

Bachelorarbeit

Dimitrios Ioannidis

Untersuchung des Beulverhaltens beliebig gelagerter, versteifter, symmetrischer, orthotroper Lamine unter ebener Druck- und Schubbelastung

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Fakultät Technik und Informatik
Department Maschinenbau und Produktion

in Zusammenarbeit mit:

Sogeti Hightech GmbH



Erstprüfer: Prof. Dr.-Ing. Stefan Wiesemann
Zweitprüfer: PD Dr.-Ing. habil. Christian Mittelstedt
Industrieller Betreuer: PD Dr.-Ing. habil. Christian Mittelstedt

Verfasser: Dimitrios Ioannidis
Matrikelnummer: 1922573
Abgabedatum: 30.01.2014

Abstract

The objective of the present work is to analyse the buckling behaviour of stiffened rectangular laminates that are loaded by uniform longitudinal compression as seen in figure 0.1 . The buckling load is to be calculated analytically for different plates and displayed graphically. The required parameters of the materials properties, dimensions and the buckling load are to be standardized. The needed basics for that and also the structuring and the behaviour of the laminate are explained in this work which is based on the classical laminate theory.

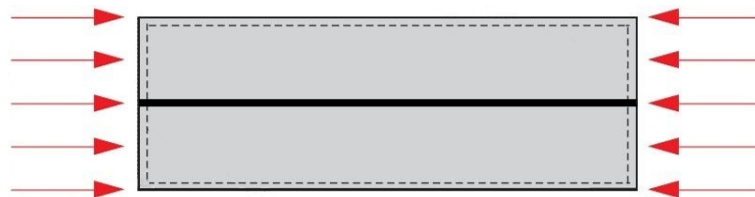


Abbildung 0.1: Stiffened plate loaded by uniform longitudinal compression, [3]

Under consideration of the boundary and transition conditions a homogenous equation system is set up resulting a transcendent buckling condition which is to be solved numerically. Comparison of the generated curves with existing ones leads to an excellent agreement.

Kurzfassung

In dieser Arbeit wird das Beulverhalten ausgesteifter Laminat-Platten untersucht, wobei eine rechteckige Laminatplatte durch Druck belastet wird. Zur Veranschaulichung dient Abbildung 0.2. Die Beullast wird für verschiedene Platten analytisch berechnet und graphisch dargestellt. Die benötigten Parameter der Materialeigenschaften, Dimensionen und die zu berechnenden Beulbelastungen sind zuvor in die normierte Schreibweise zu überführen. Entsprechende Grundlagen hierzu und zum Aufbau, sowie zum Verhalten der Laminat-Platten werden in vorliegender Arbeit dargestellt und basieren auf der klassischen Laminattheorie.

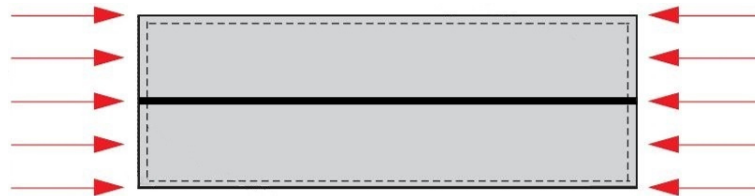


Abbildung 0.2: Versteiftes Laminat unter Druckbelastung, [3]

Unter Beachtung der Rand- und Übergangsbedingungen wird ein homogenes Gleichungssystem aufgestellt, woraus sich eine transzendente Beulbedingung bilden lässt, die analytisch gelöst wird. Beim Vergleich der abgebildeten girlandenförmigen Kurven mit vorhandenen Ergebnissen stellt sich eine Übereinstimmung heraus.

Danksagung

Für seine Unterstützung möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Stefan Wiesemann bedanken, der mir mit Rat und Gelassenheit sehr geholfen hat. Bei Herrn PD Dr.-Ing. habil. Christian Mittelstedt möchte ich mich bedanken, dass er mir die Möglichkeit gab ein interessantes Thema für meine Abschlussarbeit zu bearbeiten. Im selben Ausmaß ist der Dank für sein immer offenes Ohr, die Unterstützung und die geteilte Freude bei Fortschritten.

Meinen Kollegen bei der Firma Sogeti High Tech GmbH möchte ich danken, dass ich aus Ihren Erfahrungen lernen durfte. Ich möchte mich an dieser Stelle auch nachträglich für das vielseitige Praktikum bedanken, bei dem ich viel gelernt und sogar handwerklich arbeiten durfte.

Ein ganz besonderer Dank geht an meine Freunde und meine Familie, die mich alle sehr unterstützt und motiviert haben. Ganz besonders meine Eltern, die mir vieles während dieser Zeit abgenommen haben.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	IV
Verzeichnis der Abkürzungen und Formelzeichen	V
1 Einleitung	1
1.1 Aufgabenstellung	3
2 Theoretische Grundlagen	5
2.1 Faserverbundwerkstoffe und -lamine	5
2.1.1 Faserverbundwerkstoffe	5
2.1.2 Faserverbundlamine	6
2.2 Klassische Laminattheorie	7
2.3 Dimensionslose Schreibweise	15
2.4 Naviersche Lösungen in der Klassischen Laminattheorie	18
2.4.1 Herleitung der Beul-Differentialgleichung	19
2.4.2 Randbedingungen	21
2.4.3 Auswertung	22
2.4.4 Die antimetrische Beulform	23
2.5 Lévy'sche Lösungen für uniaxial gedrückte längsausgesteifte Lamine	26
2.5.1 Gültigkeit	26
2.5.2 Beuldifferentialgleichung	26
2.5.3 Grundgleichungen	27
2.5.4 Rand- und Übergangsbedingungen	28
2.5.5 Beulbedingungen	34
3 Auswertung der Ergebnisse	38
3.1 Die unversteifte Platte	40
3.2 Die antimetrische Beulform	42
3.3 Parameterstudie	43

3.4	Die einfach zentrisch versteifte Platte	45
4	Zusammenfassung und Ausblick	60
4.1	Zusammenfassung	60
4.2	Ausblick	61
A	MATLAB-Skript	64

Abbildungsverzeichnis

0.1	Stiffened plate loaded by uniform longitudinal compression, [3]	III
0.2	Versteiftes Laminat unter Druckbelastung, [3]	IV
1.1	Verschiedene Steifen mit offenen Profilen, [3]	2
1.2	Longitudinal versteiftes Laminat unter konstanter uniaxialer Druck- belastung N_{xx}^0 , [3]	2
2.1	Links: Lamineinzelschichten mit Faserausrichtungswinkeln, rechts: Laminat, [3]	6
2.2	Aufbau und Zählweise im Laminat, [3]	6
2.3	Kinematik eines Plattenelements, [3]	8
2.4	Verzerrungen (oben), Verkrümmungen und Verdrillungen (unten), [3]	10
2.5	Links: Schnittkräfte, rechts: Schnittmomente in einem Laminat, [3] .	11
2.6	Orthotrope Platte, [3]	14
2.7	Allseitig gelenkig gelagerte unversteifte Platte unter einachsiger Druck- belastung, [3]	18
2.8	Laminat unter Druck- und Schubbelastungen (links oben), infinitesi- males Element (rechts oben), Betrachtung des Laminates in der xz - Ebene (links unten), Anteil aus der Schnittkraft N_{xy}^0 (rechts unten), [3]	20
2.9	Symmetrische und antimetrische Beulform, [3]	24
2.10	Freikörperbild der Steife i , [3]	29
2.11	Zentrisch versteifte Laminatplatte, [3]	36
3.1	Kurven mit unterschiedlicher Halbwellenzahl m	39
3.2	Girlandenkurve	39
3.3	Girlandenkurven mit unterschiedlichem Parameter β und asymptoti- schem Grenzwert bei unversteiften Laminaten	40

