



Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg  
*Hamburg University of Applied Sciences*

**Bachelorarbeit**

**Department Fahrzeugtechnik und Flugzeugbau**

**Methodenvergleich der modalen Reduktion flexibler  
Fahrwerkstrukturen zur Erweiterung der  
Mehrkörpersimulation im Frequenzbereich bis 300 Hz**

**Stefan Nath  
1975640**

**28. Februar 2013**

**Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg  
Department Fahrzeugtechnik + Flugzeugbau  
Berliner Tor 9**

**20099 Hamburg**

in Zusammenarbeit mit:

**Daimler AG  
Research & Development**

**71059 Sindelfingen**

Verfasser: Stefan Nath  
Abgabedatum: 28.02.2013

1. Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Christian Wolfgang Fervers  
2. Prüfer: Dipl.-Ing. Ralph Samietz

Industrielle Betreuer: Dr.-Ing. Christoph Böhm  
Dipl.-Ing. Ralph Samietz

---

---

# Kurzreferat

In der Fahrwerkentwicklung ist für Untersuchungen mit Mehrkörpersimulationsprogrammen bis zu einer Frequenz von 30 Hz der Einsatz von starren Achsbauteilen der Standard. Um Aussagen bis 300 Hz zu ermöglichen, soll der Einsatz von flexiblen Bauteilen unter Anwendung verschiedener Reduktionsverfahren untersucht werden. Es gibt eine Vielzahl von Reduktionsmethoden, welche in der Literatur vorgestellt werden. In dieser Arbeit werden die grundlegenden Verfahren nach Guyan und Craig-Bampton verglichen.

Im Anschluss an die theoretischen Grundlagen wird der Vergleich zunächst direkt an den flexiblen Strukturen der Bauteile durchgeführt und dann der Einsatz dieser Bauteile in der Mehrkörpersimulation betrachtet.

Die Untersuchung zeigt, dass der Einsatz von flexiblen Achsbauteilen ab einer Frequenz von 30 Hz sinnvoll ist. Dabei bietet das Guyan-Reduktionsverfahren eine hinreichend gute Möglichkeit die FE-Bauteile für die Mehrkörpersimulation aufzubereiten. Bei der FE-Bauteilmodellierung geht die Empfehlung zu Tetraeder-Elementen mit zehn Knoten.

## Abstract

In the development of suspensions is for studies with multi-body-simulation-programs up to a frequency of 30 Hz the use of rigid axle components the standard. To allow statements up to 300 Hz, the use of flexible components and different reduction methods must to be examined. There are a lot of reduction methods, which are demonstrated in literature. In this study the basic reduction methods of Guyan and Craig-Bampton are compared.

Following the theoretical basis the comparison is first carried out directly on the flexible structure of the components and then the use of these components in the multi-body simulation is considered

The study shows that the use of flexible axle components from a frequency of 30 Hz is recommended. In the course of this the guyan-reduction-method is a sufficiently good way to prepare the fe-components for the multi-body simulation. To model the fe-components is the recommendation to use tetrahedral-elements with ten nodes.

---

---

# Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere an Eides statt durch meine eigenhändige Unterschrift, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe angefertigt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder dem Sinn nach auf Publikationen oder Vorträgen anderer Autoren beruhen, sind als solche kenntlich gemacht. Ich versichere außerdem, dass ich keine andere als die angegebene Literatur verwendet habe. Diese Versicherung bezieht sich auch auf alle in der Arbeit enthaltenen Zeichnungen, Skizzen, bildlichen Darstellungen und dergleichen.

Die Arbeit wurde bisher keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Hamburg, 28.02.2013

Stefan Nath: \_\_\_\_\_

## Danksagung

Zunächst möchte ich mich bei der Daimler AG und speziell beim Team „Simulation Gesamtfahrwerk“, geleitet von Dr. Christoph Böhm, für die Eröffnung der Möglichkeit bedanken, meine Abschlussarbeit dort zu schreiben. Des Weiteren möchte ich mich für die großartige Unterstützung während meiner Praxisphase bei meinem industriellen Betreuer Herrn Ralph Samietz bedanken. Außerdem gilt mein Dank Herrn Okan Beycuy, der mich ebenfalls stark unterstützt hat.

Bei Prof. Dr. Christian Wolfgang Fervers bedanke ich mich für die sehr gute hochschulseitige Betreuung.

Besonderer Dank für ihr Verständnis und ihre Unterstützung gilt meiner Freundin Sarah Rechlin, ebenso meiner Familie.

---

---

# Abkürzungsverzeichnis

CAD	computer-aided design
CB	Craig-Bampton
FEM	Finite-Elemente-Methode
FL	Federlenker
GUY	Guyan
NVH	Noise - Vibration - Harshness
mD	modale Dämpfung
MKS	Mehrkörpersimulation
OQL	oberer Querlenker
RT	Radträger
Tet4/10	Tetraeder-Element mit 4/10 Knoten
ZUGS	Zugstrebe

---

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung .....</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Noise Vibration Harshness - NVH .....</b>	<b>3</b>
2.1	Was ist NVH? .....	3
2.2	Bedeutung von NVH in der Fahrwerktechnik .....	3
2.3	Anregung Straße-Reifen.....	4
2.3.1	Mechanische Anregung .....	5
2.3.2	Aerodynamische Anregung .....	5
<b>3</b>	<b>Verfahren der Modellreduktion.....</b>	<b>6</b>
3.1	Allgemeiner Formalismus der Reduktion.....	8
3.2	Statische Reduktion nach Guyan.....	10
3.3	Modale Reduktion.....	11
3.4	Gemischt statisch-modale Reduktion .....	13
3.5	Statikmoden und dynamische Moden .....	15
<b>4</b>	<b>Mehrmassenschwinger .....</b>	<b>16</b>
4.1	Der Aufbau .....	16
4.2	Vergleich Matrizen.....	18
4.3	Statische Belastung .....	21
4.4	Eigenmoden.....	22
<b>5</b>	<b>FE - Achsbauteile.....</b>	<b>25</b>
5.1	Aufbereitung der Daten .....	25
5.2	Validierung der Daten.....	26
5.3	Das nichtreduzierte Modell - „Originalmodell“ .....	27
5.4	Vergleich der Reduktionsverfahren .....	28
5.5	Erhöhung der Vernetzungsgüte .....	32
<b>6</b>	<b>MKS: NVH-Lastfall .....</b>	<b>35</b>
6.1	Systembeschreibung und NVH-Lastfall .....	35
6.2	Berechnungsergebnisse .....	38
6.2.1	Vergleich der Reduktionsverfahren .....	38
6.2.2	Variation der modalen Dämpfung .....	43
6.2.3	Vergleich: Tet4- und Tet10-Volumenelemente .....	45
6.2.4	Einflussanalyse einzelner Bauteile.....	48
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung .....</b>	<b>50</b>
<b>8</b>	<b>Literaturverzeichnis.....</b>	<b>52</b>
<b>9</b>	<b>Anhang .....</b>	<b>54</b>
9.1	Quelltext: Mehrmassenschwinger .....	54

---

---

# 1 Einleitung

Die Daimler AG als Fahrzeughersteller steht vor der Herausforderung, neue Fahrwerkkomponenten in ein Fahrzeug zu integrieren und zu einem harmonischen Ganzen zu verbinden. Die Gesamtfahrwerkberechnung mittels der Mehrkörpersimulation (MKS) nimmt in diesem Kontext einen hohen Stellenwert ein. Das Team Simulation Gesamtfahrwerk modelliert im Fahrwerkcenter der Mercedes-Benz PKW-Entwicklung virtuelle Prototypen, welche mit Hilfe von Manövern und Lastfällen, die größtenteils den Untersuchungen der Prüfstände und der Fahrversuche entsprechen, abgesichert werden. Ein Gesamtfahrwerkmodell besteht dabei aus mehreren Teilmodellen wie beispielsweise Achsen, Lenkung, Federung und Dämpfung. Die Modelle sind modular aufgebaut und ermöglichen mit starren Körpern Untersuchungen bezüglich Fahrdynamik und Schwingungskomfort bis 30 Hz.

In Automobilunternehmen liegt ein besonderer Fokus auf dem Komfortverhalten moderner PKW. Die NVH-Eigenschaften werden im Entwicklungsprozess parallel zu den Ride/Handling-Auslegungen berücksichtigt. Es gilt, den Anforderungen an Ride, Handling, NVH, Betriebsfestigkeit sowie Kosten und Package zu begegnen.

Die Fahrwerksimulation kann helfen die Anforderungen bezüglich Komfort und NVH frühzeitig im Entwicklungsprozess zu erkennen, sodass die später einsetzenden Versuchsaktivitäten auf einen reifen Entwicklungsstand aufbauen können. Dafür ist es notwendig, die Simulationsmodelle für höhere Frequenzbereiche zu ertüchtigen.

Für diese Arbeit leitet sich folgende Aufgabenstellung ab:

„Methodenvergleich der modalen Reduktion flexibler Fahrwerkstrukturen zur Erweiterung der Mehrkörpersimulation im Frequenzbereich bis 300 Hz“

“Comparison of methods for modal reduction of flexible chassis structures to extend the multi-body simulation in the frequency range up to 300 Hz”

---

---

Nachdem im vorangegangenen Praktikum die notwendigen Grundlagen geschaffen wurden, also Einarbeitung in die Mehrkörpersimulation, Softwarehandhabung und FE-Modellierung, konnte mit der eigentlichen Bearbeitung des Themas begonnen werden.

Dabei wurden die Teilaufgaben wie folgt gegliedert:

- Theorie der modalen Reduktion von flexiblen Strukturen vergleichen und darlegen
- Aufbau flexibler Strukturen und Ermittlung von Eigenmoden und Abgleich mit Bauteilmessungen
- Modale Reduktionen an flexiblen Strukturen durchführen und Variationen aufzeigen
- Geeignete Methoden und Einstellungen der modalen Reduktion auswählen
- Einbinden flexibler Strukturen in das MKS-Modell
- Einflussanalyse der modalen Dämpfung auf das MKS-Modell
- Variation der FE-Volumenelemente
- Variation der Anzahl flexibler Strukturen und Untersuchung auf Einflüsse zur Güte der Simulationsergebnisse
- Dokumentation der Arbeit

Das Ziel ist, dass die Reduktionsverfahren für flexible Strukturen in der MKS Berechnung analysiert und verglichen sind. Dafür sind geeignete Theorien ausgewählt und die Methoden für die Mehrkörpersimulation festgelegt.

## 2 Noise Vibration Harshness - NVH

### 2.1 Was ist NVH?

NVH ist die Abkürzung für die englische Wortfolge Noise - Vibration - Harshness. Es bedeutet übersetzt Geräusch - Vibration - Rauheit und ist die Bezeichnung für eine Komforteigenschaft, welche die als Geräusch hörbaren und als Vibration spürbaren Schwingungen im Fahrzeug beschreibt (Heißling, et al., 2011). Die Bedeutung der NVH-Eigenschaften hat in den letzten Jahren der Fahrwerkentwicklung ständig zugenommen. Der Käufer eines Premiumfahrzeugs wünscht sich einen hohen Schwingungskomfort, also wenig Geräusche als auch Vibrationen. Zum Zweiten ist durch ein NVH-optimiertes Fahrzeug eine geringere Belastung des Fahrers zu erwarten, was zur aktiven Sicherheit beiträgt (Reitz, et al., 1999).

Das Frequenzspektrum wird dabei in drei Bereiche untergliedert, die in Abbildung 2-1 aufgezeigt sind. Das ist zum ersten der Bereich „Vibrationen“, welcher den Frequenzbereich bis etwa 20 Hz abdeckt. Der zweite Bereich wird durch die „Rauheit“ von ca. 20 bis 100 Hz gekennzeichnet. Dies ist der Übergangsbereich, in dem sowohl akustische als auch mechanische Schwingungen auftreten. Der Geräusch-Bereich stellt den Frequenzbereich ab 100 Hz dar, hier dominieren hörbare Schwingungen.

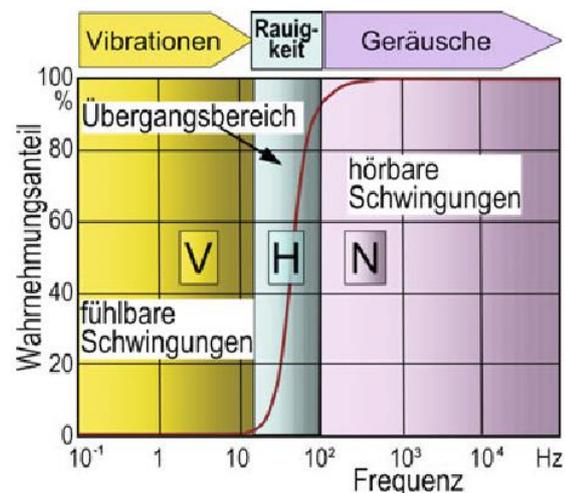


Abbildung 2-1: NVH-Frequenzbereiche (Heißling, et al., 2011)

### 2.2 Bedeutung von NVH in der Fahrwerktechnik

Für das Gesamtfahrzeug gibt es eine Vielzahl von Anregungen, welche Vibrationen hervorrufen. Dies sind beispielsweise Anregungen über das Fahrwerk durch den Fahrbahn-Reifen-Kontakt, aufgrund des Verbrennungsmotors bedingt durch seine Motorbauart, Drehungsungleichförmigkeit und den Verbrennungsprozess oder durch Luftströmung. Je nach Fahrzustand erfahren die Anregungen unterschiedliche Gewichtung, zum Beispiel durch Fahrgeschwindigkeit, Motorlast oder Fahrbahnqualität. (Thomaier, 2008)

---

Diese Arbeit umfasst das Übertragungsverhalten der Fahrwerkkomponenten, also allen Lenkern, Radträgern, Dämpfern sowie Federn und Lagerelementen. Die Schwingungen werden dabei durch das Fahrbahnprofil als auch durch das Reifenprofil hervorgerufen und über die Fahrwerkelemente in die Karosserie eingeleitet. Diese Schwingungen sind in der später definierten Anregung für die Mehrkörpersimulation (vgl. Kapitel 6) enthalten, weshalb die Entstehungsprozesse der Schwingungen erläutert werden.

## 2.3 Anregung Straße-Reifen

Um die Anregung von Schwingungen durch den Kontakt von Reifen und Fahrbahn zu erklären, ist eine genaue Betrachtung eines rollenden Reifens von hohem Wert. Die Abbildung 2-2 zeigt einen rollenden Reifen und die verschiedenen Entstehungsprozesse von Schwingungen am Reifen.

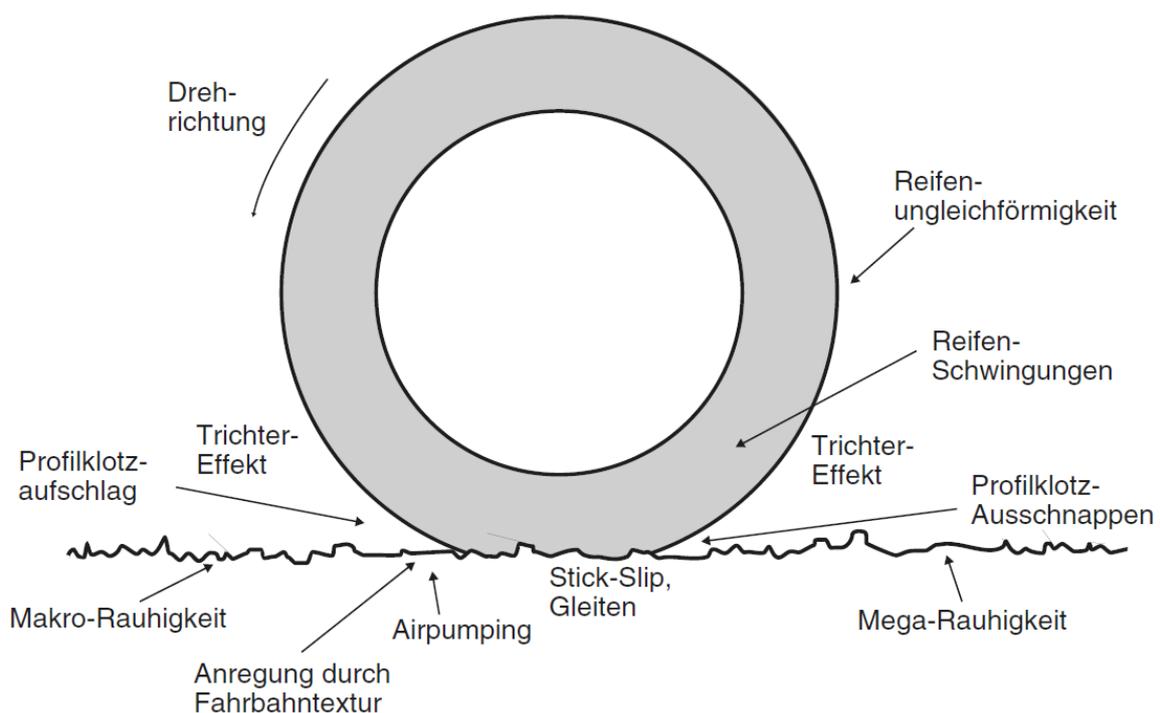


Abbildung 2-2: Entstehungsprozesse von Schwingungen am Reifen (Gauterin, 2010)

Wie man erkennt, lassen sich die Ursachen der Entstehungen von Schwingungen, welche der Fahrer wahrnimmt, teilweise durch Effekte am Reifen und Eigenschaften des Fahrbahnprofils erklären, ebenso sind sogenannte aerodynamische Vorgänge mitverantwortlich. Nachfolgend sollen die Effekte kurz erläutert werden.

---

---

### 2.3.1 Mechanische Anregung

Durch die Rollbewegung des Reifens kommt es zum Eintreten einzelner Profilstollen in die Latschfläche. Dabei werden die Profilstollen unter Einwirkung von Kräften verformt. Das so bezeichnete „Klotzaufschlagen“ führt zur Anregung von Schwingungen. Beim „Klotz-Ausschnappen“, also dem Vorgang, in dem die Profilstollen aus der Latschfläche austreten und aus der zuvor verformten Position wieder in die Ausgangslage ausschlagen, werden ebenfalls Schwingungen angeregt (Beckenbauer, 2008).

Ebenfalls Ursache für die Anregung von Schwingungen im Reifen-Fahrbahn-Kontakt sind Haft-Gleit-Vorgänge, sogenannte Stick-Slip-Effekte. Sie bezeichnen den Vorgang, wenn die Reibung zwischen zwei Körpern zwischen Haftreibung und Gleitreibung springt. Durch den ständigen Wechsel des Haftungszustandes werden auch die Haftkräfte über der Zeit variiert, folglich die Ursache von Schwingungen (Beckenbauer, 2008).

Eine große Bedeutung haben auch das Reifenprofil und die Fahrbahntextur. Durch die zeitliche Variation der Kontaktkräfte im Latsch entstehen Schwingungen. Für den Reifen ist hierbei das Reifenmuster, also das Profildesign von Bedeutung. Bei dem Fahrbahnbelag kommt es auf die Rauheit und Textur der Straße an. Neben der reinen Oberflächenstruktur sind aber auch Fahrbahnunebenheiten, -welligkeiten und auch Straßenschäden zu nennen. Die stochastische Anregung durch die Fahrbahnoberfläche erzeugt ein mehr oder weniger rauschhaftes Spektrum, der Reifen erzeugt durch seine periodische Struktur des Profils eher tonale Geräusche (Zeller, 2012). Bis etwa 30 Hz im Frequenzbereich stellen die Fahrbahnunebenheiten die intensivste Erregerquelle für das Schwingungssystem Fahrzeug dar (Heißling, et al., 2011).

Ein weiterer Effekt, der zur Erregung von Schwingungen führt, sind die „Reifenschwingungen“ an sich. Beim Einlaufen in die Kontaktfläche wird der Reifen zwangsverformt. Beim Austreten aus der Kontaktfläche kann der Reifen sich nun aufgrund seiner Grundform und des Innendrucks wieder in seine ursprüngliche Form bringen, was allerdings einen Schwingungsvorgang und daraus resultierende Kräfte hervorruft.

### 2.3.2 Aerodynamische Anregung

Ein Reifen ist von Luft umgeben, einem kompressiblen Gas. Rollt der Reifen nun, so wird die Luft vor und in der Kontaktfläche zwischen Reifen und Fahrbahn komprimiert. Dieses unter Druck gesetzte Gas wird beim Weiterrollen wieder freigegeben und entspannt. Dieser schwingungsanregende Vorgang wird „airpumping“ genannt (Beckenbauer, 2008).

Die dabei auch entstehenden akustischen Geräusche werden entweder über Körperschall weitergeleitet oder als Luftschall direkt abgestrahlt. Der direkte abgestrahlte Luftschall wird dabei durch den Trichter- oder Horneffekt verstärkt. Dieser besagt, dass der trichterförmig aufgeprägte Luftraum vor und hinter der Reifen-Fahrbahn-Kontaktfläche (siehe Abbildung 2-2) die Schallausbreitung begünstigt und verstärkt.

---

---

### 3 Verfahren der Modellreduktion

Ein Fahrwerkmodell der Mehrkörpersimulation besteht aus etwa 100 Körpern, was bei je drei Translations- und Rotationsfreiheitsgraden gesamt circa 600 Freiheitsgrade ergibt. Ein Achsbauteil, welches aus finiten Elementen mit einer Kantenlänge von beispielsweise drei Millimetern aufgebaut ist, enthält im Gegensatz dazu einige zehntausend Freiheitsgrade. Werden diese FE-Bauteile in der Mehrkörpersimulation eingesetzt, so steigt die Anzahl der Freiheitsgrade des Gesamtsystems zu stark an, was eine Reduktion notwendig macht. Die Modellierung mit finiten Elementen stammt aus der Herausforderung, dass man die Steifigkeit und das Schwingungsverhalten realitätsnäher abbilden möchte. Die Mathematik und Physik bieten eine Handvoll von Verfahren, die darauf abzielen, die Modelle für schnellere Rechnungen zu reduzieren.

