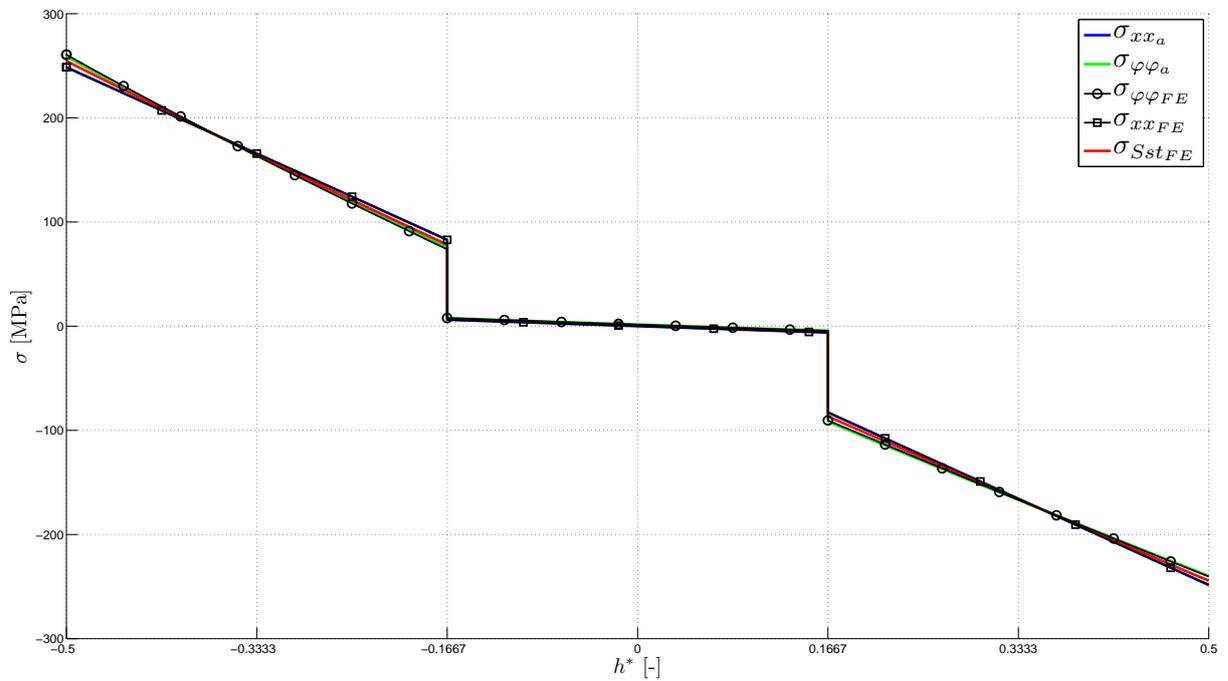


Abbildung B.3: Verlauf der Normalspannungen σ_{xx} und $\sigma_{\varphi\varphi}$ in einem orthotrop geschichteten Profil mit $\frac{l}{h} = 10$ und $\frac{r_m}{h} = 6$

B.2. Verlauf der Normalspannungen σ_{yy} und σ_{rr}

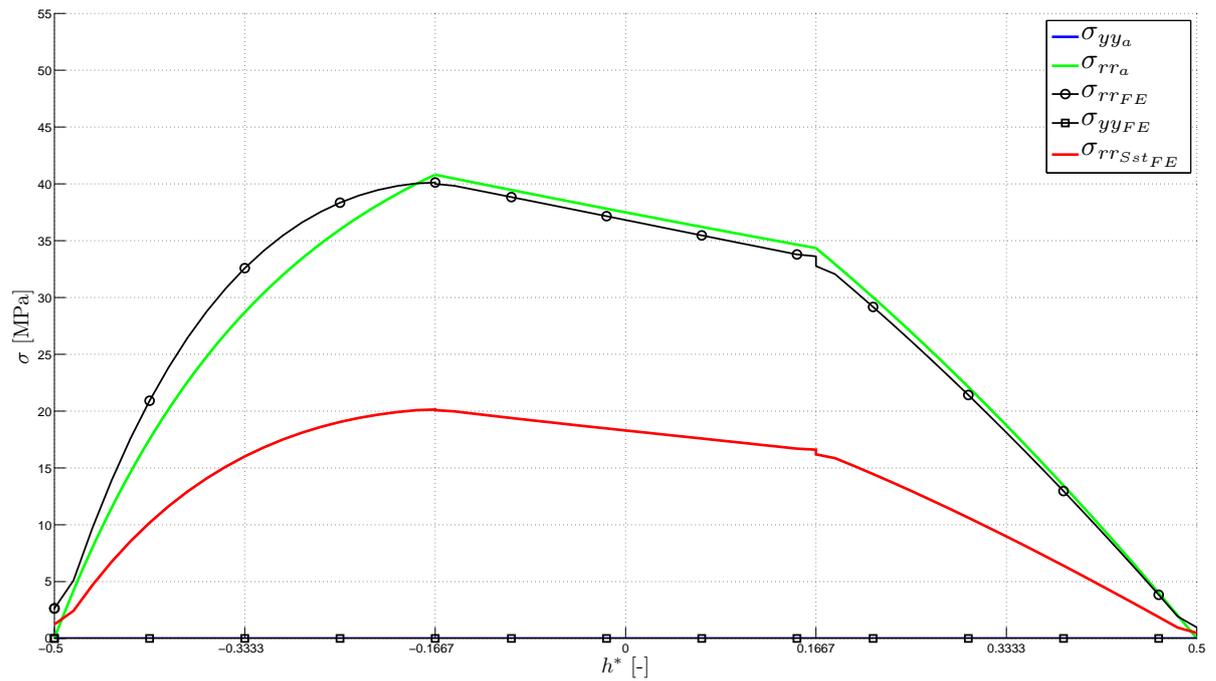


Abbildung B.4: Verlauf der Normalspannungen σ_{rr} in einem orthotrop geschichteten Profil mit $\frac{l}{h} = 10$ und $\frac{r_m}{h} = \frac{3}{2}$