3.4	Girlandenkurve mit asymptotischem Grenzwert von unversteiftem Laminat, [3]	41
3.5	Girlandenkurven mit unterschiedlichem Parameter β und asymptotischem Grenzwert	42
3.6	Halbwellenenkurve mit $\gamma = 10^2$ und Faktor $c = 1$	44
3.7	Halbwellenenkurve mit $\gamma = 10^2$ und Faktor $c = 4$	44
3.8	Beulkurven bei Laminat mit unterschiedlichen γ bei Halbwellenzahl $m = 1$	45
3.9	Generierte Bemessungskurven mit Kreuzzahl $\beta = 0$ und $\gamma = \{1, 2, 3, \dots, 6\}$	46
3.10	Generierte Bemessungskurven mit Kreuzzahl $\beta = 0$, $\gamma = \{1, 2, 3, \dots, 6\}$ und gesamter Beulkurve für unversteifte Platte mit Halbwellenzahl $m = 1$	48
3.11	Bemessungskurven mit Kreuzzahl $\beta = 0$, [4]	49
3.12	Generierte Bemessungskurven mit Kreuzzahl $\beta = 0,5$ und $\gamma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$	50
3.13	Bemessungskurven mit Kreuzzahl $\beta = 0,5$, [4].	51
3.14	Generierte Bemessungskurven mit Kreuzzahl $\beta = 1$ und $\gamma = \{2, 4, 6, 8, \dots, 20\}$	52
3.15	Bemessungskurven mit Kreuzzahl $\beta = 1$, [4]	53
3.16	Generierte Bemessungskurven mit Kreuzzahl $\beta = 1,5$ und $\gamma = \{1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 20, 25, 30\}$	54
3.17	Bemessungskurven mit Kreuzzahl $\beta = 1,5$, [4].	55
3.18	Generierte Bemessungskurven mit Kreuzzahl $\beta = 2$ und $\gamma = \{1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 30, 40\}$	56
3.19	Bemessungskurven mit Kreuzzahl $\beta = 2$, [4]	57
3.20	Generierte Bemessungskurven mit Kreuzzahl $\beta = 2,5$ und $\gamma = \{1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 30, 40, 50\}$	58
3.21	Generierte Bemessungskurven mit Kreuzzahl $\beta = 3$ und $\gamma = \{1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 30, \dots, 70\}$	59

Verzeichnis der Abkürzungen und Formelzeichen

Allgemeine Indizes

$\overline{(\dots)}$	normierte Schreibweise	—
(\dots)	Vektor	—
$\underline{(\dots)}$	Matrix	—
$(\dots)^0$	auf die Mittelebene bezogen	—

Matrizen und Vektoren

$\underline{\underline{A}}$	Membranquadrant der Steifigkeitsmatrix	$\frac{N}{m}$
$\underline{\underline{B}}$	Koppelquadrant der Steifigkeitsmatrix	N
$\underline{\underline{D}}$	Plattenquadrant der Steifigkeitsmatrix	Nm
$\underline{\underline{M}}$	Matrix des homogenen Gleichungssystems aus den normierten Übergangs- und Randbedingungen	—
$\underline{\underline{M}}_1$	Submatrix aus den Übergangsbedingungen an der ersten Teilfläche	—
$\underline{\underline{M}}_{2,i}$	Submatrix aus den Übergangsbedingungen an der Teilfläche $n + 1$	—
$\underline{\underline{M}}_{3,i}$	Submatrix aus den Übergangsbedingungen an der Teilfläche n	—
$\underline{\underline{M}}_4$	Submatrix aus den Randbedingungen an der letzten Teilfläche	—

Griechische Formelzeichen

α	bezogenes Seitenverhältnis	—
β	Seydel'scher Orthotropieparameter / Kreuzzahl	—
γ_i	bezogene Biegesteifigkeit der Steife i	—
γ_{ij}	Schubverzerrung mit $i = 1, 2, 6$ und $i \neq j$	—
δ	bezogene Dehnsteifigkeit	—
ε_{ii}	Dehnung mit $i = x, y, z$	—
ε_{ij}	Verzerrung mit $i, j = x, y, z$	—
ζ	generalisierte Poisson-Zahl	—
θ_k	Faserorientierungswinkel	◦
κ_{ij}	Krümmungen und Verdrillungen mit $i, j = x, y$	—
$\kappa_{1,2}$	bezogene Form von $k_{1,2}$	—
$\kappa_{1,2}^*$	bezogene Form von $k_{1,2}$ mit nicht normierbarem Rest	—
ν	Poisson-Zahl / Querkontraktionszahl	—
π	Kreiszahl	—
ψ_i	Biegewinkel mit $i = x, y, z$	—
σ_{ii}	Normalspannung mit $i = x, y, z$	MPa
$\tau_{1,2,3,4}$	Abkürzungen für trigonometrische Rechenoperationen	—
τ_{ij}	Schubspannung mit $i, j = x, y, z$ für $i \neq j$	MPa
$\xi_{1,2}$	natürliche Koordinaten	—

Lateinische Formelzeichen

a	Länge des Laminats	m
b	Breite des Laminats	m
f	Winkel	$^\circ$
h	Höhe der Steife	m
i	Steife / Teilfeld	—
k	Schicht im Laminat	—
$k_{1,2}$	Abkürzung in der Funktion $w(y)$	—
m	Anzahl der Beulhalbwellen über die Laminatlänge	—
n	Anzahl der Beulhalbwellen über die Laminatbreite	—
q	Streckenlast	$\frac{N}{m}$
w_0	Beulform	m
z_k	Abstand der Grenzfläche einer Einzelschicht k von der Mittelebene	m
\bar{w}_0	bezogene Beulform	—
A_{ij}	Scheibensteifigkeiten des Laminats mit $i, j = 1, 2, 6$	$\frac{N}{m}$
B_{ij}	Koppelsteifigkeiten des Laminats mit $i, j = 1, 2, 6$	N
D_{ij}	Plattensteifigkeiten des Laminats mit $i, j = 1, 2, 6$	Nm
E_p	Elastizitätsmodul des Laminats	$\frac{N}{m^2}$
EA	Dehnsteifigkeit	N
EI_i	Biegesteifigkeit der Steife i	Nm^2
F_i	Steifenkraft an der Steife i	N
GJ	Torsionssteifigkeit	$\frac{N}{m^2}$
M_{ij}^0	Schnittmoment mit $i, j = 1, 2, 6$	N
N_{xx}^0	Schnittkraft mit $i, j = 1, 2, 6$	$\frac{N}{m}$
\bar{N}_{xx}^0	normierte Beullast	—
Q_i	Querkraft an Teilfläche i	N
\bar{Q}	Kirchhoffsche Ersatzkräfte	N
\bar{Q}_{ij}	transformierte reduzierte Steifigkeiten mit $i, j = 1, 2, 6$	$\frac{N}{m^2}$

1 Einleitung

Faserverstärkte Werkstoffe werden in den letzten Jahren immer häufiger und in immer mehr Bereichen verwendet. Heutzutage werden sie häufig in der Luft- und Raumfahrttechnik, dem Motorsport, sowie in einigen Sportartikeln wie Tennis- [7] und Golfschlägern [5], verarbeitet. Die Einsatzmöglichkeiten sind also sehr vielseitig. Durch teure Herstellungsverfahren ist der Einsatz dieser Materialien lange Zeit nicht rentabel gewesen, doch nun scheinen Hersteller wie BMW an einen Break-Even-Point gelangt zu sein. Mit ihren Modellen der i-Serie sind diese Werkstoffe nun serienreif geworden [6], denn sowohl die Karosserie als auch das Fahrgestell bestehen komplett aus faserverstärkten Werkstoffen. Der Flugzeughersteller Boeing hat mit dem Dreamliner ein Flugzeug entworfen, in dem mehr Faserverbundwerkstoffe verbaut wurden, als jemals zuvor. Durch ihre Verwendung ist eine Gewichtsreduzierung der Bauteile um 20 Prozent möglich [9].

