



Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg  
*Hamburg University of Applied Sciences*

**Masterarbeit**

**Studiendepartment Fahrzeugtechnik und Flugzeugbau**

**Dreidimensionale numerische Untersuchung der Spannungsfelder in zylindrisch gekrümmten Laminaten unter statischer Last unter Berücksichtigung interlaminarer Randspannungen**

**Mejdi Yousfi**

**11. April 2013**

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg  
Fakultät Technik und Informatik  
Department Fahrzeugtechnik und Flugzeugbau  
Berliner Tor 9  
20099 Hamburg

in Zusammenarbeit mit:  
Sogeti High Tech GmbH  
Karnapp 25  
21079 Hamburg



Verfasser: Mejdj Yousfi  
Abgabedatum: 11. April 2013

1. Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Eckart Nast
2. Prüfer: PD Dr.-Ing. habil. Christian Mittelstedt

Industrieller Betreuer: PD Dr.-Ing. habil. Christian Mittelstedt

## Erklärung

Ich versichere, dass ich diese Masterarbeit selbständig und ohne fremde Hilfe verfasst und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Wörtlich oder dem Sinn nach aus anderen Werken entnommene Stellen sind unter Angabe der Quellen kenntlich gemacht.

---

Ort/Datum

---

Unterschrift des Verfassers

## Vorwort

Die vorliegende Masterarbeit entstand im Rahmen meines Studiums als Prüfungsleistung an der Hochschule für angewandte Wissenschaften Hamburg und wurde in Zusammenarbeit mit Sogeti High Tech GmbH erstellt.

Mein ganz besonderer Dank gilt meinen beiden Prüfern Herrn PD Dr.-Ing. habil. Christian Mittelstedt und Herrn Prof. Dr.-Ing. Eckart Nast, die mich in meiner Arbeit immer unterstützt haben und durch deren Hilfe diese Arbeit in dieser Form überhaupt erst möglich wurde.

Besonders bedanken möchte ich mich bei dem Herrn Dr.-Ing. Christian Heinrich für die Betreuung während der Bearbeitung meiner Masterarbeit, sowie den fachlichen Gesprächen und Hilfestellungen bei Problemfällen in Bezug auf Abaqus und Python.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Nomenklatur</b>	<b>VII</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>XII</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>XIII</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Allgemeines . . . . .	1
1.2 Themenstellung der Arbeit . . . . .	2
<b>2 Theoretische Grundlagen</b>	<b>3</b>
2.1 Grundlagen der linearen Elastizitätstheorie . . . . .	3
2.1.1 Spannungszustand und Gleichgewicht . . . . .	3
2.1.2 Kinematik . . . . .	5
2.1.3 Das verallgemeinerte Hookesches Gesetz . . . . .	6
2.2 Klassische Laminattheorie . . . . .	9
2.2.1 Nomenklatur . . . . .	9
2.2.2 Voraussetzungen . . . . .	11
2.2.3 Konstitutive Gleichungen . . . . .	14
2.2.4 Koppeleffekte . . . . .	16
2.2.5 Spezielle Laminare . . . . .	16
2.3 Grundlagen der Finite-Elemente Methode . . . . .	19
2.4 Der Randeffect in ebenen Laminaten . . . . .	24
2.4.1 Der Laminat-Randeffect am Beispiel eines Kreuzverbundes . . . . .	24
2.4.2 Der Laminat-Randeffect am Beispiel eines Winkelverbundes . . . . .	25
2.5 Zwei dimensionale Probleme in Polarkoordinaten . . . . .	27
2.5.1 Symmetrischer Spannungsverlauf . . . . .	28
2.5.2 Kreisebogenscheibe unter reiner Biegung (Isotrop, Anisotrop/Orthotrop, Orthotrop geschichtet) . . . . .	29
<b>3 Modellierung</b>	<b>35</b>
<b>4 Die Konvergenzstudie und die Validierung</b>	<b>40</b>
4.1 FEM-Modell . . . . .	40
4.2 Validierung der Spannungen im Querschnitt . . . . .	42
4.3 Konvergenzstudie . . . . .	44
<b>5 Lösungsabschnitt</b>	<b>52</b>
5.1 Kreuzlaminat $[0^\circ/90^\circ]$ . . . . .	52
5.2 Winkellaminat $[\pm 45^\circ]$ . . . . .	58
5.3 Parameterstudie . . . . .	66
5.3.1 Winkellaminare (Angle ply) $[\pm \alpha^\circ]$ . . . . .	66
5.3.2 Untersuchung der Auswirkung der Krümmungsverhältnisse auf die Randeffecte. . . . .	80
5.3.3 Untersuchung der Auswirkung eines symmetrischen Lagenaufbaus auf die Randeffecte . . . . .	97
5.3.4 Untersuchung der Randeffecten in quasi-isotropen Laminaten . . . . .	118

---

<b>6 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>130</b>
6.1 Zusammenfassung . . . . .	130
6.2 Ausblick . . . . .	131
<b>Literatur</b>	<b>132</b>
<b>A Python-Skript zur Modellierung eines gekrümmten <math>[\pm 45^\circ]</math> Winkellaminats unter Biegebelastung. (Preprocessing-Skript)</b>	<b>134</b>
<b>B Python-Skript zur Aufbereitung der Ergebnisse (Postprocessing Skript)</b>	<b>141</b>

## Nomenklatur

### Abkürzungen

$3D$	Dreidimensional
$FEM$	Finite-Elemente-Methode
$KLT$	Klassische Laminattheorie
$MPC$	Multi-Point-Constraints
$PvV$	Prinzip der virtuellen Verrückungen
$VCCT$	Virtual Crack Closure Technique

### Griechische Formelzeichen

$\alpha$	Faser-Orientierungswinkel	[°]
$\beta$	Krümmung	[-]
$\gamma_{ij}^0$	Gleitung der Laminatmittelebene mit $i, j = x, y, z$	[-]
$\gamma_{ij}$	Gleitung mit $i, j = x, y, z$ bzw. $i, j = r, \varphi, z$	[-]
$\kappa_{ii}^0$	Verkrümmung der Laminatmittelebene mit $i = x, y$	[-]
$\kappa_{ij}^0$	Verdrillung der Laminatmittelebene mit $i, j = x, y$	[-]
$\nu_{ij}$	Querdehnungszahl mit $i, j = x, y, z$ bzw. $i, j = r, \varphi, z$	[-]
$\omega$	Der Öffnungswinkel des Bauteils	[°]
$\psi_i$	Biegewinkel mit $i, j = x, y$	[°]
$\sigma_{ii}$	Normalspannung mit $i = x, y, z$ bzw. $i = r, \varphi, z$	[MPa]
$\tau_{ij}$	Schubspannung mit $i, j = x, y, z$ bzw. $i, j = r, \varphi, z$	[MPa]
$\varepsilon_{ii}^0$	Dehnung der Laminatmittelebene mit $i = x, y, z$ bzw. $i = r, \varphi, z$	[-]
$\varepsilon_{ii}$	Dehnung mit $i = x, y, z$ bzw. $i = r, \varphi, z$	[-]

### Lateinische Formelzeichen

$A, B, C, D$	Konstanten in der Airysche Spannungsfunktion	[-]
$b$	Bauteilbreite	[mm]
$E_{ii}$	Elastizitätsmodule mit $i = x, y, z$ bzw. $i = r, \varphi, z$	[MPa]
$F(r, \varphi)$	Airysche Spannungsfunktion im zylindrischen Koordinatensystem	

$f_i$	Volumenkräfte mit $i = x, y, z$ bzw. $i = r, \varphi, z$	
$G_{ij}$	Schubmodule mit mit $i = x, y, z$ bzw. $i = r, \varphi, z$	[MPa]
$h$	Laminatdicke	[mm]
$M$	Biegemoment	[Nmm]
$M_{ii}^0$	Laminat-Schnittmomente mit $i = x, y$	[N $\frac{\text{mm}}{\text{mm}}$ ]
$N$	Anzahl der Einzelschichten eines Laminats	[-]
$N_{ii}^0$	Laminat-Schnittkräfte mit $i = x, y$	[ $\frac{\text{N}}{\text{mm}}$ ]
$r$	Radius	[mm]
$r, \varphi, z$	Koordinaten des zylindrischen Koordinatensystem	[-]
$r_a$	Außenradius des Bauteils	[mm]
$r_i$	Innenradius des Bauteils	[mm]
$r_m$	mittlerer Radius des Bauteils	[mm]
$s, k$	Anisotropiewerte	[-]
$t$	Bauteildicke	[mm]
$t^*$	normierte Bauteildicke	[-]
$t_s$	Einzelschicht-Dicke	[mm]
$u$	Verschiebung eines Punktes parallel zur $x$ -Achse bzw. $r$ -Achse	[mm]
$u^0, v^0, w^0$	Verschiebungen der Laminatmittelebene	[mm]
$v$	Verschiebung eines Punktes parallel zur $y$ -Achse bzw. $\varphi$ -Achse	[mm]
$w$	Verschiebung in $z$ -Richtung	[mm]
$W_a$	äußere Arbeit	[J]
$W_i$	innere Arbeit	[J]
$x, y, z$	Koordinaten des kartesischen Koordinatensystem	[-]
$z_{k-1}, z_k$	$z$ Koordinate um die Schicht $k$ zu lokalisieren	[mm]

## Matrizen und Vektoren

$\underline{\underline{Q}}$	reduzierte Steifigkeitsmatrix	[MPa]
$\hat{u}_{el}$	Knotenverschiebungsvektor eines Elements	[mm]
$\underline{\underline{\kappa}}^0$	Verkrümmungen und Verdrillungen der Laminatmittelebene	[-]

$\underline{\psi}$	Neigungsvektor	[-]
$\underline{\sigma}$	Spannungsvektor	[MPa]
$\underline{\underline{\sigma}}$	Spannungstensor	[MPa]
$\underline{\underline{\varepsilon}}$	Verzerrungstensor	[-]
$\underline{\underline{A}}$	MembranstEIFIGKEITSMATRIX	$[\frac{N}{mm}]$
$\underline{\underline{B}}$	KoppelstEIFIGKEITSMATRIX	[N]
$\underline{\underline{B}}_{el}$	Matrix mit kinematischer Zusammenhänge	
$\underline{\underline{C}}$	StEIFIGKEITSMATRIX	[MPa]
$\underline{\underline{C}}_{el}$	StEIFIGKEITSMATRIX eines Elements im Elementkoordinatensystem	[MPa]
$\underline{\underline{D}}$	BiegestEIFIGKEITSMATRIX	[Nmm]
$\underline{\underline{F}}_{ges}$	Knotenkraftvektor der Gesamtstruktur	[MPa]
$\underline{\underline{K}}_{ges}$	GesamtstEIFIGKEITSMATRIX	[MPa]
$\underline{\underline{K}}_{el}$	ElementstEIFIGKEITSMATRIX im globalen Koordinatensystem	[MPa]
$\underline{\underline{N}}_{el}$	Matrix mit Ansatzfunktionen	
$\underline{\underline{S}}$	Nachgiebigkeitmatrix	$[\frac{1}{MPa}]$
$\underline{\varepsilon}^0$	Verzerrungsvektor der Laminatmittelebene	[-]
$\underline{\varepsilon}$	Verzerrungsvektor	[-]
$\underline{f}$	Volumenkraftvektor	$[\frac{N}{mm^3}]$
$\underline{F}_{el}$	Knotenlasten eines Elements	[N]
$\underline{u}_0$	Verschiebungsvektor der Laminatmittelebene	[mm]
$\underline{u}$	Verschiebungsvektor	[mm]

## Symbole, Operatoren und Indices

$\delta$	Kennzeichnung einer virtuellen Größe
$(\dots)^T$	Kennzeichnung einer transponierten Matrix
$[\dots]_s$	Kennzeichnung eines symmetrischen Lagenaufbaus
$\partial$	Symbol für partielle Differentiation
$\Delta$	Laplace-Operator
$d$	Symbol für die Differentiation einer Funktion mit einer Variablen
$j$	Inkrement

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Zylindrisch gekrümmtes Laminat . . . . .	2
2.1	Spannungskomponenten im kartesischen Koordinatensystem . . . . .	3
2.2	Spannungskomponenten in einem zylindrischen Körper . . . . .	4
2.3	Explosionszeichnung eines Laminats [11] . . . . .	10
2.4	Schnitt durch ein Laminat [11] . . . . .	10
2.5	Kinematik eines Laminats nach der Klassischen Laminattheorie [11] . . . . .	13
2.6	Schnittkräfte und-momente eines Laminates [11] . . . . .	14
2.7	Mögliche Verformungszustände [11] . . . . .	16
2.8	Dreidimensionaler Festkörper unter Beanspruchung [2] . . . . .	19
2.9	Infinitesimales Volumenelement unter Beanspruchung [2] . . . . .	20
2.10	Scheibenelement [2] . . . . .	21
2.11	Der Laminat-Randeffekt am Beispiel eines $[0^\circ/90^\circ]_s$ Kreuzverbundes [11] . . . . .	25
2.12	Der Laminat-Randeffekt am Beispiel eines $[\pm 45^\circ]_s$ Winkelverbundes [11] . . . . .	26
2.13	Zylindrisch gekrümmte Scheibe unter reine Biegung [5] . . . . .	30
2.14	Zylindrisch gekrümmte, orthotrop geschichtete Scheibe unter reine Biegung [7] . . . . .	33
3.1	Schematische Darstellung der Geometrieparameter . . . . .	36
3.2	Vernetzungstechnik: links gleichmäßige Vernetzung , rechts Bias Vernetzung . . . . .	37
3.3	C3D8 Element-links, C3D20 Element-rechts . . . . .	38
3.4	Lagerung des gekrümmten Laminats . . . . .	39
3.5	Lasteinleitung über Kinematic Coupling . . . . .	39
4.1	Auswertungspositionen über dem Interface (oben), Auswertungspositionen über dem Querschnitt (unten) . . . . .	41
4.2	Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Normalspannung $\sigma_{rr}$ über dem Querschnitt im Inneren des Laminats . . . . .	42
4.3	Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Umfangsspannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ über dem Querschnitt im Inneren des Laminats . . . . .	43
4.4	Verlauf der Normalspannung $\sigma_{rr}$ im Querschnitt für unterschiedliche Netzfeinheit . . . . .	44
4.5	Verlauf der Umfangsspannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ im Querschnitt für unterschiedliche Netzfeinheit . . . . .	45
4.6	Verlauf der Normalspannung $\sigma_{rr}$ entlang des Interfaces eines $[0^\circ/90^\circ]$ Laminats für unterschiedliche Netzfeinheit . . . . .	46
4.7	Verlauf der Umfangsspannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ entlang der Breite in der $0^\circ$ Schicht in einem Abstand von 0.02mm vom Interface für unterschiedliche Netzfeinheit . . . . .	46
4.8	Verlauf der Umfangsspannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ entlang der Breite in der $90^\circ$ Schicht in einem Abstand von 0.02mm vom Interface für unterschiedliche Netzfeinheit . . . . .	47
4.9	Verlauf der axialen Spannung $\sigma_{zz}$ entlang der Breite in der $0^\circ$ Schicht in einem Abstand von 0.02mm vom Interface für unterschiedliche Netzfeinheit . . . . .	47
4.10	Verlauf der Axialspannung $\sigma_{zz}$ entlang der Breite in der $90^\circ$ Schicht in einem Abstand von 0.02mm vom Interface für unterschiedliche Netzfeinheit . . . . .	48
4.11	Verlauf der Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ entlang der Breite in der $0^\circ$ Schicht in einem Abstand von 0.02mm vom Interface für unterschiedliche Netzfeinheit . . . . .	48
4.12	Verlauf der Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ entlang der Breite in der $90^\circ$ Schicht in einem Abstand von 0.02mm vom Interface für unterschiedliche Netzfeinheit . . . . .	49

4.13	Verlauf der Schubspannung $\tau_{rz}$ entlang der Breite in der $0^\circ$ Schicht in einem Abstand von 0.02mm vom Interface für unterschiedliche Netzfeinheit . . .	49
4.14	Verlauf der Schubspannung $\tau_{rz}$ entlang der Breite in der $90^\circ$ Schicht in einem Abstand von 0.02mm vom Interface für unterschiedliche Netzfeinheit	50
4.15	Verlauf der Schubspannung $\tau_{\varphi z}$ entlang der Breite in der $0^\circ$ Schicht in einem Abstand von 0.02mm vom Interface für unterschiedliche Netzfeinheit . . .	50
4.16	Verlauf der Schubspannung $\tau_{\varphi z}$ entlang der Breite in der $0^\circ$ Schicht in einem Abstand von 0.02mm vom Interface für unterschiedliche Netzfeinheit . . .	51
5.1	Verlauf der Normalspannung $\sigma_{rr}$ über dem Interface eines $[0^\circ/90^\circ]$ Laminats	52
5.2	Verlauf der Umfangsspannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ entlang der Breite in der $0^\circ$ Schicht in einem Abstand von 0.02mm vom Interface . . . . .	53
5.3	Verlauf der Umfangsspannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ entlang der Breite in der $90^\circ$ Schicht in einem Abstand von 0.02mm vom Interface . . . . .	53
5.4	Verlauf der axialen Spannung $\sigma_{zz}$ entlang der Breite in der $0^\circ$ Schicht in einem Abstand von 0.02mm vom Interface . . . . .	54
5.5	Verlauf der axialen Spannung $\sigma_{zz}$ entlang der Breite in der $90^\circ$ Schicht in einem Abstand von 0.02mm vom Interface . . . . .	54
5.6	Verlauf der Schubspannung $\tau_{rz}$ entlang der Breite in der $0^\circ$ Schicht in einem Abstand von 0.02mm vom Interface . . . . .	55
5.7	Verlauf der Schubspannung $\tau_{rz}$ entlang der Breite in der $90^\circ$ Schicht in einem Abstand von 0.02mm vom Interface . . . . .	55
5.8	Verlauf der Schubspannung $\tau_{\varphi z}$ entlang der Breite in der $0^\circ$ Schicht in einem Abstand von 0.02mm vom Interface . . . . .	56
5.9	Verlauf der Schubspannung $\tau_{\varphi z}$ entlang der Breite in der $90^\circ$ Schicht in einem Abstand von 0.02mm vom Interface . . . . .	56
5.10	Verlauf der Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ entlang der Breite in der $0^\circ$ Schicht in einem Abstand von 0.02mm vom Interface . . . . .	57
5.11	Verlauf der Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ entlang der Breite in der $90^\circ$ Schicht in einem Abstand von 0.02mm vom Interface . . . . .	57
5.12	Spannungsfeld in ein $[0^\circ/90^\circ]$ -gekrümmtes Laminat unter reiner Biegung $M = 1 \text{ Nmm}$ im Intervall $0 \leq r \leq 0.25$ und $0 \leq z \leq 2$ . . . . .	58
5.13	Verlauf der Normalspannung $\sigma_{rr}$ entlang des Interfaces in ausgewählte Positionen längs des Umfangs . . . . .	60
5.14	Verlauf der Spannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ über dem Querschnitt im Inneren eines $[\pm 45^\circ]$ Winkellaminats . . . . .	60
5.15	Verlauf der intralaminaren Schubspannung $\tau_{\varphi z}$ über dem Querschnitt im Inneren eines $[\pm 45^\circ]$ Winkellaminats . . . . .	61
5.16	Verlauf der Schubspannung $\tau_{\varphi z}$ entlang der Breite in der $-45^\circ$ Schicht in einem Abstand von 0.02 mm vom Interface . . . . .	61
5.17	Verlauf der interlaminaren Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ über dem Interface eines $[\pm 45^\circ]$ Laminats . . . . .	62
5.18	Verlauf der Schubspannung $\tau_{rz}$ entlang der Breite in der $+45^\circ$ Schicht in einem Abstand von 0.01mm vom Interface . . . . .	62
5.19	Verlauf der Spannung $\sigma_{zz}$ über dem Querschnitt im Inneren eines $[\pm 45^\circ]$ Winkellaminats . . . . .	63
5.20	Verlauf der Spannung $\sigma_{zz}$ entlang der Breite in der $-45^\circ$ Schicht in einem Abstand von 0.02 mm vom Interface . . . . .	63

5.21	Verlauf der Radialspannung $\sigma_{rr}$ über dem Interface in verschiedenen Auswertungspositionen . . . . .	64
5.22	Spannungsfeld in einem $[\pm 45^\circ]$ -gekrümmten Laminat unter reiner Biegung $M = 1 \text{ Nmm}$ im Intervall $0 \leq r \leq 0.25$ und $0 \leq z \leq 2$ . . . . .	65
5.23	$\tau_{r\varphi_{max}}$ in einem Winkellaminat in Abhängigkeit des Orientierungswinkels . . . . .	67
5.24	Schubkopplungsterme in Abhängigkeit des Lagenwinkels . . . . .	67
5.25	Verlauf der interlaminaren Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ über dem Interface für unterschiedliche Winkellamine . . . . .	70
5.26	Verlauf der interlaminaren Schubspannung $\tau_{rz}$ entlang des Interfaces für unterschiedliche Winkellamine . . . . .	72
5.27	Verlauf der interlaminaren Spannung $\sigma_{rr}$ über dem Querschnitt für unterschiedliche Winkellamine . . . . .	74
5.28	Verlauf der interlaminaren Spannung $\sigma_{rr}$ entlang des Interfaces für unterschiedliche Winkellamine . . . . .	76
5.29	Verlauf der intralaminaren Spannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ über dem Querschnitt für unterschiedliche Winkellamine . . . . .	78
5.30	Verlauf der intralaminaren Spannung $\sigma_{zz}$ entlang der Breite in einem Abstand von $\pm 0.02 \text{ mm}$ vom Interface . . . . .	79
5.31	Verlauf der Normalspannung $\sigma_{rr}$ über dem Interface eines $[\pm 45^\circ]$ Laminats für verschiedene Krümmungen . . . . .	82
5.32	Verlauf der Normalspannung $\sigma_{rr}$ über dem Interface eines $[\pm 45^\circ]$ Laminats für verschiedene Krümmungen . . . . .	83
5.33	Verlauf der Normalspannung $\sigma_{rr}$ über dem Querschnitt im Inneren eines $[\pm 45^\circ]$ Laminats für verschiedene Krümmungen . . . . .	83
5.34	Verlauf der interlaminaren Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ über dem Interface für verschiedene Krümmungen . . . . .	84
5.35	Verlauf der interlaminaren Schubspannung $\tau_{rz}$ über dem Interface für verschiedene Krümmungen . . . . .	85
5.36	Verlauf der interlaminaren Schubspannung $\tau_{\varphi z}$ über dem Querschnitt im Inneren des Laminats für verschiedene Krümmungen . . . . .	86
5.37	Verlauf der intralaminaren Schubspannung $\tau_{\varphi z}$ über dem Querschnitt im Inneren des Laminats für verschiedene Krümmungen . . . . .	87
5.38	Verlauf der intralaminaren Schubspannung $\tau_{\varphi z}$ über die Breite in einem Abstand von $\pm 0.02 \text{ mm}$ für unterschiedliche Krümmungen . . . . .	88
5.39	Verlauf der Spannungskomponente $\sigma_{zz}$ über dem Querschnitt im Inneren des Laminats für unterschiedliche Krümmungen . . . . .	89
5.40	Verlauf der Spannungskomponente $\sigma_{zz}$ über dem Querschnitt im Inneren des Laminats für unterschiedliche Krümmungen . . . . .	90
5.41	Verlauf der Spannung $\sigma_{zz}$ über die Breite in einem Abstand von $\pm 0.02 \text{ mm}$ vom Interface für unterschiedliche Krümmungen . . . . .	91
5.42	Verlauf der Normalspannung $\sigma_{rr}$ über dem Interface für verschiedene Krümmungen . . . . .	93
5.43	Verlauf der Normalspannung $\sigma_{rr}$ über dem Interface für verschiedene Krümmungen . . . . .	94
5.44	Verlauf der Normalspannung $\sigma_{rr}$ über dem Querschnitt im Inneren eines $[0^\circ/90^\circ]$ Laminats für verschiedene Krümmungen . . . . .	94
5.45	Verlauf der Spannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ über dem Querschnitt im Inneren eines $[0^\circ/90^\circ]$ Laminats für verschiedene Krümmungen . . . . .	95

5.46	Verlauf der interlaminaren Schubspannung $\tau_{rz}$ in einem Abstand von $0.02\text{ mm}$ unterhalb des Interfaces für verschiedene Krümmungen . . . . .	95
5.47	Verlauf der interlaminaren Schubspannung $\tau_{rz}$ in einem Abstand von $0.02\text{ mm}$ oberhalb des Interfaces für verschiedene Krümmungen . . . . .	96
5.48	Verlauf der Spannung $\sigma_{zz}$ über dem Querschnitt im Inneren eines $[0^\circ/90^\circ]$ Laminats für verschiedene Krümmungen . . . . .	96
5.49	Verlauf der Schälspannung $\sigma_{rr}$ über dem Interface-1 eines $[0^\circ/90^\circ]_s$ Kreuzlaminats . . . . .	98
5.50	Verlauf der Schälspannung $\sigma_{rr}$ über dem Interface-2 eines $[0^\circ/90^\circ]_s$ Kreuzlaminats . . . . .	99
5.51	Verlauf der Schälspannung $\sigma_{rr}$ über dem Interface-3 eines $[0^\circ/90^\circ]_s$ Kreuzlaminats . . . . .	99
5.52	Verlauf der Schälspannung $\sigma_{rr}$ über dem Querschnitt an den Rändern eines $[0^\circ/90^\circ]_s$ Kreuzlaminats . . . . .	100
5.53	Gegenüberstellung der Verläufe von $\sigma_{rr}$ über dem Interface in einem $[0^\circ/90^\circ]$ - und $[0^\circ/90^\circ]_s$ Laminat . . . . .	100
5.54	Verlauf der Schälspannung $\sigma_{rr}$ über dem Querschnitt im Inneren des $[0^\circ/90^\circ]_s$ Laminats . . . . .	101
5.55	Verlauf der Umfangsspannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ über dem Querschnitt im Inneren des $[0^\circ/90^\circ]_s$ Laminats . . . . .	101
5.56	Verlauf der interlaminaren Schubspannung $\tau_{rz}$ über die Breite in einem Abstand von $0.02\text{ mm}$ unterhalb von Interface-1 . . . . .	102
5.57	Verlauf der interlaminaren Schubspannung $\tau_{rz}$ über die Breite in einem Abstand von $0.04\text{ mm}$ oberhalb von Interface-1 . . . . .	102
5.58	Verlauf der interlaminaren Schubspannung $\tau_{rz}$ über Interface-2 . . . . .	103
5.59	Verlauf der interlaminaren Schubspannung $\tau_{rz}$ über die Breite in einem Abstand von $0.02\text{ mm}$ unterhalb von Interface-3 . . . . .	103
5.60	Verlauf der interlaminaren Schubspannung $\tau_{rz}$ über die Breite in einem Abstand von $0.02\text{ mm}$ oberhalb von Interface-3 . . . . .	104
5.61	Gegenüberstellung der Verläufe von $\tau_{rz}$ über die Breite in einem $[0^\circ/90^\circ]$ - und $[0^\circ/90^\circ]_s$ Laminat . . . . .	104
5.62	Verlauf der Spannung $\sigma_{zz}$ über dem Querschnitt an den Rändern eines $[0^\circ/90^\circ]_s$ Kreuzlaminats . . . . .	105
5.63	Verlauf der Spannung $\tau_{rz}$ über dem Querschnitt an den Rändern eines $[0^\circ/90^\circ]_s$ Kreuzlaminats . . . . .	105
5.64	Spannungsfeld in einem $[0^\circ/90^\circ]_s$ -gekrümmten Laminat unter reiner Biegung $M = 1\text{ Nmm}$ , bei $\varphi = 45^\circ$ im Intervall $0 \leq r \leq 0.5$ und $0 \leq z \leq 2$ . . . . .	106
5.65	Verlauf der Schälspannung $\sigma_{rr}$ über dem Interface-1 eines $[\pm 45^\circ]_s$ Winkelaminats . . . . .	108
5.66	Verlauf der Schälspannung $\sigma_{rr}$ über dem Interface-2 eines $[\pm 45^\circ]_s$ Winkelaminats . . . . .	109
5.67	Verlauf der Schälspannung $\sigma_{rr}$ über dem Interface-3 eines $[\pm 45^\circ]_s$ Winkelaminats . . . . .	110
5.68	Verlauf der Schälspannung $\sigma_{rr}$ über dem Querschnitt an den Rändern eines $[\pm 45^\circ]_s$ Winkellaminats . . . . .	111
5.69	Verlauf der interlaminaren Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ über dem Interface-1 eines $[\pm 45^\circ]_s$ Winkellaminats . . . . .	112

5.70	Verlauf der interlaminaren Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ über dem Interface-2 eines $[\pm 45^\circ]_s$ Winkellaminats . . . . .	113
5.71	Verlauf der interlaminaren Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ über dem Interface-3 eines $[\pm 45^\circ]_s$ Winkellaminats . . . . .	114
5.72	Verlauf der interlaminaren Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ über dem Querschnitt an den Rändern eines $[\pm 45^\circ]_s$ Winkellaminats . . . . .	115
5.73	Verlauf der Spannung $\sigma_{zz}$ über dem Querschnitt am Rand eines $[\pm 45^\circ]_s$ Winkellaminats . . . . .	115
5.74	Verlauf der Schubspannung $\tau_{rz}$ über dem Querschnitt an den Rändern eines $[\pm 45^\circ]_s$ Winkellaminats . . . . .	116
5.75	Verlauf der Schubspannung $\tau_{\varphi z}$ über dem Querschnitt am Rand eines $[\pm 45^\circ]_s$ Winkellaminats . . . . .	116
5.76	Spannungsfeld in einem $[\pm 45^\circ]_s$ -gekrümmten Laminat unter reiner Biegung $M = 1 \text{ Nmm}$ , bei $\varphi = 45^\circ$ im Intervall $0 \leq r \leq 0.5$ und $0 \leq z \leq 2$ . . . . .	117
5.77	Verlauf der Normalspannung $\sigma_{rr}$ über dem Querschnitt an den Rändern eines $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]$ quasi-isotropes Laminats . . . . .	119
5.78	Verlauf der Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ über dem Querschnitt an den Rändern eines $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]$ quasi-isotropen Laminats . . . . .	119
5.79	Verlauf der interlaminaren Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ über dem Interface-1 eines $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]$ quasi-isotropen Laminats . . . . .	120
5.80	Verlauf der interlaminaren Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ über dem Interface-2 eines $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]$ quasi-isotropen Laminats . . . . .	121
5.81	Verlauf der interlaminaren Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ über dem Interface-3 eines $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]$ quasi-isotropen Laminats . . . . .	122
5.82	Verlauf der Schubspannung $\tau_{rz}$ über die Breite in einem Abstand von $\pm 0.01$ vom Interface-3 eines $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]$ quasi-isotropen Laminats . . . . .	122
5.83	Verlauf der interlaminaren Schubspannung $\tau_{rz}$ über dem Querschnitt an den Rändern eines $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]$ quasi-isotropen Laminats . . . . .	123
5.84	Verlauf der Schubspannung $\tau_{\varphi z}$ über dem Querschnitt am Rand eines $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]$ quasi-isotropen Laminats . . . . .	123
5.85	Verlauf der Spannung $\sigma_{zz}$ über dem Querschnitt am Rand eines $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]$ quasi-isotropen Laminats . . . . .	124
5.86	Spannungsfeld in einem $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]$ -gekrümmten Laminat unter reiner Biegung $M = 1 \text{ Nmm}$ , bei $\varphi = 45^\circ$ im Intervall $0 \leq r \leq 0.5$ und $0 \leq z \leq 2$ . . . . .	125
5.87	Verlauf der Normalspannung $\sigma_{rr}$ über dem Querschnitt an den Rändern eines $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]_s$ quasi-isotropen Laminats . . . . .	126
5.88	Verlauf der Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ über dem Querschnitt an den Rändern eines $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]_s$ quasi-isotropen Laminats . . . . .	127
5.89	Verlauf der Schubspannung $\sigma_{zz}$ über dem Querschnitt am Rand eines $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]_s$ quasi-isotropen Laminats . . . . .	127
5.90	Verlauf der interlaminaren Schubspannung $\tau_{rz}$ über dem Querschnitt an den Rändern eines $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]_s$ quasi-isotropen Laminats . . . . .	128
5.91	Verlauf der interlaminaren Schubspannung $\tau_{\varphi z}$ über dem Querschnitt am Rand eines $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]_s$ quasi-isotropen Laminats . . . . .	128
5.92	Spannungsfeld in einem $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]_s$ -gekrümmten Laminat unter reiner Biegung $M = 1 \text{ Nmm}$ , bei $\varphi = 45^\circ$ im Intervall $0 \leq r \leq 1$ und $0 \leq z \leq 2$ . . . . .	129

## Tabellenverzeichnis

3.1	Werkstoffdaten . . . . .	38
4.1	Materialparameter für die $[0^\circ/90^\circ]$ gekrümmte Laminat- Scheibe . . . . .	43
4.2	Geometrieparameter für die $[0^\circ/90^\circ]$ gekrümmte Laminat- Scheibe . . . . .	43
5.1	Variation des Lagenaufbaus für ein Winkellaminat . . . . .	66
5.2	Die maximalen interlaminaren Spannungen in einem $[\pm 45^\circ]$ Laminat in Abhängigkeit von den Krümmungsverhältnissen . . . . .	80
5.3	Die maximalen interlaminaren Spannungen in einem $[0^\circ/90^\circ]$ Laminat in Abhängigkeit von den Krümmungsverhältnissen . . . . .	92
5.4	Position der Interfaces . . . . .	97
5.5	Quasi-isotope Laminat . . . . .	118

# 1 Einleitung

## 1.1 Allgemeines

Im Leichtbau und speziell in der Luftfahrtindustrie werden Verbundwerkstoffe in Form von sog. faserverstärkten Kunststoffen zunehmend eingesetzt. Dabei werden Fasern in einem Matrixmaterial eingebettet, oft werden sie parallel zu einander angeordnet, so dass eine unidirektionalverstärkte (UD-) Schicht entsteht. Diese UD- Schichten können zu Mehrschichtverbunden (Laminaten) zusammengesetzt werden. Der Anreiz für die Verwendung solcher Materialien liegt in dem mechanischen Verhalten, das eine hohe Steifigkeit und Festigkeit bei einer sehr geringen Dichte garantiert. Außerdem kann man sie gezielt durch die Kombinationen der Auslegungsparameter für die gewünschte Aufgabenstellung zuschneiden und so die benötigten Eigenschaften erzielen. Durch die Faserorientierungen der Schichten und den Lagenaufbau ist es möglich die Festigkeits- und Steifigkeitseigenschaften so zu beeinflussen, dass sie die aufgebrachte Last optimal abtragen.

Mehrschichtverbunde haben den Nachteil, dass sie besonders delaminationsgefährdet sind, d.h. unter bestimmten Voraussetzungen lösen sich die Schichten von einander ab. Diese Versagensart wird im Wesentlichen durch interlaminare Spannungen zwischen den Schichten hervorgerufen. Sie können u.a. dort entstehen, wo ein schlagartiger Wechsel in Material und/oder Geometrie stattfindet, z.b. im Nahbereich von freien Rändern, Löchern... u.s.w. Sie können singuläre Werte annehmen und infolgedessen entstehen Delaminationen, die zu Rissen heranwachsen können.

Rand-Delaminationen in Composite-Werkstoffen sind eines der Kriterien für die Verlässlichkeit von Strukturen. Dieses Laminat Versagen wird durch die interlaminaren Spannungen im Bereich der freien Rändern (auch bekannt als Randeffect) hervorgerufen. Dieser Sachverhalt ist in gekrümmten Strukturen kaum untersucht worden, dazu kommt noch, dass in solchen Strukturen fernab der freien Rändern ohnehin interlaminare Normalspannungen zu erwarten sind.

## 1.2 Themenstellung der Arbeit

Im Rahmen dieser Masterarbeit soll das dreidimensionale Spannungsfeld gekrümmter orthotrop geschichteter Werkstoffe numerisch untersucht werden. Dabei sollen besonders die interlaminaren Spannungen am Rand und die daraus resultierenden Randeffekte - d. h. potentiell singuläre Spannungskonzentrationen - analysiert werden. Der zu untersuchende Werkstoff ist ein einfach zylindrisch gekrümmtes Laminat, dessen Geometrie einen Viertelzylinder beschreibt (Abb.1.1) und das durch reiner Biegung belastet wird. Im Wesentlichen dient die numerische Untersuchung dem Aufbau eines grundlegenden Verständnisses der Randeffekte mittels der Methode der finiten Elemente. Hierzu wird das Berechnungsprogramm ABAQUS in den Versionen 6.10 bzw. 6.12 verwendet [16]. Im Rahmen dessen wurden für die Parameterstudie mit Hilfe der Programmiersprache Python [17] Skripte für das Pre- und Postprocessing erzeugt.

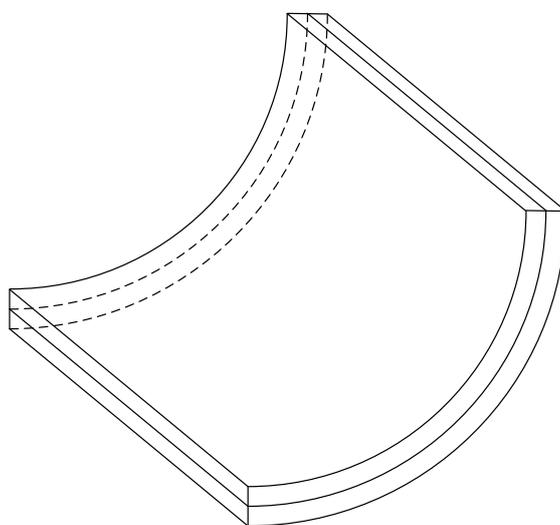


Abbildung 1.1: Zylindrisch gekrümmtes Laminat

Diese Arbeit ist wie folgt gegliedert.

Im zweiten Kapitel werden die Grundlagen der linearen Elastizitätstheorie vorgestellt, weiterhin wird der Randeffect in ebenen Laminaten erläutert. Es werden die Gleichungen hergeleitet, die das Spannungsfeld einer zweidimensionalen, gekrümmten, orthotrop geschichteten Scheibe beschreiben. Diese sollen anschließend dazu dienen, das FE-Modell im Inneren zu validieren. Im dritten Kapitel ist die Vorgehensweise zur Modellierung des Bauteils dargestellt. Im vierten Kapitel erfolgt die Konvergenz- und Validierungsstudie. Das fünfte Kapitel beinhaltet den Lösungsabschnitt, worin auch die Parameterstudie erfolgt. Zunächst beschränkt sich die Analyse der Randeffecte auf Lamine, die aus zwei Lagen bestehen. Zu Beginn wurde der Kreuzverbund  $[0^\circ/90^\circ]$  untersucht, danach der Winkelverbund  $[\pm 45^\circ]$ . Anschließend wurden Winkelverbunde mit einem Lagenaufbau  $[\pm \alpha^\circ]$  analysiert. Zum Schluss wurde der Einfluss der Krümmung auf die Randeffecte in einem  $[0^\circ/90^\circ]$ -sowie in einem  $[\pm 45^\circ]$ -Laminat erörtert. Im nächsten Schritt werden mehrlagige Lamine untersucht. Im Zuge dessen ist der Einfluss der Symmetrie zu erforschen; hierfür ist der symmetrische Kreuz- und Winkelverbund ( $[0^\circ/90^\circ]_s$  bzw.  $[\pm 45^\circ]_s$ ) betrachtet worden. Zum Schluss werden quasi-isotrope Lamine behandelt. Diese beinhalten zum einen den unsymmetrischen Verbund  $[+45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]$  und das daraus hergeleitete symmetrische Laminat  $[+45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ/90^\circ/-45^\circ/0^\circ/+45^\circ]$ .

## 2 Theoretische Grundlagen

### 2.1 Grundlagen der linearen Elastizitätstheorie

In diesem Abschnitt werden die Grundlagen der linearen Elastizitätstheorie erläutert. Zunächst wird der Fall eines dreidimensionalen Körpers sowohl im kartesischen als auch im zylindrischen Koordinatensystem betrachtet. In einem späteren Abschnitt wird dann der Übergang zum ebenen Spannungszustand vorgenommen. Diese Informationen sind den Literaturquellen [1, 2, 9, 11, 13] entnommen worden. Weitere Details sind in den genannten Werken zu finden.

#### 2.1.1 Spannungszustand und Gleichgewicht

Die Spannungskomponenten eines dreidimensionalen Körpers, der durch ein kartesisches Koordinatensystem  $x, y, z$  beschrieben wird (Abb.2.1), lassen sich in die Normalspannungen  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$  sowie in die Schubspannungen  $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}$  unterteilen. Demnach lautet der Spannungstensor:

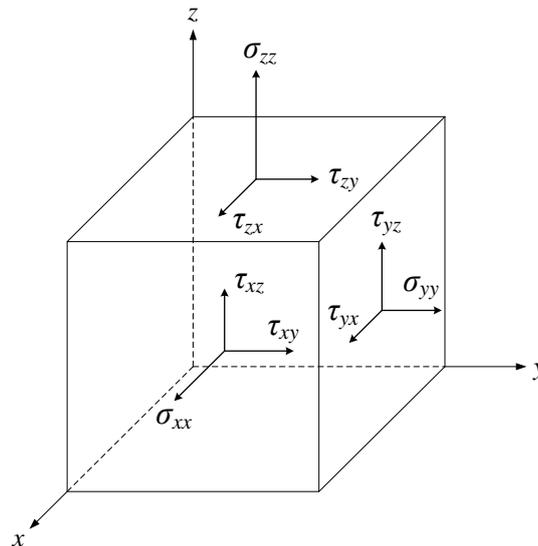


Abbildung 2.1: Spannungskomponenten im kartesischen Koordinatensystem

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Das Momentengleichgewicht um die drei Raumachsen  $x, y, z$  ergibt:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (2.2)$$

Folglich ist der Spannungstensor symmetrisch:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ sym. & & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Für den Fall, dass der dreidimensionale Körper mittels eines zylindrischen Koordinatensystems  $r, \varphi, z$  beschrieben wird (Abb.2.2), ergeben sich die Normalspannungen  $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{zz}$  sowie die Schubspannungen  $\tau_{r\varphi}, \tau_{\varphi r}, \tau_{rz}, \tau_{zr}, \tau_{\varphi z}, \tau_{z\varphi}$ , wobei weiterhin gilt, dass Schubspannungen mit gleichen, aber vertauschten Indizes identisch sein müssen ( $\tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi r}, \tau_{rz} = \tau_{zr}, \tau_{\varphi z} = \tau_{z\varphi}$ ). Der Spannungstensor ist also auch in diesem Falle symmetrisch und kann folgendermaßen angegeben werden:

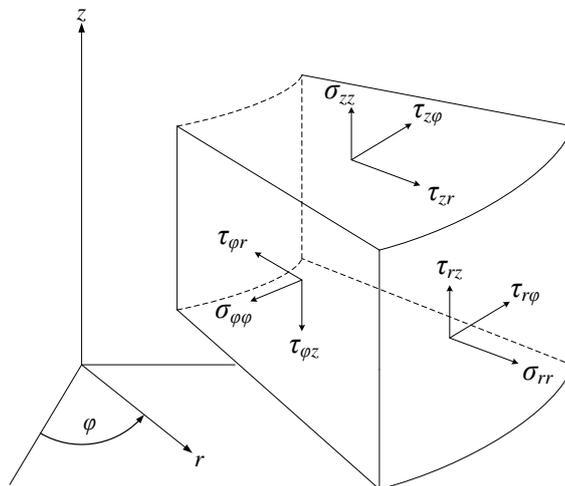


Abbildung 2.2: Spannungskomponenten in einem zylindrischen Körper

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \tau_{r\varphi} & \tau_{rz} \\ & \sigma_{\varphi\varphi} & \tau_{\varphi z} \\ sym. & & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen werden durch das Aufstellen des Kräftegleichgewichtes, unter Berücksichtigung der Volumenkräfte an einem infinitesimalen Schnittelement beschrieben. Im kartesischen Koordinatensystem wird das infinitesimale Schnittelement durch die Abmessungen  $dV = dx dy dz$  gekennzeichnet. Das Kräftegleichgewicht ergibt in  $x, y$  und  $z$  Richtung:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0 \quad (2.7)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen lassen sich unter Verwendung der Indexschreibweise wie folgt darstellen, wobei  $\tau_{ij} = \sigma_{ij}$  ist:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial j} + f_i = 0 \quad (i, j = x, y, z) \quad (2.8)$$

Durch die Indexschreibweise lassen sich viele Formeln in einer kompakten Form darstellen. So können die Komponenten des Spannungstensors (2.4) durch den Ausdruck  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = x, y, z$ ) ersetzt werden. Die Indexschreibweise wird oft im Zusammenhang mit der Summationskonvention gebracht. Diese besagt, dass zu summieren ist wenn in einem Term der gleiche Index doppelt auftritt [5].

Sinngemäß wird im zylindrischen Koordinatensystem das Volumenelement  $dV = r dr d\varphi dz$  betrachtet. Das Kräftegleichgewicht an diesem Element liefert folgende Gleichungen:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + f_r = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \tau_{r\varphi} + f_\varphi = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \tau_{\varphi z} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \tau_{rz} + f_z = 0 \quad (2.11)$$

Im Rahmen dieser Arbeit werden keinerlei Volumenkräfte angesetzt.

### 2.1.2 Kinematik

Der Spannungszustand, der im Inneren einer Struktur herrscht, ruft Deformationen hervor, Verschiebungen und Verzerrungen. Mittels der kinematischen Beziehungen lässt sich der Verzerrungszustand mit den Verschiebungen verknüpfen. Der Verzerrungszustand wird eingeteilt in Normalverzerrungen  $\varepsilon_{ii}$  (Dehnungen) sowie in Schubverzerrungen  $\gamma_{ij}$  (Gleitungen). Im Hinblick auf deren Wirkungen auf ein Bauteil lassen sich folgende Aussagen treffen:

- Dehnungen verändern die Bauteilabmessungen. Folglich verändert sich auch das Volumen des Bauteils, allerdings bewahrt es seine Gestalt. Gleitungen haben Winkeländerungen zufolge, daher verursachen sie eine Änderung der Bauteilgestalt, jedoch bleibt das Bauteilvolumen erhalten.
- Die Verschiebungen eines Punktes im kartesischen Koordinatensystem bezeichnet man mit  $u, v, w$ . Damit werden die Verschiebungen in  $x, y$  und  $z$  Richtung festgelegt. Die Zusammenhänge zwischen den Verschiebungen und Verzerrungen können dann unter der Voraussetzung kleiner Verschiebungen folgendermaßen aufgestellt werden:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.12)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.13)$$

Weiterhin gilt, dass der infinitesimale Verzerrungstensor symmetrisch ist. Dabei wird zwischen zwei Schreibweisen unterschieden, wobei letztere als Ingenieurschreibweise bezeichnet wird:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ sym. & & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ & & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Im zylindrischen Koordinatensystem  $r, \varphi, z$  wird die Verschiebung eines Punktes durch den Vektor  $[u_r \ u_\varphi \ u_z]$  angegeben. Die Verzerrungen sind dann definiert als:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right), \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (2.15)$$

$$\gamma_{r\varphi} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - u_\varphi \right) + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}, \quad \gamma_{\varphi z} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \quad (2.16)$$

### Kompatibilitätsbedingung

Es ist festzuhalten, dass die 6 Verzerrungskomponenten aus den 3 Verschiebungskomponenten eindeutig bestimmbar sind. Wenn aber aus dem Verzerrungszustand der Verschiebungszustand berechnet werden soll, stehen sechs Gleichungen für die Bestimmung von drei Unbekannten zu Verfügung; das Gleichungssystem ist also überbestimmt, es existiert keine eindeutige Lösung. Damit eine eindeutige Lösung vorliegt, müssen die Verzerrungen voneinander abhängig sein. Diese Abhängigkeit wird durch die Kompatibilitäts- bzw. Verträglichkeitsbedingungen erfüllt.

#### 2.1.3 Das verallgemeinerte Hookesches Gesetz

Im Rahmen dieser Arbeit wird für die Beschreibung des mechanischen Verhaltens eines Körpers, ein linear-elastisches Materialverhalten vorausgesetzt. Dabei ist der Spannungszustand zeitunabhängig (die Belastungsdauer hat keinen Einfluss auf die Deformation einer Struktur). Der Spannungszustand ist zusätzlich unabhängig von der Deformationsgeschichte d. h. er wird durch den aktuellen Deformationszustand eindeutig beschrieben. Ferner ist solch ein Materialverhalten dadurch gekennzeichnet, dass nach einer vollständigen Entlastung der Struktur keine bleibende Verformung zurückbleibt (die Dehnung geht auf den Wert Null zurück). Die Materialparameter eines Werkstoffs lassen sich experimentell ermitteln. Sind die Materialeigenschaften eines Körpers richtungsunabhängig, so ist der Werkstoff isotrop. Besteht eine Richtungsabhängigkeit, so liegt Anisotropie vor. Mit dem Hookeschen Gesetz lässt sich ein Zusammenhang zwischen den Spannungen und den Verzerrungen herstellen. Es besagt, dass sich der Spannungszustand proportional zum Verzerrungszustand einstellt. Die allgemeine Darstellung für den dreidimensionalen anisotropen Fall ergibt einen Elastizitätstensor mit insgesamt 81 Komponenten; aufgrund der Tatsache, dass sowohl der Spannungstensor  $\sigma_{ij}$  als auch der Verzerrungstensor  $\varepsilon_{ij}$  symmetrisch sind, verbleiben nur noch 36 unabhängige Komponenten (Werkstoffparameter). In der Ingenieurspraxis ist es üblich, das Hookesche Gesetz in Matrixschreibweise darzustellen:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (2.17)$$

Hierin ist  $\underline{\underline{C}}$  eine  $6 \times 6$  Matrix, die als Steifigkeitsmatrix bezeichnet wird. Ihre Komponenten  $C_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, 6$ ) sind die sog. Steifigkeiten. Für den anisotropen Fall ist sie voll belegt. Da die Steifigkeitsmatrix  $\underline{\underline{C}}$  stets symmetrisch ist, reduziert sich die Anzahl der voneinander unabhängigen Materialkonstanten auf 21. Durch Invertierung können die Verzerrungen aus den Spannungen berechnet werden. Die dabei entstandene Matrix  $\underline{\underline{S}}$  wird als Nachgiebigkeitsmatrix bezeichnet. Ihre Komponenten  $S_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, 6$ ) sind die sog. Nachgiebigkeiten:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{S} \underline{\sigma} \quad (2.18)$$

Sind die genannten Matrizen voll besetzt (im Fall vollständiger Anisotropie), so kann eine beliebige Spannungskomponente  $\sigma_{ij}$  alle Dehnungen und Verzerrungen hervorrufen. Im Umkehrschluss ruft eine beliebige Verzerrung alle Spannungskomponenten hervor. Daher gestaltet sich die Berechnung äußerst aufwendig. Vereinfachungen ergeben sich durch die Betrachtung von Sonderfällen der Anisotropie wie der Fall der sog. orthogonalen Anisotropie (Orthotropie). Hierbei existieren im Material drei zueinander orthogonale Symmetrieebenen, bezüglich derer die Materialeigenschaften symmetrisch sind. Demzufolge sind nur noch 12 Komponenten der Steifigkeitsmatrix (Nachgiebigkeitsmatrix) ungleich Null, wobei 9 davon unabhängig sind. Das Hookesche Gesetz ist nun partiell entkoppelt, d. h. die Normalspannungen rufen nur noch Dehnungen hervor, und die Schubspannungen ausschließlich Gleitungen.

Für orthotrope Werkstoffe lautet also das Hookesche Gesetz im kartesischen Koordinatensystem wie folgt:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Die Nachgiebigkeiten  $S_{ij}$  lassen sich durch die Ingenieurkonstanten (Elastizitätsmodule  $E_{ii}$ , Schubmodule  $G_{ij}$ , Querdehnungszahlen  $\nu_{ij}$ ,  $i, j = x, y, z$ ) ausdrücken.

$$S_{11} = \frac{1}{E_{xx}}, \quad S_{22} = \frac{1}{E_{yy}}, \quad S_{33} = \frac{1}{E_{zz}}, \quad S_{44} = \frac{1}{G_{yz}}, \quad S_{55} = \frac{1}{G_{xz}}, \quad S_{66} = \frac{1}{G_{xy}} \quad (2.21)$$

$$S_{12} = -\frac{\nu_{yx}}{E_{yy}}, \quad S_{13} = -\frac{\nu_{zx}}{E_{zz}}, \quad S_{23} = -\frac{\nu_{zy}}{E_{zz}},$$

wobei hier gilt:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_{ii}} = \frac{\nu_{ji}}{E_{jj}} \quad (i, j = x, y, z)$$

Analog lässt sich das Hookesche Gesetz für orthotrope Werkstoffe im zylindrischen Koordinatensystem folgendermaßen darstellen:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{\varphi z} \\ \tau_{rz} \\ \tau_{r\varphi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{\varphi z} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{r\varphi} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{\varphi z} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{r\varphi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{\varphi z} \\ \tau_{rz} \\ \tau_{r\varphi} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Die Formulierung der Nachgiebigkeiten durch die Ingenieurkonstanten ergibt:

$$S_{11} = \frac{1}{E_{rr}}, \quad S_{22} = \frac{1}{E_{\varphi\varphi}}, \quad S_{33} = \frac{1}{E_{zz}}, \quad S_{44} = \frac{1}{G_{\varphi z}}, \quad S_{55} = \frac{1}{G_{rz}}, \quad S_{66} = \frac{1}{G_{r\varphi}} \quad (2.24)$$

$$S_{12} = -\frac{\nu_{\varphi r}}{E_{\varphi\varphi}}, \quad S_{13} = -\frac{\nu_{zr}}{E_{zz}}, \quad S_{23} = -\frac{\nu_{z\varphi}}{E_{zz}}$$

Wobei hier gilt:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_{ii}} = \frac{\nu_{ji}}{E_{jj}} \quad (i, j = r, \varphi, z; i \neq j)$$

## 2.2 Klassische Laminattheorie

### 2.2.1 Nomenklatur

Die Informationen in diesem Kapitel stammen aus den Quellen [1, 2, 11, 13, 14]

Als erstes soll der Begriff Laminat näher erläutert werden. Geschichtete Strukturen, die sich aus einer beliebigen Anzahl von Einzelschichten zusammensetzen, bezeichnet man als Mehrschichtverbunde bzw. Laminat. Dabei kann jede Schicht für sich im Hinblick auf Dicke, Material und Ausrichtung der Materialhauptachsen beliebige Eigenschaften besitzen. Somit können die Einzelschichten unterschiedliche Steifigkeits- und Festigkeitseigenschaften mit sich bringen. Ein Schichtverbund besteht mindestens aus zwei Lagen. Eine Explosionszeichnung eines Laminates sowie dessen Zusammensetzung ist in Abb.2.3 zu finden, wobei hier das Laminat nur aus Einzelschichten, die durch unidirektionale Fasern verstärkt sind, besteht. Die Richtungen der Fasern in jeder Schicht sind durch die Angabe des Orientierungswinkels festgelegt, folglich ist jede Schicht anhand ihrer Faserorientierung genau gekennzeichnet. Man macht sich diese Tatsache zu Nutze, um den Lagenaufbau eines Laminats zu beschreiben. Beispielsweise wird der Lagenaufbau in Abb.2.3 wie folgt beschrieben:

$$[0^\circ / +45^\circ / 90^\circ / -45^\circ / 0^\circ] \quad (2.25)$$

Diese Nomenklatur wird oft benutzt und wird auch Laminat-Code genannt. Dabei muss man beachten, dass von der untersten Schicht in positive  $z$ -Richtung gezählt wird (Abb.2.4). Aus dieser Darstellung geht aber nicht hervor, ob die Einzelschichten unterschiedliche Materialeigenschaften und/oder unterschiedliche Dicken aufweisen, daher wird stillschweigend davon ausgegangen, dass die Lagen die gleichen Eigenschaften besitzen.

Der Lagenaufbau einiger Laminat lässt sich in einer abgekürzten Schreibweise darstellen:

- Bei einem symmetrischen Laminat reicht es, eine Hälfte der Schichten anzugeben und hinter der Klammer den Buchstaben „s“ hinzuzufügen, wobei „s“ für „symmetrisch“ steht. Beispiel:

$$[0^\circ / 90^\circ / 90^\circ / 0^\circ] = [0^\circ / 90^\circ]_s$$

- Direkt aufeinander folgende Plus/Minus-Orientierungen können mit dem Symbol „ $\pm$ “ abgekürzt werden. Beispiel:

$$[+45^\circ / -45^\circ] = [\pm 45^\circ]$$

- Benachbarte Schichten mit der gleichen Verstärkungsrichtung können durch einen Index, der die Anzahl der Schichten angibt, abgekürzt werden. Beispiel:

$$[0^\circ / 90^\circ / 90^\circ / 90^\circ / 0^\circ] = [0^\circ / 90^\circ_3 / 0^\circ]$$

- Kombinationen der erwähnten Abkürzungen sind möglich. Beispiel:

$$[+45^\circ / -45^\circ / -45^\circ / +45^\circ] = [\pm 45^\circ]_s$$

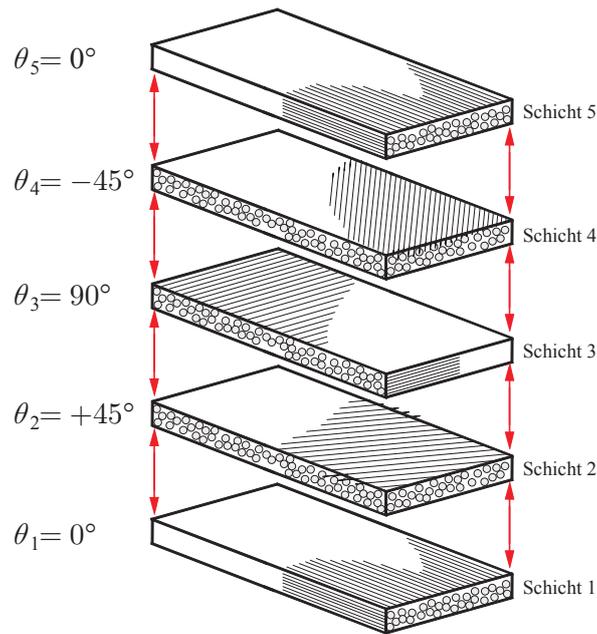


Abbildung 2.3: Explosionszeichnung eines Laminats [11]

Für die Analyse eines Laminates wird das kartesische Koordinatensystem  $(x, y, z)$  angewandt, wobei dessen Ursprung in der Laminatmittelebene liegt. Durch diese Ebene wird das Laminat in zwei gleich dicke Hälften geteilt (Abb.2.4), sie ist eine rein geometrische Größe und ist unabhängig vom Lagenaufbau. Dagegen existiert eine Symmetrieebene nur dann, wenn der Lagenaufbau auch symmetrisch ist. Weiterhin wird durch die  $z$ -Koordinate die Dicke angegeben, allerdings benötigt man für jede Schicht  $k$  zwei  $z$ -Koordinaten, nämlich  $z_{k-1}$ , die die Position der unteren Grenzfläche der Schicht angibt, sowie  $z_k$ , mit der die Obergrenze definiert wird. Die Kontaktfläche zwischen zwei benachbarten Schichten nennt man auch Interface. Um ihre Lage anzugeben kommt man mit einer  $z$ -Koordinate aus.

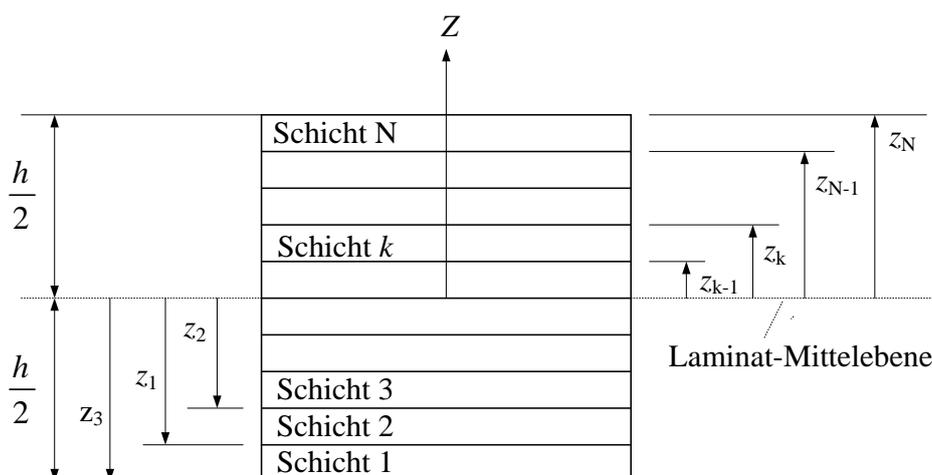


Abbildung 2.4: Schnitt durch ein Laminat [11]

### 2.2.2 Voraussetzungen

Die Klassische Laminattheorie basiert auf den Annahmen der Kirchhoffschen Plattentheorie. Diese sind im Folgenden aufgelistet:

1. Gerade Linien, die ursprünglich orthogonal zur Laminatmittelebene stehen, bleiben nach der Verformung auch gerade und zudem orthogonal zur verformten Mittelfläche. Hierbei spricht man auch von der Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte sowie von der Normalenhypothese. Somit sind die Querschubverzerrungen gleich Null ( $\gamma_{xz} = 0$ ,  $\gamma_{yz} = 0$ ).
2. Die Dicke des Laminates bleibt während des Verformungsgeschehens konstant, d. h. die Dehnung senkrecht zur Mittelfläche ist gleich Null ( $\varepsilon_{zz} = 0$ ). Ferner geht man davon aus, dass die Spannung normal zur Mittelebene auch gleich Null ist,  $\sigma_{zz} = 0$ .

Bezüglich des Laminates müssen ebenfalls einige Voraussetzungen gegeben sein:

1. Die Laminatschichten sollen eine perfekte Verklebung untereinander aufweisen, d. h. es sollen keinerlei Schädigungen (Delaminationen) bestehen.
2. Es wird sowohl für die Einzelschichten als auch für den gesamten Verbund ein ebener Spannungszustand bezüglich der Dickenrichtung vorausgesetzt.

Die Kinematik, die sich aus diesen beiden Annahmen ergibt, wird anhand eines Plattenelements nach der Klassischen Laminattheorie erklärt. Dabei soll ein Zusammenhang zwischen dem verformten und unverformten Zustand hergestellt werden (Abb.2.5). Ein Punkt, der sich auf der Laminatmittelebene befindet, hat sich im ausgelenkten Zustand um  $u_0$  in Längsrichtung verschoben, dabei erfährt er eine Verschiebung von  $w_0$ . Außerdem ergibt sich für das Plattenelement eine Neigung  $\frac{\partial w_0}{\partial x}$  zur Laminatmittelebene. Wie man bereits erkennt, erhalten alle Verschiebungsgrößen, die sich in der Mittelebene einstellen, den Index 0. Diese hängen nur von den Koordinaten  $x$  und  $y$  ab ( $u_0(x, y)$ ,  $v_0(x, y)$ ,  $w_0(x, y)$ ). Verschiebungen außerhalb der Mittelebene werden ohne den Index 0 gekennzeichnet und sind zudem von der  $z$ -Koordinate abhängig ( $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$ ). Die Durchbiegung  $w$  ist in diesem Fall aufgrund der Annahme, dass die Dicke des Laminates konstant bleibt, gleich  $w_0$ . Die Drehung des Plattenelements um die  $y$ -Achse wird durch den Biegewinkel  $\psi_x$  gekennzeichnet, sinngemäß wird die Drehung um die  $x$ -Achse durch die Biegewinkel  $\psi_y$  angegeben. Da ein Ebenbleiben der Querschnitte vorausgesetzt wird, sind die Winkel nur von  $x$  und  $y$  abhängig. Anhand von Abb.2.5 stellt man fest, dass der Zusammenhang zwischen der Verschiebung der Mittelebene  $u_0$  und der Verschiebung des Punktes  $u_B$ , durch folgende Formel wiedergegeben werden kann:

$$u_B = u_0 - z_B \sin(-\psi_x) = u_0 + z_B \sin(\psi_x) \quad (2.26)$$

Für kleine Winkel gilt näherungsweise  $\sin(\psi_x) \approx \psi_x$ :

$$u_B = u_0 + z_B \psi_x \quad (2.27)$$

Dieser Zusammenhang lässt sich natürlich für jeden Punkt an einer beliebigen Stelle  $z$  formulieren.

Für die Längsverschiebung an einer beliebigen Stelle  $z$  gilt folgender formelmäßiger Zusammenhang:

$$u = u_0 + z\psi_x \quad (2.28)$$

Sinngemäß lässt sich die Verschiebung in  $v$  Richtung auch für jeden beliebigen Punkt angeben:

$$v = v_0 + z\psi_y \quad (2.29)$$

Aus der Annahme, dass die Dicke des Laminats konstant bleibt, folgt:

$$w = w_0 \quad (2.30)$$

Des Weiteren kann man aus der Normalenhypothese ableiten, dass der rechte Winkel zwischen Querschnitt und Laminatmittelebene erhalten bleibt. Insofern kann man aus der (Abb.2.5) ablesen:

$$-\psi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (2.31)$$

Sinngemäß lässt sich  $-\psi_y$  schreiben als:

$$-\psi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (2.32)$$

Nun ist das Verschiebungsfeld nach der Klassischen Laminattheorie vollständig definiert:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\psi_x(x, y) = u_0 - z\frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (2.33)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\psi_y(x, y) = v_0 - z\frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (2.34)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (2.35)$$

Die Darstellung in Vektorschreibweise ergibt:

$$\underline{u} = \underline{u}_0 + z\underline{\psi} \rightarrow \begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0(x, y) \\ v_0(x, y) \\ w_0(x, y) \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \psi_x(x, y) \\ \psi_y(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

- $\underline{u}$  ist der Verschiebungsvektor eines beliebigen Punktes des Laminats.
- $\underline{u}_0$  ist der Verschiebungsvektor der Laminatmittelebene.
- $\underline{\psi}$  ist der Anteil infolge der Neigung.

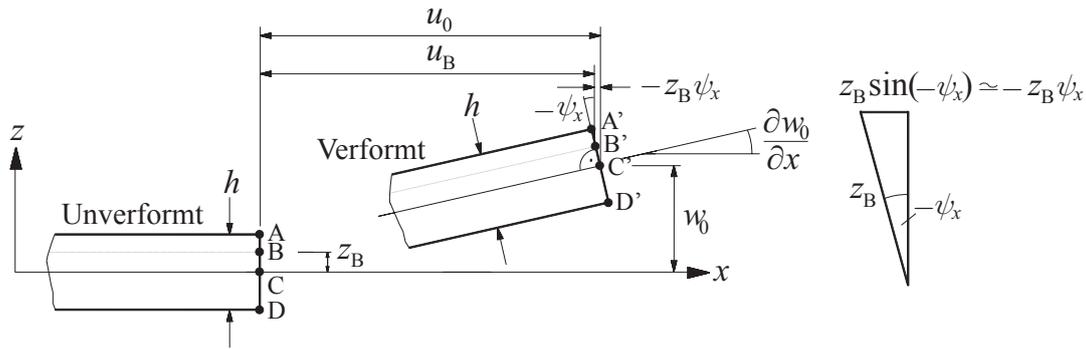


Abbildung 2.5: Kinematik eines Laminats nach der Klassischen Laminattheorie [11]

Das Verzerrungsfeld der Klassischen Laminattheorie lässt sich jetzt mittels des Verschiebungsfeldes ermitteln:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\end{aligned}\quad (2.37)$$

Eine Zusammenfassung in Vektorschreibweise ergibt:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^0 + z \underline{\kappa}^0 \rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}(x, y, z) \\ \varepsilon_{yy}(x, y, z) \\ \gamma_{xy}(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0(x, y, z) \\ \varepsilon_{yy}^0(x, y, z) \\ \gamma_{xy}^0(x, y, z) \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \kappa_{xx}^0(x, y) \\ \kappa_{yy}^0(x, y) \\ \kappa_{xy}^0(x, y) \end{pmatrix}\quad (2.38)$$

- $\underline{\varepsilon}$  beinhaltet die Dehnungen und Gleitung an einem beliebigen Punkt im Laminat
- $\underline{\varepsilon}^0$  erfasst die Dehnungen und die Gleitung der Laminatmittelebene
- $\underline{\kappa}^0$  zeigt die Verkrümmungen und die Verdrillung der Laminatmittelebene an.

Anhand des Verzerrungsfelds und mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes ist es nun möglich, die Spannungen in jeder Schicht zu berechnen:

$$\underline{\sigma}(z) = \underline{\underline{Q}}(z) \cdot \underline{\varepsilon}(z) \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}\quad (2.39)$$

$$\text{wobei: } \underline{\varepsilon}(z) = \underline{\varepsilon}^0 + z \underline{\kappa}^0 \rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix} \right]$$

### 2.2.3 Konstitutive Gleichungen

Mittels des Hookeschen Gesetzes ist es auch möglich, die Schnittgrößen im Laminat zu bestimmen. Diese lassen sich aufteilen in Laminat-Schnittkräfte und Laminat-Schnittmomente (Abb.2.6).