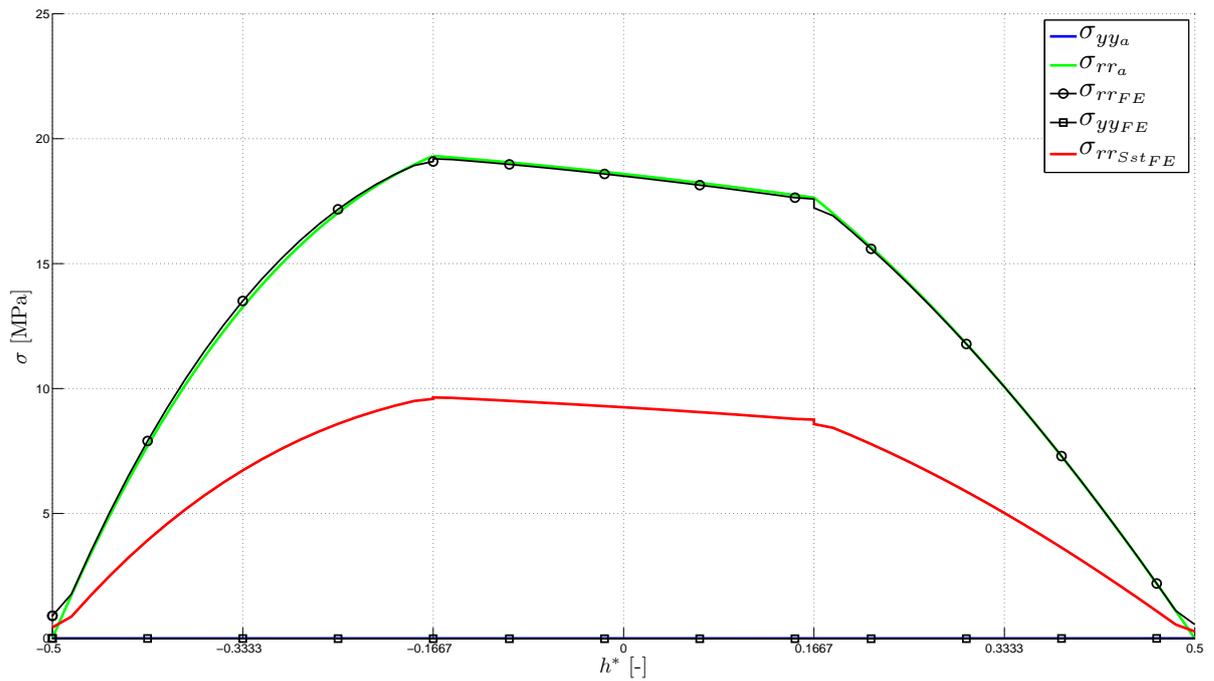


Abbildung B.5: Verlauf der Normalspannungen σ_{rr} in einem orthotrop geschichteten Profil mit $\frac{l}{h} = 5$ und $\frac{r_m}{h} = 3$

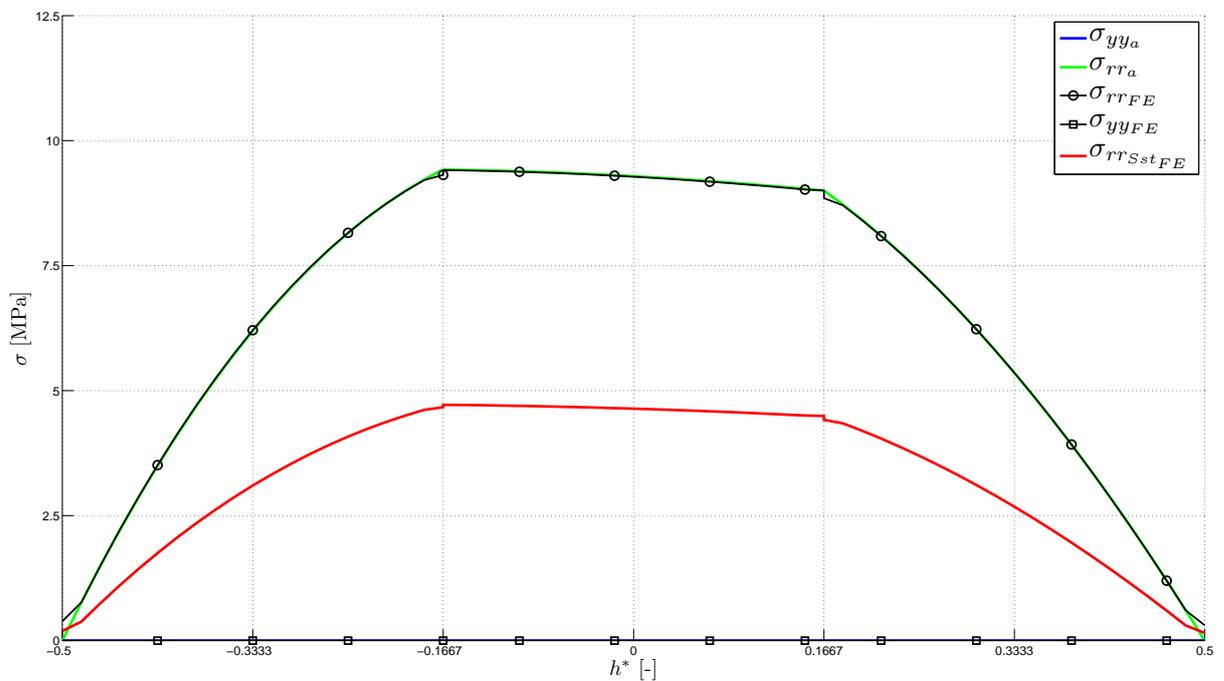


Abbildung B.6: Verlauf der Normalspannungen σ_{rr} in einem orthotrop geschichteten Profil mit $\frac{l}{h} = 10$ und $\frac{r_m}{h} = 6$

B.3. Verlauf der Verschiebungskomponenten

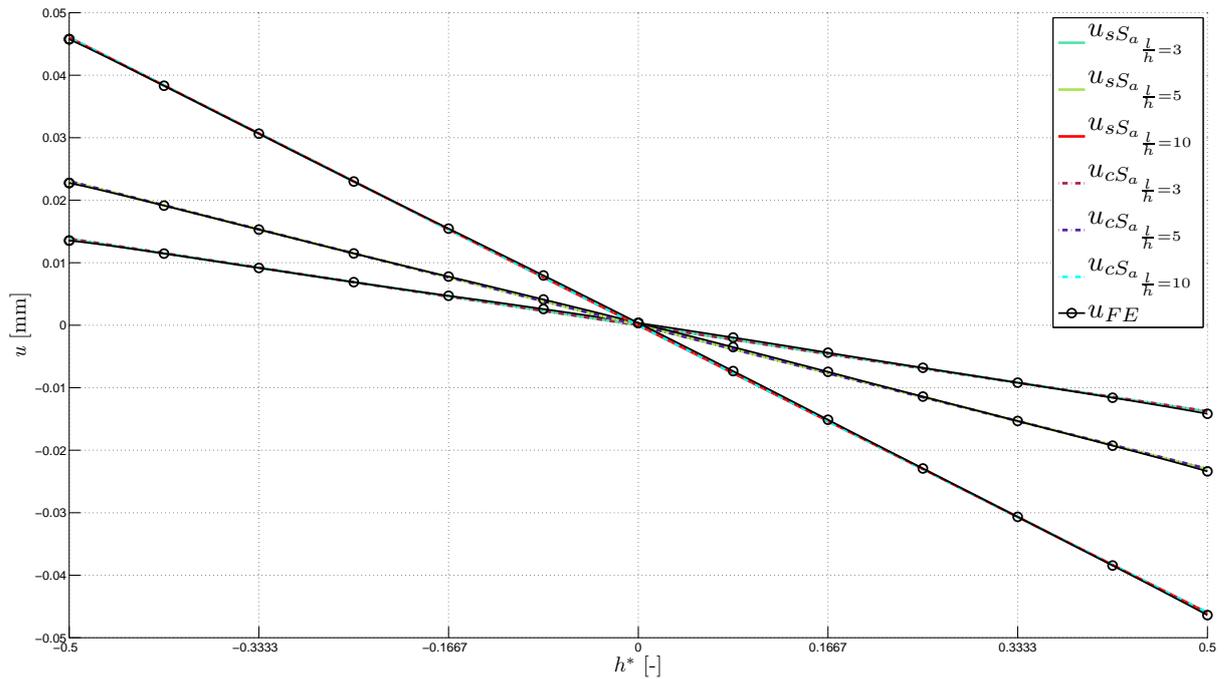


Abbildung B.7: Verlauf der Verschiebung u in orthotrop geschichteten Profilen mit $\frac{l}{h} = 3$, $\frac{l}{h} = 5$, $\frac{l}{h} = 10$, und $\frac{r_m}{h} = \frac{3}{2}$