Um einen Werkstoff im Leichtbau einsetzen zu können, muss er gewisse Anforderungen erfüllen, wobei Gewicht und Stabilität von essentieller Bedeutung sind [10]. Damit wachsen auch die Herausforderung, Materialien zu entwickeln, die in der Lage sind, diese Ansprüche zu erfüllen. Faserverstärkte Werkstoffe bieten sich somit durch ihre dünne und leichte Bauweise und ihren vorteilhaften mechanischen Eigenschaften sehr gut für den Bau gewichtsoptimierter Objekte und Produkte an [10].

Bei der Erforschung dieser Werkstoffe und deren Verhalten bei Belastung ist das Beulverhalten ein wichtiges Kriterium für deren Einsatz. So kann es bei Belastung zu Verformungen des Bauteils kommen, die sich als Beulen darstellen. Bei Fahr- und Flugzeugen verschlechtert sich dadurch die Aerodynamik, was den Kraftstoffverbrauch erhöht, oder sogar zum Ausfall des Bauteils oder der gesamten Struktur führen kann. Um dem entgegenzuwirken, werden die faserverstärkten Werkstoffe versteift. Steifen, die im Flugzeugbau auch den Begriff Stringer tragen, werden an das Laminat angebracht (*Abb. 1.2*). Die Möglichkeiten und Arten der Versteifung sind zahllos, denn neben den unterschiedlichen Formen (*Abb. 1.1*) und Größen von Stringern beeinflussen auch Position und Orientierung das Beulverhalten.

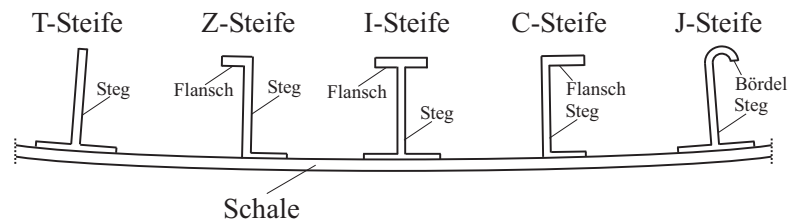
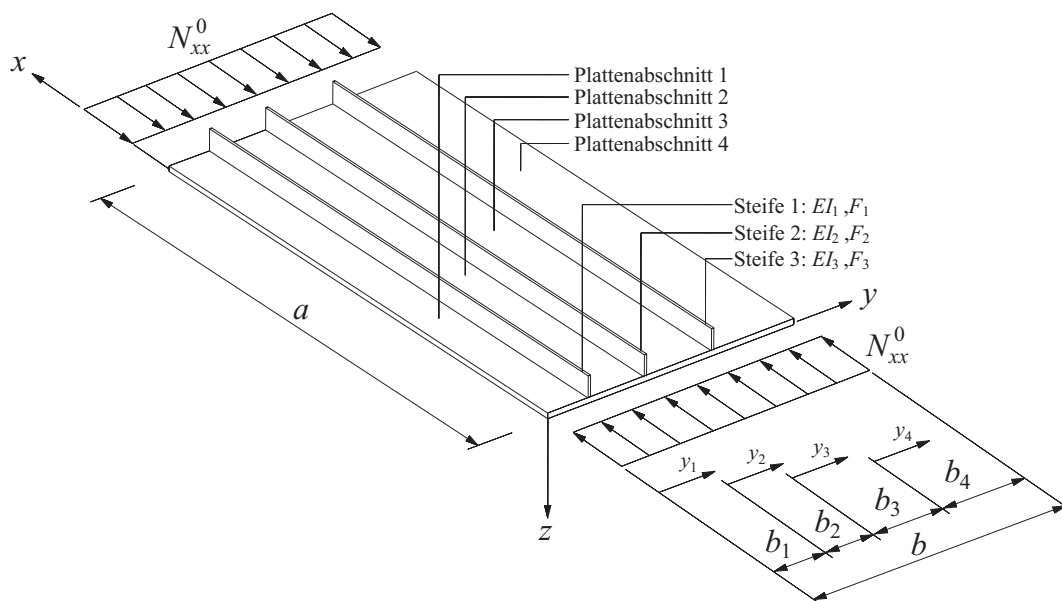


Abbildung 1.1: Verschiedene Steifen mit offenen Profilen, [3]

Untersuchungen zu diesem Verhalten sind bereits vorhanden, jedoch nur wenige in normierter Form. Sie stellt eine einheitenlose Darstellungsweise der genutzten Parameter dar, die einige Vorteile gegenüber der dimensionsbehafteten Schreibweise bietet. Eines ist die allgemeine Gültigkeit der Ergebnisse, die auf andere Modelle übertragbar sind.

Abbildung 1.2: Longitudinal versteiftes Laminat unter konstanter uniaxialer Druckbelastung N_{xx}^0 , [3]

1.1 Aufgabenstellung

Diese Arbeit untersucht das Beulverhalten ausgesteifter, ebener, symmetrisch aufgebauter orthotroper Laminatplatten mit einem rechteckigen Grundriss. Die Laminatplatten werden an den Rändern in der Plattenebene auf Druck und Schub belastet. Dabei bestehen die Steifen aus dem gleichen Laminat wie die Platten und verlaufen kantenparallel über dessen Länge. Hinsichtlich der Randbedingungen werden zwei sich gegenüber liegende Ränder stets gelenkig gelagert. Für die verbleibenden Ränder gibt es keine Einschränkungen. Die Ergebnisse dieser Arbeit beschränken sich auf eine allseitig gelenkige gelagerte Platte mit einer zentrisch liegenden Steife. Diese wird uniaxial durch eine äußere Kraft belastet. Das Beulproblem ist geschlossen-analytisch, mit Hilfe der sogenannten Lévy'schen-Lösungen zu berechnen und durch gezielte Studien die treibenden Parameter zu identifizieren. Anschließend sind die Ergebnisse in Bemessungsdiagrammen darzustellen.

Die Werte der Eigenschaften und Abmessungen werden in einheitenloser Form dargestellt, so dass auch die Formeln und deren Ergebnisse ohne Einheiten sind. Diese besondere Schreibweise wird als normiert oder bezogen bezeichnet und wird durch Ersetzen der Parameter, durch Umformung und Zusammenfassung erreicht.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt gegliedert:

In Kapitel 2 werden die theoretischen Grundlagen und zwei unterschiedliche Lösungswege zur Untersuchung des Beulverhaltens erläutert und dargestellt. Der erste Lösungswege sind die Navierschen Lösungen, der zweite die Lévy'schen Lösungen. Beide entspringen der klassischen Laminattheorie, die auch zu den Grundlagen dieser Arbeit gehört. Genau wie die transzendenten Beulbedingung aus dem homogenen Gleichungssystem, werden auch die benötigten Rand- und Übergangsbedingungen hergeleitet. Zudem wird die dimensionslose Darstellung definiert und die dadurch gegebenen Vorteile erläutert.