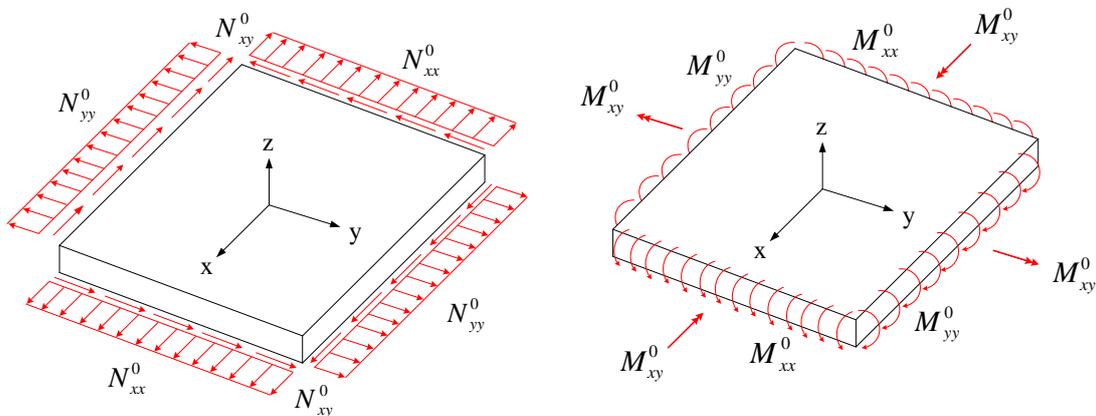


Abbildung 2.6: Schnittkräfte und-momente eines Laminates [11]

Zu den Schnittkräften zählen die Normalkraftflüsse  $N^0_{xx}$  und  $N^0_{yy}$  sowie der Schubkraftfluss  $N^0_{xy}$ . Diese haben stets die Einheit [Kraft/Längeneinheit] (z. B. [N/mm]). Zu den Schnittmomenten zählen die Biegemomente  $M^0_{xx}$  und  $M^0_{yy}$  sowie das Drillmoment  $M^0_{xy}$ , wobei die Indizes hier anders gedeutet werden müssen als bei der technischen Balkentheorie, Diese bezeichnen hier die Spannungskomponenten, die die Schnittmomente hervorrufen. Die Momente haben die Einheit [Kraft\*Längeneinheit/Längeneinheit] (z. B. [N]). Durch die Integration der Spannungen über die Dicke des Laminates können die Schnittgrößen berechnet werden:

$$\underline{N} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \underline{\sigma}(z) dz \rightarrow \begin{pmatrix} N^0_{xx} \\ N^0_{yy} \\ N^0_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} dz. \quad (2.40)$$

$$\underline{M} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \underline{\sigma}(z) z dz \rightarrow \begin{pmatrix} M^0_{xx} \\ M^0_{yy} \\ M^0_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} z dz \quad (2.41)$$

Da der Spannungsverlauf aufgrund der unterschiedlichen elastischen Eigenschaften der Lagen über die Dicke nicht stetig ist, muss das Integral in  $N$  Teil-Integrale zerlegt werden ( $N$  ist die Anzahl der Schichten):

$$\underline{N} = \sum_{k=1}^{k=N} \int_{z_{k-1}}^z (\underline{\sigma})_k dz \quad \text{und} \quad \underline{M} = \sum_{k=1}^{k=N} \int_{z_{k-1}}^z (\underline{\sigma})_k z dz \quad (2.42)$$

Nun wird für die Spannungen das Hookesche Gesetz eingesetzt:

$$\underline{N} = \sum_{k=1}^{k=N} \int_{z_{k-1}}^z \underline{\underline{Q}}(z)_k [\underline{\varepsilon}^0 + z \underline{\kappa}^0] dz \quad \text{und} \quad \underline{M} = \sum_{k=1}^{k=N} \int_{z_{k-1}}^z \underline{\underline{Q}}(z)_k [\underline{\varepsilon}^0 + z \underline{\kappa}^0] z dz \quad (2.43)$$

Die Durchführung der Integrationen liefert die sogenannten Konstitutivgleichungen:

$$\underline{\underline{N}} = \underline{\underline{A}}\underline{\underline{\varepsilon}}^0 + \underline{\underline{B}}\underline{\underline{\kappa}}^0 \quad (2.44)$$

$$\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{B}}\underline{\underline{\varepsilon}}^0 + \underline{\underline{D}}\underline{\underline{\kappa}}^0 \quad (2.45)$$

Bei der Überführung der symbolischen Schreibweise in die Vektor-Matrix-Schreibweise ist es üblich, beide Gleichungen zusammenzufassen. Als Ergebnis erhält man:

$$\begin{pmatrix} N_{xx}^0 \\ N_{yy}^0 \\ N_{xy}^0 \\ M_{xx}^0 \\ M_{yy}^0 \\ M_{xy}^0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

Die so erzeugte Matrix wird als Laminat-Steifigkeitsmatrix bezeichnet, auch bekannt als sog. ABD-Matrix. Damit ist es möglich, die Kraftgrößen des Laminates mit den Verzerungsgrößen der Laminat-Mittelebene in Zusammenhang zu bringen.

- Die Größen  $A_{ij}$  werden MembranstEIFigkeiten, Dehnsteifigkeiten oder Scheibensteifigkeiten genannt.
- Die Größen  $D_{ij}$  bezeichnet man als Plattensteifigkeiten oder Biegesteifigkeiten.
- Die Terme  $B_{ij}$  sind die Koppelsteifigkeiten.

Für den Fall, dass die Einzelschichten konstante Steifigkeiten aufweisen, lassen sich die Einträge der ABD-Matrix wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^{k=N} \bar{Q}_{ij,k} (z_k - z_{k-1}) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=N} \bar{Q}_{ij,k} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{k=N} \bar{Q}_{ij,k} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (2.47)$$

Die Einträge der ABD-Matrix sind effektive gemittelte Steifigkeitsgrößen, die mathematisch ein Laminat in eine einzelne Ebene überführen, und zwar genau in die Laminatmittelebene. In der Literatur wird der Begriff Einschichttheorie im Zusammenhang mit der KLT gebraucht. Deshalb eignet sich die KLT gut für die Analyse des globalen Verhaltens von Laminaten. Allerdings können u. U. lokale Effekte, verbunden mit 3D Spannungszuständen, auftreten, die durch die globale Betrachtungsweise der KLT nicht oder nur unzureichend behandelt werden können.

### 2.2.4 Koppelleffekte

In isotropen Flächentragwerken treten keine Koppelleffekte auf. Jedoch sind sie in Schichtverbunden eine Begleiterscheinung, die es oftmals - wenn möglich - zu vermeiden gilt.

Bei der Betrachtung der Laminat-Steifigkeitsmatrix wird festgestellt, dass alle Verformungszustände simultan auftreten können. Demzufolge kann z.B. eine Längskraft  $N_{xx}^0$  alle Dehnungen und Gleitungen sowie alle Krümmungen und Drillungen hervorrufen (Abb.2.7). Ferner ist i. a. das Scheiben- und Plattenverhalten miteinander gekoppelt. Aus den Konstitutivgleichungen können folgende Kopplungsterme und Koppelleffekte abgeleitet werden:

- $A_{16}, A_{26}$  sorgen für eine Schubkopplung.
- $D_{16}, D_{26}$  generieren eine Biege-Drill-Kopplung.
- $B_{ij}$  bringen eine Biege-Dehn-Kopplung mit sich.

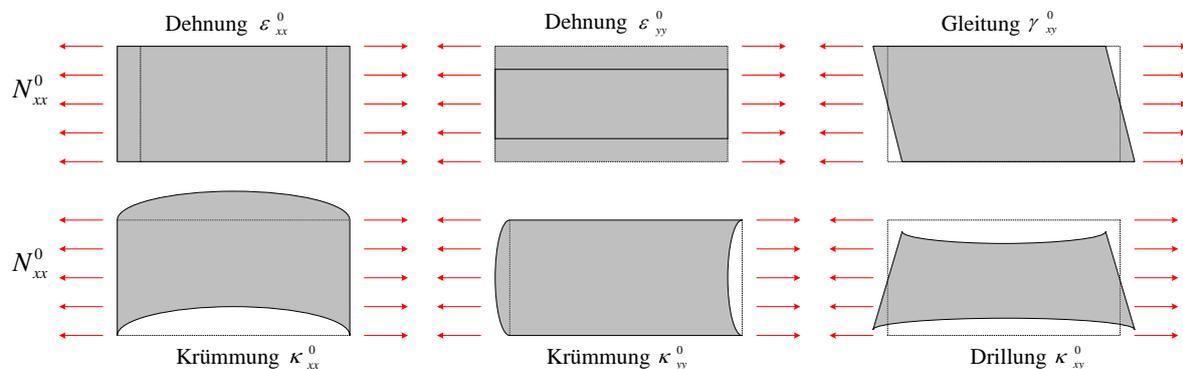


Abbildung 2.7: Mögliche Verformungszustände [11]

Die Schubkopplungsterme  $A_{16}$  und  $A_{26}$  koppeln die Laminat-Schnittkräfte  $N_{xx}^0$  und  $N_{yy}^0$  mit der Schubverzerrung  $\gamma_{xy}^0$  sowie, die Schubkraft  $N_{xy}^0$  mit den Dehnungen  $\varepsilon_{xx}^0$  und  $\varepsilon_{yy}^0$ . Anders formuliert bedeutet dies, dass eine Schubverzerrung  $\gamma_{xy}^0$  die Kräfte  $N_{xx}^0$  und  $N_{yy}^0$  hervorruft und dass die Dehnungen  $\varepsilon_{xx}^0$  und  $\varepsilon_{yy}^0$  zu der Entstehung der Schubkraft  $N_{xy}^0$  beitragen. Sind die Terme  $A_{16}$  und  $A_{26}$  in der Steifigkeitsmatrix identisch Null, so ist das Laminat „ausgeglichen“ (es findet keine Schubkopplung statt).

Die Biege-Drill-Kopplungsterme  $D_{16}$  und  $D_{26}$  koppeln die Biegemomente  $M_{xx}^0$  und  $M_{yy}^0$  mit der Verdrillung  $\kappa_{xy}^0$ , andererseits sind die Krümmungen  $\kappa_{xx}^0$  und  $\kappa_{yy}^0$  die Ursache für die Erzeugung des Drillmoments  $M_{xy}^0$ .

Die Biege-Dehn-Kopplungsterme  $B_{ij}$  sind nur bei unsymmetrischen Laminaten vorhanden. Sie sorgen dafür, dass die Dehnungen  $\varepsilon_{xx}^0$ ,  $\varepsilon_{yy}^0$  und die Verzerrung  $\gamma_{xy}^0$  die Schnittmomente  $M_{xx}^0$ ,  $M_{yy}^0$ ,  $M_{xy}^0$  hervorrufen, demgegenüber tragen die Verkrümmungen  $\kappa_{xx}^0$ , und  $\kappa_{yy}^0$  die Verdrillung  $\kappa_{xy}^0$  zu der Entstehung der Schnittkräfte  $N_{xx}^0$ ,  $N_{yy}^0$ ,  $N_{xy}^0$  bei.

### 2.2.5 Spezielle Laminare

Die Praxis hat gezeigt, dass eine vollbesetzte Laminat-Steifigkeitsmatrix eher die Ausnahme ist. Häufig lassen sich einige Steifigkeitsterme auf Null setzen, wodurch sich der

Rechenaufwand erheblich reduziert. Im Folgenden wird eine Auswahl von Laminaten gezeigt, die eine solche Vereinfachung des Konstitutivgesetzes mit sich bringen.

### Isotrope Einzelschicht

Eine isotrope Einzelschicht verhält sich wie eine isotrope Scheibe bzw. Platte, folglich treten keine Kopplungseffekte auf. Die Steifigkeitsmatrix lautet demnach:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Die Terme in der Matrix können mit Hilfe der Materialkonstanten  $E$ ,  $G$  und  $\nu$  bestimmt werden.

### Orthotrope Einzelschicht

Die Belegung der ABD-Matrix ist identisch zu der der isotropen Einzelschicht, jedoch muss man beachten, dass das Materialverhalten diesmal durch fünf unabhängige Parameter beschrieben wird, nämlich  $E_{11}$ ,  $E_{22}$ ,  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{21}$  und  $G_{12}$ .

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

### Anisotrope Einzelschicht

Hier treten sowohl die Schub- als auch die Biege-Drill-Kopplung auf. Da es sich hierbei um eine Einzelschicht handelt, kann keine Biege-Dehn-Kopplung vorkommen.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

### Symmetrische Lamine

Symmetrische Lamine sind solche, bei denen die Materialeigenschaften und der Lagenaufbau bezüglich der Mittelebene symmetrisch sind. Diese haben die Eigenschaft, dass die Koppelsteifigkeitsmatrix ( $B_{ij}$ ) gleich Null ist. Demzufolge sind sie frei von einer Biege-Dehn-Kopplung. Jedoch können i. a. eine Schub- und eine Biege-Drill-Kopplung vorliegen. Die Belegung der Steifigkeitsmatrix sieht für den allgemeinen Fall wie folgt aus:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

### Kreuzverbunde (Cross-ply)

Kreuzverbunde bestehen nur aus Einzelschichten, die eine  $0^\circ$  und  $90^\circ$  Orientierung haben, Diese Laminare sind ausgeglichen d. h. die Schubkopplungsterme  $A_{16}$  und  $A_{26}$  sind gleich Null, außerdem sind sie frei von einer Biege-Drill-Kopplung ( $D_{16} = D_{26} = 0$ ). Für den unsymmetrischen Kreuzverbund  $[0^\circ/90^\circ]$  ist die Steifigkeitsmatrix wie folgt belegt:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & -B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ B_{11} & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & -B_{11} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Für den symmetrischen Kreuzverbund  $[0^\circ/90^\circ]_s$  ist der Koppelsteifigkeitsterm  $B_{11}$  gleich Null.

### Winkelverbunde (Angle-ply)

Der Lagenaufbau solcher Laminare ist ein abwechselndes Aufschichten von Lagen mit den Orientierungswinkeln  $+\alpha^\circ$  und  $-\alpha^\circ$ . Sie sind immer ausgeglichen, können jedoch abhängig vom Lagenaufbau eine Biege-Drill-Kopplung und/oder Biege-Dehn-Kopplung aufweisen. Der unsymmetrische Winkelverbund  $[\pm\alpha^\circ]$  weist folgende Laminat-Steifigkeitsmatrix auf:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & B_{26} \\ 0 & 0 & A_{66} & B_{16} & B_{26} & 0 \\ 0 & 0 & B_{16} & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & B_{26} & D_{12} & D_{22} & 0 \\ B_{16} & B_{26} & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Es tritt keine Biege-Drill-Kopplung auf, aber da der Verbund unsymmetrisch ist, ist eine Biege-Dehn-Kopplung vorhanden.

Erwartungsgemäß ist dann der symmetrische Winkelverbund  $[\pm\alpha^\circ]_s$  frei von einer Biege-Dehn-Kopplung, dafür tritt allerdings eine Biege-Drill-Kopplung auf:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

## 2.3 Grundlagen der Finite-Elemente Methode

Die Informationen in diesem Abschnitt sind ausschließlich aus [2] entnommen worden.

### Prinzip der virtuellen Verrückungen

Die Finite-Elemente Methode lässt sich anhand des Prinzips der virtuellen Verrückungen (PvV) erklären. Virtuellen Verrückungen sind:

- Gedachte (“virtuelle”) Weggrößen
- Infinitesimal klein
- Erfüllen die geometrischen Randbedingungen
- Ansonsten beliebig
- Und werden durch das Symbol “ $\delta$ ” gekennzeichnet

Diese virtuellen Verrückungen, seien es Verschiebungen ( $\delta u$ ) oder Verdrehungen ( $\delta \varphi$ ), leisten Arbeit auf wirkliche Kräfte, demzufolge handelt es sich hierbei um eine virtuelle Arbeit. Man unterscheidet zwischen der virtuellen inneren Arbeit  $\delta W_i$ , dies ist die von den inneren Kräften bzw. Spannungen entlang der virtuellen Verzerrungen geleistete Arbeit, und der virtuellen äußeren Arbeit  $\delta W_a$ . Es handelt sich dabei um die Arbeit der äußeren Belastungen und der Volumenkräfte entlang der virtuellen Verschiebungen.

Es gilt der Grundsatz, dass eine deformierbare Struktur im Gleichgewicht ist, wenn bei beliebigen zulässigen virtuellen Verrückungen aus der Gleichgewichtslage heraus die virtuelle innere Arbeit  $\delta W_i$  gleich der virtuellen äußeren Arbeit  $\delta W_a$  ist [2].

$$\delta W_i = \delta W_a \quad (2.55)$$

Mittels einfacher Beispiele lassen sich  $\delta W_i$  und  $\delta W_a$  für ein Körpervolumen aufstellen. (Abb.2.8) zeigt einen dreidimensionalen Festkörper, dessen Rand in einen Verschiebungsrand  $R_u$  (geometrische Randbedingung) und einen Rand  $R_t$  mit einer Oberflächenkräften  $\underline{t}$  aufgeteilt werden kann. Weiterhin wird der Körper durch Volumenkräfte  $\underline{f}$  belastet.

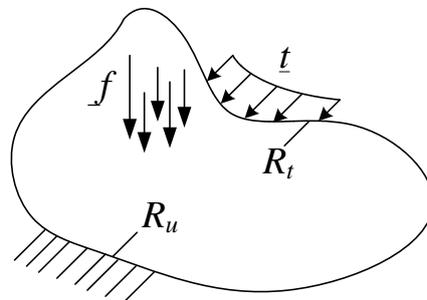


Abbildung 2.8: Dreidimensionaler Festkörper unter Beanspruchung [2]

**Äußere virtuelle Arbeit  $\delta W_a$** 

Auf  $R_u$  sind die virtuellen Verschiebungen gleich Null ( $\delta u_i = 0$ ), da sie die geometrischen Randbedingungen erfüllen müssen. Demzufolge wird keine virtuelle Arbeit auf  $R_u$  geleistet.

Auf  $R_t$  lässt sich  $\delta W_{a,t}$  folgendermaßen angeben:

$$\delta W_{a,t} = \int_{R_t} (\delta \underline{u})^T \underline{t} dA \quad (2.56)$$

Die Formel für  $\delta W_{a,f}$  infolge der Volumenkraft lautet:

$$\delta W_{a,f} = \int_V (\delta \underline{u})^T \underline{f} dV \quad (2.57)$$

Wenn der Körper durch Einzelkräfte und Einzelmomente belastet wird, lautet die Formel für  $\delta W_{a,F,M}$ :

$$\delta W_{a,F,M} = (\delta \underline{u})^T \underline{F} + (\delta \varphi)^T \underline{M} \quad (2.58)$$

Insgesamt ist die äußere virtuelle Arbeit die Summe:

$$\delta W_a = \int_{R_t} (\delta \underline{u})^T \underline{t} dA + \int_V (\delta \underline{u})^T \underline{f} dV + (\delta \underline{u})^T \underline{F} + (\delta \varphi)^T \underline{M} \quad (2.59)$$

**Innere virtuelle Arbeit  $\delta W_i$** 

Für die innere virtuelle Arbeit wird nun aus dem dreidimensionalen Festkörper (Abb.2.8) ein infinitesimales Volumenelement betrachtet, das zunächst nur eine virtuelle Verrückung  $\delta u$  erfährt (Abb.2.9).

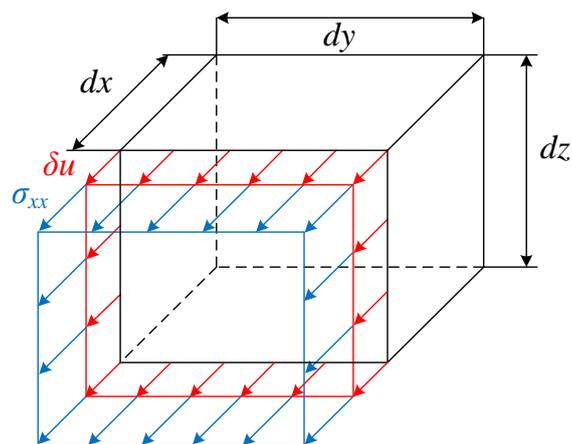


Abbildung 2.9: Infinitesimales Volumenelement unter Beanspruchung [2]

Die virtuelle innere Arbeit im infinitesimalen Element ist gleich der wirklichen inneren Kraft, multipliziert mit der entsprechenden virtuellen Verschiebung. Die aus  $\sigma_{xx}$  resultierende Kraft lässt sich mit  $\sigma_{xx} dy dz$  berechnen. Diese leistet dann entlang der virtuellen Verschiebung  $\delta u = \delta \varepsilon_{xx} dx$  die Arbeit:

$$d(\delta W_i) = \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} dx dy dz \quad (2.60)$$

Die gesamte virtuelle innere Arbeit im Festkörper ergibt sich durch die Integration über das Volumen  $dx dy dz$  zu

$$\delta W_i = \int_V \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} \overbrace{dx dy dz}^{dV} \quad (2.61)$$

Die Erweiterung auf dem gesamten Spannungstensor ergibt:

$$\delta W_i = \int_V (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \delta \varepsilon_{zz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dV \quad (2.62)$$

$$\text{Bei Verwendung der Vektorschreibweise } \rightarrow \delta W_i = \int_V \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dV \quad (2.63)$$

### Die Finite-Elemente Methode

Bei der FEM wird der Körper in Teilgebiete endlicher Größe (finite Elemente) unterteilt, wobei die Teilgebiete über Knoten mit einander verknüpft sind. Ziel ist es, die Verformung des Körpers mit Hilfe der Verschiebungen der Knoten zu beschreiben, indem zwischen den Knoten eines Elements mit Hilfe von Ansatzfunktionen interpoliert wird. Für die Ermittlung der unbekanntenen Knotenverschiebungen muss das PvV für jedes Element formuliert werden .

Für eine rechteckiges Scheibenelement (Abb.2.10) mit vier Knoten,  $(A, B, C, D)$ . (wobei an den Knoten Kräfte angreifen), kann der Zusammenhang zwischen den Verschiebungen im Element und den Verschiebungen in den Knoten wie folgt angegeben werden:

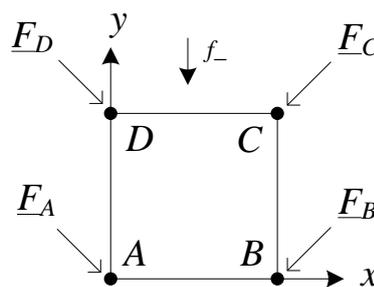


Abbildung 2.10: Scheibenelement [2]

$$u(x, y) = \sum_{k=A}^D N_k(x, y) \hat{u}_{kx} \quad (2.64)$$

$$v(x, y) = \sum_{k=A}^D N_k(x, y) \hat{u}_{ky} \quad (2.65)$$

- $u$  und  $v$  kennzeichnen die Verschiebungen im Element  $A, B, C, D$  in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung
- $N_k(x, y)$  kennzeichnen die Ansatzfunktion des Knotens  $K$
- $\hat{u}_{kx}$  und  $\hat{u}_{ky}$  kennzeichnen die Knotenverschiebungen des Knotens  $K$  in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtungen

Die Zusammenfassung ergibt in Matrix-Vektor-Schreibweise ergibt:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_A & 0 & N_B & 0 & N_C & 0 & N_D & 0 \\ 0 & N_A & 0 & N_B & 0 & N_C & 0 & N_D \end{bmatrix}}_{\underline{N}_{el}(x,y)} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{u}_{Ax} \\ \hat{u}_{Ay} \\ \hat{u}_{Bx} \\ \hat{u}_{By} \\ \vdots \\ \hat{u}_{Dy} \end{bmatrix}}_{\underline{\hat{u}}_{el}} \quad (2.66)$$

$$\text{bzw. } \underline{u} = \underline{N}_{el} \underline{\hat{u}}_{el} \quad (2.67)$$

Der Vektor  $\underline{u}$  enthält die Verschiebungen des Elements. In der Matrix  $\underline{N}_{el}$  sind die Ansatzfunktionen des jeweiligen Knotens enthalten. Der Vektor  $\underline{\hat{u}}_{el}$  ist der Knotenverschiebungsvektor in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung. Analog können die virtuellen Verschiebungen des Elements durch die virtuellen Knotenverschiebungen formuliert werden:

$$\delta \underline{u} = \underline{N}_{el} \delta \underline{\hat{u}}_{el} \quad (2.68)$$

bzw.

$$\delta \underline{u}^T = (\underline{N}_{el} \delta \underline{\hat{u}}_{el})^T = \delta \underline{\hat{u}}_{el}^T \underline{N}_{el}^T \quad (2.69)$$

Die virtuelle äußere Arbeit des rechteckigen Scheibenelements kann nun wie folgt formuliert werden:

$$\delta W_{a,el} = (\delta \underline{\hat{u}}_{el})^T \underline{F}_{el} + \int_{V_{el}} \delta \underline{u}^T \underline{f} dV \quad (2.70)$$

Dabei enthält  $\underline{F}_{el}$  die Knotenlasten und  $\underline{f}$  ist der Volumenkraftvektor (Abb.2.10). Durch das Einsetzen von 2.69 in 2.70 erhält man:

$$\delta W_{a,el} = (\delta \underline{\hat{u}}_{el})^T (\underline{F}_{el} + \int_{V_{el}} \underline{N}_{el}^T \underline{f} dV) \quad (2.71)$$

Die Komponenten des Verzerrungsvektors  $\underline{\varepsilon}$  können bekanntermaßen durch die Verschiebungen bestimmt werden. In diesem Fall handelt es sich um die in 2.66 bzw. 2.67 definierte Elementverschiebung.

Für eine Scheibe ergibt sich:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}}_{\underline{\varepsilon}_{el}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_A}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_B}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_C}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_D}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_A}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_B}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_C}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_D}{\partial y} \\ \frac{\partial N_A}{\partial y} & \frac{\partial N_A}{\partial x} & \frac{\partial N_B}{\partial y} & \frac{\partial N_B}{\partial x} & \frac{\partial N_C}{\partial y} & \frac{\partial N_C}{\partial x} & \frac{\partial N_D}{\partial y} & \frac{\partial N_D}{\partial x} \end{bmatrix}}_{\underline{B}_{el}} \hat{\underline{u}}_{el} \quad (2.72)$$

bzw.

$$\underline{\varepsilon}_{el} = \underline{B}_{el}^T \hat{\underline{u}}_{el} \quad (2.73)$$

Analog lassen sich die virtuellen Verzerrungen angeben als:

$$\delta \underline{\varepsilon}_{el} = \underline{B}_{el}^T \delta \hat{\underline{u}}_{el} \quad (2.74)$$

Dabei werden in der Matrix  $\underline{B}$  die kinematischen Beziehungen zusammengefasst.

Die Spannungen können durch das Stoffgesetz berechnet werden:

$$\underline{\sigma}_{el} = \underline{C}_{el} \underline{\varepsilon}_{el} \quad (2.75)$$

Setzt man nun (2.75) in (2.63) ein, wobei für  $\underline{\varepsilon}_{el}$  und  $\delta \underline{\varepsilon}_{el}$  die Definitionen aus (2.73) und (2.74) benutzt werden, so erhält man für die virtuelle innere Arbeit.

$$\delta W_{i,el} = \int_{V_{el}} \underbrace{(\delta \hat{\underline{u}}_{el})^T}_{\delta \underline{\varepsilon}_{el}^T} \underbrace{\underline{B}_{el} \underline{C}_{el} \underline{B}_{el}^T}_{\underline{\sigma}_{el}} \hat{\underline{u}}_{el} dV \quad (2.76)$$

bzw.

$$\delta W_{i,el} = \delta \hat{\underline{u}}_{el}^T \underbrace{\int_{V_{el}} \underline{B}_{el} \underline{C}_{el} \underline{B}_{el}^T dV}_{\underline{K}_{el}} \hat{\underline{u}}_{el} \quad (2.77)$$

Die Beziehung  $\delta W_i = \delta W_a$  kann nun ausformuliert werden.

$$\underline{K}_{el} \hat{\underline{u}}_{el} = \underline{F}_{el} + \int_{V_{el}} \underline{N}_{el} f dV \quad (2.78)$$

Die Matrix  $\underline{K}_{el}$  stellt die Steifigkeitsmatrix des finiten Elements dar. Die Steifigkeitsmatrix eines Körpers erhält man durch Assemblieren aller Elementsteifigkeitsmatrizen. Es ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\underline{K}_{ges} \hat{\underline{u}}_{ges} = \underline{F}_{ges} \quad (2.79)$$

Mittels (2.79) werden die Verschiebungen der Knoten berechnet. Im nächsten Schritt sind die Verzerrungen aus den Verschiebungen zu bestimmen und zuletzt sind mit dem Stoffgesetz und den Verzerrungen, der Spannungszustand zu berechnen, wobei heutzutage die Rechnung computergestützt erfolgt.

## 2.4 Der Randeﬀekt in ebenen Laminaten

Um Randeﬀekte in gekrümmten Laminaten untersuchen zu können, empfiehlt es sich zunächst, die Randeﬀekte in ebenen Laminaten zu verstehen. Die Informationen in diesem Kapitel stammen aus folgenden Quellen [10, 11].

Der Entwurf von Faserverbundstrukturen erfolgt in der Regel mittels der sogenannten Klassischen Laminattheorie (KLT). Hierbei wird angenommen, dass in den Einzelschichten sowie im gesamten Laminat ein ebener Spannungszustand herrscht; folglich sind die ‘‘out-of-plane’’ Spannungen gleich Null ( $\sigma_{zz} = 0$ ,  $\tau_{xz} = 0$ ,  $\tau_{yz} = 0$ ). Eine Laminat-Analyse anhand dieser Theorie hat sich in Bereichen fernab der freien Ränder (von außen unbelasteten Ränder) bewährt. Im Bereich der Ränder von Laminaten können sowohl out-of-plane Schub- als auch Normalspannungen ( $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\sigma_{zz}$ ) entstehen, die nicht durch die KLT erfassbar sind. Da diese Spannungen nicht nur innerhalb der Schicht, sondern zwischen den Schichten auf der Grenzfläche (Interface) und auch innerhalb der Schichten wirken, nennt man sie daher interlaminare Spannungen. In der Regel ist ab einem Abstand von der Größenordnung der Laminatdicke mit einem signifikanten Abklingen der Randspannungen zurechnen, allerdings können sie in Randnähe große und potentiell singuläre Werte annehmen, wodurch ein frühzeitiges Laminatversagen in Form von Delaminationen auftreten kann. Dieser Laminat-Randeﬀekt entsteht dann, wenn die benachbarten Laminat-einzelschichten unterschiedliche Querkontraktionseigenschaften und/oder Unterschiede im Schubverhalten aufzeigen. Um den Randeﬀekt genauer zu erklären werden hier zwei Beispiele diskutiert.

### 2.4.1 Der Laminat-Randeﬀekt am Beispiel eines Kreuzverbundes

Eine symmetrische Laminatprobe mit dem Lagenaufbau  $[0^\circ/90^\circ]_s$ , auch bekannt als Kreuzverbund, wird unter einachsiger Dehnbelastung  $\varepsilon_{xx}$  beansprucht (Abb.2.11). In einem Denkmodell wird das Deformationsverhalten des unverklebten Verbundes untersucht, hiernach sind die Einzelschichten nicht miteinander verklebt, sodass sie sich unter der erwähnten Last unabhängig voneinander deformieren können. Da die  $0^\circ$  und  $90^\circ$  Schichten unterschiedliche Querkontraktionseigenschaften in  $y$ -Richtung aufweisen ( $\nu_{xy}^0 \neq \nu_{xy}^{90}$ ), werden sie sich ungleich kontrahieren. Die einwirkende Last bewirkt, dass die Kontraktion in  $y$ -Richtung entgegen der Hauptrichtung des Materials in der  $0^\circ$  Schicht verläuft. Demnach werden sich die äußeren  $0^\circ$  Schichten stärker kontrahieren als die inneren  $90^\circ$  Schichten (Abb.2.11, oben). Infolge dessen ist der Verschiebungsverlauf  $u_y$  an der Grenzfläche zwischen den Schichten (Interface) unstetig. In einer intakten Laminatstruktur wären die Lagen miteinander verklebt, sodass dann ein kontinuierlicher Verschiebungsverlauf  $u_y$  sichergestellt wäre. Das erfolgt, indem man in den äußeren  $0^\circ$  Lagen eine Zugspannung  $\sigma_{yy}$  aufbringt und die inneren  $90^\circ$  Lagen mit einer Druckspannung belastet (Abb.2.11, Mitte). Diese Spannungen sind die, die man auch aus einer Berechnung nach der KLT erhalten würde. Die Tatsache, dass ein intakter Laminatverbund in den Grenzschichten keinen diskontinuierlichen Verschiebungsverlauf  $u_y$  zeigt, bleibt nicht folgenlos. Im Randbereich entsteht nämlich die interlaminare Scherspannung  $\tau_{yz}$  (Abb.2.11, Detail A). Diese ist zwar nicht durch die KLT vorhersehbar, kann aber mittels einer Gleichgewichtsbetrachtung ermittelt werden: Die Spannungen  $\sigma_{yy}$  sind am freien Rand gleich Null, und um das Kräftegleichgewicht im Randbereich in  $y$ -Richtung sicherzustellen, muss an der Grenzfläche zwischen der  $0^\circ$  und  $90^\circ$  Schicht die Spannung  $\tau_{yz}$  auftauchen. Außerdem erzeugen  $\sigma_{yy}$  und  $\tau_{yz}$  ein Moment um die  $x$ -Achse, das durch die interlaminare Schälspannung  $\sigma_{zz}$  (Abb.2.11, Detail B) kompensiert wird. Ein qualitativer Verlauf der interlaminaren Span-

nungen  $\sigma_{zz}$  und  $\tau_{yz}$  (Abb.2.11, unten) zeigt, dass die interlaminare Schälspannung  $\sigma_{zz}$  am Rand unendlich groß wird und dass sie einen Vorzeichenwechsel vollzieht. Ab einer charakteristischen Länge in der Größenordnung der Laminatdicke gehen die interlaminaren Spannungen dann asymptotisch gegen Null.

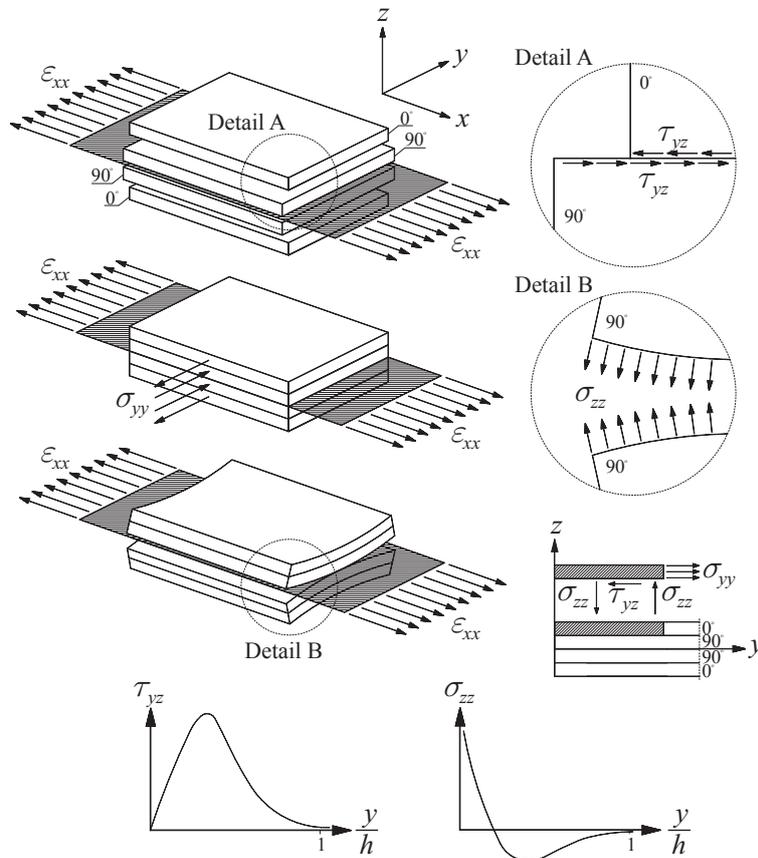


Abbildung 2.11: Der Laminat-Randeffect am Beispiel eines  $[0^\circ/90^\circ]_s$  Kreuzverbundes [11]

### 2.4.2 Der Laminat-Randeffect am Beispiel eines Winkelverbundes

Analog zum Kreuzverbund wird hier ein symmetrischer Winkelverbund mit dem Lagenaufbau  $[\pm 45^\circ]_s$ , unter einachsiger Dehnung  $\epsilon_{xx}$  betrachtet (Abb.2.12). Zunächst wird wieder der hypothetische Fall, dass die Lagen nicht miteinander verbunden sind, analysiert. Aufgrund der unterschiedlichen Schubkopplungseigenschaften in  $x$ -Richtung werden die Lagen unterschiedlich starke Schubdeformationen aufweisen, es wird sich also ein Unterschied in den Schubverzerrungen  $\gamma_{xy}$  ergeben (Abb.2.12, oben). In der Realität sind die Lagen miteinander verklebt, wodurch sich die genannten Unterschiede nicht einstellen werden. Dies wird durch die Schubspannung  $\tau_{xy}$  gewährleistet, wobei sie in den äußeren  $+45^\circ$  Lagen positiv ist und in den mittleren  $-45^\circ$  Schichten ein negatives Vorzeichen aufweist (Abb.2.12, Mitte). Am freien Rand ist  $\tau_{xy}$  gleich Null. Um dennoch das Kräftegleichgewichtskriterium im Randbereich in  $x$ -Richtung garantieren zu können, muss die interlaminare Schubspannung  $\tau_{xz}$  an der Grenzfläche zwischen den  $+45^\circ$  und  $-45^\circ$  Lagen entstehen (Abb.2.12 Detail A). Es sei noch vermerkt, dass der Randeffect in einem Winkelverbund auch mit der Entstehung der Schälspannung  $\sigma_{zz}$  einhergeht, allerdings ist sie im Vergleich zu  $\tau_{xz}$  oftmals sehr klein und daher vernachlässigbar.

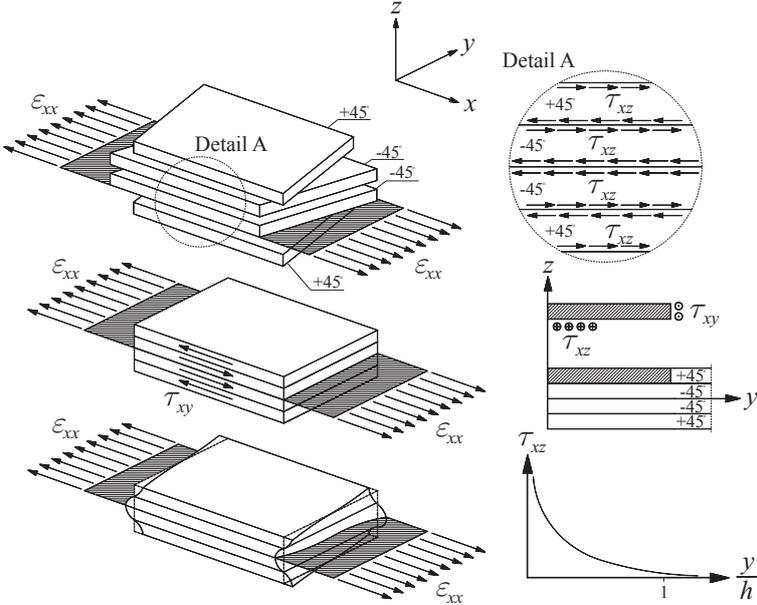


Abbildung 2.12: Der Laminat-Randeﬀekt am Beispiel eines  $[\pm 45^\circ]_s$  Winkelverbundes [11]

## 2.5 Zwei dimensionale Probleme in Polarkoordinaten

In diesem Kapitel werden die Gleichungen hergeleitet, die das Spannungsfeld über dem Querschnitt einer gekrümmten Scheibe unter reiner Biegung beschreiben. Um ein besseres Verständnis zu bekommen, erfolgt zunächst die Herleitung am Beispiel einer isotropen Scheibe. Danach wird der orthotrope Fall betrachtet und abschließend werden die Gleichungen für eine orthotrop geschichtete Scheibe bereit gestellt, wobei nur diese für die Validierung im Inneren des FE-Modells angewandt werden. Die Informationen in diesem Kapitel sind aus den Literaturquellen [6, 7, 8, 9, 11, 18] entnommen worden.

### Die Gleichgewichtsbedingungen im zylindrischen Koordinatensystem (2D):

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = 0 \quad (\text{Kräftegleichgewicht in radialer Richtung}) \quad (2.80)$$

$$\frac{1}{r} \sigma_{\varphi\varphi} + \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{2}{r} \tau_{r\varphi} = 0 \quad (\text{Kräftegleichgewicht in Umfangsrichtung}) \quad (2.81)$$

### Die kinematischen Beziehungen im zylindrischen Koordinatensystem (2D):

Die Verzerrungen können durch die Verschiebungen  $u_r$  und  $u_\varphi$  ausgedrückt werden:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right), \quad \gamma_{r\varphi} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - u_\varphi \right) + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \quad (2.82)$$

### Hookesches Materialgesetz im zylindrischen Koordinatensystem (2D):

Das verallgemeinerte Hookesche Gesetz (ebener Spannungszustand)

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \\ \tau_{r\varphi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} \\ \gamma_{r\varphi} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} \\ \gamma_{r\varphi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{26} \\ S_{16} & S_{26} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \\ \tau_{r\varphi} \end{pmatrix} \quad (2.83)$$

Für den orthotropen Fall können die Beziehungen wie folgt angegeben werden:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E_{rr}} \sigma_{rr} - \frac{\nu_{\varphi r}}{E_\varphi} \sigma_{\varphi\varphi}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = -\frac{\nu_{r\varphi}}{E_{rr}} \sigma_{rr} + \frac{1}{E_{\varphi\varphi}} \sigma_{\varphi\varphi}, \quad \gamma_{r\varphi} = \frac{1}{G_{r\varphi}} \tau_{r\varphi} \quad (2.84)$$

$$\text{Mit } S_{11} = \frac{1}{E_{rr}} \text{ und } S_{12} = -\frac{\nu_{r\varphi}}{E_{rr}} = -\frac{\nu_{\varphi r}}{E_{\varphi\varphi}}$$

Für den isotropen Fall gelten folgende Zusammenhänge

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E} (\sigma_{rr} - \nu \sigma_{\varphi\varphi}), \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{E} (\sigma_{\varphi\varphi} - \nu \sigma_{rr}), \quad \gamma_{r\varphi} = \frac{1}{G} \tau_{r\varphi} \quad (2.85)$$

### Die Kompatibilitätsbedingung im zylindrischen Koordinatensystem (2D):

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \varphi^2} + r \frac{\partial^2 (r \varepsilon_{\varphi\varphi})}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 (r \gamma_{r\varphi})}{\partial r \partial \varphi} - r \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} = 0 \quad (2.86)$$

**Bipotentialgleichung (Scheibengleichung) im zylindrischen Koordinatensystem:**

Die Airysche Spannungsfunktion ist hier nur von den Variablen  $r$  und  $\varphi$  abhängig ( $F(r, \varphi)$ ). Daraus lassen sich die Spannungen  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$  und  $\tau_{r\varphi}$  wie folgt herleiten:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\varphi} = -\frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right) \quad (2.87)$$

Im Polarkoordinatensystem lautet der Laplace-Operator:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (2.88)$$

Die Bipotentialgleichung  $\Delta\Delta F = 0$ , die sich aus der Kompatibilitätsbedingung, dem Hookeschen Gesetz sowie der Airysche Spannungsfunktion herleiten lässt, lautet mit dem Laplace-Operator in ausgeschriebener Form für isotrope Werkstoffe im zylindrischen Koordinatensystem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 F}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 F}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial^4 F}{\partial r^2 \partial \varphi^2} \right) + \frac{1}{r^3} \left( \frac{\partial F}{\partial r} - 2 \frac{\partial^3 F}{\partial r \partial \varphi^2} \right) \\ + \frac{1}{r^4} \left( 4 \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial \varphi^4} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.89)$$

Damit ist das ebene Problem auf eine einzige partielle Differentialgleichung vierter Ordnung zurückgeführt.

Für orthotrope Werkstoffe in Polarkoordinaten lässt sich die Scheibengleichung laut [9] wie folgt angeben:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_{\varphi\varphi}} \frac{\partial^4 F}{\partial r^4} + \left( \frac{1}{G_{r\varphi}} - \frac{2\nu_{r\varphi}}{E_{rr}} \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 F}{\partial r^4 \partial \varphi^4} + \frac{1}{E_{rr}} \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 F}{\partial \varphi^4} + \frac{2}{E_{\varphi\varphi}} \frac{1}{r} \frac{\partial^3 F}{\partial r^3} - \left( \frac{1}{G_{r\varphi}} - \frac{2\nu_{r\varphi}}{E_{rr}} \right) \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 F}{\partial r \partial \varphi^2} \\ - \frac{1}{E_{rr}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \left( \frac{2}{E_{rr}} - \frac{2\nu_{r\varphi}}{E_{rr}} + \frac{1}{G_{r\varphi}} \right) \frac{1}{r^4} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{E_{rr}} \frac{1}{r^3} \frac{\partial F}{\partial r} = 0 \end{aligned} \quad (2.90)$$

Paul Merkel [8] definiert die Scheibengleichung für orthotrope Werkstoffe unter Einführung von Anisotropiewerten folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 F}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 F}{\partial r^3} - \frac{s^2}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{s^2}{r^3} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{s^2 \partial^4 F}{r^4} + \frac{(k^2 - 2\nu_{\varphi r})}{r^2} \frac{\partial^4 F}{\partial \varphi^2 \partial r^2} - \frac{(k^2 - 2\nu_{\varphi r})}{r^3} \frac{\partial^3 F}{\partial \varphi^2 \partial r} \\ + \frac{(k^2 + 2s^2 - 2\nu_{\varphi r})}{r^4} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = 0 \end{aligned} \quad (2.91)$$

$$\text{Wobei } s = \sqrt{\frac{E_{\varphi\varphi}}{E_{rr}}} \text{ und } k = \sqrt{\frac{E_{\varphi\varphi}}{G_{r\varphi}}}$$

**2.5.1 Symmetrischer Spannungsverlauf**

Für den Fall, dass der Spannungsverlauf symmetrisch ist, sind die Spannungskomponenten nicht vom Winkel  $\varphi$  abhängig, sie sind nur eine Funktion des Radius  $r$ . Außerdem ist die Schubspannung  $\tau_{r\varphi}$  aus Symmetriegründen gleich Null.

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\varphi} = 0 \quad (2.92)$$

Es verbleibt nur eine Gleichgewichtsbedingung und zwar:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = 0 \quad (2.93)$$

Weiterhin ist die Airysche Spannungsfunktion nur noch von  $r$  abhängig  $F(r)$ , dadurch vereinfacht sich der Laplace-Operator zu.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (2.94)$$

Für den isotropen Fall ergibt sich für die Scheibengleichung:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 F}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial F}{\partial r} = 0 \quad (2.95)$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung lautet:

$$F = A \log r + Br^2 \log r + Cr^2 + D \quad (2.96)$$

Für orthotrope Werkstoffe lautet sie nun:

$$\frac{1}{E_{\varphi\varphi}} \frac{\partial^4 F}{\partial r^4} + \frac{2}{E_{\varphi\varphi}} \frac{1}{r} \frac{\partial^3 F}{\partial r^3} - \frac{1}{E_{rr}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{E_{rr}} \frac{1}{r^3} \frac{\partial F}{\partial r} \quad (2.97)$$

Die Funktion die dieser Differentialgleichung genügt, kann angegeben werden als:

$$F = A + Br^2 + Cr^{1+k} + Dr^{1-k} \quad (2.98)$$

Mit dem Anisotropiefaktor  $k = \sqrt{\frac{E_{\varphi\varphi}}{E_{rr}}}$

### 2.5.2 Kreisebogenscheibe unter reiner Biegung (Isotrop, Anisotrop/Orthotrop, Orthotrop geschichtet)

In Abb 2.13. wird ein zylindrisch gekrümmter Balken mit rechteckigem Querschnitt (Dicke  $b$ ) und beliebigen Öffnungswinkel  $\omega < 2\pi$  gezeigt, der durch zwei entgegengesetzte Momente  $M$  belastet wird. Der innere Radius sei mit  $r_i$  bezeichnet, der äußere mit  $r_a$ . In diesem Fall ist der Biegemomentverlauf konstant entlang der balkenartigen Scheibe, demgemäß sind in jedem Querschnitt die Spannungen gleich, d. h. der Spannungszustand ist unabhängig vom Winkel  $\varphi$  (rotationssymmetrischer Spannungszustand).

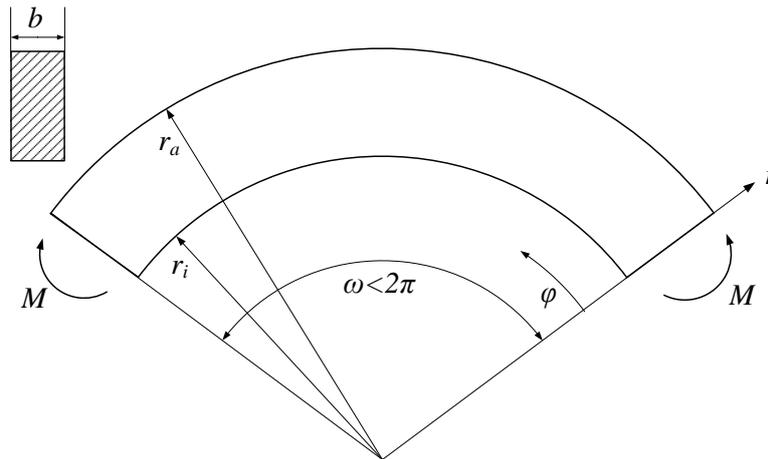


Abbildung 2.13: Zylindrisch gekrümmte Scheibe unter reine Biegung [5]

### Das Spannungsfeld für den isotropen Fall

Zunächst wird der Spannungsfeld für den isotropen Fall bestimmt.

Die Spannungskomponenten lassen sich anhand der hierfür geeigneten Spannungsfunktion (Gleichung.2.98) wie folgt darstellen:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \log r) + 2C \quad (2.99)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2 \log r) + 2C \quad (2.100)$$

$$\tau_{r\varphi} = 0 \quad (2.101)$$

Die Konstante „ $D$ “ taucht nach diesem Schritt nicht mehr auf, und zwar aufgrund der Tatsache, dass sie mit keiner der Variablen in Kombination steht, insofern verschwindet sie bei der Differenzierung. Es verbleiben also noch drei Unbekannte, die man bestimmen muss. Dies geschieht mit Hilfe der Randbedingungen:

1. Am inneren Rand  $r = a$  und am äußeren Rand  $r = b$  müssen die Normalspannungen in Radialrichtung verschwinden.

$$\sigma_{rr}(r = r_i) = 0, \quad \sigma_{rr}(r = r_a) = 0 \quad (2.102)$$

2. Die Umfangsspannungen  $\sigma_{\varphi\varphi}$  rufen nur das Moment  $M$  hervor und keine Normalkräfte.

$$\int_{r_i}^{r_a} \sigma_{\varphi\varphi} dr = 0, \quad \int_{r_i}^{r_a} \sigma_{\varphi\varphi} r dr = -M \quad (2.103)$$

3. Auch die Schubspannung  $\tau_{r\varphi}$  muss am inneren und äußeren Rand verschwinden; da sie im hier betrachteten Fall im gesamten Balken gleich Null ist, ist diese Bedingung automatisch erfüllt.

$$\tau_{r\varphi}(r = r_i) = \tau_{r\varphi}(r = r_a) = 0 \quad (2.104)$$

Insgesamt ergeben sich drei Gleichungen für die drei unbekanntenen Konstanten  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Die erste Randbedingung liefert zwei Gleichungen [18]:

$$\frac{A}{r_i^2} + B(1 + 2 \log r_i) + 2C = 0 \quad (2.105)$$

$$\frac{A}{r_a^2} + B(1 + 2 \log r_a) + 2C = 0 \quad (2.106)$$

Aus der zweiten Randbedingung erhält man laut [18] folgender Information:

$$A \log \frac{r_a}{r_i} + B(r_a^2 \log r_a - r_i^2 \log r_i) + C(r_a^2 - r_i^2) = M \quad (2.107)$$

Diese Gleichungen bilden ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der unbekanntenen Konstanten  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ; hieraus folgt nach [18]

$$A = -4 \frac{M}{N} r_i^2 r_a^2 \log \frac{r_a}{r_i} \quad (2.108)$$

$$B = -2 \frac{M}{N} (r_a^2 - r_i^2) \quad (2.109)$$

$$C = \frac{M}{N} [r_a^2 - r_i^2 + 2(r_a^2 \log r_a - r_i^2 \log r_i)] \quad (2.110)$$

$$\text{Mit } N = (r_a^2 - r_i^2)^2 - 4r_i^2 b^2 \left( \log \frac{r_a}{r_i} \right)^2$$

Durch Einsetzen der nun bekannten Konstanten in die Bestimmungsgleichungen für die Spannungen  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$  und  $\tau_{r\varphi}$ , (Gl.2.99-2.101) erhält man:

$$\sigma_{rr} = -\frac{4M}{N} \left( \frac{r_i^2 r_a^2}{r^2} \log \frac{r_a}{r_i} + r_a^2 \log \frac{r}{r_a} + r_i^2 \log \frac{r_i}{r} \right) \quad (2.111)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{4M}{N} \left( -\frac{r_i^2 r_a^2}{r^2} \log \frac{r_a}{r_i} + r_a^2 \log \frac{r}{r_a} + r_i^2 \log \frac{r_i}{r} + r_a^2 - r_i^2 \right) \quad (2.112)$$

$$\tau_{r\varphi} = 0 \quad (2.113)$$

Die gegebenen Spannungsverteilungen erfüllen alle Randbedingungen für eine reine Biegung.

### Das Spannungsfeld für den anisotropen Fall

Die Airysche Spannungsfunktion gilt unabhängig davon, ob es sich hierbei um ein anisotropes oder orthotropes Bauteil handelt. Daher ist das Spannungsfeld für die zwei genannten Werkstoffe gültig. Allerdings wird der Verschiebungsfeld aufgrund der Schubkopplungsterme ( $S_{16}$  und  $S_{26}$ ) ungleich sein.

Setzt man die hierfür geeignete Airysche Spannungsfunktion (2.98), in die Bestimmungsgleichungen für die Spannungskomponenten  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$  und  $\tau_{r\varphi}$ , so lassen sich folgende Beziehungen herleiten.

$$\sigma_{rr} = 2B + C(k+1)r^{k-1} - D(k-1)r^{-k-1} \quad (2.114)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = 2B + Ck(k+1)r^{k-1} + Dk(k-1)r^{-k-1} \quad (2.115)$$

$$\tau_{r\varphi} = 0 \quad (2.116)$$

Auch hier stellt man fest, dass die Konstante  $A$  aus der Airyschen Spannungsfunktion nach der Differentiation verschwindet. Es verbleiben also die Unbekannten  $B$ ,  $C$  und  $D$ , die sich mittels der bereits genannten Randbedingungen (Gl.2.102, Gl.2.103, Gl.2.104) ermitteln lassen. Man erhält drei Gleichungen für drei Unbekannte [9]:

$$2B + C(k+1)r_i^{k-1} - D(k-1)r_i^{-k-1} = 0 \quad (2.117)$$

$$2B + Ck(k+1)r_a^{k-1} - D(k-1)r_a^{-k-1} = 0 \quad (2.118)$$

$$\tau_{r\varphi} = 0 \quad (2.119)$$

Die Durchführung der Integration ergibt nach [6]:

$$\frac{-M}{b} = B(r_a^2 - r_i^2) + kC(r_a^{k+1} - r_i^{k+1}) - kD(r_a^{-k+1} - r_i^{-k+1}) \quad (2.120)$$

Nach dem Auflösen des Gleichungssystem und der Bestimmung der unbekannt Konstanten, ergeben sich schließlich für die Spannungskomponenten laut[9] folgende Ausdrücke:

$$\sigma_{rr} = -\frac{M}{r_a^2 b \eta} \left[ 1 - \frac{1 - \mu^{k+1}}{1 - \mu^{2k}} \left( \frac{r}{r_a} \right)^{k-1} - \frac{1 - \mu^{k-1}}{1 - \mu^{2k}} \mu^{k+1} \left( \frac{r_a}{r} \right)^{k+1} \right] \quad (2.121)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{M}{r_a^2 b \eta} \left[ 1 - \frac{1 - \mu^{k+1}}{1 - \mu^{2k}} \left( \frac{r}{r_a} \right)^{k-1} - \frac{1 - \mu^{k-1}}{1 - \mu^{2k}} k \left( \frac{r_i}{r} \right)^{k+1} \right] \quad (2.122)$$

$$\tau_{r\varphi} = 0 \quad (2.123)$$

$$\text{Mit } \eta = \frac{1}{2} (1 - \mu^2) - \frac{k}{k+1} \frac{(1 - \mu^{k+1})^2}{1 - \mu^{2k}} + \frac{k}{k-1} \mu^2 \frac{(1 - \mu^{k-1})^2}{1 - \mu^{2k}} \text{ und } \mu = \frac{r_i}{r_a}$$

### Das Spannungsfeld für einen orthotropen geschichteten Balken

Nun wird der Fall betrachtet, dass der zylindrisch gekrümmte Balken aus einer beliebigen Anzahl  $N$  orthotroper Schichten besteht, die miteinander perfekt verklebt sind, besteht. (Abb.2.14)

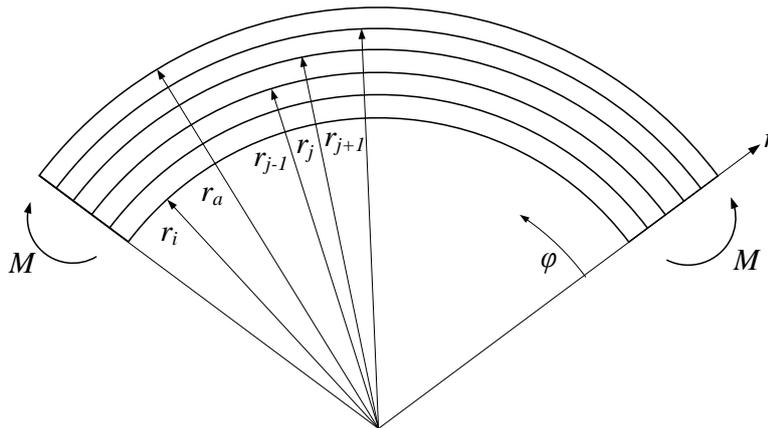


Abbildung 2.14: Zylindrisch gekrümmte, orthotrop geschichtete Scheibe unter reinem Biegemoment [7]

Die Airysche Spannungsfunktion muss für jede Einzelschicht  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) formuliert werden:

$$F_j = A_j + B_j r^2 + C_j r^{1+k_j} + D_j r^{1-k_j} \quad (2.124)$$

Die Spannungskomponenten für jede Einzelschicht lassen sich damit wie folgt ausdrücken:

$$\sigma_{rrj} = 2B_j + C_j(k_j + 1)r^{k_j-1} + D_j(1 - k_j)r^{-k_j-1} \quad (2.125)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi j} = 2B_j + C_j k_j(k_j + 1)r^{k_j-1} - D_j k_j(1 - k_j)r^{-k_j-1} \quad (2.126)$$

$$\tau_{r\varphi j} = 0 \quad (2.127)$$

Dabei können die  $3N$  Unbekannten aus den Rand- und Übergangsbedingungen berechnet werden:

In jedem Interface zwischen der Schicht  $j$  und  $j+1$  ( $j = 1, 2, \dots, N-1$ ), müssen nämlich sowohl die Radialspannung  $\sigma_{rr}$  als auch die Verschiebungen  $u_r$  und  $u_\varphi$  kontinuierlich verlaufen:

$$\sigma_{rr(j)}(r = r_j) = \sigma_{rr(j+1)}(r = r_j) \quad (2.128)$$

$$u_r(j)(r = r_j) = u_r(j+1)(r = r_j) \quad (2.129)$$

$$u_\varphi(j)(r = r_j) = u_\varphi(j+1)(r = r_j) \quad (2.130)$$

Desweiteren müssen die Radialspannungen  $\sigma_{rr}$  am Rand verschwinden:

$$\sigma_{rr1}(r = r_i) = 0, \quad \sigma_{\varphi\varphi N}(r = r_a) = 0 \quad (2.131)$$

Somit stehen gegenwärtig für die Bestimmung der  $3N$  unbekanntenen Konstanten ( $B_j, C_j, D_j$ ),  $2 + 3(N-1) = 3N - 1$  Gleichungen zu Verfügung. Die letzte Gleichung gewinnt man aus der Bedingung, dass die Resultante der Umfangsspannung  $\sigma_{\varphi\varphi}$  das Randmoment  $M$  ergibt:

$$\sum_j^N \int_{r_{j-1}}^{r_j} \sigma_{\varphi\varphi j} r dr = -M \quad (2.132)$$

Die Randbedingungen [2.131] liefern folgende Aussagen:

$$2B_1 + C_1(k_1 + 1)r_i^{k_1-1} + D_1(1 - k_1)r_i^{-k_1-1} = 0 \quad (2.133)$$

$$2B_N + C_N(k_N + 1)r_a^{k_N-1} + D_N(1 - k_N)r_a^{-k_N-1} = 0 \quad (2.134)$$

Für die Übergangsbedingungen [Gl.2.128][Gl.2.129][Gl.2.130] erhält man laut [7]:

$$2B_j + C_j(k_j + 1)r_j^{k_j-1} + D_j(1 - k_j)r_j^{-k_j-1} - 2B_{j+1} - C_{j+1}(k_{j+1} + 1)r_j^{k_{j+1}-1} - D_{j+1}(1 - k_{j+1})r_j^{-k_{j+1}-1} = 0 \quad (2.135)$$

$$\begin{aligned} B_j \left[ 2r_j \left( \frac{1}{E_{rrj}} - \frac{\nu_{\varphi r j}}{E_{\varphi\varphi j}} \right) \right] + C_j \left[ (1 + k_j)r_j^{k_j} \left( \frac{1}{k_j} \frac{1}{E_{rrj}} - \frac{\nu_{\varphi r j}}{E_{\varphi\varphi j}} \right) \right] - D_j \left[ (1 - k_j)r_j^{-k_j} \left( \frac{1}{k_j} \frac{1}{E_{rrj}} + \frac{\nu_{\varphi r j}}{E_{\varphi\varphi j}} \right) \right] \\ - B_{j+1} \left[ 2r_j \left( \frac{1}{E_{rrj+1}} - \frac{\nu_{\varphi r j+1}}{E_{\varphi\varphi j+1}} \right) \right] - C_{j+1} \left[ (1 + k_{j+1})r_j^{k_{j+1}} \left( \frac{1}{k_{j+1}} \frac{1}{E_{rrj+1}} - \frac{\nu_{\varphi r j+1}}{E_{\varphi\varphi j+1}} \right) \right] \\ + D_{j+1} \left[ (1 - k_{j+1})r_j^{-k_{j+1}} \left( \frac{1}{k_{j+1}} \frac{1}{E_{rrj+1}} + \frac{\nu_{\varphi r j+1}}{E_{\varphi\varphi j+1}} \right) \right] = 0 \quad (2.136) \end{aligned}$$

$$B_j \left[ 2r_j \left( \frac{1}{E_{\varphi\varphi j}} - \frac{1}{E_{rrj}} \right) \right] - B_{j+1} \left[ 2r_j \left( \frac{1}{E_{\varphi\varphi j+1}} - \frac{1}{E_{rrj+1}} \right) \right] = 0 \quad (2.137)$$

Die Bedingung, dass die Resultante  $\sigma_{\varphi\varphi}$  mit dem äußeren Moment  $M$  im Gleichgewicht steht, liefert:

$$\sum_{j=1}^N \left[ B_j (r_j^2 - r_{j-1}^2) + k_j C_j (r_j^{k_j+1} - r_{j-1}^{k_j+1}) - k_j D_j (r_j^{-k_j+1} - r_{j-1}^{-k_j+1}) \right] = -M \quad (2.138)$$

### 3 Modellierung

Im Preprocessing wird das FE- Modell erstellt. Dabei ist zu beachten, dass das reale Bauteil nahezu exakt abgebildet wird, was sich später in den strukturmechanischen Zusammenhängen sowie in der Qualität der Ergebnisse widerspiegelt.

Der Einfluss der verschiedenen Größen auf die Ergebnisse kann mittels einer Parameterstudie untersucht werden; hierzu ist es hilfreich, ein voll parametrisches Modell zu programmieren. Eine wiederholte Modellierung für jede Änderung kann somit vermieden werden, was Zeit spart und die Komplexität handhabbar macht. Die Parametrisierung erfolgt durch ein sogenanntes **Scripting** dabei, wird mit Hilfe der von Abaqus verwendeten Skriptsprache **Python** ein Skript erzeugt, was als Vorlage für die Berechnung dient. Es ist zweckmäßig, das Preprocessing und Postprocessing in zwei separaten Skripten zu programmieren, so kann das letztere zur Nachbearbeitung und Aufbereitung der Ergebnisse benutzt werden. Das Quellcode für die Skripte ist im Anhang aufgelistet.

Um die strukturmechanischen Zusammenhänge wiedergeben zu können bedarf, es eine genauer Analyse der Problemstellung und demnach auch einer sinngemäßen Idealisierung des Bauteiles. Randeffekte in Laminaten sind lokale Effekte, verbunden mit 3D Spannungszuständen. Es entstehen out-of-plane Spannungen die, durch einen ebenen Spannungszustand nicht beschrieben werden können. Folglich ist eine zweidimensionale Geometrie für die Idealisierung ungeeignet. Vielmehr erfüllt nur eine dreidimensionale Geometrie, die durch Volumenelemente vernetzt wird, die genannten Bedingungen.

#### Erstellen der Geometrie

Die Abbildung 3.1 zeigt eine schematische Darstellung des Bauteils. Das Modell ist also ein viertel orthotrop geschichteter Hohlzylinder, der durch folgende Parameter eindeutig beschrieben wird:

- Den inneren Radius  $r_a$  und der äußeren Radius  $r_i$ , wobei jede Lage für sich auch einen Innen- und Außen- radius besitzt.
- Die Breite des Bauteils  $b$
- Die Dicke des Bauteils  $t$
- Die Anzahl der Schichten  $N$
- Den Lagenaufbau
- Den Öffnungswinkel  $\omega$
- Und die Werkstoffdaten

Es sei hier noch erwähnt, dass die Schichten eine konstante Dicke haben sollen, woraus sich die Bauteildicke  $t$  ermitteln lässt.

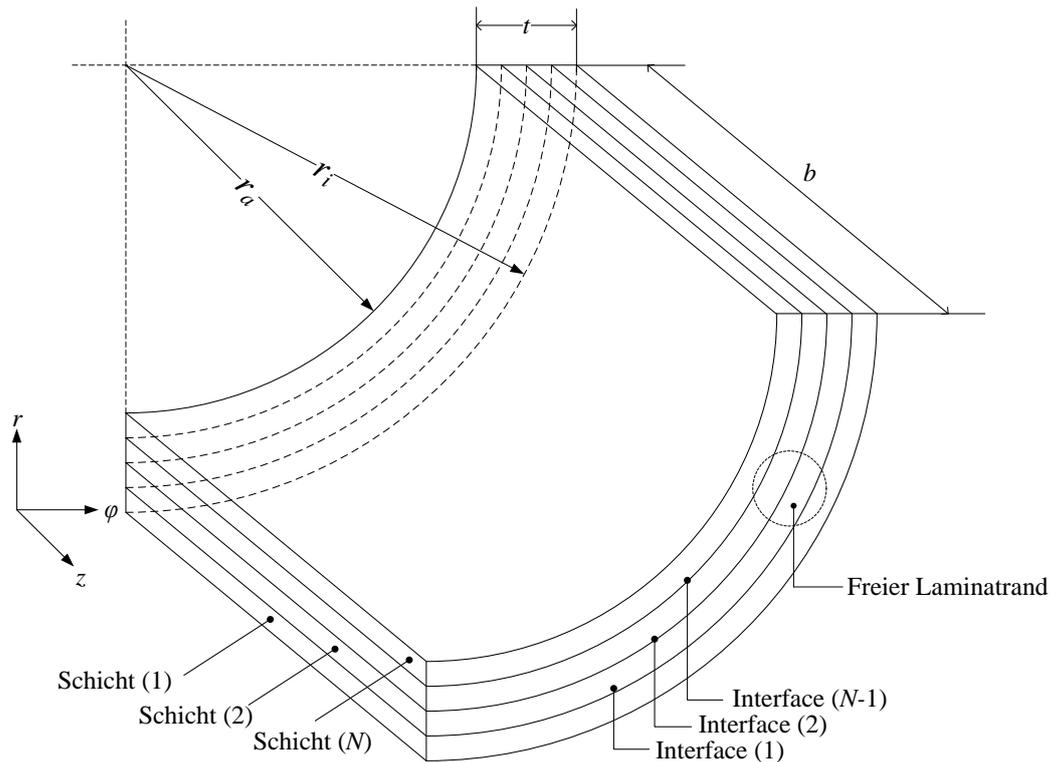


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung der Geometrieparameter

## Einheitensystem

In Abaqus ist es dem Anwender überlassen, die Maßeinheiten auszuwählen, d. h. das Programm gibt kein bestimmtes Einheitensystem vor, es rechnet quasi dimensionslos. Um so wichtiger ist es, auf ein konsistentes Einheitensystem zu achten, daher muss man sich von Anfang an bei der Eingabe alle physikalischen Größen auf ein System festlegen. In dieser Arbeit wurden folgende Einheiten benutzt:

Größe	Einheit
Länge	mm
Kraft	N
Masse	Tonne ( $10^3$ kg)
Zeit	s
Spannung	$\text{MPa} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

## Vernetzungstechnik und Elementtyp

Bei einer numerischen Analyse des Laminat-Randeffekts mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode ist es erforderlich, neben der erwähnten, zielgerechten Modellierung, auch auf eine geeignete Diskretisierung zu achten; nur dadurch kann sichergestellt werden, dass der Laminat-Randeffekt bestmöglich wiedergegeben wird und dass der numerische Aufwand im Rahmen des Machbaren bleibt, denn aufgrund der möglichen Singularität, die der

Randeffekt mit sich bringt, benötigt man oft eine sehr feine Vernetzung. Im Rahmen dieser Arbeit werden zwei Vernetzungstechniken angewandt:

- **Gleichmäßige Vernetzung**

Ein gleichmäßig strukturiertes Netz (Abb.3.2links) unterteilt den Raum in achsenparallele rechtwinklige Bereiche, wobei die Kanten der Elemente die gleiche Länge haben, es entsteht somit ein Volumen aus Würfeln.