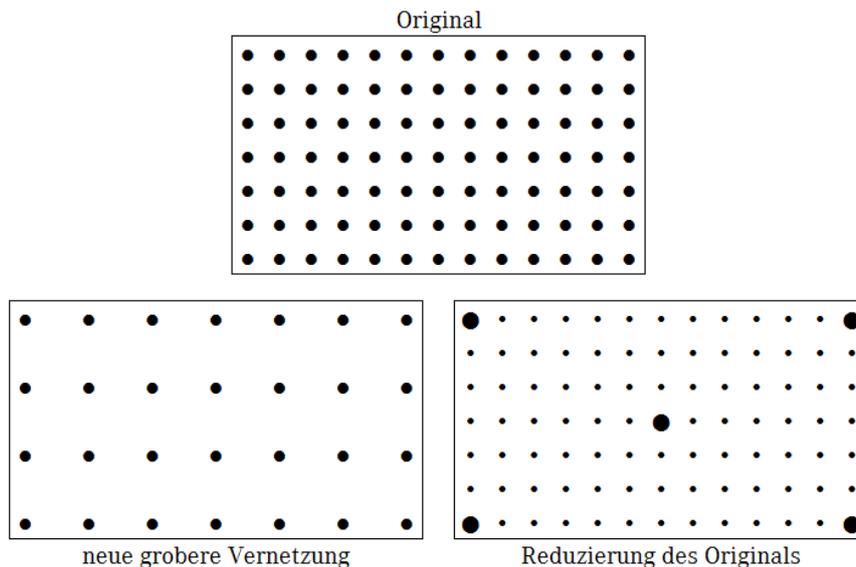


Abbildung 3-1: Möglichkeiten der Modellreduktion

Neben der Variante der Modellreduktion wäre auch eine weniger feine Vernetzung denkbar, die entsprechend die Anzahl der Knotenpunkte senkt und somit auch die Anzahl der Freiheitsgrade. Eine grobe Vernetzung ist jedoch durch die gegebene Geometrie nicht immer möglich. Ebenfalls kann der Fall auftreten, dass die FE-Modelle bereits aus anderen Untersuchungen, zum Beispiel einer Betriebsfestigkeitsuntersuchung, vorliegen. Diese Modelle sind für diese Untersuchungen teilweise sehr detailliert vernetzt und somit für die Einbindung in ein MKS-Modell ohne Reduktion ungeeignet (vgl. Abbildung 3-1).

In der Literatur sind einige Reduktionsverfahren für die Anwendung auf flexible Strukturen zu finden. Diese lassen sich, wie in (Koutsovasilis, 2009) beschrieben, einordnen in:

---

---

physikalisch-basierende Verfahren:

- Statische Kondensation (nach Guyan)
- Modale Reduktion
- IRS – Improved Reduced System
- SEREP – System Equivalent Reduction Expansion Process

gemischt physikalisch-nichtphysikalische Verfahren:

- Component Mode Synthesis (Craig-Bampton)

nichtphysikalische Reduktionsverfahren:

- Krylov-Unterraumverfahren
- Balanced Truncation

Diese Arbeit beschränkt sich auf die Verfahren der statischen Kondensation nach Guyan, der modalen Reduktion sowie auf die Component Mode Synthesis (CMS, auch Craig-Bampton-Verfahren genannt).

Diese Auswahl beruht auf der Tatsache, dass es sich bei diesen Methoden um die Basisverfahren handelt und die Anwendung und Automatisierung in anderen Abteilungen bereits erfolgt. Zum anderen liegt es an der softwareseitigen Verfügbarkeit und somit der Anwendbarkeit während der Praxisphase.

Um die anderen Verfahren kurz zu beschreiben und Hinweise auf Literatur zu geben, seien diese im Folgenden ohne die Vorkenntnisse der oben gewählten Reduktionsverfahren erwähnt.

Das IRS-Verfahren kann als Erweiterung zur statischen Kondensation aufgefasst werden und berücksichtigt zusätzlich die Trägheitskräfte, was auf O`Callaghan zurückgeht (Friswell, et al., 1995). Das SEREP-Verfahren stellt eine Vertiefung der modalen Reduktion dar und geht auf Kammer zurück. Es basiert auf der Aufteilung der zuvor berechneten Eigenformen, die mit pseudo-invertierten Matrizen kombiniert werden (Wijker, 2008) (Koutsovasilis, et al.).

Das Krylov-Unterraumverfahren zur Reduktion von FE-Strukturen nutzt die nach Krylov benannten Unterräume. Das Balanced Truncation oder zu Deutsch das balancierte Abschneiden versucht mit dem gezielten „Abschneiden“ von Matrixteilen/-spalten/-zeilen das Gleichungssystem zu vereinfachen, ohne dabei einen gewissen Grad an Fehlern zu überschreiten. Diese Verfahren sind in (Koutsovasilis, 2009), (Witteveen, 2012) oder (Maglie) erläutert.

---

---

## 3.1 Allgemeiner Formalismus der Reduktion

Vor der Darlegung der verschiedenen Reduktionsverfahren wird zunächst die allgemeine Abhandlung der Reduktion beschrieben, denn die formelle Prozedur ist stets die Gleiche. Diese Formalismen sind beispielsweise in (Benz, 2008), (Dietz, et al., 1997) und (Gasch, et al., 2012) aufgezeigt.

Ausgehend von folgendem Bewegungsgleichungssystem mit  $n$  Freiheitsgraden soll eine Reduktion erfolgen, dabei sei die Dämpfung aufgrund der Materialeigenschaften von Metallen zunächst vernachlässigt:

$$M\ddot{u} + Ku = F \quad 3-1$$

Dabei ist  $M$  die Massenmatrix und  $K$  die Steifigkeitsmatrix, je mit der Dimension  $n \times n$ , außerdem seien  $F$  die äußeren Kräfte und der Koordinatenvektor  $u$  von der Dimension  $n \times 1$ .

Das System soll auf  $n_{red}$  Freiheitsgrade reduziert werden, wobei  $n_{red} < n$  ist. Hierzu wird eine Transformationsmatrix  $T$  benötigt, welche die  $n$  Freiheitsgrade des vollständigen Verschiebungsvektors  $u$  mit den  $n_{red}$  Freiheitsgraden eines reduzierten Verschiebungsvektors verknüpft.

$$u = Tv \quad 3-2$$

Mit der Annahme einer zeitunabhängigen Transformationsmatrix  $T$  ergibt sich:

$$\ddot{u} = T\ddot{v} \quad 3-3$$

Setzt man diese Bedingungen in das ursprüngliche Bewegungsgleichungssystem ein und multipliziert von links mit  $T^T$  erhält man folgendes kleineres Bewegungsgleichungssystem der Dimension  $n_{red} \times n_{red}$ :

$$T^T MT\ddot{v} + T^T KTv = T^T F \quad 3-4$$

beziehungsweise

$$M_{red}\ddot{v} + D_{red}\dot{v} + K_{red}v = F_{red} \quad 3-5$$

Es gilt:

$$M_{red} = T^T MT, \quad K_{red} = T^T KT, \quad F_{red} = T^T F \quad 3-6$$

Die Abbildung 3-2 verdeutlicht noch einmal bildlich den Sinn der Anwendung von Reduktionsverfahren. Der Grad der möglichen Reduktion der Freiheitsgrade hängt vom eingesetzten Reduktionsverfahren ab oder kann mit dem Reduktionsverfahren vorgegeben werden. Allgemein gilt: Je mehr Freiheitsgrade berücksichtigt werden, desto genauer kann das Originalsystem abgebildet werden.

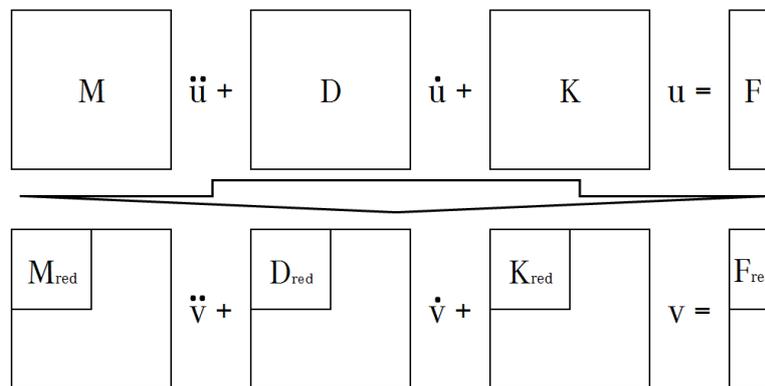


Abbildung 3-2: Reduktion der Matrizen und Vektoren

Die Abbildung 3-3 zeigt das Vorgehen der Matrizenoperation bei der Reduktion der Freiheitsgrade. Dabei stellt  $M$  die Ursprungsmatrix dar und  $M_{red}$  die reduzierte Matrix. Ebenfalls erkenntlich ist die Abhängigkeit des Reduktionsgrades von der Größe der Transformationsmatrix. Die Reduktionsverfahren unterscheiden sich durch die Art und Weise, wie die Transformationsmatrix bestimmt wird.

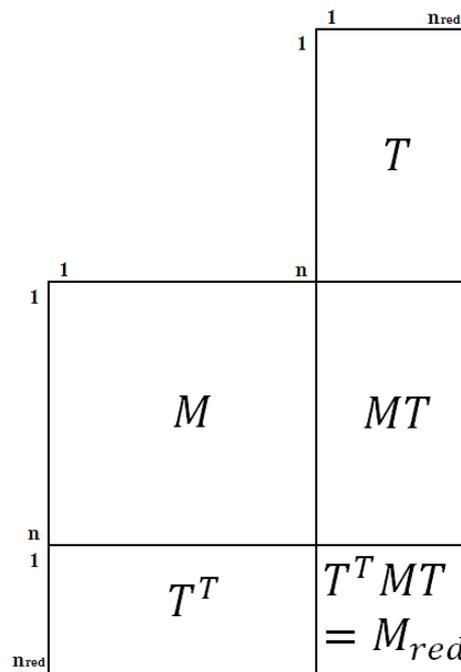


Abbildung 3-3: Matrizenoperationen

---

---

## 3.2 Statische Reduktion nach Guyan

Um die Transformationsmatrix zu bestimmen wurde bereits 1965 ein Verfahren durch Guyan erarbeitet. Dieses soll mit Hilfe physikalischer Grundgedanken hergeleitet werden. Das Guyan-Verfahren ist beispielsweise beschrieben in (Guyan, 1965), (Gasch, et al., 2012), (Benz, 2008) oder (Waltz, 2005).

Zunächst wird die Struktur in innere und äußere Freiheitsgrade unterteilt. Die internen Koordinaten, auch Slave-Freiheitsgrade oder Nebenfreiheitsgrade (Indize N), verbleiben intern in der Struktur. Die externen Koordinaten, auch Master-Freiheitsgrade bzw. Hauptfreiheitsgrade (Indize H), welche extern weiterbehandelt werden, dienen der Abbildung der Schwingung (Dresig, 2001). Hauptfreiheitsgrade sind dabei zwingend alle Knotenrichtungen, an denen äußere Kräfte angreifen. Alle Restlichen können den Nebenfreiheitsgraden zugeordnet werden.

Sortiert man nun, ausgehend von Gleichung 3-1, die Struktur nach Haupt- und Nebenfreiheitsgraden, so erhält man das Bewegungsgleichungssystem der folgenden Form:

$$\begin{bmatrix} M_{HH} & M_{HN} \\ M_{NH} & M_{NN} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_H \\ \ddot{u}_N \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} K_{HH} & K_{HN} \\ K_{NH} & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_H \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_H \\ F_N \end{pmatrix} \quad 3-7$$

Da an den internen Knoten keine Kräfte angreifen, so kann  $F_N = 0$  gesetzt werden. Bei einer statischen Betrachtung haben die dynamischen Anteile keinen Einfluss,  $\ddot{u}_H = \ddot{u}_N = 0$ , so dass die untere Hälfte des Gleichungssystems 3-7 sich wie folgt reduziert:

$$K_{NH}u_H + K_{NN}u_N = 0 \quad 3-8$$

beziehungsweise

$$u_N = -K_{NN}^{-1}K_{NH}u_H \quad 3-9$$

Dieser Zusammenhang wird genutzt, um die Transformationsmatrix zu besetzen.

$$u = \begin{pmatrix} u_H \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ -K_{NN}^{-1}K_{NH} \end{bmatrix} (u_H) = [T](u_H) = [T](v) \quad 3-10$$

---

---

Die Transformationsmatrix der statischen Kondensation nach Guyan lautet:

$$T = \begin{bmatrix} E \\ -K_{NN}^{-1}K_{NH} \end{bmatrix} \quad 3-11$$

Wird die Transformationsmatrix wie in Gleichung 3-5 angewendet, so erhält man das reduzierte System. Für den statischen Fall ist die Lösung nach Guyan exakt. Ein Fehler entsteht dann, wenn die Transformationsmatrix auf die Massen angewendet wird und die dynamischen Anteile nicht mehr zu vernachlässigen sind. Je größer die dynamischen Terme werden, desto größer wird auch der Fehler. Somit kann man auch sagen, dass mit steigender Frequenz der Fehler zunimmt.

Optional ist es beim Guyan-Verfahren möglich, neben den benötigten externen Knoten, die für die Kopplung und Aufbringung von Lasten notwendig sind, auch zusätzliche Knoten als externe Knoten zu verwenden. Dies können Knoten an Orten der Struktur sein, an denen hohe Massen und Trägheiten auftreten (Maglie). Dies verspricht eine bessere Abbildung des Gesamtsystems, reduziert aber das System nicht in dem Grade, wie es maximal möglich wäre.

### 3.3 Modale Reduktion

Ein anderer Ansatz der Reduktion der Freiheitsgrade wird durch die modale Reduktion beschrieben. Die Anzahl der Freiheitsgrade soll auf so viele beschränkt werden, dass man nur wenige Eigenformen berücksichtigt, die für das Problem wesentlich sind (Dresig, 2001). Die Berechnung der Eigenvektoren ist Grundlage der Reduktion. Es wird ein freies System betrachtet (vgl. Gleichung 3-1 mit  $F = 0$ ):

$$M\ddot{u} + Ku = 0 \quad 3-12$$

Das Verfahren der modalen Reduktion geht von folgendem Ansatz aus:

$$u = \phi e^{j\omega t} \quad 3-13$$

Setzt man diesen Ansatz in die Ausgangsbewegungsgleichung ein, so folgt:

$$(K - \omega^2 M)\phi = 0 \quad 3-14$$

Für dieses Gleichungssystem werden nun die Eigenkreisfrequenzen  $\omega$  beziehungsweise die Eigenwerte  $\omega^2$  und die dazugehörigen Eigenvektoren  $\phi$  berechnet. Die Eigenvektoren  $\phi$  können spaltenweise angeordnet werden und ergeben die Modalmatrix  $\psi$  (Gasch, et al., 2012).

$$\psi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n] \quad 3-15$$

Wird die Transformation mit der vollständigen Modalmatrix durchgeführt ( $\psi = T$ ), wird die Massenmatrix normiert und die Steifigkeitsmatrix diagonalisiert (Ihlenburg). Dies ist in folgender Gleichung 3-16 gezeigt:

$$T^T M T = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}; \quad T^T K T = \omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad 3-16$$

Nach dieser modalen Transformation ist das Gleichungssystem entkoppelt, das bedeutet alle Gleichungen sind unabhängig und stellen im modalen Raum  $n$  unabhängige Einmassenschwinger dar. Dieses System ist noch vollständig und korrekt.

Als Transformationsmatrix  $T$  der modalen Reduktion wird jedoch eine verkürzte Modalmatrix verwendet. Das heißt, dass die Transformationsmatrix nur mit den Eigenvektoren 1 bis  $n_{red} < n$  der kleinsten Eigenwerte als Ansatzvektoren bestückt wird (Benz, 2008) (Gasch, et al., 2012).

$$T = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n_{red}}] \quad 3-17$$

Über die Anzahl der berücksichtigten Eigenvektoren kann die Genauigkeit des reduzierten Systems beeinflusst werden. Jedoch steigt auch hier mit steigender Genauigkeit die Anzahl der Freiheitsgrade und somit die Größe des Systems an.

Die modalen Koordinaten  $v$  und die Verschiebungen  $u$  stehen über die Transformationsmatrix  $T$  in Beziehung:

$$u = T v \quad 3-18$$

---

---

### 3.4 Gemischt statisch-modale Reduktion

Kombiniert man die zuvor genannten Verfahren, also die statische und modale Reduktion, erhält man ein Verfahren, welches die lokalen Kräfte besser berücksichtigt und gleichzeitig eine hohe Anzahl von Freiheitsgraden einspart, ohne die dynamischen Effekte zu vernachlässigen (Benz, 2008) (Bohn, 2006). Das Verfahren der gemischt statisch-modalen Reduktion wird auch Craig-Bampton-Methode oder Component-Mode-Synthesis (CMS) genannt. Das Craig-Bampton-Verfahren ist zum Beispiel ausführlich dargestellt in (Gasch, et al., 2012), (Benz, 2008) oder (Oh, 2010).

Wie bei der statischen Reduktion werden die Freiheitsgrade zunächst in Haupt- (H) und Nebenfreiheitsgrade (N) eingeteilt (vgl. Gleichung 3-7):

$$\begin{bmatrix} M_{HH} & M_{HN} \\ M_{NH} & M_{NN} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_H \\ \ddot{u}_N \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} K_{HH} & K_{HN} \\ K_{NH} & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_H \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_H \\ F_N \end{pmatrix} \quad 3-19$$

Die statischen Moden werden wie bei der statischen Kondensation berechnet, der statische Ansatz nach Guyan (vgl. Gleichung 3-9) bleibt. Die Verschiebungen der inneren Knoten  $u_N$  aus dem statischen Ansatz werden mit  $u_{N,stat}$  bezeichnet.

$$u_{N,stat} = -K_{NN}^{-1}K_{NH}u_H \quad 3-20$$

Es ergibt sich der statische Teil der Transformationsmatrix  $T_{CB}$ , nämlich  $T_S$  (S ... Statikmoden).

$$T_S = -K_{NN}^{-1}K_{NH} \quad 3-21$$

Für die Berücksichtigung des dynamischen Verhaltens der Struktur werden noch die modalen Ansatzvektoren ergänzt (Gasch, et al., 2012). Hierzu werden gedanklich die Hauptfreiheitsgrade blockiert,  $u_H=0$ , was das Ausgangsgleichungssystem 3-19 auf die inneren Freiheitsgrade beschränkt, an denen keine äußeren Kräfte wirken,  $F_N=0$  (vgl. Kapitel 3.2):

$$M_{NN}\ddot{u}_N + K_{NN}u_N = 0 \quad 3-22$$

Entsprechend der modalen Reduktion ergibt sich für das eingespannte Bauteil folgendes zu lösendes Eigenwertproblem, welches die Eigenwerte  $\omega_{CB}^2$  und Eigenvektoren  $\phi_{CB}$  des eingespannten Systems liefert. Diese Moden werden als *fixed boundary normal modes* bezeichnet.

$$(K_{NN} - \omega_{CB}^2 M_{NN})\phi_{CB} = 0 \quad 3-23$$

Aus den Eigenvektoren wird wieder eine Modalmatrix aufgebaut und anschließend verkürzt, was zur verkürzten Modalmatrix  $T_E$  (E ... Eigenmoden) führt.

$$T_E = [\phi_{CB1}, \phi_{CB2}, \dots, \phi_{CB N_{red}}] \quad 3-24$$

Die dynamischen Verschiebungen der internen Knoten können entsprechend der modalen Reduktion über die modalen Koordinaten der inneren Knoten  $v_E$  und die Transformationsmatrix  $T_E$  ausgedrückt werden.

$$u_{N,dyn} = T_E v_E \quad 3-25$$

Die Verschiebungen der inneren Knoten  $u_N$  ergeben sich aus der Überlagerung der statischen Verschiebungen  $u_{N,stat}$  und den dynamischen Verschiebungen der inneren Knoten  $u_{N,dyn}$ . Es erfolgt also eine Anreicherung der internen Verschiebungen durch zusätzliche Eigenmoden (Nasdala, 2012):

$$u_N = u_{N,stat} + u_{N,dyn} \quad 3-26$$

$$(u_N) = [T_S](u_H) + [T_E](v_E) \quad 3-27$$

Die Verschiebungen  $u$  aller Knoten sind mit den Verschiebungen, die im reduzierten System berücksichtigt werden, wie folgt verknüpft:

$$\begin{pmatrix} u_H \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ T_S & T_E \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_H \\ v_E \end{pmatrix} \quad 3-28$$

Die Transformationsmatrix  $T_{CB}$  hat den folgenden Aufbau:

$$T_{CB} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ T_S & T_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ -K_{NN}^{-1}K_{NH} & \phi_{CB1}, \phi_{CB2}, \dots, \phi_{CB N_{red}} \end{bmatrix} \quad 3-29$$

### 3.5 Statikmoden und dynamische Moden

Abbildung 3-4 stellt visuell den Unterschied zwischen statischen und dynamischen Moden anhand eines einfachen Balkens dar. Versteht man unter Statikmoden die Verformungen der Struktur unter Aufbringen von Einheitsverschiebungen an den externen Koppelstellen (Junge, 2010), so sind es bei den dynamischen Moden bzw. Eigenformen die Verformungen der Struktur, welche bei den entsprechenden Eigenfrequenzen auftreten, also die Darstellung der Eigenvektoren.

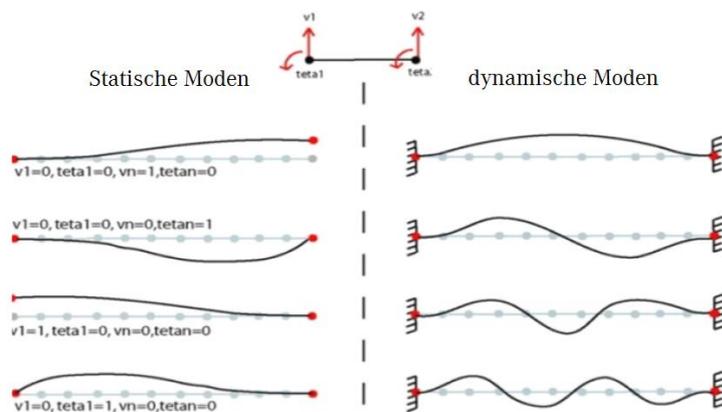


Abbildung 3-4: statische und dynamische Moden (Alainipload, 2006)

Abbildung 3-5 zeigt die Zusammensetzung der Transformationsmatrix beim Craig-Bampton-Verfahren. Gelb dargestellt sind die statischen Zusammenhänge zwischen internen und externen Konoten, hellblau die Anteile der dynamischen Moden.