In Kapitel 3 werden die generierten Bemessungsdiagramme, sowie deren Grenzwerte präsentiert und mit bereits vorhandenen Diagrammen verglichen, sowie auf Richtigkeit und Genauigkeit überprüft. Markante Stellen in den Diagrammen werden an dieser Stelle gedeutet und anhand der Bedingungen aus Kapitel 2 erklärt.

Das Kapitel 4 fasst die ausgeführten Arbeitsschritte zusammen und gibt einen Ausblick auf verbleibende Fragen und mögliche Erweiterungen dieser Arbeit.

2 Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel finden sich die für diese Arbeit verwendeten Theorien wieder. Es wird erläutert, wie eine Einzelschicht und ein Verbund praktisch und mechanisch aufgebaut sind und wie dieser Aufbau das Verhalten beeinflusst. Sie stammen, falls nicht anders gekennzeichnet, aus [3].

2.1 Faserverbundwerkstoffe und -laminat

Bedingt durch ihre Eigenschaften heben sich Faserverbunde von gängigen Konstruktionswerkstoffen ab. Nach Wahl verschiedener Materialien kann ein Verbundwerkstoff hergestellt werden, der für den benötigten Zweck geeignet ist und dabei kompakter und leichter ist als übliche, wie etwa metallische, Werkstoffe. Auf die charakteristischen Merkmale und die resultierenden Begriffe wird im Verlauf dieses Abschnittes eingegangen.

2.1.1 Faserverbundwerkstoffe

Ein Faserverbundwerkstoff besteht aus Fasern und einem umhüllenden Kunststoff. Dieser Kunststoff, im weiteren Verlauf als Matrix bezeichnet, hat die Aufgabe, die Fasern in ihrer Position zu stabilisieren und eine gleichmäßige Kraftverteilung zu gewährleisten. Zusätzlich bietet die Matrix den eingesetzten Fasern eine Schutzfunktion gegen äußere Einflüsse. Die Fasern wirken durch ihre hohe Festigkeit und Steifigkeit den belastenden Kräften und Momenten entgegen. Dabei beeinflussen Material, Durchmesser und Volumenanteil diese Eigenschaften.

Durch ihren Aufbau zeigen sie richtungsabhängiges, also anisotropes Verhalten.

2.1.2 Faserverbundlaminate

Als Laminat wird ein mehrschichtiger Verbund von Einzelschichten bezeichnet, deren Eigenschaften unterschiedlich sein können. Die Eigenschaften sind abhängig von denen der Einzelschichten, der Schichtdicke und der Orientierungswinkel θ_k der Fasern in den Schichten. Diese werden von unten nach oben gezählt. Somit ist die unterste Schicht $k = 1$ und die oberste $k = N$. Eine Darstellung für einen exemplarischen Aufbau ist in Abbildung 2.1.

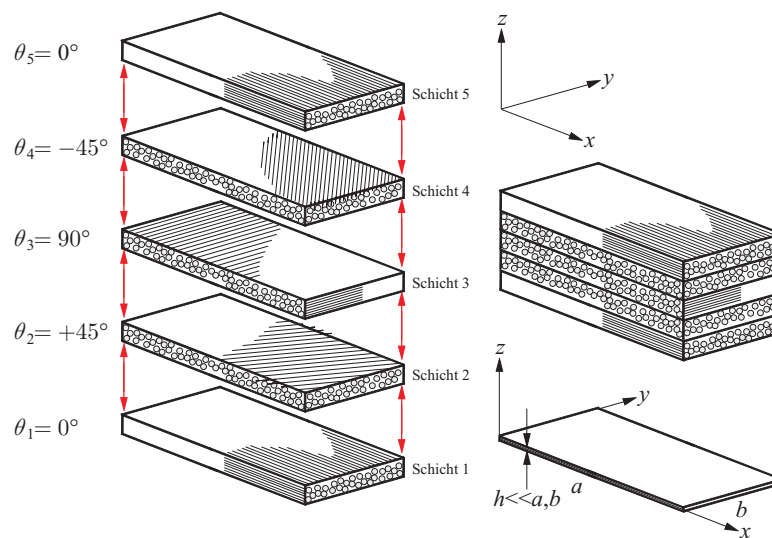


Abbildung 2.1: Links: Laminat einzelschichten mit Faserausrichtungswinkeln, rechts: Laminat, [3]

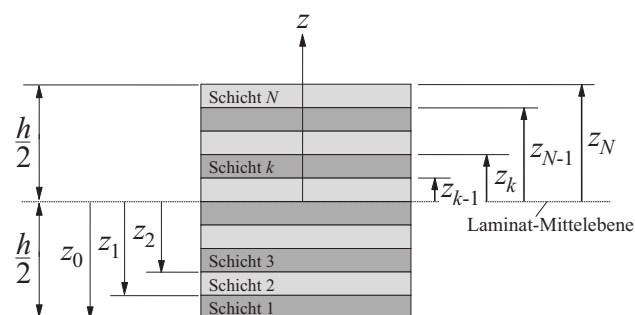


Abbildung 2.2: Aufbau und Zählweise im Laminat, [3]

Symmetrie bedeutet bei Laminaten, dass die obere Laminathälfte eine Spiegelung der unteren über die Mittelebene ist. Diese Ebene wird dann als Symmetrieebene

bezeichnet.

Die Koordinaten z_k und z_{k-1} beschreiben die Position der Kontaktflächen zweier Einzelschichten in Bezug auf die Mittelebene. Dabei ist z_k die obere und z_{k-1} die untere Grenzfläche, die auch als Interface bezeichnet werden kann.

2.2 Klassische Laminattheorie

Dieses Kapitel behandelt die Berechnungsgrundlagen von geschichteten Strukturen, deren Höhe viel geringer ist als deren Länge oder Breite. Es wird erläutert, wie aus den Eigenschaften der Einzelschichten die Lamineigenschaften gebildet werden.

Voraussetzungen

An dieser Stelle gilt die Kirchhoffsche Plattentheorie. Sie dient zur Beschreibung der Platteneigenschaften und ist unter bestimmten Betrachtungspunkten und Annahmen gültig.

Die erste Annahme besagt, dass das Laminat als perfekt angenommen wird. Es besitzt keine Porigkeiten und weist keine Welligkeiten in der Struktur auf. Der Verbund und die Verklebung sind makellos.

Mit der zweiten Annahme herrscht ein ebener Spannungszustand bezüglich der Dickenrichtung, sowohl im Laminat als auch in den Einzelschichten.

Die dritte Annahme besagt die Gültigkeit der Kinematik einer Kirchhoff-Platte. Damit bleibt der Querschnitt bei Verformungen eben. Eine Gerade, die vor der Verformung normal zur Mittelebene des Laminats steht, tut dies auch nach der Verformung und bleibt eine Gerade. Diese Annahme wird auch als Normalenhypothese bezeichnet.

Die vierte Annahme gibt vor, dass es während der Verformung zu keiner Änderung der Dicke h kommt.

Mittels dieser Vereinfachungen ist es möglich, die Kinematik eines Laminats zu beschreiben.

In Abbildung 2.3 werden die dritte und vierte Annahme verdeutlicht. Die Darstellung zeigt ein Laminat im unverformten und im verformten Zustand, um die Verschiebungen in der xz -Ebene darzustellen.