- **Bias- Vernetzung**

Eine Bias- Vernetzung (Abb.3.2-rechts) ist dadurch charakterisiert, dass die Diskretisierung in der Umgebung des freien Randes sowie im Bereich der Einzelschichtübergänge (Interfaces) sehr fein ist, dagegen kann sie in Bereichen weit vom freien Rand bzw. Interface entfernt, also dort wo die Klassische Laminattheorie wieder Gültigkeit besitzt, relativ grob sein.

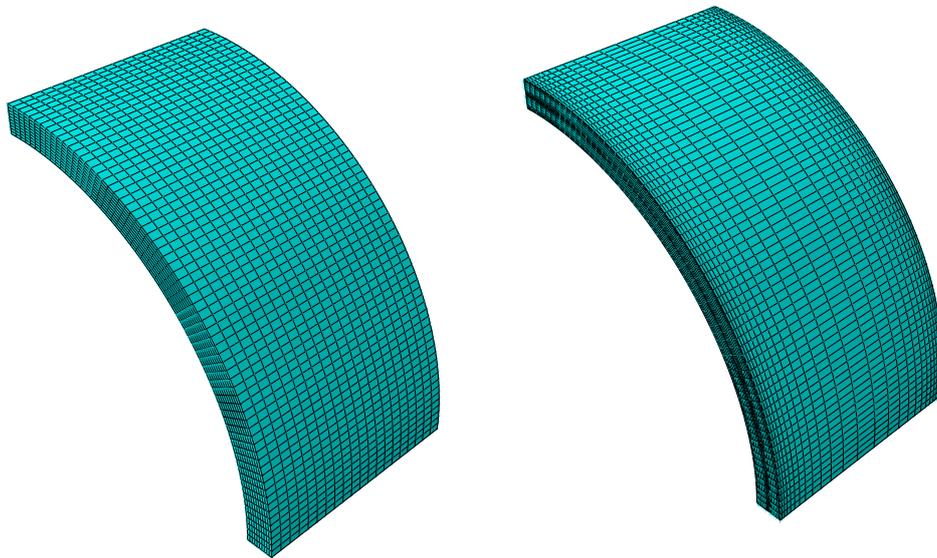


Abbildung 3.2: Vernetzungstechnik: links gleichmäßige Vernetzung , rechts Bias Vernetzung

Für die Diskretisierung kommen Volumenelemente zum Einsatz, im folgenden werden diese im Blick auf die relevanten Informationen aus der Abaqus Dokumentation vorgestellt:

Die Abaqus Element-Bibliothek enthält sowohl lineare Volumenelemente (Polynom erster Ordnung für die Interpolation) als auch quadratische Elemente (Polynom zweiter Ordnung für die Interpolation), dabei kann das Element eine Tetraeder-, Prismen- oder Hexaeder-Form annehmen. In dieser Arbeit wird die Brick- bzw. Hexaeder-Form benutzt (Abb.3.3). Das Element C3D8 ist durch 8 Knoten an den Ecken definiert und das Element C3D20 wird durch 20 Knoten abgebildet. Abaqus unterscheidet zwischen “Full integration” und “Reduced integration” was die Anzahl der Integrationspunkte festlegt, so besitzt das Element C3D20, 27 Integrationspunkte, während das Element C3D20R nur 8 hat. (C3D8→8 Integrationspunkte, C3D8R →1 Integrationspunkte).

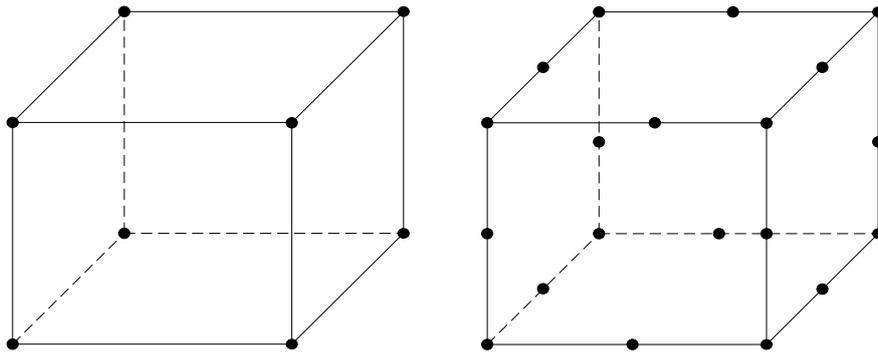


Abbildung 3.3: C3D8 Element-links, C3D20 Element-rechts

## Definition der Materialeigenschaften

Für die Modellierung wird ein transversal-isotropes Material verwendet, die Daten hierfür sind aus [12] entnommen, es handelt sich hierbei um den Werkstoff T300/xxx. Insgesamt sind 9 Materialparameter erforderlich

Materialparameter	Wert
$E_{\varphi\varphi}$	132000 MPa
$E_{rr} = E_{zz}$	10800 MPa
$\nu_{r\varphi} = \nu_{rz}$	0.238
$\nu_{\varphi z}$	0.49
$G_{r\varphi} = G_{rz}$	5650 MPa
$G_{\varphi z}$	3360 MPa

Tabelle 3.1: Werkstoffdaten

Die Zuweisung der Materialorientierungen an die einzelnen Schichten erfolgt mittels der sogenannten “**discrete orientation**”-Methode, hierbei erfolgt die Zuweisung der Materialeigenschaften für jedes Element.

## Randbedingungen:

Die Lagerung des Bauteils soll die Kontraktion begünstigen und nicht verhindern, daher sollen nur ausgewählte Punkte gelagert werden. (Abb.3.4)

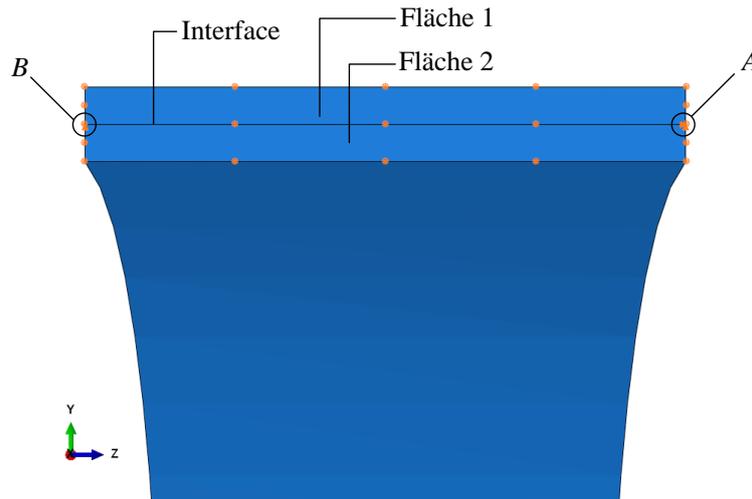


Abbildung 3.4: Lagerung des gekrümmten Laminats

- Die Flächen 1 und 2 sind in  $x$ -Richtung gesperrt.
- In Punkt  $A$  sind alle translatorische Freiheitsgrade,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  gesperrt.
- In Punkt  $B$  ist die Translation in  $x$ ,  $y$ -Richtung gesperrt, damit wird eine Starrkörperverdrehung verhindert.

Die Lasteinleitung erfolgt mittels "Kinematic Coupling" wobei das Moment (1 Nmm) in einem Referenzpunkt angreift. Diesen Referenzpunkt, auch Master-Knoten genannt, werden Freiheitsgrade zugewiesen ( hier die Translation in  $y$ -Richtung und die Rotation um die  $z$ -Achse). Alle anderen Coupling-Knoten müssen diesen Steuerknoten folgen. Es entsteht eine starre Abhängigkeit. Das Ziel ist es, die Last möglichst gleichmäßig über den belasteten Rand zu verteilen Abb.3.5. Auf eine feste Einspannung sowie auf eine Lasteinleitung über Multi-Point-Constraints (MPCs) wurde bewusst verzichtet, da diese sehr steif sind und somit einen unter diesem Lastfall erwarteten rotationssymmetrischen Spannungsverläufe verhindern könnten.

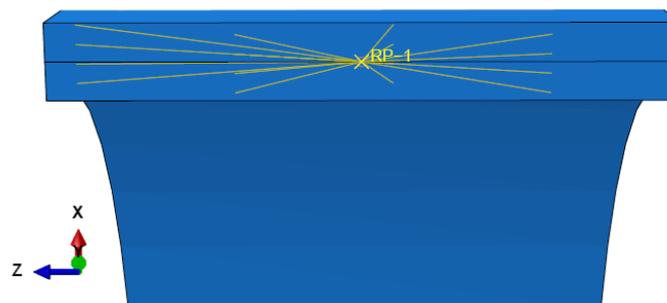


Abbildung 3.5: Lasteinleitung über Kinematic Coupling

## 4 Die Konvergenzstudie und die Validierung

### 4.1 FEM-Modell

Die Ergebnisse, die aus einer FEM-Rechnung erzielt werden, sind abhängig von der Anzahl der Elemente sowie von der Art der verwendeten Elemente. Die Genauigkeit des FE-Modells kann also durch diese zwei Möglichkeiten beeinflusst werden, wobei für einen Vergleich mit einer analytischen Lösung eine hohe Genauigkeit gefordert wird.

Durch die Zunahme der Elemente im FE-Modell nimmt die Anzahl der Ansatzfunktionen zu, folglich können die Spannungen besser wiedergegeben werden. In der Regel konvergieren diese Spannungen gegen einen bestimmten Wert. Im Rahmen der Untersuchung von Randeffekte in gekrümmten Laminaten können die Spannungen in Randnähe jedoch große und potentiell singuläre Werte annehmen, wodurch ihre Konvergenz nicht garantiert ist. Es ist aber notwendig, dass das FE-Modell diese möglichen Singularitäten abbilden kann. Ferner gilt es noch zu beweisen, dass das Modell fernab der Ränder die Spannungen im Querschnitt,  $\sigma_{rr}$  und  $\sigma_{\varphi\varphi}$  im 2D-Fall, darstellen kann hierzu dient als Vergleich die analytische Lösung für ein orthotrop geschichtetes Laminat laut [7].

Über den Elementtyp kann man den Polynomgrad der Ansatzfunktionen erhöhen, was sich in der Genauigkeit der Ergebnisse widerspiegelt. Die hier behandelte Problematik geht mit der Entstehung von Out-of-Plane-Spannungen einher, was impliziert, dass Volumenelemente für die Vernetzung verwendet werden müssen, wobei sich diese in ihrer Form und ihrem Polynomgrad unterscheiden. Es stehen Brick-Elemente mit linearen (C3D8) und quadratischen (C3D20) Ansatzfunktionen zu Verfügung. Nach anfänglichen Schwierigkeiten mit der Interpretation der Ergebnisse, wurden vom Abaqus-Support C3D8R Elemente empfohlen. Es handelt sich hierbei um lineare reduzierte Volumenelemente mit einem Integrationspunkt. Diese sind jedoch für die Berechnung von Spannungskonzentrationen nicht so sehr geeignet wie quadratische Elemente.

#### Auswertungspositionen

Die Untersuchung der interlaminaren Spannungen im Interface erfolgt im Rahmen dieser Arbeit entlang ausgewählter Positionen. Es handelt sich hierbei um fünf Auswertungspfade, die in einem Abstand von 15° Grad entlang des Umfangs liegen (Abb.4.1 oben). So werden mögliche Einflüsse der Lagerung bzw. der Krafteinleitungsstelle vermieden, aber auch eine eventuell vorhandene Rotationssymmetrie kann auf diese Weise nachgewiesen werden. Für die Validierung der Spannungen über dem Querschnitt wird im Inneren des 3D-Modells symbolisch eine 2D-Scheibe entnommen und genau in deren Mitte wird der Auswertungspfad in radialer Richtung gelegt (Abb.4.1 unten). Bei der Untersuchung von Randeffekten ist es hilfreich, die Auswertung nicht nur entlang des Interfaces durchzuführen, sondern auch über dem Querschnitt am freien Laminatrand-1 und -2 (Abb.4.1 unten), die Auswertungspfade hierfür sind in einer Winkeldistanz von 45° von der Lasteinleitung lokalisiert (Abb.4.1 unten).

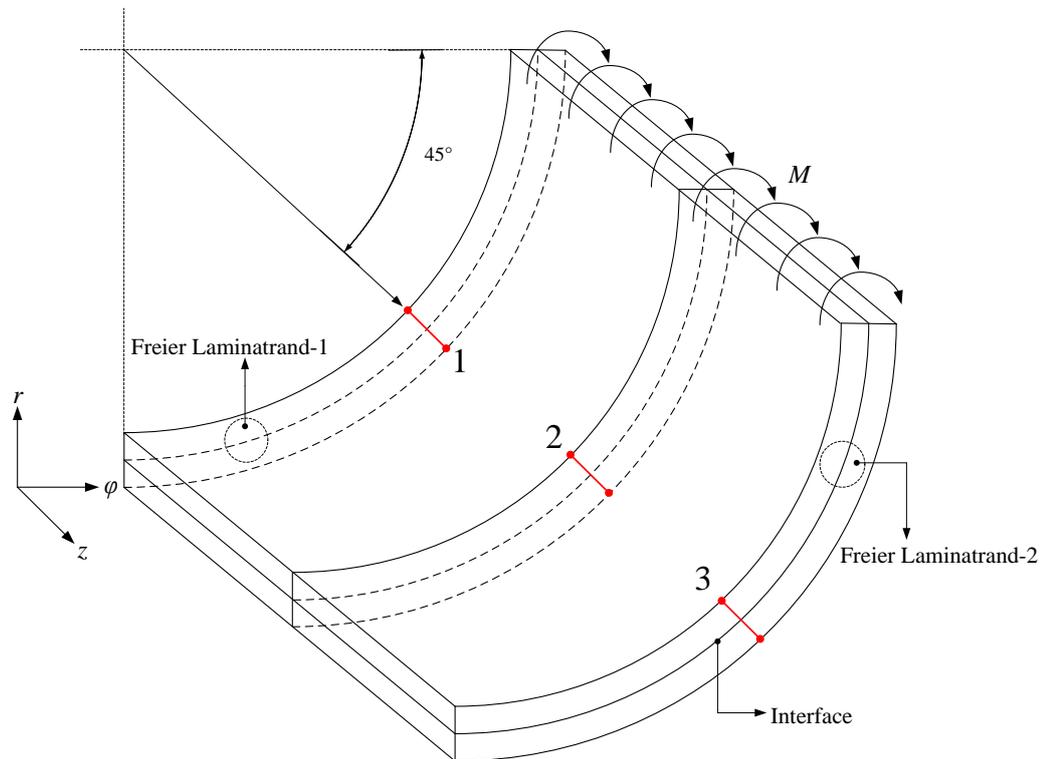
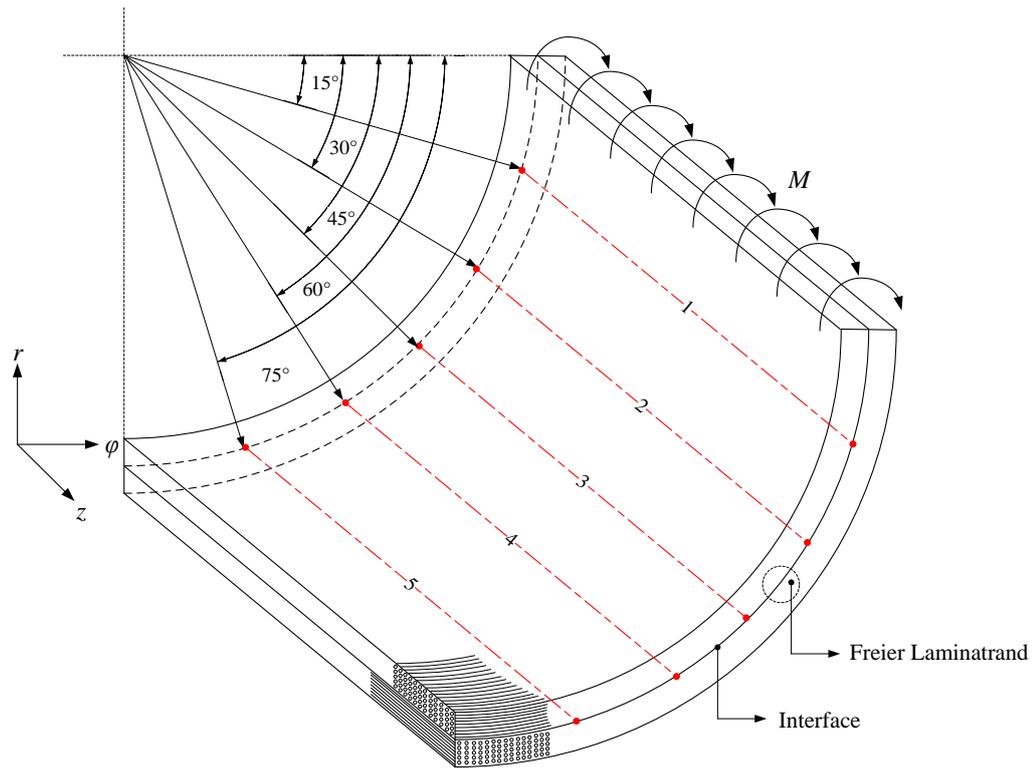


Abbildung 4.1: Auswertungspositionen über dem Interface (oben), Auswertungspositionen über dem Querschnitt (unten)

## 4.2 Validierung der Spannungen im Querschnitt

In den Abbildungen 4.2 und 4.3 sind die Verläufe der Radialspannung  $\sigma_{rr}$  und der Umfangsspannung  $\sigma_{\varphi\varphi}$  über dem Querschnitt bei  $45^\circ$  (Abb.4.1-unten, Auswertungspfad-2) für ein Kreuz-Laminat  $[0^\circ/90^\circ]$  gegeben. Dabei wird die FEM- Lösung mit der analytischen Lösung verglichen. Es ist eine gute Übereinstimmung zu sehen, damit ist im Inneren des Modells die Validierung erfolgt. Es sei noch erwähnt, dass die analytische Lösung nur im globalen Mittel erfüllt ist, was die Abweichungen erklären könnte. Die Geometrie und die Materialparameter sind aus der Tabelle 4.1 und 4.2 zu entnehmen. Für die analytische Lösung werden die Formeln 2.133 bis 2.138 in eine Vektor-Matrix-Schreibweise für ein Zwei-Schicht-Laminat  $[0^\circ/90^\circ]$  überführt, Es resultieren 6 Gleichungen für 6 Unbekannte, mittels Matlab wurde das Gleichungssystem gelöst. Die Dateien sind in der CD-Rom enthalten.

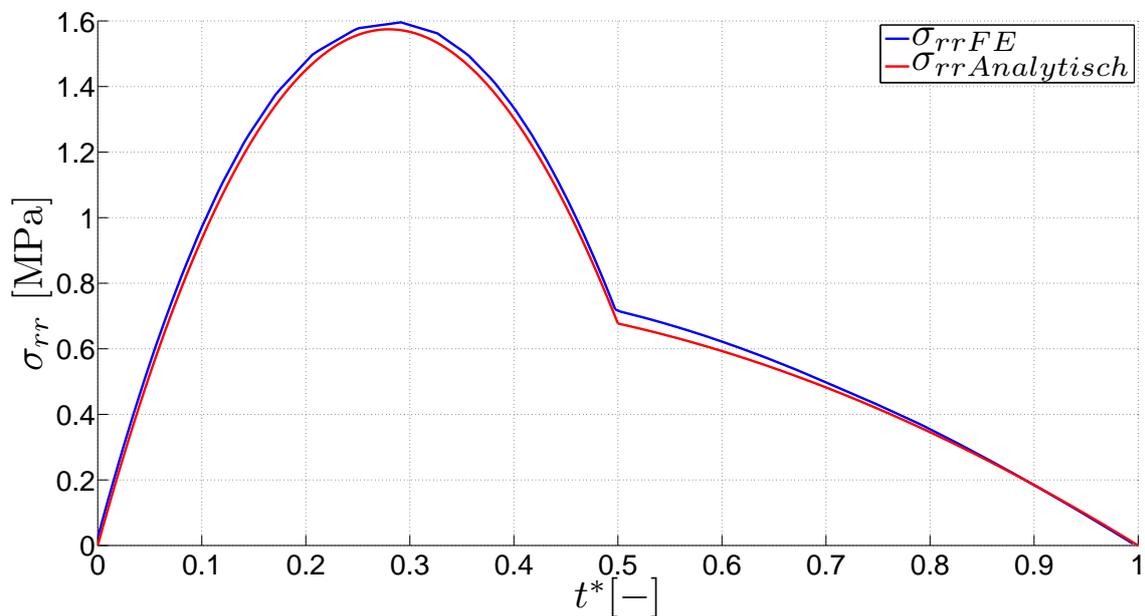


Abbildung 4.2: Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Normalspannung  $\sigma_{rr}$  über dem Querschnitt im Inneren des Laminats

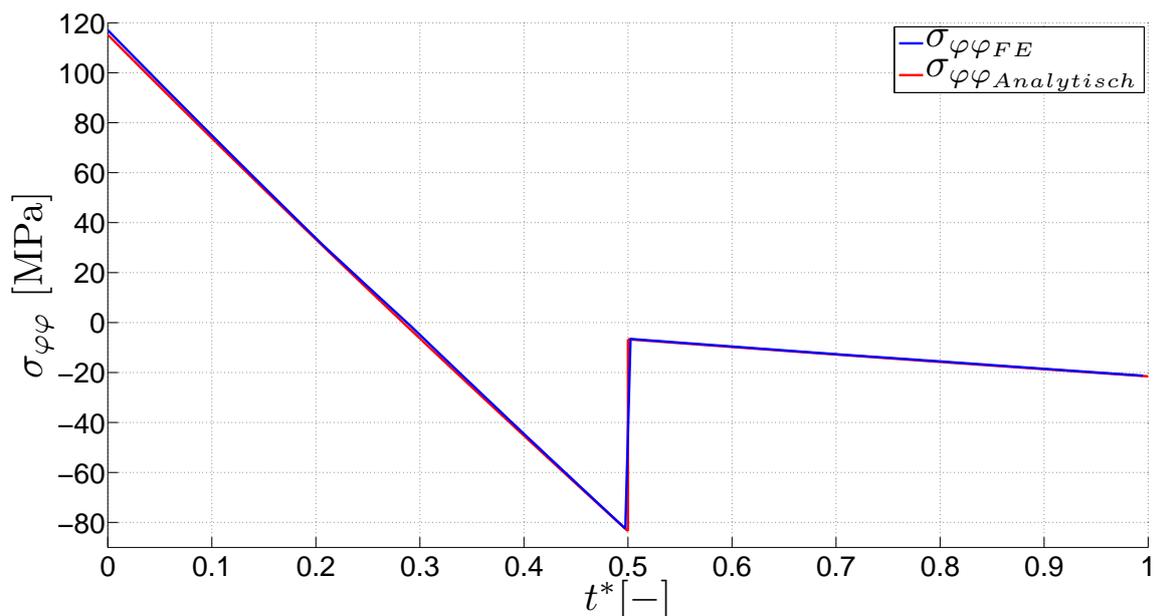


Abbildung 4.3: Vergleich numerischer und analytischer Verläufe der Umfangsspannung  $\sigma_{\varphi\varphi}$  über dem Querschnitt im Inneren des Laminats

Materialparameter	Wert
$k_1$	3.496
$k_2$	0.286
$E_{\varphi 1}$	132000 MPa
$E_{\varphi 2}$	10800 MPa
$E_{r 1}$	10800 MPa
$E_{r 2}$	132000 MPa
$\nu_{\varphi r 1}$	0.238
$\nu_{\varphi r 2}$	0.238

Tabelle 4.1: Materialparameter für die  $[0^\circ/90^\circ]$  gekrümmte Laminat- Scheibe

Geometrieparameter	Wert
$r_i$	2.5 mm
$r_1$	2.625 mm
$r_a$	2.75 mm
$t_s$	0.125 mm
$b$	2 mm

Tabelle 4.2: Geometrieparameter für die  $[0^\circ/90^\circ]$  gekrümmte Laminat- Scheibe

### 4.3 Konvergenzstudie

Im Rahmen der Konvergenzstudie werden drei repräsentative FE-Modelle betrachtet. Es handelt sich dabei um einen unsymmetrischen Kreuzverbund  $[0^\circ/90^\circ]$ . Im Zuge dessen wird versucht, den Übergang von einer groben über eine mittelfeine bis sehr feine Vernetzung darzustellen. Hierbei wird die Anzahl der Elemente in eine Schicht variiert. Zunächst wurde die Rechnung mit 10 Elementen pro Schicht durchgeführt (Modell-1), danach wurde die Anzahl der Elemente auf 20 erhöht (Modell-2), und schließlich sind 50 Elemente verwendet worden (Modell-3). Die Vernetzung der Modelle erfolgte mit der Bias- Methode.

Im folgenden werden die Ergebnisse der Konvergenzstudie für einige Spannungskomponenten graphisch dargestellt.

Zu Beginn wird die Radialspannung  $\sigma_{rr}$  (Abb.4.4) und die Umfangsspannung  $\sigma_{\varphi\varphi}$  (Abb.4.5) entlang der Bauteildicke untersucht (Abb.4.1 unten, Auswertungspfad-2). Es ist zu erkennen, dass mit zunehmender Anzahl von Elementen die Darstellung der Spannungen einen stufenlosen Verlauf annimmt. Des Weiteren ist im Rahmen der FEM-Genauigkeit die Bedingung erfüllt, dass die Normalspannung  $\sigma_{rr}$  am Rand gleich Null sein muss.

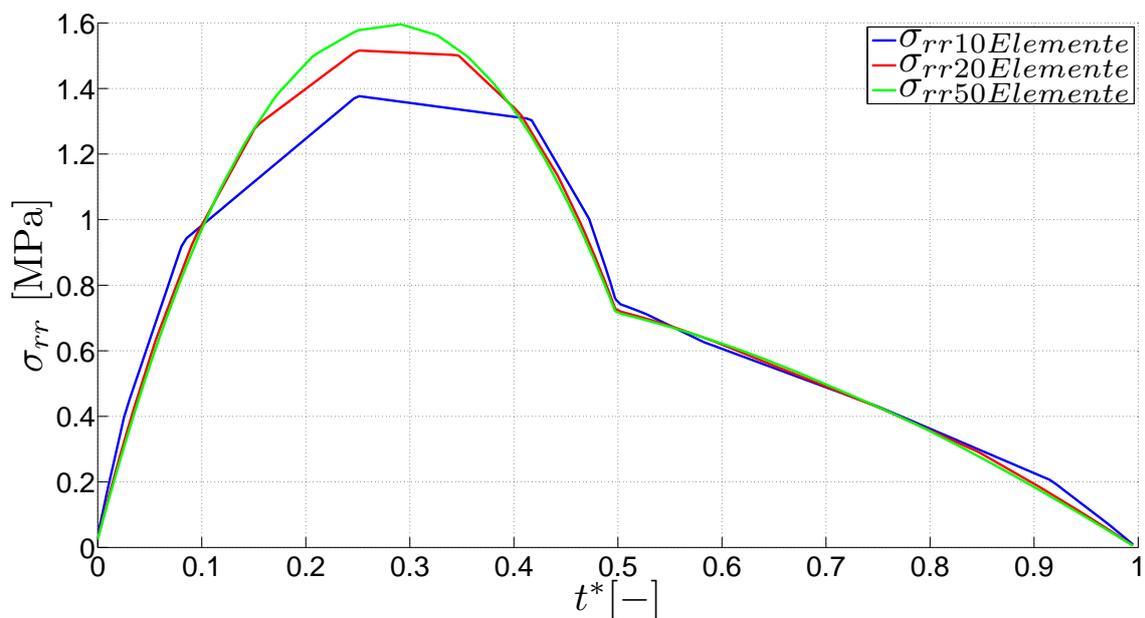


Abbildung 4.4: Verlauf der Normalspannung  $\sigma_{rr}$  im Querschnitt für unterschiedliche Netzfeinheit

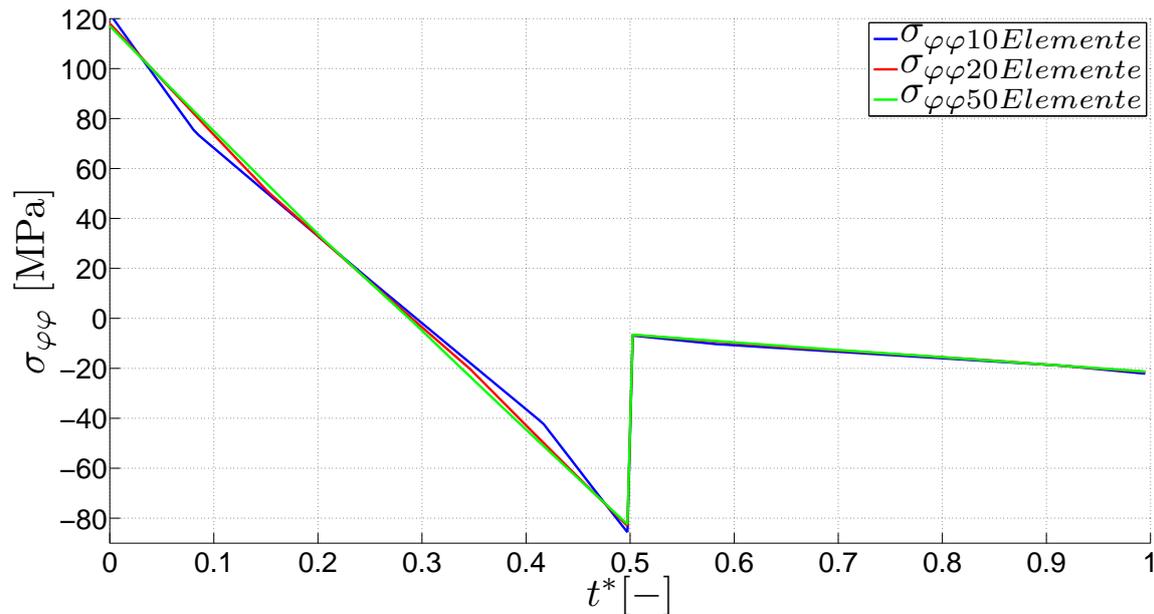


Abbildung 4.5: Verlauf der Umfangsspannung  $\sigma_{\varphi\varphi}$  im Querschnitt für unterschiedliche Netzfeinheit

Anschließend werden die Spannungen entlang der Bauteilbreite untersucht. Es erfolgte eine Unterscheidung zwischen interlaminaren Spannungen, die über dem Interface ausgewertet werden können ( $\sigma_{rr}, \tau_{rz}, \tau_{r\varphi}$ ) (Abb.4.1-oben), und intralaminaren Spannungen, wobei hier die Auswertung innerhalb der Schichten parallel zum Interface stattfinden muss, dazu zählen folgende Komponenten ( $\sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{zz}, \tau_{\varphi z}$ ). Es hat sich jedoch gezeigt, dass die Auswertung der Schubspannungen  $\sigma_{rz}$  im Interface hinsichtlich der Randbedingungen für einen freien unbelasteten Laminatrand nicht erfüllt wird, daher erfolgt die Analyse kurz oberhalb und unterhalb des Interfaces. Aus Symmetriegründen werden die Ergebnisse der Konvergenzstudie beispielhaft nur an einer Position entlang des Viertelkreises angegeben nämlich in einem Winkelabstand von  $15^\circ$  von der Einspannstelle, der Beweis hierzu erfolgt im nächsten Kapitel.

Im allgemeinen ist anhand der Abbildungen festzustellen, dass die Abweichungen der Ergebnisse, die sich aus Modell-2 und Modell-3 ergeben, geringer sind als jene, die man aus Modell-1 und 2 erhält, demnach lässt sich ein auf Konvergenzverhalten schließen. Im weiteren Ablauf der Arbeit wird also mit dem dritten FE-Modell weiter gerechnet.

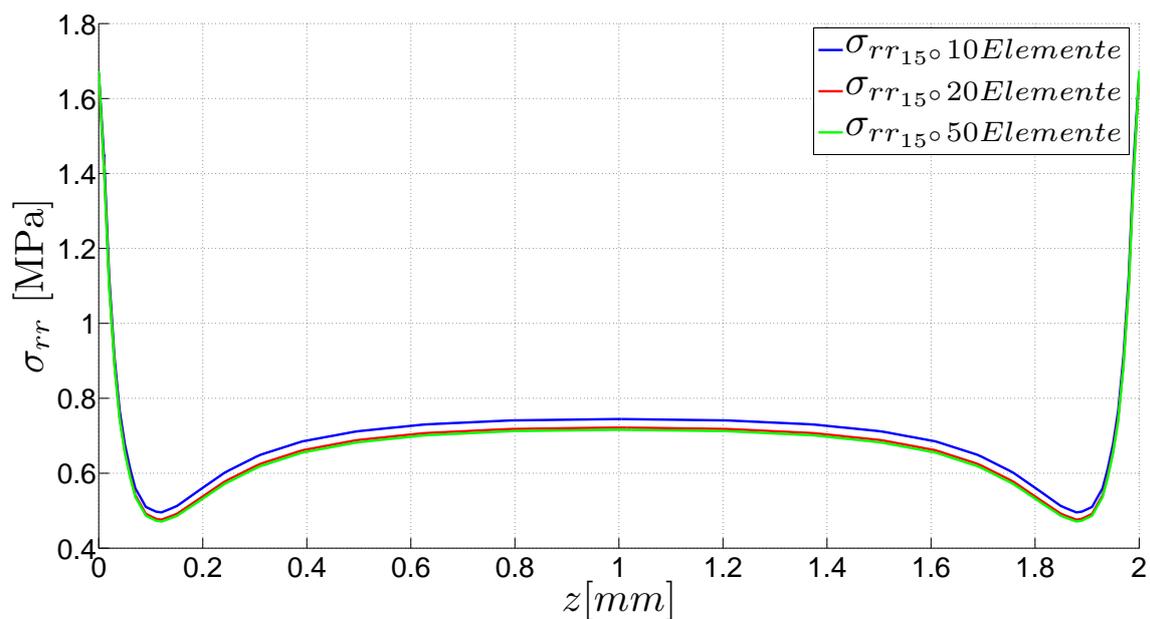


Abbildung 4.6: Verlauf der Normalspannung  $\sigma_{rr}$  entlang des Interfaces eines  $[0^\circ/90^\circ]$  Laminats für unterschiedliche Netzfeinheit

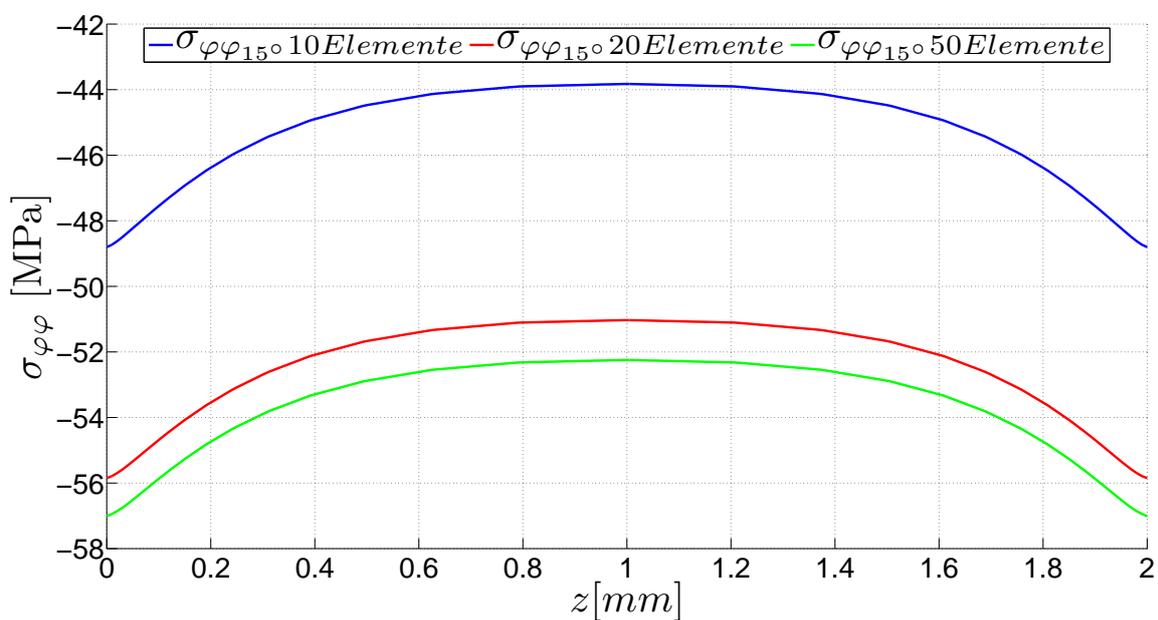


Abbildung 4.7: Verlauf der Umfangsspannung  $\sigma_{\varphi\varphi}$  entlang der Breite in der  $0^\circ$  Schicht in einem Abstand von 0.02mm vom Interface für unterschiedliche Netzfeinheit

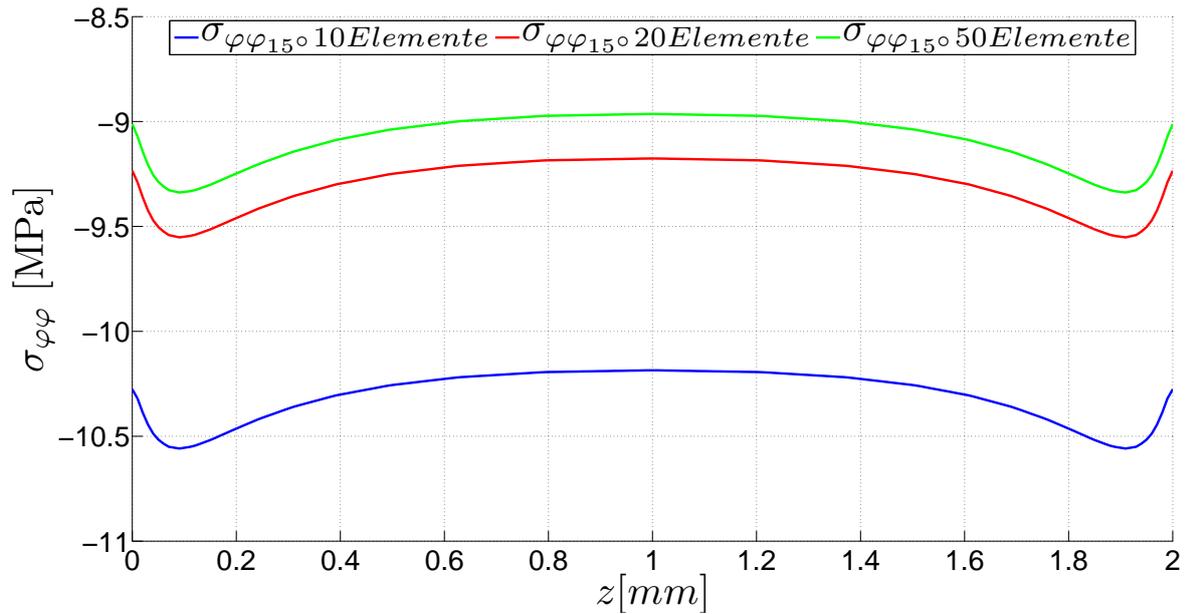


Abbildung 4.8: Verlauf der Umfangsspannung  $\sigma_{\varphi\varphi}$  entlang der Breite in der  $90^\circ$  Schicht in einem Abstand von 0.02mm vom Interface für unterschiedliche Netzfeinheit

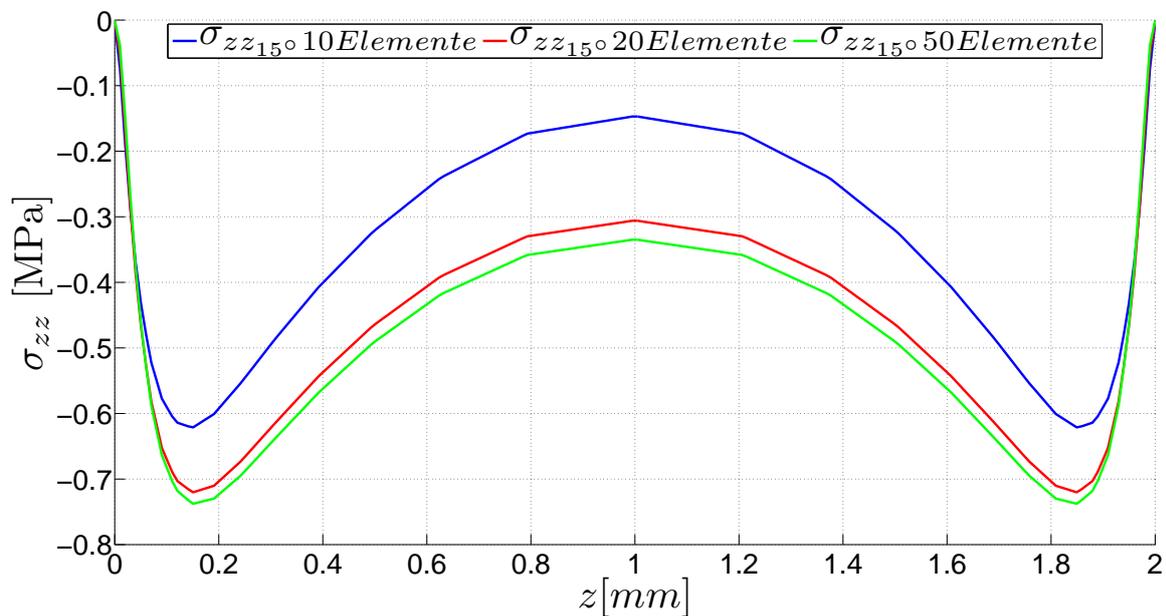


Abbildung 4.9: Verlauf der axialen Spannung  $\sigma_{zz}$  entlang der Breite in der  $0^\circ$  Schicht in einem Abstand von 0.02mm vom Interface für unterschiedliche Netzfeinheit

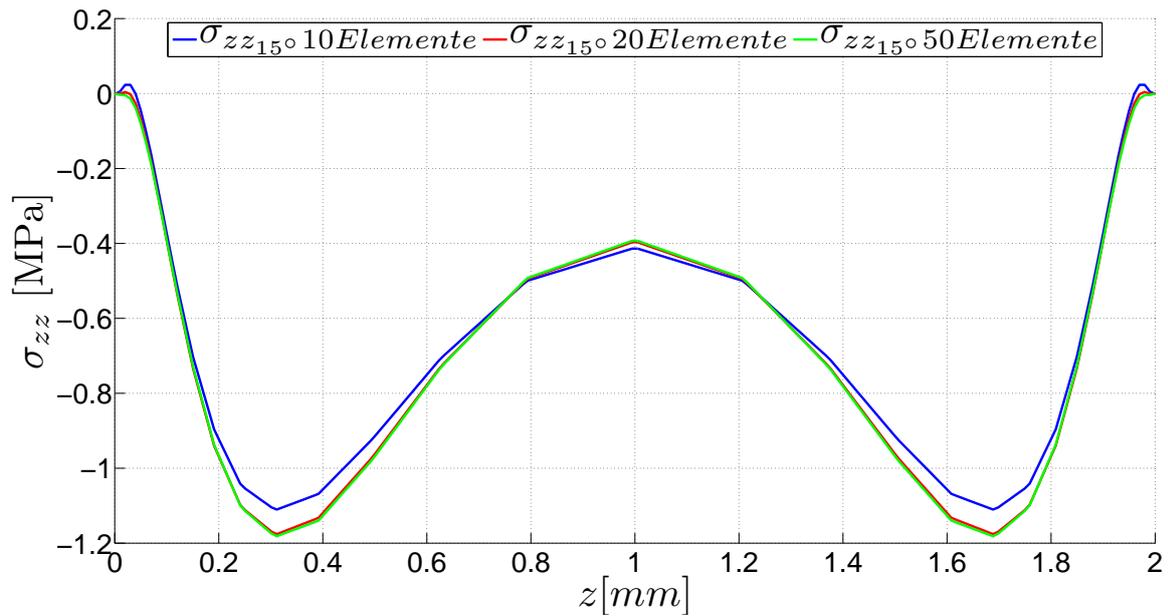


Abbildung 4.10: Verlauf der Axialspannung  $\sigma_{zz}$  entlang der Breite in der  $90^\circ$  Schicht in einem Abstand von 0.02mm vom Interface für unterschiedliche Netzfeinheit

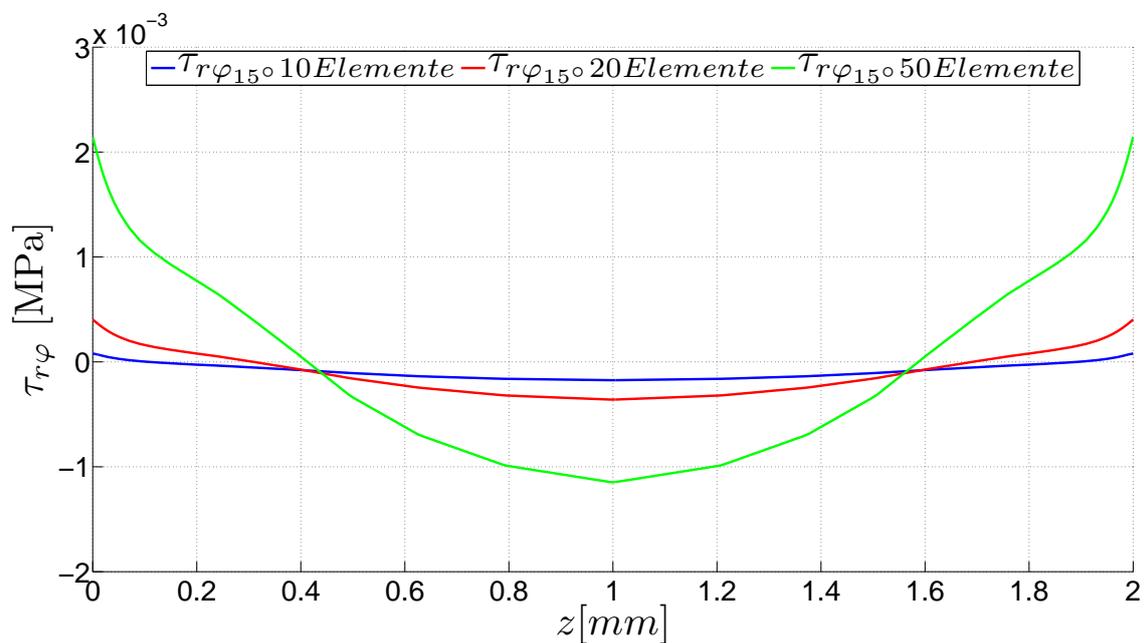


Abbildung 4.11: Verlauf der Schubspannung  $\tau_{r\varphi}$  entlang der Breite in der  $0^\circ$  Schicht in einem Abstand von 0.02mm vom Interface für unterschiedliche Netzfeinheit

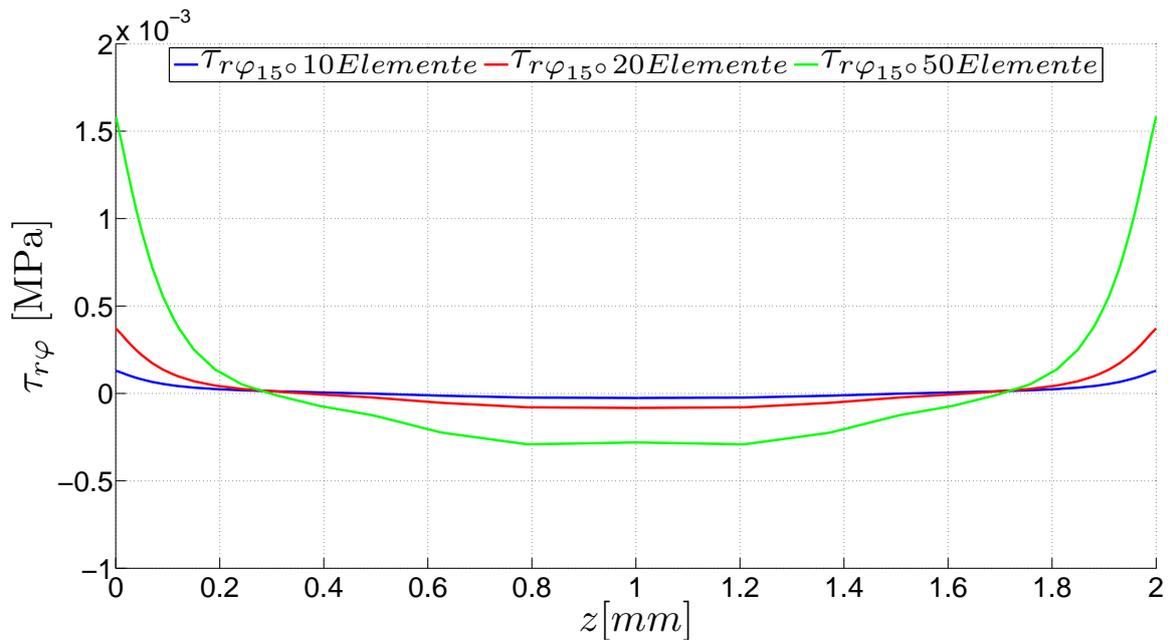


Abbildung 4.12: Verlauf der Schubspannung  $\tau_{r\varphi}$  entlang der Breite in der  $90^\circ$  Schicht in einem Abstand von 0.02mm vom Interface für unterschiedliche Netzfeinheit

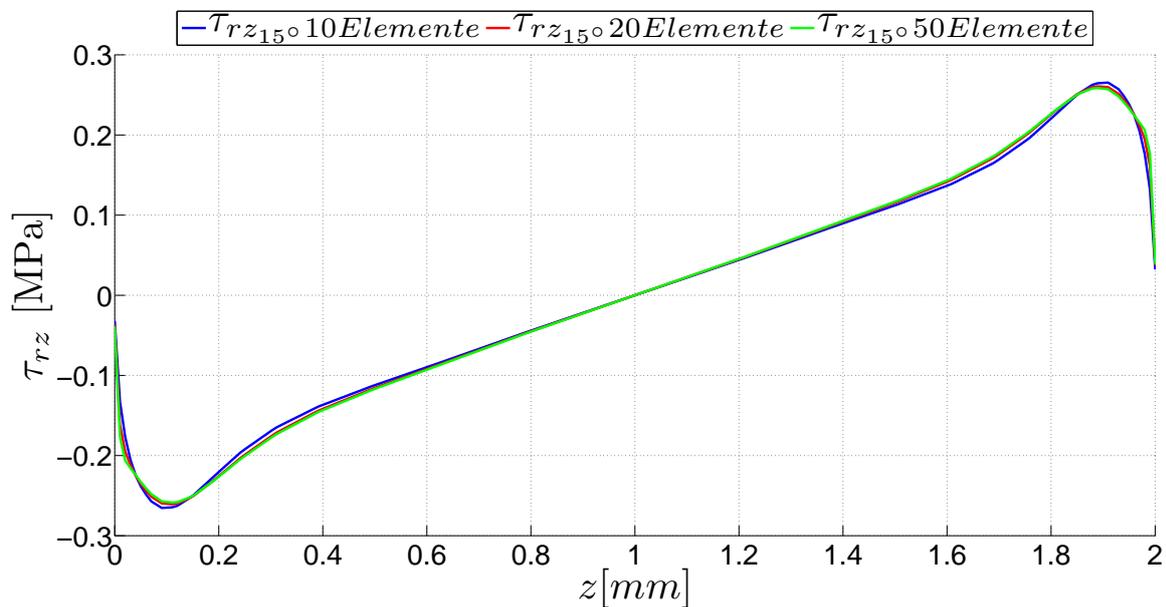


Abbildung 4.13: Verlauf der Schubspannung  $\tau_{rz}$  entlang der Breite in der  $0^\circ$  Schicht in einem Abstand von 0.02mm vom Interface für unterschiedliche Netzfeinheit

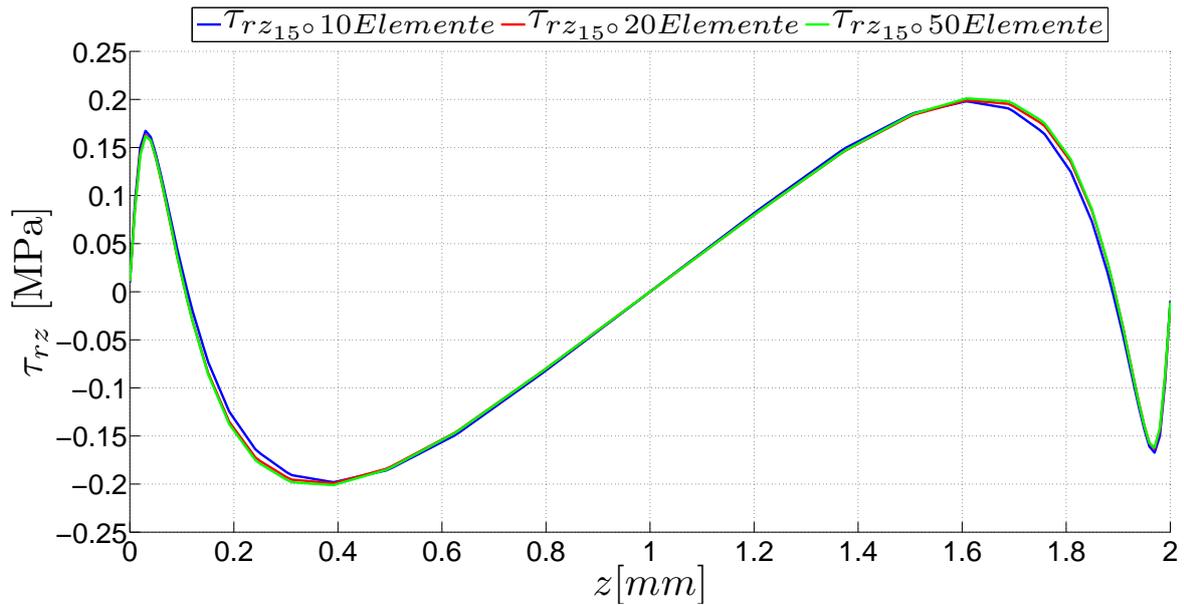


Abbildung 4.14: Verlauf der Schubspannung  $\tau_{rz}$  entlang der Breite in der  $90^\circ$  Schicht in einem Abstand von 0.02mm vom Interface für unterschiedliche Netzfeinheit

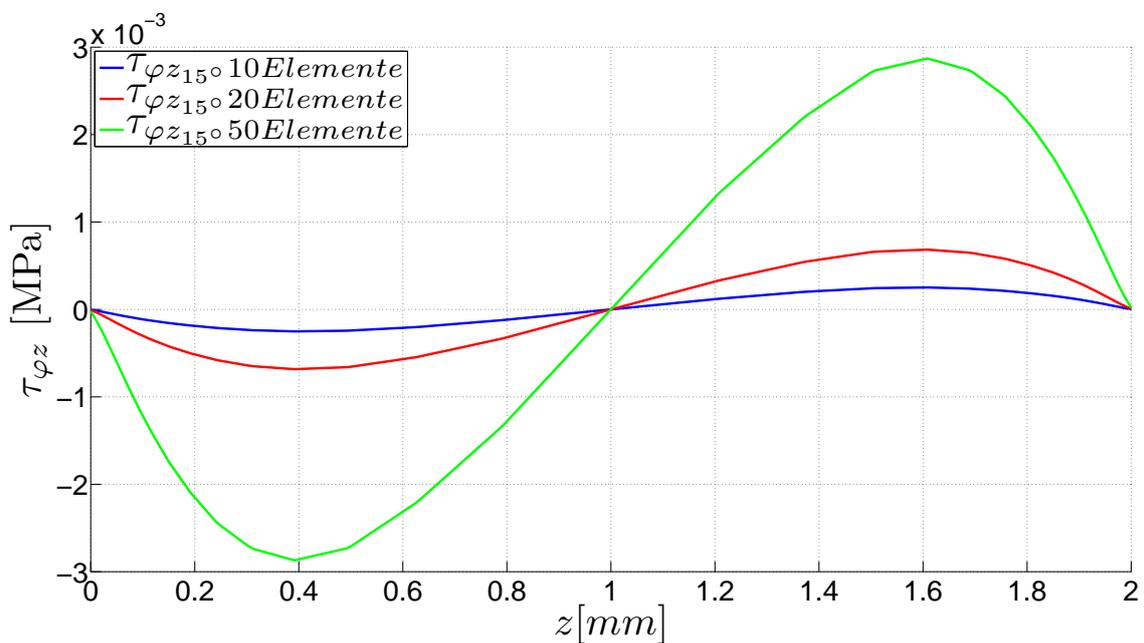


Abbildung 4.15: Verlauf der Schubspannung  $\tau_{\varphi z}$  entlang der Breite in der  $0^\circ$  Schicht in einem Abstand von 0.02mm vom Interface für unterschiedliche Netzfeinheit

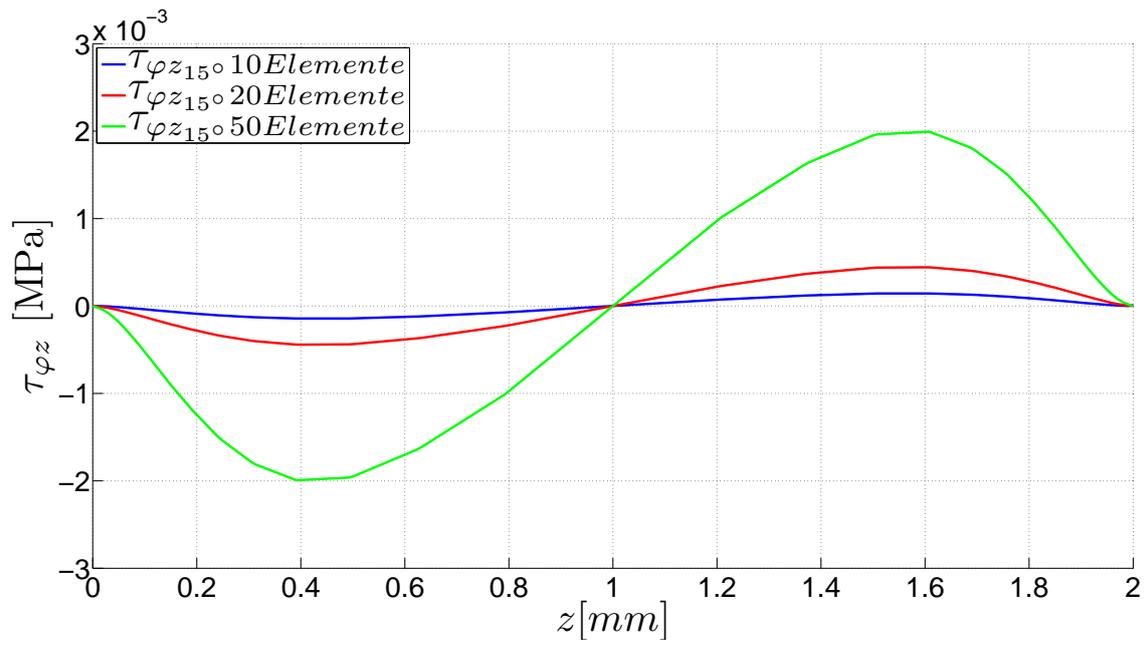


Abbildung 4.16: Verlauf der Schubspannung  $\tau_{\varphi z}$  entlang der Breite in der  $0^\circ$  Schicht in einem Abstand von 0.02mm vom Interface für unterschiedliche Netzfeinheit

## 5 Lösungsabschnitt

### 5.1 Kreuzlaminat $[0^\circ/90^\circ]$

Für die gegenwärtige Geometrie (Tabelle 4.2) und die Netzdichte, die sich aus der Konvergenzstudie ergeben hat, wird das gesamte Spannungsfeld entlang der Breite des Bauteils untersucht. Dabei werden von der Einspannstelle aus in einem Abstand von  $n \cdot 15^\circ$   $n = 1, 2, 3, 4, 5$ , die Spannungsverläufe dargestellt (Abb.4.1-oben), somit lassen sich mögliche Randeffekte nachweisen.