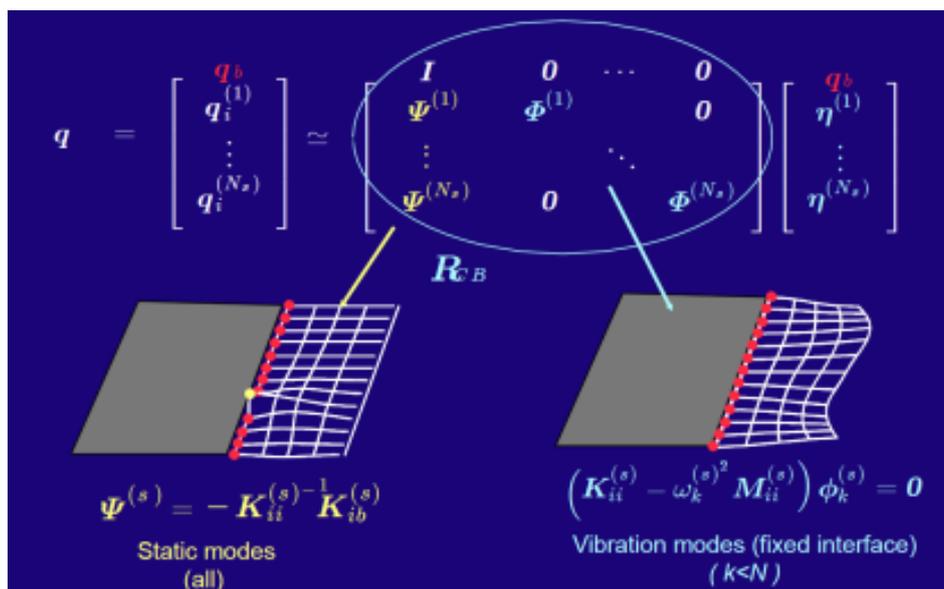


Abbildung 3-5: Craig-Bampton Transformationsmatrix (Rixen, 2010)

---

---

## 4 Mehrmassenschwinger

In diesem Kapitel werden die Reduktionsverfahren nach Guyan, der modalen Reduktion sowie nach Craig-Bampton an einem physikalisch einfachen Beispiel untersucht. Damit soll der Übergang von der Theorie zum komplexen FE-Modell erleichtert und besser veranschaulicht werden. Der Quellcode als Grundlage dieser Untersuchung ist im Anhang abgedruckt.

### 4.1 Der Aufbau

Dieses Beispiel kann als Mehrmassenschwinger oder als FE-Modell eines Stabes angesehen werden. Das Einzelement soll aus zwei Massen bestehen, die mit einer Feder gekoppelt sind. Die positive Koordinatenrichtung ist so wie in Abbildung 4-1 dargestellt gewählt.

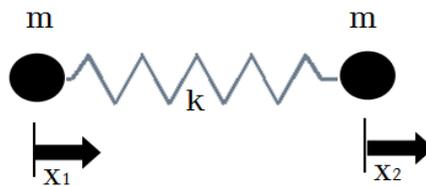


Abbildung 4-1: Einzelement

Werden die Massen freigeschnitten und die Trägheitskräfte angetragen können die Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt werden und es ergibt sich das Differentialgleichungssystem:

$$M_{el}\ddot{x} + K_{el}x = F \quad 4-1$$

Im Folgenden sind die Massen- und Steifigkeitsmatrix als auch Verschiebungs- und Kraftvektor für ein Einzelement gezeigt.

$$M_{el} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} m; \quad K_{el} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} k \quad 4-2$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \quad 4-3$$

Dies sei das Grundmodell, welches sich durch das Koppeln der Einzelemente zu einem größeren System erweitern lässt. In folgendem Beispiel wird ein Stab beziehungsweise ein Fünfmassenschwinger aus vier Einzelementen aufgebaut. Die Massen bilden dabei die Knotenpunkte eins bis fünf (vgl. Abbildung 4-2).

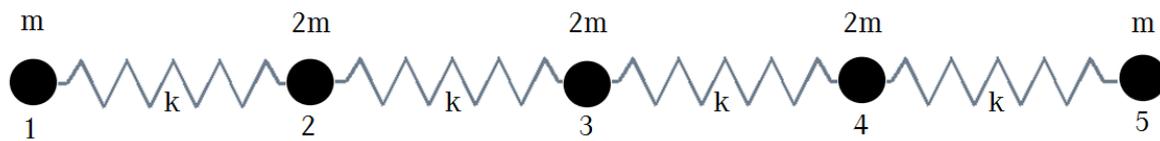


Abbildung 4-2: Fünfmassenschwinger mit Knotennummerierung

Hierfür werden die Massen- und Steifigkeitsmatrizen durch entsprechende Überlagerung der Einzelemente nach folgendem Schema erzeugt.

$$M = \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix} m; \quad K = \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{-1} & \boxed{0} & 0 & 0 \\ -1 & \boxed{2} & \boxed{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & \boxed{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \boxed{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \boxed{1} \end{bmatrix} k \quad 4-4$$

Hieraus geht hervor, dass sich an den Koppelstellen die Massen addieren. Das Schema kann durch Freischneiden der Massen überprüft werden. Nach dieser Operation liegen Massen- und Steifigkeitsmatrix vollständig vor, die als Grundlage für die Reduktionsverfahren dienen.

Für die statische Kondensation nach Guyan als auch für das Craig-Bampton-Verfahren ist, wie schon in den theoretischen Grundlagen erläutert, eine Umsortierung der Knoten nach Haupt- und Nebenknoten erforderlich. In der folgenden Abbildung ist dieser Sortiervorgang (Zeilen- und Spaltentausch) am Beispiel der Massenmatrix des Fünfmassenschwingers gezeigt, bei dem die äußeren Knoten (1 & 5 - weiß gefüllte Kreise) als Hauptknoten erhalten bleiben sollen und die inneren Knoten (2, 3 & 4) als Nebenknoten - also zwei externe Knoten. Ebenfalls ist der Sortiervorgang für drei externe Knoten aufgezeigt. Dabei wurde zusätzlich zu Knoten 1 und 5 der Knoten 3 zu den externen Knoten gewählt.

Entsprechend entstehen auch die sortierte Steifigkeitsmatrix und die sortierten Verschiebungs- und Kraftvektoren

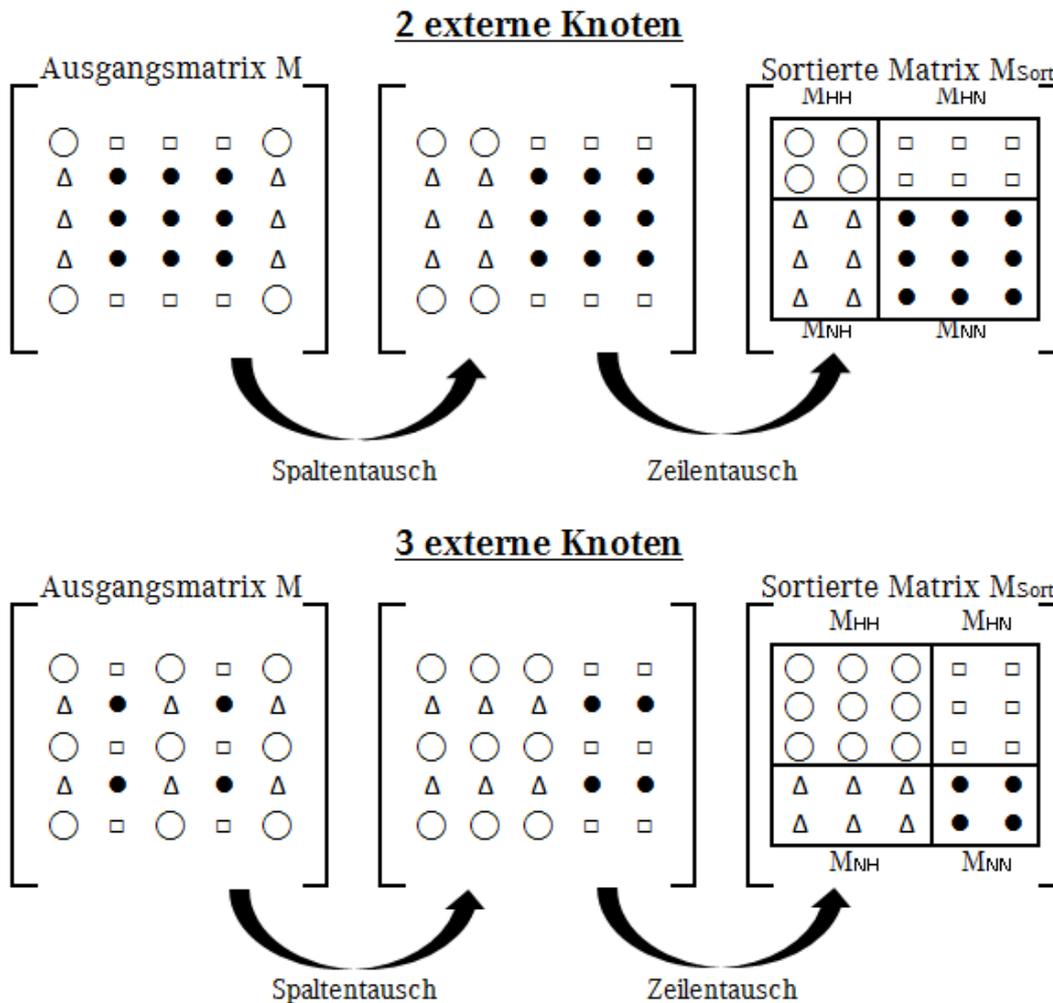


Abbildung 4-3: Sortiervorgang in Haupt- und Nebenknoten

## 4.2 Vergleich Matrizen

Nach der Umsortierung können die Reduktionsverfahren angewandt werden. Hierzu werden entsprechend der vorangegangenen Theorie die Gleichungssysteme mit Hilfe eines Matlab-Programms gelöst. Als Konsequenz daraus lassen sich nun die Originalmatrizen mit den reduzierten Matrizen der verschiedenen Reduktionsverfahren vergleichen. Im Folgenden sind die Massen- und Steifigkeitsmatrizen des Originalsystems, eines modal-reduzierten Systems, des Guyan-reduzierten Systems mit zwei und drei externen Knoten sowie das nach Craig-Bampton reduzierte System mit einem und zwei zusätzlichen Eigenmoden aufgeführt.

Originalsystem														
M					K									
1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	100.00	-100.00	0.00	0.00	0.00	m = 1 kg k = 100 N/m				
0.00	2.00	0.00	0.00	0.00	-100.00	200.00	-100.00	0.00	0.00					
0.00	0.00	2.00	0.00	0.00	0.00	-100.00	200.00	-100.00	0.00					
0.00	0.00	0.00	2.00	0.00	0.00	0.00	-100.00	200.00	-100.00					
0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	-100.00	100.00					
modal transformiertes Originalsystem - Eigenwerte und Eigenvektoren aus $(K - \omega^2 M)\phi = 0$														
$M_{mod} = T_{mod}^T M T_{mod}$					$K_{mod} = T_{mod}^T K T_{mod}$					$T_{mod} = [\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5]$				
1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.35	-0.50	-0.50	-0.50	0.35
0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	29.29	0.00	0.00	0.00	0.35	-0.35	-0.01	0.35	-0.35
0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	100.00	0.00	0.00	0.35	0.03	0.50	0.02	0.35
0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	170.71	0.00	0.35	0.35	-0.01	-0.35	-0.35
0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	200.00	0.35	0.50	-0.50	0.50	0.35
modale Reduktion (3 Moden)														
$M_{mRed} = T_{mRed}^T M T_{mRed}$			$K_{mRed} = T_{mRed}^T K T_{mRed}$			$T_{mRed} = [\phi_1, \phi_2, \phi_3]$								
1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.35	-0.50	-0.50						
0.00	1.00	0.00	0.00	29.29	0.00	0.35	-0.35	0.00						
0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	100.00	0.35	0.00	0.50						
						0.35	0.35	0.00						
						0.35	0.50	-0.50						
Guyan: 2 externe Knoten														
$M_{GUY2} = T_{GUY2}^T M_{SORT} T_{GUY2}$				$K_{GUY2} = T_{GUY2}^T K_{SORT} T_{GUY2}$				$T_{GUY2} = \begin{bmatrix} E \\ -K_{NN}^{-1} K_{NH} \end{bmatrix}$						
2.75	1.25	25.00	-25.00	1.00	0.00									
1.25	2.75	-25.00	25.00	0.00	1.00									
				0.75	0.25									
				0.50	0.50									
				0.25	0.75									

Guyan: 3 externe Knoten					
$M_{GUY3} = T_{GUY3}^T M_{SORT} T_{GUY3}$		$K_{GUY3} = T_{GUY3}^T K_{SORT} T_{GUY3}$		$T_{GUY3} = \begin{bmatrix} E & E \\ -K_{NN}^{-1} K_{NH} & \end{bmatrix}$	
1.50 0.50 0.00 0.50 3.00 0.50 0.00 0.50 1.50	50.00 -50.00 0.00 -50.00 100.00 -50.00 0.00 -50.00 50.00	1.00 0.00 0.00 0.00 1.00 0.00 0.00 0.00 1.00 0.50 0.50 0.00 0.00 0.50 0.50			
Craig-Bampton: 2 externe Knoten + 1 Mode - Eigenwerte und Eigenvektoren für dynamische Moden aus $(K_{NN} - \omega_{CB}^2 M_{NN})\phi_{CB} = 0$					
$M_{CB1} = T_{CB1}^T M_{SORT} T_{CB1}$		$K_{CB1} = T_{CB1}^T K_{SORT} T_{CB1}$		$T_{CB1} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ -K_{NN}^{-1} K_{NH} & \phi_{CB1} \end{bmatrix}$	
2.75 1.25 1.21 1.25 2.75 1.21 1.21 1.21 1.00	25.00 -25.00 0.00 -25.00 25.00 0.00 0.00 0.00 29.29	1.00 0.00 0.00 0.00 1.00 0.00 0.75 0.25 0.35 0.50 0.50 0.50 0.25 0.75 0.35			
Craig-Bampton: 2 externe Knoten + 2 Moden - Eigenwerte und Eigenvektoren für dynamische Moden aus $(K_{NN} - \omega_{CB}^2 M_{NN})\phi_{CB} = 0$					
$M_{CB2} = T_{CB2}^T M_{SORT} T_{CB2}$		$K_{CB2} = T_{CB2}^T K_{SORT} T_{CB2}$		$T_{CB2} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ -K_{NN}^{-1} K_{NH} & \phi_{CB1}; \phi_{CB2} \end{bmatrix}$	
2.75 1.25 1.21 - 0.50 1.25 2.75 1.21 0.50 1.21 1.21 1.00 0.00 - 0.50 0.50 0.00 1.00	25.00 -25.00 0.00 0.00 -25.00 25.00 0.00 0.00 0.00 0.00 29.29 0.00 0.00 0.00 0.00 100.00	1.00 0.00 0.00 0.00 0.00 1.00 0.00 0.00 0.75 0.25 0.35 -0.50 0.50 0.50 0.50 0.00 0.25 0.75 0.35 0.50			

Tabelle 4-1: Übersicht der Massen-, Steifigkeits- und Transformationsmatrizen

Die reduzierten Massen- und Steifigkeitsmatrizen sind durch die Matrizenmultiplikation der originalen oder sortierten Massen- und Steifigkeitsmatrizen mit den jeweiligen Transformationsmatrizen entstanden. Die Transformationsmatrizen sind in der dritten Spalte dargestellt. Hier ist die Zusammensetzung der Matrizen farblich hinterlegt, um die Herkunft der einzelnen Bestandteile zu verdeutlichen. Die blau hinterlegten Felder deuten auf Einheitsmatrizen hin, die bei Transformationen nach Guyan und Craig-Bampton für die externen Knoten notwendig sind. Rot hinterlegt sind die Bestandteile, die bei Guyan und Craig-Bampton die Transformation der internen Knoten berücksichtigen. Die grün hinterlegten Felder kennzeichnen die spaltenweise, nach steigenden Eigenwerten, angeordneten Eigenvektoren, die bei der modalen Reduktion und bei der Reduktion nach Craig-Bampton einbezogen werden. Dies ist bei der modalen Reduktion für das komplette System der Fall, bei Craig-Bampton nur für die internen Knoten (vgl. Theorie Kapitel 3.3 und 3.5).

### 4.3 Statische Belastung

Um den Vergleich zu führen, dass Guyan und damit auch Craig-Bampton für den statischen Fall exakt sind, ist eine Berechnung durchgeführt worden. Dabei wurde der Knoten 5 (rechter Knoten) fest eingespannt,  $u_5=0$ , und an dem gegenüberliegenden äußeren Knoten (Knoten 1) eine Last  $F_1=100\text{N}$  aufgebracht.

Das Gleichungssystem hierzu lautet:

$$F = Ku \tag{4-5}$$

Unter Berücksichtigung der genannten Randbedingungen folgt für den nichtreduzierten Mehrmassenschwinger folgendes zu lösendes Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_{5,Lager} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} k * \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4-6}$$

Für das Guyan-reduzierte System mit drei externen Knoten lautet das Gleichungssystem entsprechend:

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_{5,Lager} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 & 0 \\ -0,5 & 1 & -0,5 \\ 0 & -0,5 & 0,5 \end{bmatrix} k * \begin{pmatrix} u_1 \\ u_3 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4-7}$$

Das folgende Bild zeigt die Verschiebungen der Knoten für das Originalsystem, sowie für das Guyan-reduzierte System mit drei externen Knoten.

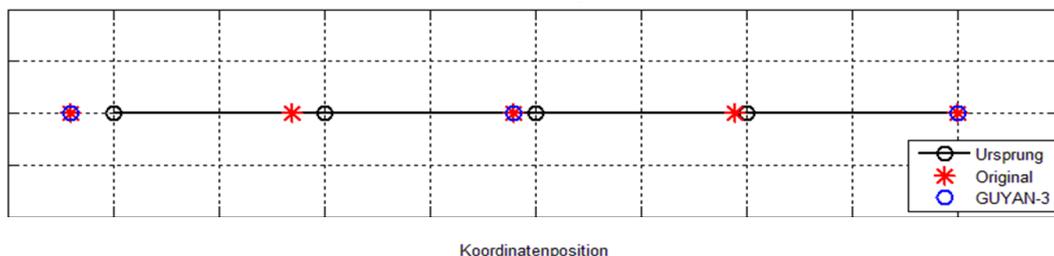


Abbildung 4-4: Knotenverschiebungen

Wie man erkennen kann, sind die Verschiebungen zwischen Original und einem Guyan-reduzierten System gleich.

## 4.4 Eigenmoden

In der weiteren Untersuchung des Mehrmassenschwingers erfolgte eine Betrachtung der Eigenwerte und Eigenmoden. Hierzu sind in der folgenden Tabelle die Anzahl der Eigenmoden und die Höhe der Eigenfrequenzen [Hz] für die des Originalsystems sowie für die reduzierten Systeme aufgelistet. In der Tabelle sind die für die Berechnung der Gleichung  $(K - \omega^2 M)\phi = 0$  verwendeten Massen- und Steifigkeitsmatrizen für jedes Verfahren angegeben.

	Original-system	Mod. Reduktion (3 Moden)	Guyan 2 ext. Kn.	Guyan 3 ext. Kn.	Craig-Bampton + 1 Mode	Craig-Bampton + 2 Moden
	M, K	$M_{\text{mred}}, K_{\text{mRed}}$	$M_{\text{GU2}}, K_{\text{GU2}}$	$M_{\text{GU3}}, K_{\text{GU3}}$	$M_{\text{CB1}}, K_{\text{CB1}}$	$M_{\text{CB2}}, K_{\text{CB2}}$
Eigenmode						
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2	0,86	0,86	0,92	0,92	0,92	0,86
3	1,59	1,59		1,59	1,65	1,65
4	2,08					2,08
5	2,25					

Tabelle 4-2: Eigenfrequenzen [Hz] der Systeme

Möchte man das Übertragungsverhalten der Systeme untersuchen, ist eine Betrachtung der transformierten Bewegungsgleichung sinnvoll. Das Gleichungssystem liegt in folgender Form vor:

$$(M(j\omega)^2 + K) u = F \quad 4-8$$

Es ergibt sich die Übertragungsfunktion:

$$G(j\omega) = \frac{u(j\omega)}{F(j\omega)} = (-M\omega^2 + K)^{-1} \quad 4-9$$

Wird mit der Kraft durchmultipliziert und von einer Anregung am Knoten 1 ausgegangen, so erhält man für das Gleichungssystem in der folgenden ausführlichen Form:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{5,1} & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} F_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 4-10$$

Interessiert man sich lediglich für die Wegantwort am Knoten 5, reduziert sich die Gleichung auf:

$$u_5 = G_{5,1} * F_1 \quad 4-11$$

Mit  $\omega = 2\pi f$  kann die Übertragungsfunktion  $G_{5,1}$  über der Frequenz dargestellt werden.

Im folgenden Diagramm ist das Übertragungsverhalten  $G_{5,1}$  der verschiedenen reduzierten Systeme dem vollständigen Fünfmassenschwinger gegenübergestellt. Dabei sind die Maxima an den Stellen der jeweiligen Eigenfrequenzen entsprechend Tabelle 4-2 auszumachen. Die Maxima besitzen aufgrund einer festen Schrittweite endliche Werte.

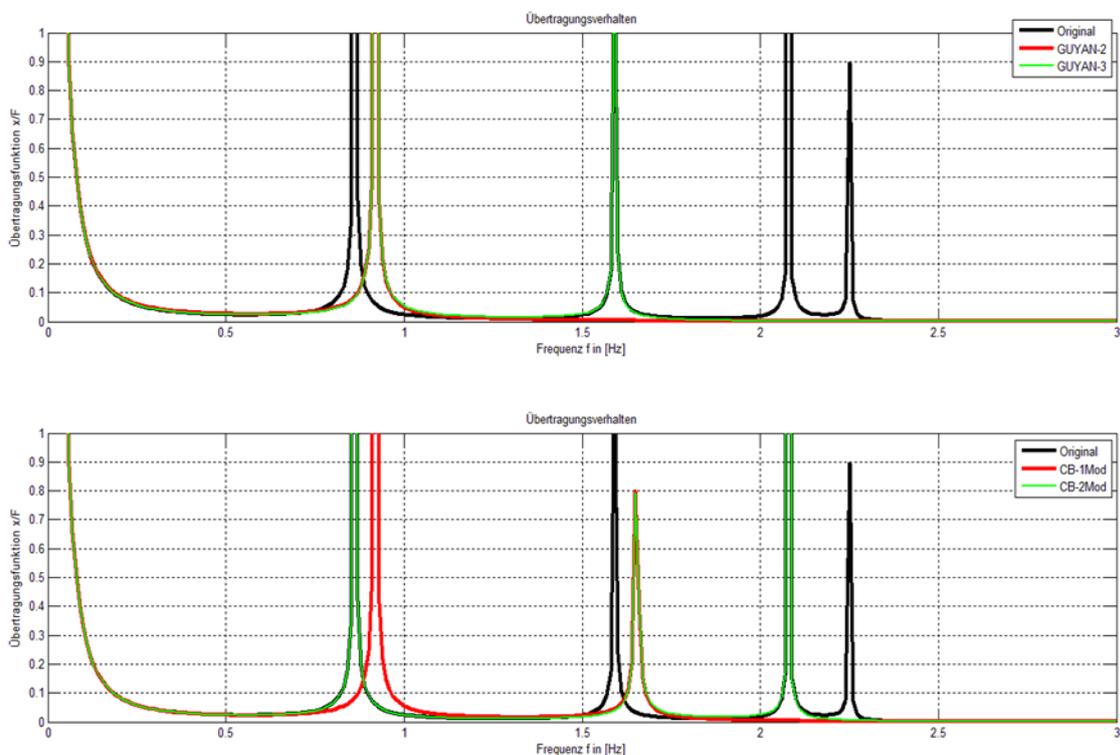


Diagramm 4-1: Übertragungsverhalten Fünfmassenschwinger

Bei der modalen Reduktion entsprechen die ersten reduzierten Eigenfrequenzen exakt denen des Originalsystems. Die weiteren Frequenzen werden durch das „Abschneiden“ entsprechend der Reduktionsvorschrift nicht berücksichtigt.