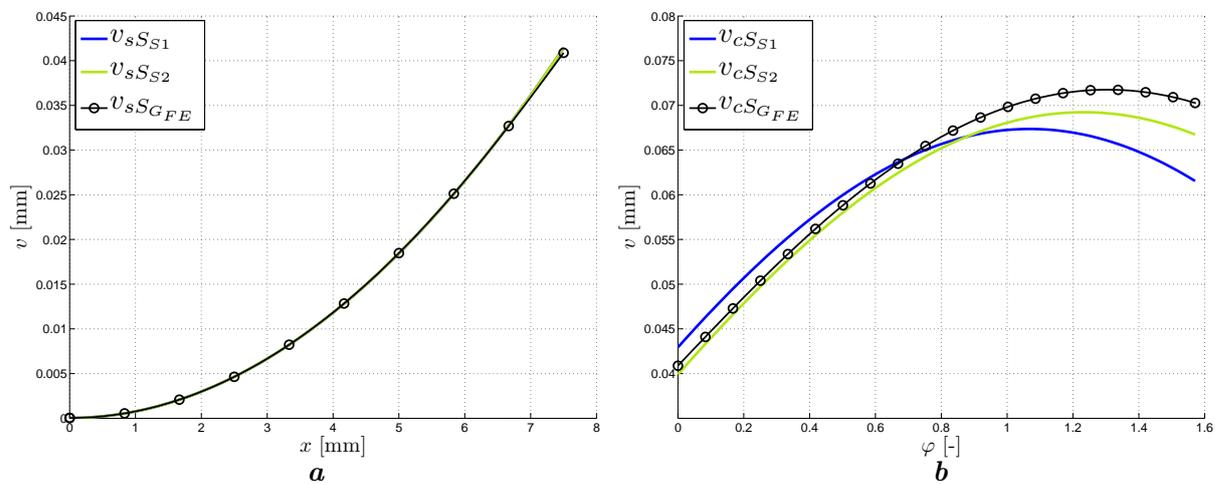


Abbildung B.8: Verschiebungskomponente quer zur Faserrichtung im Profil mit $\frac{l}{h} = 3$ und $\frac{r_m}{h} = \frac{3}{2}$; \mathbf{a} im geraden Bereich, \mathbf{b} im gekrümmten Bereich

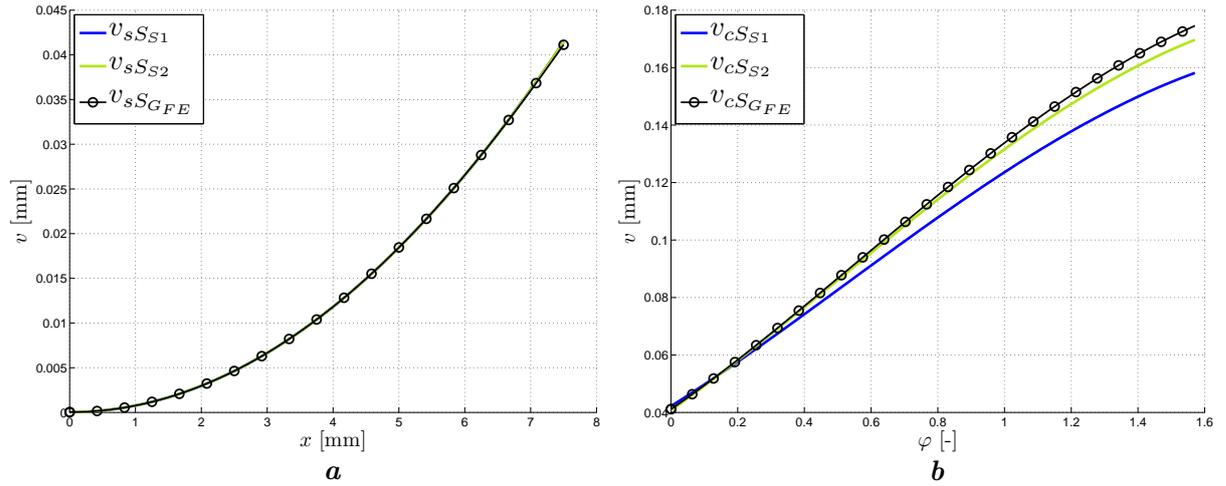


Abbildung B.9: Verschiebungskomponente quer zur Faserrichtung im Profil mit $\frac{l}{h} = 3$ und $\frac{r_m}{h} = 3$; **a** im geraden Bereich, **b** im gekrümmten Bereich

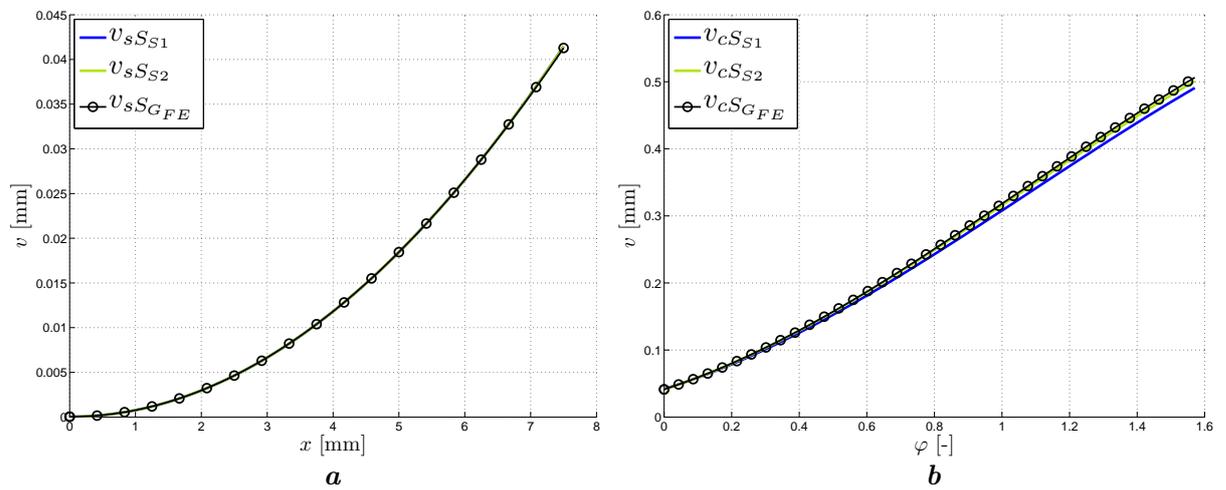


Abbildung B.10: Verschiebungskomponente quer zur Faserrichtung im Profil mit $\frac{l}{h} = 3$ und $\frac{r_m}{h} = 6$; **a** im geraden Bereich, **b** im gekrümmten Bereich