Die Abbildungen 5.1 bis 5.7 zeigen, dass die Spannungen unabhängig von der Auswertungsposition deckungsgleich verlaufen, was ein Beweis dafür ist, dass der Spannungszustand rotationssymmetrisch ist. Die Darstellungen der Komponenten  $\tau_{r\varphi}$  und  $\tau_{\varphi z}$  (Abb.5.8-5.11) sind scheinbar punktsymmetrisch, jedoch sind die Werte im Vergleich sehr klein, was im Rahmen einer FE-Rechnung als Null interpretiert werden kann. Zudem kann ein Kreuzverbund praktisch keine Schubspannung aufnehmen, da keine Fasern in  $45^\circ$  Richtung vorhanden sind. Die Radialspannung  $\sigma_{rr}$  zeigt einen bei Randeffekten typischen Verlauf, sie ist am Rand maximal und wird zum Laminatinneren kleiner, bis sie einen konstanten Wert erreicht (Abb.5.1). Die interlaminare Schubspannung  $\tau_{rz}$  zeigt in der Nähe des freien Randes kleine Spannungsspitzen an, die im Inneren des Laminats verschwinden (Abb.5.6-5.7). Die Randbedingungen für einen freien unbelasteten Rand (Gl.5.1, 5.2 und 5.3) sind innerhalb der Grenzen der FE-Genauigkeit erfüllt (Abb.5.4-5.9):

$$\sigma_{zz}(z = 0; z = b) = 0 \quad (5.1)$$

$$\tau_{rz}(z = 0; z = b) = 0 \quad (5.2)$$

$$\tau_{\varphi z}(z = 0; z = b) = 0 \quad (5.3)$$

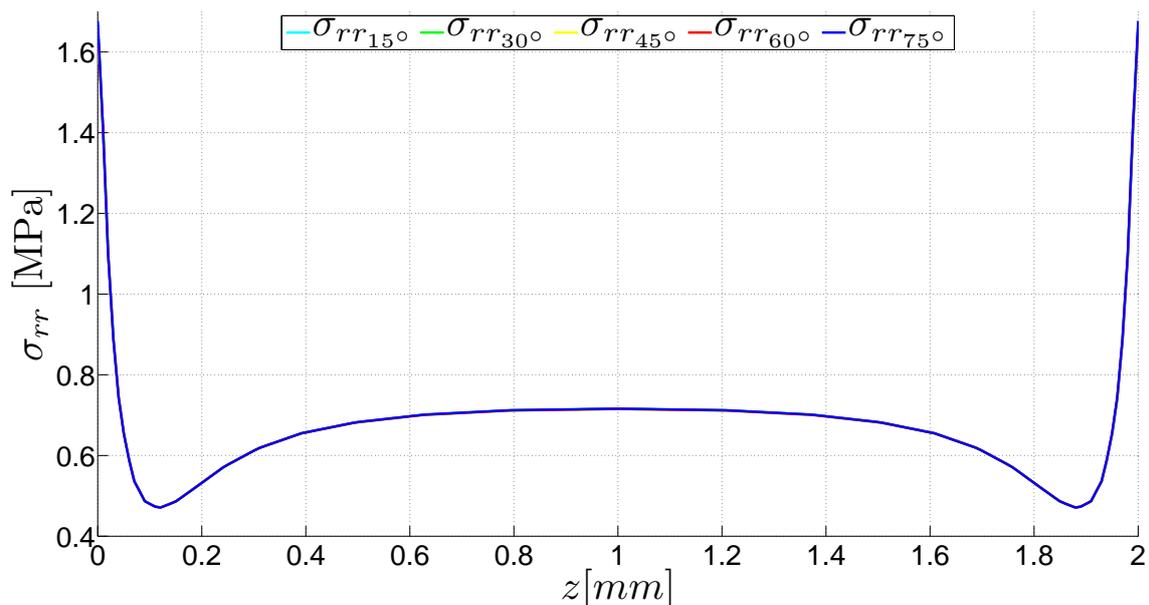


Abbildung 5.1: Verlauf der Normalspannung  $\sigma_{rr}$  über dem Interface eines  $[0^\circ/90^\circ]$  Laminats

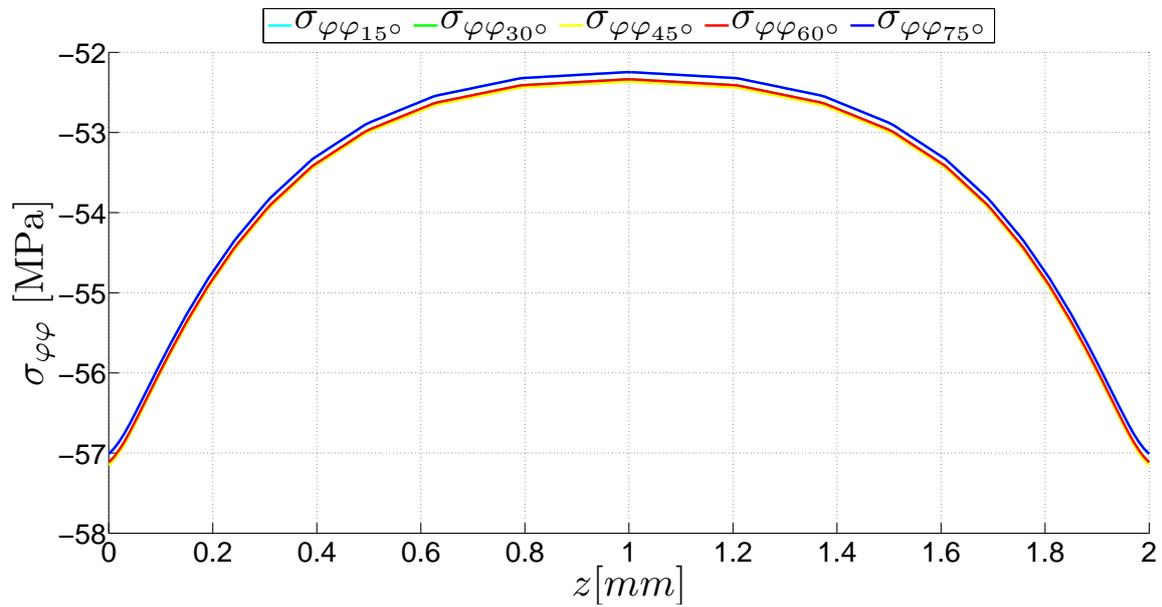


Abbildung 5.2: Verlauf der Umfangsspannung  $\sigma_{\varphi\varphi}$  entlang der Breite in der 0° Schicht in einem Abstand von 0.02mm vom Interface

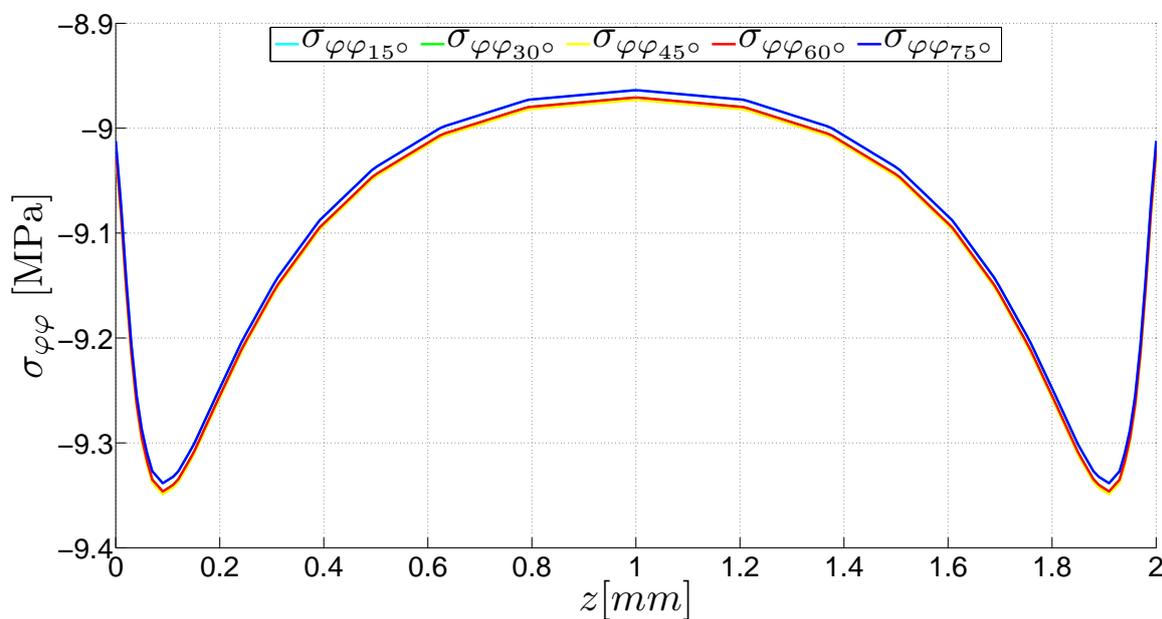


Abbildung 5.3: Verlauf der Umfangsspannung  $\sigma_{\varphi\varphi}$  entlang der Breite in der 90° Schicht in einem Abstand von 0.02mm vom Interface

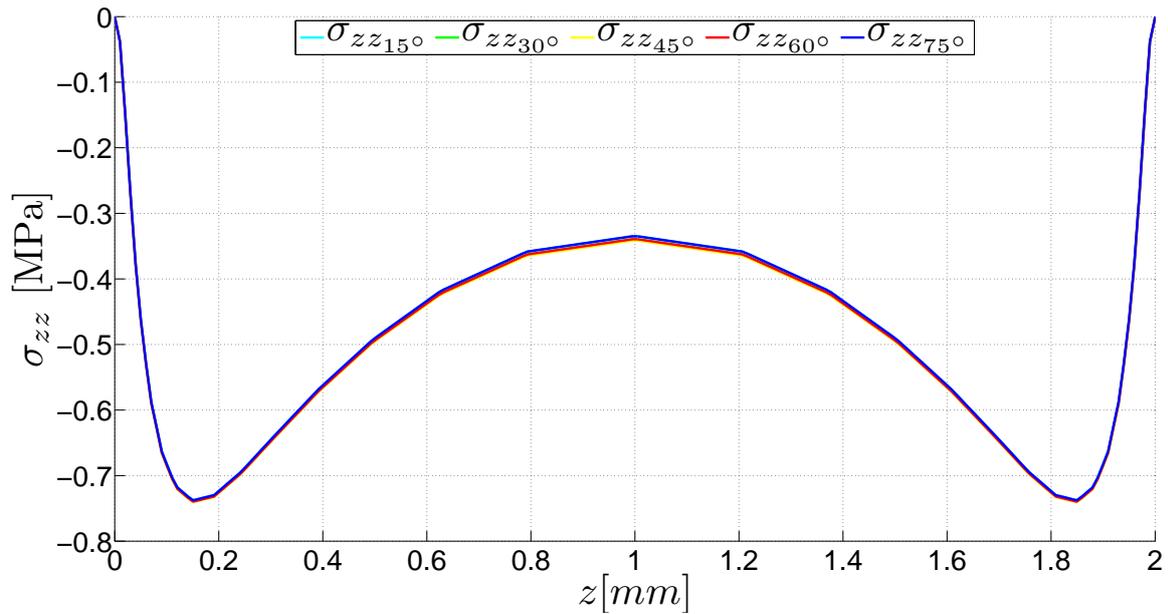


Abbildung 5.4: Verlauf der axialen Spannung  $\sigma_{zz}$  entlang der Breite in der 0°Schicht in einem Abstand von 0.02mm vom Interface

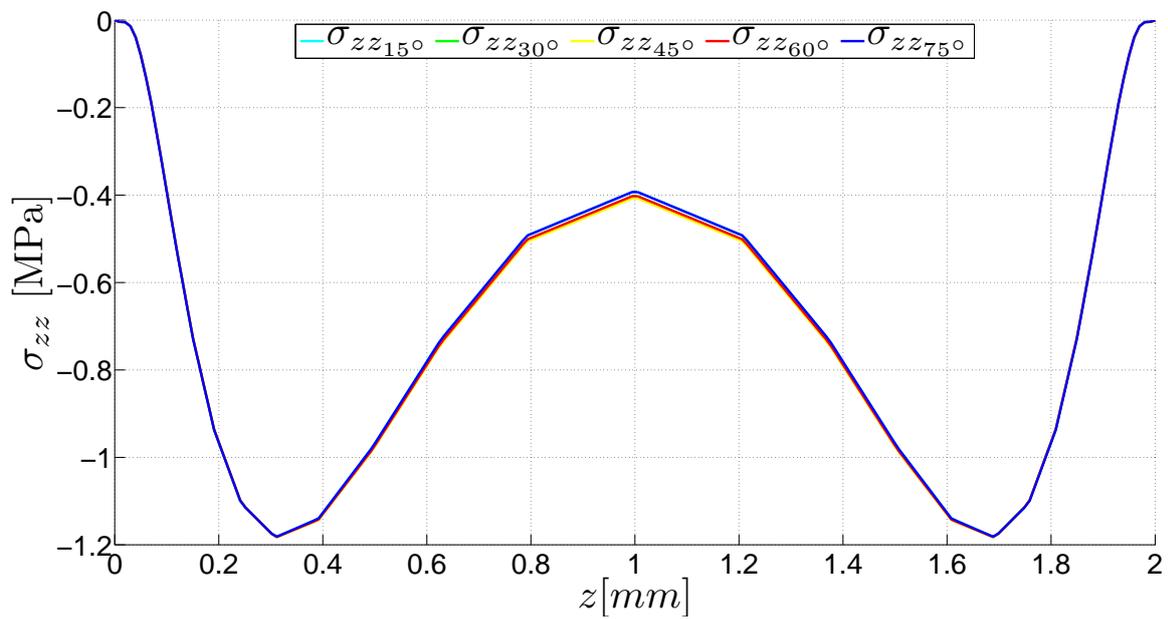


Abbildung 5.5: Verlauf der axialen Spannung  $\sigma_{zz}$  entlang der Breite in der 90°Schicht in einem Abstand von 0.02mm vom Interface

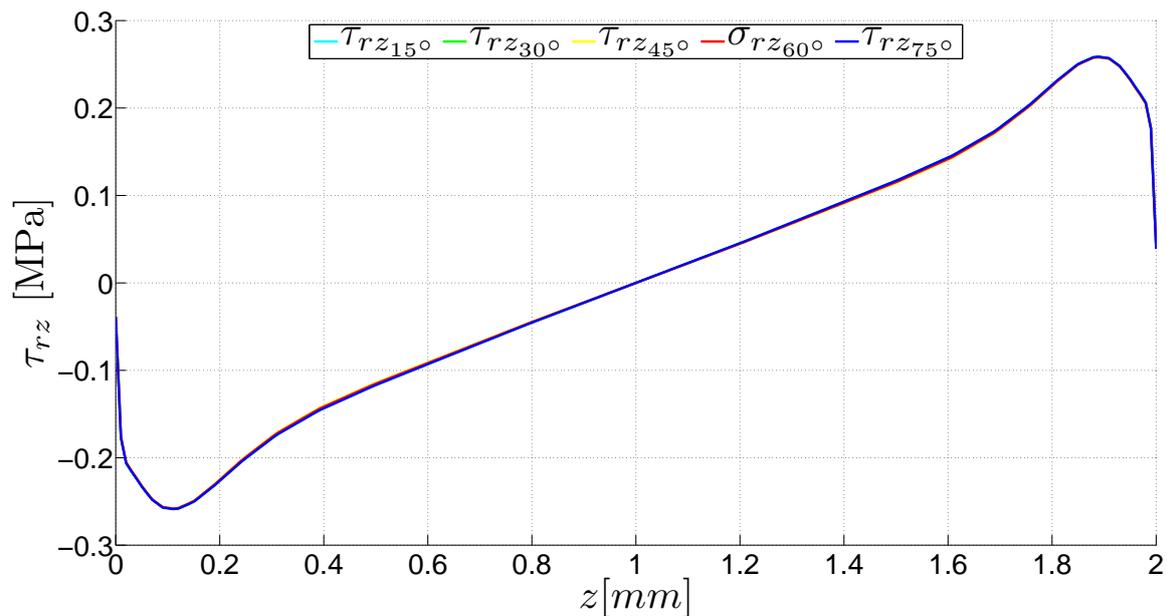


Abbildung 5.6: Verlauf der Schubspannung  $\tau_{rz}$  entlang der Breite in der 0° Schicht in einem Abstand von 0.02mm vom Interface

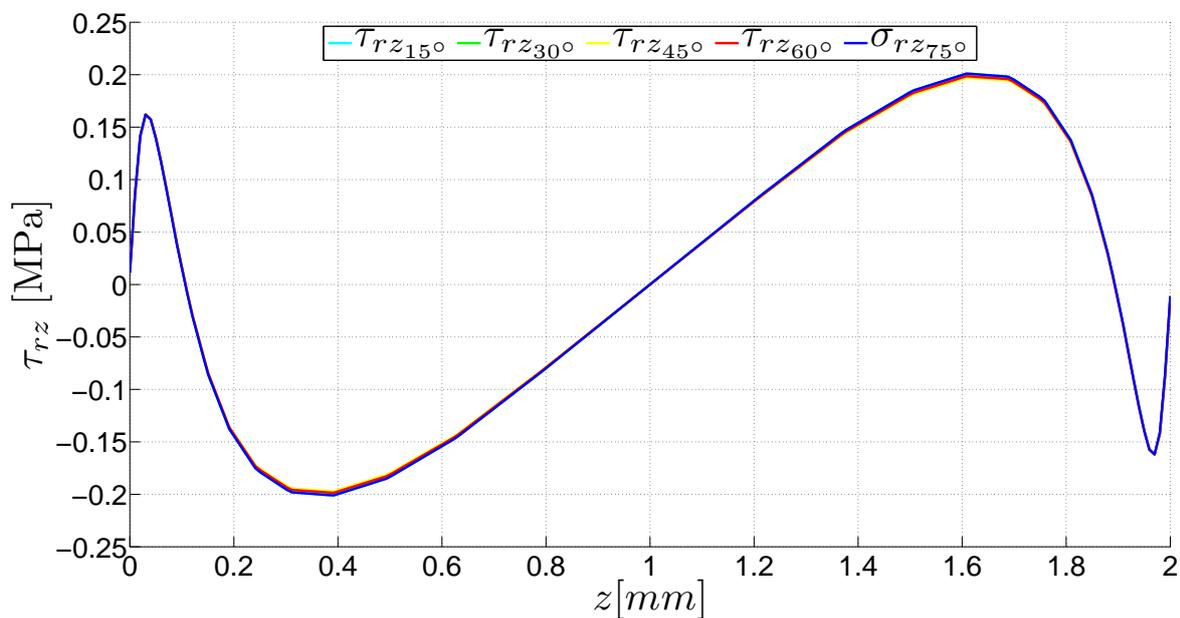


Abbildung 5.7: Verlauf der Schubspannung  $\tau_{rz}$  entlang der Breite in der 90° Schicht in einem Abstand von 0.02mm vom Interface

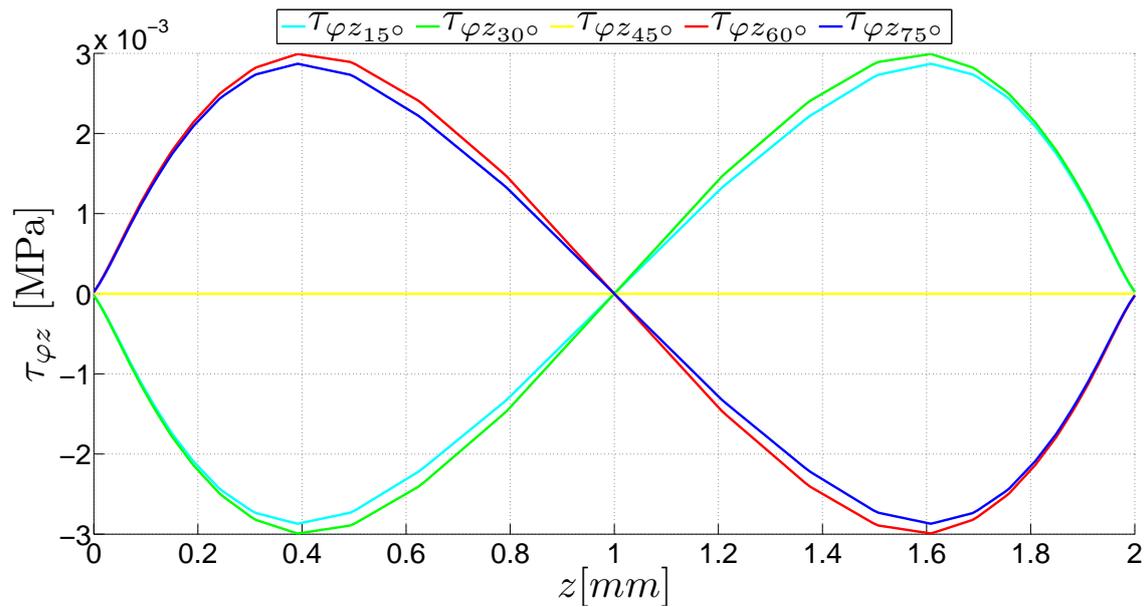


Abbildung 5.8: Verlauf der Schubspannung  $\tau_{\varphi z}$  entlang der Breite in der 0° Schicht in einem Abstand von 0.02mm vom Interface

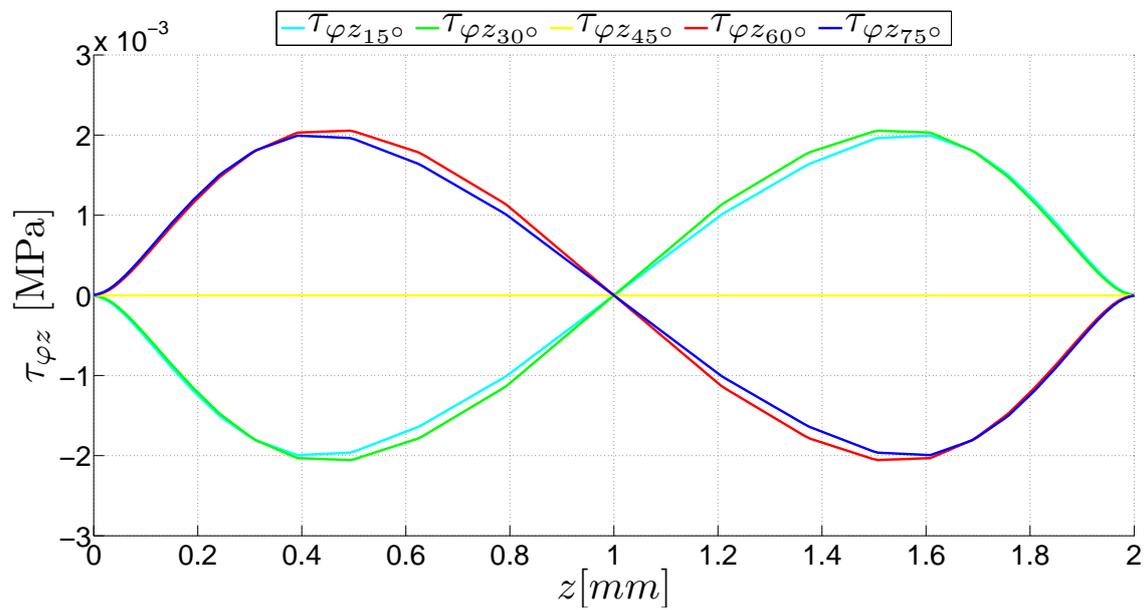


Abbildung 5.9: Verlauf der Schubspannung  $\tau_{\varphi z}$  entlang der Breite in der 90° Schicht in einem Abstand von 0.02mm vom Interface

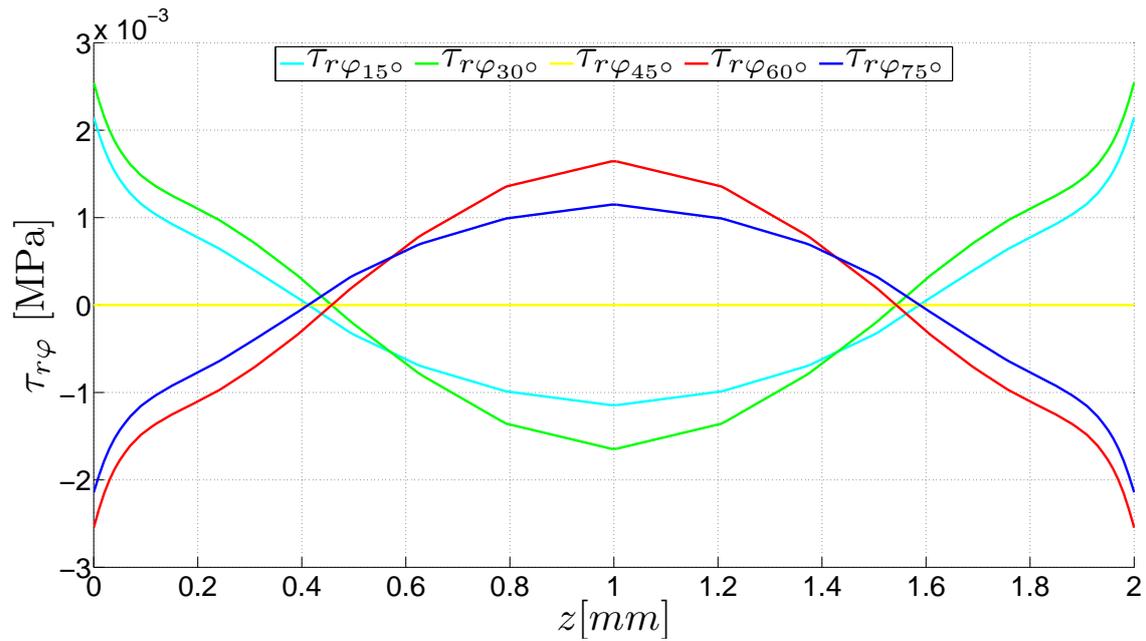


Abbildung 5.10: Verlauf der Schubspannung  $\tau_{r\varphi}$  entlang der Breite in der 0° Schicht in einem Abstand von 0.02mm vom Interface

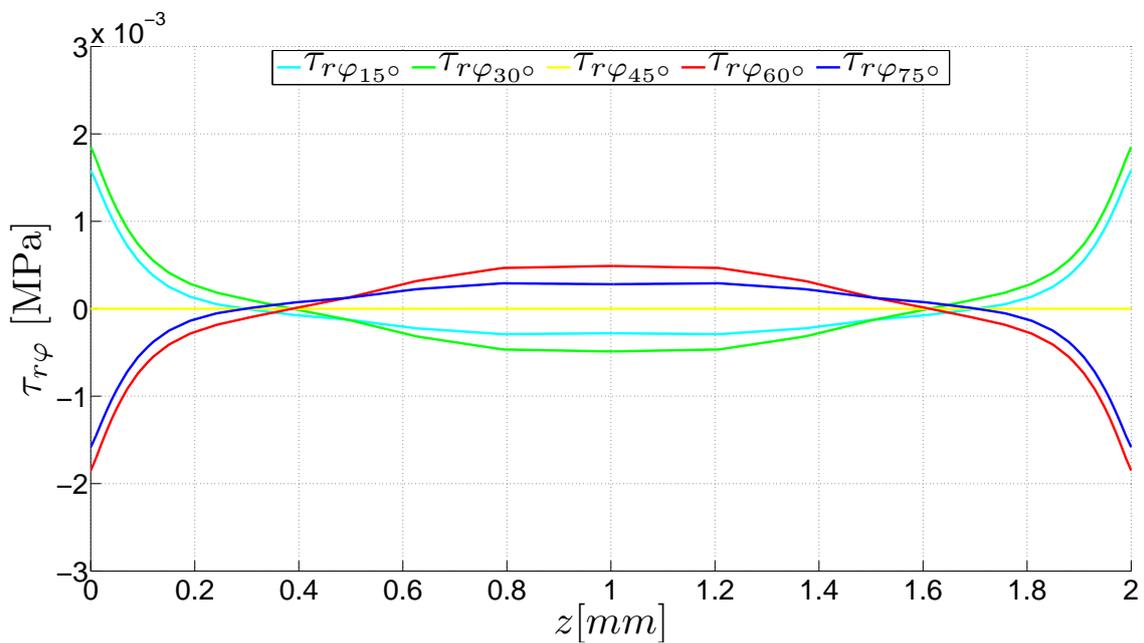


Abbildung 5.11: Verlauf der Schubspannung  $\tau_{r\varphi}$  entlang der Breite in der 90° Schicht in einem Abstand von 0.02mm vom Interface

Nachdem der Beweis bezüglich der Rotationssymmetrie erbracht wurde, ist nun dazu überzugehen, die Spannungen mittels dreidimensionaler Graphiken darzustellen, so lässt sich der Spannungszustand besser verstehen. Die Auswertung erfolgt bei  $\varphi = 45^\circ$ , entlang der gesamten Laminatdicke  $t$  sowie über die gesamte Verbundbreite  $b$ .

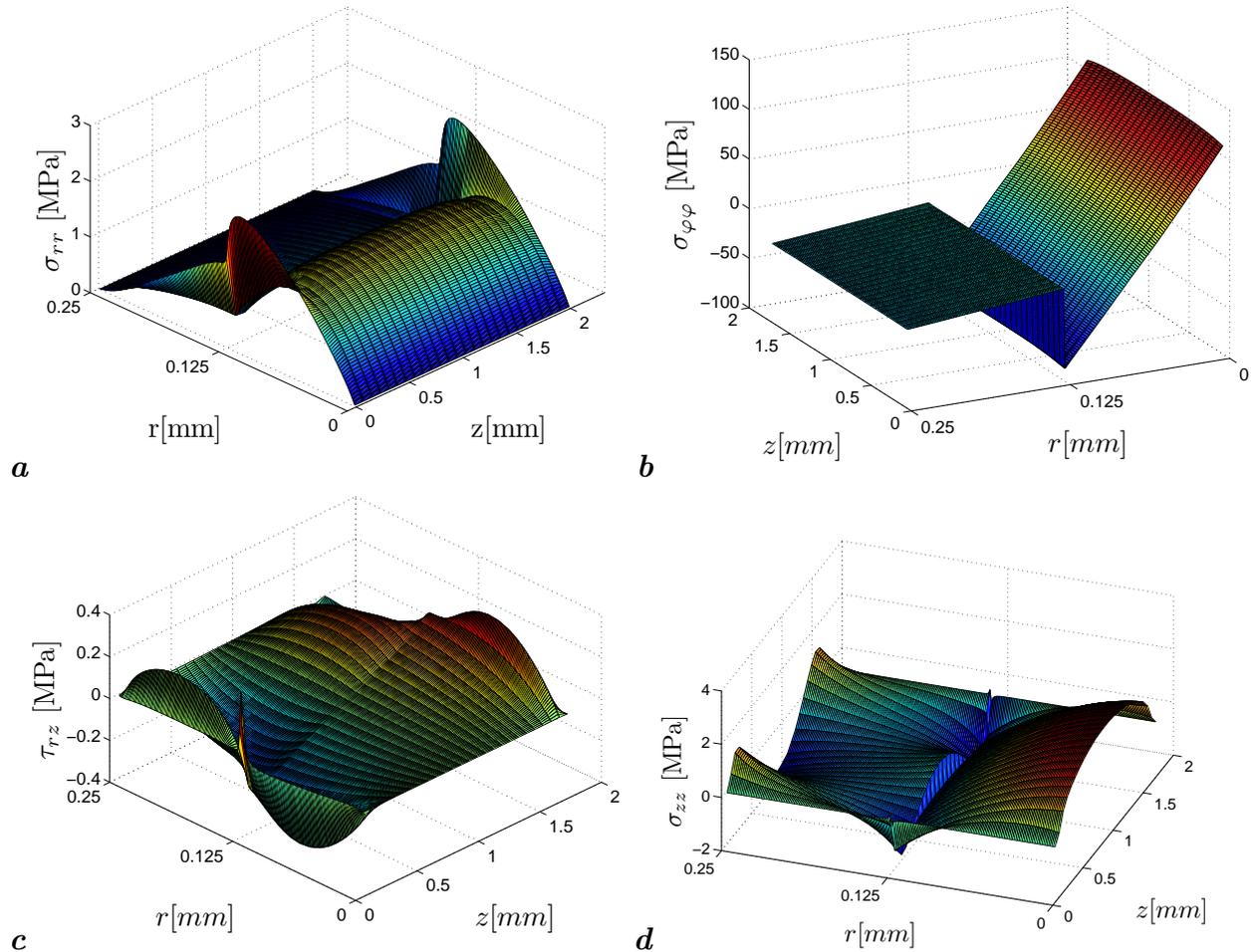


Abbildung 5.12: Spannungsfeld in ein  $[0^\circ/90^\circ]$ -gekrümmtes Laminat unter reiner Biegung  $M = 1 \text{ Nmm}$  im Intervall  $0 \leq r \leq 0.25$  und  $0 \leq z \leq 2$

## 5.2 Winkellaminat $[\pm 45^\circ]$

Die Verformungen können anhand der Anisotropie der Laminat einzelschichten und anhand des Lagenaufbaus erklärt werden:

Aufgrund der unterschiedlichen Schubkopplungseigenschaften kommt es zu einer Schubdeformation am Rand. Man stellt sich die Lagen zunächst voneinander getrennt vor. Die unterschiedlichen Schubkopplungseigenschaften bewirken eine unterschiedlich starke Schubdeformation. Es wird sich also ein Unterschied in den Schubverzerrungen ergeben, und diese Ungleichmäßigkeit in den Verzerrungen beeinflusst den Spannungszustand. Denn das Hookesche Gesetz besagt, dass sich der Spannungszustand proportional zum Verzerrungszustand einstellt. Dieser Sachverhalt lässt sich anhand des Verlaufes der Normalspannung  $\sigma_{rr}$  entlang des Interfaces beweisen: Im Vergleich zum Kreuzverbund ist festzustellen, dass diese interlaminare Spannung auch einen für Randeffekte typischen Trend zeigt (Abb.5.13), jedoch sind die Verläufe bezüglich der halben Laminatbreite nicht

symmetrisch, außer bei der Auswertung bei  $\varphi = 45^\circ$ . D.h die maximalen und minimalen Werte an den Rändern sind nicht gleich (Abb.5.21), außerdem ist eine Umstellung der Darstellungen zu sehen wobei, die  $\varphi = 45^\circ$  Position den Wendepunkt markiert. Dies ist auf die erwähnte Schubdeformation und die damit verbundenen Schubverzerrungen zurückzuführen.

Die Rotationssymmetrie ist zum Teil nicht erfüllt. Neben den bereits erwähnten Gründen, können auch die Randbedingungen (Lagerung des Bauteils und die Krafteinleitung) zur Behinderung der Deformationen führen und somit den Spannungszustand beeinflussen. Ferner ist der Lagenaufbau unsymmetrisch, was eine Biege-Dehn-Kopplung mit sich bringt.

Die Umfangsspannung  $\sigma_{\varphi\varphi}$  entlang des Querschnittes im Inneren des Laminates weist einen Sprung auf (Abb.5.14), wobei aufgrund der Tatsache, dass die Längssteifigkeit der  $+45^\circ$ - und  $-45^\circ$ -Lagen gleich ist, ein kontinuierlicher Spannungsverlauf zu erwarten wäre. Durch die hier aufgebrachte Last ist zu erkennen, dass ein Teilbereich der unteren Struktur auf Zug beansprucht wird, während ein Segment der oberen Schicht einer Druckspannung unterliegt.

Die in-plane (intralaminare) Schubspannung  $\tau_{\varphi z}$  zeigt einen bezüglich des Interfaces annähernd symmetrischen Verlauf, wobei der Ober- und Unterrand eine positive Spannung aufweisen, die zum Interface hin negativ wird (Abb.5.15). Sie erfüllt mit guter Näherung die Randbedingungen für einen freien unbelasteten Rand, mit der Ausnahme von kleinen Störungen in der Nähe des Interfaces (Abb.5.16). Am freien Rand ist also die intralaminare Schubspannung  $\tau_{\varphi z}$  gleich Null; damit nun das Kräftegleichgewichtskriterium im Randbereich in Umfangsrichtung gewährleistet wird, muss eine die interlaminare Schubspannung  $\tau_{r\varphi}$  an der Grenzfläche zwischen der  $+45^\circ$ - und  $-45^\circ$ -Lage entstehen.

Die interlaminare Schubspannung  $\tau_{r\varphi}$  weist am freien Rand im Interface zwischen der  $+45^\circ$ - und  $-45^\circ$ - Schicht einen signifikanten Spannungsanstieg auf, der theoretisch singuläre Werte annimmt, mit zunehmenden Abstand vom freien Rand sinkt sie dann schlagartig bis, sie zu Null wird. (Abb.5.17)

Die interlaminare Schubspannung  $\tau_{rz}$  tritt mit der Entstehung von Spannungsspitzen in der Nähe des freien Randes auf. Die Werte sind im Vergleich zu  $\tau_{r\varphi}$  sehr klein was ein Hinweis dafür ist, dass diese Spannungskomponent bei der Auslegung des Bauteils eine untergeordnete Rolle spielt. Die Randbedingung für einen freien unbelasteten Randes wird am Interface-Rand nicht präzise erfüllt, jedoch ist in dessen Umgebung eine gute Genauigkeit erreicht worden (Abb.5.18).

Die in-plane (intralaminare) Spannung  $\sigma_{zz}$  taucht sowohl in der  $+45^\circ$ - als auch in der  $-45^\circ$ - Schicht im gleichen Umfang auf: der Verlauf der Spannung entlang des Querschnittes zeigt deutlich, dass in jeder Lage ein identisches Verhalten vorhanden ist (Abb.5.19). Auch hier lässt sich die Randbedingung für einen freien unbelasteten Rand gut bestätigen (Abb.5.20). In Abbildung 5.22 ist der sich ergebende Spannungszustand bei  $\varphi = 45^\circ$  im Intervall  $0 \leq r \leq 0.25$  und  $0 \leq z \leq 2$  in Form von 3D-Graphiken dargestellt.

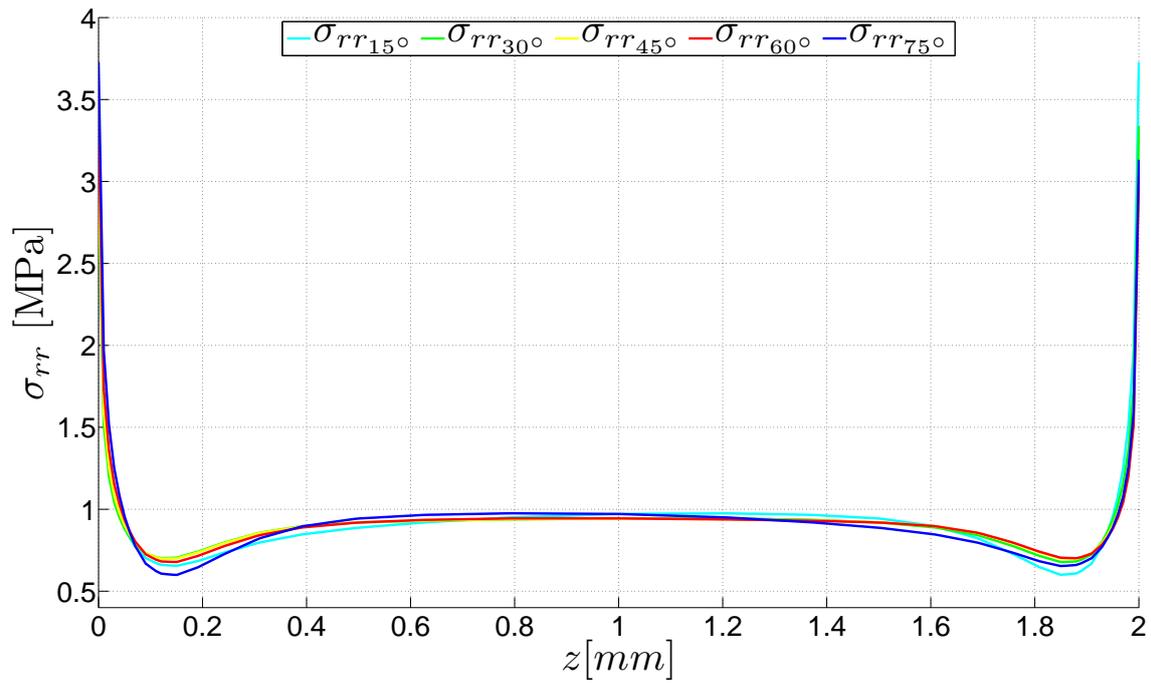


Abbildung 5.13: Verlauf der Normalspannung  $\sigma_{rr}$  entlang des Interfaces in ausgewählte Positionen längs des Umfangs

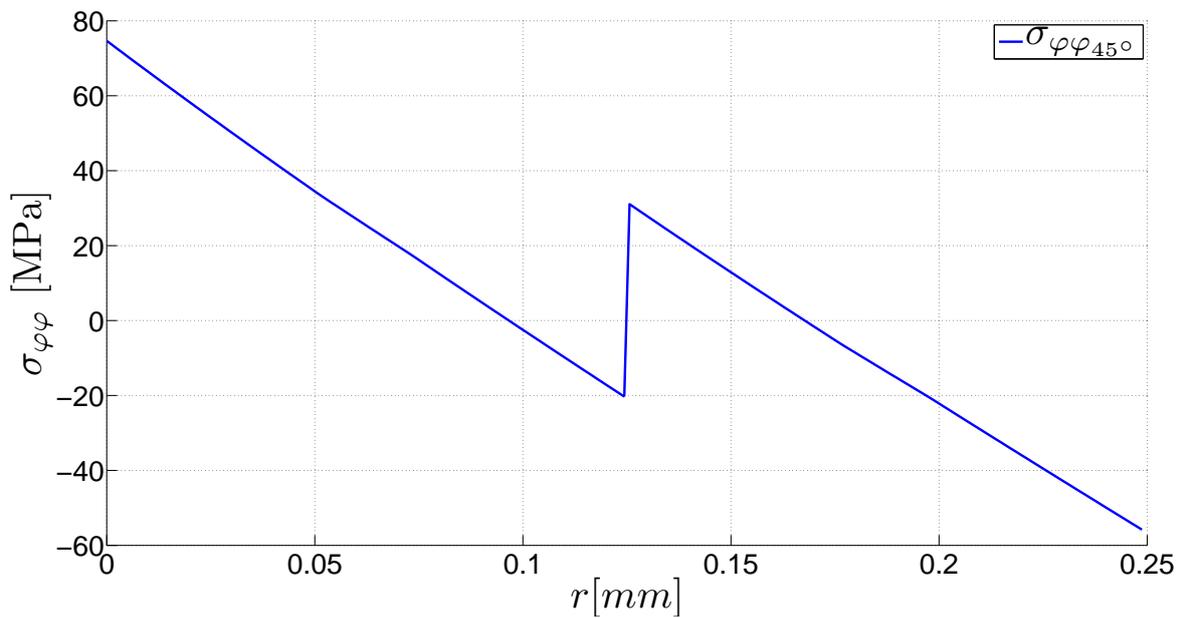


Abbildung 5.14: Verlauf der Spannung  $\sigma_{\varphi\varphi}$  über dem Querschnitt im Inneren eines  $[\pm 45^\circ]$  Winkellaminats

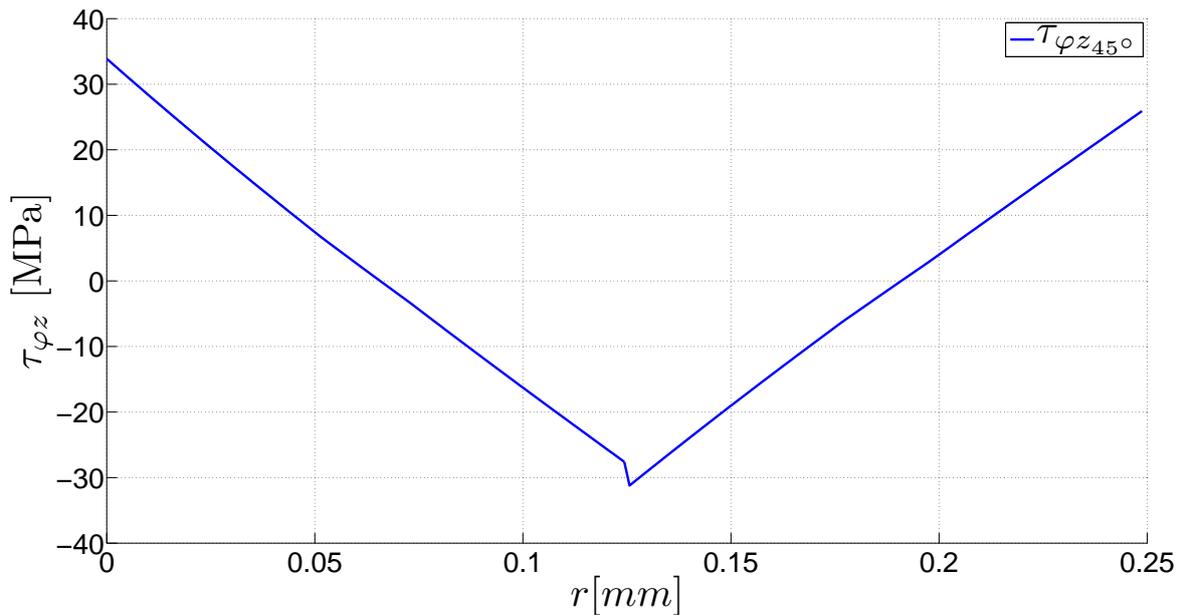


Abbildung 5.15: Verlauf der intralaminaren Schubspannung  $\tau_{\varphi z}$  über dem Querschnitt im Inneren eines  $[\pm 45^\circ]$  Winkellaminats

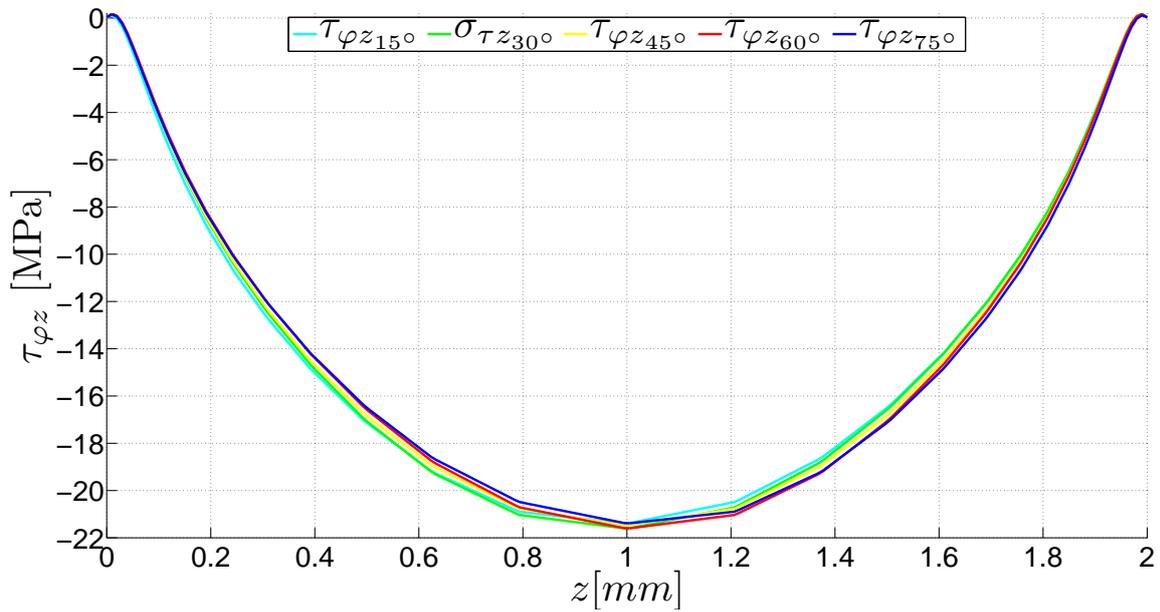


Abbildung 5.16: Verlauf der Schubspannung  $\tau_{\varphi z}$  entlang der Breite in der  $-45^\circ$  Schicht in einem Abstand von 0.02 mm vom Interface

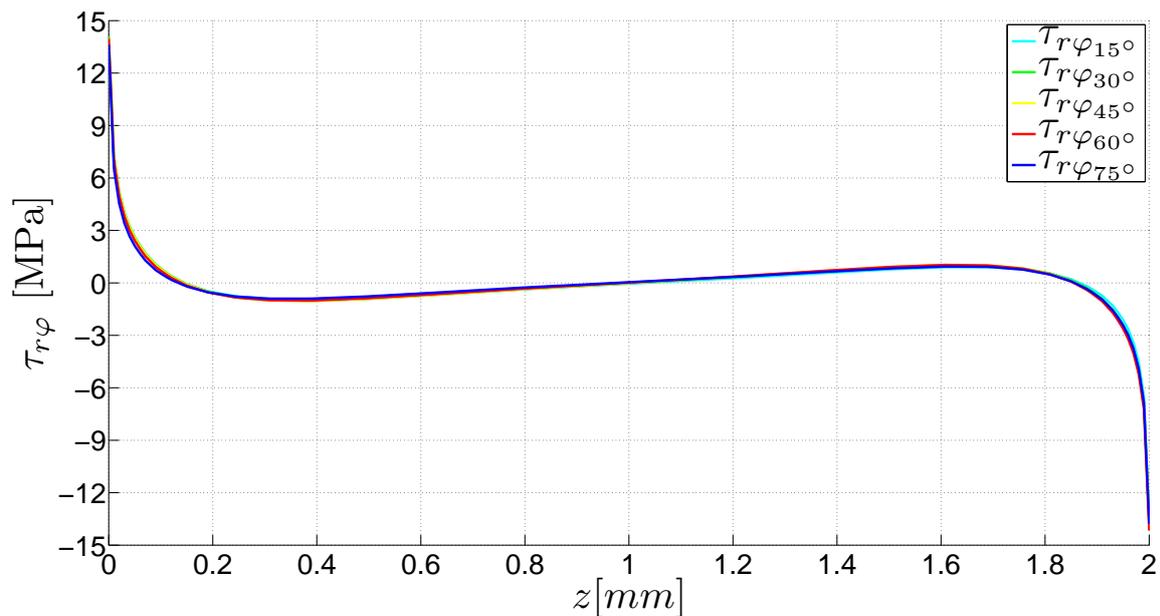


Abbildung 5.17: Verlauf der interlaminaren Schubspannung  $\tau_{r\varphi}$  über dem Interface eines  $[\pm 45^\circ]$  Laminats

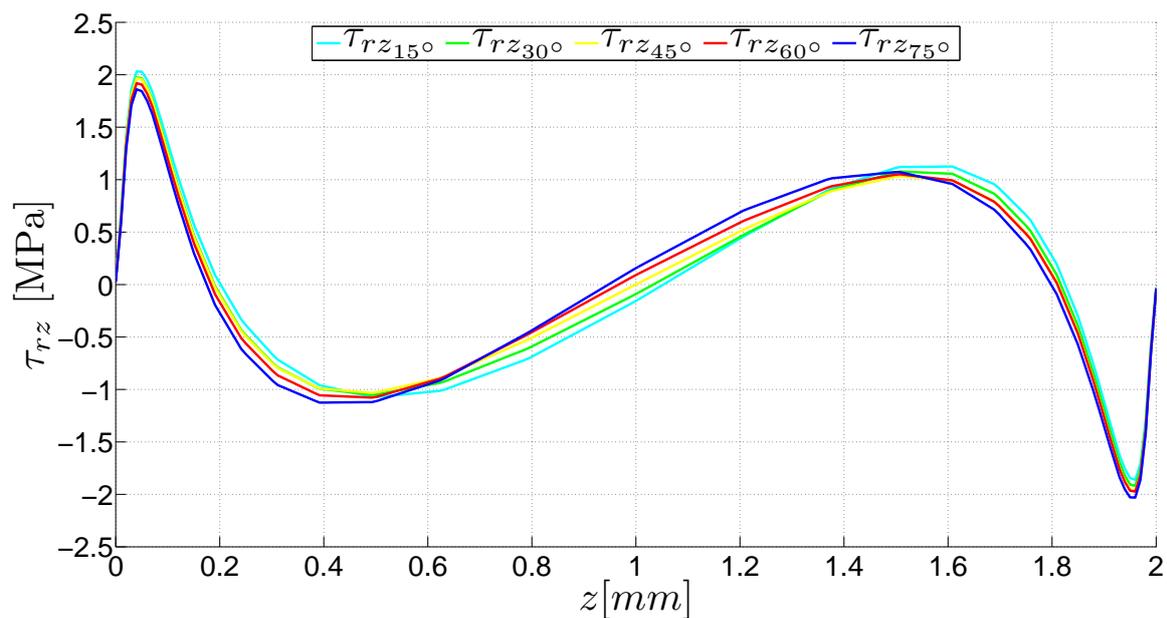


Abbildung 5.18: Verlauf der Schubspannung  $\tau_{rz}$  entlang der Breite in der  $+45^\circ$  Schicht in einem Abstand von 0.01mm vom Interface

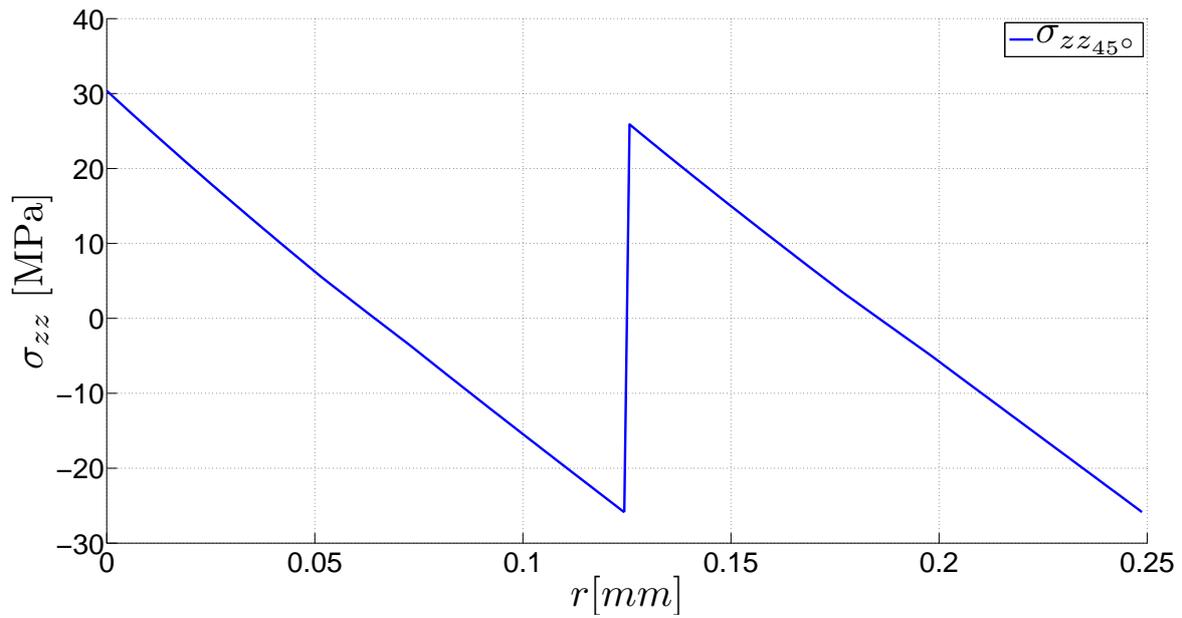


Abbildung 5.19: Verlauf der Spannung  $\sigma_{zz}$  über dem Querschnitt im Inneren eines  $[\pm 45^\circ]$  Winkellaminats

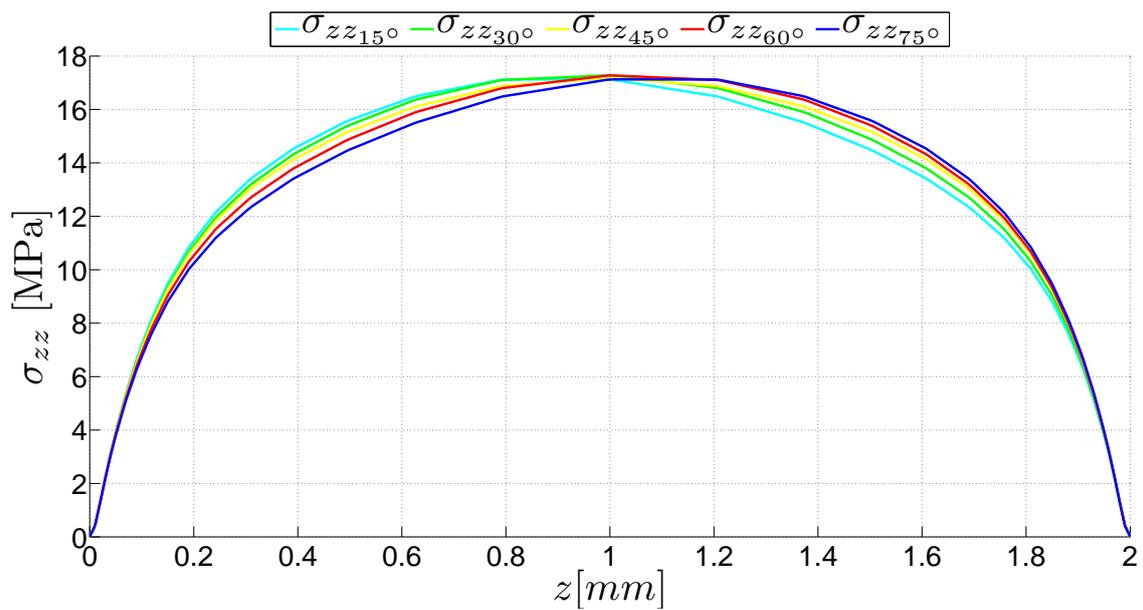


Abbildung 5.20: Verlauf der Spannung  $\sigma_{zz}$  entlang der Breite in der  $-45^\circ$  Schicht in einem Abstand von 0,02 mm vom Interface

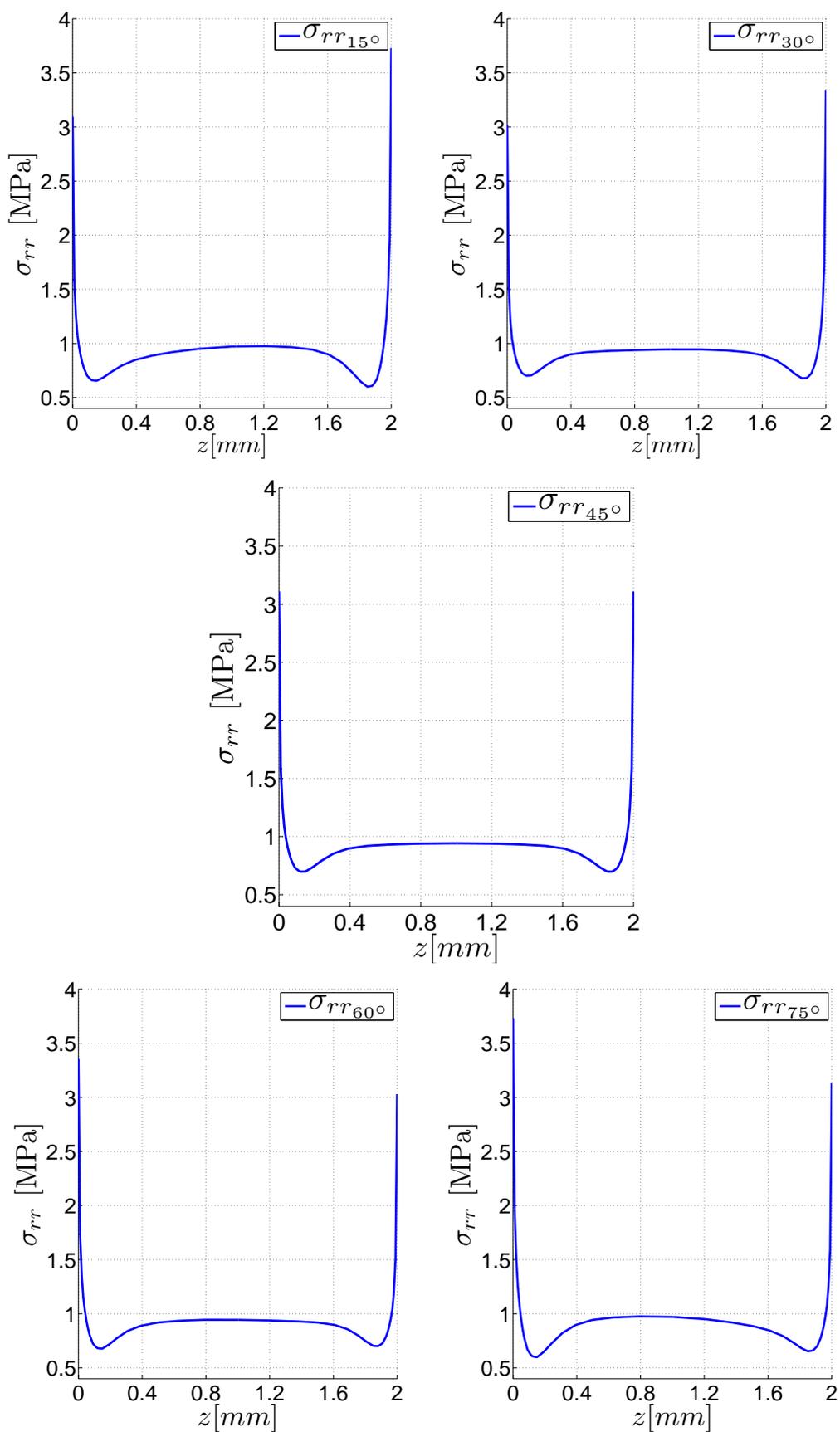


Abbildung 5.21: Verlauf der Radialspannung  $\sigma_{rr}$  über dem Interface in verschiedenen Auswertungspositionen

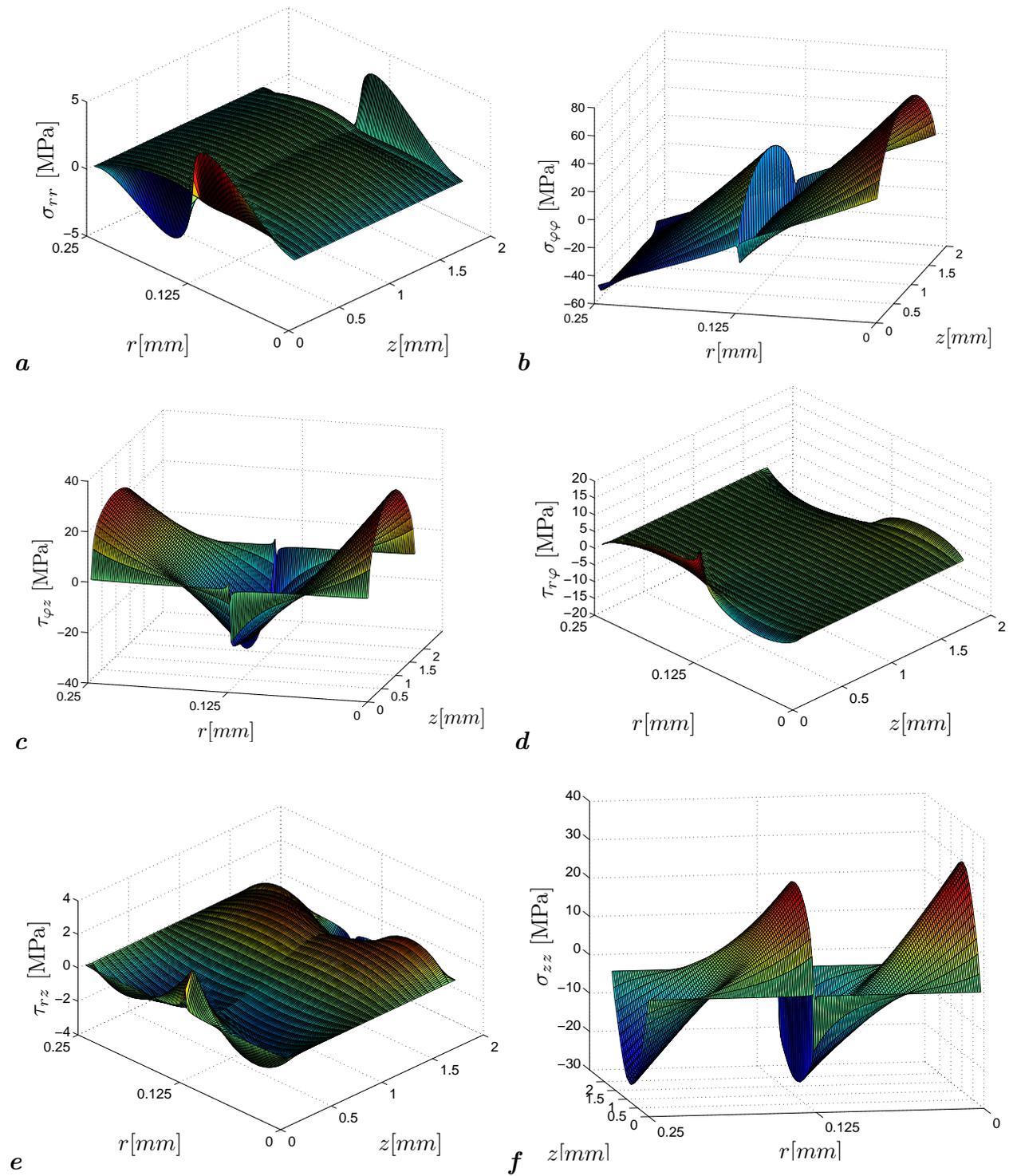


Abbildung 5.22: Spannungsfeld in einem  $[\pm 45^\circ]$ -gekrümmten Laminat unter reiner Biegung  $M = 1 \text{ Nm}$  im Intervall  $0 \leq r \leq 0.25$  und  $0 \leq z \leq 2$

## 5.3 Parameterstudie

In diesem Abschnitt ist der Einfluss von verschiedenen Parametern auf die Spannungen im Hinblick auf den Randeffect zu untersuchen. Dabei können sowohl Geometrie, Lagenaufbau als auch die physikalischen Größen variiert werden.

### 5.3.1 Winkellaminat (Angle ply) $[\pm\alpha^\circ]$

Im Folgenden wird die Auswirkung eines unsymmetrischen Winkellaminats auf den Randeffect analysiert; dies geschieht, indem der Lagenaufbau folgendermaßen modifiziert wird:

Modell	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Lagenaufbau	$[\pm 10^\circ]$	$[\pm 20^\circ]$	$[\pm 30^\circ]$	$[\pm 40^\circ]$	$[\pm 45^\circ]$	$[\pm 50^\circ]$	$[\pm 60^\circ]$	$[\pm 70^\circ]$	$[\pm 80^\circ]$
$\tau_{r\varphi-max} [MPa]$	2.3	7.45	13.85	15.87	14	10.9	4.6	1.4	0.3
$\tau_{rz-max} [MPa]$	0.165	1	2.23	3.3	3.55	3.48	2.46	1.07	0.204
$\sigma_{rr-max} [MPa]$	-	0.86	1.86	3.03	3.1	2.83	1.98	1.49	1.25

Tabelle 5.1: Variation des Lagenaufbaus für ein Winkellaminat

Der Einfluss wird durch die Auswertung der interlaminaren Schubspannung  $\tau_{r\varphi}$  im Interface für die in der Tabelle 5.1 erwähnten Laminat deutlich; so ist wie erwartet am Rand ein Spannungsanstieg zu verzeichnen (Abb.5.25). Jedoch ist abhängig vom Lagenaufbau ein Unterschied bei den maximalen Werte zu erkennen. Eine Interpolation zwischen den in der Tabelle 5.1 aufgelisteten Ergebnisse hat gezeigt, dass ein  $[\pm 38^\circ]$  Laminat die höchste Spannung am Rand aufweist und eine Zunahme bzw. Abnahme des Laminatwinkels von diesem Wert aus zu einer kontinuierlichen Minimierung der Spannungsspitze am Rand führt (Abb.5.23). Um den Randeffect in Winkellaminaten zu reduzieren, ist es also ratsam einen  $[\pm 40^\circ]$  Lagenaufbau sowie eine  $[\pm 15^\circ]$  Variation davon, wenn möglich zu vermeiden. Die Erklärung hierfür liefern die Schubkopplungsterme  $C_{16}$  und  $C_{26}$ . Ihre Abhängigkeit vom Laminatwinkel zeigt, dass sie Extremwerte sowohl bei  $[\pm 30^\circ]$  als auch bei  $[\pm 60^\circ]$  erfahren und bei  $[0^\circ]$  sowie  $[\pm 90^\circ]$  gleich Null werden (Abb.5.24); insofern ist es naheliegend anzunehmen, dass im Durchschritt die höchsten Werte in der Umgebung von  $[\pm 45^\circ]$  liegen werden.

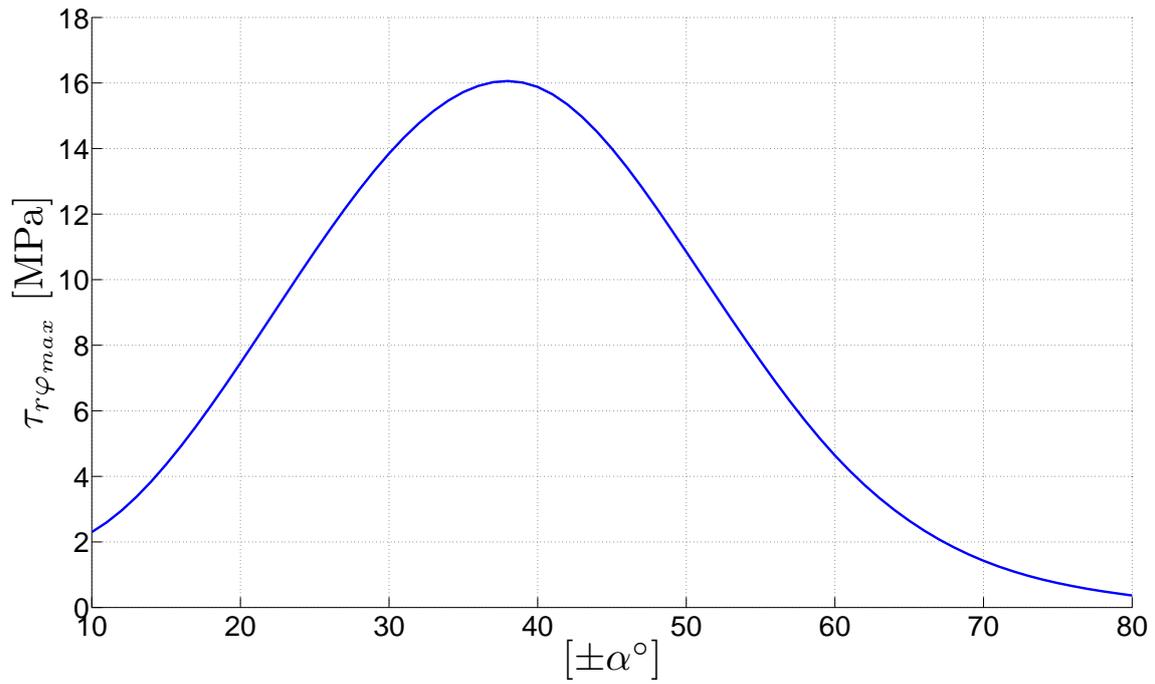
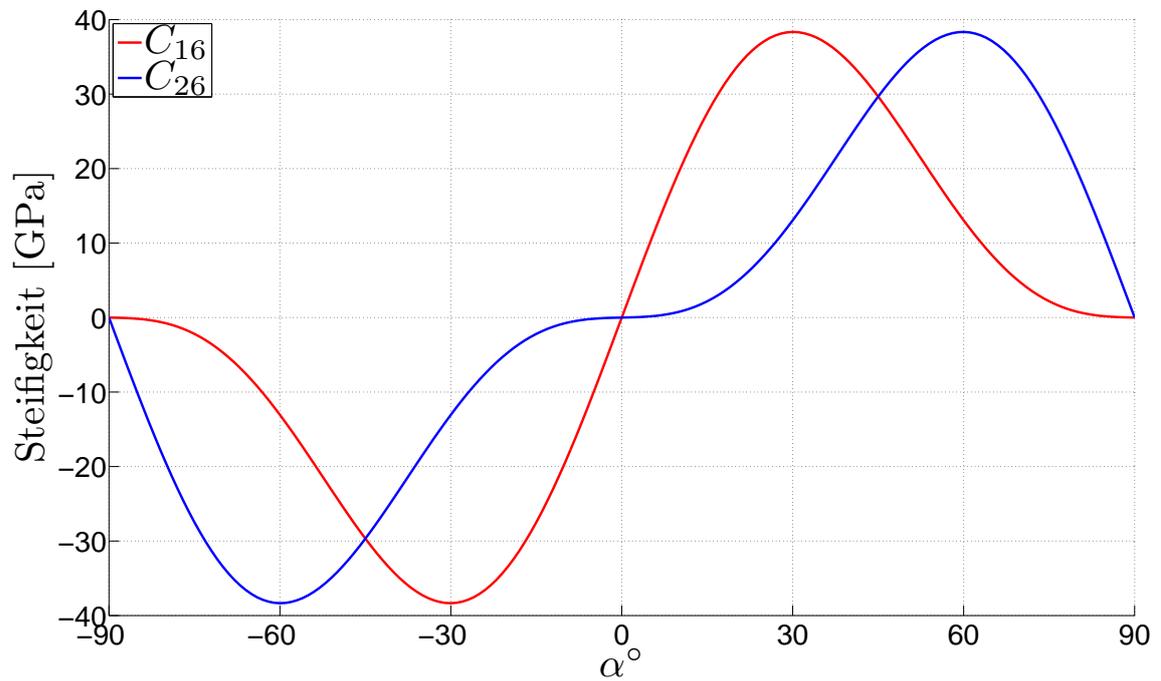
Abbildung 5.23:  $\tau_{r\varphi_{max}}$  in einem Winkellaminat in Abhängigkeit des Orientierungswinkels

Abbildung 5.24: Schubkopplungsterme in Abhängigkeit des Lagenwinkels

Die interlaminare Schubspannung  $\tau_{rz}$  entlang des Interfaces ist bekanntlich durch das Auftreten von Spannungsspitzen in der Nähe des freien Randes charakterisiert (Abb.5.26). Die Auswertung dieser Spannungskomponente für die in Tabelle 5.1 genannten Winkel laminate zeigt eine merkliche Diskrepanz in der Höhe der Spannungsspitzen, so sind die maximalen Werte in der Umgebung von  $[\pm 45^\circ]$  zu verzeichnen, während die kleinsten Ergebnisse bei  $[\pm 10^\circ]$  und  $[\pm 80^\circ]$  zu finden sind (Tab.5.1). Die Erklärung hierfür kann auch auf die Schubkopplung zurückgeführt werden.

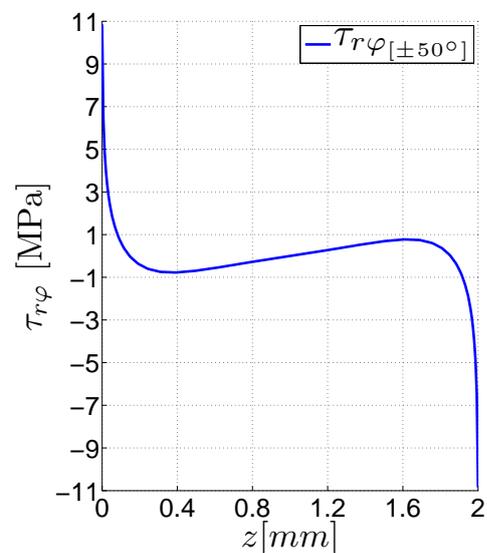
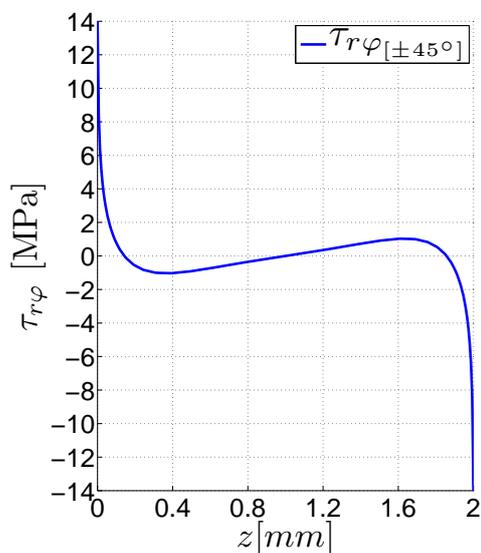
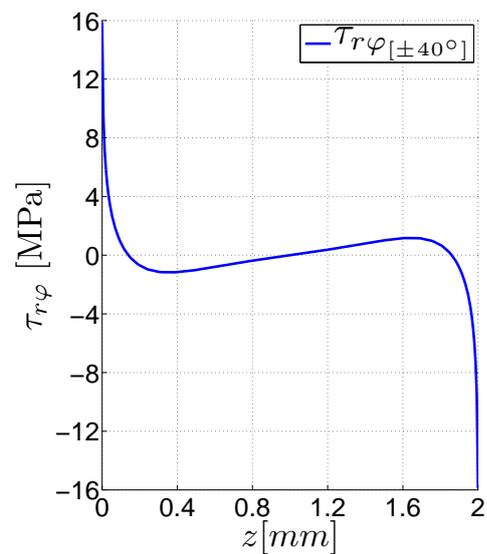
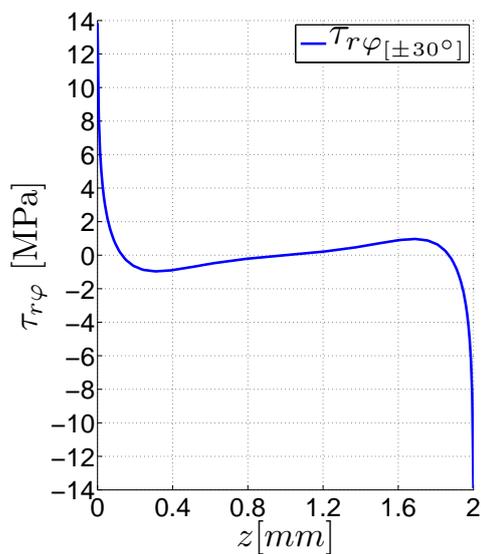
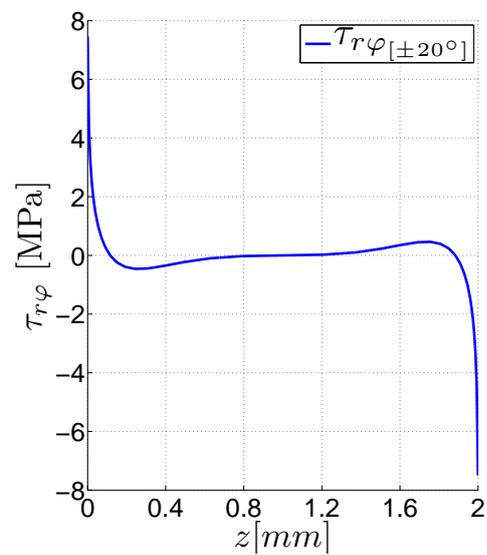
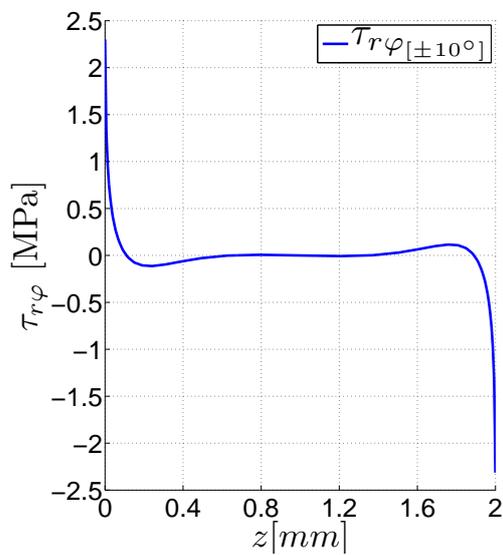
Der Verlauf der interlaminaren Spannung  $\sigma_{rr}$  über dem Interface (Abb.5.28) weist für den Lagenaufbau  $[\pm 10^\circ]$  eine Besonderheit auf, hier scheint der Randeffect von harmloser Natur zu sein, die am Rand vorhandene Spannungskonzentration ist nämlich kleiner als die im Inneren des Verbundes vorliegende konstante Spannung, wobei die Differenz in der Größenordnung von gerade mal  $0.217 \text{ MPa}$  liegt. Der Winkellaminat  $[\pm 20^\circ]$  markiert quasi den Übergang zum kritischen Bereich, denn die Werte am Rand und im Inneren des Laminats sind identisch. Ab einem Lagenaufbau von  $[\pm 30^\circ]$  ist der Verlauf deutlich prägnanter, so sind die Spannungen am Rand wesentlich höher als zuvor, dieser Anstieg erreicht bei  $[\pm 45^\circ]$  sein Maximum und fällt dann wieder kontinuierlich ab (Tab. 5.1).