Bei den Guyan-Varianten stellt man fest, dass der zweite Eigenmode nicht korrekt wiedergegeben wird, allerdings beim Hinzunehmen eines weiteren Knotens (Guyan mit drei externen Knoten) der dritte Eigenmode wieder gut widergespiegelt werden kann.

Beim Craig-Bampton-Verfahren mit einem zusätzlichen dynamischen Mode wird auch der dritte Eigenmode nicht korrekt berechnet. Allerdings kommt es beim Hinzunehmen von einem weiteren dynamischen Mode (letzte Variante) zu einem Umspringen der zweiten Eigenfrequenz auf den korrekten Wert. Ebenfalls stimmt die vierte Eigenfrequenz mit der des Originals überein. Ein theoretischer Versuch, in dem beim Craig-Bampton drei zusätzliche Eigenmoden mitgenommen wurden, ergab, dass alle Eigenfrequenzen des Originalsystems abgebildet werden konnten. Allerdings ist in diesem theoretischen Fall keine Reduktion mehr gegeben, was diese Betrachtung für die praktische Anwendung sinnlos macht.

Allgemein erkennt man, dass, unabhängig vom Reduktionsverfahren, die jeweiligen Eigenfrequenzen immer über oder maximal gleich den Originaleigenfrequenzen sind.

Ergänzend zeigt Abbildung 4-5 exemplarisch die fünf Eigenformen des Originalsystems. Dabei ist die Richtung der Schwingungen farblich gekennzeichnet, um gleich- oder gegensinniges Schwingen zu verdeutlichen.

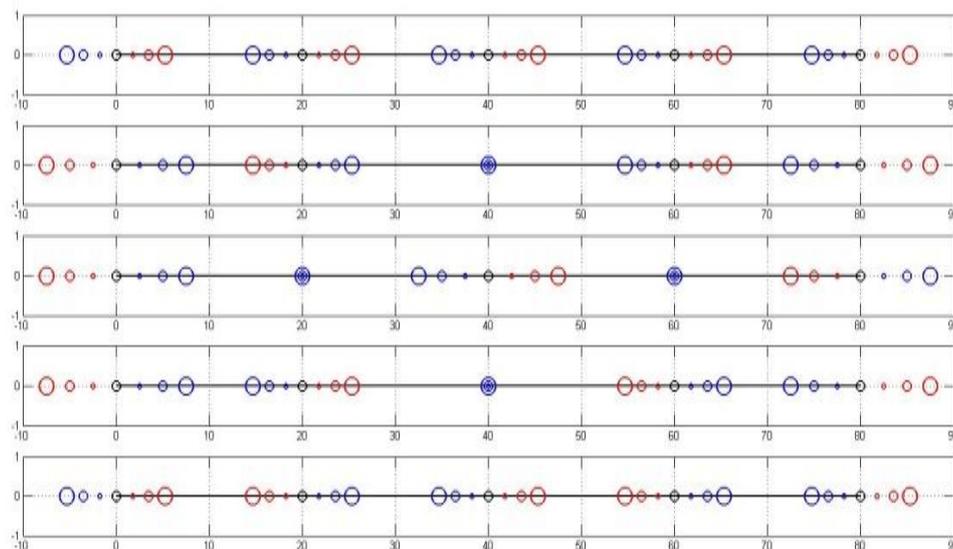


Abbildung 4-5: Eigenformen des Originalsystems

---

---

## 5 FE – Achsbauteile

In diesem Kapitel findet eine Untersuchung der Bauteile statt, welche von CAD-Modellen zu FEM-Modellen aufbereitet werden, um diese im weiteren Verlauf der Arbeit in das Mehrkörpersimulationsmodell einzupflegen.

### 5.1 Aufbereitung der Daten

Für die Verwendung der Bauteile in der Mehrkörpersimulation (MKS) mit flexiblen Eigenschaften ist eine Aufbereitung der CAD-Daten notwendig (CAD = computer-aided design). Dazu wurden aus der Datenbank die Bauteile Radträger (RT), Federlenker (FL), Zugstrebe (ZUGS) und oberer Querlenker (OQL) für eine Vierlenker-Vorderachse entnommen (vgl. Abbildung 6-2). Die CAD-Daten sind anschließend mit einem FEM-Präprozessor weiterverarbeitet worden, das Programm heißt MEDINA. Mit diesem Programm lassen sich die Geometrien einlesen, anschließend vernetzen, Materialeigenschaften zuweisen und die Koppelpunkte, welche für die Einbindung in das MKS-Modell notwendig sind, erzeugen. Hier gibt es die ersten Möglichkeiten Einfluss auf die Güte des Modells zu nehmen. Jedoch wurde sich zunächst auf ein einheitliches Vorgehen geeinigt. So besitzen zunächst alle Modelle die gleichen Toleranzen beim Einlesen und Vernetzen als auch die gleichen Vernetzungseinstellungen (z. B. max. / min. Kantenlänge, Elementtyp: Tria3 (Flächenelement) → Tet4 (Volumenelement)). Die notwendigen Materialkennwerte (Elastizitätsmodul, Querkontraktionszahl, Dichte) sind ebenfalls der Bauteildatenbank entnommen und individuell für jedes Bauteil. Radträger und Federlenker sind aufgrund der hohen Belastungen Stahlbauteile, der obere Querlenker und Zugstrebe basieren auf einer Aluminiumlegierung. Die Koppelpunkte wurden entsprechend den Vorgaben aus dem MKS-Modell abgebildet.

Im nächsten Schritt ist die Berechnung der vorbereiteten FE-Bauteile mit einem FEM-Programm notwendig. Das hierzu verwendete Programm ist NASTRAN. Zur Berechnung wird zunächst das in MEDINA vorbereitete FE-Modell in das passende Datenformat konvertiert. Des Weiteren ist ein so genanntes Inputdeck notwendig. Dieses beinhaltet alle für die Berechnung notwendigen Berechnungsvorschriften und Parameter-einstellungen. Die aus MEDINA stammende Datei wird im Inputdeck verknüpft. Der letzte notwendige Schritt ist die Definition der externen Knoten, welche bei einer Reduktion nach Guyan und Craig-Bampton erhalten bleiben sollen. Diese werden ebenfalls in einer Datei definiert und anschließend im Inputdeck verknüpft.

Nach der durchgeführten Berechnung stehen nun eine Reihe verschiedener Ergebnis- und Protokolldateien zur Verfügung. Hieraus werden für einen qualifizierten Vergleich die ermittelten Eigenfrequenzen entnommen. Außerdem sind für einen Vergleich der Reduktionsverfahren, in Bezug auf die Anwendbarkeit in der Praxis, die Berechnungszeiten von Bedeutung, die ebenfalls in den Protokolldateien enthalten sind.

## 5.2 Validierung der Daten

Im ersten Schritt ist eine Validierung der errechneten Eigenfrequenzen für das nicht reduzierte Modell mit Hilfe der Daten eines real vermessenen Bauteils notwendig. Dies gibt die Sicherheit, dass das zuvor erstellte Bauteil korrekt modelliert und bedatet wurde. Für diesen Abgleich steht eine Messung des Radträgers zur Verfügung, welche die Validierung des Modells begründet. Bei der Messung wurde ein Radträger frei schwingend an einem „Faden“ aufgehängt, mit Beschleunigungssensoren bestückt und mit einem Impulshammer angeregt (siehe Abbildung 5-1).



Abbildung 5-1: Eigenfrequenzmessung Radträger

RT	Messung	FEM	FEM_MKS
1	368	386	405
2	402	408	416
3	610	630	675
4	683	695	717

Tabelle 5-1: Eigenfrequenzen [Hz] des Radträgers

In der Tabelle 5-1 sind die ersten vier Eigenfrequenzen des Radträgers für die Bauteilmessung sowie für die Ergebnisse der FEM-Berechnung aufgelistet. In der Spalte „Messung“ finden sich die gemessenen Eigenfrequenzen wieder. In der darauffolgenden Spalte „FEM“, stehen die Ergebnisse der FEM-Berechnung.

Diese spiegeln das digitale Abbild des Originalradträgers wider und sind deshalb für die Validierung maßgebend. Die Eigenfrequenzen werden mit einem Fehler von unter fünf Prozent getroffen. Dass die gemessenen Eigenfrequenzen niedriger sind, könnte an den Zusatzmassen der Beschleunigungssensoren und Kabel liegen. In der letzten Spalte „FEM\_MKS“ finden sich ebenfalls Berechnungsergebnisse, allerdings ist hier eine notwendige Anpassung für die Mehrkörpersimulation (MKS) vorgenommen worden. Die Anpassung am Radträger erfolgt deshalb, weil für die Mehrkörpersimulation eine Koppelstelle für den Bremssattel benötigt wird, welche die Bremssattelverschraubungsstellen beeinflusst. Somit werden die Steifigkeit des Bauteils als auch die Eigenfrequenzen verändert. Diese Variante mit der erhöhten Steifigkeit findet in dieser Arbeit Verwendung.

Für die ersten Eigenfrequenzen liegt die absolute Abweichung (Messung zu MKS) bei 18Hz, was einem Fehler von etwa 4,9 Prozent entspricht. Damit wird die Berechnung als zulässig eingestuft.

### 5.3 Das nichtreduzierte Modell – „Originalmodell“

Nachdem die Berechnung mit einem realen Bauteil abgeglichen ist, folgt nun eine kurze Übersicht der vier Bauteile Federlenker, oberer Querlenker, Radträger und Zugstrebe. Die Tabelle 5-2 listet die ersten zehn Eigenfrequenzen der nichtreduzierten FEM-Modelle auf.

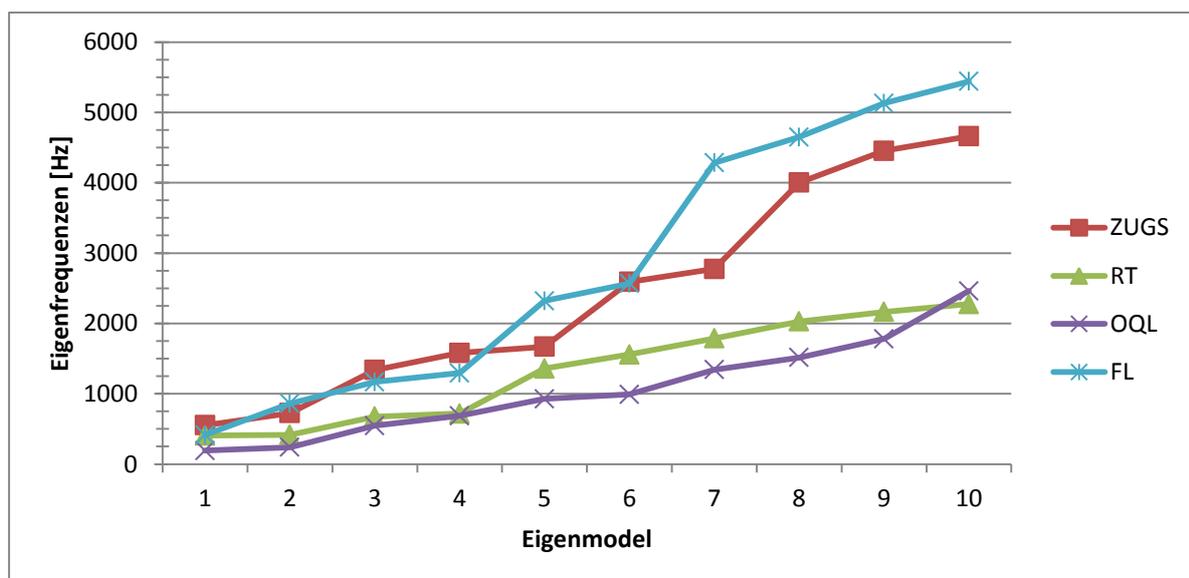


Diagramm 5-1: Eigenfrequenzen [Hz] der Achsbauteile

Mode	ZUGS	RT	OOL	FL
1	554	405	192	415
2	725	416	239	861
3	1337	675	546	1168
4	1580	717	686	1296
5	1670	1358	928	2320
6	2590	1558	990	2567
7	2774	1787	1343	4283
8	4002	2028	1515	4649
9	4453	2164	1780	5130
10	4660	2276	2462	5442

Tabelle 5-2: Eigenfrequenzen [Hz] der Achsbauteile

Diagramm 5-1 und Tabelle 5-2 zeigen, dass die ersten Eigenfrequenzen ein relativ hohes Niveau haben. Im Vergleich zu einer Karosserie, welche die ersten Eigenfrequenzen schon ab 30 Hz aufweist, sind die hier betrachteten Achsbauteile deutlich hochfrequenter. Die Aufgabenstellung nennt einen Frequenzbereich bis 300 Hz. Das einzige Bauteil, welches diese Grenze mit den Eigenfrequenzen unterschreitet, ist der obere Querlenker, welcher auch im Vergleich zu den anderen Bauteilen die niedrigsten Eigenfrequenzen aufweist. Dies dürfte maßgeblich an der langen U-Form des oberen Querlenkers liegen, welche die Steifigkeit mitbestimmt.

## 5.4 Vergleich der Reduktionsverfahren

Im nächsten Schritt wird mit dem Vergleich der verschiedenen Reduktionsverfahren in Bezug auf das nicht reduzierte FEM-Bauteil fortgefahren. In der nachfolgenden Tabelle finden sich wieder die ersten zehn Eigenfrequenzen. In der Spalte „Original“ sind die Eigenfrequenzen des nicht reduzierten Modells dargestellt, in den Spalten daneben folgen der Reihe nach ein reduziertes Modell nach Guyan, nach Craig-Bampton mit 10 zusätzlichen Moden, Craig-Bampton mit 100 Moden sowie Craig-Bampton mit 1000 Moden.

Mode	Original	GUYAN	CB 10	CB 100	CB 1000
1	405.3	407.1	405.4	405.3	405.3
2	415.5	417.5	415.6	415.5	415.5
3	675.4	678.9	675.8	675.4	675.4
4	717.3	719.6	717.9	717.3	717.3
5	1357.5	1440.5	1361.9	1357.6	1357.5
6	1558.4	1775.9	1562.0	1558.6	1558.4
7	1786.6	1897.2	1795.6	1786.8	1786.6
8	2028.1	2071.4	2040.4	2028.5	2028.1
9	2164.2	2220.0	2183.4	2164.6	2164.2
10	2276.2	2679.8	2295.9	2276.5	2276.2

Tabelle 5-3: Eigenfrequenzen [Hz] des Radträgers, Original – Guyan – CB10/100/1000

Die Tabelle 5-3 zeigt, dass mit der Wahl des Reduktionsverfahrens die Originalwerte in unterschiedlicher Qualität nachgebildet werden können. Ausgehend von dieser Tabelle sieht man, dass das Craig-Bampton-Verfahren durch die Mitnahme weiterer dynamischer Moden die Ergebnisgüte erhöht. Des Weiteren ist zu erkennen, dass ebenfalls durch die Anzahl der dynamischen Moden die Ergebnisqualität verbessert werden kann. Mehr dynamische Moden liefern genauere Ergebnisse. Dabei soll gesagt sein, dass das Originalmodell etwa 80000 Knoten besitzt, was bei je drei Freiheitsgraden je Knoten etwa 240000 Freiheitsgrade ergibt. Im Falle „CB 1000“, also Craig-Bampton mit 1000 dynamischen Moden sind es lediglich 1042 (7 externe Knoten a 6 Freiheitsgrade).

Um das Ergebnis der vorherigen Tabelle besser auswerten zu können und die Leistungsfähigkeit der Reduktionsverfahren zu zeigen, sind in der folgenden Tabelle 5-4 die verschiedenen reduzierten Modelle mit dem Originalmodell verrechnet, was die absoluten Abweichungen der Eigenfrequenzen zum Original wiedergibt.

Radträger	GUYAN	Delta CB 10	Delta CB 100	Delta CB1000
1	1.8524	0.1375	0.0033	0
2	1.9395	0.0794	0.0035	0.0001
3	3.512	0.3446	0.0193	0.0004
4	2.3298	0.6615	0.0143	0.0004
5	82.975	4.407	0.109	0.002
6	217.512	3.558	0.139	0.003
7	110.598	9	0.21	0.003
8	43.22	12.27	0.324	0.007
9	55.859	19.291	0.4	0.006
10	403.629	19.792	0.344	0.007

Tabelle 5-4: absolute Abweichungen [Hz] der reduzierten Modelle zum Original

In dieser Auflistung wird deutlich, wie das Reduktionsverfahren die Ergebnisgüte beeinflusst. Besonders fallen hier die maximalen Abweichungen auf. Sind es bei der Guyan-Reduktion über 400 Hz, so fällt es mit dem Umstieg auf das Craig-Bampton-Verfahren und Erhöhung der Anzahl der dynamischen Moden auf weniger als ein Hundertstel Hertz.

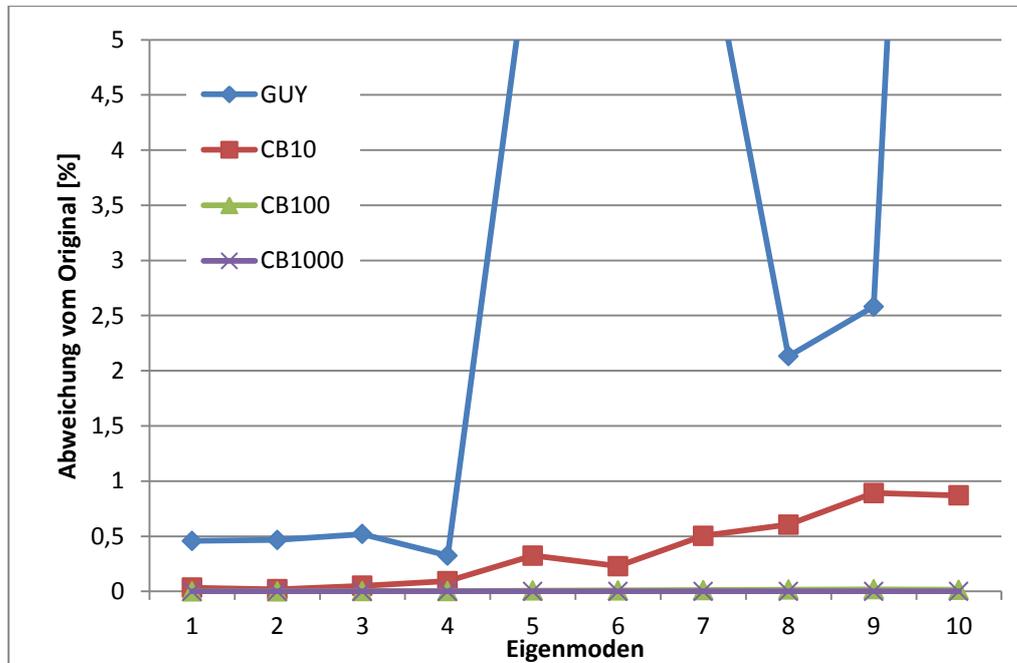


Diagramm 5-2: prozentuale Abweichungen der reduzierten Modelle zum Original

Das Diagramm 5-2 weist nochmal die Abweichung zwischen Originalmodell und reduziertem Modell auf, allerdings ist in diesem Fall die Abweichung prozentual dargestellt. Aus dieser Auftragung wird ebenfalls die Genauigkeit der verschiedenen Reduktionsverfahren ersichtlich. Unter der Berücksichtigung der Genauigkeit ist Craig-Bampton mit 1000 Moden das beste Verfahren. Wie relevant der Einfluss in der Mehrkörpersimulation ist wird in Kapitel 6.2.1 untersucht. Beim Abgleich mit der Bauteilmessung wurde ein Fehler von 5% zugelassen, demnach wäre das Guyan-Reduktionsverfahren bis zum vierten Mode (717 Hz) zulässig.

Bei regelmäßiger Anwendung einer Methode spielen auch die benötigten Rechenzeiten eine Rolle. Hierzu sind die Rechenzeiten für alle Bauteile für die vier verschiedenen Reduktionen Guyan, CB10, CB100 sowie CB1000 ausgewertet. Die Berechnungszeit des Originalmodells ist nicht mit aufgeführt, da hierfür ein Inputdeck verwendet wurde, welches nur die Eigenfrequenzen auswerten, jedoch nicht extra Dateien erstellen soll, die für die Mehrkörpersimulation notwendig wären.

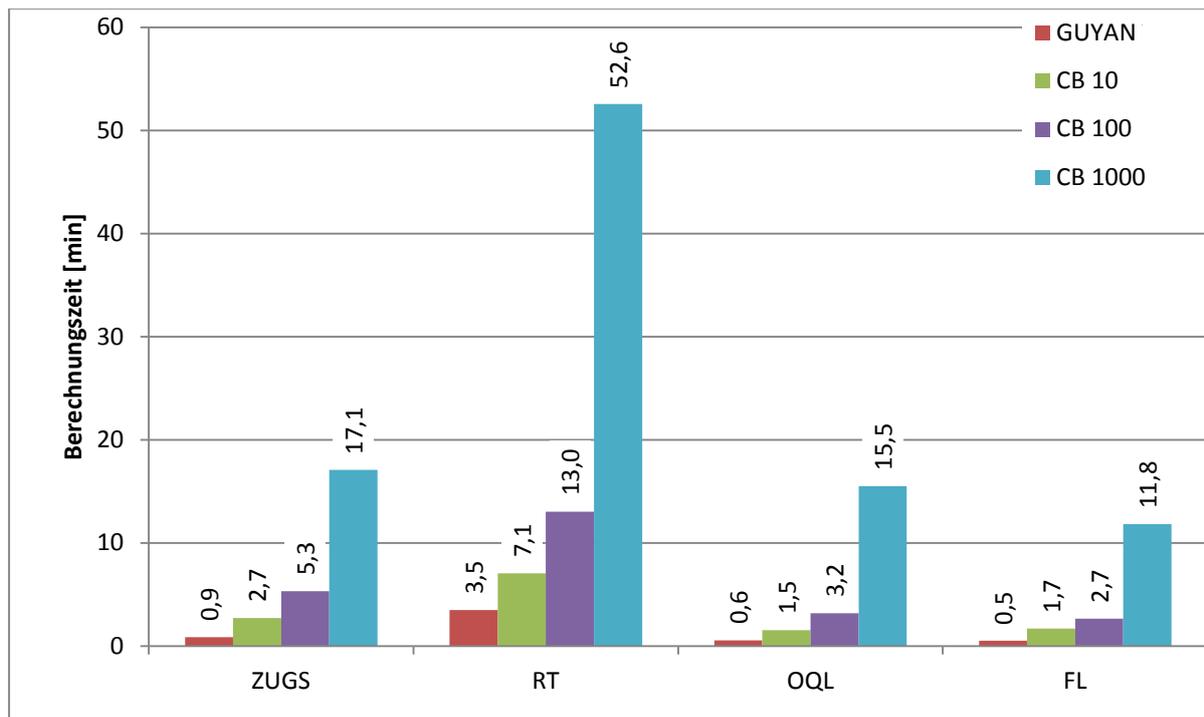


Diagramm 5-3: Berechnungszeiten [min] der Bauteile in Abhängigkeit vom Reduktionsverfahren

Deutlich zu erkennen ist hierbei der Anstieg der notwendigen Zeiten für die Berechnung, angefangen bei Guyan bis hin zu Craig-Bampton mit 1000 Moden. Dies lässt sich dadurch erklären, dass neben der zu berechnenden Transformationsmatrix für die Guyan-Reduktion noch das zu lösende Eigenwertproblem der internen Knoten hinzukommt. Unter Berücksichtigung der Rechenzeit ist das Guyan-Verfahren deutlich am schnellsten. Im Vergleich zur Variante CB 1000 ergibt sich ein deutlicher Vorteil um etwa den Faktor 25 oder im Umkehrschluss eine Verkürzung der Rechenzeit auf circa vier Prozent.