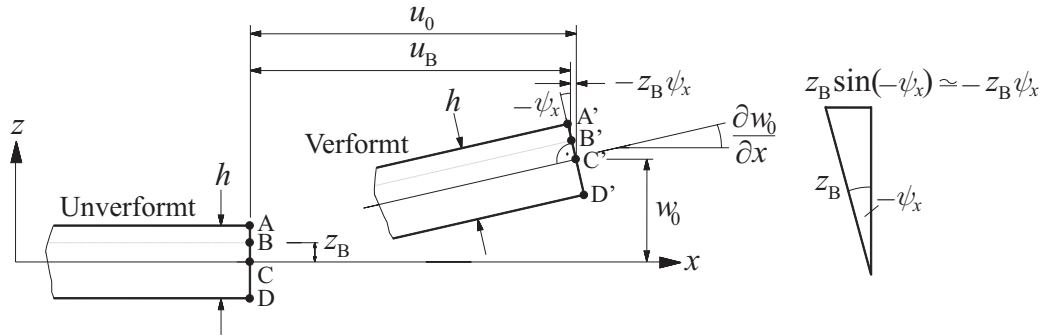


Abbildung 2.3: Kinematik eines Plattenelements, [3]

Die Größen u_0 , v_0 und w_0 stehen für die achsenbezogenen Verschiebungen. Sie beziehen sich auf die Mittelebene und sind von ihrer Position im Laminat abhängig, also als Funktionen nach x und y zu betrachten. Auch die Biegewinkel ψ_x und ψ_y um die Achsen sind von ihrer jeweiligen Position abhängig und ebenso als Funktionen $\psi_x(x, y)$ und $\psi_y(x, y)$ zu betrachten.

Aus Abbildung 2.3 ist, mit der Vereinfachung $\sin\psi_x \simeq \psi_x$, die Verschiebung des Punktes B von Position u_0 nach u_B :

$$u_B = u_0 + z_B \psi_x . \quad (2.1)$$

Da dies für alle Stellen z auf dem Querschnitt gilt, wird die Verschiebung des Punktes B verallgemeinert und dargestellt als:

$$u_B = u_0 + z \psi_x . \quad (2.2)$$

Analog kann hiermit auch die Verschiebung v dargestellt werden:

$$v = v_0 + z \psi_y . \quad (2.3)$$

Aus der vierten Annahme resultiert die Annahme, dass die Durchbiegung des Laminats w gleichzeitig die der Laminatmittelebene w_0 ist. Es gilt also:

$$w = w_0 . \quad (2.4)$$

Mit der Normalenhypothese gibt es keine Winkeländerung zwischen der Mittelebene und Querschnittsoberfläche. Der rechte Winkel besteht weiterhin und es folgt:

$$-\psi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} . \quad (2.5)$$

Analog gilt für die Rotation um die y -Achse ψ_y :

$$-\psi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} . \quad (2.6)$$

Aus der aufgestellten Kinematik ergeben sich die Verschiebungsfunktionen für das gesamte Laminat:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\psi_x(x, y) = u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} , \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\psi_y(x, y) = v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} , \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) . \end{aligned} \quad (2.7)$$

Verzerrungen und Spannungen

Die benötigten Verzerrungen können nun aus den Verschiebungen berechnet werden:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} , \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} , \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 , \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} , \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 , \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 . \end{aligned} \quad (2.8)$$

Die verbliebenen drei Verzerrungen ε_{xx} , ε_{yy} und γ_{xy} werden als Vektoren dargestellt:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}(x, y, z) \\ \varepsilon_{yy}(x, y, z) \\ \gamma_{xy}(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0(x, y) \\ \varepsilon_{yy}^0(x, y) \\ \gamma_{xy}^0(x, y) \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \kappa_{xx}^0(x, y) \\ \kappa_{yy}^0(x, y) \\ \kappa_{xy}^0(x, y) \end{pmatrix} . \quad (2.9)$$

Die Parameter $\varepsilon_{xx}(x, y, z)$, $\varepsilon_{yy}(x, y, z)$ und $\gamma_{xy}(x, y, z)$ sind die Dehnungen und die Gleitung eines beliebigen Punktes im Laminat. Zusammengestellt werden sie aus den Verzerrungen $\varepsilon_{xx}^0(x, y)$ und $\varepsilon_{yy}^0(x, y)$ und der Gleitung $\gamma_{xy}^0(x, y)$ der Mittelebene,

sowie den Verkrümmungen $\kappa_{xx}^0(x, y)$ und $\kappa_{yy}^0(x, y)$ und der Verdrillung $\kappa_{xy}^0(x, y)$ der Mittelebene. Zur Veranschulichung sind in Abbildung 2.4 die Verformungen der Mittelebene schematisch dargestellt.

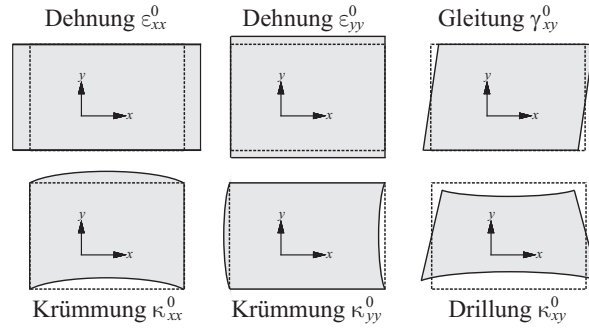


Abbildung 2.4: Verzerrungen (oben), Verkrümmungen und Verdrillungen (unten), [3]

Die Verformungen können auch geschrieben werden als:

$$\underline{\varepsilon}^0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \end{pmatrix},$$

$$\underline{\kappa}^0 = \begin{pmatrix} \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Mit dem Hookeschen Gesetz können, bei bekannten Verzerrungen, Verkrümmungen und Verdrillung, die Spannungen innerhalb einer Einzelschicht berechnet werden. Für die Schicht k gilt die Gleichung:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left[\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix} \right]. \quad (2.11)$$

Dabei gilt $z_{k-1} < z < z_k$. Auf die Herleitung der transformierten reduzierten Steifigkeiten \bar{Q}_{ij} wird hier nicht eingegangen, da diese recht umfangreich, jedoch in [3] nachzulesen ist.

Konstitutives Laminatverhalten

Mit den konstitutiven Gleichungen kann eine Beziehung zwischen den Schnittkräften und -momenten und den resultierenden Verformungen, als Verzerrungen, Verkrümmungen und Verdrillung, hergestellt werden. Die Schnittgrößen N_{xx}^0 , N_{yy}^0 und N_{xy}^0 und die Schnittmomente M_{xx}^0 , M_{yy}^0 und M_{xy}^0 werden schematisch in Abbildung 2.5 dargestellt und beziehen sich auf die Einheitsbreite und sind somit streckenhaft verteilte Lasten. Durch haben die Schnittkräfte die Einheit $\frac{N}{mm}$ und die Schnittmomente die Einheit N .

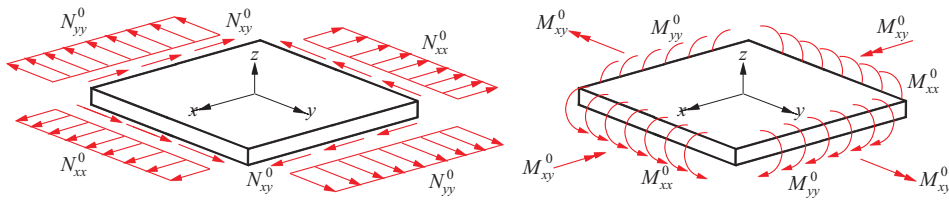


Abbildung 2.5: Links: Schnittkräfte, rechts: Schnittmomente in einem Laminat, [3]

Bei der Bezeichnung der Schnittmomente über die Indizes ist die Darstellungsweise hier unterschiedlich zur technischen Balkentheorie. Dort ruft eine Spannung σ_{xx} ein Moment M_y um die y -Achse hervor. Hier jedoch beschreibt M_{xx}^0 das Moment um die y -Achse, welches durch die Spannung σ_{xx} hervorgerufen wird.