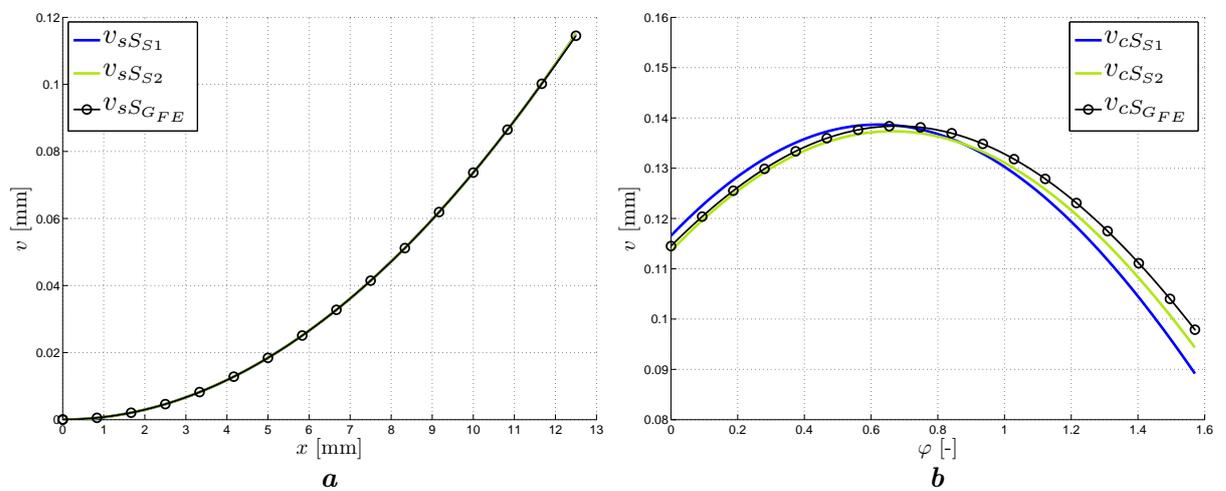


Abbildung B.11: Verschiebungskomponente quer zur Faserrichtung im Profil mit $\frac{l}{h} = 5$ und $\frac{r_m}{h} = \frac{3}{2}$; **a** im geraden Bereich, **b** im gekrümmten Bereich

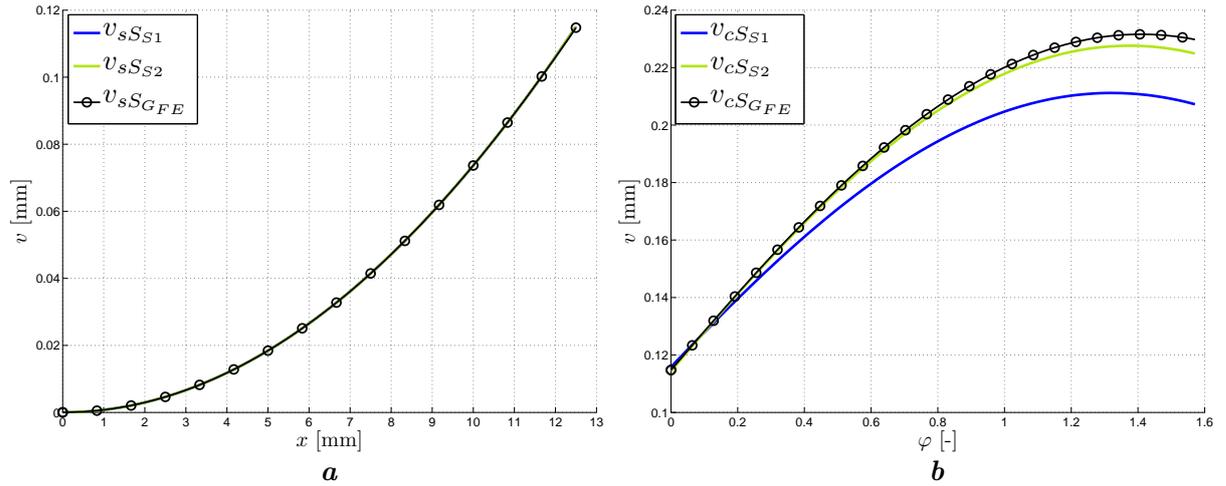


Abbildung B.12: Verschiebungskomponente quer zur Faserrichtung im Profil mit $\frac{l}{h} = 5$ und $\frac{r_m}{h} = 3$; **a** im geraden Bereich, **b** im gekrümmten Bereich

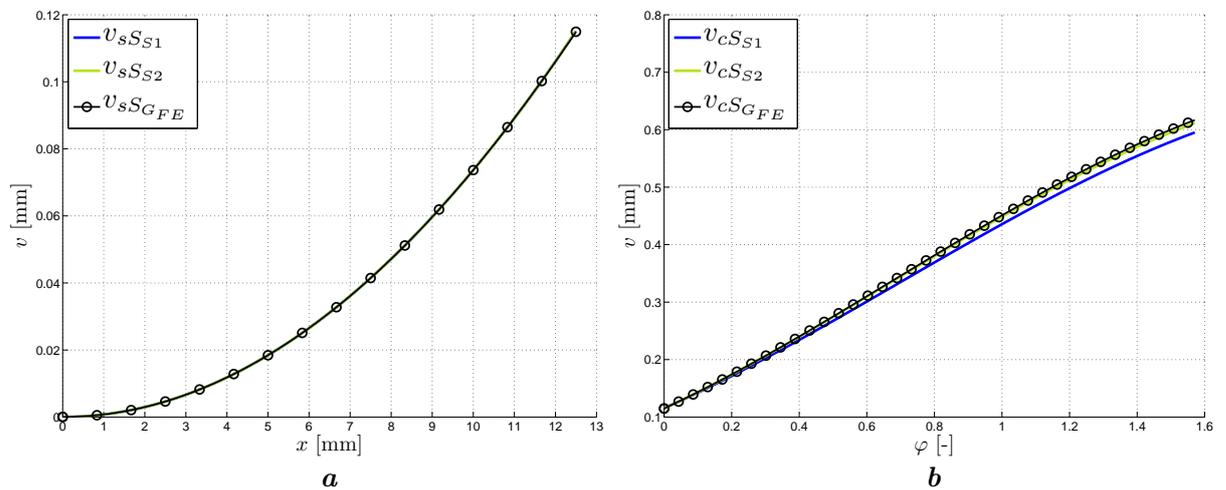


Abbildung B.13: Verschiebungskomponente quer zur Faserrichtung im Profil mit $\frac{l}{h} = 5$ und $\frac{r_m}{h} = 6$; **a** im geraden Bereich, **b** im gekrümmten Bereich