Im Falle des Radträgers wäre für die einmalige Erstellung eines CB1000-Modells eine Berechnungszeit von 53 Minuten jedoch kein Ausschlusskriterium.

## 5.5 Erhöhung der Vernetzungsgüte

In FE-Programmen werden in der Regel unterschiedliche Elementtypen für die Vernetzung angeboten. Aus diesem Grund soll an dieser Stelle ein Abgleich zweier verschiedener Elementtypen stattfinden.

Die Basiseinstellungen hierfür sind dieselben geblieben, also z.B. Toleranzen und Elementkantenlänge. Die Erhöhung der Vernetzungsgüte erfolgt durch die Umwandlung der Volumenelemente. Bisher sind Tet4-Elemente, also Tetraeder-Elemente mit je einem Knoten in den Elementecken, verwendet worden. Diese wurden durch Tet10-Elemente ersetzt. Das bedeutet, dass die Tetraeder-Elemente, zusätzlich neben den Eckknoten, auch Knoten auf den sechs Kanten besitzen. Hiermit erhöht sich die Ansatzfunktion für das Element von linear zu quadratisch (Klein, 2012). Die Elemente Tet4 und Tet10 sind in Abbildung 5-2 gezeigt.

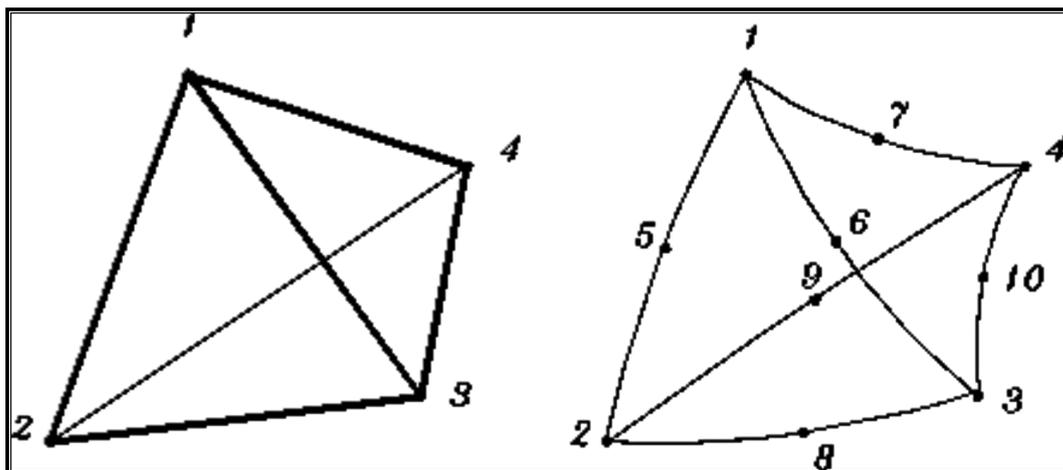


Abbildung 5-2: Tet4- & Tet10-Volumenelemente (LMS, 2012)

Durch diese zusätzlichen Knoten kann das Verformungsverhalten der Geometrie besser abgebildet werden (Klein, 2012).

Die Änderung des Elementtyps erfordert eine neue FEM-Berechnung, deren Ergebnisse im Folgenden beschrieben werden. Hierzu werden die Originalmodelle (nichtreduzierte FE-Modelle) mit Tet4- und Tet10-Vernetzung mit den reduzierten Varianten nach Guyan, ebenfalls Tet4 und Tet10 vernetzt, verglichen. Dazu wird wieder repräsentativ das Bauteil Radträger herangezogen.

RT	Original_TET10	GUYAN_TET10	Original_Tet4	GUYAN_Tet4
1	400.4	402.3	405.3	407.1
2	411.3	413.3	415.5	417.5
3	663.9	667.6	675.4	678.9
4	708.3	710.7	717.3	719.6
5	1332.7	1415.8	1357.5	1440.5
6	1536.7	1757.8	1558.4	1775.9
7	1760.3	1875.7	1786.6	1897.2
8	1988.6	2030.3	2028.1	2071.4
9	2113.0	2171.6	2164.2	2220.0
10	2244.0	2663.4	2276.2	2679.8

Tabelle 5-5: Eigenfrequenzen [Hz] des Radträgers in Abhängigkeit vom Volumenelementtypen

Beim Vergleich der beiden nichtreduzierten Modelle zeigt sich, dass sich die Eigenfrequenzen etwas nach unten verschieben. Für die erste Eigenfrequenz sind dies exemplarisch etwa 5 Hz. Ebenso fallen die Eigenfrequenzen der Guyan-reduzierten Modelle. Diese fallen über die ersten zehn Eigenfrequenzen in etwa im gleichen Maße wie die Eigenfrequenzen des Originalmodells. Die Auswirkung auf die Mehrkörpersimulation wird in Kapitel 6.2.3 betrachtet.

Von Bedeutung ist aber in diesem Zusammenhang wieder der Vergleich der benötigten Rechenzeiten, welche selbstverständlich von der verwendeten Computertechnik wie Prozessorleistung, Arbeitsspeicher oder anderen Dingen abhängig ist. Hierzu erfolgt die Betrachtung der Guyan-reduzierten Modelle mit Tet4- und Tet10-Elementen.

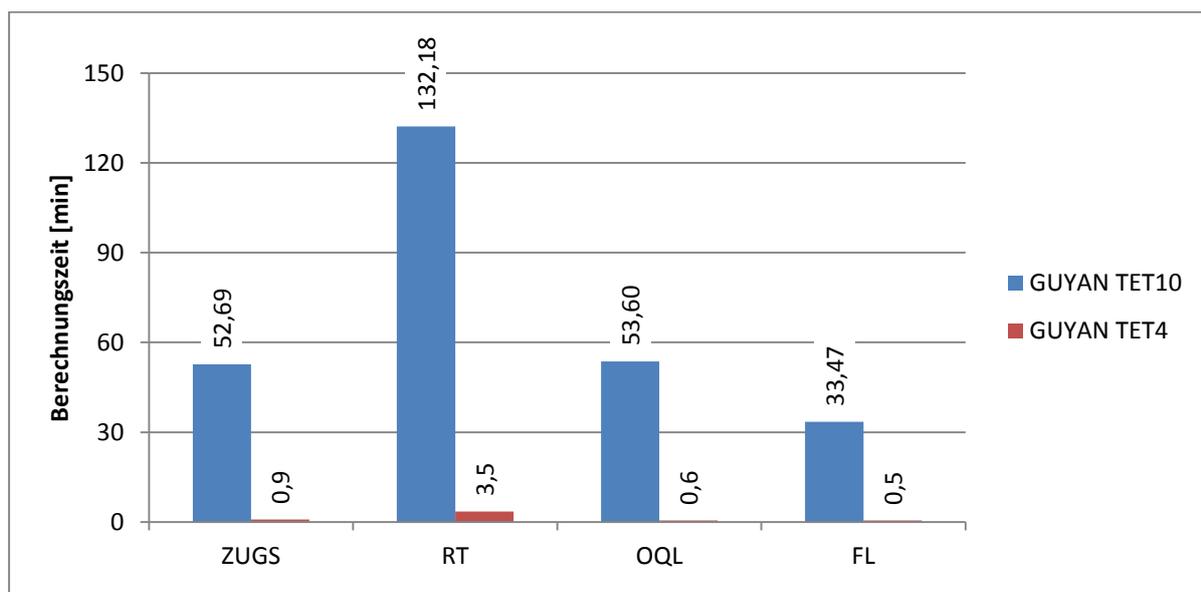


Diagramm 5-4: Berechnungszeiten [min] des Radträgers: Tet4 vs. Tet10

---

---

Der enorme Unterschied zwischen der Variante mit Tet4-Elementen und der Variante mit Tet10-Elementen begründet sich im Wesentlichen durch die Elementänderung. Zwar ist die Anzahl der Volumenelemente identisch, allerdings nicht die Anzahl der Knoten, welche sich, wie bereits beschrieben, durch die Volumenelementänderung von vier auf zehn Knoten je Element erhöht hat.

Beispielsweise sind für den Aufbau des Radträgers in beiden Varianten etwa 800000 Volumenelemente erforderlich. In der Tet4-Variante sind dafür nur etwa 155000 Knoten notwendig, jedoch in der Tet-10-Variante etwa 1200000 Knoten. Das ergibt eine Zunahme der Knoten um etwa den Faktor 7,5. Die Rechenzeit steigt dem gegenüber überproportional um den Faktor von etwa 38.

## 6 MKS: NVH-Lastfall

Dieses Kapitel baut auf dem vorherigen Kapitel 5 „FE-Achsbauteile“ auf und überführt das Thema von der Finiten-Element-Methode in die Mehrkörpersimulation. Hierbei soll die eigentliche Fragestellung, nämlich die Auswirkungen des Einbaus flexibler Achsbauteile für die Mehrkörpersimulation im Frequenzbereich bis 300 Hz beantwortet werden.

### 6.1 Systembeschreibung und NVH-Lastfall

Das Übertragungsverhalten, welches der Indikator bei der Verwendung verschiedener reduzierter Achsbauteile dieser Ausarbeitung sein soll, wird mit dem in Abbildung 6-1 gezeigten System ermittelt.

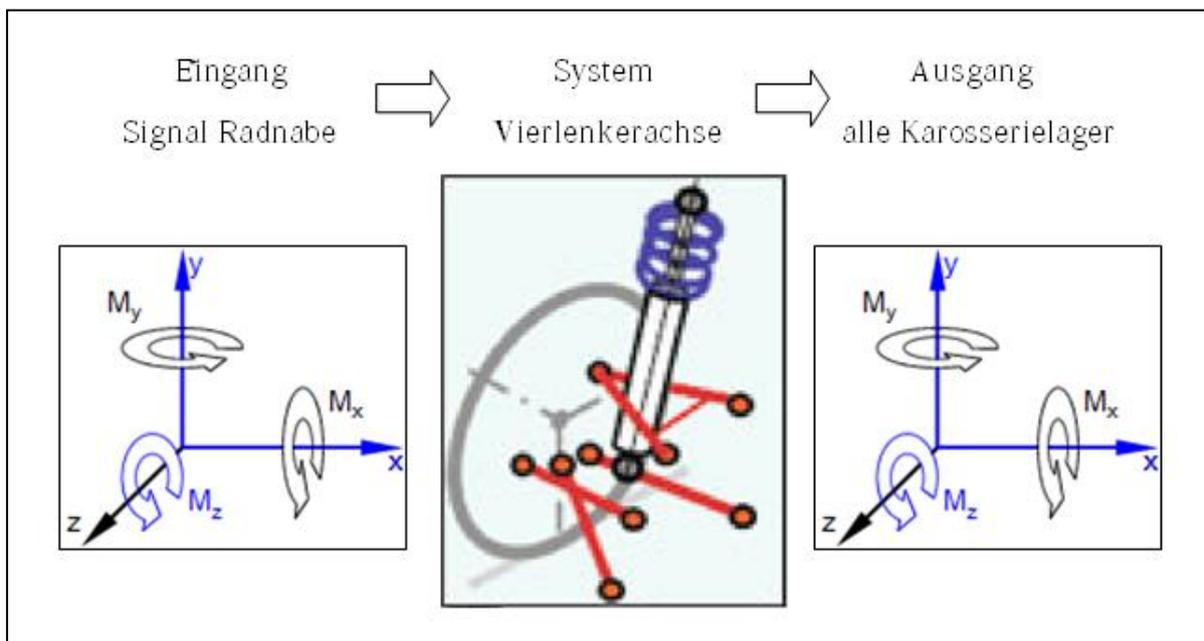


Abbildung 6-1: System (innere Grafik aus (Heißling, et al., 2011), äußere Grafiken von (Rapp, 2009))

Die Anregung erfolgt durch ein Signal, welches direkt an der Radnabe aufgeprägt wird. Dieses Signal, bestehend aus drei Kräften und drei Momenten, ist mit einer speziellen Radmessnabe an einem Versuchsfahrzeug aufgenommen worden. Es beinhaltet dementsprechend alle auftretenden fahrbahn- und reifenseitigen Anregungen. Die Überlegung, eine synthetische Anregung wie zum Beispiel eine Impulsanregung oder eine Sinusfunktion mit steigender Frequenz zu nehmen, bestand ebenfalls. Allerdings zeigte sich in der Fourier-Transformation des Messsignals, dass dort ebenso alle Frequenzen bis 300Hz auftreten. Alle drei Kräfte und Momente werden in realistischen Größenordnungen und Verhältnissen aufgeprägt, weshalb einer Anregung mit Messdaten der Vorzug gegeben wurde.

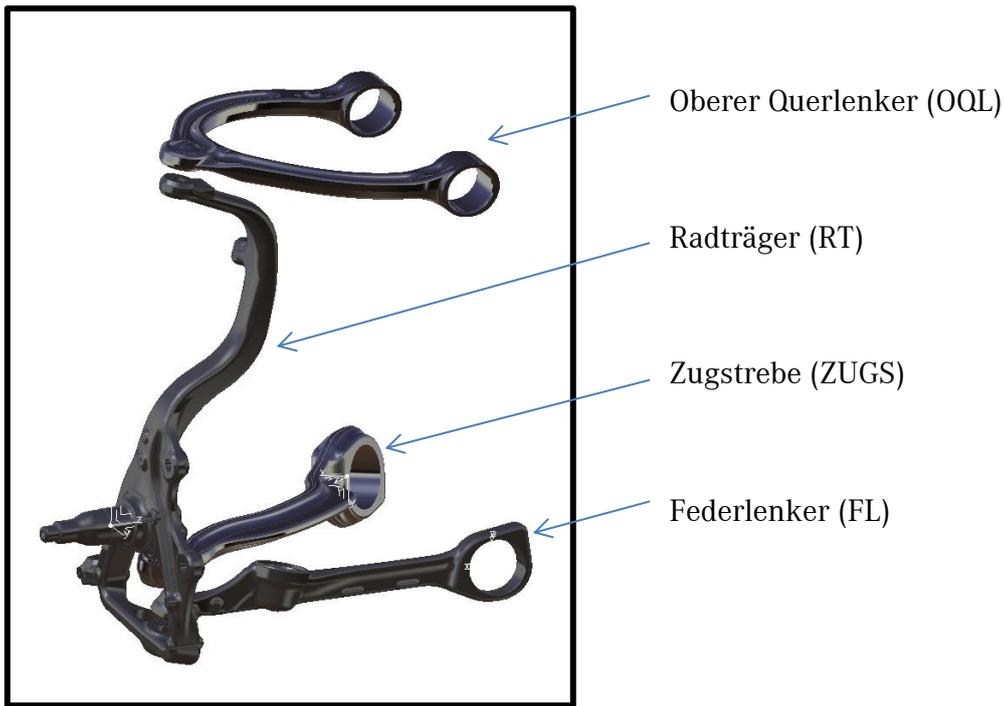


Abbildung 6-2: Vierlenkerachse (CAD-Geometrie)

Das System ist die Fahrwerkaufhängung, in diesem Fall eine Vierlenker-Vorderachse. Sie besteht aus dem oberen Querlenker, Zugstrebe sowie Federlenker. Außerdem gehören zum Fahrwerk der Radträger, an dessen Radnabe die Anregung aufgebracht wird, der Dämpfer und das Federelement als auch alle Gummilager und Kugelgelenke.

Der Ausgang wird dargestellt durch die Lagerreaktionen der karosserie-seitigen Fahrwerk-lager. Dies sind in diesem Fall das Dämpferkopflager, die Lager von Federlenker und Zugstrebe sowie die beiden Lager des oberen Querlenkers. Die Karosserie ist starr und raumfest und hat somit keinen Einfluss oder Rückwirkung auf das System.

$F_{Lager,X}$ $F_{RMP,X}$	$F_{Lager,Y}$ $F_{RMP,X}$	$F_{Lager,Z}$ $F_{RMP,X}$	$F_{Lager,X}$ $F_{RMP,Y}$	$F_{Lager,Y}$ $F_{RMP,Y}$	$F_{Lager,Z}$ $F_{RMP,Y}$	$F_{Lager,X}$ $F_{RMP,Z}$	$F_{Lager,Y}$ $F_{RMP,Z}$	$F_{Lager,Z}$ $F_{RMP,Z}$
$M_{Lager,X}$ $M_{RMP,X}$	$M_{Lager,Y}$ $M_{RMP,X}$	$M_{Lager,Z}$ $M_{RMP,X}$	$M_{Lager,X}$ $M_{RMP,Y}$	$M_{Lager,Y}$ $M_{RMP,Y}$	$M_{Lager,Z}$ $M_{RMP,Y}$	$M_{Lager,X}$ $M_{RMP,Z}$	$M_{Lager,Y}$ $M_{RMP,Z}$	$M_{Lager,Z}$ $M_{RMP,Z}$
$M_{Lager,X}$ $F_{RMP,X}$	$M_{Lager,Y}$ $F_{RMP,X}$	$M_{Lager,Z}$ $F_{RMP,X}$	$M_{Lager,X}$ $F_{RMP,Y}$	$M_{Lager,Y}$ $F_{RMP,Y}$	$M_{Lager,Z}$ $F_{RMP,Y}$	$M_{Lager,X}$ $F_{RMP,Z}$	$M_{Lager,Y}$ $F_{RMP,Z}$	$M_{Lager,Z}$ $F_{RMP,Z}$
$F_{Lager,X}$ $M_{RMP,X}$	$F_{Lager,Y}$ $M_{RMP,X}$	$F_{Lager,Z}$ $M_{RMP,X}$	$F_{Lager,X}$ $M_{RMP,Y}$	$F_{Lager,Y}$ $M_{RMP,Y}$	$F_{Lager,Z}$ $M_{RMP,Y}$	$F_{Lager,X}$ $M_{RMP,Z}$	$F_{Lager,Y}$ $M_{RMP,Z}$	$F_{Lager,Z}$ $M_{RMP,Z}$

Anregung:

- Kraft am Radmittelpunkt  $F_{RMP}$
- Moment am Radmittelpunkt  $M_{RMP}$

Antwort:

- Kraft am Lager  $F_{Lager}$
- Moment am Lager  $M_{Lager}$

Richtungen:

- X(rot), Y(grün), Z(blau)

Abbildung 6-3: mögliche Übertragungsfunktionen

Das zuvor erwähnte Übertragungsverhalten definiert sich durch den Quotienten aus Ausgangsgröße zu Eingangsgröße. Bei drei Kräften und Momenten, die am Ein- und Ausgang ein- beziehungsweise ausgegeben werden, ergeben sich je Lagerstelle 36 Übertragungsfunktionen. Diese sind in der vorherigen Abbildung 6-3 aufgezeigt.

Die Anzahl der möglichen Übertragungsfunktionen pro Lagerstelle macht es äußerst schwierig verschiedene Varianten gegenüber zu stellen. Deshalb soll eine repräsentative Übertragungsfunktion ausgewählt werden. Da die Streben der Achse hauptsächlich Kräfte übertragen und man bei der Anregung am Rad in der Regel an Vertikal-, Längs- und Querkkräfte denkt, werden die Momente als nicht repräsentativ gewertet. Wie das Diagramm 6-1 mit den fouriertransformierten gemessenen Kraftanregungen zeigt, sind die Anregungen in Querrichtung (Y) auf einer „Komfortstrecke“ geringer als in Vertikal- (Z) und Längsanregung (X). Die Anregungen in X- und Z-Richtung liegen auf ähnlichem Niveau. Es wird die Vertikalkomponente (Z) der gemessenen Kraftanregung als repräsentativ festgelegt.

Bei den Kraftantworten im Frequenzbereich zeigt sich die Querrichtung (Y) über alle Lagerstellen auf dem höchsten Niveau (vgl. Diagramm 6-2). Dies deckt sich mit den Aussagen und Erfahrungen anderer Abteilungen.

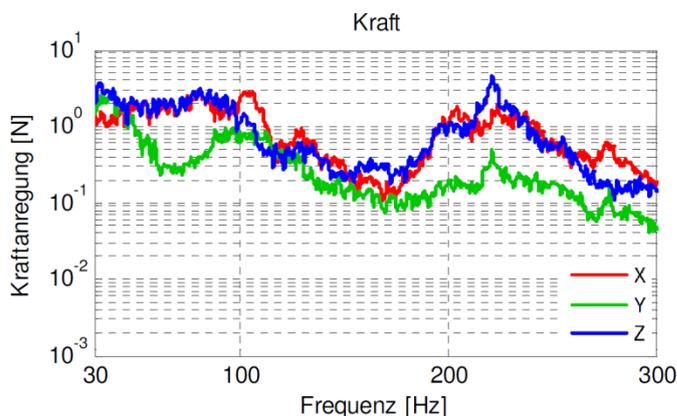


Diagramm 6-1: Kraftanregungen

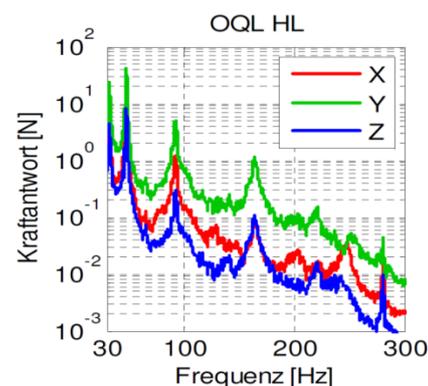


Diagramm 6-2: Kraftantworten am OQL

Als Konsequenz hieraus fiel die Wahl der Übertragungsfunktion für die folgenden Untersuchungen auf:

$$\text{Übertragungsfunktion} = \frac{\text{Kraftantwort Y (Lager)}}{\text{Kraftanregung Z (Radnabe)}}$$

Diese Übertragungsfunktion ist damit abhängig von der jeweiligen Lagerstelle und somit ergeben sich für die fünf betrachteten Lager insgesamt fünf Übertragungsfunktionen, die ausgewertet werden können. Für weiterführende Untersuchungen muss die Auswahl eventuell neu überdacht werden.