Aus den Spannungen können nun die Schnittkräfte berechnet werden. Dies geschieht mittels der Summe der Integration über die Einzelschichten:

$$\begin{pmatrix} N_{xx}^0 \\ N_{yy}^0 \\ N_{xy}^0 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}_k dz . \quad (2.12)$$

Auf die selbe Weise können auch die Schnittmomente, unter Berücksichtigung des Hebelarms, berechnet werden:

$$\begin{pmatrix} M_{xx}^0 \\ M_{yy}^0 \\ M_{xy}^0 \end{pmatrix} = \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} z dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}_k z dz . \quad (2.13)$$

Mittels Formel (2.11) werden die Spannungen durch die Dehnungen ersetzt. Daraus erhält man folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} N_{xx}^0 \\ N_{yy}^0 \\ N_{xy}^0 \end{pmatrix} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left[\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix} \right] dz , \\ \begin{pmatrix} M_{xx}^0 \\ M_{yy}^0 \\ M_{xy}^0 \end{pmatrix} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left[\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix} \right] z dz . \end{aligned} \quad (2.14)$$

Diese werden nun integriert und ergeben die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} N_{xx}^0 \\ N_{yy}^0 \\ N_{xy}^0 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix} , \\ \begin{pmatrix} M_{xx}^0 \\ M_{yy}^0 \\ M_{xy}^0 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix} , \end{aligned} \quad (2.15)$$

mit den Abkürzungen:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_{\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} dz , \\ B_{ij} &= \int_{\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} z dz , \\ D_{ij} &= \int_{\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} z^2 dz . \end{aligned} \quad (2.16)$$

A_{ij} wird als MembranstEIFigkeit, Dehn- oder Scheibensteifigkeit bezeichnet. Sie verbindet die Schnittkräfte N_{xx}^0 , N_{yy}^0 und N_{xy}^0 mit den Verzerrungen ε_{xx}^0 , ε_{yy}^0 und γ_{xy}^0 . D_{ij} ist die Platten- oder Biegesteifigkeit. Sie stellt den Zusammenhang zwischen den Schnittmomenten M_{xx}^0 , M_{yy}^0 und M_{xy}^0 und den Verkrümmungen κ_{xx}^0 und κ_{yy}^0 und der Verdrillung κ_{xy}^0 her. Die Größe B_{ij} ist die Koppelsteifigkeit. Sie stellt einerseits eine Verbindung zwischen den Schnittkräften N_{xx}^0 , N_{yy}^0 und N_{xy}^0 und den

Verkrümmungen κ_{xx}^0 und κ_{yy}^0 und der Verdrillung κ_{xy}^0 her und andererseits zwischen den Schnittmomenten M_{xx}^0 , M_{yy}^0 und M_{xy}^0 und den Verzerrungen ε_{xx}^0 , ε_{yy}^0 und γ_{xy}^0 . Diese Koppelsteifigkeiten existieren nur bei unsymmetrisch aufgebauten Laminaten. Unter Berücksichtigung der Einzelschichten können die drei Arten der Steifigkeiten berechnet werden. Die Integrale ergeben sich zu Teilintegralen über die einzelnen Laminatschichten, die als Summe zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij,k} (z_k - z_{k-1}) , \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij,k} (z_k^2 - z_{k-1}^2) , \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij,k} (z_k^3 - z_{k-1}^3) . \end{aligned} \quad (2.17)$$

Die beiden Gleichungen (2.15) werden zu einer verbunden:

$$\begin{pmatrix} N_{xx}^0 \\ N_{yy}^0 \\ N_{xy}^0 \\ M_{xx}^0 \\ M_{yy}^0 \\ M_{xy}^0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{26} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{26} & D_{16} & D_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{pmatrix} . \quad (2.18)$$

Die resultierende Matrix ist die Laminat-Steifigkeitsmatrix. Sie wird auch als ABD-Matrix bezeichnet. Die symbolische Schreibweise macht dies deutlich:

$$\begin{pmatrix} \underline{N}^0 \\ \underline{M}^0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{B} & \underline{D} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\varepsilon}^0 \\ \underline{\kappa}^0 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Aus den Lasten sind, mit Hilfe des Konstitutivgesetzes (2.18), Aussagen über das Verhalten der Mittelebene eines Laminats möglich. Mit der zuvor dargestellten Methode lassen sich die Verschiebungen und Verformungen berechnen.

Koppeleffekte

Aus dem Konstitutivgesetz nach (2.18) lässt eine Schnittkraft oder ein Schnittmoment alle Verformungsarten hervorrufen, wenn die ABD-Matrix voll besetzt ist. Der Aufbau eines Laminats kann in Abhängigkeit der Orientierungswinkel θ_k unterschiedliche Effekte bei der Verformung hervorrufen. Dabei lassen sich drei Fälle von Koppeleffekten, welche Schubkopplung, Biege-Dehn- und Biege-Drill-Kopplung genannt werden, unterscheiden. Sie sind unerwünscht, da sie das mechanische Verhalten schwächen, lassen sich jedoch gezielt durch den Aufbau des Laminats verhindern.

Die Biege-Dehn-Kopplung lässt sich durch symmetrischen Aufbau vermeiden. Dann sind die verantwortlichen Koppelsteifigkeiten $B_{ij} = 0$.

Ein Laminat ist frei von Schubkopplung, wenn es zu jeder Einzelschicht mit Winkel $\theta \neq 0$ eine Einzelschicht mit dem selben Winkel, jedoch mit umgekehrten Vorzeichen, enthält. Dann sind die verantwortlichen Terme $A_{16} = 0$ und $A_{26} = 0$. Ein solches Laminat wird als ausgeglichen bezeichnet.

Die Biege-Drill-Kopplung lässt sich verhindern indem der Aufbau des Laminats zu orthotropen Eigenschaften führt. Bei Kreuzverbunden, die ausschließlich Lagen mit Orientierungswinkeln von $\theta_k = 0^\circ$ und $\theta_k = 90^\circ$ aufweisen, ist dies der Fall. Somit sind die Terme, die diese Art der Kopplung hervorrufen $D_{16} = 0$ und $D_{26} = 0$.

Orthotrope symmetrische Lamine

In Abbildung 2.6 ist eine orthotrope Platte mit den Symmetrieebenen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$ dargestellt.

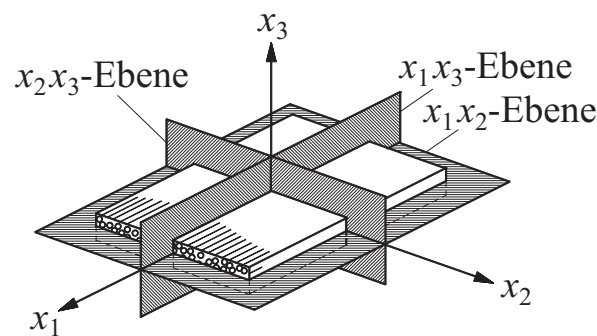


Abbildung 2.6: Orthotrope Platte, [3]

Die Steifigkeitsmatrix für ein Laminat, welches symmetrisch aufgebaut ist und orthotrope Eigenschaften besitzt, hat folgende Form:

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{D}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Der Aufbau des Konstitutivgesetzes (2.20) lässt sich durch die Eliminierung der Koppeffekte erklären. Aufgrund der Symmetrie sind keine Koppelsteifigkeiten vorhanden. Es sind also alle $B_{ij} = 0$. Bedingt durch die orthotropen Eigenschaften besitzen diese Laminat keine Biege-Drill-Steifigkeiten, womit $D_{16} = 0$ und $D_{26} = 0$ sind. Auch die Schubkopplungen sind $A_{16} = 0$ und $A_{26} = 0$, da das Laminat ausgeglichen ist.