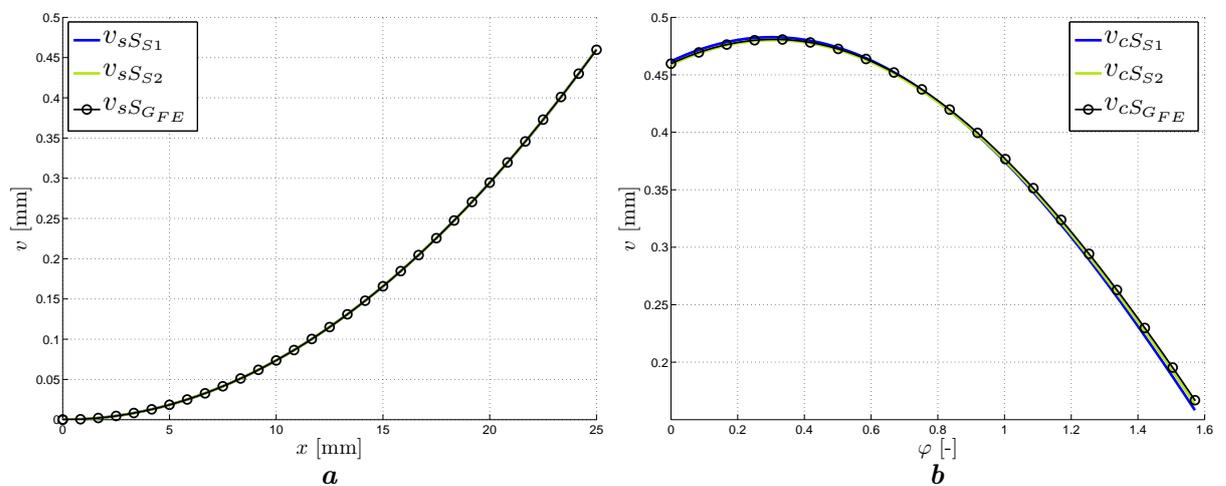


Abbildung B.14: Verschiebungskomponente quer zur Faserrichtung im Profil mit $\frac{l}{h} = 10$ und $\frac{r_m}{h} = \frac{3}{2}$; **a** im geraden Bereich, **b** im gekrümmten Bereich

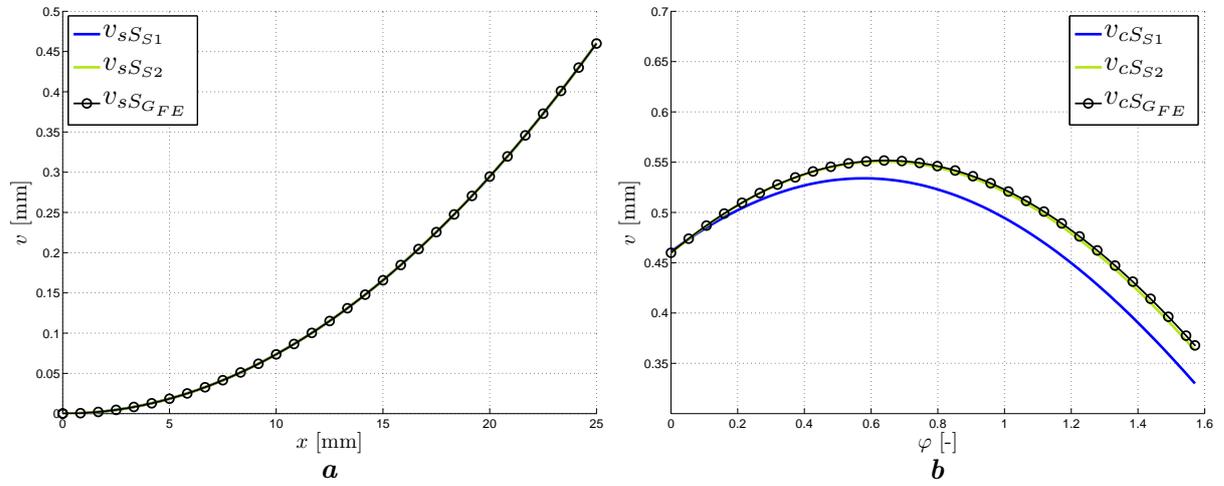


Abbildung B.15: Verschiebungskomponente quer zur Faserrichtung im Profil mit $\frac{l}{h} = 10$ und $\frac{r_m}{h} = 3$; **a** im geraden Bereich, **b** im gekrümmten Bereich

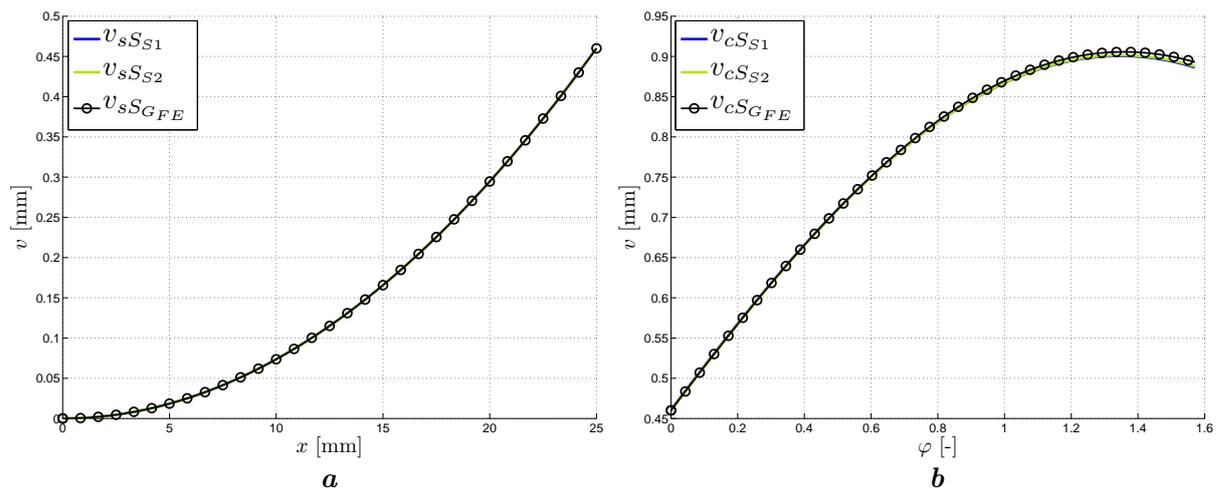


Abbildung B.16: Verschiebungskomponente quer zur Faserrichtung im Profil mit $\frac{l}{h} = 10$ und $\frac{r_m}{h} = 6$; **a** im geraden Bereich, **b** im gekrümmten Bereich