Der Lastfall „NVH“ wertet das Übertragungsverhalten des beschriebenen Systems aus.

---

---

## 6.2 Berechnungsergebnisse

Nachdem das System und die Transferfunktion definiert wurden, ist nun die Berechnung des Lastfalles „NVH“ durchzuführen. Dabei sind verschiedene Abgleiche erfolgt, die in den darauffolgenden Unterkapiteln bearbeitet werden. Neben der Variation der Reduktionsverfahren erfolgt eine Untersuchung der modalen Dämpfung, des Weiteren folgt eine Untersuchung mit verschiedenen Volumenelementen. Abschließend wird eine Einflussanalyse durch einzelne Bauteile erarbeitet.

### 6.2.1 Vergleich der Reduktionsverfahren

In der ersten Untersuchung geht es um die Betrachtung der verschiedenen Reduktionsverfahren. Dazu wird zunächst der Lastfall „NVH“ mit starren Bauteilen berechnet. Im Anschluss folgen die Berechnungen mit den flexiblen Achsbauteilen Radträger, Federlenker, oberer Querlenker sowie Zugstrebe. Die flexiblen Bauteile sind, wie in Kapitel 5 beschrieben, als FE-Modelle aufgebaut und reduziert worden. Die Reduktionsverfahren, die hierbei berücksichtigt wurden, sind das Verfahren nach Guyan sowie das Verfahren nach Craig-Bampton, welches in diesem Fall mit zwei unterschiedlichen Varianten gerechnet wurde. Die Varianten unterscheiden sich lediglich in der Anzahl der dynamischen Moden, in diesem Fall mit 10 und 100 extra Moden. Eine Untersuchung des Craig-Bampton-Verfahrens mit 1000 dynamischen Moden war aufgrund der hohen Anzahl der Freiheitsgrade nicht möglich.

Im folgenden Diagramm sind die Übertragungsfunktionen für alle fünf Lagerstellen aufgeführt. Die Lagerstellen sind dabei wie folgt gekennzeichnet:

ZUG	... Lager der Zugstrebe
OQL VL	... vorderes Lager des oberen Querlenkers
OQL HL	... hinteres Lager des oberen Querlenkers
DAEO	... Dämpferkopflager
FL	... Federlenkerlager

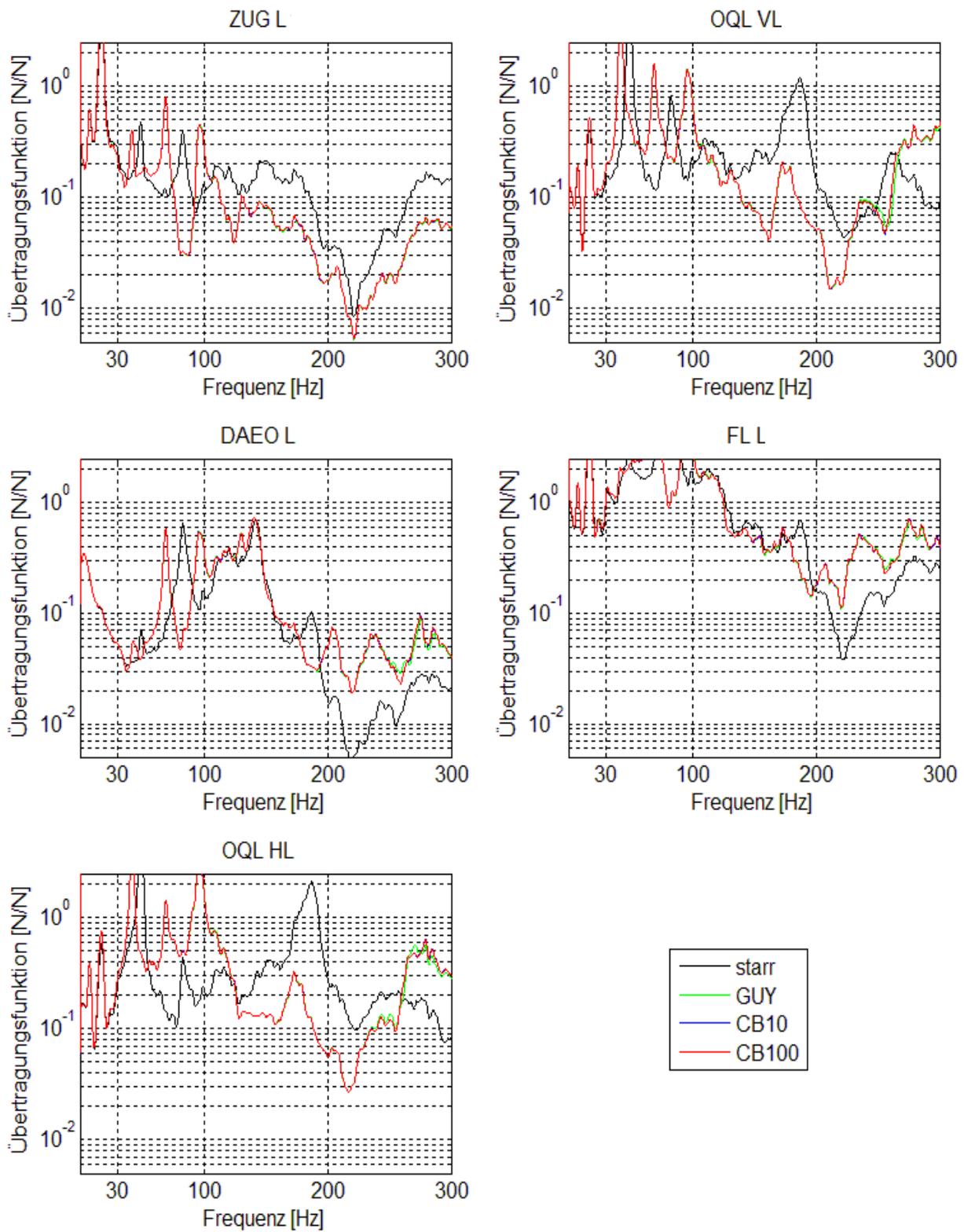


Diagramm 6-3: Übertragungsfunktionen: starr - Guyon - CB10/100

---

---

Schwarz gekennzeichnet ist dabei die Berechnung mit starren Achsbauteilen. Die reduzierten Modelle sind farbig entsprechend der Legende dargestellt. Hierbei ist zu erwähnen, dass in dieser Ansicht die Kurven der Übertragungsfunktionen mit flexiblen Bauteilen meist hintereinanderliegen und sich keine bessere Darstellung anbietet. Bei der Darstellung wurde die Y-Achse logarithmisch skaliert um das Gesamtspektrum besser darzustellen.

Aus Diagramm 6-3 wird ersichtlich, dass es einen deutlichen Unterschied zwischen der Rechnung mit starren und flexiblen Bauteilen gibt. Sowohl in der Höhe als auch der Lage der Maxima fallen Unterschiede auf.

Für die Verschiebung solcher Peaks entlang des Frequenzspektrums sind für das Gesamtsystem die geänderten Steifigkeiten der Bauteile mitverantwortlich. Betrachtet man eine Strebe, so kann man den Übertragungspfad dieser auch als eine Reihenschaltung von Bauteilsteifigkeit und Gummilagersteifigkeit verstehen. Während bei einer starren Modellierung die Bauteilsteifigkeiten unendlich groß sind, sinken die Steifigkeiten bei einer flexiblen Modellierung auf ein endliches Maß. Die Reihenschaltung ist in Gleichung 6-1 gezeigt:

$$\frac{1}{c_{ges}} = \frac{1}{c_{GuLa}} + \frac{1}{c_{Bauteil}} \quad 6-1$$

Setzt man hierbei für  $c_{GuLa}$  die Steifigkeiten der Lager ein und für den Wert  $c_{Bauteil}$  den Wert unendlich (starres Bauteil), so wird dieser Ausdruck zu null und die Gesamtsteifigkeit hängt nur noch von den Lagersteifigkeiten ab. Wird dieser Wert  $c_{Bauteil}$  jedoch durch einen endlichen Wert, also einer Bauteilsteifigkeit, ersetzt, so sinkt die Gesamtsteifigkeit dieser Reihenschaltung. Eine sinkende Steifigkeit senkt auch die Eigenfrequenzen, was damit diese Auffälligkeit im Unterschied der Kurven begründet.

Ein Abgleich der Kurvenverläufe bis 30 Hz, der Sicherheit bei den bestehenden Berechnungs- und Simulationspraktiken geben soll, zeigt, dass dort der Einfluss der flexiblen Bauteile sehr gering ist. Für einen Lastfall, welcher Frequenzen bis maximal 30 Hz aufweist, ist also eine Berechnung mit starren Bauteilen ausreichend.

Ab 30 Hz sind die Kurvenverläufe stark unterschiedlich und es ist zu empfehlen, dass bei Lastfällen, die über diese Grenze hinausgehen, mit flexiblen Bauteilen gerechnet werden sollte.

Betrachtet man die Verläufe mit den reduzierten Bauteilen, fallen zunächst keine Starken Unterschiede auf. Erst ab 200 Hz gibt es kleine Unterschiede zwischen der Guyan-Variante und den Craig-Bampton-Varianten. Um diesen Unterschied deutlicher hervorzuheben, ist eine prozentuale Abweichung zwischen den flexiblen Varianten in Diagramm 6-4 aufgezeigt.

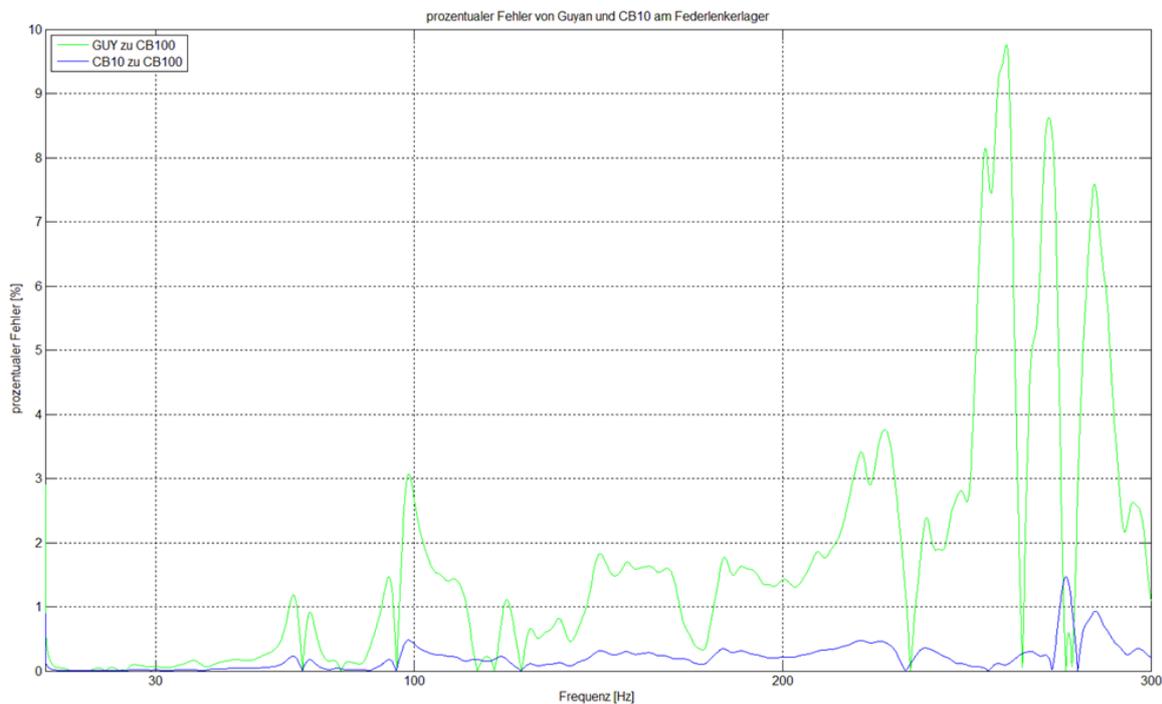


Diagramm: 6-4: prozentualer Fehler von Guyan und CB10 zu CB100

Als Referenz wurde das Craig-Bampton-Verfahren mit 100 dynamischen Moden gewählt. Dieses ist, nach der Theorie und nach den Ergebnissen der FE-Berechnungen, das genaueste hier betrachtete Verfahren. Für das Diagramm 6-4 wurden nun die Differenz der Guyan- und der CB10-Variante zur CB100-Variante gebildet und mit der CB100-Variante dividiert. Als Resultat sind die prozentualen Abweichungen gegenüber der CB100-Variante aufgezeigt. Da sich die Kurven der flexiblen Varianten teils schneiden, sind noch die Absolutbeträge errechnet worden, sodass der Fehler stets positiv erscheint. Diese Darstellung bietet die Möglichkeit, den Trend besser darzustellen.

Die grüne Kurve, der Fehler der Guyan-Variante zur CB100-Konfiguration, zeigt ein deutliches höheres Niveau als die CB10 zur CB100-Variante (blauer Verlauf). Liegt das Fehlermaximum bei der CB10-Variante bei etwa 1,5%, so reicht es im Abgleich von Guyan zu CB100 auf bis zu fast 10%. Tendenziell zeigt sich, dass die Fehler beider Versionen mit der Frequenz ansteigen.

---

Wie bereits in Kapitel 5.3 erwähnt, sind unter 300 Hz kaum Eigenfrequenzen bei den Bauteilen zu finden. Entsprechend gering ist der Einfluss der dynamischen Moden. Der Unterschied zwischen starr und flexibel bis 300 Hz ergibt sich zum größten Teil aus den Steifigkeiten der Bauteile, die bereits mit dem Guyan-Verfahren erfasst werden.

Wie aber bereits bei der FE-Analyse durchgeführt, ist ein Blick auf die Berechnungszeiten von großer Bedeutung. Hierzu sind die Berechnungszeiten der betrachteten Konfigurationen im folgenden Diagramm für den NVH-Lastfall dargestellt. Bei anderen Manövern werden sich die absoluten Werte ändern, jedoch bleiben die Relationen gleich.

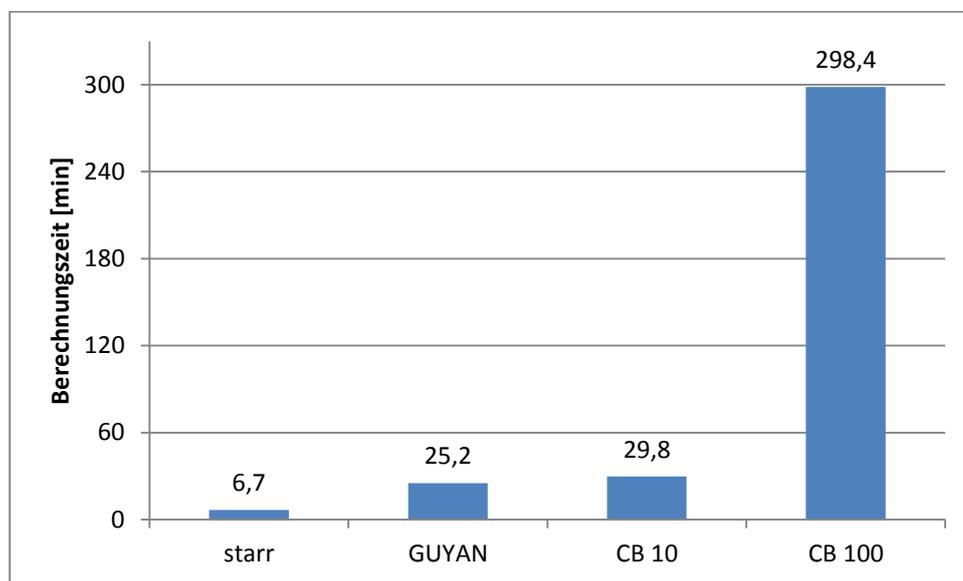


Diagramm 6-5: Berechnungszeiten [min] der reduzierten Systeme

Der erste Aspekt ist der Abgleich der starren Variante mit dem einfachsten Reduktionsverfahren, dem Guyan-Verfahren. Durch den Einsatz flexibler Bauteile in der Mehrkörpersimulation erhöht sich die Rechenzeit in diesem speziellen Fall um das fast Vierfache. Im Allgemeinen erhöht sich die Rechenzeit aber in jedem Fall, da durch die flexiblen Körper die Anzahl der Freiheitsgrade des gesamten Mehrkörpersystems steigt und somit für jeden Zeitschritt eine größere Datenmenge zu berechnen ist.

Der zweite zu betrachtende Teil dieses Diagramms sind die unterschiedlichen Reduktionsverfahren untereinander. Hier gibt es mit dem Umstellen des Reduktionsverfahrens auf das Craig-Bampton-Verfahren mit zehn dynamischen Moden einen noch moderaten Zuwachs der Rechenzeit um etwa 18%. Absolut betrachtet entspricht das aber für diesen speziellen Lastfall fast fünf Minuten längere Berechnungszeit. Die CB100-Variante hat zwar eine höhere Genauigkeit, benötigt aber für Ergebnisse über die zehnfache Rechenzeit.

---

---

Die Rechenzeiten bei der Erstellung der flexiblen Strukturen aus Kapitel 5.4 spielen eine untergeordnete Rolle, da dieser Schritt nur einmal durchzuführen ist. In der Mehrkörpersimulation hingegen wird eine Vielzahl von Variantenrechnungen während der Auslegung des Fahrverhaltens durchgeführt, so dass hier geringere Rechenzeiten von großem Vorteil sind.

Für die weiteren Betrachtungen wird das Guyan-Verfahren herangezogen, da es im Vergleich die niedrigste Rechenzeit benötigt und die Genauigkeit im Vergleich zu den Craig-Bampton-Verfahren, in Hinblick auf den grundsätzlichen Unterschied zwischen starren und flexiblen Bauteilen, ausreichend ist.

## 6.2.2 Variation der modalen Dämpfung

In den theoretischen Grundlagen wurde auf die Dämpfung verzichtet, die an dieser Stelle wieder ergänzt werden soll. Eine Möglichkeit ist die sogenannte modale Dämpfung. Hierbei wird jeder modalen Gleichung ein viskoser Dämpfungsterm hinzugefügt.

Diese Untersuchung erfasst die Variation der modalen Dämpfung der Guyan-reduzierten flexiblen Bauteile. Hierbei wird die Modaldämpfung wie folgt variiert:

Modale Dämpfung (mD): 1%, 3%, 5%, 7% und 10%

Die Werte sind in Prozent angegeben und geben das Verhältnis zur kritischen Dämpfung an. Dabei ist der kritische Dämpfungswert der kleinste Wert, bei dem ein System wieder in Gleichgewichtslage gelangt (DASSAULT-SYSTEMES, 2012).

Typische modale Dämpfungswerte sind für Metalle weniger als 1%, für durchgängige Metallstrukturen zwischen 2% und 4% und für Metallstrukturen mit Verbindungen Werte zwischen 3% und 7% (DASSAULT-SYSTEMES(2), 2012). Der Basiswert ist 5%, weshalb die obengenannte Variation gewählt wurde.

Das folgende Diagramm weist die Verläufe mit den oben aufgeführten modalen Dämpfungen auf. Um die Übersichtlichkeit zu wahren, wird nun nur noch eine Lagerstelle untersucht, diese spiegelt aber die anderen Lagerstellen gut wider. In diesem Fall ist es die vordere Lagerstelle des oberen Querlenkers.

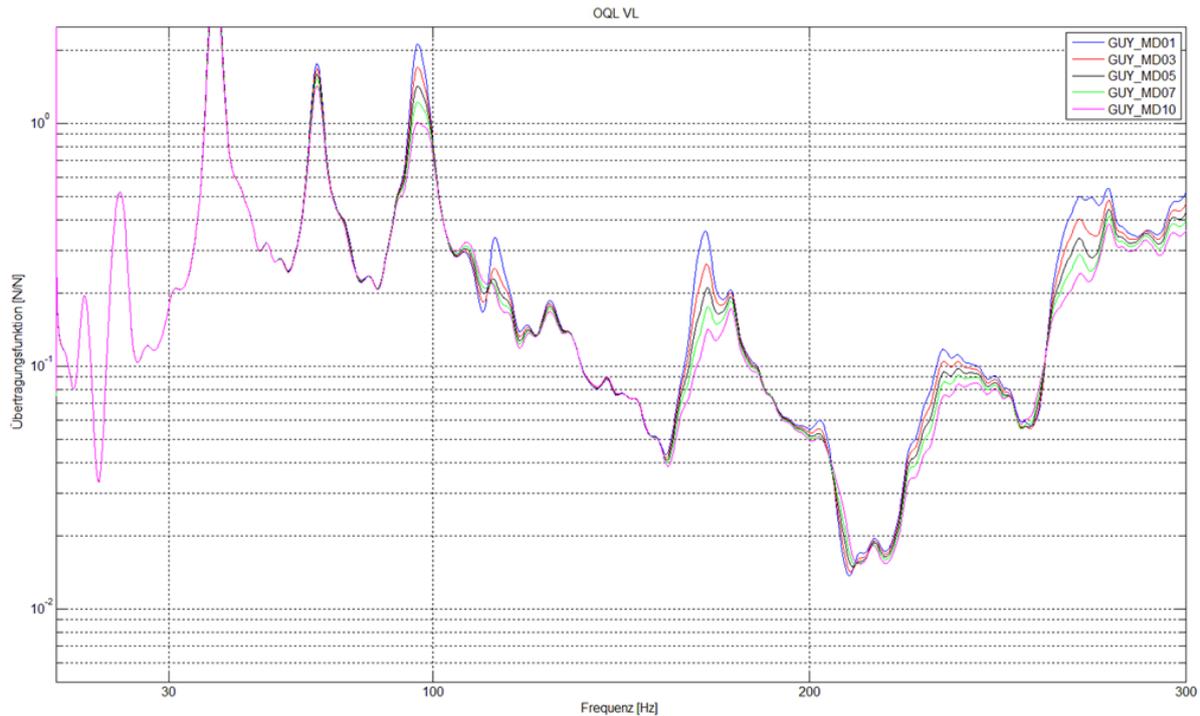


Diagramm 6-6: Übertragungsfunktionen in Abhängigkeit der modalen Dämpfung

Im Frequenzbereich bis 30 Hz zeigen sich keine Einflüsse auf die definierte Übertragungsfunktion. Allerdings steigen mit zunehmender Frequenz auch die Unterschiede zwischen den Varianten. Besonders im Bereich der Peaks fallen die Differenzen der Werte auf. Die schwarze Kurve kennzeichnet, wie in der Legende gezeigt, die Standardvariante mit 5% modaler Dämpfung. Sinkt die modale Dämpfung, so fallen die Spitzen deutlicher aus, denn das System wird weniger gedämpft. Bei steigender modaler Dämpfung ist das Gegenteil der Fall. Auffallend ist, dass der Einfluss der modalen Dämpfung deutlich größer ist als der Einfluss der unterschiedlichen Reduktionsverfahren, wodurch die Guyan-Variante nochmal als ausreichend bestätigt wird. Dieser nennenswerte Einfluss könnte Anlass für eine genaue Ermittlung der modalen Dämpfung sein.