Die Verläufe von  $\sigma_{rr}$  über dem Querschnitt für die Lagenaufbauten  $[\pm 80^\circ]$  und  $[\pm 70^\circ]$  erfolgt ohne einen nennenswerten Knick (Abb.5.27), dies wäre eigentlich bei einem Laminat mit identischer Faserorientierung und somit gleicher Steifigkeit zu erwarten, da aber der Winkelsprung für die genannten Verbunde klein ist, kann sich ein ähnliches Verhalten einstellen. Die übrigen Lamine weisen im Interface einen deutlichen Knick auf.

Die Spannungskomponente  $\sigma_{\varphi\varphi}$  über dem Querschnitt weist für ein  $[\pm 80^\circ]$  Laminat einen kontinuierlichen Verlauf auf; ab einem  $[\pm 70^\circ]$  Winkelverbund entsteht ein Sprung, der stetig wächst und bei  $[\pm 30^\circ]$  sein Maximum erreicht (Abb.5.29).

Die intralaminare Spannung  $\sigma_{zz}$  wird entlang der Breite, beispielhaft in einem Abstand von  $\pm 0.02 \text{ mm}$  vom Interface, ausgewertet. In diese Position sind für die  $+\alpha^\circ$  Schichten die Werte negativ und erfüllen am Rand die Bedingung für einen freien unbelasteten Rand. Im Laminatinneren ist ein Unterschied festzustellen, die Extremwerte sind abhängig von der Faserorientierung, sodass das Minimum bei  $+50^\circ$  liegt. Die  $-\alpha^\circ$  Schichten zeigen in dieser Auswertungsposition positive Werte an, wobei das Maximum bei  $-50^\circ$  zu verzeichnen ist (Abb.5.30).

## Untersuchung der Verläufe der Spannungskomponenten in gekrümmten Winkellaminaten in Abhängigkeit vom Lagenaufbau



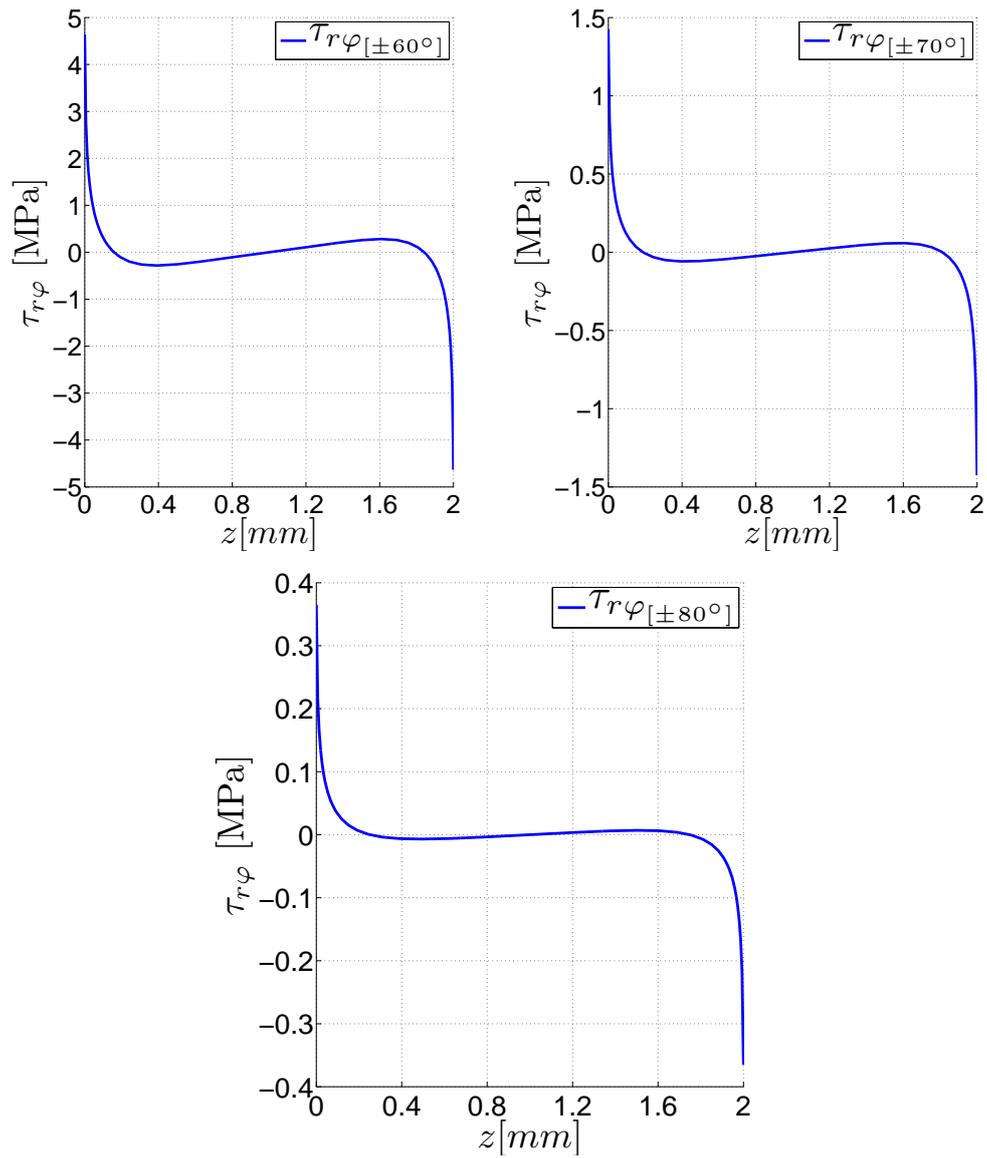
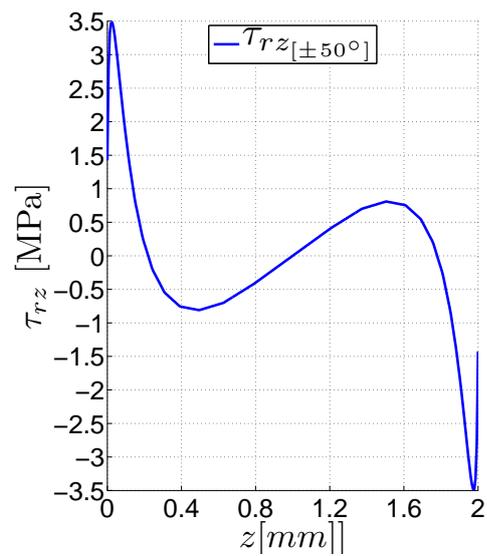
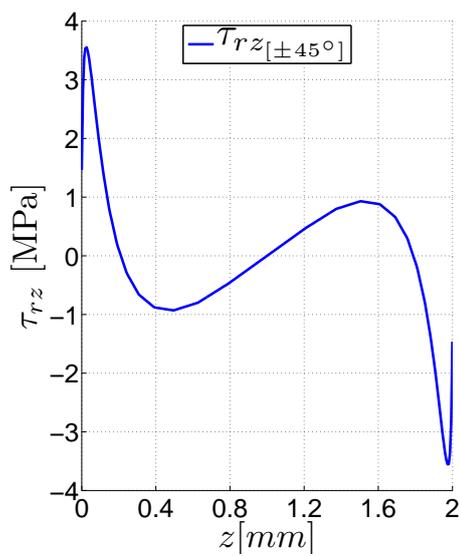
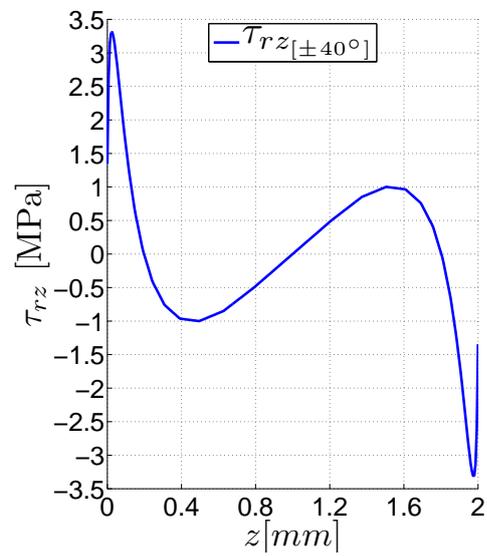
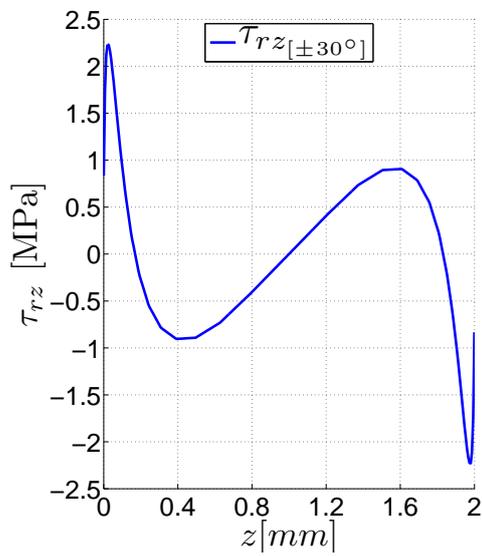
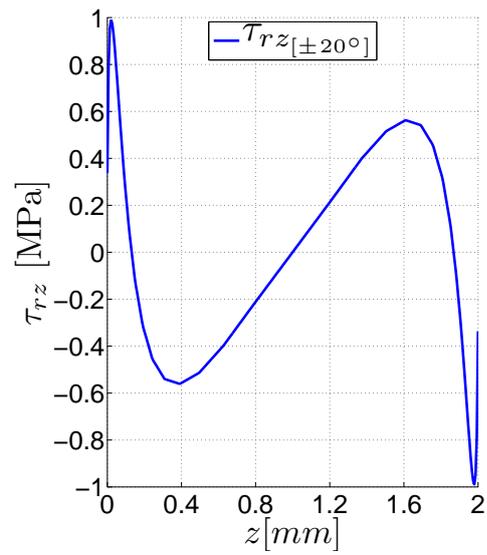
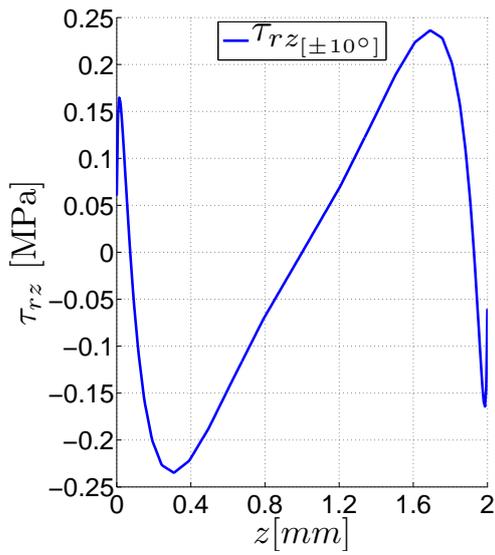


Abbildung 5.25: Verlauf der interlaminaren Schubspannung  $\tau_{r\varphi}$  über dem Interface für unterschiedliche Winkellaminare



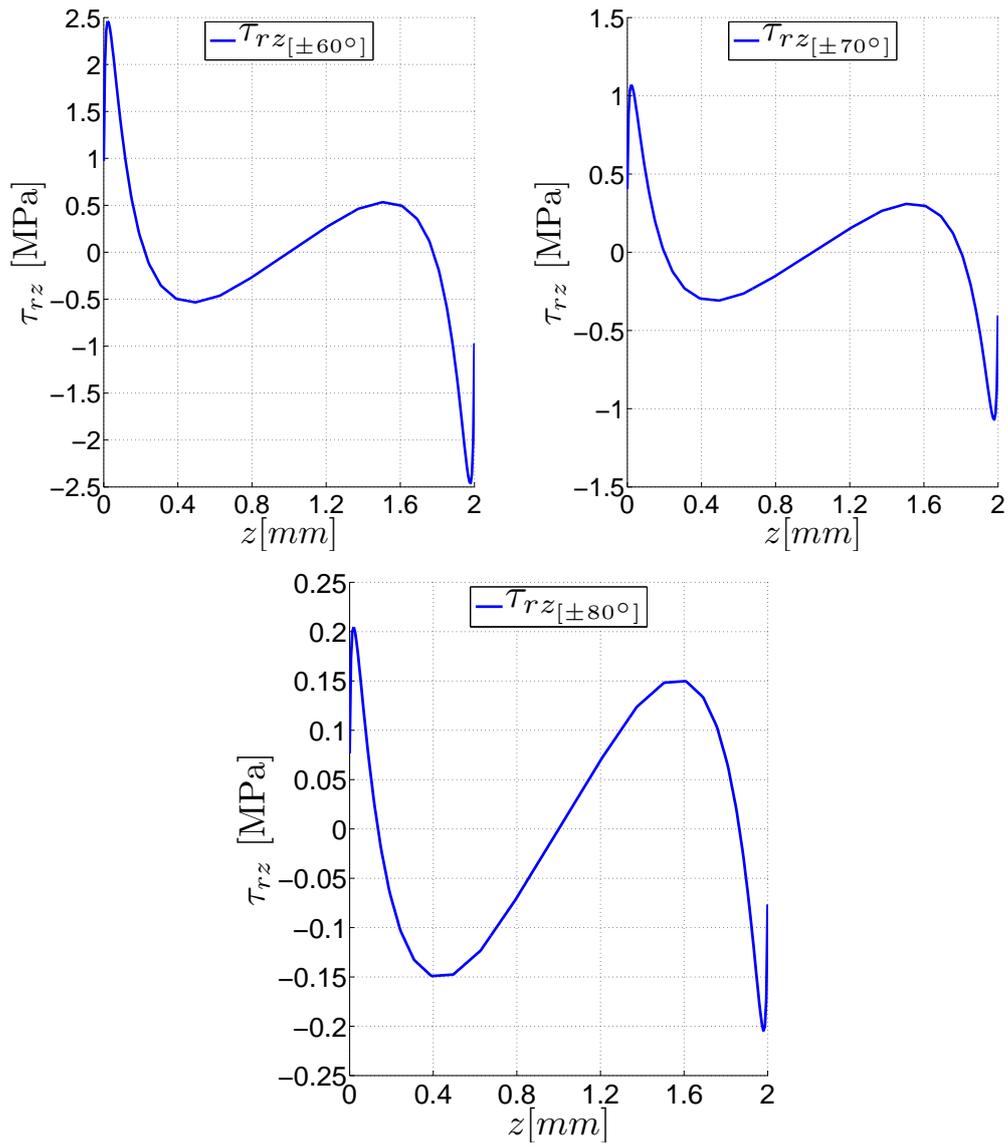
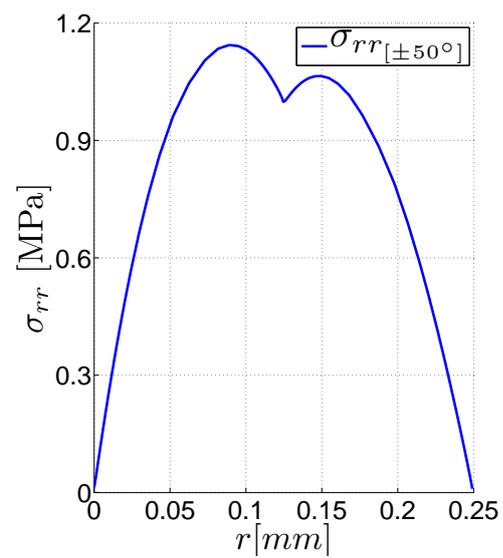
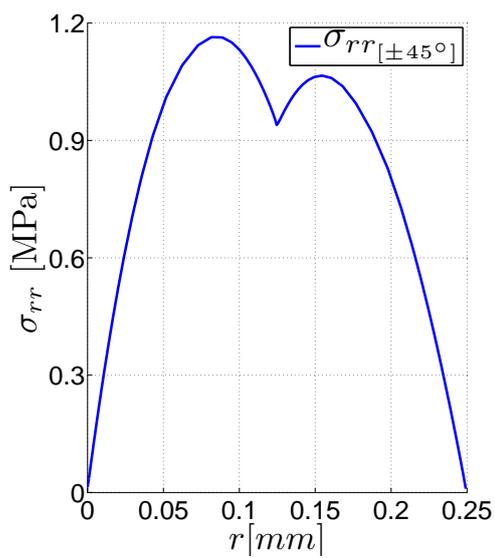
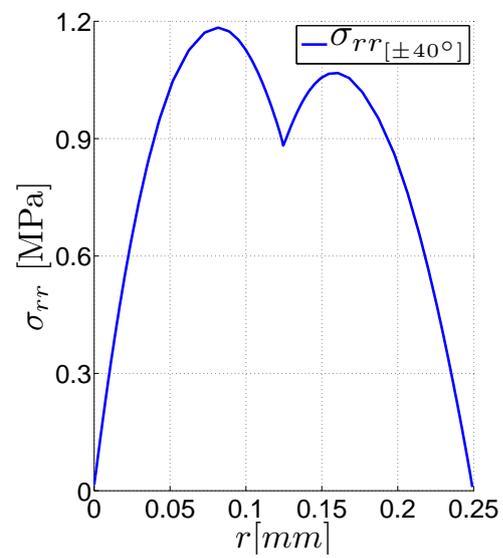
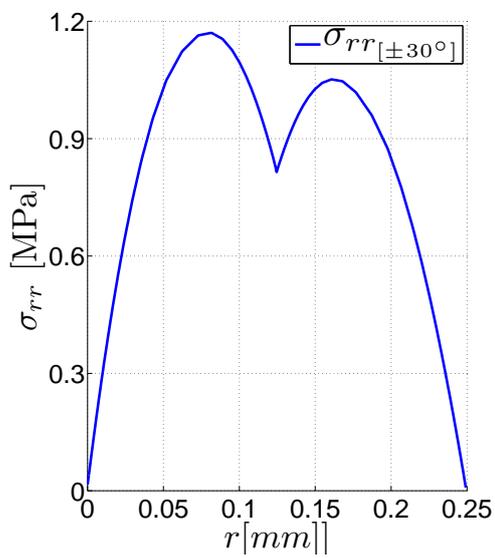
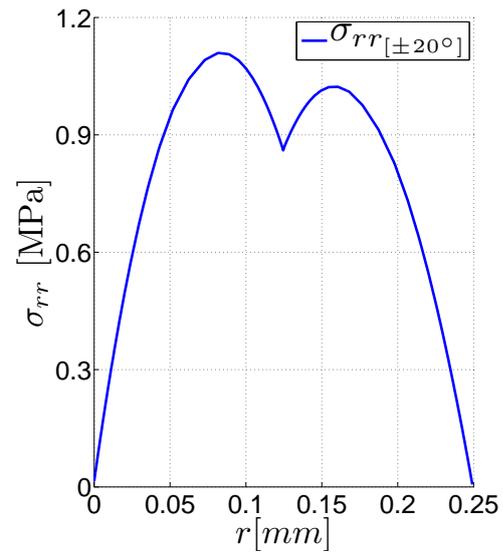
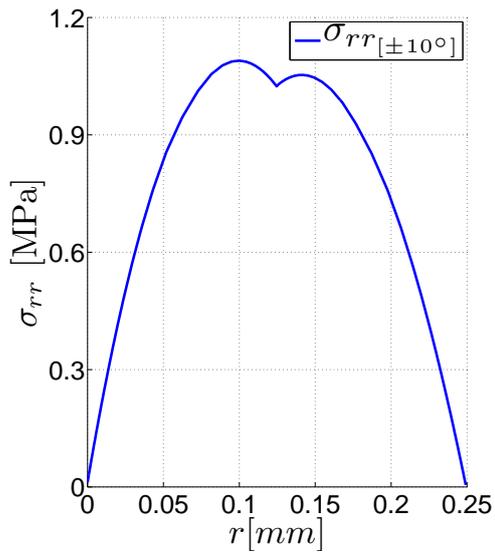


Abbildung 5.26: Verlauf der interlaminaren Schubspannung  $\tau_{rz}$  entlang des Interfaces für unterschiedliche Winkellaminate



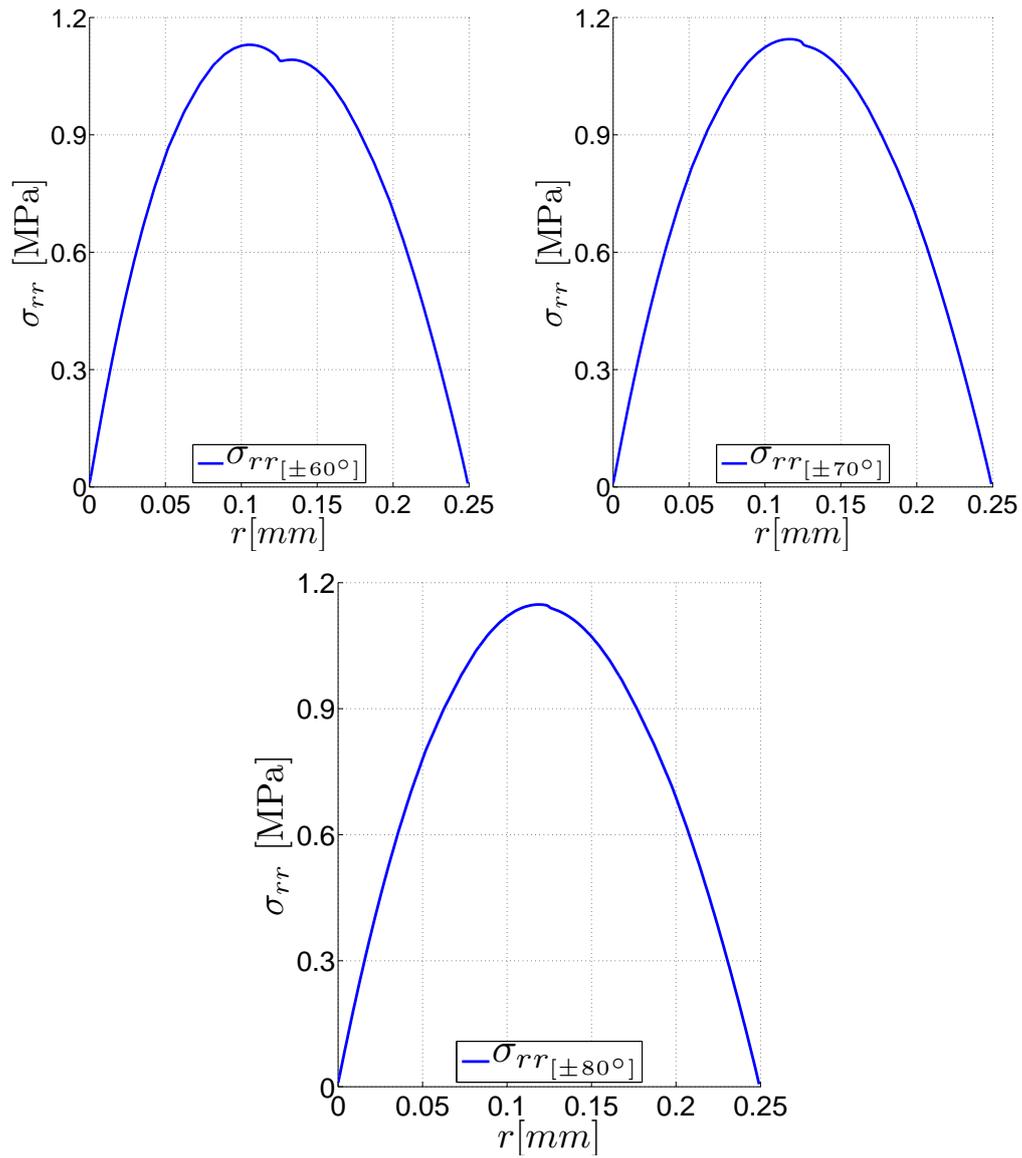
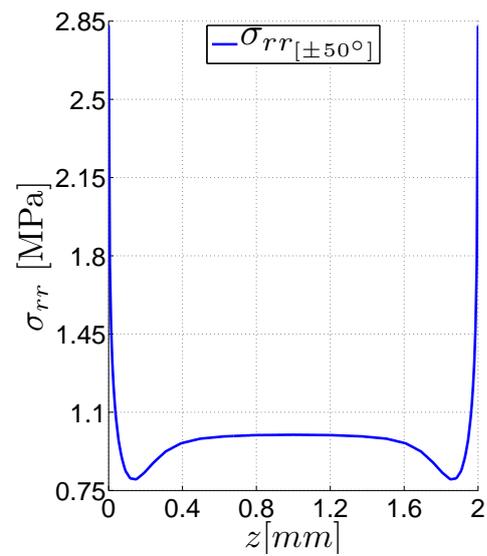
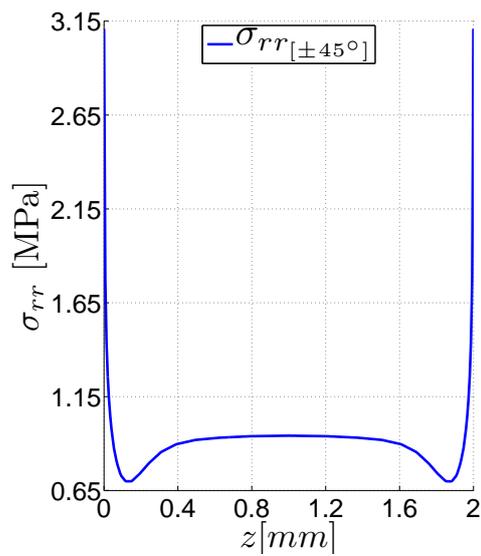
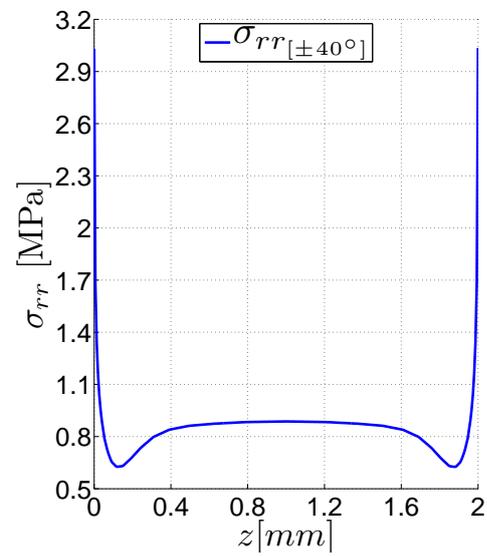
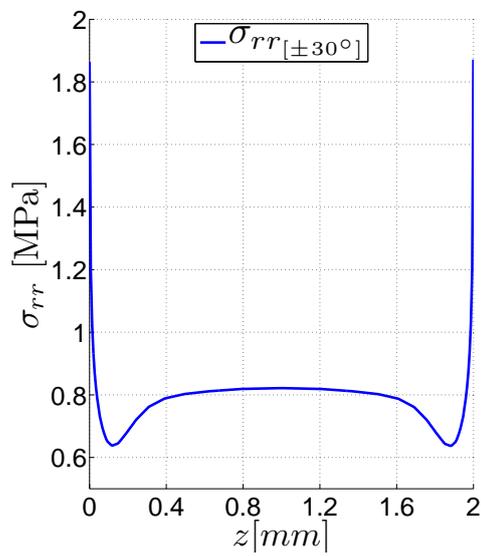
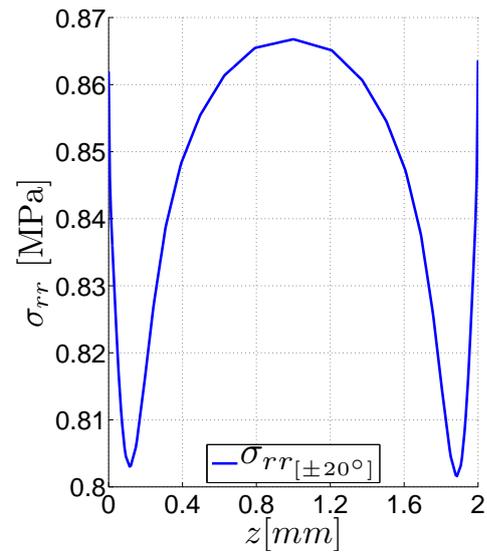
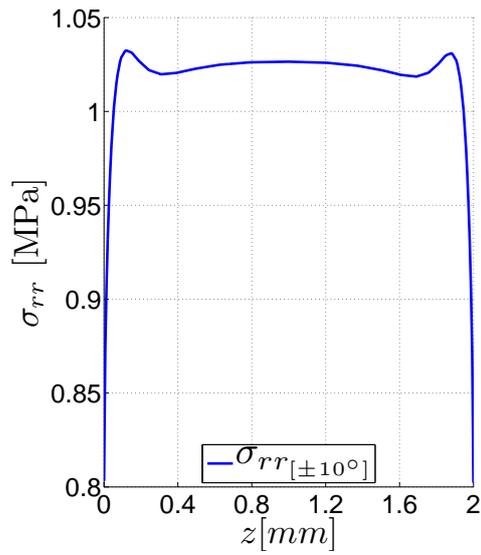


Abbildung 5.27: Verlauf der interlaminaren Spannung  $\sigma_{rr}$  über dem Querschnitt für unterschiedliche Winkellaminat



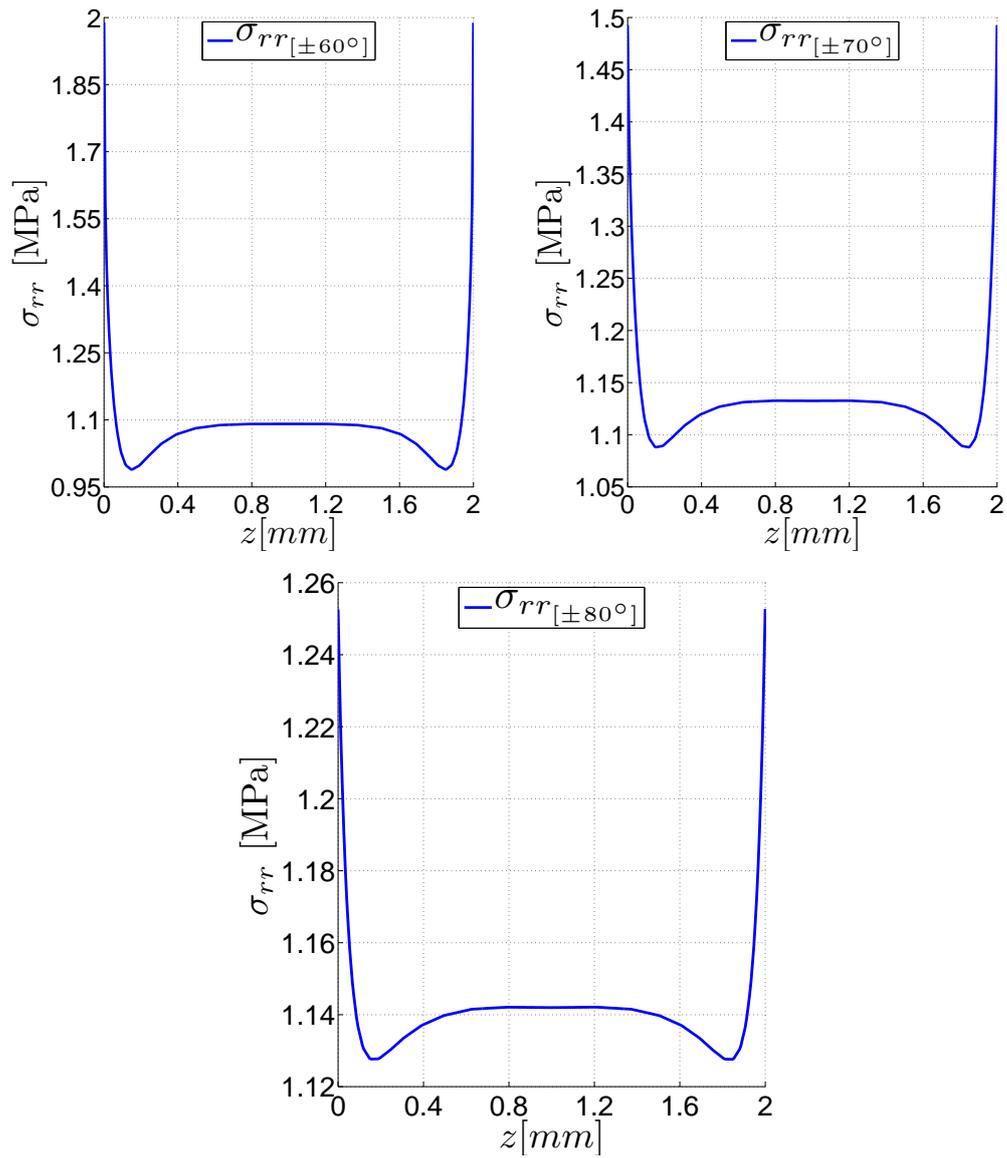
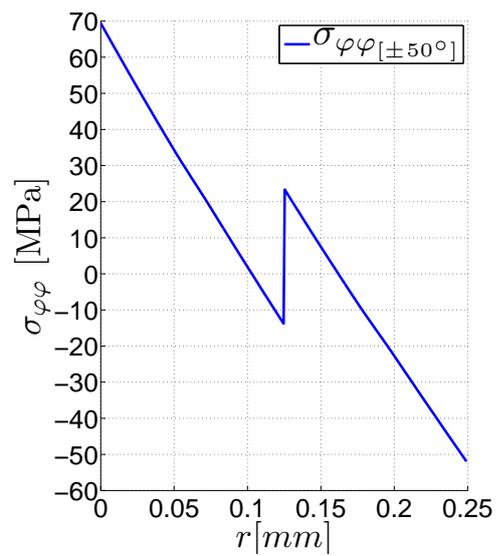
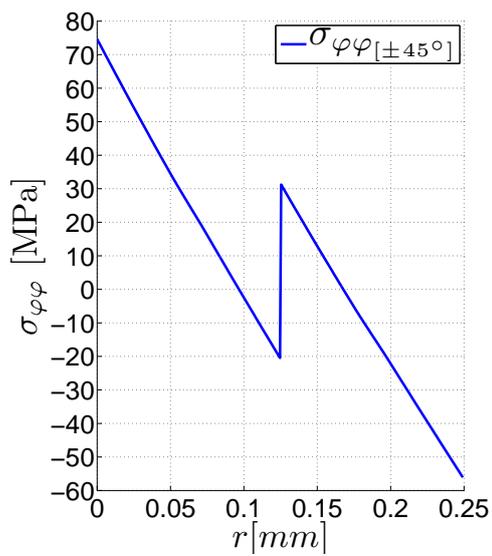
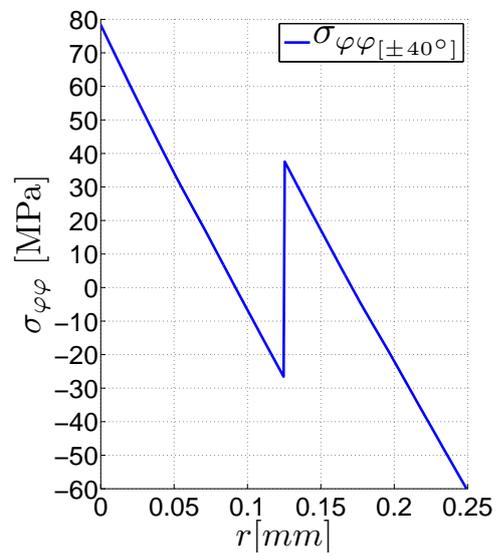
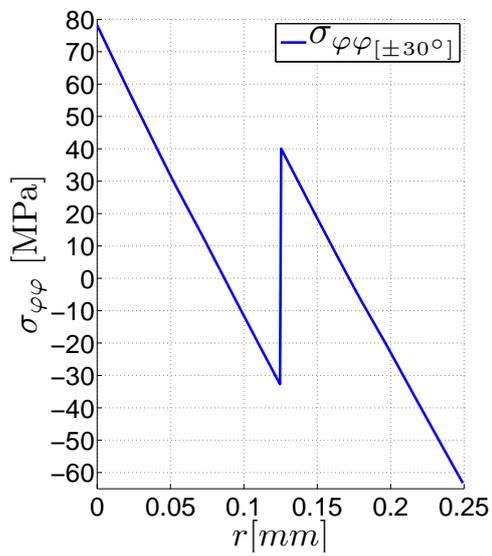
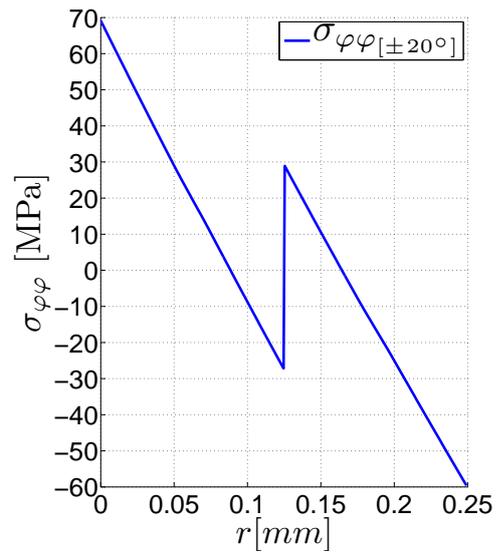
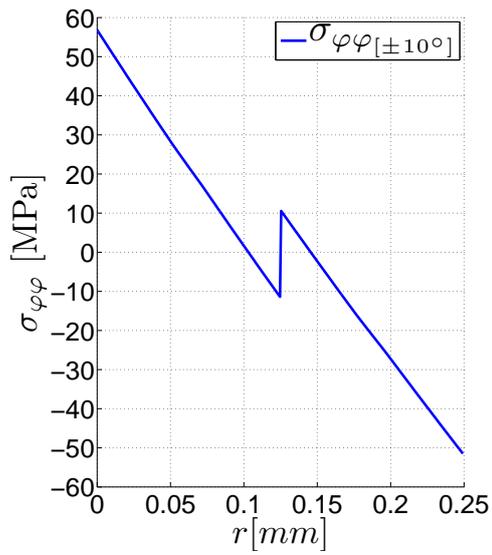


Abbildung 5.28: Verlauf der interlaminaren Spannung  $\sigma_{rr}$  entlang des Interfaces für unterschiedliche Winkellamine



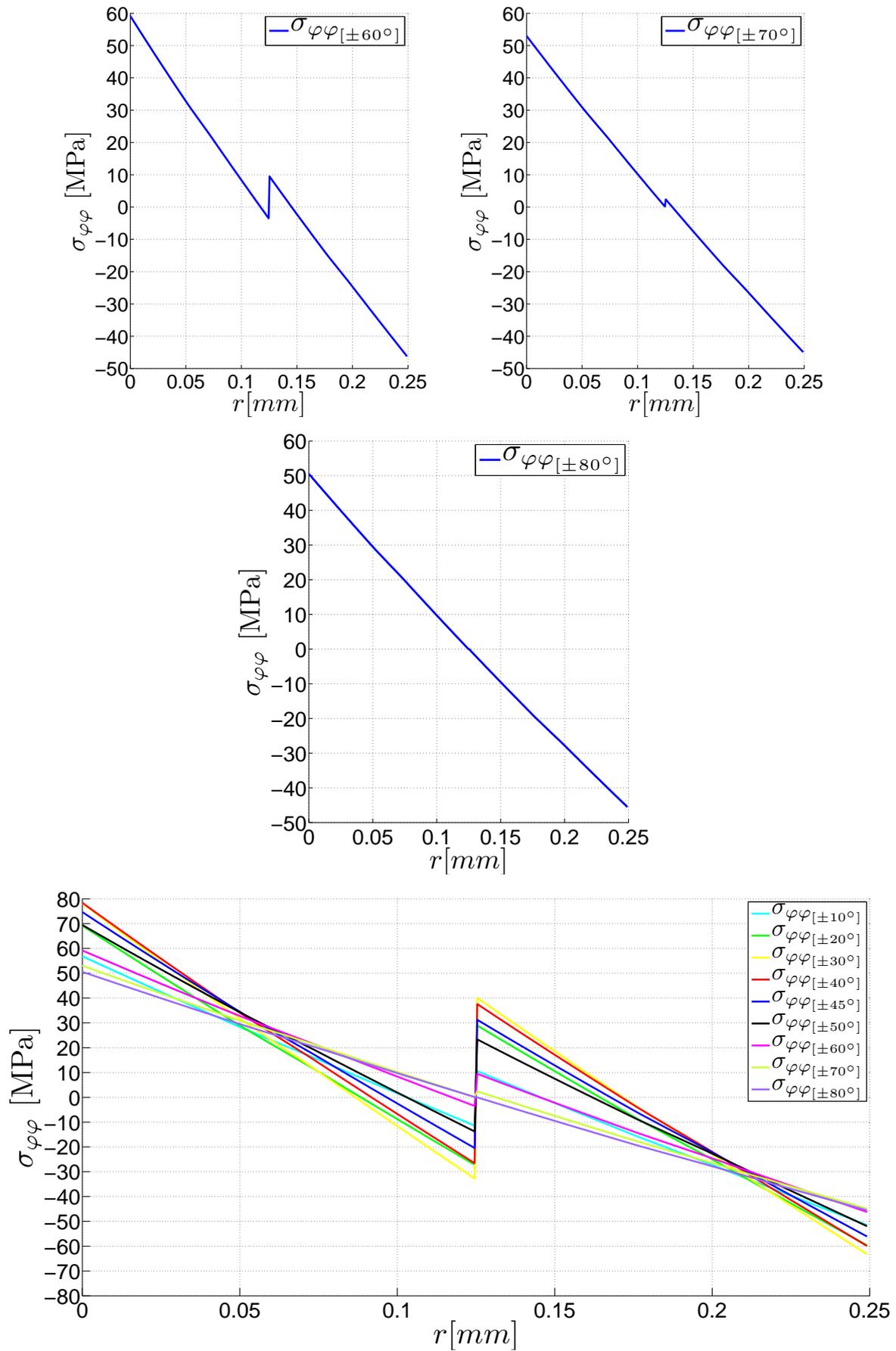


Abbildung 5.29: Verlauf der intralaminaren Spannung  $\sigma_{\varphi\varphi}$  über dem Querschnitt für unterschiedliche Winkellamine

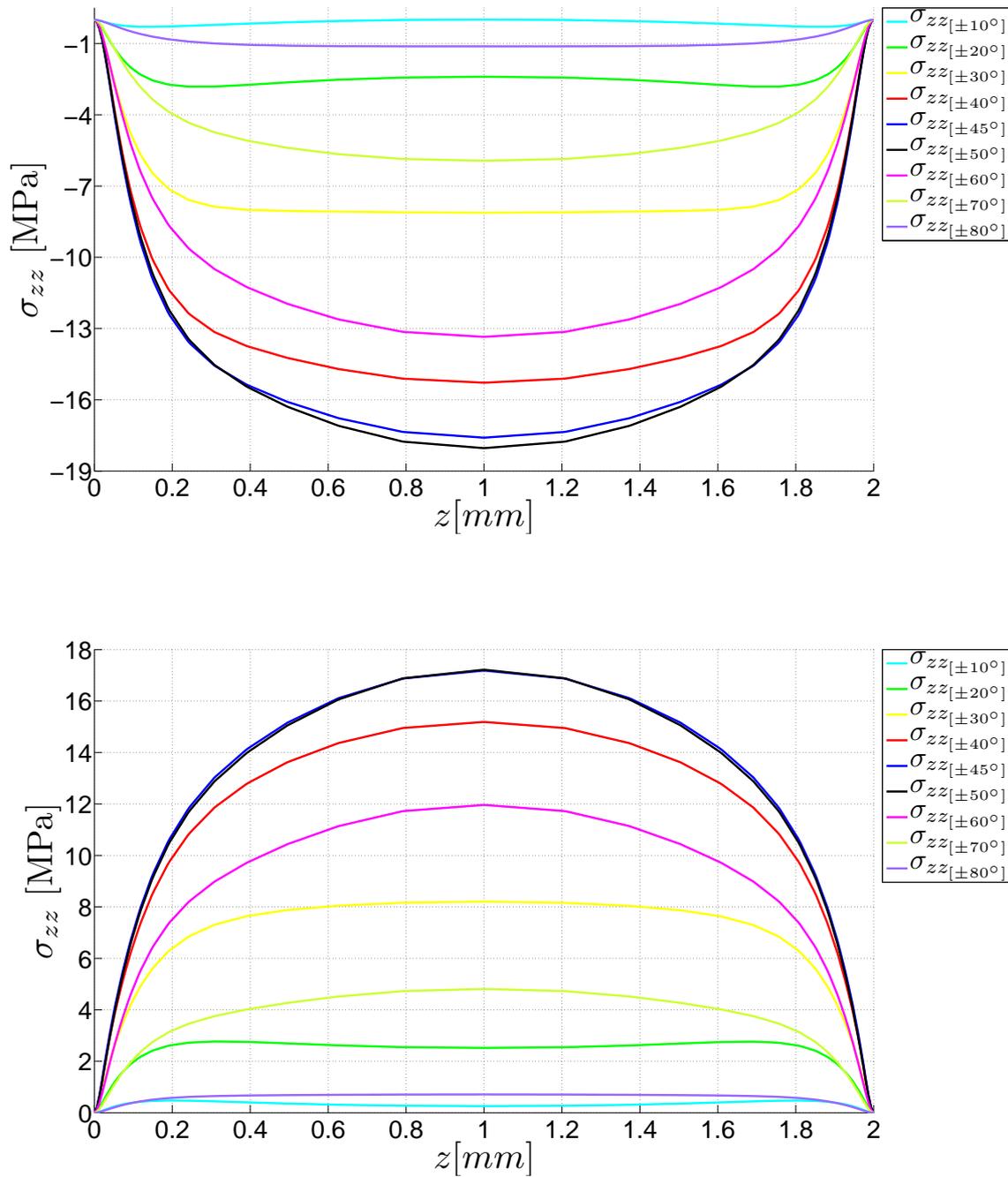


Abbildung 5.30: Verlauf der intralaminaren Spannung  $\sigma_{zz}$  entlang der Breite in einem Abstand von  $\pm 0.02$  mm vom Interface

### 5.3.2 Untersuchung der Auswirkung der Krümmungsverhältnisse auf die Randeffekte.

Nachfolgend soll der Einfluss der Krümmungsverhältnisse auf die Entstehung und die Intensität von Randeffekten analysiert werden. Die Betrachtung beschränkt sich hier auf ein Kreuzlaminat  $[\pm 90^\circ]$  und ein Winkellaminat mit einem Lagenaufbau von  $[\pm 45^\circ]$ . Die Materialparameter bleiben in diese Untersuchung unverändert.

Das Krümmungsverhältnis wird durch eine dimensionslose Größe angegeben. Blumer [4] definiert diesen Parameter wie folgt:

$$\beta = \frac{t}{2r_m} \quad (5.4)$$

Der mittlere Radius  $r_m$  kann durch folgende Relation angegeben werden:

$$r_m = \frac{t}{2} + r_i \quad (5.5)$$

Das Einsetzen von (5.4) in (5.5) und eine Umstellung der Gleichung nach  $r_i$  (Innenradius) ergibt:

$$r_i = \frac{t}{2\beta} (1 - \beta) \quad (5.6)$$

Durch die Variation des Parameters  $\beta$  in Gleichung (5.6) und bei einer konstanten Laminatdicke von  $t = 0.25$  mm ist es nun möglich, den Innenradius für unterschiedliche Krümmungsverhältnisse anzugeben. Blumer empfiehlt für  $\beta$  einen Wertebereich von  $0.1 < \beta < 0.5$ , allerdings resultieren daraus für die gewählte Laminatdicke sehr kleine und unrealistische Radienwerte, daher wird der Parameter  $\beta$  im Bereich zwischen 0.02 und 0.06 modifiziert. Die Ergebnisse sind in Tabelle 5.2 enthalten.

Krümmungsverhältnis $\beta$ [-]	$\beta_1 = 0.02$	$\beta_2 = 0.03$	$\beta_3 = 0.04$	$\beta_4 = 0.05$	$\beta_5 = 0.06$
Innen Radius $r_i$ [mm]	6.125	4	3	2.375	1.95
$\sigma_{rr-max}$ [MPa]	1.82	2,49	2.94	3.28	3.42
$\sigma_{rr-mitte}$ [MPa]	0.39	0.59	0.78	0.97	1.19
$\Delta\sigma_{rr} = \sigma_{rr-max} - \sigma_{rr-mitte}$	1.43	1.9	2.16	2.3	2.23
$\tau_{r\varphi-max}$ [MPa]	9.11	11.98	13.6	14.55	14.49
$\tau_{rz-max}$ [MPa]	3.92	3.79	3.66	3.45	3.41

Tabelle 5.2: Die maximalen interlaminaren Spannungen in einem  $[\pm 45^\circ]$  Laminat in Abhängigkeit von den Krümmungsverhältnissen

#### Ergebnisse für ein $[\pm 45^\circ]$ Winkellaminat

Zunächst wird die interlaminare Normalspannung  $\sigma_{rr}$  im Interface für die in Tabelle 5.2 erwähnten Krümmungsverhältnisse ausgewertet (Abb.5.31-5.32). Es ist zu beobachten, dass mit zunehmender Krümmung ein Anstieg der (maximalen) Spannung am Rand zu verzeichnen ist, allerdings ist auch eine Zunahme der Werte in der Interface-Mitte zu erkennen. Um eine qualitative Aussage treffen zu können, wird also jeweils die Differenz zwischen den Ergebnissen am Rand und jenen im Inneren des Laminats betrachtet (Tab 5.2). Mit Ausnahme des Parameters  $\beta = 0.06$  ist ein leichter Anstieg zu erkennen.

Die gleiche Spannung ausgewertet über dem Querschnitt zeigt einen deutlichen Unterschied zwischen den einzelnen Verläufe auf, so ist mit zunehmendem Krümmungsverhältnis eine Zunahme der interlaminaren Normalspannung  $\sigma_{rr}$  über dem Querschnitt zu sehen (Abb.5.33). Dieses Ergebnis wird auch von [Blumer [4]] festgestellt.

Die Verläufe der interlaminaren Schubspannung  $\tau_{r\varphi}$  über dem Interface (Abb.5.34) weisen wie erwartet Maxima an den Rändern auf, die jedoch abhängig vom Krümmungsverhältnis unterschiedliche Werte annehmen, wobei die höchsten Werte den höchsten Krümmungen zuzuordnen sind. (Tabelle 5.2)

Die Spannungsspitzen der interlaminaren Schubspannung  $\tau_{rz}$  im Interface weichen nur unwesentlich voneinander ab, dabei ist diesmal mit zunehmender Krümmung eine geringfügige Verminderung der Werte zu verzeichnen (Tabelle 5.2). Eine Auffälligkeit ist im Verlauf der Spannungen zum Inneren des Laminats hin festzustellen (Abb.5.35); für kleine Krümmungen ist zunächst das Abklingverhalten relativ schnell, mit steigenden Krümmungswerten nimmt der Abstand vom Nullniveau zu, jedoch besitzen alle Kurven bei der halben Laminatbreite den Wert Null.

Die Auswertung der intralaminaren Schubspannung  $\tau_{\varphi z}$  über dem Querschnitt (Abb.5.36-5.37) hat ergeben, dass die Extremwerte mit zunehmendem  $\beta$  ansteigen. Die Untersuchung dieser Spannungskomponente parallel zum Interface für die  $+45^\circ$  und  $-45^\circ$  Schichten (Abb.5.38) hat gezeigt, dass die Bedingungen für einen freien unbelasteten Rand gut erfüllt ist und dass im Inneren des Laminats die Werte größer werden.

Die Spannungskomponente  $\sigma_{zz}$  über dem Querschnitt weist im Interface einen Sprung auf, der mit zunehmender Krümmung größer wird (Abb.5.39-5.40), dabei nehmen die maximalen Werte am Außen- und am Innenrand zu. Für die Analyse entlang der Breite (Abb.5.41) ist festzustellen, dass die Verläufe in der Nähe der freien Ränder zunächst deckungsgleich verlaufen und erst dann ein Anstieg der Werte zu verzeichnen ist.

Zusammenfassend lässt sich die Schlussfolgerung ziehen, dass die Bedeutung der Krümmung im Hinblick auf die Intensität der Randeffekte, aber auch auf die Verteilung der Spannungskomponenten nicht zu marginalisieren ist.

## Verläufe der Spannungskomponenten in gekrümmten $[\pm 45^\circ]$ Winkelaminaten in Abhängigkeit von den Krümmungsverhältnissen.

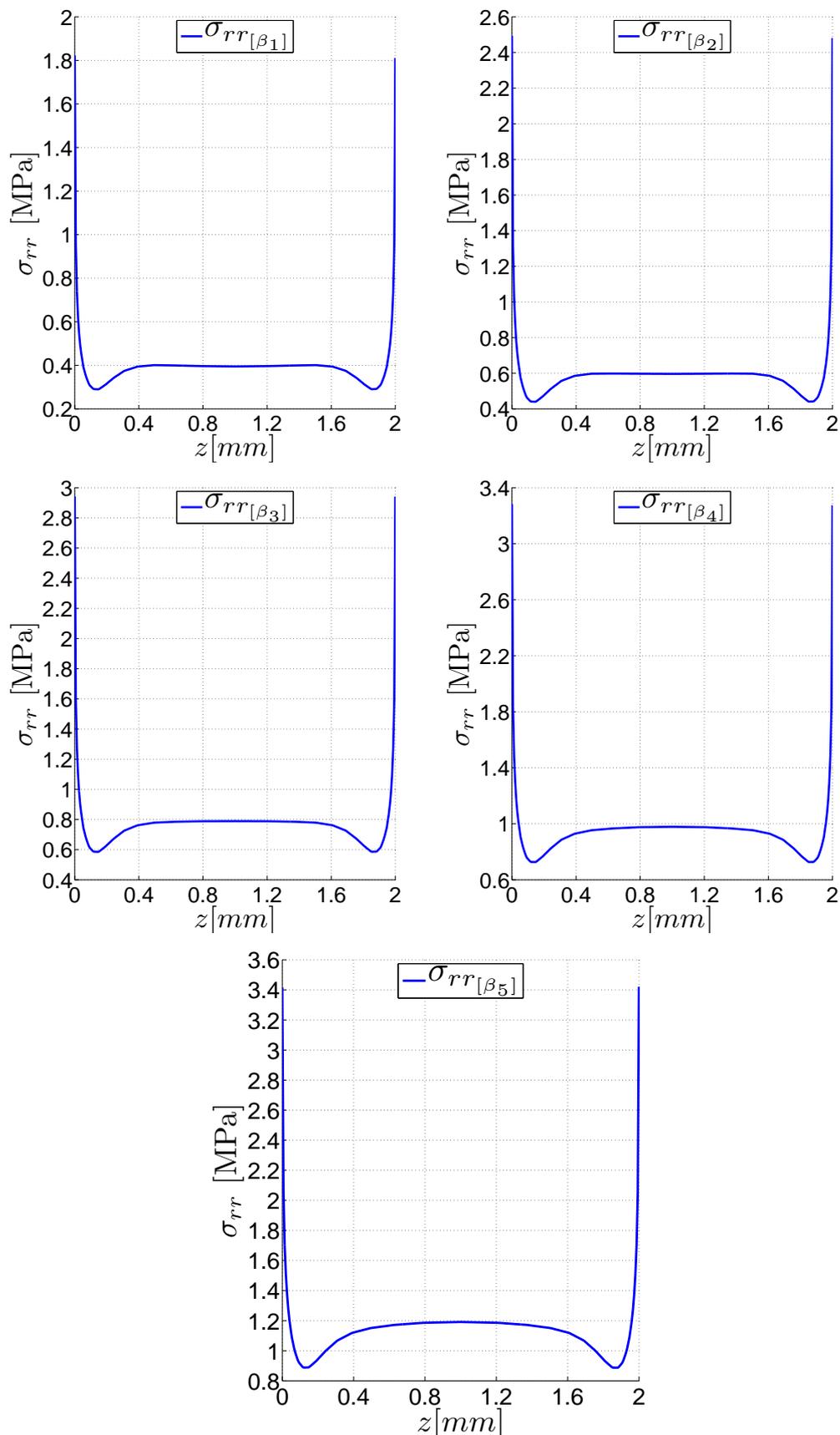


Abbildung 5.31: Verlauf der Normalspannung  $\sigma_{rr}$  über dem Interface eines  $[\pm 45^\circ]$  Laminats für verschiedene Krümmungen

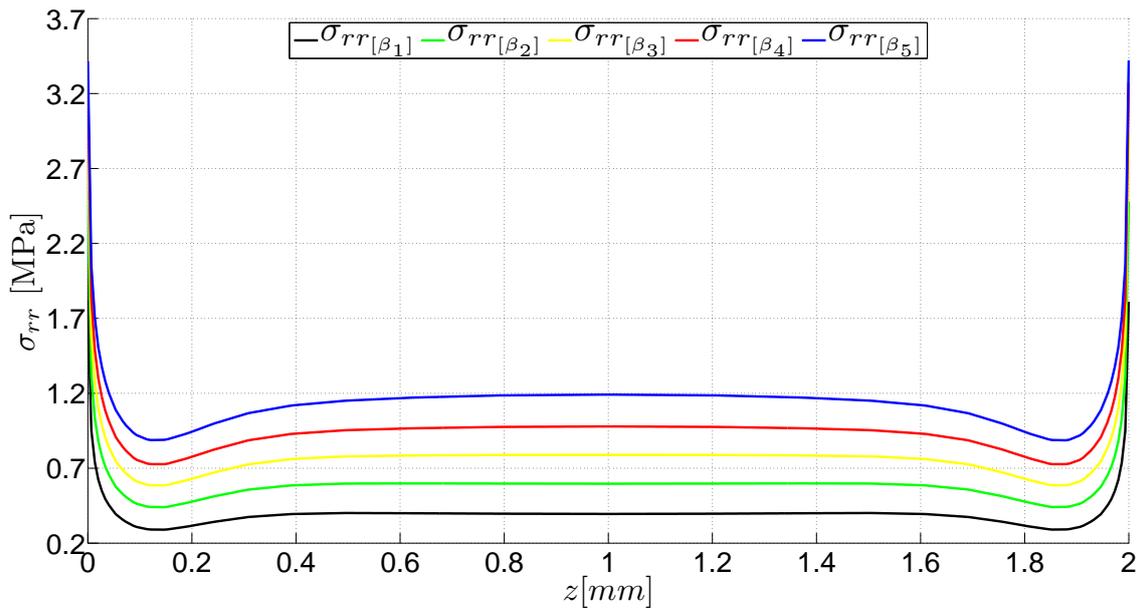


Abbildung 5.32: Verlauf der Normalspannung  $\sigma_{rr}$  über dem Interface eines  $[\pm 45^\circ]$  Laminats für verschiedene Krümmungen

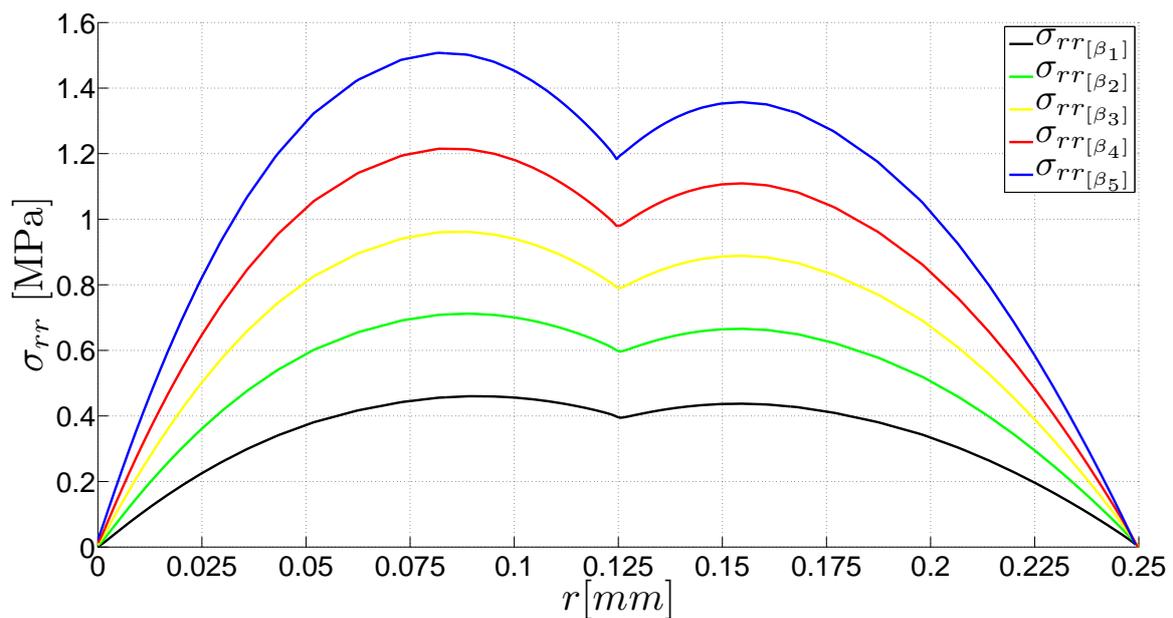


Abbildung 5.33: Verlauf der Normalspannung  $\sigma_{rr}$  über dem Querschnitt im Inneren eines  $[\pm 45^\circ]$  Laminats für verschiedene Krümmungen

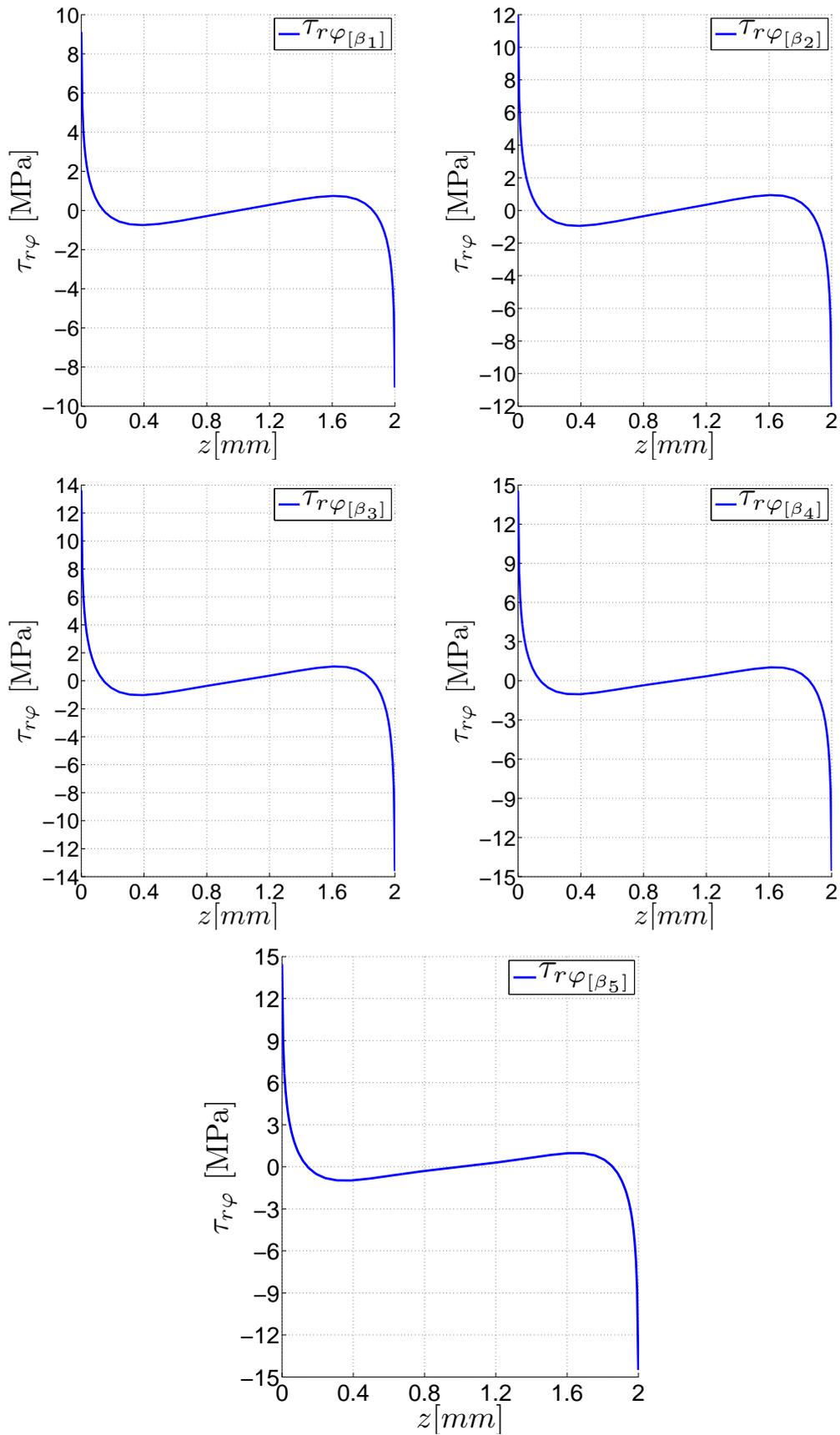


Abbildung 5.34: Verlauf der interlaminaren Schubspannung  $\tau_{r\varphi}$  über dem Interface für verschiedene Krümmungen

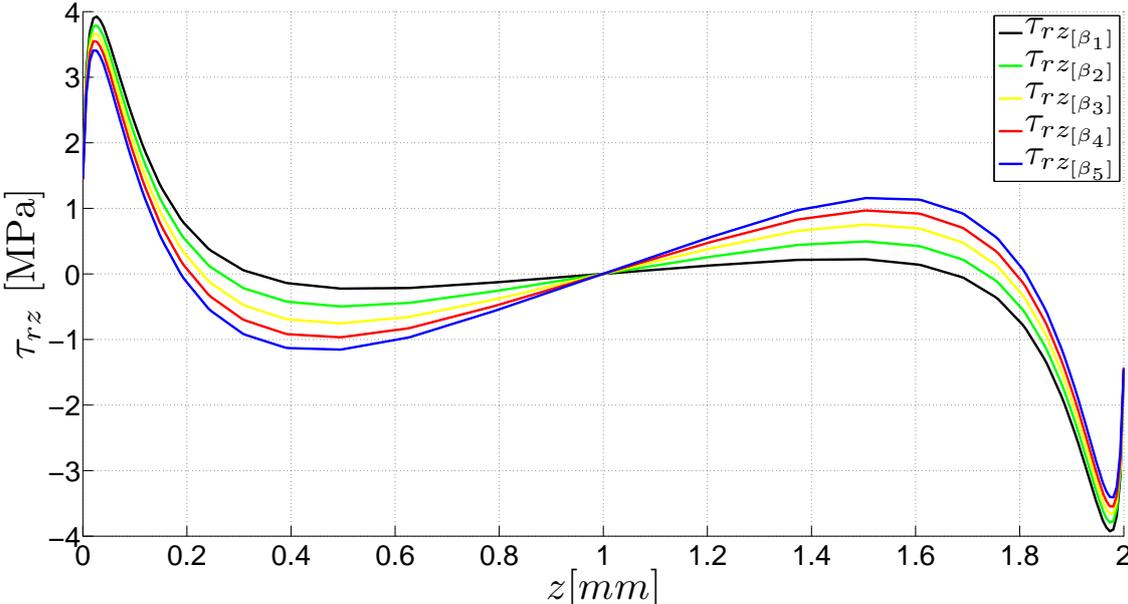


Abbildung 5.35: Verlauf der interlaminaren Schubspannung  $\tau_{rz}$  über dem Interface für verschiedene Krümmungen