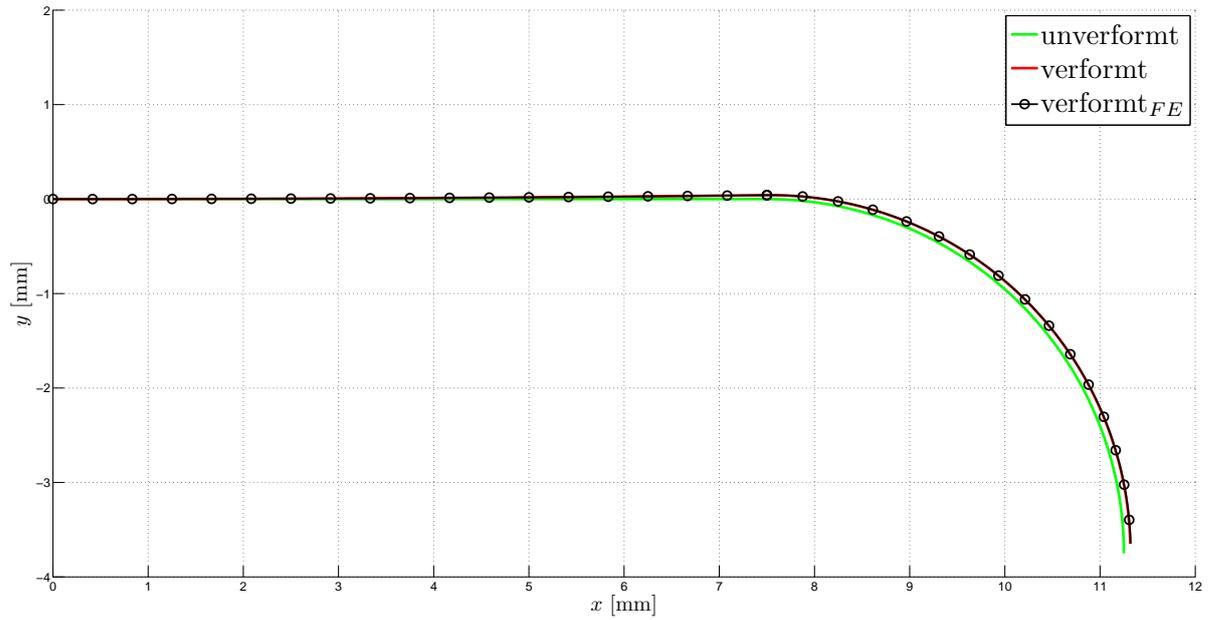


Abbildung B.17: Auslenkung der mittleren Sehne des orthotrop geschichteten Profils mit $\frac{l}{h} = 3$ und $\frac{r_m}{h} = \frac{3}{2}$ unter der Momentenbelastung M_0

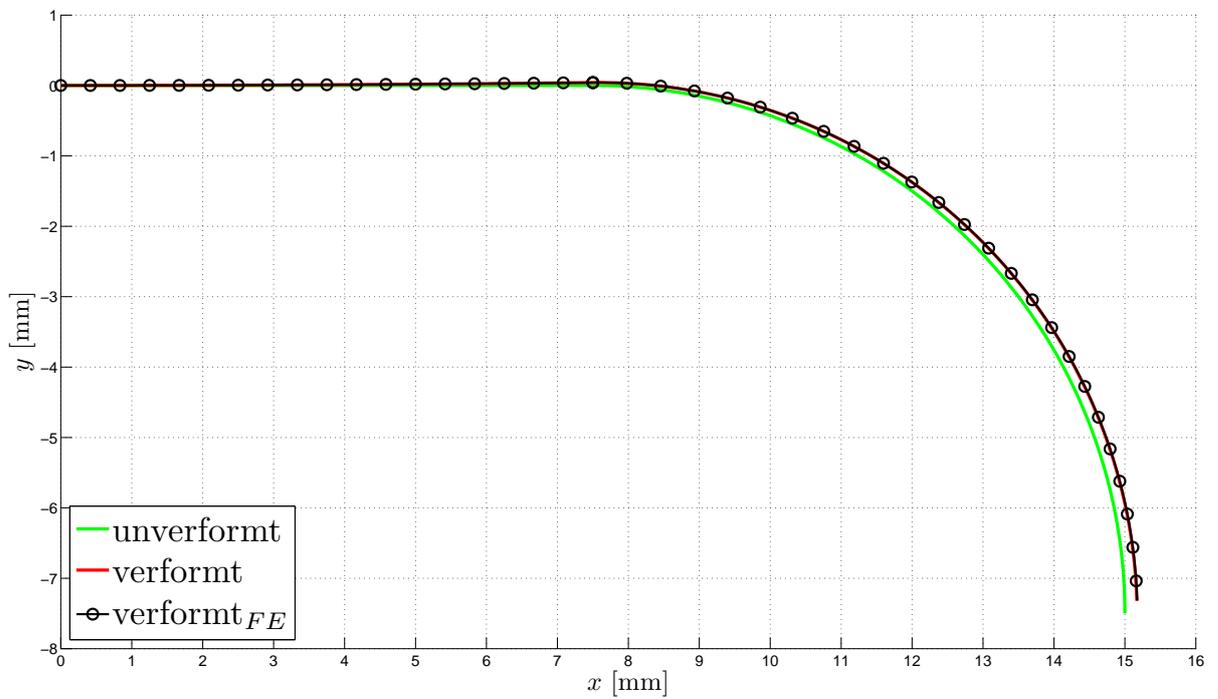


Abbildung B.18: Auslenkung der mittleren Sehne des orthotrop geschichteten Profils mit $\frac{l}{h} = 3$ und $\frac{r_m}{h} = 3$ unter der Momentenbelastung M_0

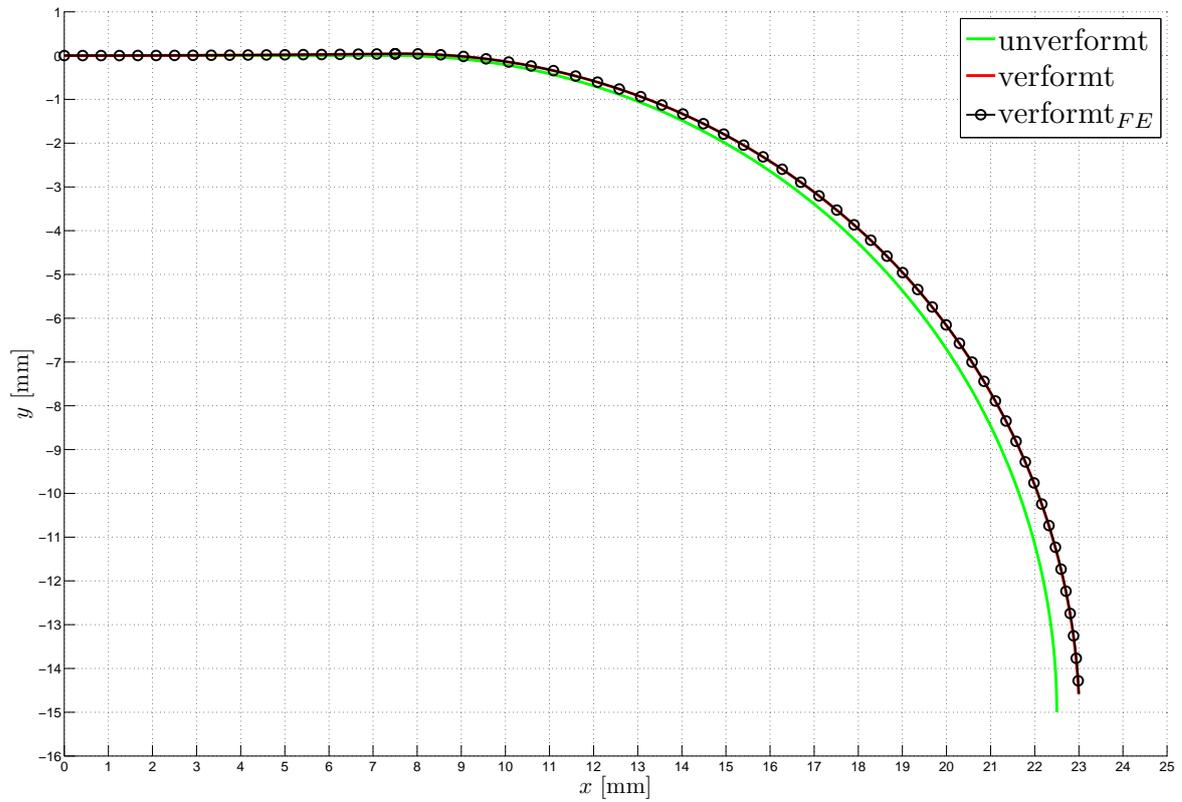


Abbildung B.19: Auslenkung der mittleren Sehne des orthotrop geschichteten Profils mit $\frac{l}{h} = 3$ und $\frac{r_m}{h} = 6$ unter der Momentenbelastung M_0