2.3 Dimensionslose Schreibweise

Durch die zahllosen Variationen ein Laminat aufzubauen, ist nur in seltenen Fällen ein Vergleich zwischen den unterschiedlichen Laminaten möglich. Obwohl Aufbau, Dimensionierung und Eigenschaften unterschiedlich sind, weisen Laminat bei gleicher Belastungsart ein ähnliches Verhalten auf. Diese Ähnlichkeit wird durch dimensionslose Parameter dargestellt, welche auch als bezogen oder generalisiert bezeichnet werden. Auf diese Art lassen sich ganze Laminatgruppen statt nur eines bestimmten Laminates beschreiben.

Die natürlichen Koordinaten ξ_1 und ξ_2

Die Seitenlängen a und b eines rechteckigen Laminates, denen die Koordinaten x und y zugeordnet sind, werden als dimensionslose Koordinaten ξ_1 und ξ_2 dargestellt:

$$\xi_1 = \frac{x}{a}, \quad \xi_2 = \frac{y}{b}. \quad (2.21)$$

Die Koordinaten x und y befinden sich im Bereich der Seitenlängen und sind somit:

$$0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b. \quad (2.22)$$

In die normierte Schreibweise umgeformt:

$$0 \leq \xi_1 \leq 1, \quad 0 \leq \xi_2 \leq 1. \quad (2.23)$$

Die bezogenen Seitenlängen α_i

Die dimensionslose Darstellung der Seitenlängen wird dargestellt durch:

$$\alpha_i = \frac{a}{b_i} \sqrt[4]{\frac{D_{22}}{D_{11}}}. \quad (2.24)$$

Handelt es sich um ein isotropes Material, sind die Plattensteifigkeiten D_{11} und D_{22} gleich. Das führt dazu, dass die Wurzel den Wert 1 annimmt.

Da a und b , sowie D_{11} und D_{22} nur positive Werte annehmen können, liegt der Wertebereich auch im positiven Bereich, also: $0 < \alpha \leq \infty$, allerdings wird ein oberer Grenzwert durch die Aufgabe gestellt.

Der Seydel'sche Orthotropieparameter / Die Kreuzzahl β

Zur weiteren Umwandlung gehört auch der Seydel'sche Orthotropieparameter, der wie folgt definiert ist:

$$\beta = \frac{D_{12} + 2D_{66}}{\sqrt{D_{11}D_{22}}}. \quad (2.25)$$

Auch hier führen die Eigenschaften eines isotropen Materials zu einer Vereinfachung des Ausdrucks. In diesem Fall ist $D_{66} = \frac{D_{11} - D_{12}}{2}$, was dazu führt, dass $\beta = 1$ wird. Das Intervall, in dem sich β befindet, ist: $-1 < \beta < 3$. Allerdings liegt die Kreuzzahl β für reale, technisch relevante Lamine im Intervall: $0 < \beta < 3$, was auch die Auswahl der Werte dieser Arbeit begründet.

Die bezogene Biegesteifigkeit γ_i

Die Biegesteifigkeit der Steifen wird für den weiteren Gebrauch durch die Gleichung

$$\gamma_i = \frac{EI_i}{D_{11}b} \quad (2.26)$$

in den dimensionslosen Zustand überführt. Der mögliche Wertebereich, in dem die bezogene Biegesteifigkeit liegen kann, ist $0 < \gamma_i < \infty$. Als Leitwert dienen in der Literatur zu findende Diagramme in denen Kurven mit $\gamma_i = 300$ dargestellt sind.

Die bezogene Dehnsteifigkeit δ

Die Umformung der Dehnsteifigkeit geschieht durch die Gleichung

$$\delta = \frac{EA}{E_P b h} . \quad (2.27)$$

Die bezogene Dehnsteifigkeit verläuft typischerweise im Intervall $0 < \delta < 0,3$.

Die bezogene Poisson-Zahl ζ

Für die Betrachtung in der dimensionslosen Schreibweise gibt es für die Poisson-Zahl ν den Ausdruck

$$\zeta = \frac{D_{12}}{D_{12} + 2D_{66}} . \quad (2.28)$$

Allerdings wird die generalisierte Poisson-Zahl nur dann benötigt, wenn es sich um ein Modell mit freien Rändern handelt. In dieser Arbeit tritt dieser Parameter nur während der Herleitung auf. Der Bereich, in dem sich ζ typischerweise bewegt, ist $0,1 < \zeta < 0,5$.

Die bezogene Durchbiegung \bar{w}_0

Die Wahl der dimensionslosen Darstellung woquer ist im Rahmen der hier verwendeten Lévy'schen Lösungen ohne weitere Auswirkung und kann daher beliebig durchgeführt werden.

Die bezogene Beulbelastung \bar{N}_{xx}^0

Die Gleichung zur Überführung der Beullast in die normierte Form lautet:

$$\bar{N}_{xx}^0 = \frac{N_{xx}^0 b^2}{\pi^2 \sqrt{D_{11} D_{22}}} . \quad (2.29)$$

Vorteile der dimensionslosen Schreibweise

Durch die Zusammenfassung mehrerer Parameter werden viele Ausdrücke kompakter und übersichtlicher. Zudem sind keine Einheiten vorhanden, die zusammengefasst und möglicherweise zuvor umgeformt werden müssen.

Ein weiterer Vorteil ist, wie zuvor beschrieben, dass unterschiedliche Lamine miteinander vergleichbar werden. So können Lamine mit den selbem β , γ und δ miteinander in Bezug gebracht werden, da sie in ihren Eigenschaften identisch sind.

In dieser Schreibweise lassen sich ganze Laminatgruppen, statt nur eines speziellen Laminats, beschreiben. Gemäß dem Fall, dass ein bestimmtes Laminat nicht genutzt werden kann, ist es möglich dessen Parameter in die normierte Schreibweise umzuformen und ein anderes Laminat zu verwenden, welches die selben normierten Parameter besitzt. Die Ergebnisse sind somit allgemeingültig.

2.4 Naviersche Lösungen in der Klassischen Laminattheorie

Die Lösungen nach Navier dienen der exakten Lösung von Verformungen und auftretenden Kräften, also zur Beschreibung des Verhaltens von Faserverbundlaminaten, wie in Abbildung 2.7 dargestellt. Sie sind bei allseitig gelenkigen Lagerungen der Laminatplatte anwendbar und dienen in dieser Arbeit zur Berechnung der Grenzbereiche der Bemessungskurven.

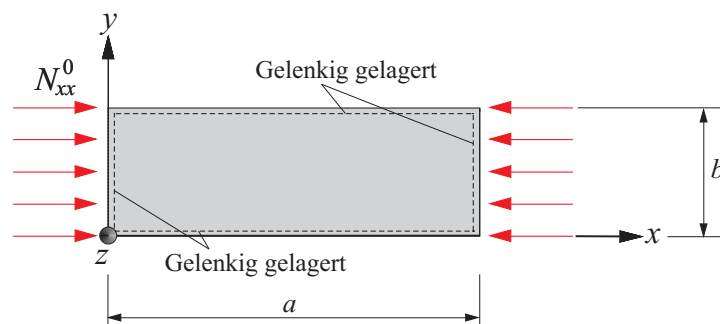


Abbildung 2.7: Allseitig gelenkig gelagerte unverteifte Platte unter einachsiger Druckbelastung, [3]

Ausgehend von der Klassischen Laminattheorie werden die Differentialgleichungen, die das Beulverhalten beschreiben, aus den Gleichgewichtsbedingungen hergeleitet.