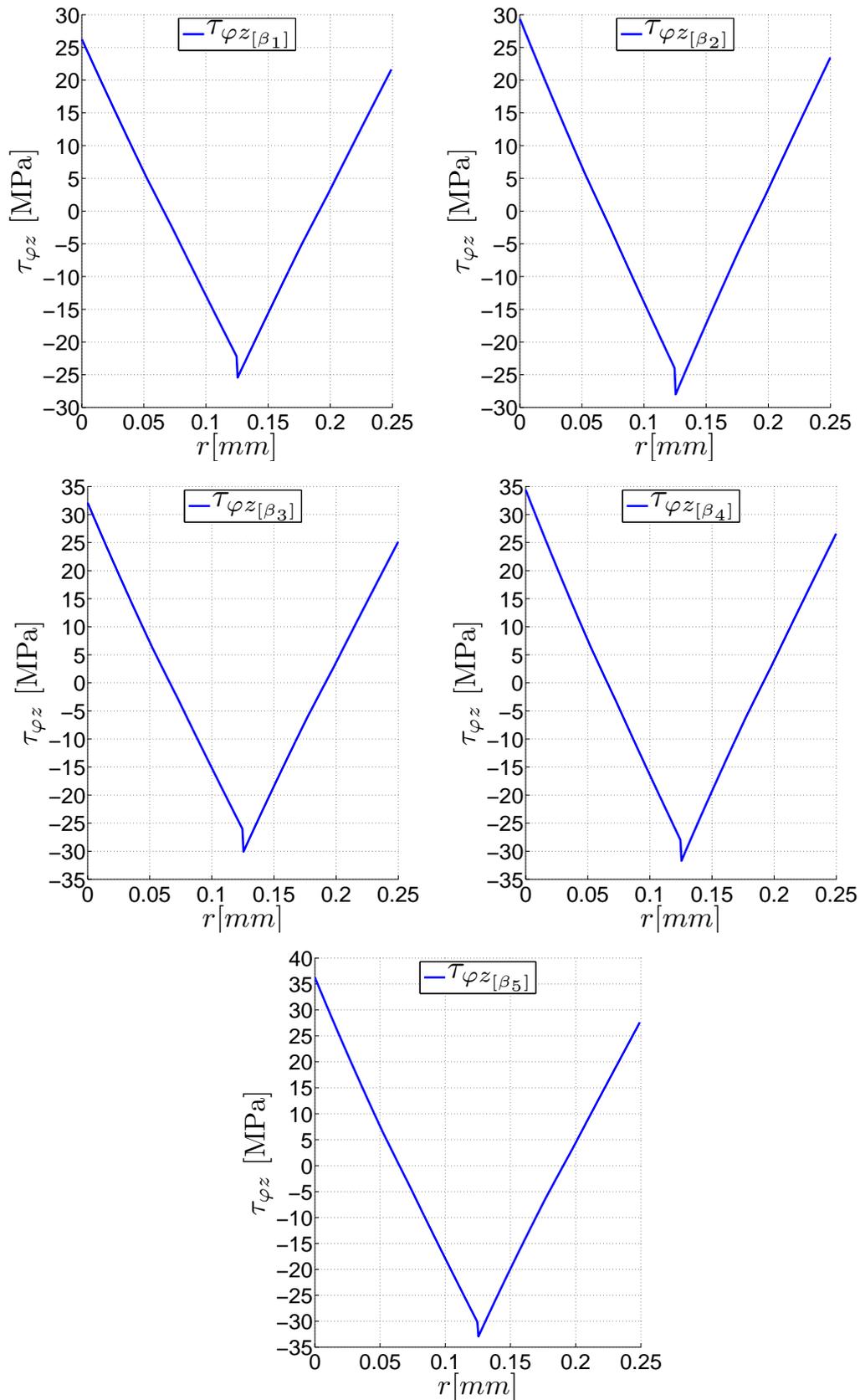


Abbildung 5.36: Verlauf der interlaminaren Schubspannung  $\tau_{\varphi z}$  über dem Querschnitt im Inneren des Laminats für verschiedene Krümmungen

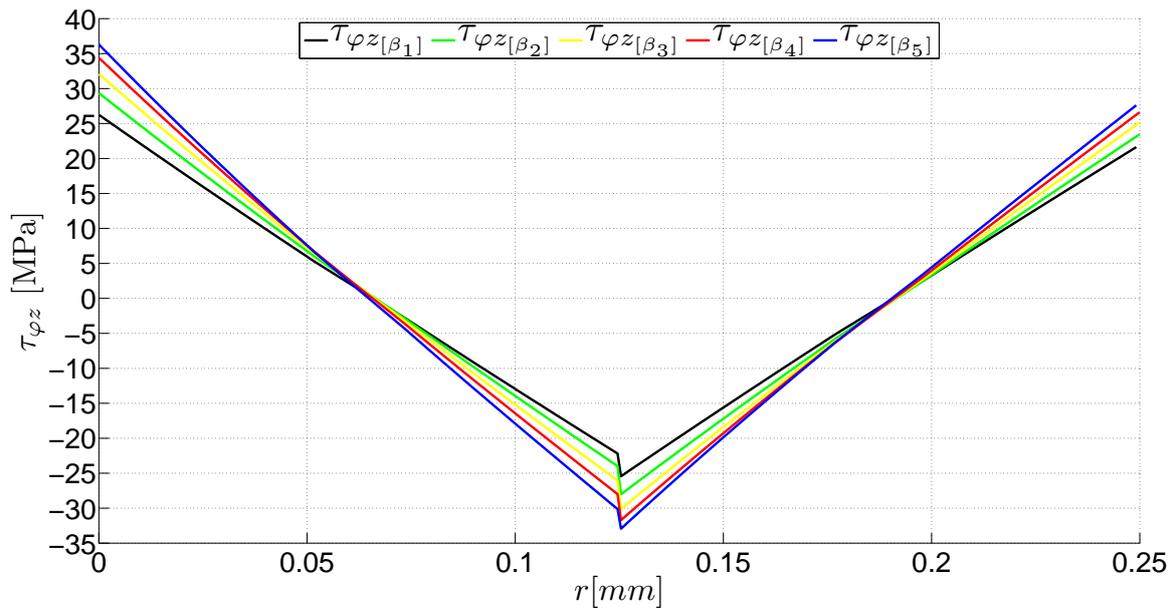


Abbildung 5.37: Verlauf der intralaminaren Schubspannung  $\tau_{\varphi z}$  über dem Querschnitt im Inneren des Laminats für verschiedene Krümmungen

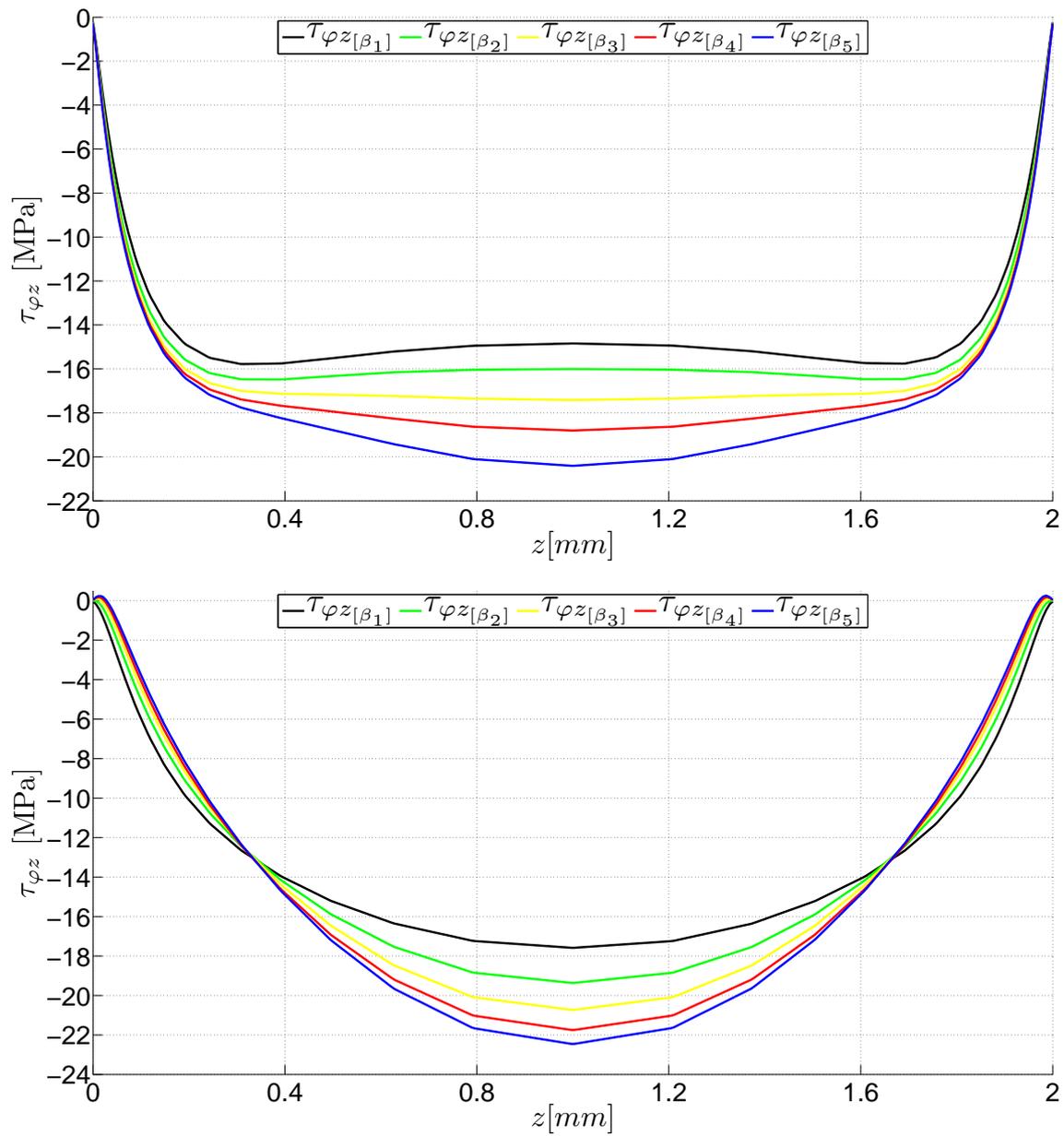


Abbildung 5.38: Verlauf der intralaminaren Schubspannung  $\tau_{\varphi z}$  über die Breite in einem Abstand von  $\pm 0.02\text{mm}$  für unterschiedliche Krümmungen

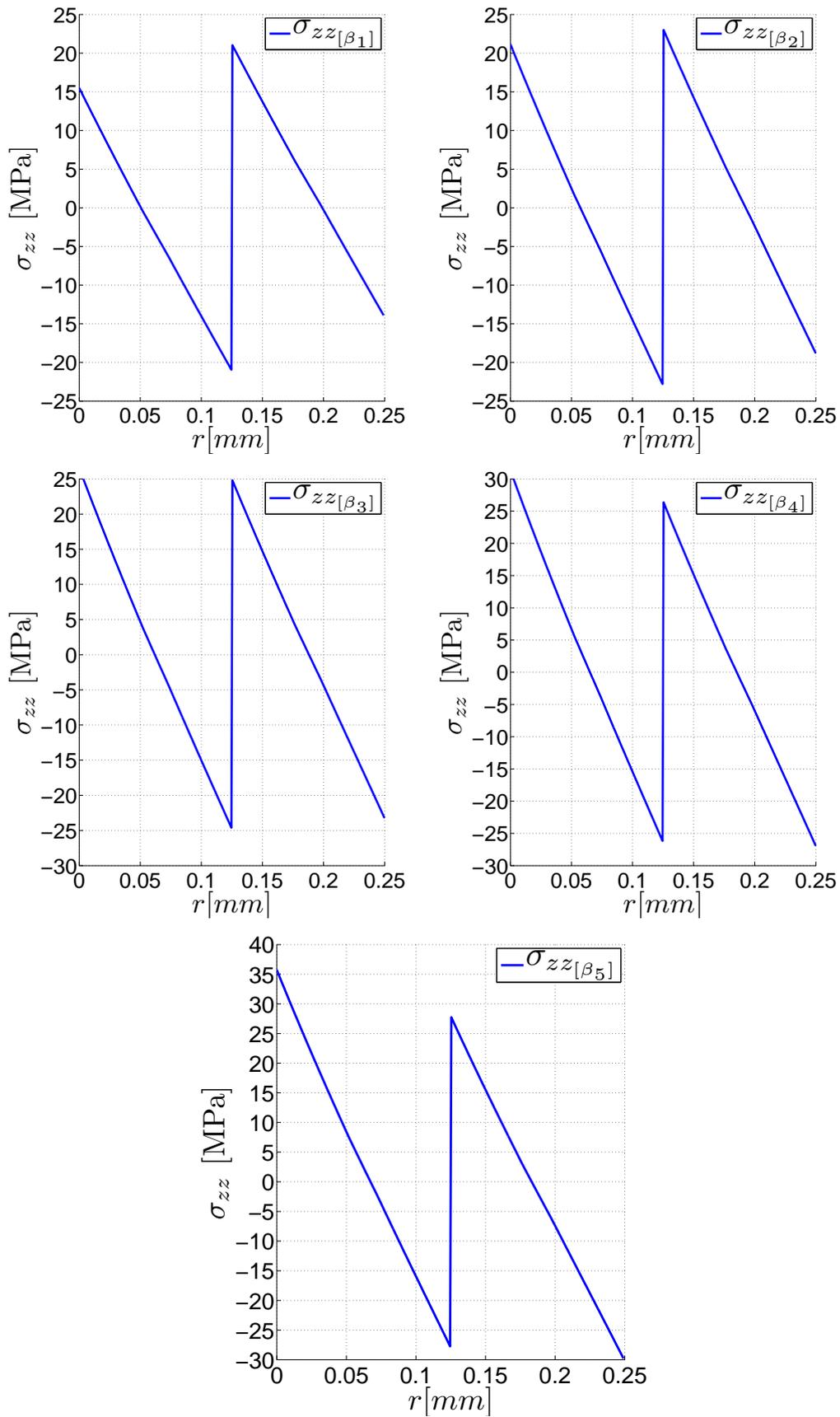


Abbildung 5.39: Verlauf der Spannungskomponente  $\sigma_{zz}$  über dem Querschnitt im Inneren des Laminats für unterschiedliche Krümmungen

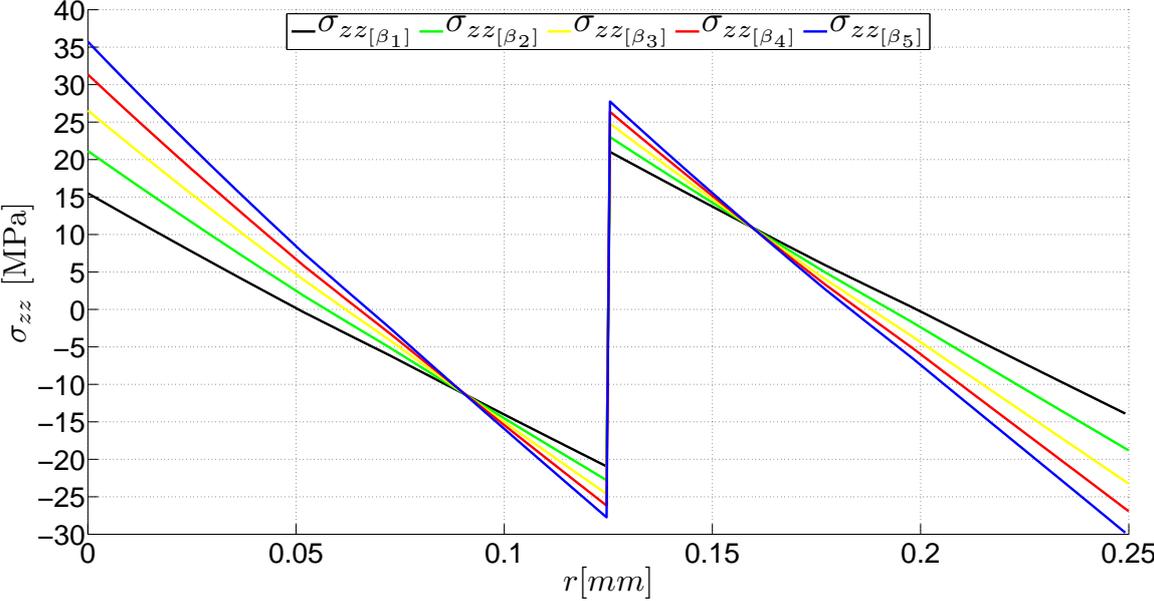


Abbildung 5.40: Verlauf der Spannungskomponente  $\sigma_{zz}$  über dem Querschnitt im Inneren des Laminats für unterschiedliche Krümmungen

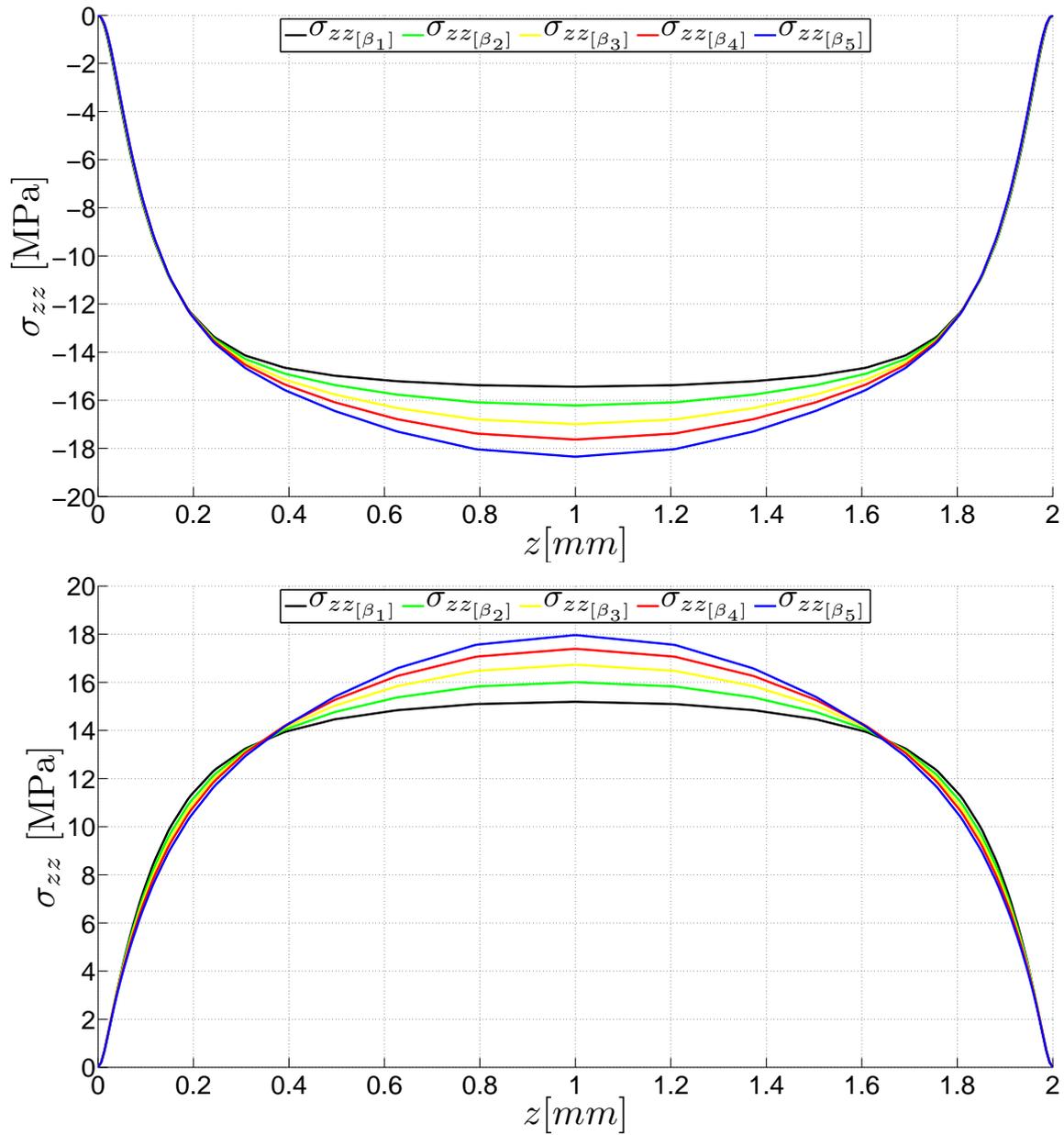


Abbildung 5.41: Verlauf der Spannung  $\sigma_{zz}$  über die Breite in einem Abstand von  $\pm 0.02$ mm vom Interface für unterschiedliche Krümmungen

### Ergebnisse für ein $[0^\circ/90^\circ]$ Kreuzlaminat

Krümmungsverhältnis $\beta$ [-]	$\beta_1 = 0.02$	$\beta_2 = 0.03$	$\beta_3 = 0.04$	$\beta_4 = 0.05$	$\beta_5 = 0.06$
$\sigma_{rr-max}$ [MPa]	1.06	1.29	1.5	1.73	1.94
$\sigma_{rr-mitte}$ [MPa]	0.3	0.46	0.6	0.74	0.89
$\Delta\sigma_{rr} = \sigma_{rr-max} - \sigma_{rr-mitte}$	0.76	0.83	0.9	0.99	1.05

Tabelle 5.3: Die maximalen interlaminaren Spannungen in einem  $[0^\circ/90^\circ]$  Laminat in Abhängigkeit von den Krümmungsverhältnissen

Das Verhalten der interlaminaren Normalspannung  $\sigma_{rr}$  über dem Interface in Abhängigkeit von der Krümmung ist identisch mit dem beim zuvor analysierten  $[\pm 45^\circ]$  Winkellaminat, so steigen die maximalen Werte am Rand mit zunehmender Krümmung leicht an, jedoch ist auch ein Anstieg der Spannungen in der Laminatmitte zu verzeichnen (Abb.5.42-5.43), daher wird wieder die Differenz gebildet (Tabelle 5.3).

Die Auswertung dieser Spannung über dem Querschnitt ist ebenfalls vergleichbar mit dem, was die Analyse des Winkellaminats ergeben hat: Mit zunehmendem  $\beta$  ist eine Erhöhung der Spannungswerte zu verzeichnen (Abb.5.44).

Die Verläufe der Umfangsspannung  $\sigma_{\varphi\varphi}$  über dem Querschnitt für die verschiedenen Krümmungsverhältnisse sind deckungsgleich. Folglich hat die Krümmung hierauf keinen Einfluss (Abb.5.45).

Die interlaminare Schubspannung  $\tau_{rz}$  kann zwar im Interface ausgewertet werden, allerdings wird in dieser Position für diesen Lagenaufbau die Bedingung eines freien unbelasteten Randes nicht erfüllt, daher erfolgt die Analyse  $0.02\text{ mm}$  oberhalb ( $90^\circ$  Schicht) sowie unterhalb ( $0^\circ$  Schicht) des Interfaces. Diese Spannungskomponente ist dadurch charakterisiert, dass sie in der Nähe des freien Randes Spannungsspitzen aufweist. Die Auswertung oberhalb des Interfaces hat gezeigt, dass die Spannungsspitzen mit zunehmender Krümmung abnehmen (Abb.5.46), dagegen ist unterhalb des Interfaces eine Zunahme der erwähnten Spannungsüberhöhungen zu erkennen (Abb.5.47).

Für diesen Lagenaufbau ist die interlaminare Schubspannung  $\tau_{r\varphi}$  und die intralaminare Schubspannung  $\tau_{\varphi z}$  sowohl im Querschnitt als auch über dem Interface bekanntermaßen gleich Null.

Die Verläufe der Spannungskomponente  $\sigma_{zz}$  entlang des Querschnittes zeigen einen schwachen Anstieg der Werte am Innenrand sowie eine Verringerung am Außenrand an, wobei die Kurven in der  $0^\circ$  Schicht parallel verlaufen, während sie sich in der  $90^\circ$  Schicht an einem bestimmten Punkt kreuzen (Abb.5.48).

## Untersuchung der Verläufe der Spannungskomponenten $[0^\circ/90^\circ]$ Kreuzlamine in Abhängigkeit der Krümmungsverhältnisse.

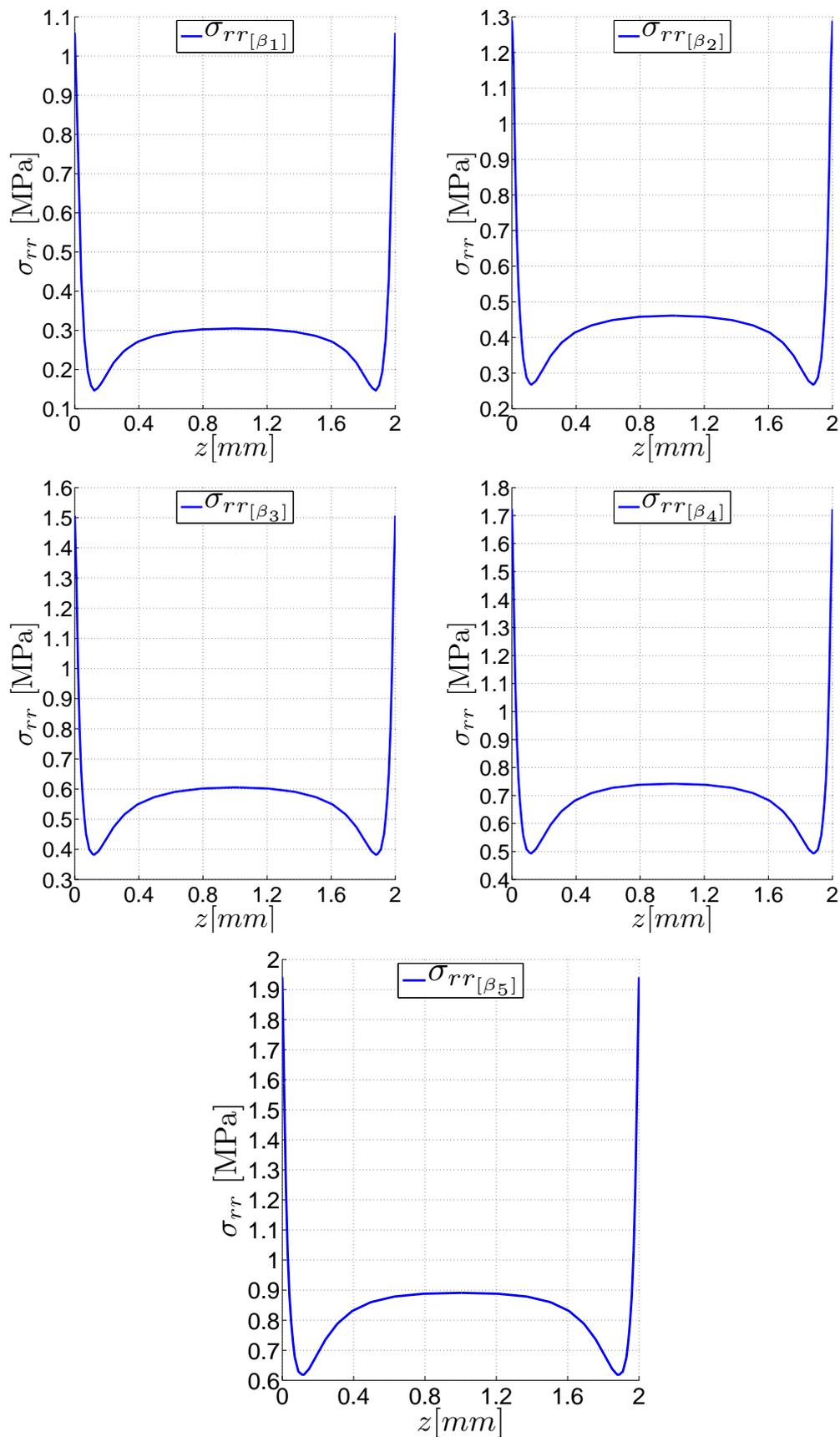


Abbildung 5.42: Verlauf der Normalspannung  $\sigma_{rr}$  über dem Interface für verschiedene Krümmungen

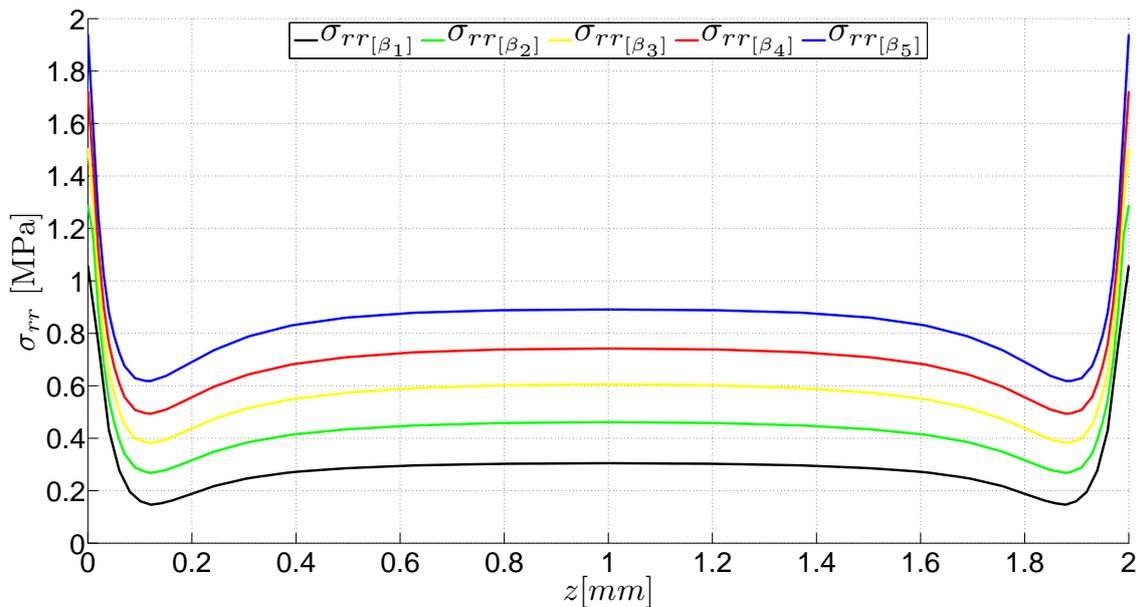


Abbildung 5.43: Verlauf der Normalspannung  $\sigma_{rr}$  über dem Interface für verschiedene Krümmungen

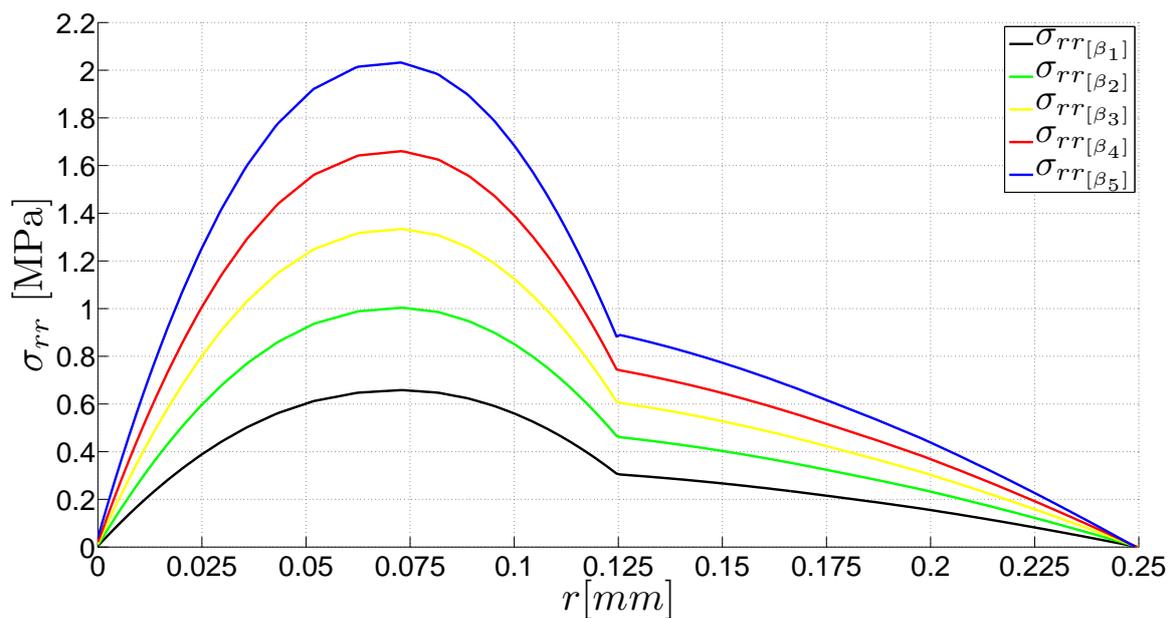


Abbildung 5.44: Verlauf der Normalspannung  $\sigma_{rr}$  über dem Querschnitt im Inneren eines  $[0^\circ/90^\circ]$  Laminats für verschiedene Krümmungen

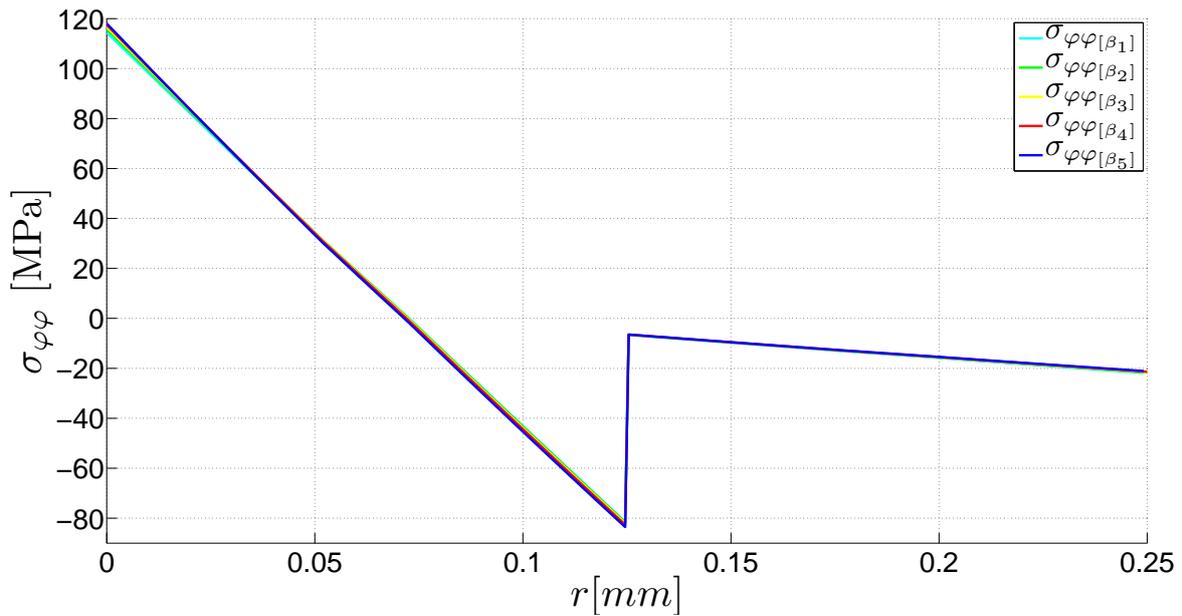


Abbildung 5.45: Verlauf der Spannung  $\sigma_{\varphi\varphi}$  über dem Querschnitt im Inneren eines  $[0^\circ/90^\circ]$  Laminats für verschiedene Krümmungen

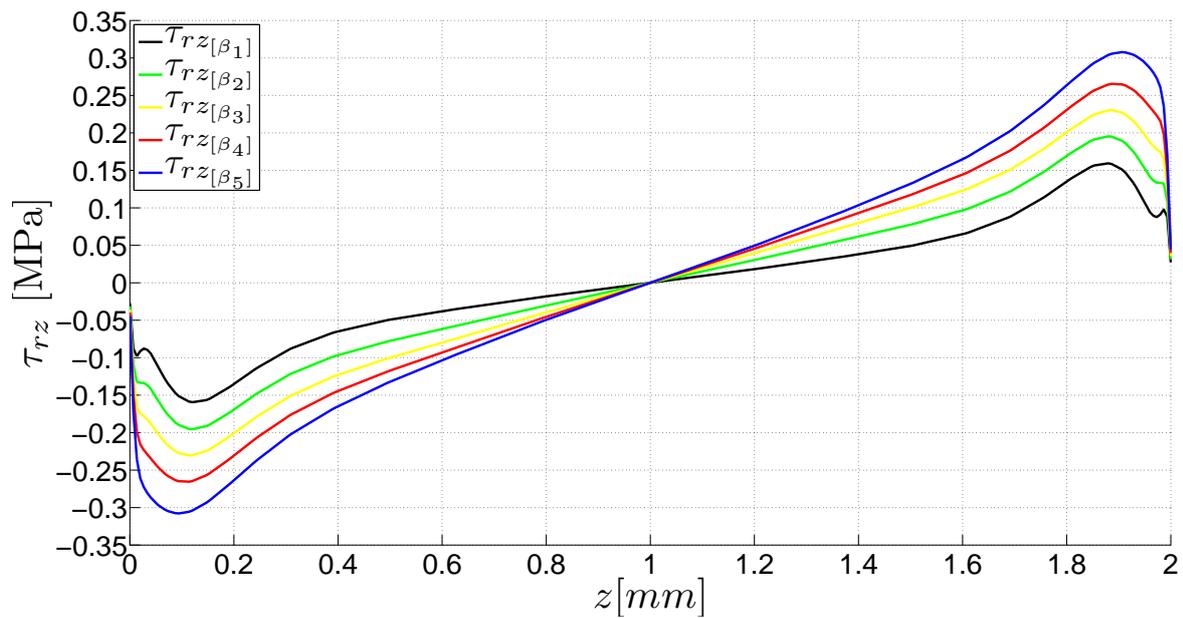


Abbildung 5.46: Verlauf der interlaminaren Schubspannung  $\tau_{rz}$  in einem Abstand von  $0.02$  mm unterhalb des Interfaces für verschiedene Krümmungen

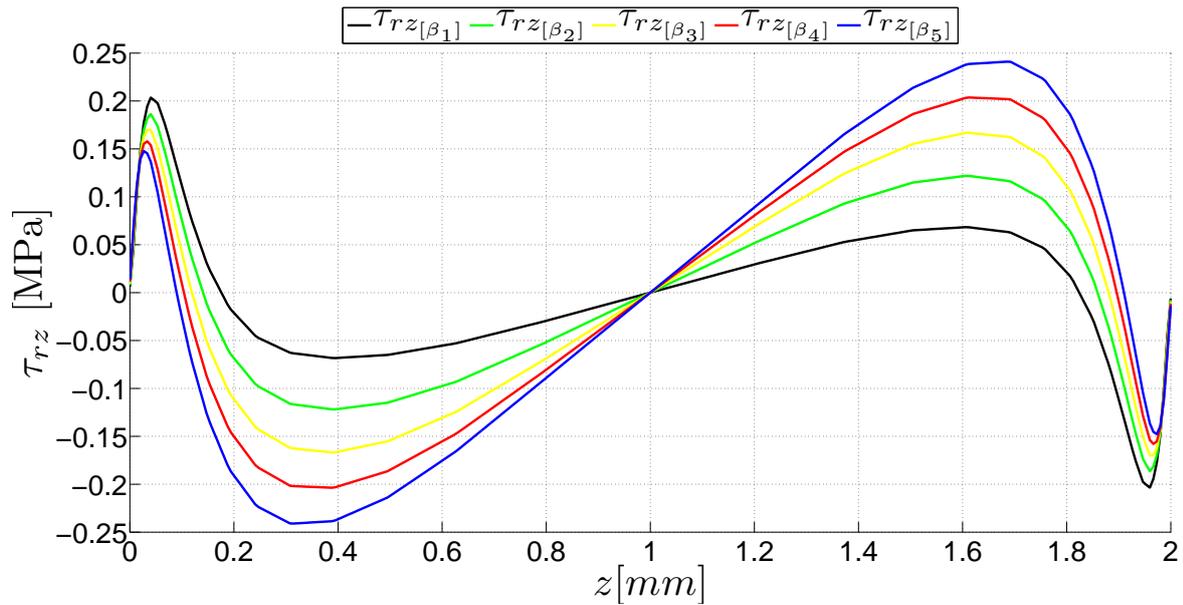


Abbildung 5.47: Verlauf der interlaminaren Schubspannung  $\tau_{rz}$  in einem Abstand von  $0.02 \text{ mm}$  oberhalb des Interfaces für verschiedene Krümmungen

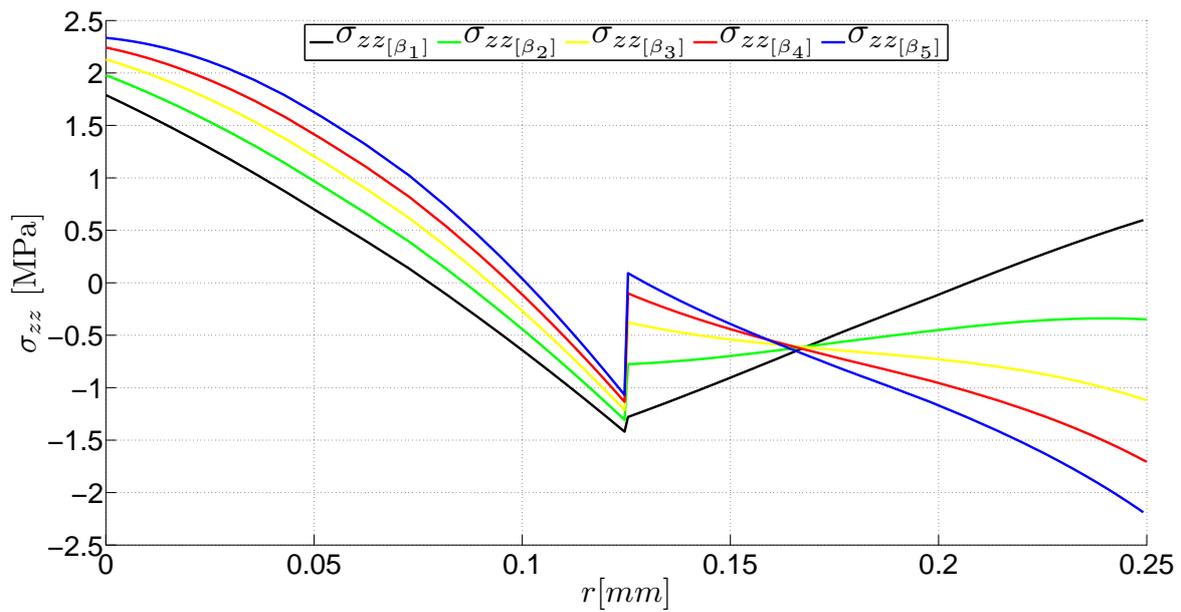


Abbildung 5.48: Verlauf der Spannung  $\sigma_{zz}$  über dem Querschnitt im Inneren eines  $[0^\circ/90^\circ]$  Laminats für verschiedene Krümmungen

### 5.3.3 Untersuchung der Auswirkung eines symmetrischen Lagenaufbaus auf die Randeffekte

Die vergangenen Untersuchungen sind anhand unsymmetrischer Lagenaufbauten vorgenommen worden. Nun werden symmetrische Laminat analysiert, es handelt sich hierbei nach wie vor um Kreuz- und Winkellaminat, jedoch sieht der Lagenaufbau jetzt folgendermaßen aus:

- $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ] \rightarrow [0^\circ/90^\circ]_s$
- $[45^\circ/-45^\circ/-45^\circ/45^\circ] \rightarrow [\pm 45^\circ]_s$

Die Materialdaten bleiben unverändert. Die Schichtdicke beträgt weiterhin  $t_s = 0.125$  mm damit ändert sich der Außenradius auf 3 mm. Da diesmal das Laminat aus vier Schichten besteht, gibt es insgesamt drei Interfaces (Tabelle.5.4).

Lagenaufbau	Interface-1 (zwischen)	Interface-2 (zwischen)	Interface-3 (zwischen)
$[0^\circ/90^\circ]_s$	$0^\circ$ und $90^\circ$	$90^\circ$ und $90^\circ$	$90^\circ$ und $0^\circ$
$[\pm 45^\circ]_s$	$+45^\circ$ und $-45^\circ$	$-45^\circ$ und $-45^\circ$	$-45^\circ$ und $+45^\circ$

Tabelle 5.4: Position der Interfaces

#### Ergebnisse für ein $[0^\circ/90^\circ]_s$ Kreuzlaminat

Die interlaminare Radialspannung  $\sigma_{rr}$ , ausgewertet über die drei Interfaces hat zunächst gezeigt, dass der Spannungszustand wieder rotationssymmetrisch ist (Abb.5.49-5.51). Die Verläufe über die Interfaces -1 und -2 sind qualitativ gleich, sie unterscheiden sich in der maximalen Spannung am Rand, wobei im Interface-1 die Werte deutlich höher sind (Abb.5.49), das liegt daran, dass die  $0^\circ$  und  $90^\circ$  Schicht theoretisch unterschiedliche Querkontraktionen erfahren, während zwei  $90^\circ$  Schichten gleich kontrahieren. Der Verlauf entlang des dritten Interfaces zeigt dagegen eine gespiegelte Darstellung (Abb.5.51), so stellen die Werte am Rand ein Minimum dar. Der Randeffect hier scheint also harmlos zu sein, dies ist auf die Tatsache zurück zu führen, dass infolge des Lastfalls ein Teil der oberen Struktur auf Druck beansprucht wird.

Die Spannungskonzentrationen können auch durch die Untersuchung der Verläufe über dem Querschnitt an den Rändern nachgewiesen werden (siehe die schematische Darstellung 4.1-unten). Abb. 5.52 bestätigt, dass es im Rand von interface-1 bzw. in dessen unmittelbarer Umgebung zu einer Spannungsüberhöhung kommt. Für ein Vergleich mit dem unsymmetrischen Laminat wird der Verlauf im Interface-1 herangezogen. Die Gegenüberstellung zeigt, dass der am Rand vorhandene Maximalwert um die Hälfte kleiner ist, demzufolge können durch die unsymmetrie hervorgerufene Koppeleffekte zur einer Verschärfung des Randeffectes führen (Abb.5.53).

Die Auswertung dieser Spannungskomponente über dem Querschnitt in Laminatmitte (4.1-unten, Auswertungspfad 3) zeigt einen Verlauf, der am Innen- und Außenrand die Randbedingungen erfüllt (Abb.5.54), allerdings unterscheidet er sich von dem, was man aus dem  $[0^\circ/90^\circ]$  Laminat erhält, dennoch kann dieser Verlauf anhand von [15] bestätigt werden. Die maximalen Werte sind hier niedriger als bei dem zuvor untersuchten unsymmetrischen Kreuzverbund. Der Verlauf von  $\sigma_{\varphi\varphi}$  über dem Querschnitt in Laminatmitte (Abb.5.55) ist ebenfalls durch [15] verifizierbar, es sei hier noch erwähnt, dass die höchste Spannung hier gerade einmal 14.5 MPa beträgt, während sie beim unsymmetrischen Kreuzlaminat einen Wert von 120 MPa erreicht.

Die Auswertung der interlaminaren Schubspannung  $\tau_{r\varphi}$  über die drei Interfaces sowie über den Querschnitt hat das Gleiche ergeben wie bei dem  $[0^\circ/90^\circ]$  Laminat; die Werte sind nämlich hinreichend klein, sodass sie als Null interpretiert werden können. Diese Feststellung gilt auch für die intralaminare (in-plane) Schubspannung  $\tau_{\varphi z}$ .

Die interlaminare Schubspannung  $\tau_{rz}$  erfüllt im Interface-1 nicht die Randbedingung für einen freien unbelasteten Rand deswegen, wird der Auswertungspfad wieder um  $-0.02\text{ mm}$  (Abb.5.56) und  $+0.04\text{ mm}$  (Abb.5.57) parallel verschoben, allerdings liefert die Auswertung im Interface-2 gute Ergebnisse im Hinblick auf die Bedingung für einen freien unbelasteten Rand (Abb.5.58). Am Rand des Interfaces-3 kann die Bedingung wiederum nicht erfüllt werden, daher muss erneut vom Interface ausgewichen werden (Abb.5.59-5.60). Allgemein ist festzustellen, dass die Spannungsspitzen in der Nähe des freien Randes zwar vorhanden sind, die Werte sind jedoch wesentlich geringer als bei einem unsymmetrischen Kreuzlaminat. Für diesen Vergleich ist erneut Interface-1 verwendet worden (Abb.5.61). Die Spannungskomponenten  $\sigma_{zz}$ ,  $\tau_{rz}$  sind an den Interface-Rändern ungleich Null (die Bedingung für einen freien unbelasteten-Rand ist nicht erfüllt), das Kräftegleichgewicht ist dort also gestört. Fernab der Interfaces ist wieder eine Erfüllung vorhanden (Abb.5.62-5.63)

In Abbildung 5.64 ist der sich ergebende Spannungszustand bei  $\varphi = 45^\circ$  im Intervall  $0 \leq r \leq 0.5$  und  $0 \leq z \leq 2$  in Form von 3D Graphiken dargestellt.

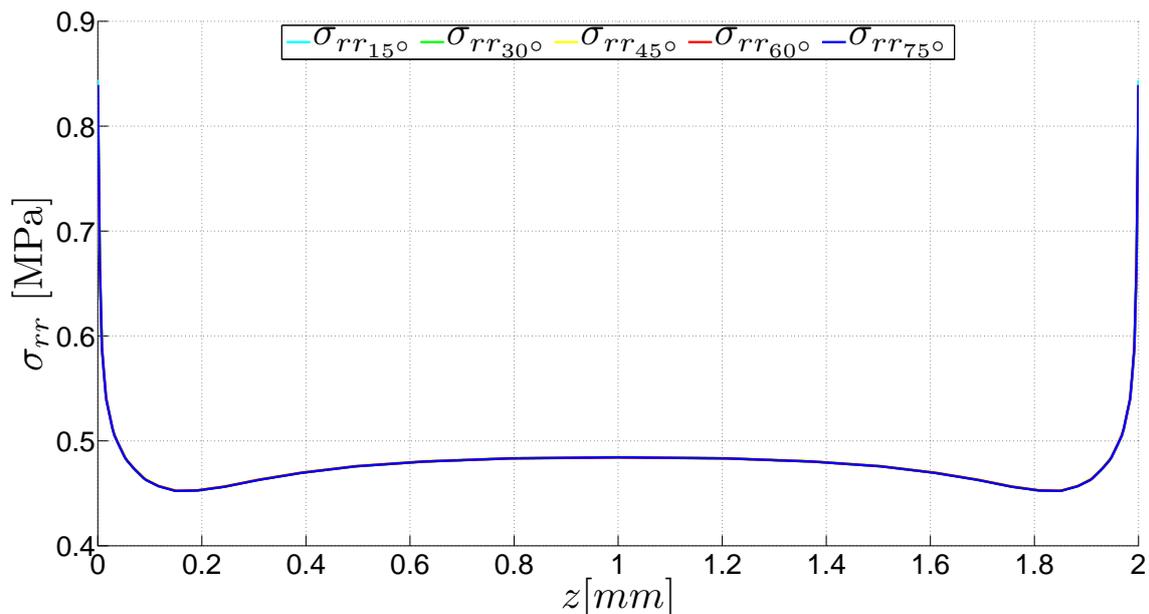


Abbildung 5.49: Verlauf der Schälspannung  $\sigma_{rr}$  über dem Interface-1 eines  $[0^\circ/90^\circ]_s$  Kreuzlaminats

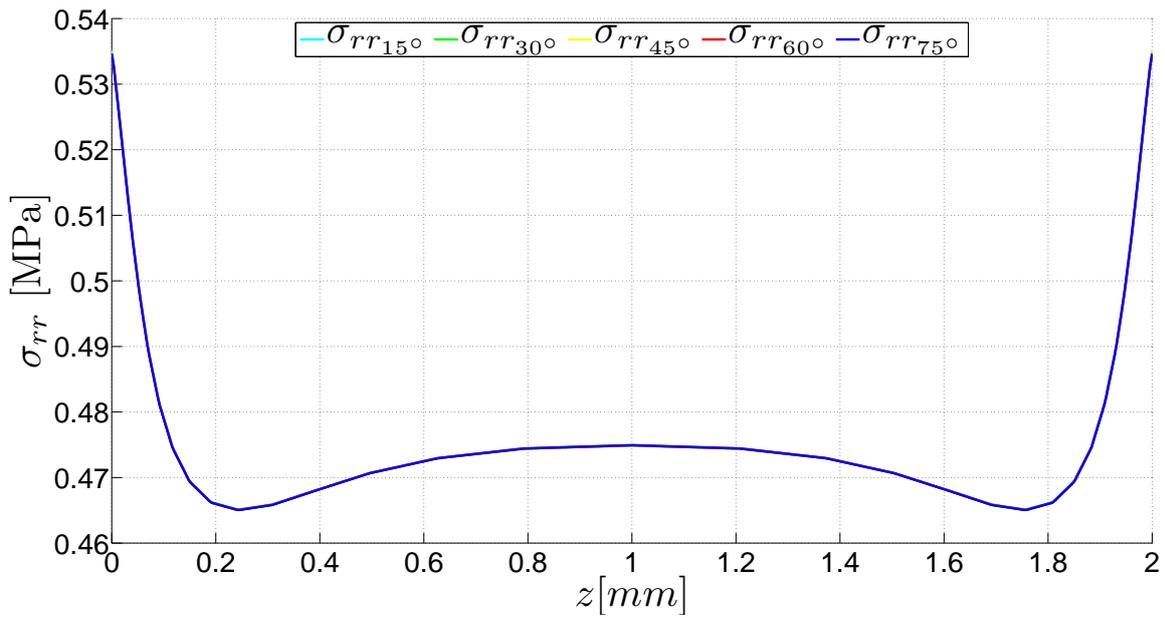


Abbildung 5.50: Verlauf der Schälspannung  $\sigma_{rr}$  über dem Interface-2 eines  $[0^\circ/90^\circ]_s$  Kreuzlaminats

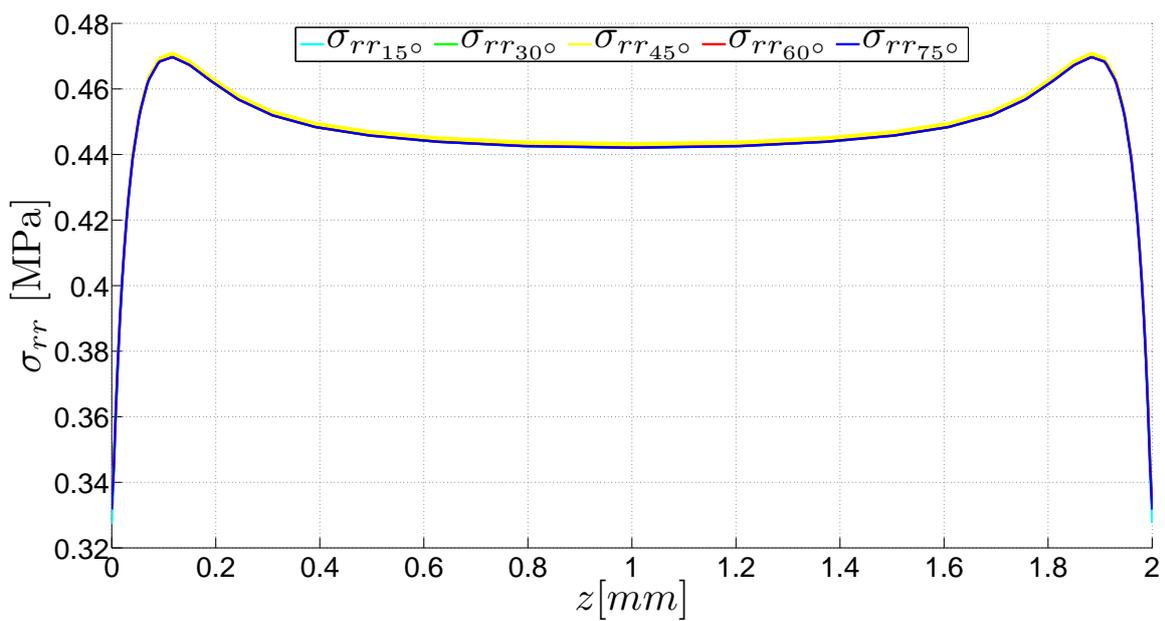


Abbildung 5.51: Verlauf der Schälspannung  $\sigma_{rr}$  über dem Interface-3 eines  $[0^\circ/90^\circ]_s$  Kreuzlaminats

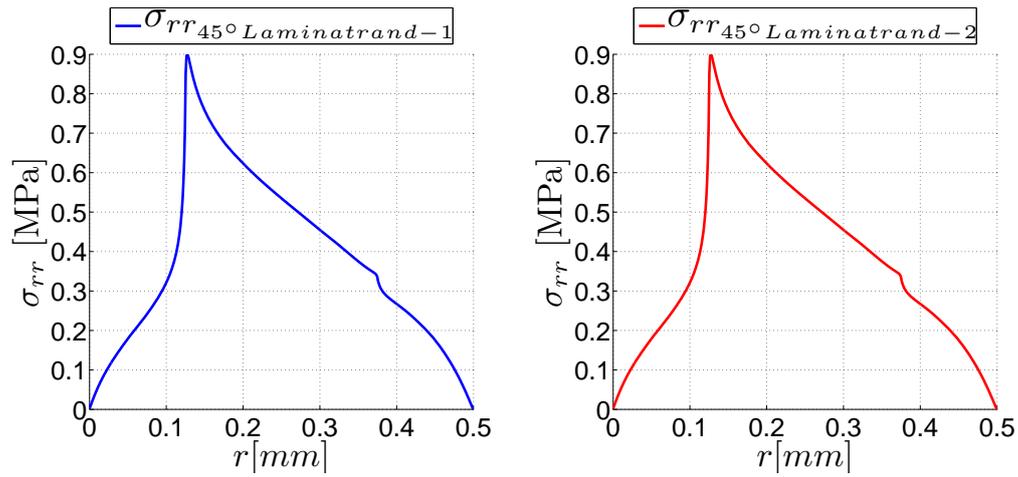


Abbildung 5.52: Verlauf der Schälspannung  $\sigma_{rr}$  über dem Querschnitt an den Rändern eines  $[0^\circ/90^\circ]_s$  Kreuzlaminats

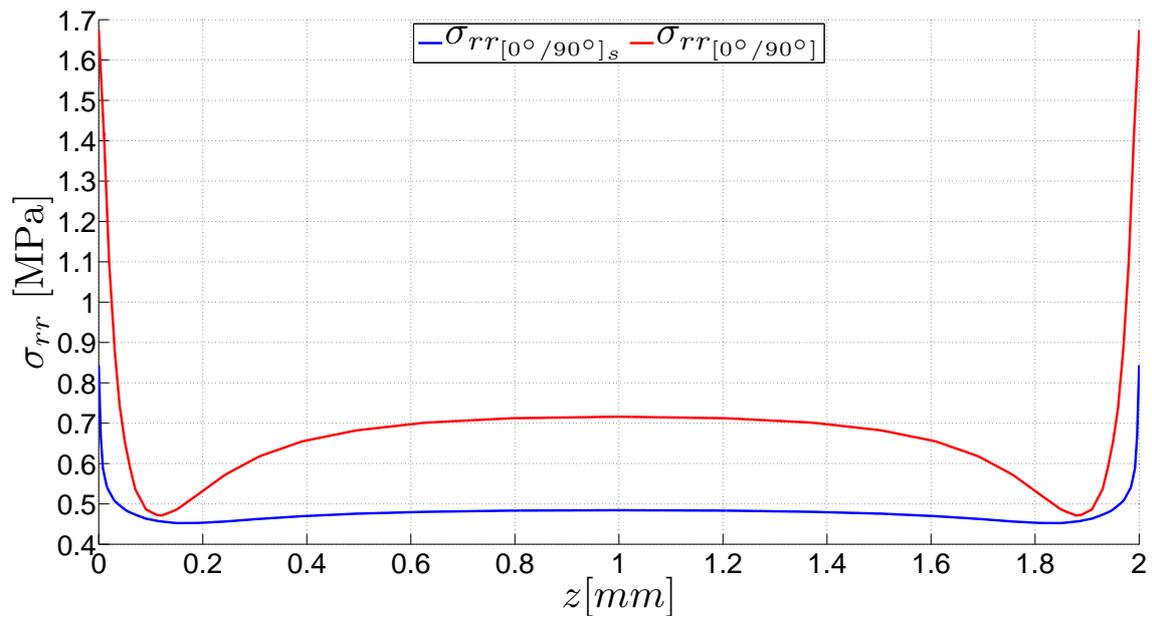


Abbildung 5.53: Gegenüberstellung der Verläufe von  $\sigma_{rr}$  über dem Interface in einem  $[0^\circ/90^\circ]$ - und  $[0^\circ/90^\circ]_s$  Laminat

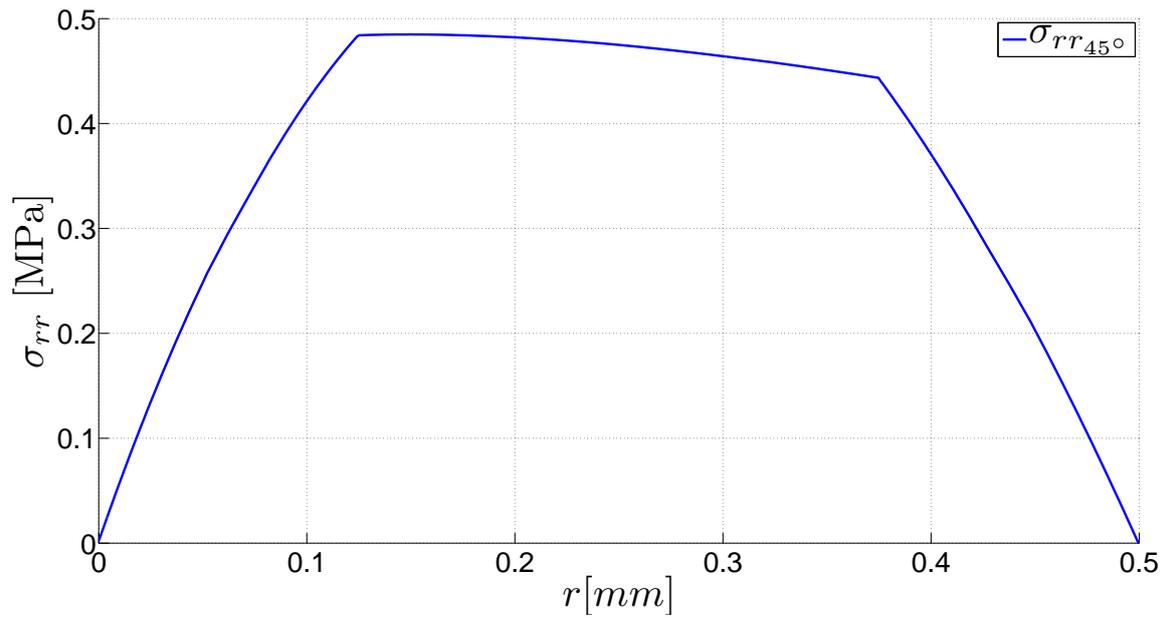


Abbildung 5.54: Verlauf der Schälspannung  $\sigma_{rr}$  über dem Querschnitt im Inneren des  $[0^\circ/90^\circ]_s$  Laminats

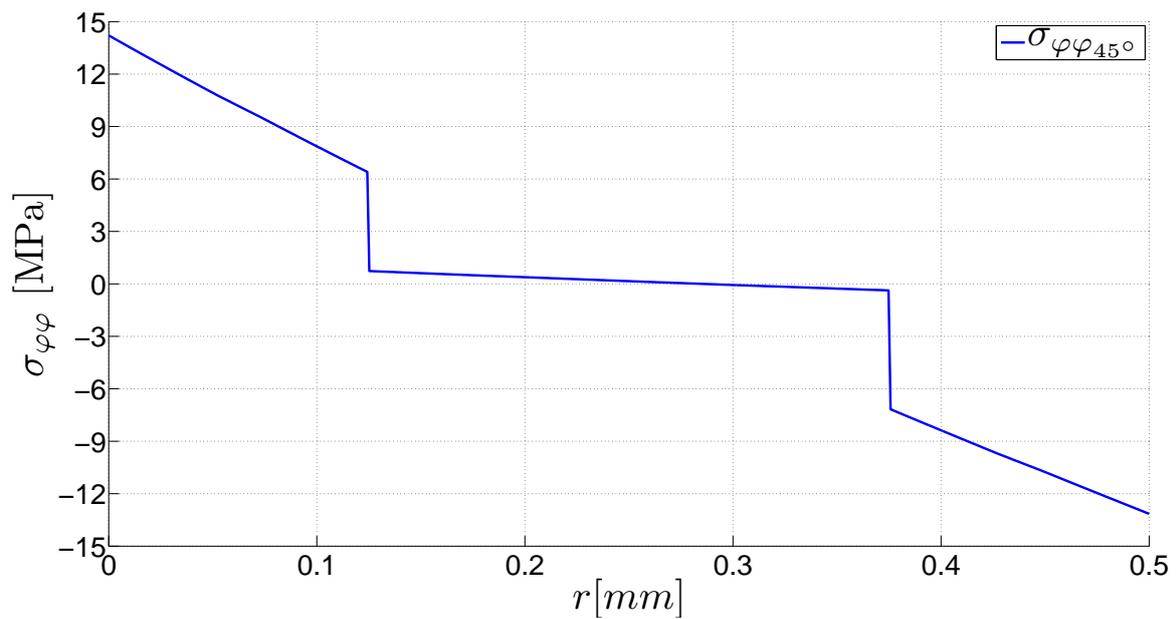


Abbildung 5.55: Verlauf der Umfangsspannung  $\sigma_{\varphi\varphi}$  über dem Querschnitt im Inneren des  $[0^\circ/90^\circ]_s$  Laminats

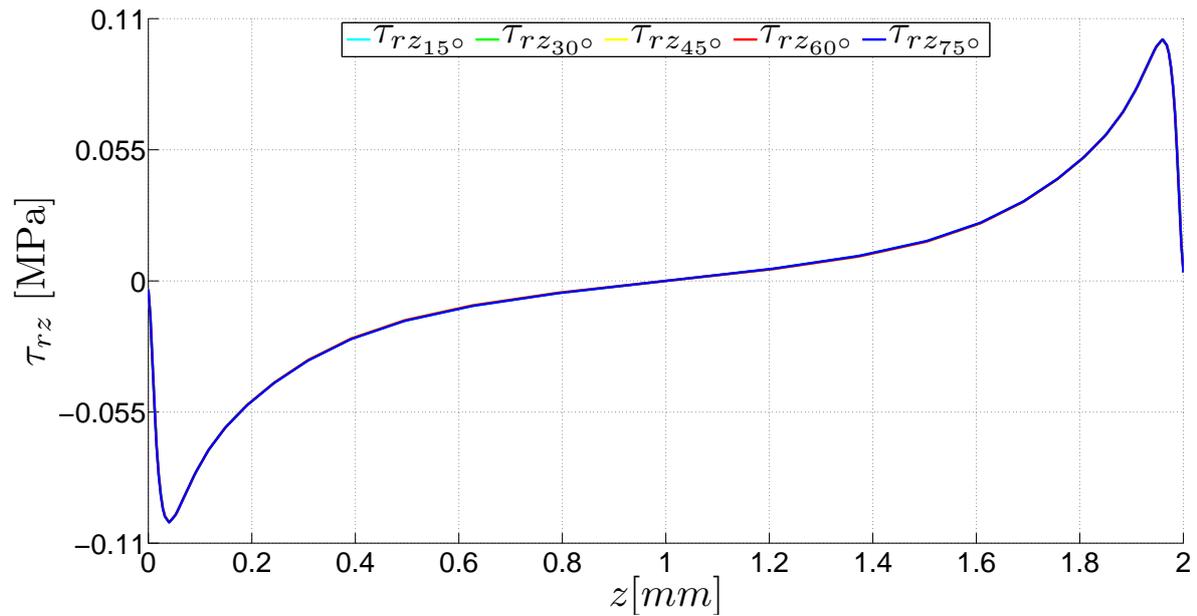


Abbildung 5.56: Verlauf der interlaminaren Schubspannung  $\tau_{rz}$  über die Breite in einem Abstand von  $0.02\text{ mm}$  unterhalb von Interface-1

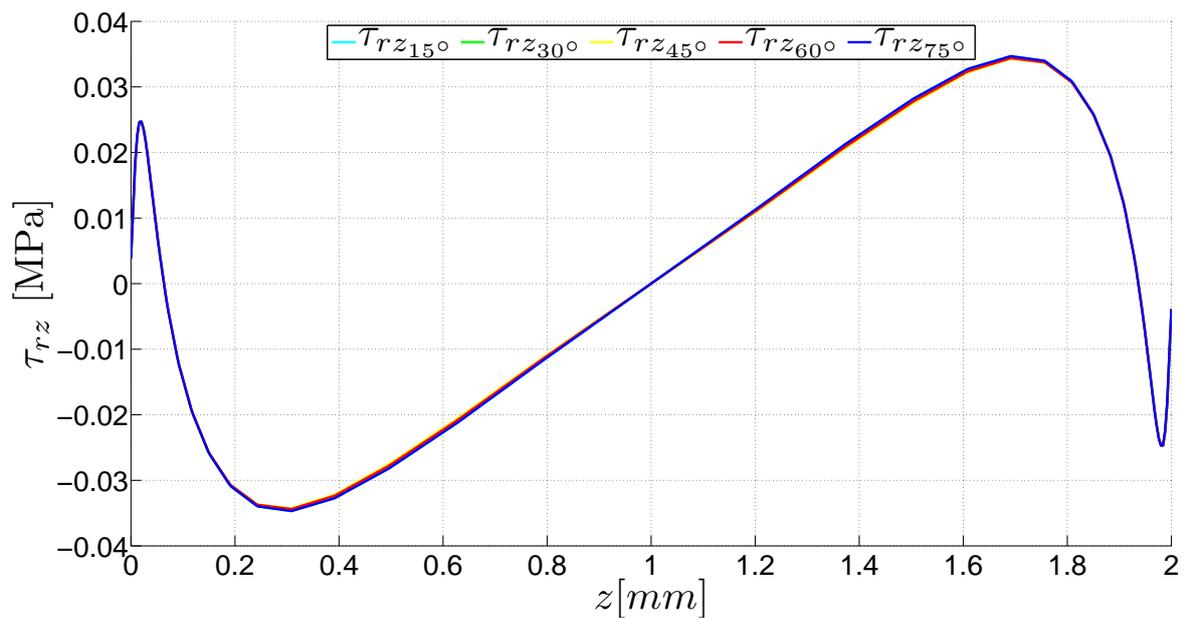


Abbildung 5.57: Verlauf der interlaminaren Schubspannung  $\tau_{rz}$  über die Breite in einem Abstand von  $0.04\text{ mm}$  oberhalb von Interface-1