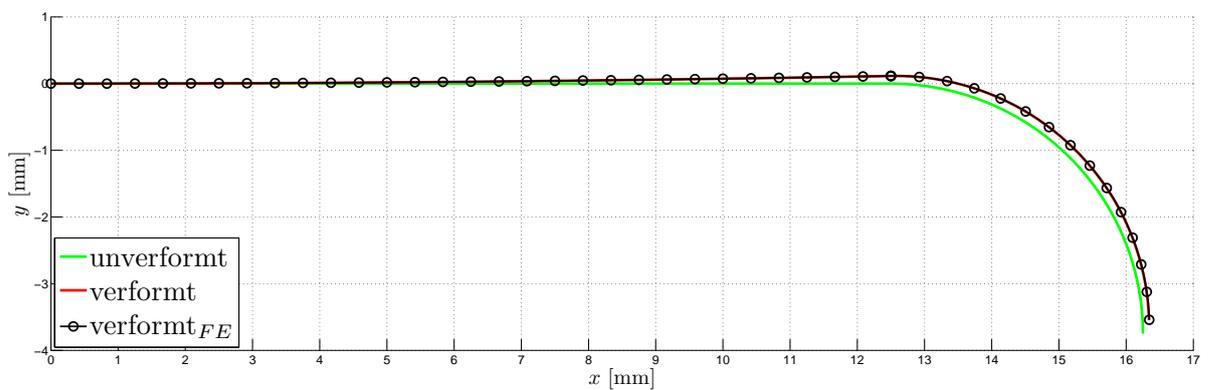


Abbildung B.20: Auslenkung der mittleren Sehne des orthotrop geschichteten Profils mit $\frac{l}{h} = 5$ und $\frac{r_m}{h} = \frac{3}{2}$ unter der Momentenbelastung M_0

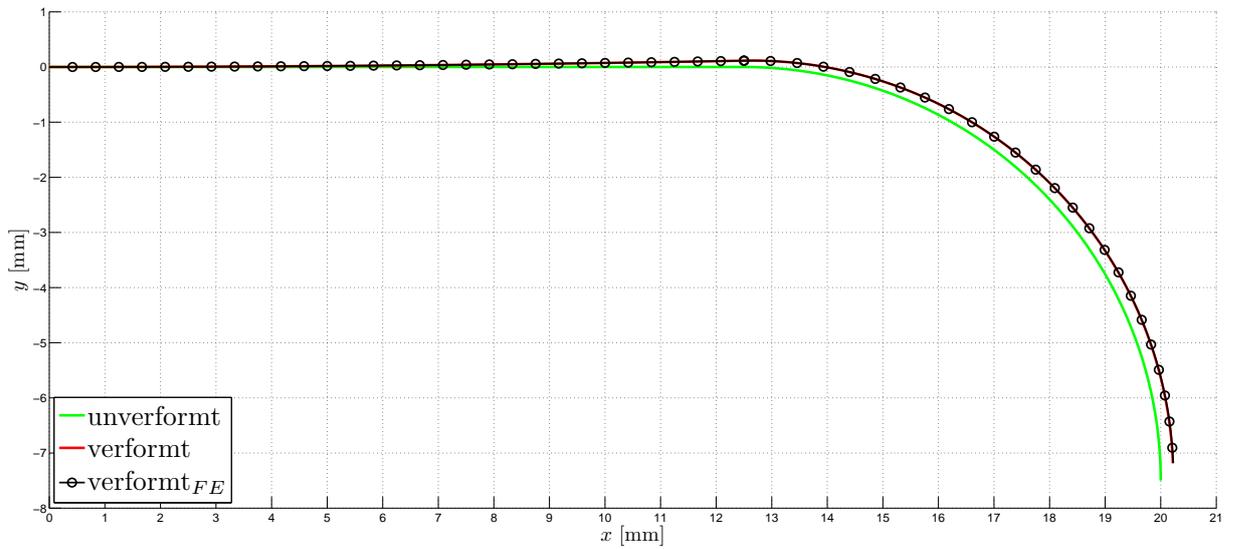


Abbildung B.21: Auslenkung der mittleren Sehne des orthotrop geschichteten Profils mit $\frac{l}{h} = 5$ und $\frac{r_m}{h} = 3$ unter der Momentenbelastung M_0

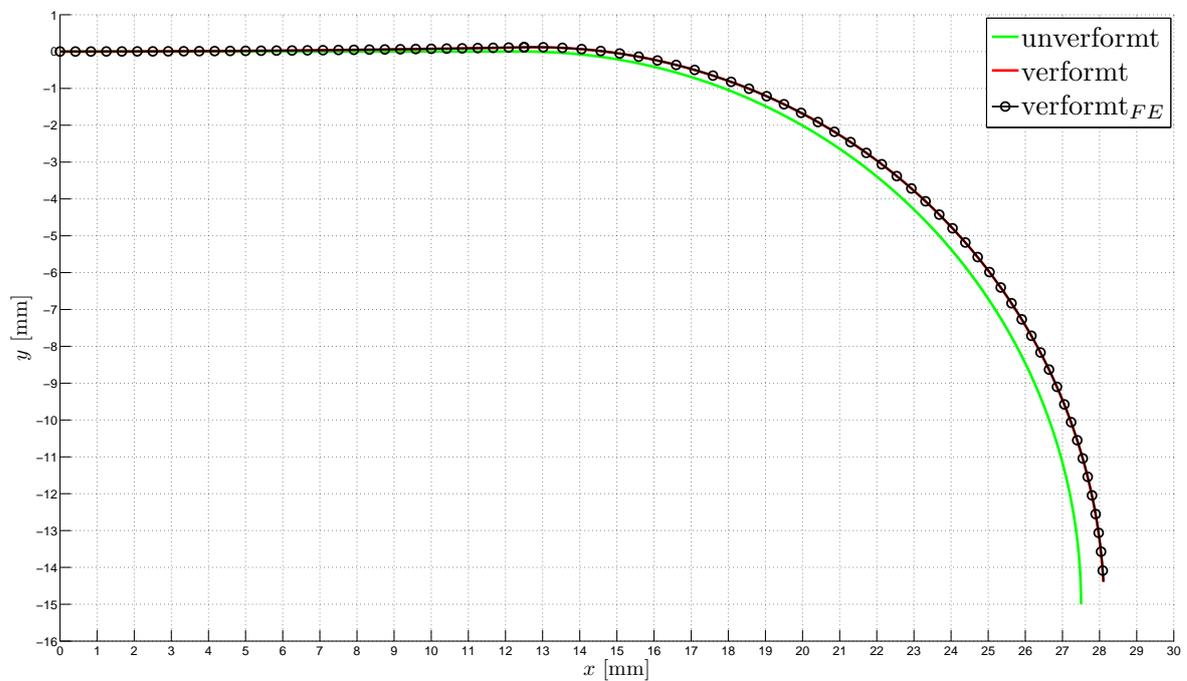


Abbildung B.22: Auslenkung der mittleren Sehne des orthotrop geschichteten Profils mit $\frac{l}{h} = 5$ und $\frac{r_m}{h} = 6$ unter der Momentenbelastung M_0