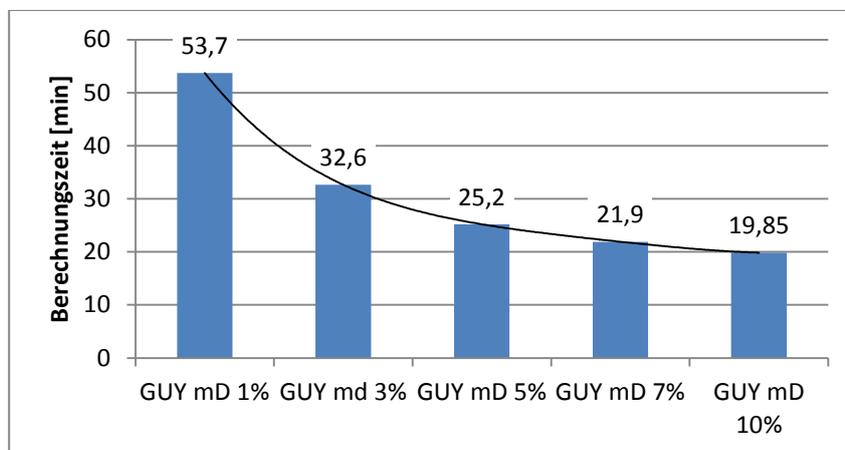


Diagramm 6-7: Berechnungszeiten [min] in Abhängigkeit der modalen Dämpfung

Betrachtet man wieder die Berechnungszeiten, die in Diagramm 6-7 aufgezeigt sind, so ist zu erkennen, dass mit zunehmender Dämpfung die benötigten Berechnungszeiten sinken. Dies ist damit zu begründen, dass beim höhergedämpften System die Anstiege in den Verläufen von Kräften, Beschleunigungen und Geschwindigkeiten weniger stark ausfallen und die Schrittweite entsprechend groß gewählt werden kann.

Eine weitere Art der Dämpfung, die eingestellt werden kann, ist die transiente Dämpfung. Diese erhöht für eine gewisse Zeit die Dämpfung des Systems, um auf diese Weise zum Beispiel Einschwingvorgänge schneller durchführen zu können, dies wird in Abbildung 6-4 anschaulich dargestellt. In dem betrachteten Lastfall wird eine ausreichend große Einschwingdauer gewährt, weshalb der Einfluss der transienten Dämpfung nicht untersucht wird.

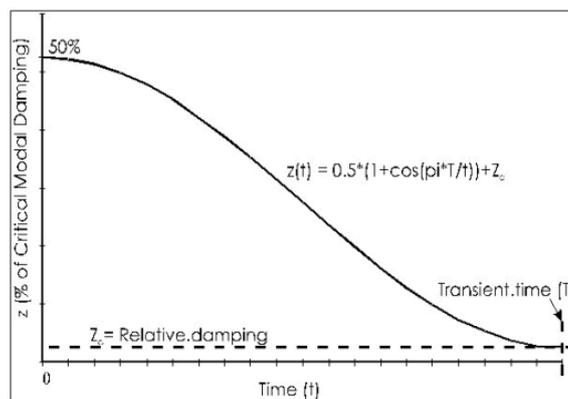


Abbildung 6-4: transiente Dämpfung (LMS, 2012)

### 6.2.3 Vergleich: Tet4- und Tet10-Volumenelemente

Neben dem Vergleich der Reduktionsverfahren und dem Einfluss der modalen Dämpfung ist ein Vergleich der Ausgangsbasisdaten vor der Reduktion der Bauteile und vor dem Einstellen der modalen Dämpfung sinnvoll. Die Reduktionsverfahren verarbeiten ein zuvor erstelltes Modell, dessen Einfluss hiermit abgeklärt werden soll. Die Modellierung ist das erste Glied der Prozesskette und somit trägt eine Abweichung in der Ausgangsmodellierung zu Fehlern in den darauffolgenden Prozessgliedern bei. Wie in der vorherigen Variation ist wieder das Guyan-Reduktionsverfahren gewählt worden.

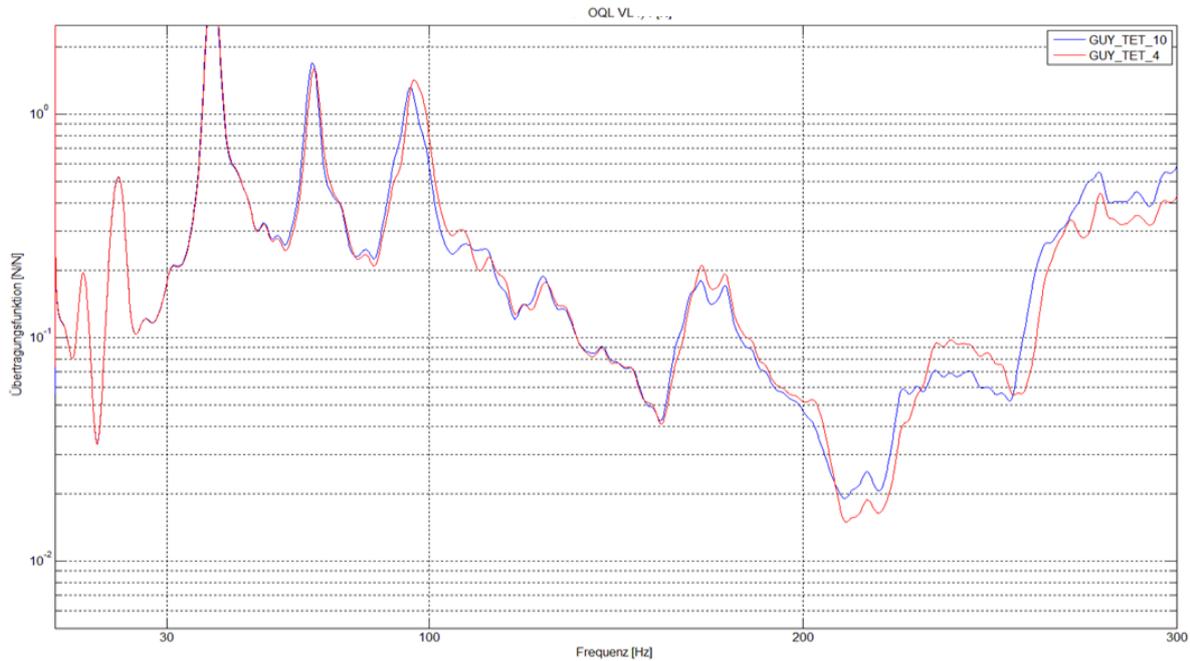


Diagramm 6-8: Übertragungsfunktion in Abhängigkeit des Volumenelementtyps

Hierfür wird der Vergleich in der Vernetzungsgüte zwischen Tet4- und Tet10-Elementen herangezogen, so wie er bereits in Kapitel 5.5 beschrieben ist. Dort zeigte sich bereits, dass ein höherer Detaillierungsgrad bzw. höherwertigere Volumenelemente die Genauigkeiten der Eigenfrequenzen begünstigen. Somit ist in diesem Fall die Variante mit Tet10-Elementen diejenige Variante, von der eine höhere Genauigkeit vorausgesetzt wird.

Diagramm 6-8 zeigt beide Varianten mit den verschiedenen Volumenelementen. An der betrachteten Lagerstelle, vorderes Lager des oberen Querlenkers, zeigen sich zwischen den beiden Varianten deutliche Unterschiede.

Im Bereich bis etwa 30 Hz ist noch kein Einfluss sichtbar. Ab dieser Frequenz sieht man jedoch einen deutlichen Unterschied zwischen den betrachteten Varianten. Um diese Unterschiede deutlich zu machen, ist wieder die Betrachtung der prozentualen Unterschiede zwischen den beiden Varianten sinnvoll. Die Basis, zu welcher verglichen wird, ist die Variante mit den Tet10-Elementen.

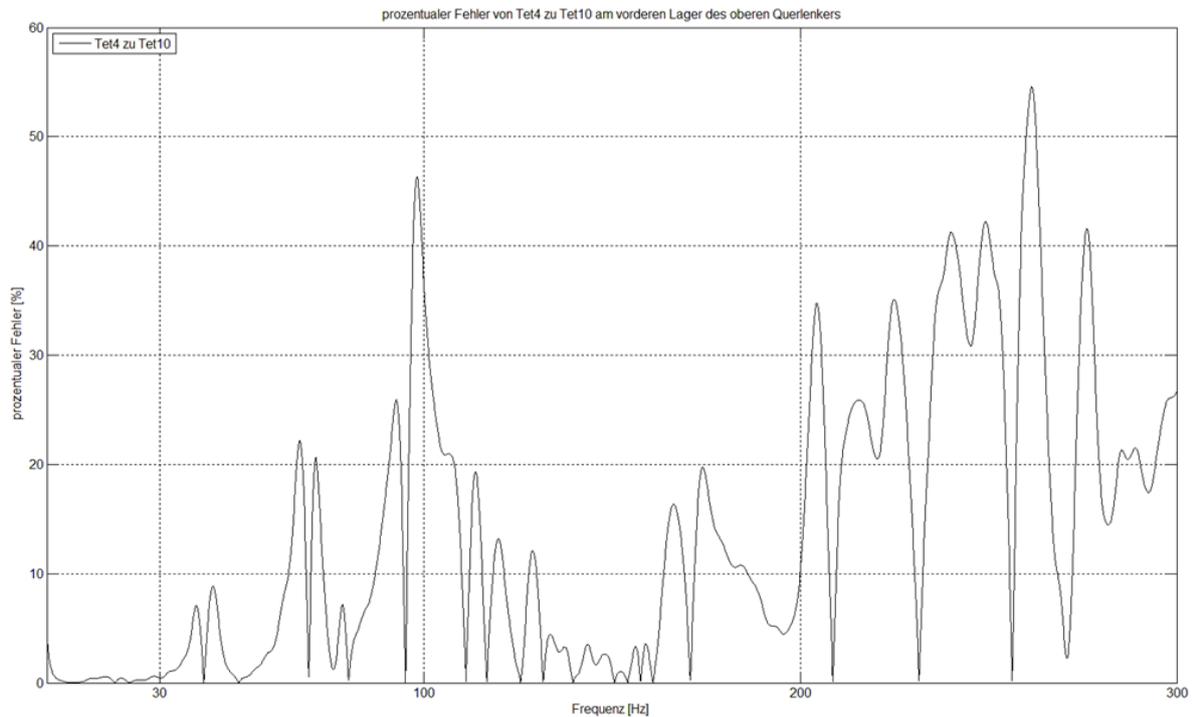


Diagramm 6-9: prozentualer Fehler von der Tet4- zur Tet10-Variante

Diagramm 6-9 weist, wie bereits beschrieben, keine wesentlichen Unterschiede der beiden Varianten bis 30 Hz auf. Ab dieser Frequenz nehmen die Abweichungen der beiden Varianten zueinander drastisch zu. Die Fehler nehmen hierbei Werte von bis über 50 Prozent an. Zwar sind die Fehler prozentual ausgedrückt und können auch bei kleinen Werten in der Übertragungsfunktion auftreten, allerdings kann man hier beispielsweise einen Fehler etwas unter 100 Hz herausarbeiten, bei dem der Wert der Übertragungsfunktion bei etwa eins liegt. Hier hat ein Fehler von über 40 % einen starken Einfluss. Dies bestätigt, dass die Wahl der Volumenelemente einen großen Einfluss auf die Ergebnisse hat.

In der Analyse der Berechnungszeiten zeigt sich kein großer Unterschied. Diese sind in etwa auf dem gleichen Niveau und somit ist die notwendige Zeit für die FE-Berechnung ein möglicher Grund, welchen Modellierungsgrad man wählt. Die Unterschiede zwischen den Elementtypen sind größer als die Unterschiede der Reduktionsvarianten, weshalb eine Modellierung mit Tet10-Elementen empfohlen wird.

## 6.2.4 Einflussanalyse einzelner Bauteile

Durch den Einbau von nur einzelnen flexiblen Bauteilen soll sich schrittweise an die Variante herangetastet werden, welche alle vier flexiblen Bauteile berücksichtigt. Damit soll untersucht werden, welche Bauteile den höchsten Beitrag zum Wechsel von starrer Variante zu flexibler Variante leisten. Hintergrund dieser Untersuchung ist es, dass man mit möglichst geringem Aufwand schnell zu einem aussagekräftigen Ergebnis kommen kann. Um Zeit zu sparen, wäre dann eine Möglichkeit nicht alle Bauteile aufzubereiten, sondern nur Einzelne.

In Diagramm 6-10 ist nun solch ein Vergleich aufgeführt. Basisvarianten, die für die Einflussanalyse herangezogen werden, sind die schwarze Variante „starr“ mit starren Bauteilen sowie die grüne Variante „Guyan“ mit allen vier Guyan-reduzierten Achselementen.

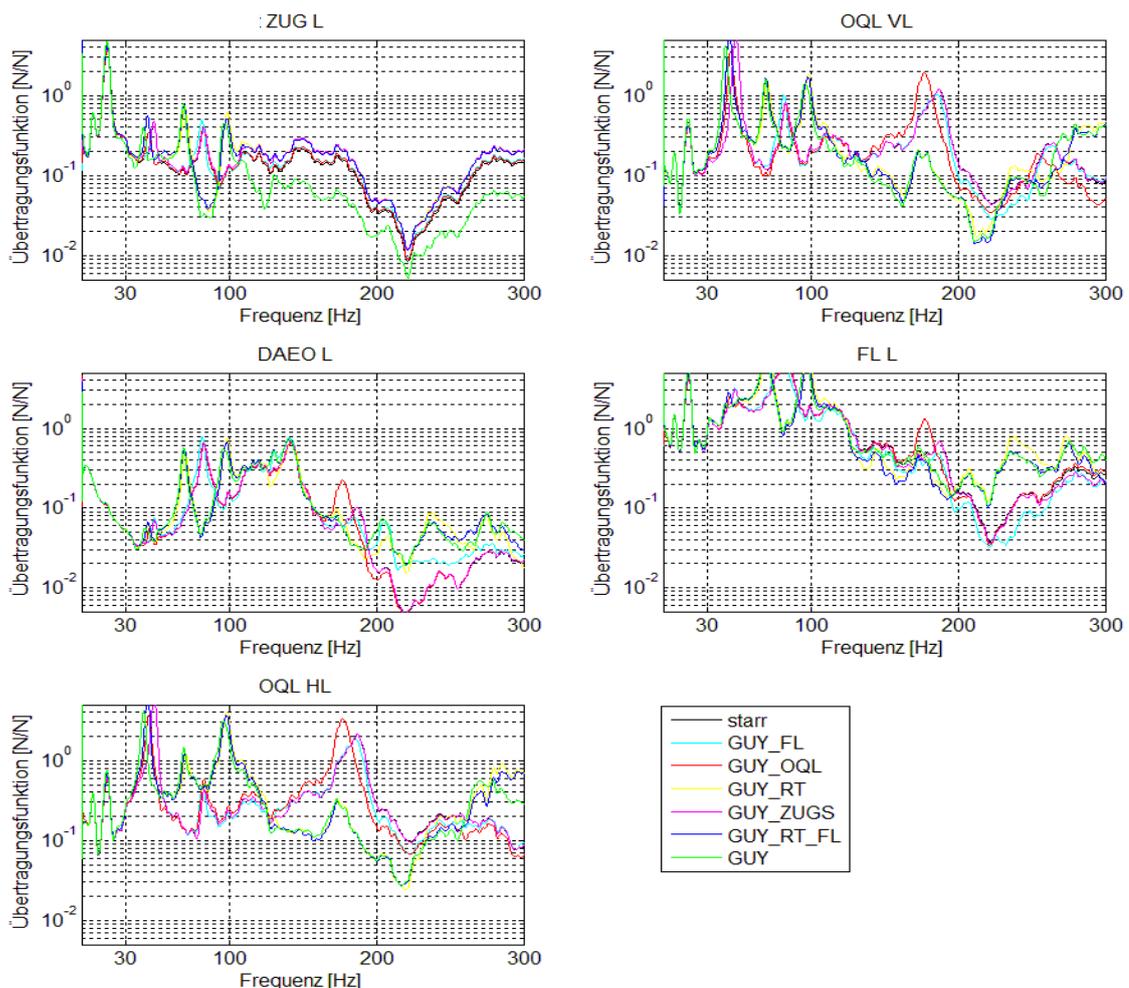


Diagramm 6-10: Übertragungsfunktionen in Abhängigkeit des Einsatzes flexibler Achsbauteile

Des Weiteren sind vier Konfigurationen eingezeichnet, in denen je nur ein Bauteil flexibel abgebildet wurde. Die Variante mit einer flexiblen Zugstrebe (rosa Variante) zeigt kaum Einflüsse, diese verläuft annähernd genauso wie die starre Variante. Anders verhält es sich beim Einfügen eines flexiblen oberen Querlenkers oder Federlenkers.

Diese Varianten zeigen deutlichere Abweichungen von der starren Variante und lassen damit einen höheren Einfluss als eine einzelne Zugstrebe vermuten. Die beste Variante beim Einbau eines einzelnen flexiblen Bauteils ist die gelb eingefärbte Kurve, also die Variante mit flexiblem Radträger. Diese zeigt die größten Abweichungen zur starren Variante und nähert sich stark der grünen Variante an, die alle vier flexiblen Achselemente berücksichtigt.

Beim Vergleich der flexiblen Varianten ist wieder ein Blick auf die notwendigen Rechenzeiten sinnvoll. Tendenziell bestätigen sich dabei die bisher geäußerten Vermutungen.

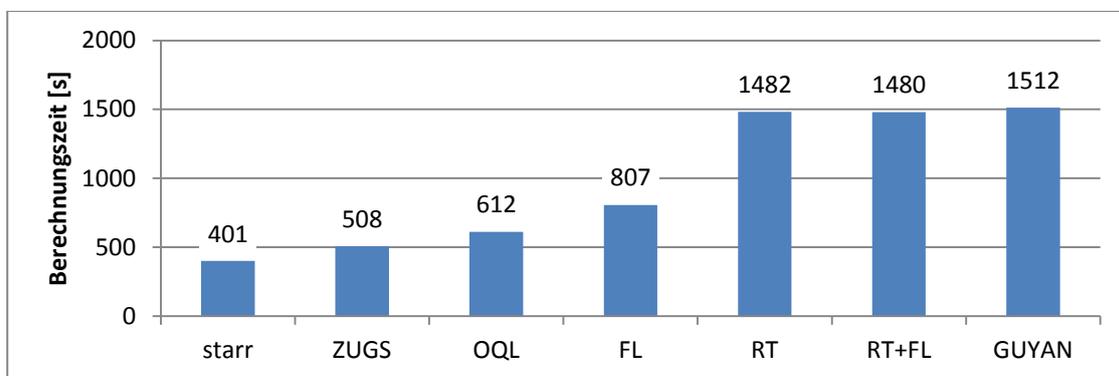


Diagramm 6-11: Berechnungszeiten [min] in Abhängigkeit des Einsatzes flexibler Achsbauteile

Mit dem einzelnen Einbau der Bauteile Zugstrebe, oberer Querlenker, Federlenker und Radträger steigen die Berechnungszeiten stetig an. Für die Variante mit flexiblem Radträger wird sogar schon das Niveau der vollflexiblen Variante erreicht. Aus rechenzeittechnischen Gründen besteht demnach kein Vorteil, wenn man nur einzelne Bauteile austauscht. Wenn aber die flexiblen Strukturen noch nicht vorliegen, kann man bereits mit einem flexiblen Radträger das Ergebnis deutlich verbessern.

Um dieses Ergebnis noch weiter zu verbessern ist exemplarisch noch eine letzte Konfiguration betrachtet worden. Diese Variante berücksichtigt einen flexiblen Radträger sowie einen flexiblen Federlenker, die beiden Stahlbauteile, welche den größten Kräften ausgesetzt sind, und ist in Diagramm 6-10 blau dargestellt. Diese zeigt über den gesamten Frequenzbereich die beste Näherung an die vollflexible Variante.

Eine Variante, bei der zum Radträger und Federlenker noch der obere Querlenker eingebaut wird, ist aus dem Grunde nicht berücksichtigt, da dann nur noch die Zugstrebe zusätzlich aufbereitet werden müsste um die vollflexible Variante zu erhalten. Der zeitliche Vorteil gegenüber der vollflexiblen Konfiguration würde dadurch weiter sinken und rechenzeittechnisch bietet sich seit dem Einbau des flexiblen Radträgers kein Vorteil mehr an.

---

---

## 7 Zusammenfassung

Die Arbeit umfasst die Einflüsse der verschiedenen Reduktionsverfahren und deren Anwendung auf Achsbauteile, welche in der Mehrkörpersimulation eingesetzt werden. Dabei wurde zunächst die Theorie der Reduktionsverfahren aufgezeigt. Anschließend wurden die Achsbauteile auf verschiedene Arten aufbereitet und eingesetzt.

Die Erkenntnisse, die daraus erschlossen wurden, sind für eine spezielle Vorderachse einer Oberklasselimosine der Marke Mercedes-Benz abgeleitet worden. Die Anwendbarkeit für andere Achstopologien sollte abgesichert werden.

Die erste Erkenntnis ist, dass bei Lastfällen bis 30 Hz eine Verwendung von flexiblen Bauteilen nicht zwingend notwendig ist. Hier zeigten sich nur sehr geringe Auswirkungen durch den Einsatz von flexiblen Bauteilen der Radaufhängung.

Ab einer Frequenz von über 30 Hz sind zunehmend Unterschiede zwischen Rechnungen mit starren und flexiblen Achsbauteilen aufweisbar. Eine Verwendung von flexiblen Bauteilen wird deshalb empfohlen.