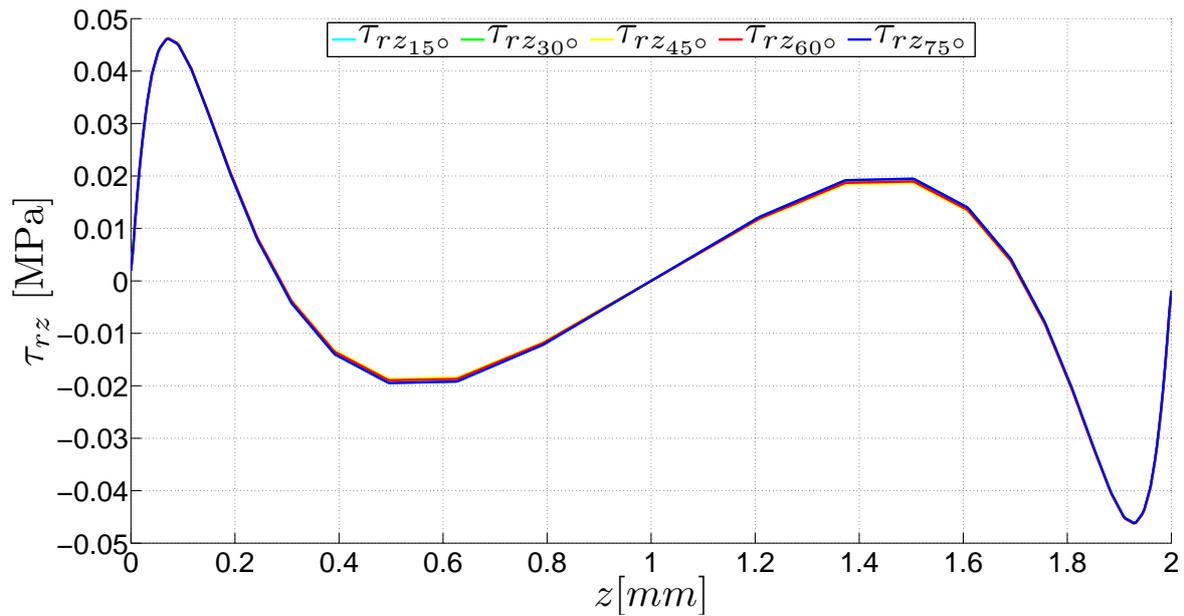


Abbildung 5.58: Verlauf der interlaminaren Schubspannung  $\tau_{rz}$  über Interface-2

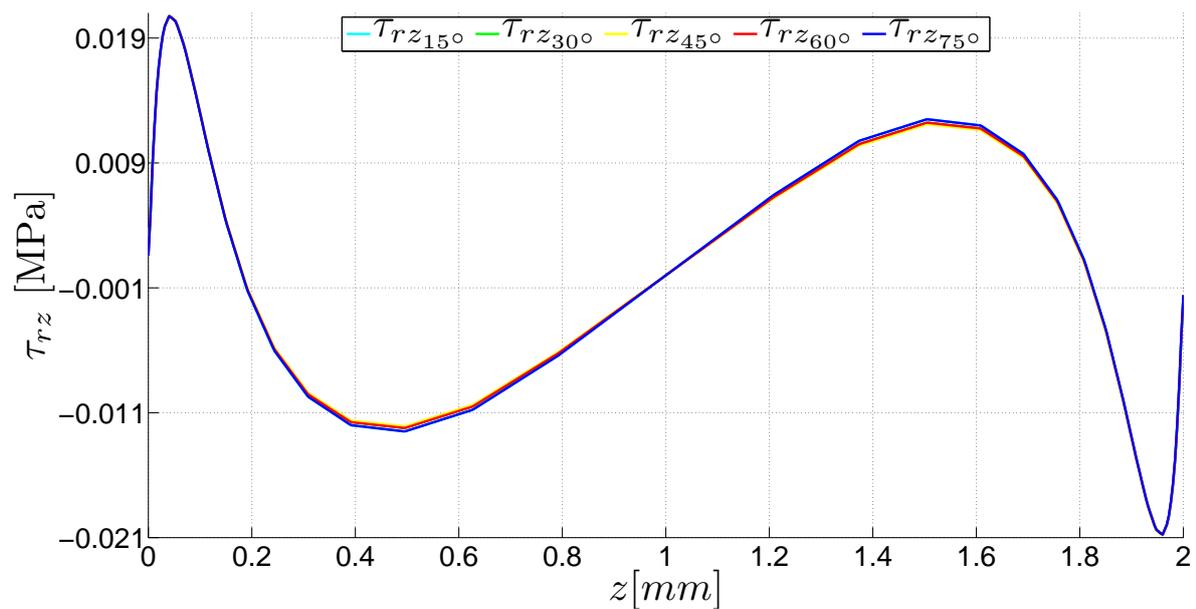


Abbildung 5.59: Verlauf der interlaminaren Schubspannung  $\tau_{rz}$  über die Breite in einem Abstand von  $0.02\text{ mm}$  unterhalb von Interface-3

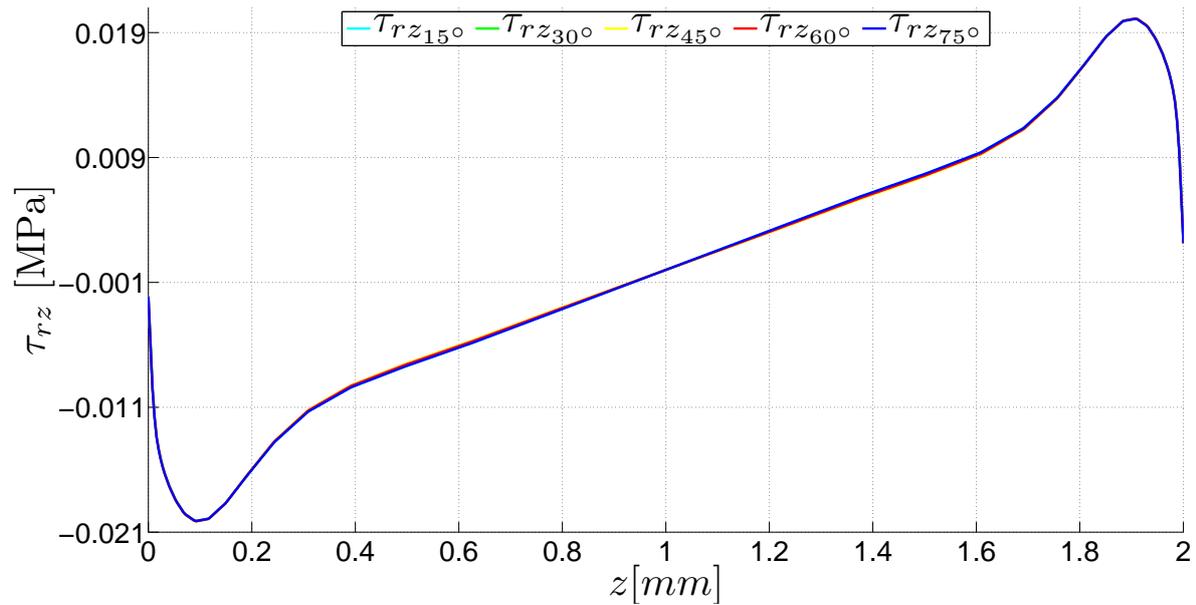


Abbildung 5.60: Verlauf der interlaminaren Schubspannung  $\tau_{rz}$  über die Breite in einem Abstand von  $0.02\text{ mm}$  oberhalb von Interface-3

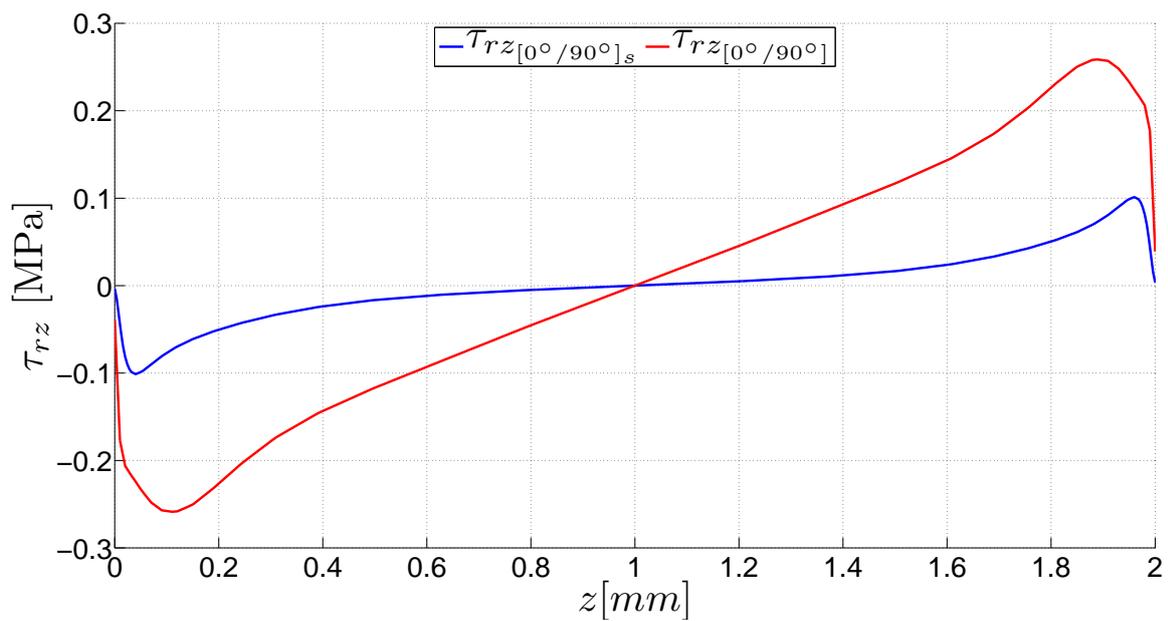


Abbildung 5.61: Gegenüberstellung der Verläufe von  $\tau_{rz}$  über die Breite in einem  $[0^\circ/90^\circ]$ - und  $[0^\circ/90^\circ]_s$  Laminat

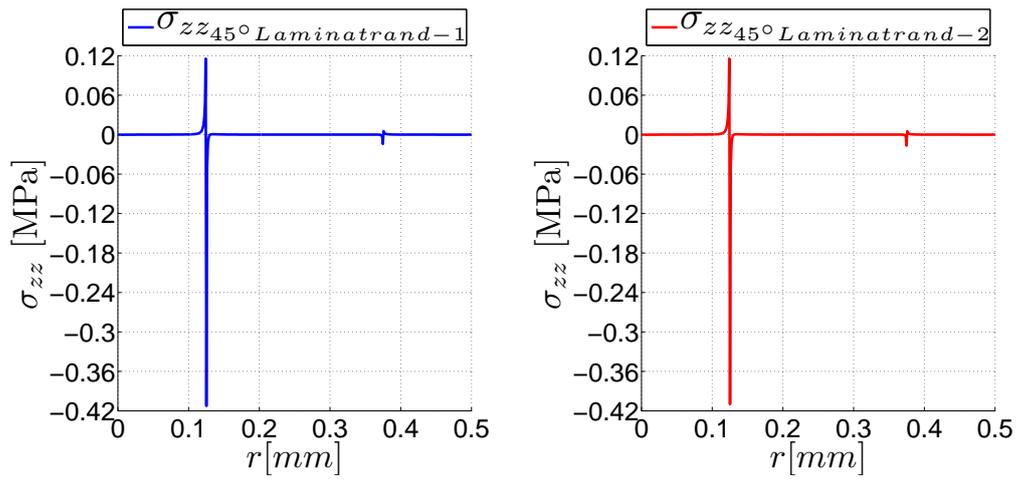


Abbildung 5.62: Verlauf der Spannung  $\sigma_{zz}$  über dem Querschnitt an den Rändern eines  $[0^\circ/90^\circ]_s$  Kreuzlaminats

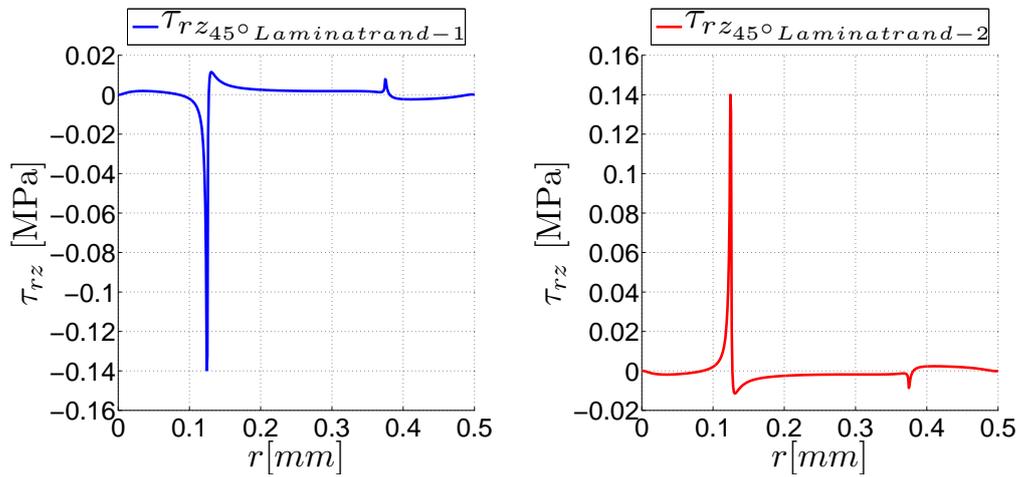


Abbildung 5.63: Verlauf der Spannung  $\tau_{rz}$  über dem Querschnitt an den Rändern eines  $[0^\circ/90^\circ]_s$  Kreuzlaminats

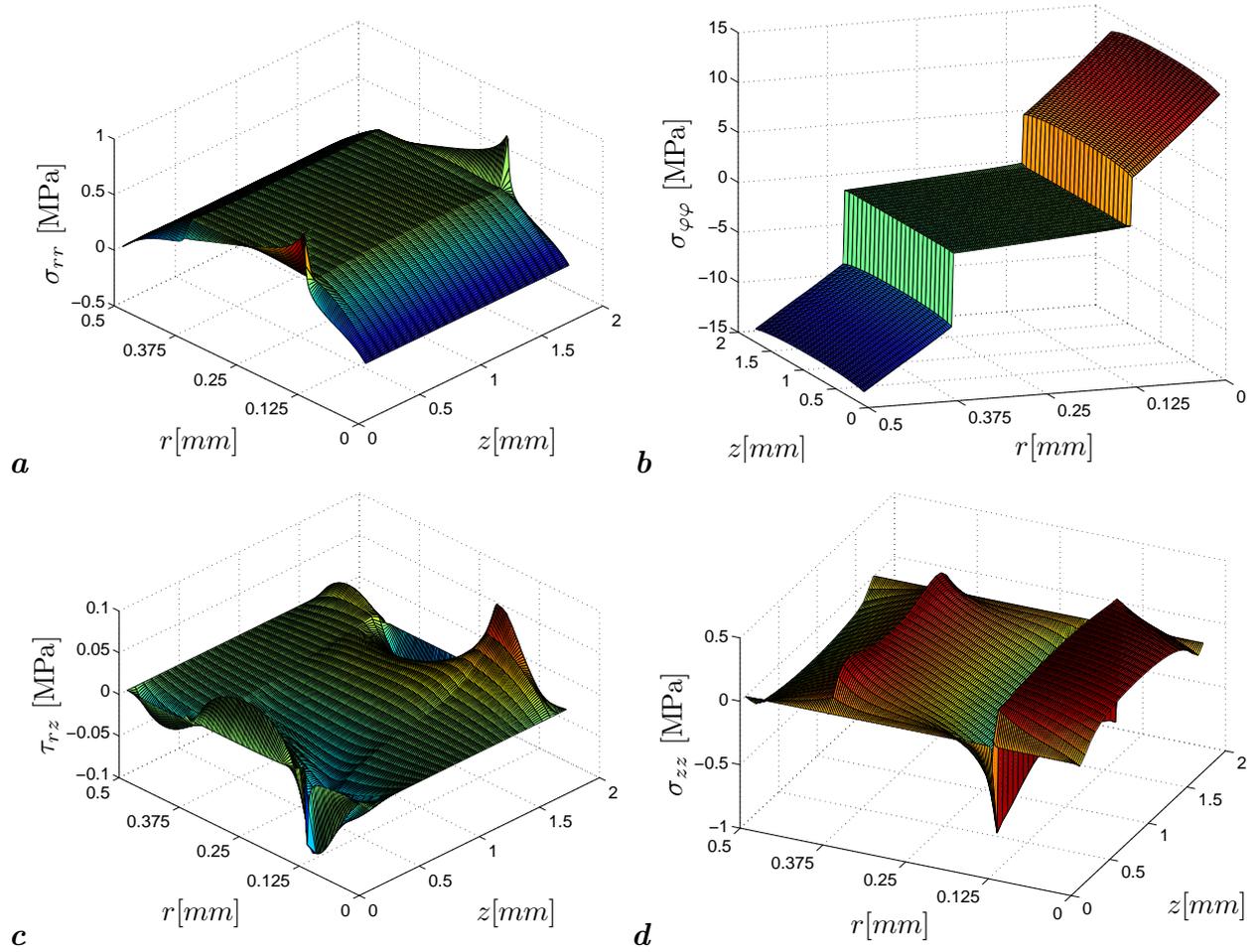


Abbildung 5.64: Spannungsfeld in einem  $[0^\circ/90^\circ]_s$ -gekrümmten Laminat unter reiner Biegung  $M = 1 \text{ Nmm}$ , bei  $\varphi = 45^\circ$  im Intervall  $0 \leq r \leq 0.5$  und  $0 \leq z \leq 2$

### Ergebnisse für ein $[\pm 45^\circ]_s$ Winkellaminat

Wie bei dem unsymmetrischen Winkellaminat festgestellt wurde, sind die Werte der interlaminaren Spannung  $\sigma_{rr}$  am Rand der Interface, entlang den fünf Auswertungspositionen verschieden groß. Die Ursache hierfür könnte wieder die Schubkopplung sein. Im Interface-1 stellen die Werte am Rand Minima dar, darüber hinaus sind diese Minima negativ (Abb.5.65), eine Delamination hier kann also nicht auftreten. Im Interface-2 sind die Ergebnisse am freien Laminatrand-1 und -2 ebenfalls Minima (Abb.5.66). Folglich kann der Randeffect hier auch als ungefährlich eingestuft werden. Der Verlauf der interlaminaren Spannung  $\sigma_{rr}$  über dem Interface-3 (Abb.5.67) ist nun charakteristisch für Randeffecte, die Werte am Rand sind nun positiv und deutlich höher als jene in Laminatmitte. Die Auswertung dieser Spannungskomponente über den Querschnitt an den freien Laminaträndern bestärken die genannten Aussagen (Abb.5.68). Ein Vergleich zum  $[\pm 45^\circ]$  Laminat zeigt jedoch, dass die Spannungskonzentrationen betragsmäßig geringer geworden sind.

Die interlaminare Schubspannung  $\tau_{r\varphi}$  weist in den Interfaces Verläufe auf, die vergleichbar sind mit denen des im Voraus untersuchten unsymmetrischen Winkelverbundes  $[\pm 45^\circ]$ . So ist am Rand ein Anstieg der Spannungen zu verzeichnen, während im Inneren des Laminats die Werte gleich Null sind. Der höchste Anstieg ist im Interface-3 (Abb.5.71) zu beobachten, dagegen ist die kleinste Zunahme im Interface-2 vorhanden (Abb.5.70). Diese Gegebenheit kann auch durch Abbildung 5.72 festgestellt werden, dort sind die Verläufe an der  $45^\circ$  Position über dem Querschnitt am freien Laminatrand-1 und -2 beispielhaft dargestellt, die höchsten Spannungsspitzen sind am Interface-2 zu sehen. Eine Erklärung könnte so lauten, dass die Schubkopplung zwischen zwei Lagen gleicher Faserorientierung hier,  $[-45^\circ / -45^\circ]$ , nicht vorhanden ist bzw. keine große Wirkung zeigt. Die Spannungsspitzen in (Abb.5.72) und (Abb.5.71-Diagramm-3) weichen geringfügig voneinander ab, was auf die Interpolation zwischen den Knoten zurückgeführt wird. Der direkter Vergleich zeigt, dass die Spannungsspitze bei diesem Lagenaufbau maximal 8.3 MPa beträgt, im Gegensatz dazu weist die Komponente  $\tau_{r\varphi}$  am Interface-Rand im unsymmetrischen Winkelverbund  $[\pm 45^\circ]$  eine Spannungsspitze von 14 MPa auf, außerdem ist festzustellen, dass die Lage der Extremwerte sich vertauscht hat.

Die Auswertung der Spannungskomponenten  $\tau_{rz}$ ,  $\tau_{\varphi z}$  und  $\sigma_{zz}$  über dem Querschnitt am Rand (Abb.5.73-5.75) zeigt deutlich, dass an den Interface-Rändern bzw. in deren näherer Umgebung Spannungsspitzen entstehen wobei, diese Spitzen zwischen zwei benachbarten Schichten mit der gleichen Faserorientierungen (bei  $r = 0.25$  mm) erheblich milder ausfallen, demnach kann die Bedingung für freie unbelastete Ränder dort nicht erfüllt werden. Anhand den Abbildungen (5.73-5.75) ist aber festzustellen, dass abseits der Interfaces die Bedingung gut erfüllt ist. Um sich einen besseren Überblick über den Spannungsfeld in einem  $[\pm 45^\circ]_s$  Laminat verschaffen zu können, werden die sechs Spannungskomponenten bei  $\varphi = 45^\circ$  im Intervall  $0 \leq r \leq 0.5$  und  $0 \leq z \leq 2$  mit dreidimensionalen Graphiken dargestellt (Abb.5.76).

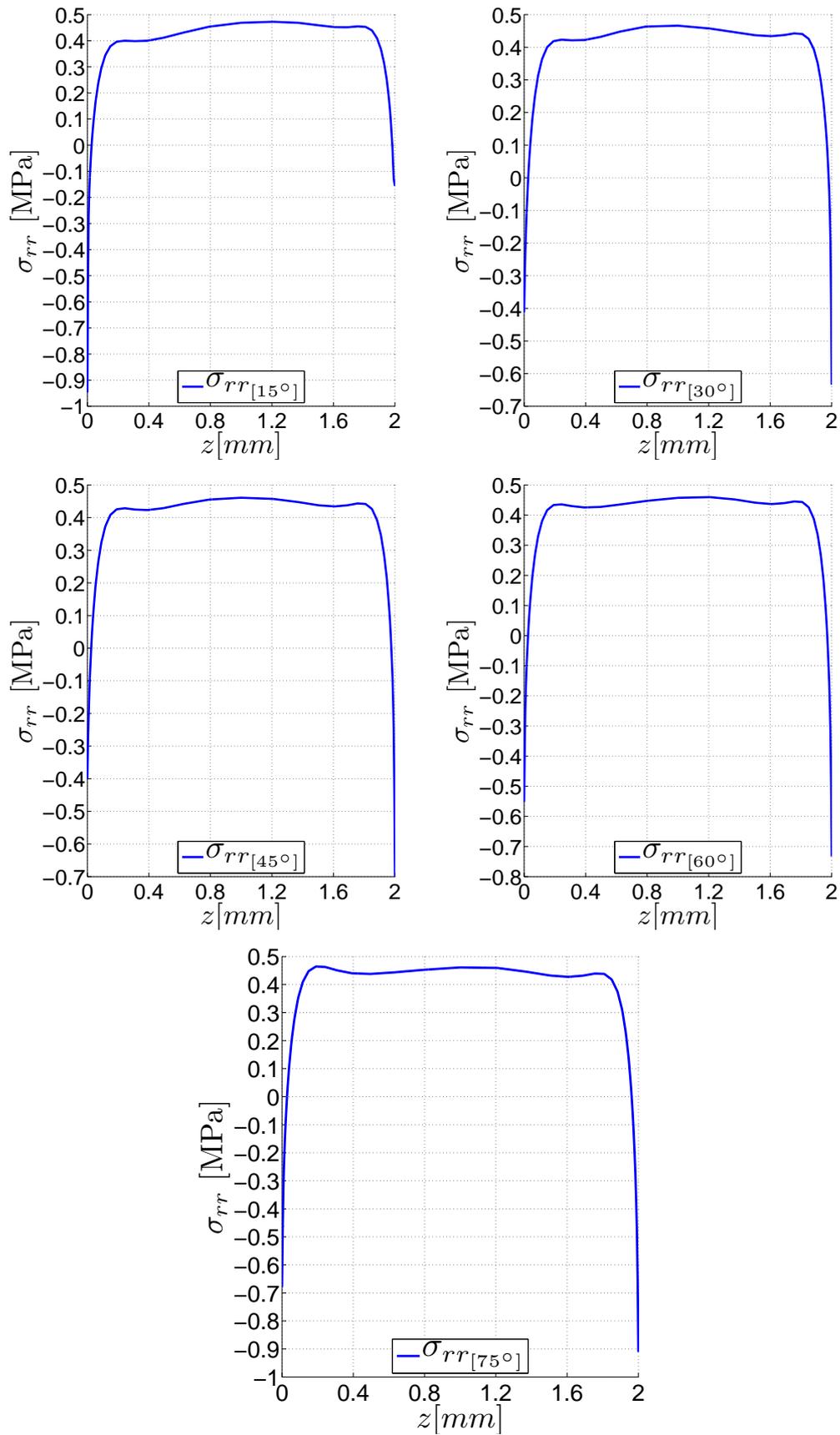


Abbildung 5.65: Verlauf der Schälspannung  $\sigma_{rr}$  über dem Interface-1 eines  $[\pm 45]_s$  Winkelaminats

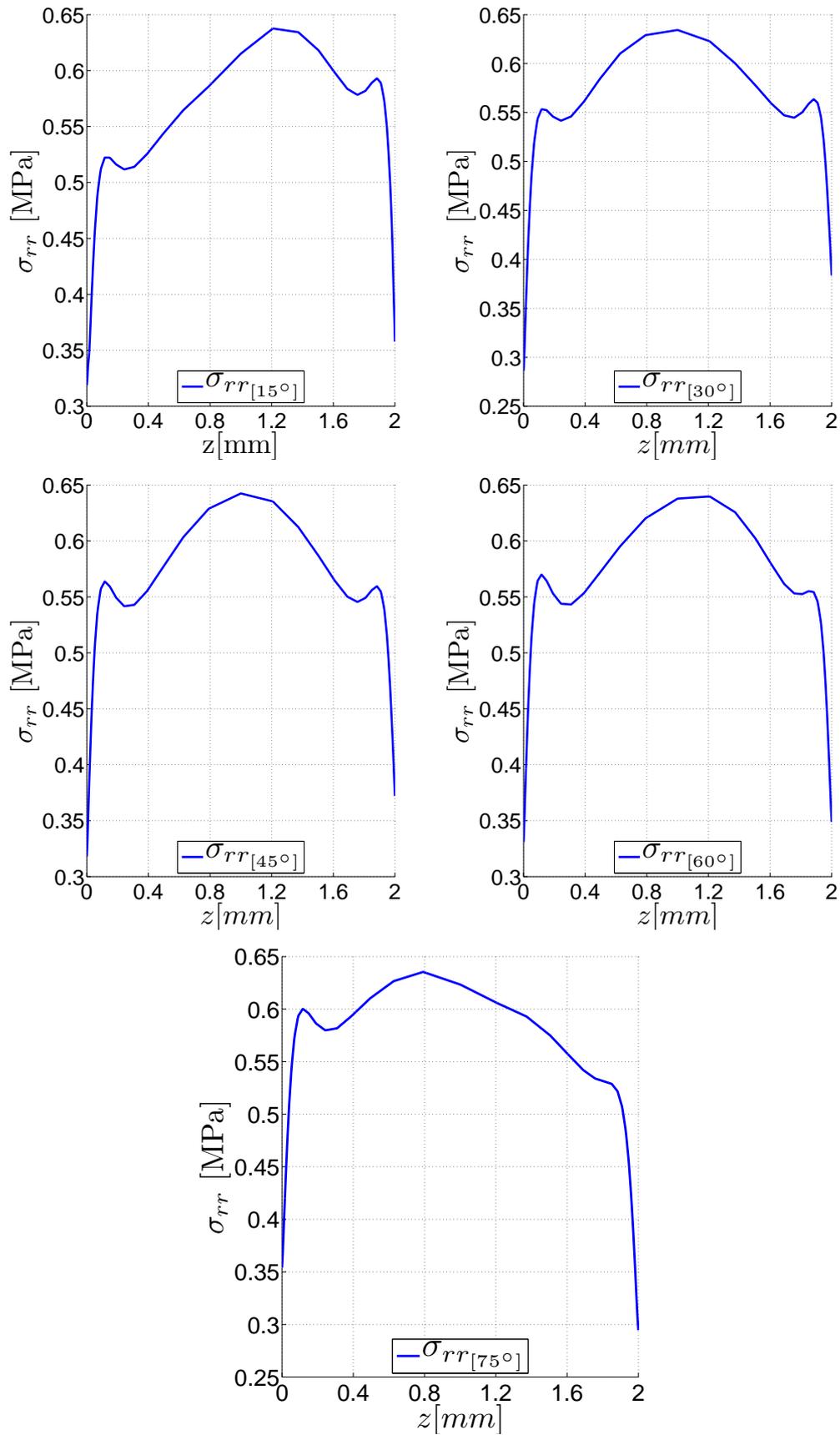


Abbildung 5.66: Verlauf der Schälspannung  $\sigma_{rr}$  über dem Interface-2 eines  $[\pm 45^\circ]_s$  Winkelaminats

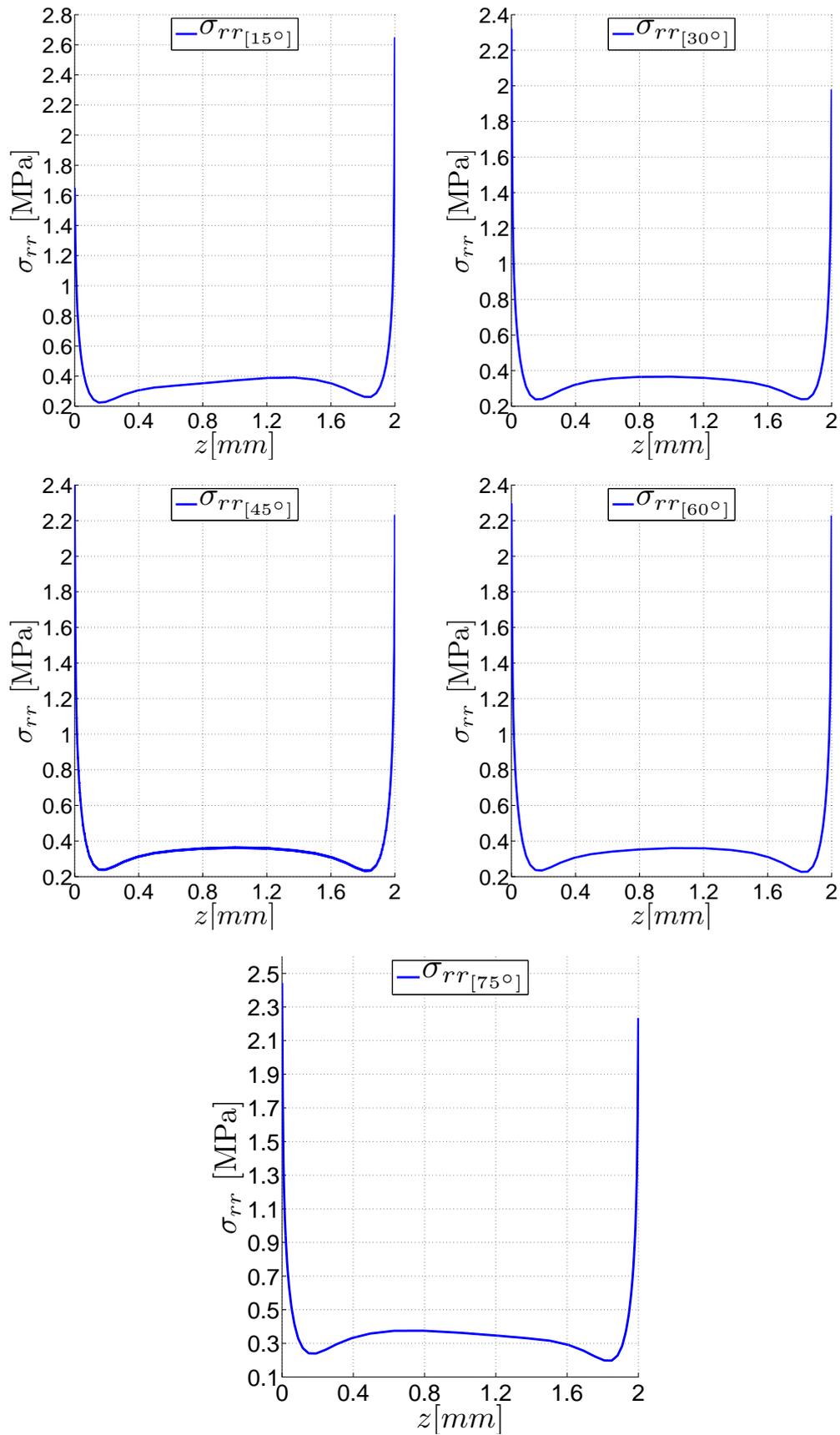


Abbildung 5.67: Verlauf der Schälspannung  $\sigma_{rr}$  über dem Interface-3 eines  $[\pm 45^\circ]_s$  Winkelaminats

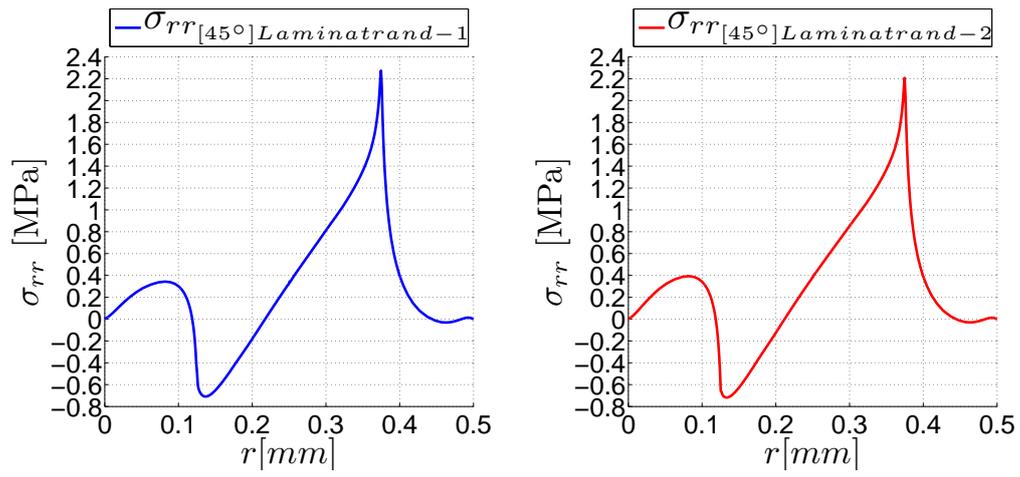


Abbildung 5.68: Verlauf der Schälspannung  $\sigma_{rr}$  über dem Querschnitt an den Rändern eines  $[\pm 45^\circ]_s$  Winkellaminats

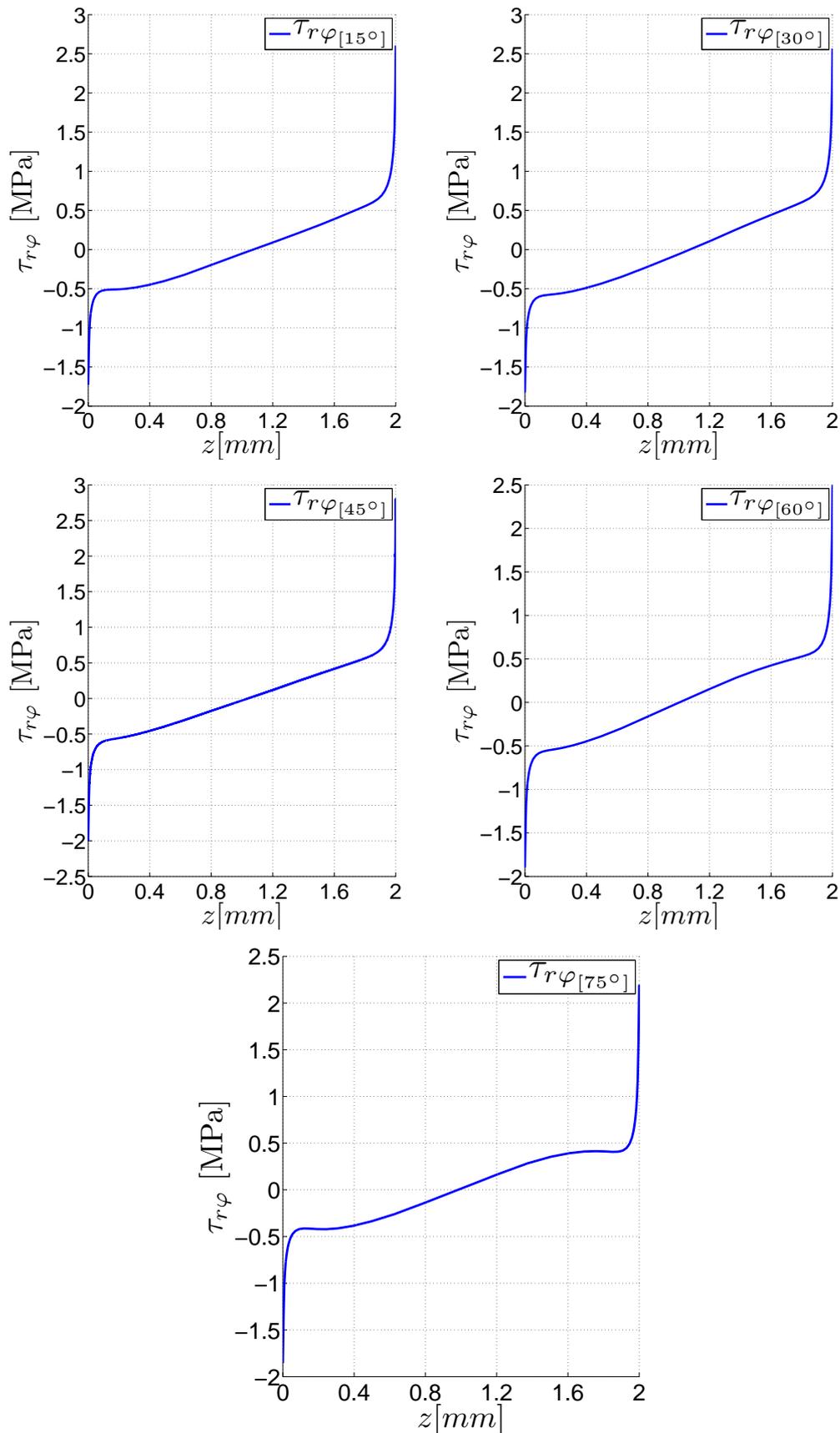


Abbildung 5.69: Verlauf der interlaminaren Schubspannung  $\tau_{r\varphi}$  über dem Interface-1 eines  $[\pm 45^\circ]_s$  Winkellaminats

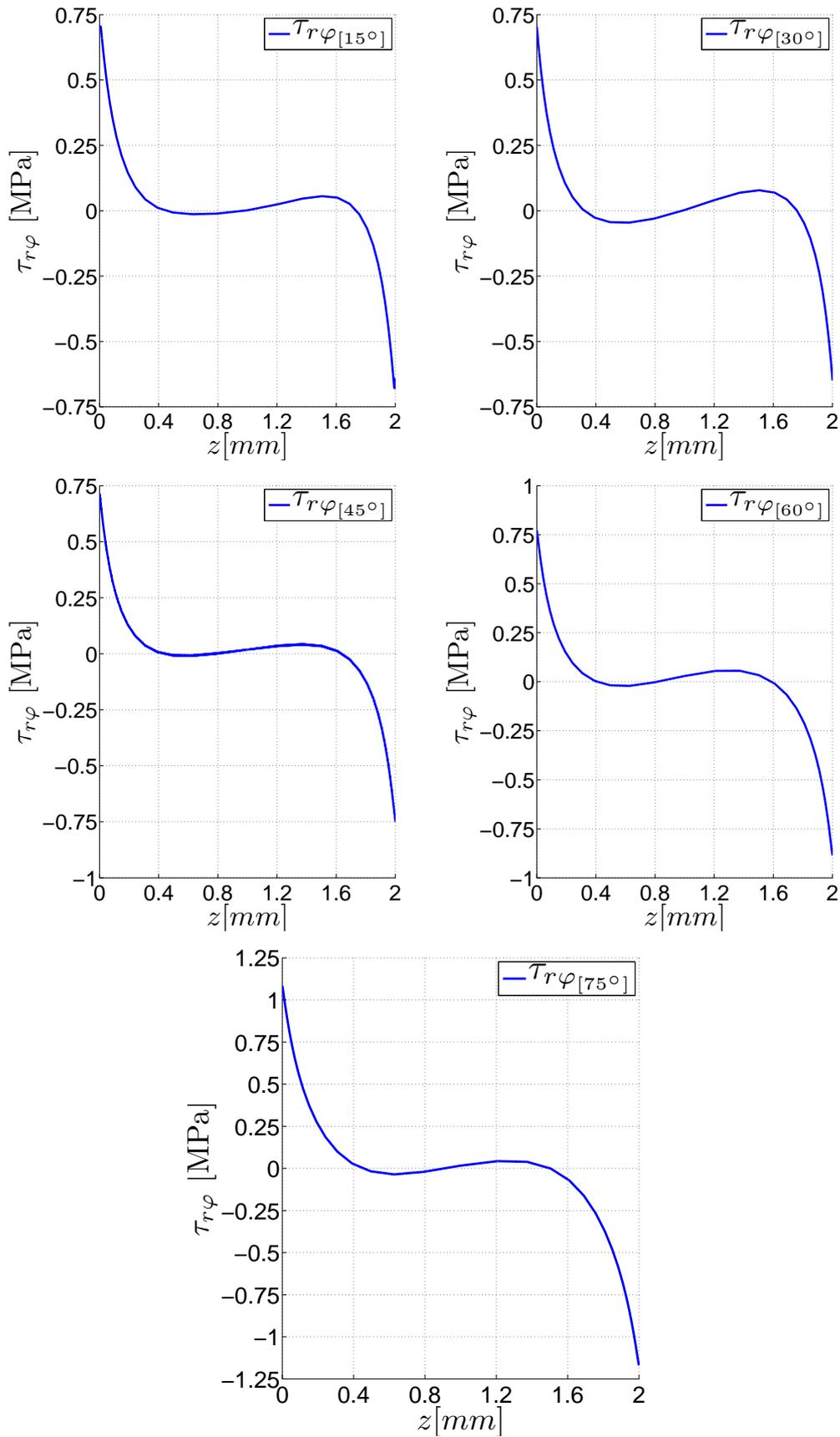


Abbildung 5.70: Verlauf der interlaminaren Schubspannung  $\tau_{r\varphi}$  über dem Interface-2 eines  $[\pm 45^\circ]_s$  Winkellaminats

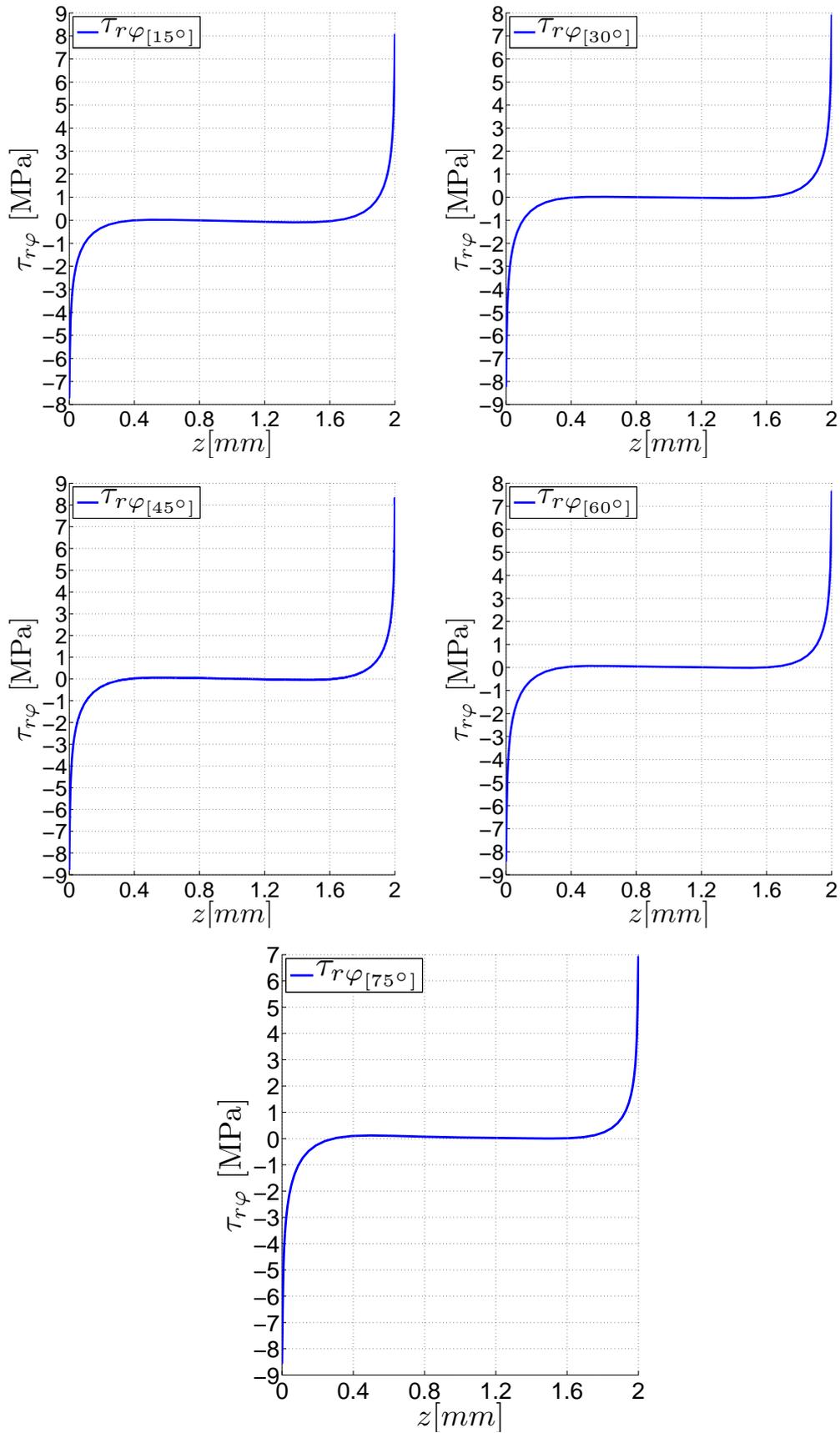


Abbildung 5.71: Verlauf der interlaminaren Schubspannung  $\tau_{r\varphi}$  über dem Interface-3 eines  $[\pm 45^\circ]_s$  Winkellaminats

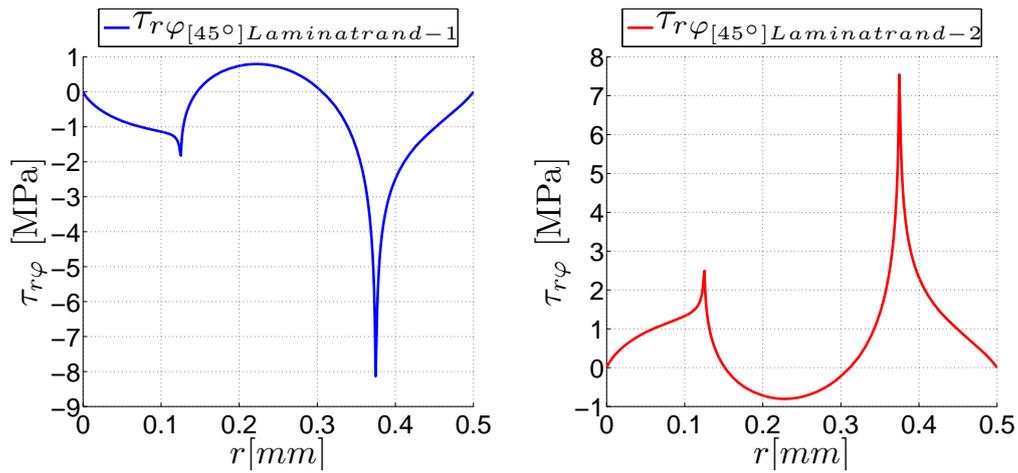


Abbildung 5.72: Verlauf der interlaminaren Schubspannung  $\tau_{r\varphi}$  über dem Querschnitt an den Rändern eines  $[\pm 45^\circ]_s$  Winkellaminats

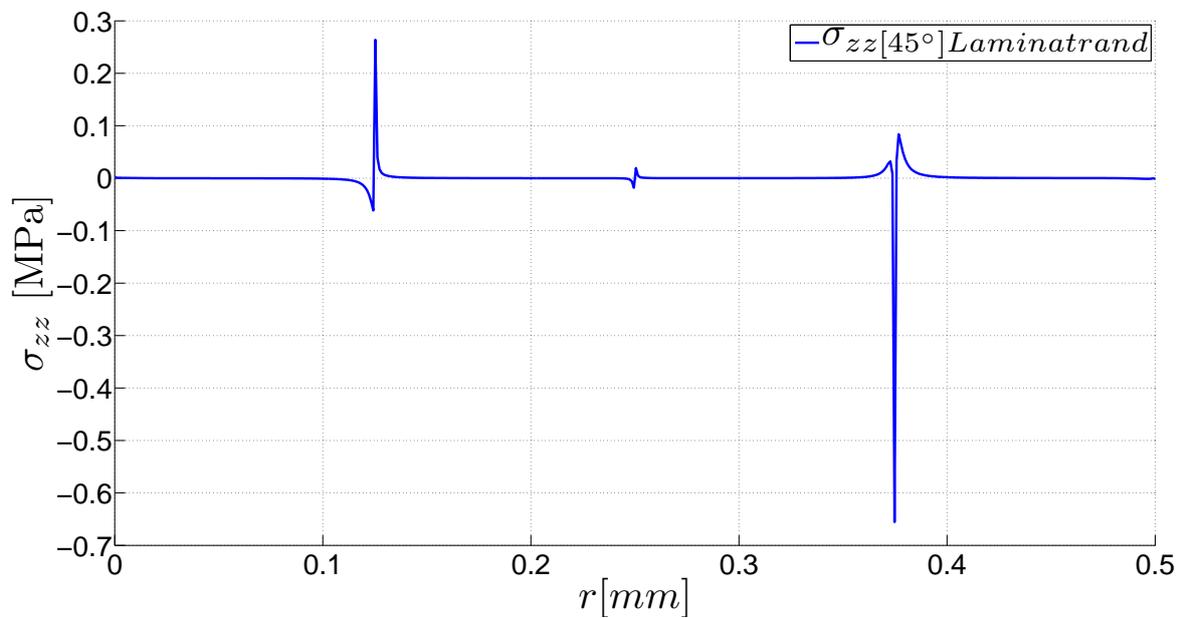


Abbildung 5.73: Verlauf der Spannung  $\sigma_{zz}$  über dem Querschnitt am Rand eines  $[\pm 45^\circ]_s$  Winkellaminats

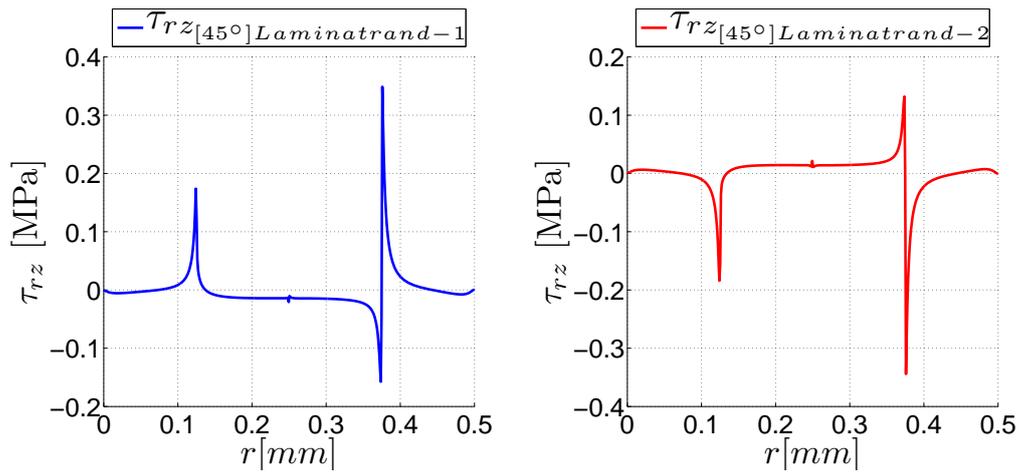


Abbildung 5.74: Verlauf der Schubspannung  $\tau_{rz}$  über dem Querschnitt an den Rändern eines  $[\pm 45^\circ]_s$  Winkellaminats

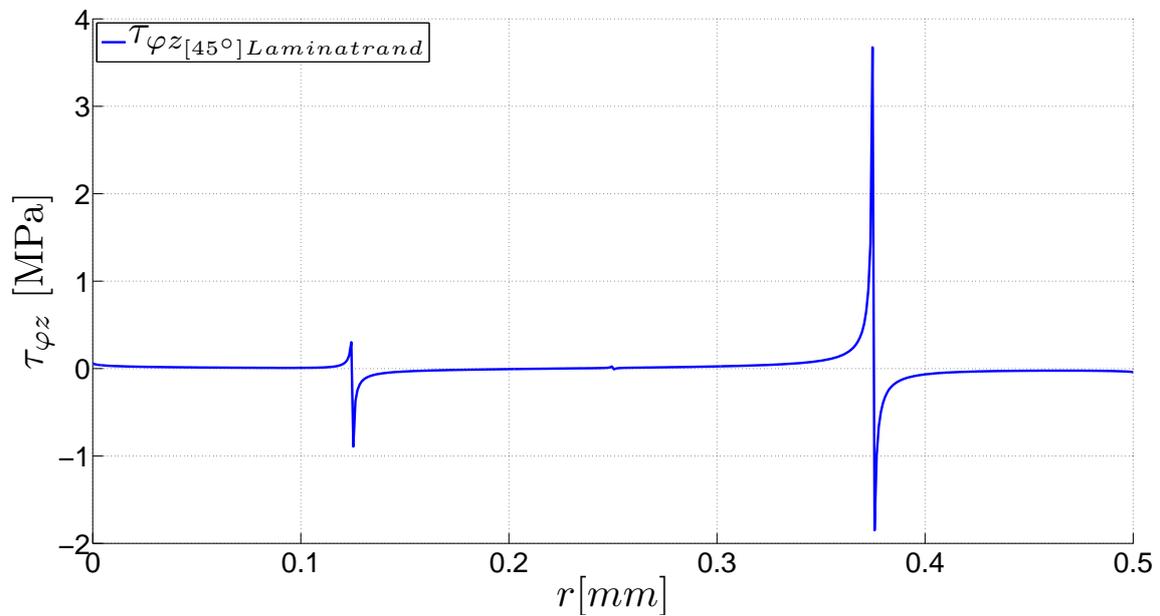


Abbildung 5.75: Verlauf der Schubspannung  $\tau_{\varphi z}$  über dem Querschnitt am Rand eines  $[\pm 45^\circ]_s$  Winkellaminats

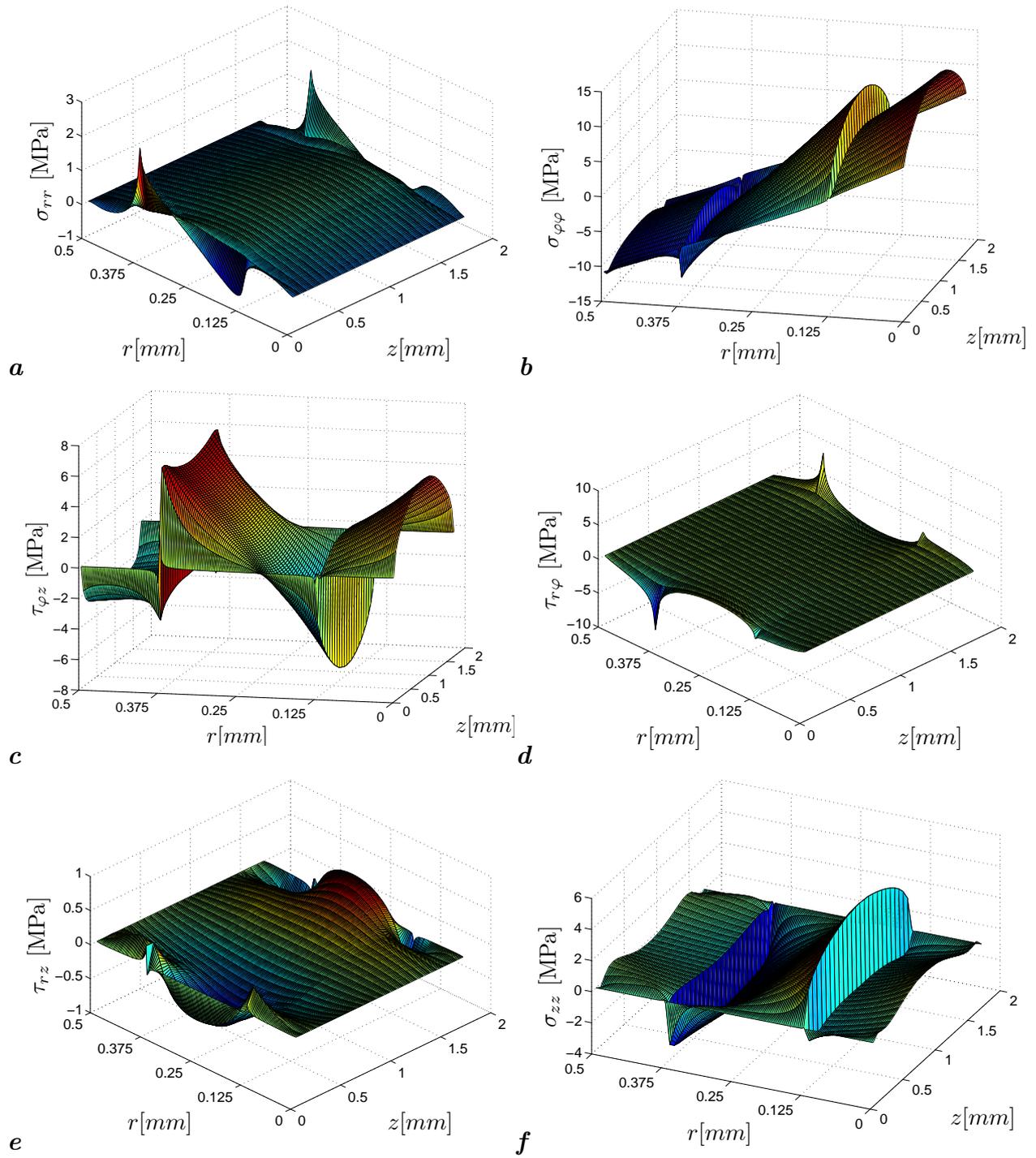


Abbildung 5.76: Spannungsfeld in einem  $[\pm 45^\circ]_s$ -gekrümmten Laminat unter reiner Biegung  $M = 1 \text{ Nmm}$ , bei  $\varphi = 45^\circ$  im Intervall  $0 \leq r \leq 0.5$  und  $0 \leq z \leq 2$

### 5.3.4 Untersuchung der Randeffekten in quasi-isotropen Laminaten

Nachdem die Randeffekte sowohl in symmetrischen als auch unsymmetrische Kreuz- und Winkellaminaten untersucht worden sind, ist es nun sinnvoll, eine Zusammensetzung aus den erwähnten speziellen Laminaten zu analysieren. Hierbei bieten sich quasi-isotrope Laminaten an.

Quasi-isotrope Laminaten mit der gleichen Anzahl von  $+45^\circ$ ,  $-45^\circ$ ,  $0^\circ$  und  $90^\circ$  Lagen werden oft im Flugzeugbau verwendet. Diese sind bezüglich ihrer Membransteifigkeit richtungsunabhängig. Es ergeben sich insgesamt 12 Kombinationen, die in zwei Gruppen unterteilt werden [3]: solche in denen die  $[\pm 45^\circ]$  Schichten nebeneinander liegen sind und solche wo die  $[\pm 45^\circ]$  Schichten mit den anderen vermischt sind (Tab.5.5):

Gruppe 1		Gruppe 2	
sym.	unsym.	sym.	unsym.
$[90^\circ/45^\circ/0^\circ/-45^\circ]_s$	$[90^\circ/45^\circ/0^\circ/-45^\circ]$	$[90^\circ/0^\circ/\pm 45^\circ]_s$	$[90^\circ/0^\circ/\pm 45^\circ]$
$[0^\circ/-45^\circ/90^\circ/45^\circ]_s$	$[0^\circ/-45^\circ/90^\circ/45^\circ]$	$[90^\circ/\pm 45^\circ/0^\circ]_s$	$[90^\circ/\pm 45^\circ/0^\circ]$
$[45^\circ/90^\circ/0^\circ/-45^\circ]_s$	$[45^\circ/90^\circ/0^\circ/-45^\circ]$	$[0^\circ/90^\circ/\pm 45^\circ]_s$	$[0^\circ/90^\circ/\pm 45^\circ]$
$[45^\circ/90^\circ/-45^\circ/0^\circ]_s$	$[45^\circ/90^\circ/-45^\circ/0^\circ]$	$[0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ]_s$	$[0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ]$
$[45^\circ/0^\circ/90^\circ/-45^\circ]_s$	$[45^\circ/0^\circ/90^\circ/-45^\circ]$	$[\pm 45^\circ/90^\circ/0^\circ]_s$	$[\pm 45^\circ/90^\circ/0^\circ]$
$[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]_s$	$[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]$	$[\pm 45^\circ/0^\circ/90^\circ]_s$	$[\pm 45^\circ/0^\circ/90^\circ]$

Tabelle 5.5: Quasi-isotrope Laminaten

Der Fall, dass die  $+45^\circ$  und  $-45^\circ$  Lagen nebeneinander liegen, wurde ausreichend untersucht, deswegen werden die in Gruppe-2 aufgelisteten Laminaten vernachlässigt. Exemplarisch werden für Gruppe-1 folgende Lagenaufbauten untersucht:

- $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]$
- $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]_s \rightarrow [45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ/90^\circ/-45^\circ/0^\circ/45^\circ]$

#### Ergebnisse für das unsymmetrische quasi-isotrope Laminat $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]$

Die Auswertung der Schälspannung  $\sigma_{rr}$  über dem freien Laminatrand-1 und -2, hat gezeigt, dass in der Nähe des dritten Interfaces zu einer Spannungsüberhöhung kommt (Abb.5.77). Die maximalen Spannungen sind nicht wie erwartet direkt am Interface-Rand zu verzeichnen, sondern in dessen Umgebung; so hat die Auswertung der  $45^\circ$  Position ergeben, dass bei  $r = 0.375$  mm (Interface-3-Rand)  $\sigma_{rr} = 1.5$  MPa beträgt und bei  $r = 0.358$  MPa eine Spannung von 3.51 MPa zu verzeichnen ist.

Die Auswertung der interlaminaren Schubspannung  $\tau_{r\varphi}$  über die Querschnitte am Rand zeigt Spannungsspitzen an, die diesmal mit den Positionen der Interface-Rändern übereinstimmen, wobei die höchste Spannungsüberhöhung am Interface-3 Rand auftaucht (s.a. die Verläufe über die Interfaces 1 bis 3, Abb.5.79-5.81); die Verläufe über den freien Laminaträndern zeigen ein entgegengesetztes Verhalten, die Spannungsspitzen sind an den Rändern betragsmäßig gleich, jedoch mit einem anderen Vorzeichen versehen (Abb.5.78). Der maximale Wert am Rand beträgt hier 3.5 MPa, zum Vergleich hat sich für das  $[\pm 45^\circ]_s$  Laminat ein Maximum von 8.5 MPa ergeben, andererseits geht das unsymmetrische Winkellaminat  $[\pm 45^\circ]$  mit der Entstehung einer maximalen Spannung am Rand von 14 MPa einher. Daher lässt sich schlussfolgern, dass quasi-isotrope Laminaten die Randspannungsfelder infolge des Randeffekts harmloser oder zumindest weniger kritisch erscheinen lassen.

Die interlaminare Schubspannung  $\tau_{rz}$  besitzt bekanntermaßen im Interface kurz vor dem freien Rand eine Spannungskonzentration, für diesen Lagenaufbau hat sich ergeben, dass sich die höchste Spannungskonzentration mit einem Wert von 1.2 MPa in Interface-3 einstellt (Abb.5.82).