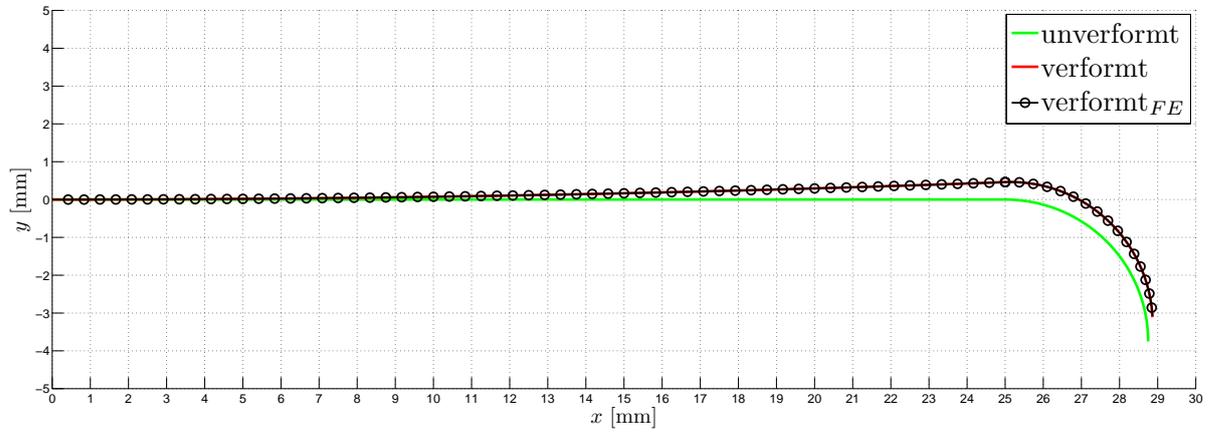


Abbildung B.23: Auslenkung der mittleren Sehne des orthotrop geschichteten Profils mit $\frac{l}{h} = 10$ und $\frac{r_m}{h} = \frac{3}{2}$ unter der Momentenbelastung M_0

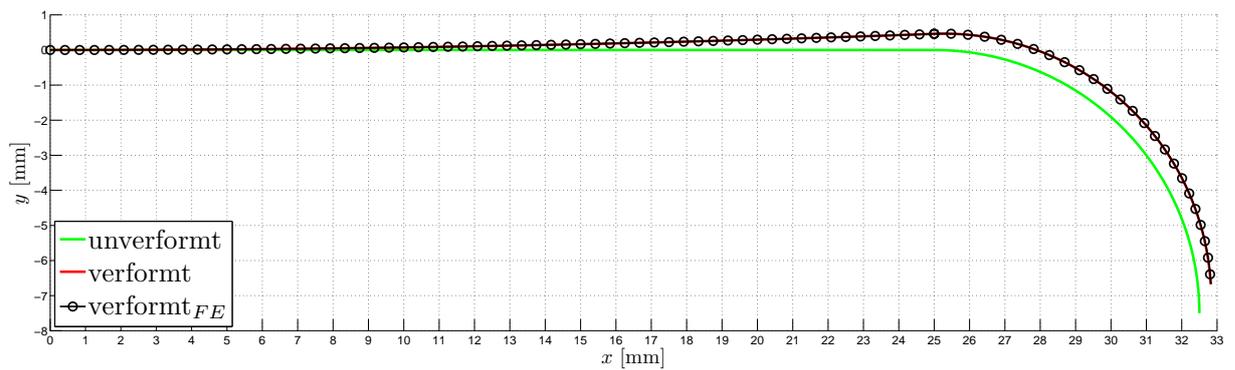


Abbildung B.24: Auslenkung der mittleren Sehne des orthotrop geschichteten Profils mit $\frac{l}{h} = 10$ und $\frac{r_m}{h} = 3$ unter der Momentenbelastung M_0

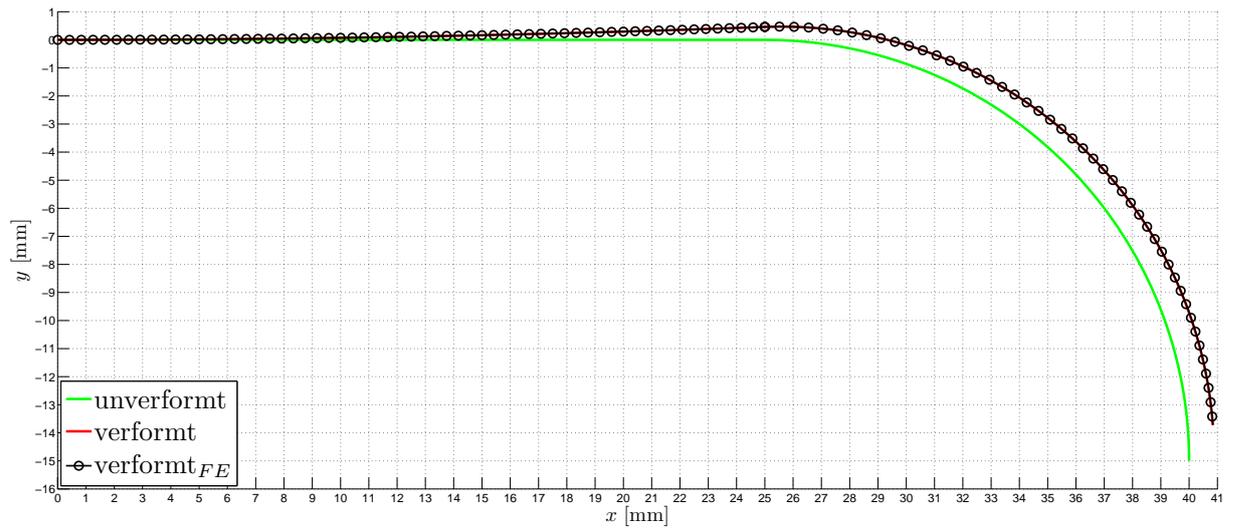


Abbildung B.25: Auslenkung der mittleren Sehne des orthotrop geschichteten Profils mit $\frac{l}{h} = 10$ und $\frac{r_m}{h} = 6$ unter der Momentenbelastung M_0