Beim Einsatz von flexiblen Komponenten ist eine vorherige Reduktion notwendig, um die Anwendbarkeit in der Mehrkörpersimulation zu gewährleisten. Dabei zeigte sich, dass das Craig-Bampton-Verfahren mit einhundert dynamischen Eigenmoden die besten Ergebnisse liefert. Dieses Verfahren ist dann zu empfehlen, wenn eine möglichst hohe Genauigkeit erreicht werden soll. Aus der Sicht der Optimierung der Berechnungszeiten ist der Einsatz des Guyan-Reduktionsverfahren empfehlenswert. Der Fehler, der dabei zum Craig-Bampton-Verfahren gemacht wird, ist gering gegenüber dem Fehler, den man zwischen starren und flexiblen Bauteilen macht. Ein Einsatz von Craig-Bampton-reduzierten flexiblen Bauteilen mit zehn dynamischen Moden bietet einen guten Kompromiss zwischen Berechnungszeit und Genauigkeit.

Eine weitere Untersuchung zeigte den Einfluss der modalen Dämpfung. Mit zunehmendem Dämpfungsmaß fallen die Maxima weniger deutlich aus und die Berechnungszeit sinkt aufgrund von größeren Rechenschrittweiten. Die Ermittlung und Einstellung der korrekten Dämpfungswerte ist trotzdem Voraussetzung für eine zuverlässige Aussagefähigkeit.

Die nächste Erkenntnis wurde aus der Variation der FE-Volumenelemente abgeleitet. Hierbei zeigte sich, dass eine Erhöhung des Modellierungsgrades durch den Einsatz höherwertigerer Volumenelemente die Ergebnisse der FE-Analyse verbessert werden konnten. Der Einsatz dieser Modelle verspricht geringere Fehler gegenüber der Ausgangsvariante, was auch in der Untersuchung in der Mehrkörpersimulation bestätigt werden konnte. Allerdings sei hierbei die sehr starke Zunahme der Berechnungszeiten während der Aufbereitung der FE-Modelle erwähnt. In der Mehrkörpersimulation spielt dieser Aufwand aufgrund des gleichen Reduktionsverfahrens keine Rolle mehr und die Berechnungszeiten sind daher auf gleichem Niveau.

---

---

Der letzte untersuchte Aspekt war der Einsatz von nur einzelnen flexiblen Bauteilen. Hierbei zeigte sich, dass der Einsatz eines flexiblen Radträgers die größte Verbesserung von starrer zu vollflexibler Variante brachte. In Kombination mit einem flexiblen Federlenker konnte das Ergebnis weiter verbessert werden. Dieses Vorgehen ist jedoch nur dann zu empfehlen, wenn Zeit eingespart werden soll. Vorteile in den Berechnungszeiten verspricht dieses Vorgehen nicht.

Aufgrund dieser Erkenntnisse möchte ich eine kurze, stark reduzierte Empfehlung treffen:

*Der Einsatz von flexiblen Achsbauanteilen ist ab einer Frequenz von 30 Hz sinnvoll. Dabei bietet das Guyan-Reduktionsverfahren eine hinreichend gute Möglichkeit, die FE-Bauteile für die Mehrkörpersimulation aufzubereiten. Die Berechnungszeiten sind dabei am geringsten. Bei der FE-Bauteilmodellierung geht die Empfehlung zu Tetraeder-Elementen mit kubischem Ansatz und somit zehn Knoten. Der Einsatz nur einzelner Achsbauanteile ist nicht empfehlenswert.*

In dieser Arbeit wurde sich nur auf die Achsbauanteile beschränkt. In der Mehrkörpersimulation gibt es eine Reihe weiterer Elemente, die einer Untersuchung wert sind, um den Frequenzbereich bis 300 Hz besser abzubilden. Hierfür möchte ich eine kurze Auflistung der Bauteile geben, die ebenfalls die Gesamteigenschaften des Fahrzeugs in Hinblick auf Frequenzen ab 30 Hz beeinflussen beziehungsweise beeinflussen könnten:

- Einsatz einer flexiblen Karosserie aufgrund der niedrigen Eigenfrequenzen als auch der zusätzlichen Elastizitäten/Steifigkeiten
- Einsatz eines flexiblen Fahrschemels (falls vorhanden)
- Bedatung der Fahrwerkslager unter Berücksichtigung der Frequenzen und Amplituden
- realitätsnahe Modellierung von Dämpfer, Feder, Bremsscheibe und Bremssattel

---

---

## 8 Literaturverzeichnis

**Alainipload, User:.** 2006. fr.wikipedia.org. [Online] 20. 07 2006. [Zitat vom: 04. 02 2013.] [http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/69/Schema\\_poutre2.jpg/712px-Schema\\_poutre2.jpg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/69/Schema_poutre2.jpg/712px-Schema_poutre2.jpg).

**Beckenbauer, Thomas.** 2008. *Physik der Reifen-Fahrbahn-Geräusche; Geräuschenstehung, Wirkungsmechanismen und akustische Wirkung unter dem Einfluss von Bautechnik und Straßenbetrieb.* 2008.

**Benz, Rüdiger.** 2008. *Fahrzeugsimulation zur Zuverlässigkeitsabsicherung von karosseriefesten Kfz-Komponenten.* Karlsruhe : Dissertation. Universitätsverlag Karlsruhe, 2008.

**Bohn, Peter.** 2006. *Wechselwirkungen von Schwingungen zwischen Motor-Getriebe-Verbund und Kurbeltrieb als Grundlage für Körperschallanalysen.* Berlin : Dissertation. Universitätsbibliothek, 2006.

**DASSAULT-SYSTEMES.** 2012. Solid Works Hilfeseite. <http://help.solidworks.com>. [Online] 2012. [Zitat vom: 04. 02 2013.] [http://help.solidworks.com/2012/German/SolidWorks/cworks/Modal\\_Damping.htm](http://help.solidworks.com/2012/German/SolidWorks/cworks/Modal_Damping.htm).

**DASSAULT-SYSTEMES(2).** 2012. Solid Works Hilfeseite. <http://help.solidworks.com>. [Online] 2012. [Zitat vom: 04. 02 2013.] [http://help.solidworks.com/2012/German/SolidWorks/cworks/Viscous\\_Damping\\_Ratios.htm](http://help.solidworks.com/2012/German/SolidWorks/cworks/Viscous_Damping_Ratios.htm).

**Dietz, Stefan und Knothe, Klaus.** 1997. *Reduktion der Anzahl der Freiheitsgrade in Finite-Element-Substrukturen.* Berlin : Institut für Luft- und Raumfahrt der TU Berlin, 1997.

**Dresig, Hans.** 2001. *Schwingungen mechanischer Antriebssysteme - Modellbildung, Berechnung, Analyse, Synthese.* Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 2001.

**Friswell, M. I., Garvey, S. D. und Penny, J. E. T.** 1995. *MODEL REDUCTION USING DYNAMIC AND ITERATED IRS TECHNIQUES in Journal of Sound an Vibration 186(2).* s.l. : Academic Press Limited, 1995.

**Gasch, Robert, Knothe, Klaus und Liebich, Robert.** 2012. *Strukturdynamik - Diskrete Systeme und Kontinua; 2. Auflage.* Berlin Heidelberg : Springer Vieweg, 2012.

**Gauterin, Frank.** 2010. *Reifen-Fahrbahngeräusche.* [Buchverf.] Klaus Genuit (Hrsg.). *Sound-Engineering im Automobilbereich - Methoden zur Messung und Auswertung von Geräuschen und Schwingungen.* Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2010.

**Guyan, Robert J.** 1965. *Reduction of Stiffness an Mass Matrices.* s.l. : AIAA Journal, 1965.

**Heißling, Bernd, Ersoy, Metin und Gies, Stefan (Hrsg.).** 2011. *Fahrwerkhandbuch, 3. Auflage.* Wiesbaden : Vieweg+Teubner, 2011.

**Ihlenburg, Frank.** *Vorlesungsskript: Diskrete Systeme 2.* Hamburg : HAW Hamburg.

---

**Junge, Michael.** 2010. *Model Reduction Methods for FE-BE Coupling Applied to Vibro-Acoustic Simulations and Experimental Validation*. Tönning, Lübeck, Marburg : Dissertation. Der Andere Verlag, 2010.

**Klein, Bernd.** 2012. *FEM - Grundlagen und Anwendungen der Finite-Element-Methode im Maschinen- und Fahrzeugbau, 9. Auflage*. Wiesbaden : Springer Vieweg, 2012.

**Koutsovasilis, Panagiotis.** 2009. *Model Order Reduction in Structural Mechanics - Coupling the Rigid and Elastic Multi Body Dynamics*. Dissertation. Dresden : VDI Verlag, 2009.

**Koutsovasilis, Panagiotis und Beiteltschmidt, Michael.** *Model Reduction of Large Elastic Systems - A Comparison Study on the Elastic Piston Rod*. s.l. : TU Dresden.

**LMS.** 2012. Online Help. *LMS Virtual.Lab*. [Online] 23. 01 2012. [Zitat vom: 04. 02 2013.] LMS Virtual.Lab Rev 10-SL3.

**Maglie, Pascal.** *Anwendung von FE-basierten Reduktionsmethoden - Integration von flexiblen Bauteilen in der gekoppelten Simulation von Werkzeugmaschinen*. Zürich : ETH Zürich.

**Nasdala, Lutz.** 2012. *FEM-Formelsammlung Statik und Dynamik - Hintergrundinformationen, Tipps und Tricks, 2. Auflage*. Wiesbaden : Springer-Vieweg, 2012.

**Oh, Seungyong.** 2010. *Verwendung von modernen Modellreduktionsverfahren für Ride-Simulationen*. Stuttgart : Universitätsbibliothek Stuttgart, 2010.

**Rapp, Ulrich.** 2009. [www.ulrich-rapp.de](http://www.ulrich-rapp.de). *Beispiele für Zeichnungen mit OpenOffice Draw*. [Online] 10. 07 2009. [Zitat vom: 04. 02 2013.] <http://www.ulrich-rapp.de/stoff/pc/draw/index.htm>.

**Reitz, A., et al.** 1999. *Spezielle Prüfstände zur Untersuchung von NVH-Phänomenen des Antriebstrangs*. Aachen : s.n., 1999. S. 17.

**Rixen, Daniel.** 2010. *Dynamic Substructuring Concepts*. Delft : TU Delft, 2010.

**Thomaier, Martin.** 2008. *Optimierung der NVH-Eigenschaften von Pkw-Fahrwerkstrukturen mittels Active-Vibration-Control*. Darmstadt : s.n., 2008.

**Waltz, Manuela.** 2005. *Dynamisches Verhalten von gummigefederten Eisenbahnrädern*. Dissertation. Aachen : RWTH Aachen, Universitätsbibliothek, 2005.

**Wijker, Jacob Job.** 2008. *Spacecraft Structures*. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2008.

**Witteveen, Wolfgang.** 2012. Comparison of CMS, Krylov and Balanced Truncation Based Model Reduction from a Mechanical Application Engineer's Perspective. [Buchverf.] R. Mayes, et al. *Topics in Experimental Dynamics Substructuring and Wind Turbine Dynamics, Volume 2*. New York, Dordrecht, Heidelberg, London : Springer-Verlag, 2012.

**Zeller, Peter (Hrsg.).** 2012. *Handbuch Fahrzeugakustik - Grundlagen, Auslegung, Berechnung, Versuch; 2. Auflage*. Wiesbaden : Vieweg+Teubner, 2012.

---

---

# 9 Anhang

## 9.1 Quelltext: Mehrmassenschwinger

```
% Mehrmassenschwinger
clear all; close all; clc;
format bank
cd T:\0_diverses\Mehrmassenschwinger;

%
% -----
% Masse (m in kg), Steifigkeit (c in N/m) und Belastung (f in N)
m=1; c=100; f=100;
% Anzahl der Elemente (p), Anzahl der Knoten (q) und Elementlänge (L in mm)
p=4; q=p+1; L=20;
%
% -----
% Elementmatrizen
Me=[1, 0; 0, 1]*m;
Ke=[1, -1; -1, 1]*c;
% Gesamtmatrizen
M=zeros(q,q);
K=zeros(q,q);
for a=1:p
    b=a+1;
    M(a:b,a:b)=M(a:b,a:b)+Me;
    K(a:b,a:b)=K(a:b,a:b)+Ke;
end
%
% -----
% Verschiebungsrandbedingung: Keine Verschiebung am letzten Knoten, das
% heißt streichen der entsprechenden Zeilen und Spalten von M und K.
% (Null setzen dieser Zeilen führt bei der Inversion zu Singularitäten)
Mr=M(1:p,1:p);
Kr=K(1:p,1:p);
% Kraftrandbedingung: Zugkraft am ersten Knoten
F=zeros(p,1);
F(1)=-f;
% Lösen des Gleichungssystems F=K*U
U=(Kr^-1)*F;
% Verschiebungen am Rand wieder auffüllen
U(q)=0;
%
% -----
% Originalgitter
U0=[0:p]'*L;
V0=zeros(q,1);
% Verschiebungsfeld
skal=1;
U1=U0+skal*U;
%
% -----
% Modale Reduktion: Eigenwerte W2=Omega^2, UE=Eigenvektoren der
Verschiebungen
%[UE W2]=eig(K*(M^-1));
[UE W2]=eig(K,M); mo=diag(W2)';
% Transformation
n=3;
PHImo=UE(:,1:n);
Kmo=PHImo'*K*PHImo;
Mmo=PHImo'*M*PHImo;
% Eigenwerte
[UEmo W2mo]=eig(Kmo,Mmo);
```

```

% % Darstellung Eigenwerte Full Flex
figure('name','FullFlexEigenwerte','Position',[100 200 1600 400]);
for z=1:5
    subplot(5,1,z);
    plot(U0,V0,'-ok','LineWidth',2,'MarkerSize',10); hold on; grid on;
    ylabel([num2str(z)] '. Eigenmode')
    for s=5:5:15
        plot(U0+s*UE(:,z),V0,'or','LineWidth',2,'MarkerSize',s); hold
on; grid on;
        plot(U0-s*UE(:,z),V0,'ob','LineWidth',2,'MarkerSize',s); hold
on; grid on;
    end
end

% % Darstellung Eigenwerte mod. Reduktion
figure('name','mod. Reduktion Eigenwerte','Position',[100 200 1600
400]);
for z=1:3
    subplot(3,1,z);
    plot(U0,V0,'-ok','LineWidth',2,'MarkerSize',10); hold on; grid on;
    ylabel([num2str(z)] '. Eigenmode')
    for s=5:5:15
        plot(U0+s*UE(:,z),V0,'or','LineWidth',2,'MarkerSize',s); hold
on; grid on;
        plot(U0-s*UE(:,z),V0,'ob','LineWidth',2,'MarkerSize',s); hold
on; grid on;
    end
end

%
%
% Statische Kondensation (Guyan) ---> GUYAN-2
%
% Aufteilung nach Schnittstellen-Knoten und inneren Knoten
% Der erste und der letzte Knoten sind Schnittstellen
Kmm=K([1,q],[1,q]); Mmm=M([1,q],[1,q]);
Kms=K([1,q],[2:p]); Mms=M([1,q],[2:p]);
Ksm=K([2:p],[1,q]); Msm=M([2:p],[1,q]);
Kss=K([2:p],[2:p]); Mss=M([2:p],[2:p]);
Ksort=[Kmm, Kms; Ksm, Kss]; Msort=[Mmm, Mms; Msm, Mss];

% Transformation
PHIgu=[eye(2);-(Kss^-1)*Ksm];
Kgu=PHIgu'*Ksort*PHIgu;
Mgu=PHIgu'*Msort*PHIgu;

%
% Verschiebungsrandbedingung: Letzter Knoten ist fest
% Kraftrandbedingung: Zugkraft am ersten Knoten
% Lösen des Gleichungssystems F=K*U
Ugu=(Kgu(1,1)^-1)*(-f);

% Eigenwerte
[UEgu W2gu]=eig(Kgu,Mgu); gu=diag(W2gu) '

% Darstellung Eigenwerte
figure('name','GUYAN_2 Eigenwerte','Position',[100 200 1600 400]);
for z=1:2
    U2=[0:1]'*4*L; V2=zeros(2,1);
    subplot(2,1,z)
    plot(U0,V0,'-ok','LineWidth',2,'MarkerSize',10); hold on; grid on;
    ylabel([num2str(z)] '. Eigenmode')
    for s=5:5:15
        plot(U2+s*UEgu(:,z),V2,'or','LineWidth',2,'MarkerSize',s);
hold on; grid on;
        plot(U2-s*UEgu(:,z),V2,'ob','LineWidth',2,'MarkerSize',s);
hold on; grid on;
    end
end

```

```

end
%
%
% % Statische Kondensation (Guyan) ---> GUYAN-3
%
% % Der 1., 3. und letzte Knoten sind Schnittstellen
Kmm3=K([1,3,q],[1,3,q]); Mmm3=M([1,3,q],[1,3,q]);
Kms3=K([1,3,q],[2,p]); Mms3=M([1,3,q],[2,p]);
Ksm3=K([2,p],[1,3,q]); Msm3=M([2,p],[1,3,q]);
Kss3=K([2,p],[2,p]); Mss3=M([2,p],[2,p]);
Ksort3=[Kmm3, Kms3; Ksm3, Kss3]; Msort3=[Mmm3, Mms3; Msm3, Mss3];
% Transformation
PHIgu3=[eye(3);-(Kss3^-1)*Ksm3];
Kgu3=PHIgu3'*Ksort3*PHIgu3;
Mgu3=PHIgu3'*Msort3*PHIgu3;

% Kraefte
FP=zeros(2,1);
FP(1)=-f;
% Streichen der letzten Zeile von
Mrg=Mgu3(1:2,1:2);
Krg=Kgu3(1:2,1:2);
% Lösen des Gleichungssystems F=K*U
Ugu3=(Krg^-1)*FP;
% Verschiebungen am Rand wieder auffüllen
Ugu3(3)=0;
% Eigenwerte
[UEgu3 W2gu3]=eig(Kgu3,Mgu3); gu3=diag(W2gu3)';
% Darstellung Eigenwerte
figure('name','GUYAN_3 Eigenwerte','Position',[100 200 1600 400]);
for z=1:3
    U2=[0:2]'*2*L; V2=zeros(3,1);
    subplot(3,1,z)
    plot(U0,V0,'-ok','LineWidth',2,'MarkerSize',10); hold on; grid on;
    ylabel([num2str(z)] '. Eigenmode')
    for s=5:5:15
        plot(U2+s*UEgu3(:,z),V2,'or','LineWidth',2,'MarkerSize',s);
        hold on; grid on;
        plot(U2-s*UEgu3(:,z),V2,'ob','LineWidth',2,'MarkerSize',s);
        hold on; grid on;
    end
end
end
%
%
% Craig-Bampton 1Mod
[UEss W2ss]=eig(Kss,Mss);
% Transformation
n=q-4;
PHIcb=[eye(2), zeros(2,n); -(Kss^-1)*Ksm, UEss(:,1:n)];
Kcb=PHIcb'*Ksort*PHIcb;
Mcb=PHIcb'*Msort*PHIcb;
% Eigenwerte
[UEcb W2cb]=eig(Kcb,Mcb); cb=diag(W2cb)';
%
%
% Craig-Bampton 2Moden
[UEss W2ss]=eig(Kss,Mss);
% Transformation
n=q-3;
PHIcb2=[eye(2), zeros(2,n); -(Kss^-1)*Ksm, UEss(:,1:n)];
Kcb2=PHIcb2'*Ksort*PHIcb2;
Mcb2=PHIcb2'*Msort*PHIcb2;
% Eigenwerte
[UEcb2 W2cb2]=eig(Kcb2,Mcb2); cb2=diag(W2cb2)';
%

```

```

%
% Uebertragungsfunktion (Anregung am Knoten1, Antwort am Knoten5)
    freq=0.01:0.01:3;
    for n=1:length(freq)
        w=2*pi*freq(n);
        % Gesamtsystem (Knoten1=Vektorpostion1, Knoten5=Vektorpostion5)
        G=(-M*w^2+K)^-1;
        A(n)=abs(G(q,1));
        % Statische Reduktion - 2 Knoten
        Ggu=(-Mgu*w^2+Kgu)^-1;
        Agu(n)=abs(Ggu(2,1));
        % Statische Reduktion - 3 Knoten
        Ggu3=(-Mgu3*w^2+Kgu3)^-1;
        Agu3(n)=abs(Ggu3(3,1));
        % Gemischte Reduktion 1Mod
        Gcb=(-Mcb *w^2+Kcb)^-1;
        Acb(n)=abs(Gcb(2,1));
        % Gemischte Reduktion 2Mod
        Gcb2=(-Mcb2 *w^2+Kcb2)^-1;
        Acb2(n)=abs(Gcb2(2,1));
    end
% Amplitudengang
close all;
figure('name','Übertragungsfunktionen','Position',[100 500 1600 600]);
Subplot(2,1,1)
plot(freq,A,'k','LineWidth',3); hold on; grid on;
plot(freq,Agu,'r','LineWidth',3); hold on; grid on;
plot(freq,Agu3,'g','LineWidth',2); hold on; grid on;
    title('Übertragungsverhalten')
xlabel('Frequenz f in [Hz]')
ylabel('Übertragungsfunktion x/F')
legend({'Original','GUYAN-2','GUYAN-3'},'Location','NorthEast')
ylim([0 1])

Subplot(2,1,2)
plot(freq,A,'k','LineWidth',3); hold on; grid on;
plot(freq,Acb,'r','LineWidth',3); hold on; grid on;
plot(freq,Acb2,'g','LineWidth',2); hold on; grid on;
    title('Übertragungsverhalten')
xlabel('Frequenz f in [Hz]')
ylabel('Übertragungsfunktion x/F')
legend({'Original','CB-1Mod','CB-2Mod'},'Location','NorthEast')
ylim([0 1])

%
% Verschiebungen
figure('name','Verschiebungen','Position',[100 200 1600 200]);
% Originalgitter
plot(U0,V0,'-ok','LineWidth',2,'MarkerSize',10); hold on; grid on;
% Verschiebungsfeld Original
plot(U1,V0,'*r','LineWidth',2,'MarkerSize',13); hold on; grid on;
% Verschiebungsfeld GUY-2
% plot(skal*Ugu,0,'og','LineWidth',2,'MarkerSize',12); hold on; grid
on;
% Verschiebungsfeld GUY-3
U1=(0:2)'*2*L;
Ugup=U1+Ugu3;
plot(skal*U1+Ugu3,0,'ob','LineWidth',2,'MarkerSize',10); hold on; grid
on;
    title('Verschiebung')
xlabel('Koordinatenposition')
ylabel('')
legend({'Ursprung','Original','GUYAN-3'},'Location','EastOutside')
xlim([-10 90])

```