Die Spannungskomponenten  $\tau_{rz}$ ,  $\tau_{\varphi z}$  und  $\sigma_{zz}$  erfüllen am Interface bzw. in dessen näheren Umgebung nicht die Bedingung für einen freien unbelasteten Rand, dort entstehen Spannungsspitzen, dabei entstehen die höchsten Spannungsspitzen in dem Interface-Rand (Abb.5.83-5.85), wo die Randeffekte am größten sind, nämlich im Interface-3-Rand und dessen Umgebung. Anders formuliert ist das Kräftegleichgewicht dort gestört. Auch hier sei auf die 3D Abbildungen-verwiesen (Abb.5.86)

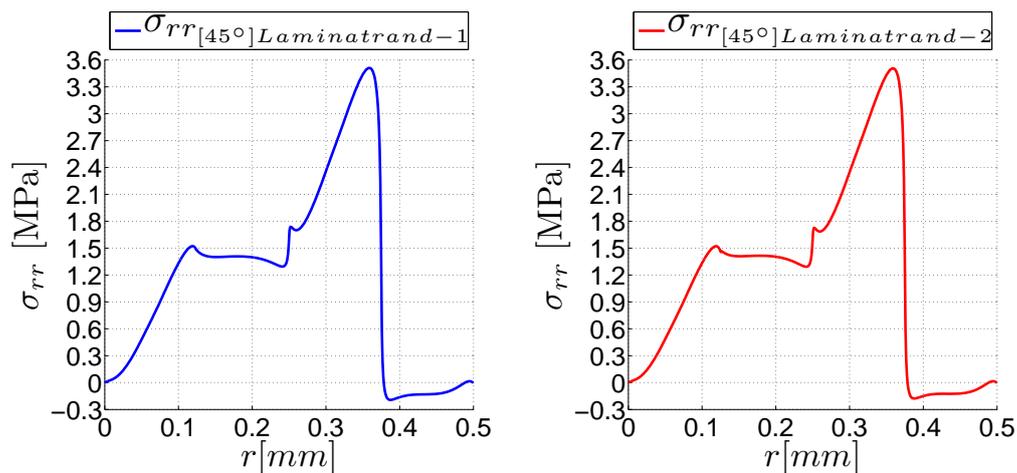


Abbildung 5.77: Verlauf der Normalspannung  $\sigma_{rr}$  über dem Querschnitt an den Rändern eines  $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]$  quasi-isotropes Laminats

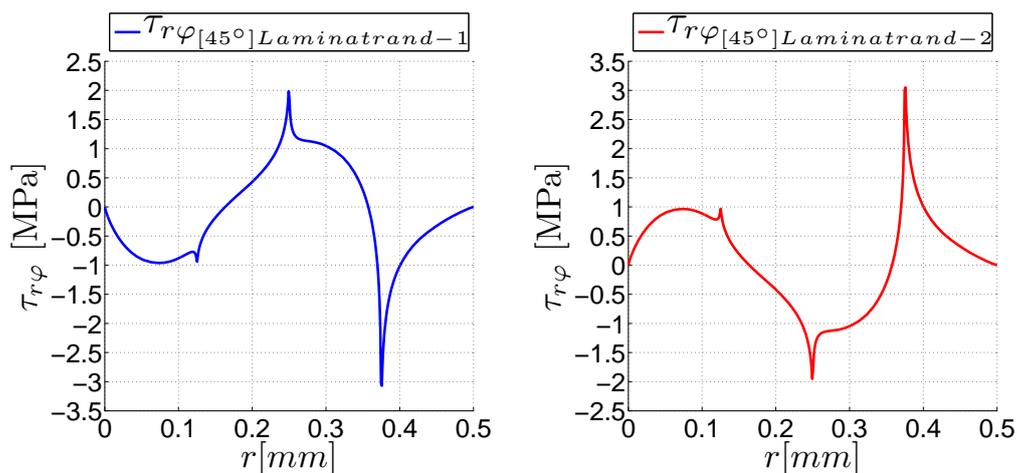


Abbildung 5.78: Verlauf der Schubspannung  $\tau_{r\varphi}$  über dem Querschnitt an den Rändern eines  $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]$  quasi-isotropen Laminats

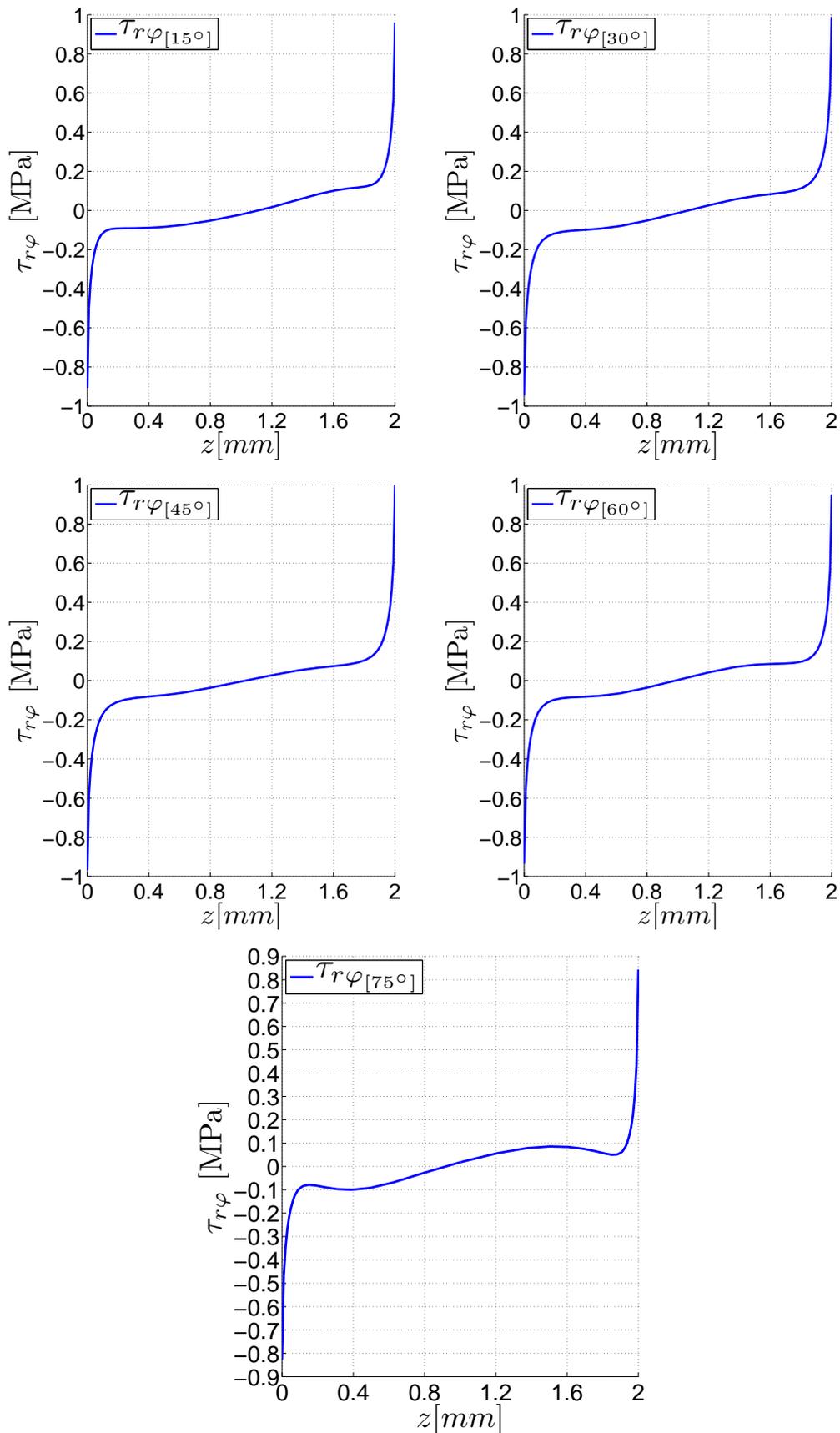


Abbildung 5.79: Verlauf der interlaminaren Schubspannung  $\tau_{r\varphi}$  über dem Interface-1 eines  $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]$  quasi-isotropen Laminats

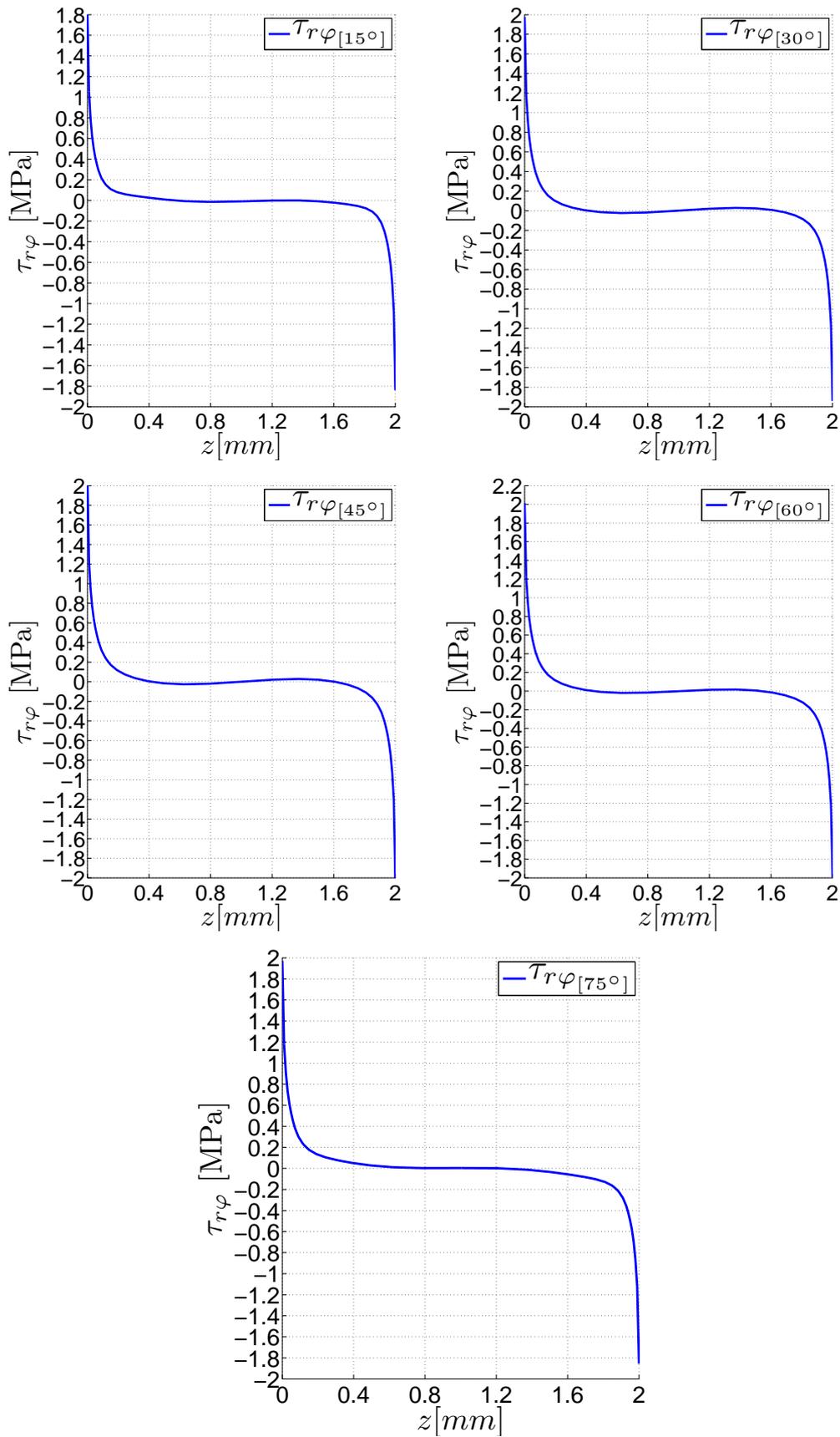


Abbildung 5.80: Verlauf der interlaminaren Schubspannung  $\tau_{r\varphi}$  über dem Interface-2 eines  $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]$  quasi-isotropen Laminats

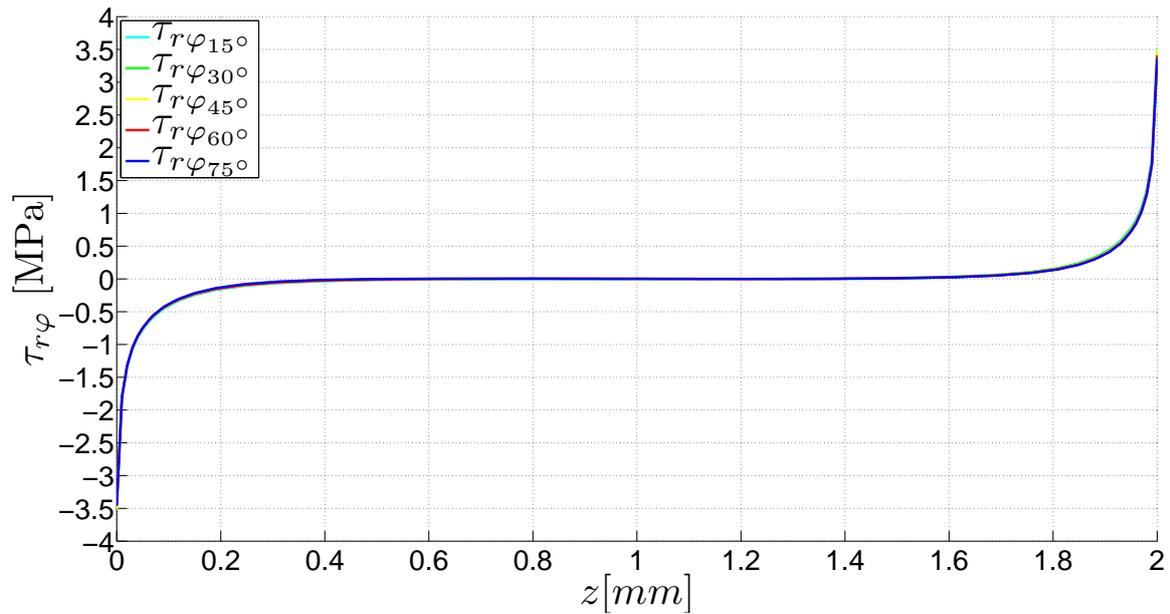


Abbildung 5.81: Verlauf der interlaminaren Schubspannung  $\tau_{r\varphi}$  über dem Interface-3 eines  $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]$  quasi-isotropen Laminats

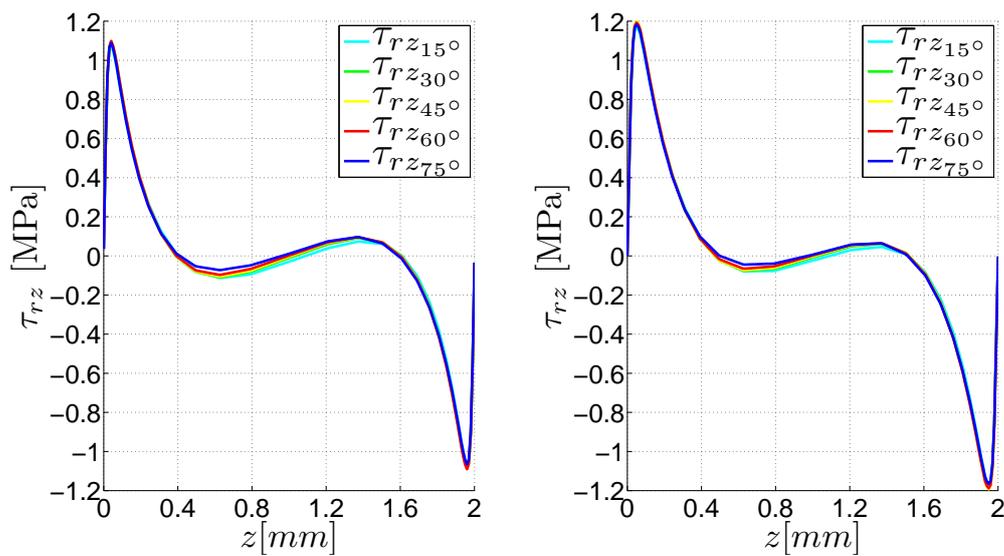


Abbildung 5.82: Verlauf der Schubspannung  $\tau_{rz}$  über die Breite in einem Abstand von  $\pm 0.01$  vom Interface-3 eines  $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]$  quasi-isotropen Laminats

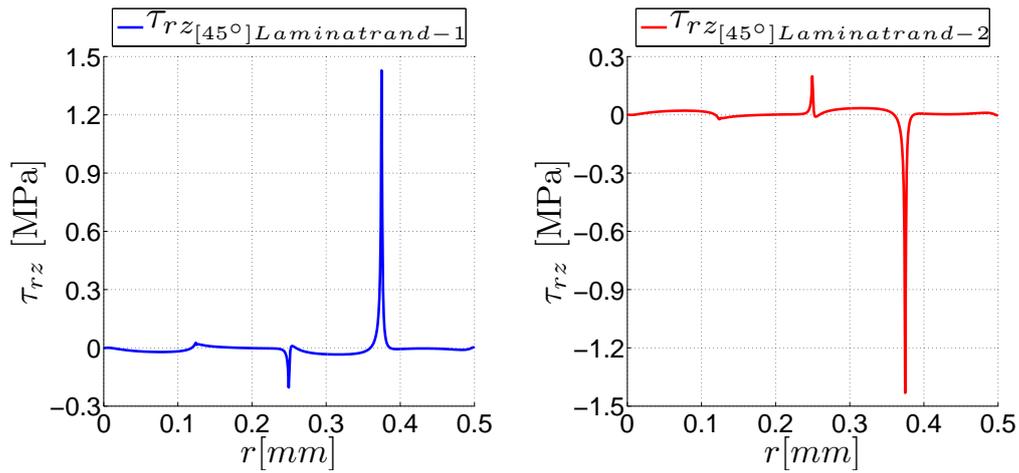


Abbildung 5.83: Verlauf der interlaminaren Schubspannung  $\tau_{rz}$  über dem Querschnitt an den Rändern eines  $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]$  quasi-isotropen Laminats

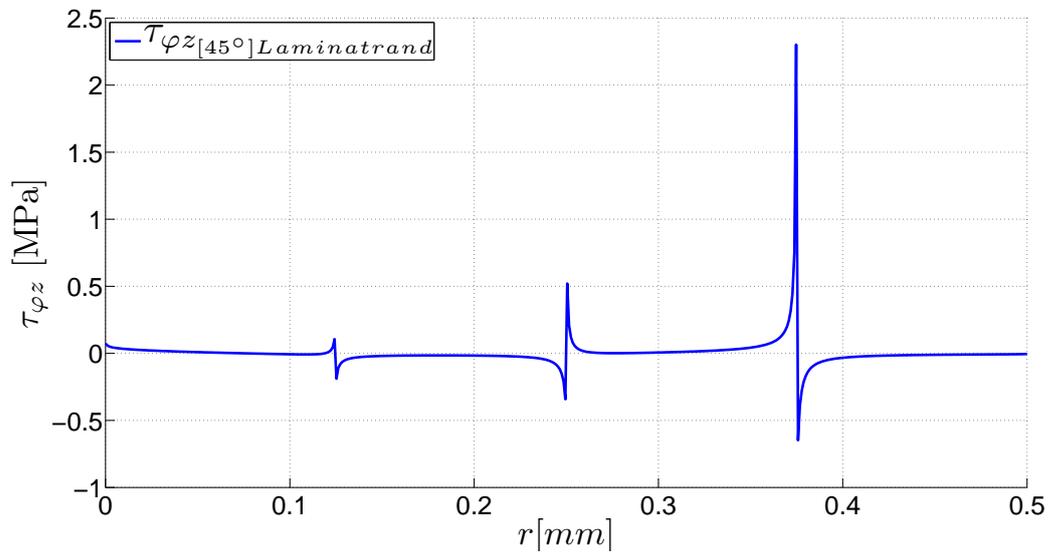


Abbildung 5.84: Verlauf der Schubspannung  $\tau_{\varphi z}$  über dem Querschnitt am Rand eines  $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]$  quasi-isotropen Laminats

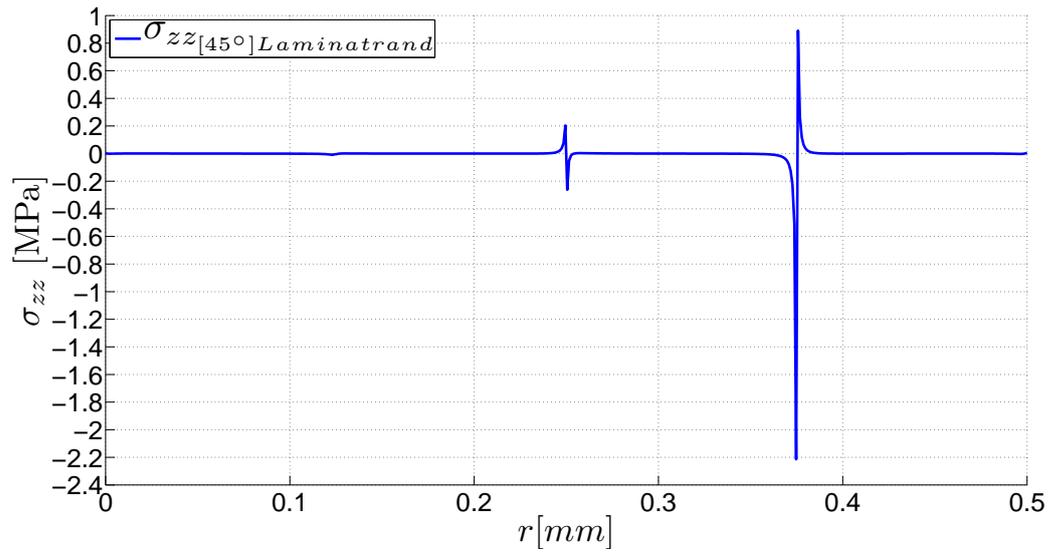


Abbildung 5.85: Verlauf der Spannung  $\sigma_{zz}$  über dem Querschnitt am Rand eines  $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]$  quasi-isotropen Laminats

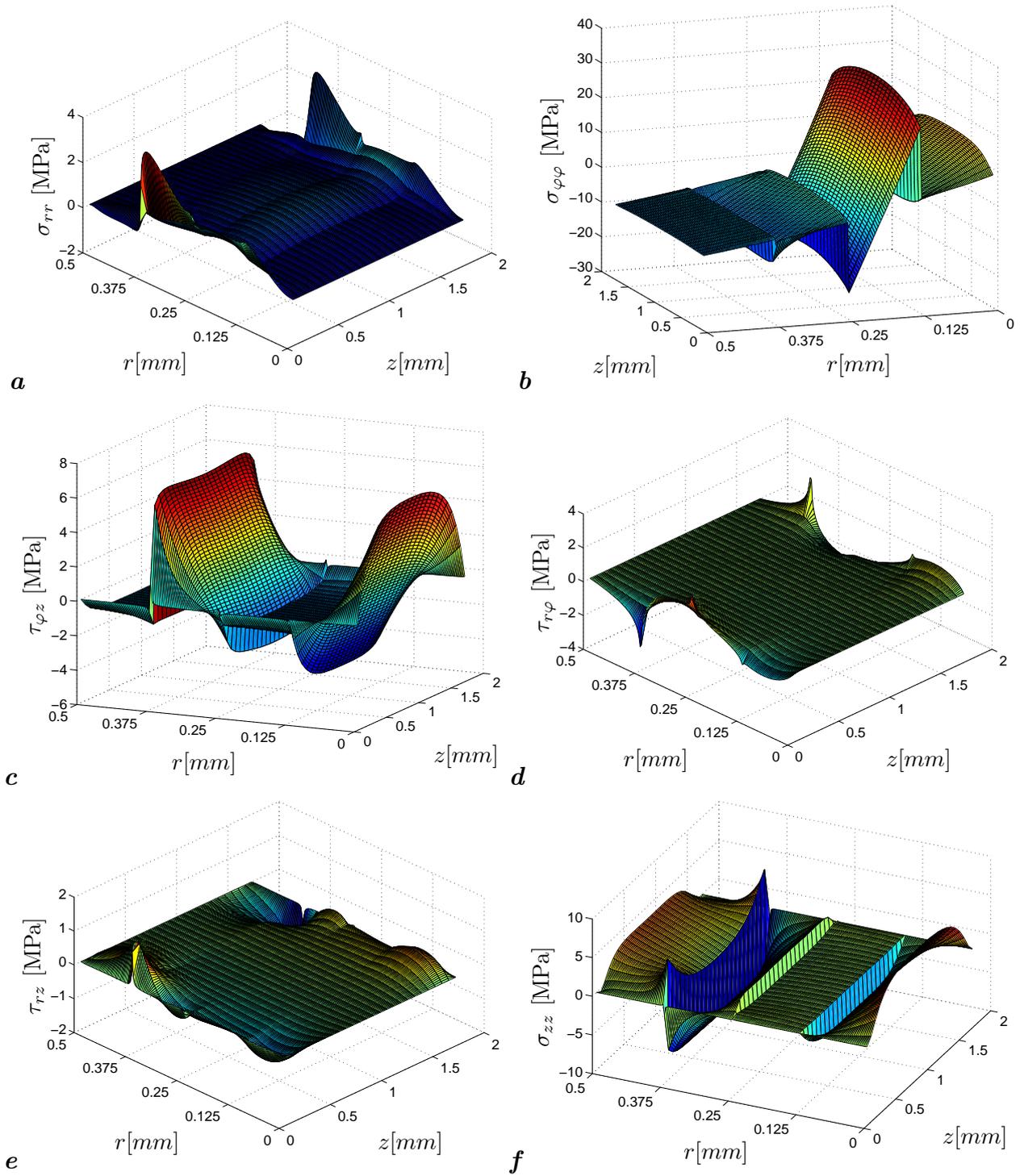


Abbildung 5.86: Spannungsfeld in einem  $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]$ -gekrümmten Laminate unter reiner Biegung  $M = 1 \text{ Nmm}$ , bei  $\varphi = 45^\circ$  im Intervall  $0 \leq r \leq 0.5$  und  $0 \leq z \leq 2$

### Ergebnisse für das symmetrische quasi-isotrope Laminat $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ/90^\circ/-45^\circ/0^\circ/45^\circ]$

Das symmetrische quasi-isotrope Laminat besteht aus acht Lagen, demzufolge ergeben sich nun sieben Interfaces.

Die Auswertung der Schälspannung  $\sigma_{rr}$  über dem Querschnitt am freien Laminatrand-1 und-2 hat ergeben, dass der höchste Spannungsanstieg in der unmittelbaren Umgebung des Interface-3-Randes zu verzeichnen ist, dieses Interface befindet sich bei  $r = 0.375$  mm zwischen der  $-45^\circ$  und der  $90^\circ$  Schicht, die nächst höchste Spannung befindet sich in der Nähe vom Interface-6-Rand ( $r = 0.75$  mm) wobei dieses Interface auch zwischen der  $-45^\circ$  und der  $90^\circ$  Lage lokalisiert ist. (Abb.5.87). Die Werte sind im Vergleich zum unsymmetrischen Laminat deutlich kleiner geworden, (von 3.2 MPa auf 0.474 MPa). Zum einen erklärt sich das durch die doppelte Anzahl der Schichten wodurch sich die Tragfähigkeit des Verbundes erhöht, zum anderen können durch die Symmetrie gewisse Koppeleffekte nicht mehr entstehen.

Der Verlauf der interlaminaren Schubspannung  $\tau_{r\varphi}$  über dem Querschnitt an den Rändern zeigt, dass die höchsten Spannungsspitzen im Interface-7-Rand entstehen (Abb.5.88), er befindet sich zwischen der  $0^\circ$  und  $45^\circ$  Schicht ( $r = 0.875$  mm). Der maximale Wert hier lautet 0.406 MPa. Der unsymmetrische quasi-isotrope Laminat dagegen weist eine durch den Randeffect hervorgerufene Spannungsspitze von 3.5 MPa auf, dies ist auch auf die Anzahl der Schichten bzw. auf, die nun vorhandene Symmetrie zurückzuführen. Der Interface-4-Rand zwischen den zwei  $90^\circ$  Lagen ( $r = 0.5$  mm) zeigt eine Besonderheit auf dort entstehen nämlich keine Spannungsüberhöhungen, da zwischen zwei benachbarten Lagen gleicher Faserorientierung weder mit eine Schubkopplung noch mit einem Unterschied in den Querkontraktionen zu rechnen ist und folglich Randeffecte nicht entstehen können.

Wie erwartet ist die Voraussetzung für einen freien unbelasteten Rand am Interface-ende nicht erfüllt, dies belegen die Verläufe folgende Spannungskomponenten ( $\sigma_{zz}$ ,  $\tau_{rz}$ ,  $\tau_{\varphi z}$ ) über dem Querschnitt an den Rändern (Abb.5.89-5.91). Ein Gesamtüberblick über den Spannungsfeld in einem  $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]_s$  Laminat ist in Abbildung 5.92 zu sehen.

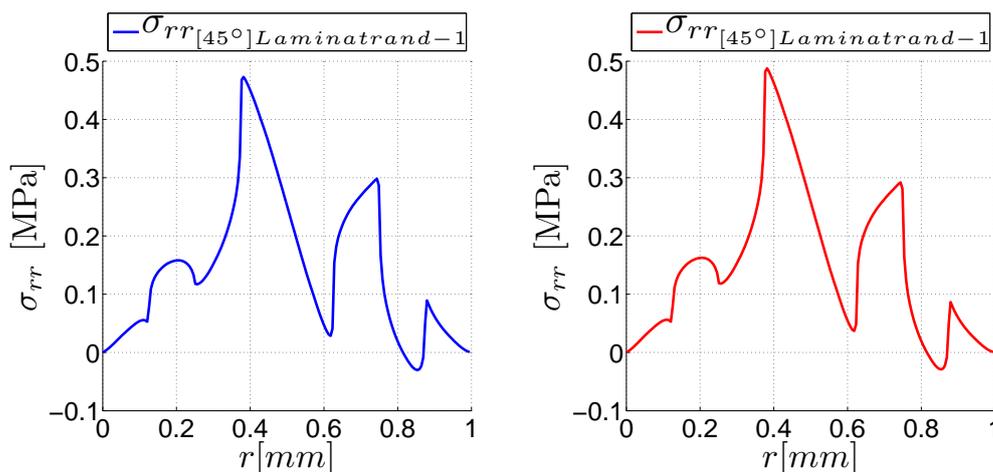


Abbildung 5.87: Verlauf der Normalspannung  $\sigma_{rr}$  über dem Querschnitt an den Rändern eines  $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]_s$  quasi-isotropen Laminats

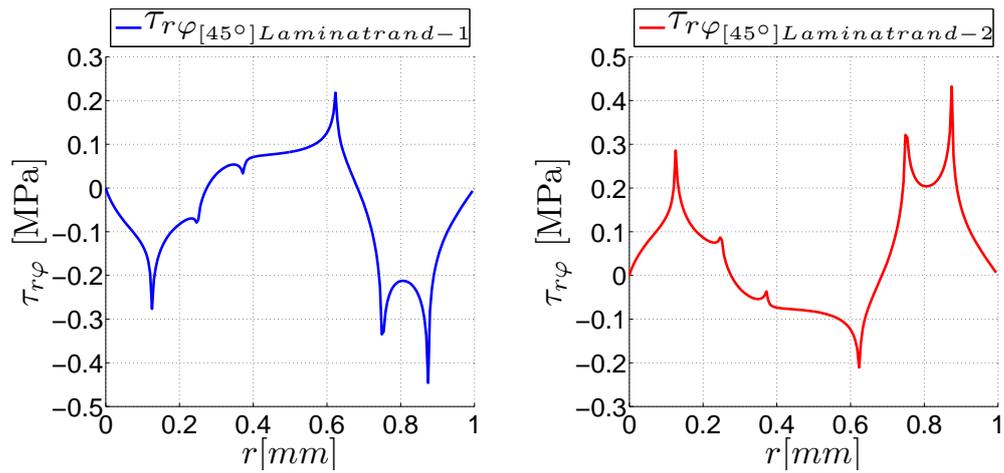


Abbildung 5.88: Verlauf der Schubspannung  $\tau_{r\varphi}$  über dem Querschnitt an den Rändern eines  $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]_s$  quasi-isotropen Laminats

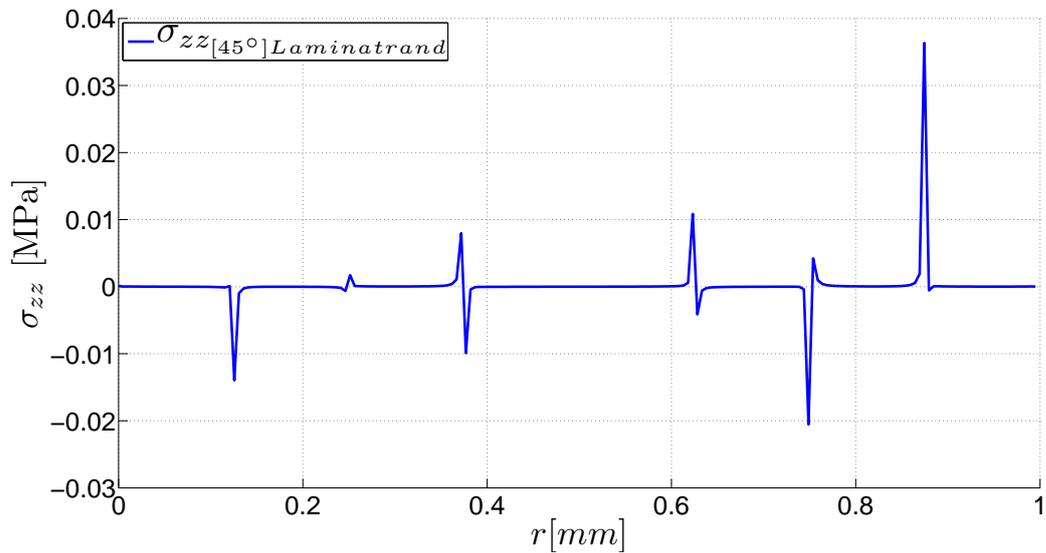


Abbildung 5.89: Verlauf der Schubspannung  $\sigma_{zz}$  über dem Querschnitt am Rand eines  $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]_s$  quasi-isotropen Laminats

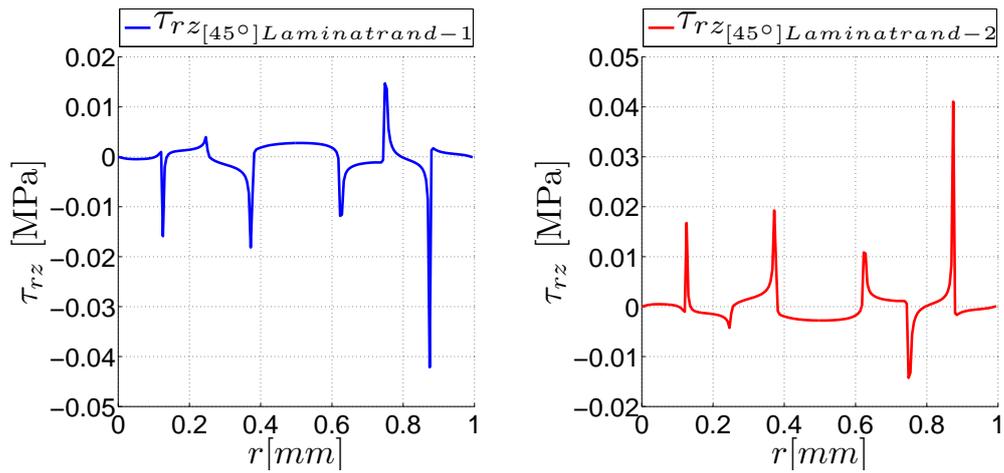


Abbildung 5.90: Verlauf der interlaminaren Schubspannung  $\tau_{rz}$  über dem Querschnitt an den Rändern eines  $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]_s$  quasi-isotropen Laminats

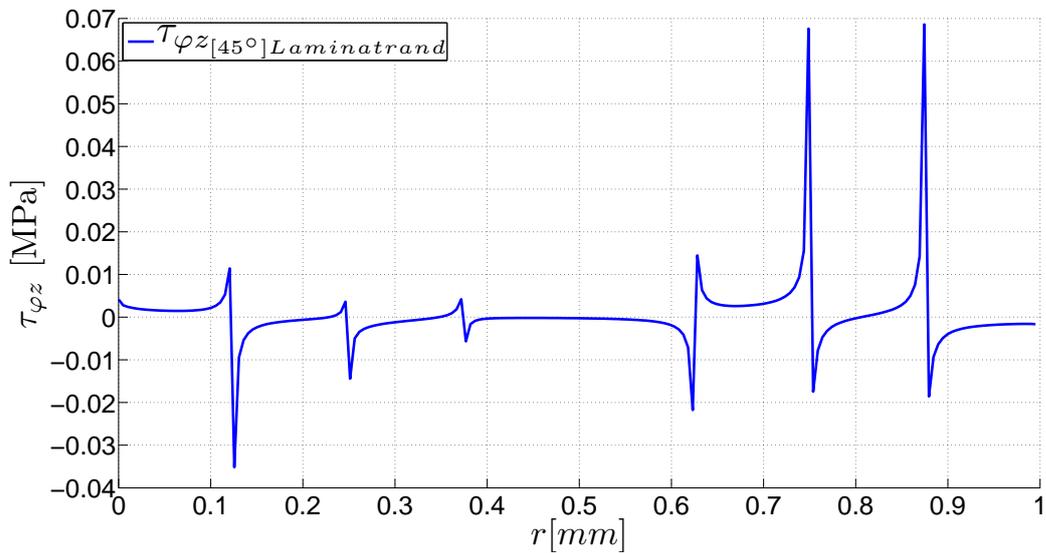


Abbildung 5.91: Verlauf der interlaminaren Schubspannung  $\tau_{\varphi z}$  über dem Querschnitt am Rand eines  $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]_s$  quasi-isotropen Laminats

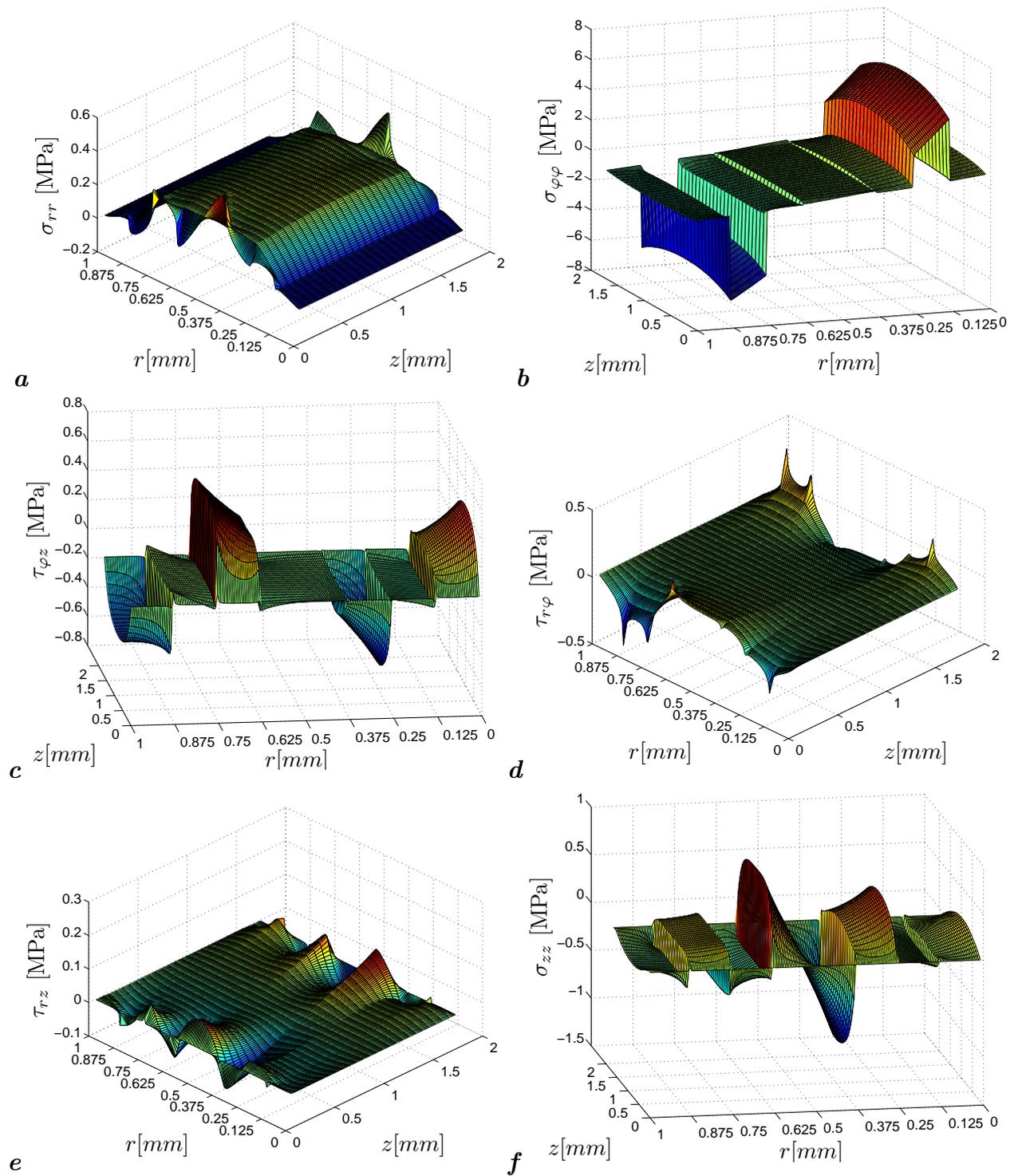


Abbildung 5.92: Spannungsfeld in einem  $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]_s$ -gekrümmten Laminate unter reiner Biegung  $M = 1 \text{ Nmm}$ , bei  $\varphi = 45^\circ$  im Intervall  $0 \leq r \leq 1$  und  $0 \leq z \leq 2$

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

### 6.1 Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war die numerische Untersuchung und der Aufbau eines grundlegenden Verständnisses der Randeffekte in gekrümmten, dreidimensionalen, unter reiner Biegung belasteten Composite-Strukturen mittels der Finiten-Elementen-Methode.

Hierzu wurden zu Beginn der Arbeit die analytischen Gleichungen zur Berechnung des Spannungsfeldes in einer 2D- gekrümmten Scheibe für den hier betrachteten Lastfall hergeleitet.

Die zu untersuchende Geometrie musste zunächst sinnvoll mit dem Berechnungsprogramm *Abaqus* 6.10 modelliert werden, danach erfolgte die Validierung im Inneren des Modells. Dies geschah, indem die FEM-Lösung mit der hergeleiteten analytischen Lösung verglichen wurde, dabei hat sich eine gute Übereinstimmung ergeben. Im Anschluss erfolgte die Konvergenzstudie, im Zuge derer ist mit zunehmender Anzahl der Elemente pro Schicht ein Konvergenzverhalten beobachtet worden.

Im darauf folgenden Kapiteln wurden verschiedene Lagenaufbauten im Hinblick auf den Randeffekt untersucht. Ziel war es dabei herauszufinden, von welcher Art die Randeffekte in gekrümmten Laminaten sind.

Die Auswertung des unsymmetrischen Kreuzverbunds  $[0^\circ/90^\circ]$  ergab zum einen, dass der Spannungszustand rotationssymmetrisch ist, zum andern zeigte sich, dass die Schälspannung  $\sigma_{rr}$  am freien Laminatrand in Interface-Höhe eine Spannungsspitze besitzt, außerdem war festzustellen, dass  $\sigma_{rr}$  bei diesem Lagenaufbau die dominierende interlaminare Spannung ist. Wie bei der 2D-gekrümmten Scheibe unter reiner Biegung zu beobachten war, ist die Schubspannungskomponente  $\tau_{r\varphi}$  hier ebenfalls gleich Null.

Der unsymmetrische Winkelverbund  $[\pm 45^\circ]$  ergab, dass die Komponente  $\tau_{r\varphi}$  die dominierende interlaminare Spannung ist, am Interface-Rand stellt sich ein signifikanter Spannungsanstieg ein, der zum Inneren des Laminats hin auf den Wert Null abklingt. Die Radialspannung  $\sigma_{rr}$ , zeigte ebenfalls Spannungsspitzen, wobei bei diesem Lagenaufbau die Rotationssymmetrie leicht gestört war, was auf die Schubkopplung zurückgeführt worden ist.

Von hieraus hat sich die Frage gestellt, welcher Winkelverbund mit den höchsten Spannungskonzentrationen am Rand einher geht, diesbezüglich wurden mehrere unsymmetrische Winkellamine  $[\pm \alpha^\circ]$  untersucht. Die Auswertung gab zu verstehen, dass der Lagenaufbau  $[\pm 38^\circ]$  die höchste Spannung  $\tau_{r\varphi}$  am Rand erzeugt, dies wurde durch die Schubkopplungsterme  $C_{16}$  und  $C_{26}$  erklärt.

Anschließend ist der Einfluss der Krümmung untersucht worden. Die Aussage die hieraus getroffen werden konnte war, dass im Allgemeinen mit zunehmender Krümmung eine Verschärfung sowohl des Randeffekts als auch der Spannungen im Inneren Bereich stattfindet, nur die Umfangsspannung  $\sigma_{\varphi\varphi}$  scheint davon unbeeinträchtigt zu sein.

Im weiteren Verlauf der Arbeit sind mehrlagige Laminat untersucht wurden: Für symmetrische Kreuzlaminat  $[0^\circ/90^\circ]_s$  ergab sich, dass  $\sigma_{rr}$  in der Umgebung von Interface-1 über eine Spannungsspitze verfügte, während Interface-2 nichts Signifikantes gezeigt hatte, die Erklärung hierfür lautete, dass die  $0^\circ$  und  $90^\circ$  Schicht theoretisch unterschiedliche Querkontraktionen erfahren, während zwei benachbarte  $90^\circ$  Schichten gleich kontrahieren. Der Vergleich zum unsymmetrischen Kreuzverbundes ergab eine um etwa die Hälfte verminderte Spannungsspitze.

Die Auswertung des symmetrischen Winkellaminats  $[\pm 45^\circ]_s$  ergab, dass die Spannungsspitzen  $\sigma_{rr}$  im Interface-1-Rand negativ sind. Folglich konnte hier der Randeffekt als harm-

los eingestuft werden. Im Interface-2-Rand sind keine signifikanten Randeffekte festgestellt worden, zumal zwischen die zwei benachbarten  $-45^\circ$  Lagen keine wesentliche Schubkopplung vorhanden ist. Im Interface-3-Rand haben sich positive Spannungskonzentrationen eingestellt. Die interlaminare Schubspannung  $\tau_{r\varphi}$  zeigte, die höchsten Spannungsspitzen am Interface-3 -Rand auf, es sei hier noch vermerkt, dass die Komponente  $\tau_{r\varphi}$  einen punktsymmetrischen Verlauf bezüglich der halben Laminatbreite aufweist.

Zum Schluss sind aufgrund ihre Bedeutung im Flugzeugbau, quasi-isotrope Laminat untersucht worden, und zwar die Verbunde  $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]$  und  $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]_s$ .

Bei allen untersuchten Lagenaufbauten konnten die Spannungskomponenten  $\sigma_{zz}$ ,  $\tau_{rz}$  und  $\tau_{\varphi z}$  die Bedingung für einen freien unbelasteten Rand direkt am Interface-Rand nicht erfüllen, das Kräftegleichgewicht ist dort also gestört. Fernab der Interface-Rändern sind die genannten Komponenten gleich Null und erfüllen somit die Voraussetzung. Die interlaminare Schubspannung  $\tau_{rz}$  hat in jedem analysierten Verbund kurz vor den freien Laminaträndern einen Extremwert aufgezeigt, der im Inneren des Laminats abklingt.

## 6.2 Ausblick

Es sind weitere Studien denkbar, die direkt an dieser Master-Thesis anknüpfen:

Die in [12] vorgestellte analytische Lösung zur Berechnung von Randeffekte in ebenen Laminaten unter Zugbelastung lässt sich in guter Näherung auf zylindrisch gekrümmte Composite-Strukturen unter reiner Biegung übertragen. Die in diese Arbeit vorgestellten Ergebnisse können für einen qualitativen Vergleich herangezogen werden. Weiterhin wäre es interessant zu wissen, wie sich die Randeffekte verhalten, wenn die Struktur unter Quer- bzw. Normalkraft belastet wird. Als nächster Schritt sollte das Spannungsfeld quantitativ bewertet werden. Ziel ist es eine Aussage zu treffen, ab welchem Lastniveau mit Randdelaminationen zu rechnen ist, hierzu dient die virtual Crack Closure Technique (VCCT), ferner kann mittels spannungsbasierter Versagenskriterien das Lastniveau ermittelt werden, ab dem Delaminationen in Innern des Bauteils auftreten. Ein Vergleich beider Ergebnisse liefert dann eine Aussage darüber, welche Laminat welche Versagensform erfahren. Im Rahmen dieser Thesis sind einfach zylindrisch gekrümmte Verbunde untersucht worden, eventuell wäre es auch von Nutzen, doppelt gekrümmte Laminat im Hinblick auf die Randeffekte zu analysieren.

## Literatur

- [1] ALTENBACH, H. ; ALTENBACH, J. ; RIKARDS, R.: *Einführung in die Mechanik der Laminat- und Sandwichtragwerke*. 1.Auflage. Stuttgart : Deutscher Verlag der Grundstoffindustrie, 1996
- [2] BARAAN, J.: *Berechnung Faserverbundwerkstoffe*. Skript zur Vorlesung-Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg, 2011
- [3] BERTHELOT, J.M.: *Composite Materials-Mechanical Behavior and Structural Analysis*. 2.Auflage. New York Toronto et. al. : Springer, 1998
- [4] BLUMER, H.: *Spannungsberechnungen an anisotropen Kreisbogenscheiben und Sattelträgern konstanter Dicke*. Karlsruhe : Lehrstuhl für Ingenieurholzbau und Baukonstruktionen der Universität (TH) Karlsruhe, 1972/1979
- [5] D.GROSS ; W.HAUGER ; P.WRIGGERS: *Technische Mechanik 4:Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden*. 7.Auflage. Berlin : Springer-Berlin, 2009
- [6] HEINRICH, C.: Interlaminar stresses in curved composite laminates: closed-form and semi-analytical solutions and delamination onset prediction / Sogeti High Tech GmbH. 2012. – Forschungsbericht
- [7] KO, W.L. ; JACKSON, R.H.: Multilayer Theory for Delamination Analysis of a Composite Curved Bar Subjected to End Forces and Moments. In: *NASA Technical Memorandum* 4139 (1989)
- [8] MERKEL, P.: *Numerische und analytische Behandlung von Spannungsfeldern in gekrümmten Composite-Laminat-Strukturen*, HAW Hamburg, Diplomarbeit, 2011
- [9] MITTELSTEDT, C.: *Berechnung anisotroper Strukturen mit Hilfe von Spannungsfunktionen*. Entwurfsversion LTH Faserverbund und Leichtbau, 2012
- [10] MITTELSTEDT, C. ; BECKER, W.: Free-Edge Effects in Composite laminates. In: *Applied Mechanics Reviews* 60 (2007), S. 217/245
- [11] MITTELSTEDT, C. ; BECKER, W.: *Strukturmechanik ebener Laminat*. Unveröffentlichtes Buchmanuskript. Börsen/Darmstadt : -, 2013
- [12] MITTELSTEDT, C. ; W.BECKER: The Pipes-Pagano-problem revisited: Elastic fields in boundary layers of plane laminated specimens under combined thermomechanical load. In: *Composite Structures* 80 (2007), S. 373–395
- [13] REDDY, J.N.: *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells*. -. Boca Raton et al. : CRC Press, 2004
- [14] SEIBEL, M.: *Entwurf und Dimensionierung von Faserverbundstrukturen*. Skript zur Vorlesung-Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg, 2011
- [15] SHENOI, R.A. ; WANG, W.: Through-thickness stresses in curved composite laminates and sandwich beams. In: *Composites Science and Technology* 61 (2001), S. 1501/1512

- 
- [16] SIMULIA (Hrsg.): *Abaqus 6.10 Documentation*. SIMULIA, [www.3ds.com](http://www.3ds.com)
- [17] SIMULIA (Hrsg.): *Abaqus 6.10 Documentation: Programming*. SIMULIA, [www.3ds.com](http://www.3ds.com)
- [18] TIMOSHENKO, S. P. ; GOODIER, J. N.: *Theory of Elasticity*. 3.Auflage. NEW YORK : McGraw-Hill Book Company, 1951

## A Python-Skript zur Modellierung eines gekrümmten $[\pm 45^\circ]$ Winkellaminats unter Biegebelastung. (Preprocessing-Skript)

```
# Do not delete the following import lines
from abaqus import *
from abaqusConstants import *
import __main__

import section
import regionToolset
import displayGroupMdbToolset as dgm
import part
import material
import assembly
import step
import interaction
import load
import mesh
import job
import sketch
import visualization
import xyPlot
import displayGroupOdbToolset as dgo
import connectorBehavior
import math
jobnummer=0
#Geometrie

INNERRADIUS = 2.5
OUTERRADIUS = 2.75
EXTRUDEDEPTH = 2.0

#Material

E1=132000
E2=10800
E3=10800
Nu12=0.238
Nu13=0.238
Nu23=0.49
G12=5650
G13=5650
G23=3360

#Mesh
#SEEDGE=16
MESHSEED=0.06

#Last
ENDMOMENT=1

#Stacking
STACKING=[45, -45]
numbers=[50]
N=len(STACKING)
#Schichtdicke
ts=(OUTERRADIUS-INNERRADIUS)/N
#Gesamtdicke
```

```

t=OUTERRADIUS-INNERRADIUS
for i in range (len(numbers)):
    jobnummer=jobnummer+1
    Mdb()
    number=numbers[i]

#OUTERRADIUS der Einzelschichten
ra=[]
for i in range (N):
    ra.append (INNERRADIUS+ts*(i+1))
#INNERRADIUS der Einzelschichten

ri=[]
for i in range (N):
    ri.append (INNERRADIUS+(ts*i))
#MEANRADIUS der Einzelschichten

rm=[]
for i in range (N):
    rm.append (INNERRADIUS+ts*(i+0.5))

s = mdb.models['Model-1'].ConstrainedSketch(name='__profile__',
    sheetSize=200.0)
g, v, d, c = s.geometry, s.vertices, s.dimensions, s.constraints
s.setPrimaryObject(option=STANDALONE)
s.ArcByCenterEnds(center=(0.0, 0.0), point1=(0.0, OUTERRADIUS), point2=(OUTERRADIUS, 0.0
),
    direction=CLOCKWISE)
s.ArcByCenterEnds(center=(0.0, 0.0), point1=(0.0, INNERRADIUS), point2=(INNERRADIUS, 0.0
),
    direction=CLOCKWISE)

s.Line(point1=(0.0, INNERRADIUS), point2=(0.0, OUTERRADIUS))
s.VerticalConstraint(entity=g[4], addUndoState=False)
s.PerpendicularConstraint(entity1=g[3], entity2=g[4], addUndoState=False)
s.Line(point1=(INNERRADIUS, 0.0), point2=(OUTERRADIUS, 0.0))
s.HorizontalConstraint(entity=g[5], addUndoState=False)
s.PerpendicularConstraint(entity1=g[3], entity2=g[5], addUndoState=False)
p = mdb.models['Model-1'].Part(name='zylinder', dimensionality=THREE_D,
    type=DEFORMABLE_BODY)
p = mdb.models['Model-1'].parts['zylinder']
p.BaseSolidExtrude(sketch=s, depth=EXTRUDEDEPTH)
s.unsetPrimaryObject()
p = mdb.models['Model-1'].parts['zylinder']

del mdb.models['Model-1'].sketches['__profile__']

p = mdb.models['Model-1'].parts['zylinder']
p.DatumCsysByThreePoints(name='zylinderkoordinaten', coordSysType=CYLINDRICAL,
    origin=(0.0, 0.0, 0.0), line1=(1.0, 0.0, 0.0), line2=(0.0, 1.0, 0.0))

mdb.models['Model-1'].Material(name='T300/xxx')
mdb.models['Model-1'].materials['T300/xxx'].Elastic(type=ENGINEERING_CONSTANTS,
    table=((E1, E2, E3, Nu12, Nu13, Nu23, G12, G13,
    G23), ))
mdb.models['Model-1'].HomogeneousSolidSection(name='zylinderSection',

```

```

material='T300/xxx', thickness=None)
#PartitionCellBySketch und PartitionCellByExtrudeEdge

for i in range (N-1):

    p = mdb.models['Model-1'].parts['zylinder']
    f, e1, d2 = p.faces, p.edges, p.datums
    t = p.MakeSketchTransform(sketchPlane=f.findAt((math.sqrt(2)*0.25*(ra[i]+ri[i]),math.
sqrt(2)*0.25*(ra[i]+ri[i]),EXTRUDEDEPTH)), sketchUpEdge=e1.findAt((math.sqrt(2)*0.5*
OUTERRADIUS,math.sqrt(2)*0.5*OUTERRADIUS,EXTRUDEDEPTH)),
sketchPlaneSide=SIDE1, origin=(0, 0, EXTRUDEDEPTH))
    s1 = mdb.models['Model-1'].ConstrainedSketch(name='__profile__',
sheetSize=293.93, gridSpacing=7.34, transform=t)
    g, v, d, c = s1.geometry, s1.vertices, s1.dimensions, s1.constraints
    s1.setPrimaryObject(option=SUPERIMPOSE)
    p = mdb.models['Model-1'].parts['zylinder']
    p.projectReferencesOntoSketch(sketch=s1, filter=COPLANAR_EDGES)

    s1.CircleByCenterPerimeter(center=(0, 0), point1=(0,
ra[i]))

    p = mdb.models['Model-1'].parts['zylinder']
    c = p.cells
    pickedCells = c.findAt(((math.sqrt(2)*0.25*(ra[i]+ri[i]),math.sqrt(2)*0.25*(ra[i]+ri[
i]),EXTRUDEDEPTH)),)
    f1, e, d1 = p.faces, p.edges, p.datums
    p.PartitionCellBySketch(sketchPlane=f1.findAt((math.sqrt(2)*0.25*(ra[i]+ri[i]),math.
sqrt(2)*0.25*(ra[i]+ri[i]),EXTRUDEDEPTH)), sketchUpEdge=e.findAt((math.sqrt(2)*0.5*
OUTERRADIUS
,math.sqrt(2)*0.5*OUTERRADIUS,EXTRUDEDEPTH)),
cells=pickedCells, sketch=s1)
    s1.unsetPrimaryObject()
    del mdb.models['Model-1'].sketches['__profile__']

    p = mdb.models['Model-1'].parts['zylinder']
    c = p.cells
    pickedCells = c.findAt(((math.sqrt(2)*0.25*(ra[i]+ri[i]),math.sqrt(2)*0.25*(ra[i]+ri[
i]),EXTRUDEDEPTH*0.5)),)
    e1, d2 = p.edges, p.datums
    pickedEdges =(e1.findAt((math.sqrt(2)*0.5*ra[i],math.sqrt(2)*0.5*ra[i],EXTRUDEDEPTH
)),)
    p.PartitionCellByExtrudeEdge(line=e1.findAt((0,OUTERRADIUS,EXTRUDEDEPTH*0.5)), cells=
pickedCells, edges=pickedEdges,
sense=REVERSE)

#SectionAssignment
for i in range (N):

    p = mdb.models['Model-1'].parts['zylinder']
    c = p.cells
    cells = c.findAt(((math.sqrt(2)*0.25*(ra[i]+ri[i]),math.sqrt(2)*0.25*(ra[i]+ri[i]),
EXTRUDEDEPTH*0.5)),)
    region = regionToolset.Region(cells=cells)
    p = mdb.models['Model-1'].parts['zylinder']
    p.SectionAssignment(region=region, sectionName='zylinderSection', offset=0.0,
offsetType=MIDDLE_SURFACE, offsetField='',

```

```

        thicknessAssignment=FROM_SECTION)

#MaterialOrientation
p = mdb.models['Model-1'].parts['zylinder']
c = p.cells
cells = c.findAt(((math.sqrt(2)*0.25*(ra[i]+ri[i]), math.sqrt(2)*0.25*(ra[i]+ri[i]),
EXTRUDEDEPTH*0.5),),)
region = regionToolset.Region(cells=cells)
p = mdb.models['Model-1'].parts['zylinder']
s = p.faces
sidelFaces = s.findAt(((math.sqrt(2)*0.5*INNERRADIUS,math.sqrt(2)*0.5*INNERRADIUS,
EXTRUDEDEPTH*0.5),),)
normalAxisRegion = regionToolset.Region(sidelFaces=sidelFaces)
p = mdb.models['Model-1'].parts['zylinder']
e = p.edges
edges = e.findAt(((math.sqrt(2)*0.5*INNERRADIUS, math.sqrt(2)*0.5*INNERRADIUS,0),),)
primaryAxisRegion = regionToolset.Region(edges=edges)
mdb.models['Model-1'].parts['zylinder'].MaterialOrientation(region=region,
orientationType=DISCRETE, axis=AXIS_3, normalAxisDefinition=SURFACE,
normalAxisRegion=normalAxisRegion, flipNormalDirection=True,
normalAxisDirection=AXIS_3, primaryAxisDefinition=EDGE,
primaryAxisRegion=primaryAxisRegion, primaryAxisDirection=AXIS_1,
flipPrimaryDirection=False, additionalRotationType=ROTATION_ANGLE,
angle=STACKING[i], additionalRotationField='', stackDirection=STACK_3)

#Assembly
a = mdb.models['Model-1'].rootAssembly

a = mdb.models['Model-1'].rootAssembly
a.DatumCsysByDefault(CARTESIAN)
p = mdb.models['Model-1'].parts['zylinder']
a.Instance(name='zylinder-1', part=p, dependent=ON)

mdb.models['Model-1'].StaticStep(name='zylinderload', previous='Initial',
description='Apply end moment')

mdb.models['Model-1'].fieldOutputRequests['F-Output-1'].setValues(variables=(
'S', 'PE', 'PEEQ', 'PEMAG', 'LE', 'U'))
del mdb.models['Model-1'].historyOutputRequests['H-Output-1']

#Randbedingung

#x-Fest
a = mdb.models['Model-1'].rootAssembly
f1 = a.instances['zylinder-1'].faces
myStr=''
for i in range(N):
    myStr=myStr+str(((0,(ra[i]+ri[i])*0.5,EXTRUDEDEPTH*0.25),),)+','
    myStr=myStr+str(((0,(ra[i]+ri[i])*0.5,EXTRUDEDEPTH*0.75),),)+','
    #faces1 = f1.findAt(((0,(ra[i]+ri[i])*0.5,EXTRUDEDEPTH*0.25),),
    ((0,(ra[i]+ri[i])*0.5,EXTRUDEDEPTH*0.75),),)
myCmd='faces1 = f1.findAt('+myStr+')'
exec(myCmd)
region = regionToolset.Region(faces=faces1)
mdb.models['Model-1'].DisplacementBC(name='x-Fest',
createStepName='zylinderload', region=region, u1=0.0, u2=UNSET,
u3=UNSET, url=UNSET, ur2=UNSET, ur3=UNSET, amplitude=UNSET, fixed=OFF,

```

```

distributionType=UNIFORM, fieldName='', localCsys=None)

for i in range (N-1):
#y-Fest
a = mdb.models['Model-1'].rootAssembly
v1 = a.instances['zylinder-1'].vertices
verts1 = v1.findAt(((0, ra[i], EXTRUDEDEPTH ),),((0, ra[i], 0 ),))
region = regionToolset.Region(vertices=verts1)
mdb.models['Model-1'].DisplacementBC(name='y-Fest'+str(i),
createStepName='zylinderload', region=region, u1=UNSET, u2=0.0,
u3=UNSET, ur1=UNSET, ur2=UNSET, ur3=UNSET, amplitude=UNSET, fixed=OFF,
distributionType=UNIFORM, fieldName='', localCsys=None)

#z-Fest
a = mdb.models['Model-1'].rootAssembly
v1 = a.instances['zylinder-1'].vertices
verts1 = v1.findAt(((0, ra[i], EXTRUDEDEPTH ),),)
region = regionToolset.Region(vertices=verts1)
mdb.models['Model-1'].DisplacementBC(name='z-Fest'+str(i),
createStepName='zylinderload', region=region, u1=UNSET, u2=UNSET,
u3=0.0, ur1=UNSET, ur2=UNSET, ur3=UNSET, amplitude=UNSET, fixed=OFF,
distributionType=UNIFORM, fieldName='', localCsys=None)

#ReferencePoint
a = mdb.models['Model-1'].rootAssembly
e1 = a.instances['zylinder-1'].edges
a.ReferencePoint(point=((OUTERRADIUS+INNERRADIUS)*0.5,0,EXTRUDEDEPTH*0.5))

a = mdb.models['Model-1'].rootAssembly
r1 = a.referencePoints
refPoints1=(r1.findAt(((OUTERRADIUS+INNERRADIUS)*0.5,0,EXTRUDEDEPTH*0.5),),)
region1=regionToolset.Region(referencePoints=refPoints1)

#fix ReferencePoint
a = mdb.models['Model-1'].rootAssembly
r1 = a.referencePoints
refPoints1=(r1[7], )
region = regionToolset.Region(referencePoints=refPoints1)
mdb.models['Model-1'].DisplacementBC(name='BC-4',
createStepName='zylinderload', region=region, u1=0.0, u2=UNSET, u3=0.0,
ur1=0.0, ur2=0.0, ur3=UNSET, amplitude=UNSET, fixed=OFF,
distributionType=UNIFORM, fieldName='', localCsys=None)

#KINEMATIC Coupling
a = mdb.models['Model-1'].rootAssembly
s1 = a.instances['zylinder-1'].faces
myStr=''
for i in range (N):
myStr=myStr+str((((ra[i]+ri[i])*0.5,0,EXTRUDEDEPTH*0.25),),)+','
myStr=myStr+str((((ra[i]+ri[i])*0.5,0,EXTRUDEDEPTH*0.75),),)+','
#sidelFaces1 = s1.findAt((((ra[i]+ri[i])*0.5,0,EXTRUDEDEPTH*0.5),),)
myCmd='sidelFaces1 = s1.findAt('+myStr+)'
exec(myCmd)
region2=regionToolset.Region(sidelFaces=sidelFaces1)
mdb.models['Model-1'].Coupling(name='Constraint-1', controlPoint=region1,
surface=region2, influenceRadius=WHOLE_SURFACE, couplingType=KINEMATIC,
localCsys=None, u1=OFF, u2=ON, u3=OFF, ur1=OFF, ur2=OFF, ur3=ON)

#Last
a = mdb.models['Model-1'].rootAssembly

```

```

r1 = a.referencePoints
refPoints1=(r1.findAt(((OUTERRADIUS+INNERRADIUS)*0.5,0,EXTRUDEDEPTH*0.5),),)
region = regionToolset.Region(referencePoints=refPoints1)
mdb.models['Model-1'].Moment(name='end moment', createStepName='zylinderload',
    region=region, cm3=ENDMOMENT, distributionType=UNIFORM, field='',
    localCsys=None)

#Meshing
for i in range (N):
    elemType1=mesh.ElemType(elemCode=C3D8R, elemLibrary=STANDARD)
    elemType2=mesh.ElemType(elemCode=C3D6, elemLibrary=STANDARD)
    elemType3=mesh.ElemType(elemCode=C3D4, elemLibrary=STANDARD)
    p = mdb.models['Model-1'].parts['zylinder']
    c = p.cells
    cells= c[:]
    #c.findAt((math.sqrt(2)*0.25*(ra[i]+ri[i]),math.sqrt(2)*0.25*(ra[i]+ri[i]),EXTRUDEDEPT
    H*0.5),)
    pickedRegions = (cells, )
    #p.setMeshControls(regions=pickedRegions, elemShape=HEX, technique=STRUCTURED)
    p.setElementType(regions=pickedRegions, elemTypes=(elemType1, elemType2, elemType3))

p = mdb.models['Model-1'].parts['zylinder']
p.seedPart(size=MESHSEED, deviationFactor=0.1)
#Anzahl der Elemente pro Schicht
#for i in range (N):
    #p = mdb.models['Model-1'].parts['zylinder']
    #e=p.edges
    #pickedEdges=e.findAt(((0,rm[i],EXTRUDEDEPTH),),)
    #p.seedEdgeByNumber(edges=pickedEdges, number=SEEDGE, constraint=FINER)

#Bias
for i in range (N):
    p = mdb.models['Model-1'].parts['zylinder']
    e = p.edges
    pickedEdges1 = e.findAt(((0,rm[i],EXTRUDEDEPTH),), ((0,rm[i],0),), ((rm[i],0,0),), ((
    rm[i],0,EXTRUDEDEPTH),),)
    p.seedEdgeByBias(biasMethod=DOUBLE, endEdges=pickedEdges1, ratio=80,
        number=number, constraint=FINER)
for i in range (N):
    p = mdb.models['Model-1'].parts['zylinder']
    e = p.edges
    pickedEdges2 = e.findAt(((0,INNERRADIUS,EXTRUDEDEPTH*0.5),), ((0,ra[i],EXTRUDEDEPTH*
    0.5),), ((INNERRADIUS, 0,EXTRUDEDEPTH*0.5),), ((ra[i],0,EXTRUDEDEPTH*0.5),),)
    p.seedEdgeByBias(biasMethod=DOUBLE, endEdges=pickedEdges2, ratio=80,
        number=40, constraint=FINER)
p = mdb.models['Model-1'].parts['zylinder']
p.generateMesh()
a = mdb.models['Model-1'].rootAssembly
a1 = mdb.models['Model-1'].rootAssembly
a1.regenerate()

jobname='Job_'+str(jobnummer)

mdb.Job(name=jobname, model='Model-1', description='', type=ANALYSIS,
    atTime=None, waitMinutes=0, waitHours=0, queue=None, memory=50,
    memoryUnits=PERCENTAGE, getMemoryFromAnalysis=True,

```

```
explicitPrecision=SINGLE, nodalOutputPrecision=SINGLE, echoPrint=OFF,  
modelPrint=OFF, contactPrint=OFF, historyPrint=OFF, userSubroutine='',  
scratch='', multiprocessingMode=DEFAULT, numCpus=1)  
mdb.jobs[jobname].writeInput(consistencyChecking=OFF)
```

## B Python-Skript zur Aufbereitung der Ergebnisse (Postprocessing Skript)

```
from abaqus import *
from abaqusConstants import *
import __main__

import section
import regionToolset
import displayGroupMdbToolset as dgm
import part
import material
import assembly
import step
import interaction
import load
import mesh
import job
import sketch
import visualization
import xyPlot
import displayGroupOdbToolset as dgo
import connectorBehavior

from vars_Meshseed_var_Fulllinte import *

import math

for jobnummer in range(1):
    for x in range(5):
        Mdb()
        a = mdb.models['Model-1'].rootAssembly
        session.viewports['Viewport: 1'].setValues(displayedObject=a)
        o3 = session.openOdb(
            name='L:/Statik/05-Mitarbeiter/MYOUSFI/+45-45/Job_'+str(jobnummer+1)+'.odb')
        session.viewports['Viewport: 1'].setValues(displayedObject=o3)
        session.viewports['Viewport: 1'].odbDisplay.display.setValues(plotState=(
            CONTOURS_ON_UNDEF, ))

        odb=session.openOdb('L:/Statik/05-Mitarbeiter/MYOUSFI/+45-45/Job_'+str(jobnummer+1)+
            '.odb')

        scratchOdb = session.ScratchOdb(odb)
        scratchOdb.rootAssembly.DatumCsysByThreePoints(name='CSYS-1',
            coordSysType=CYLINDRICAL, origin=(0.0, 0.0, 0.0), point1=(1.0, 0.0,
            0.0), point2=(0.0, 1.0, 0.0))
        dtm = session.scratchOdbs['L:/Statik/05-Mitarbeiter/MYOUSFI/+45-45/Job_'+str(
            jobnummer+1)+'.odb'].rootAssembly.datumCsyses['CSYS-1']
        session.viewports['Viewport: 1'].odbDisplay.basicOptions.setValues(
            transformationType=USER_SPECIFIED, transformOnDeformed=False, datumCsys=dtm)

        resolution=200
        coords=[]
        for j in range(resolution):
            coords.append((sin(((x+1)*15)*pi/180)*(ra[0]), cos(((x+1)*15)*pi/180)*(ra[0]
            )), j*(EXTRUDEDEPTH/(resolution-1))),)
            #coords.append((sin(((x+1)*15)*pi/180)*(ra[0]+0.01),
            cos(((x+1)*15)*pi/180)*(ra[0]+0.01), j*(EXTRUDEDEPTH/(resolution-1))),)
```

```
#coords=tuple(coords)

#coords.append((sqrt(2)*0.5*(INNERRADIUS+j*(t/(resolution-1))),
sqrt(2)*0.5*(INNERRADIUS+j*(t/(resolution-1))), EXTRUDEDEPTH*0.5),)

#coords=tuple(coords)
session.Path(name='Path-'+str(x+1), type=POINT_LIST, expression=(coords))

session.viewports['Viewport: 1'].odbDisplay.setPrimaryVariable(
    variableLabel='S', outputPosition=INTEGRATION_POINT, refinement=(
        COMPONENT, 'S23'))

p=session.xyPlots
for key in p.keys():
    p.__delitem__(key)

xyp = session.XYPlot('XYPlot')
chartName = xyp.charts.keys()[0]
chart = xyp.charts[chartName]
pth = session.paths['Path-'+str(x+1)]
xyl = xyPlot.XYDataFromPath(name='XYData-'+str(x+1), path=pth, includeIntersections=
False,
shape=UNDEFORMED, labelType=TRUE_DISTANCE)
c1 = session.Curve(xyData=xyl)
chart.setValues(curvesToPlot=(c1, ), )

session.xyDataObjects['_XYData-'+str(x+1)]
f=open('sigma_phiz'+str((x+1))+'.txt','w')
for xy in session.xyDataObjects['_XYData-'+str(x+1)]:
    f.write(str(xy[0])+"\t"+str(xy[1])+"\n")

f.close()
```