2.4.1 Herleitung der Beul-Differentialgleichung

Zur Herleitung der Beuldifferentialgleichung wird in einem Laminat das Gleichgewicht eines infinitesimal ausgelenktes Elements betrachtet, das sich unter Druck- und Schubbelastung befindet, wie in Abbildung 2.8, links oben, dargestellt ist. Für diesen Zustand gelten die ebenen Gleichgewichtsbedingungen:

$$\frac{\partial N_{xx}^0}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^0}{\partial y} = 0, \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial N_{yy}^0}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}^0}{\partial x} = 0. \quad (2.31)$$

Mit der Annahme, dass die Schnittkräfte im gesamten Laminat die gleichen sind wie die in den jeweiligen Rändern, wird das Gleichgewicht an einem verformten System betrachtet. Zur Beschreibung des Verzweigungsproblems wird das Gleichgewicht am infinitesimal ausgelenkten Schnittelement betrachtet. Dabei gilt die Annahme, dass sich bei Beulbeginn die Lasten durch die geringe Auslenkung des Schnittelements nicht ändern. Als erstes werden die Kräfte in z -Richtung in der xz -Ebene (Abb. 2.8, links unten) addiert. Die Kraftkomponente V_1 resultiert aus der Auslenkung des Schnittelements durch die Schnittkraft \bar{N}_{xx}^0 und hat folgende Form:

$$V_1 = - \left(N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial N_{xx}^0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) dx dy. \quad (2.32)$$

Analog dazu die Kraftkomponente V_2 aus der Schnittkraft \bar{N}_{yy}^0 in der yz -Ebene:

$$V_2 = - \left(N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial N_{yy}^0}{\partial y} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) dx dy. \quad (2.33)$$

Aus Abbildung 2.8, rechts unten, ist der Anteil aus der Schnittkraft N_{xy}^0 zur vertikalen Kraft aufstellbar und als resultierende Kraft V_3 darzustellen:

$$V_3 = - \left(N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial N_{xy}^0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial x \partial y} \right) dx dy. \quad (2.34)$$

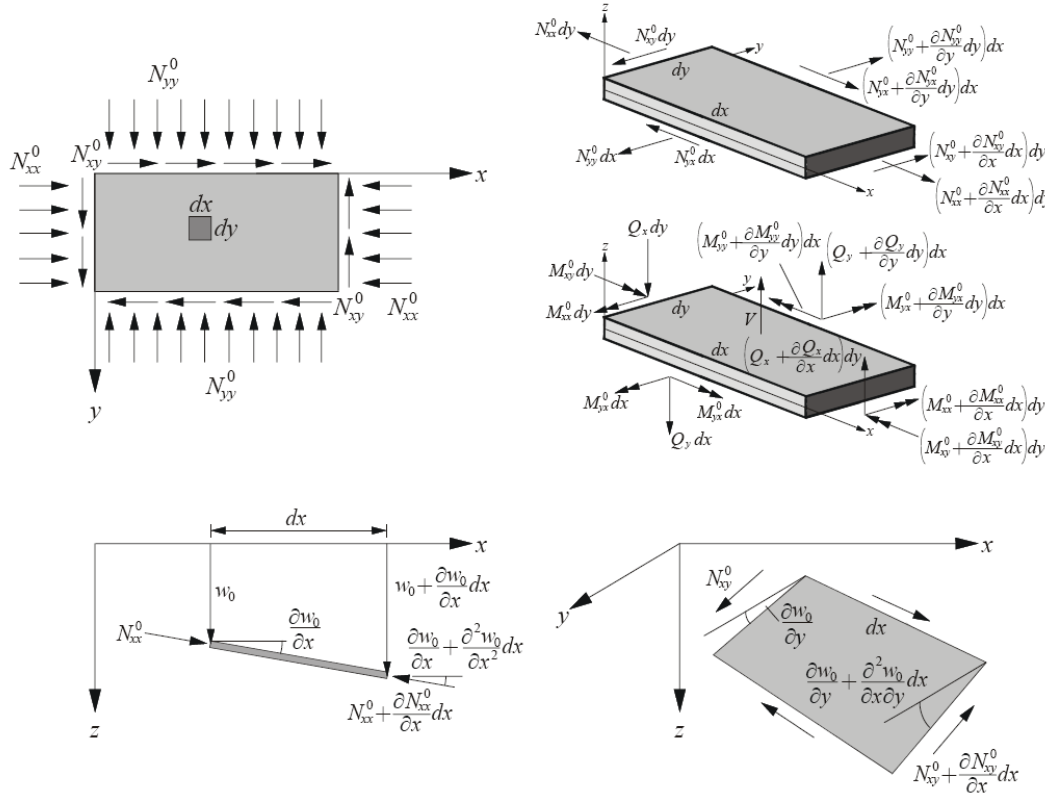


Abbildung 2.8: Laminat unter Druck- und Schubbelastungen (links oben), infinitesimales Element (rechts oben), Betrachtung des Laminates in der xz -Ebene (links unten), Anteil aus der Schnittkraft N_{xy}^0 (rechts unten), [3]

Es gilt $N_{xy}^0 = N_{yx}^0$ und auch hier ist der Anteil der Schubkraft N_{xy}^0 analog übertragbar:

$$V_4 = - \left(N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial N_{xy}^0}{\partial y} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) dx dy . \quad (2.35)$$

Unter Beachtung der Bedingungen (2.30) und (2.31) fallen nach Zusammenfassen der vier resultierenden Kräfte einige Terme weg, und so ergibt sich als vereinfachte Kraftkomponente V in z -Richtung:

$$V = - \left(N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) dx dy . \quad (2.36)$$

Am Schnittelement, in Abbildung 2.8, rechts oben, wird die Summe der Querkräfte gebildet. Nach Umformen ergibt dies:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} . \quad (2.37)$$

Mit den Momentengleichgewichtsbedingungen

$$\frac{\partial M_{xx}^0}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^0}{\partial y} = Q_x \quad (2.38)$$

und

$$\frac{\partial M_{yy}^0}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}^0}{\partial x} = Q_y \quad (2.39)$$

ergibt Gleichung (2.37) folgenden Ausdruck:

$$\frac{\partial^2 M_{xx}^0}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}^0}{\partial y^2} - N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - 2N_{xy}^0 \frac{\partial w_0^2}{\partial x \partial y} - N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}. \quad (2.40)$$

Diese Gleichung wird auch als Kondensiertes Plattengleichgewicht bezeichnet und bildet mit den Gleichgewichtsbedingungen (2.30) und (2.31) die Gleichungen zur Beschreibung des Gleichgewichtes am infinitesimalen Schnittelement. Nach Ersetzen der Schnittgrößen aus dem konstitutiven Gesetz der Klassischen Laminattheorie (2.18) ist folgende Gleichung die Beul-Differentialgleichung, die die Verschiebung der Mittelebene eines symmetrisch aufgebauten orthotropen Laminats in z -Richtung unter der uniaxialen Belastung N_{xx}^0 beschreibt:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0. \quad (2.41)$$

Der weitere Verlauf wird der Einfachheit nach und gemäß der Aufgabenstellung, in normierter Schreibweise fortgeführt.

Die Beul-Differentialgleichung wird somit zu:

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^4 \bar{w}_0}{\partial \xi_1^4} + 2\beta \frac{\partial^4 \bar{w}_0}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^2} + \alpha^2 \frac{\partial^4 \bar{w}_0}{\partial \xi_2^4} + N_{xx}^0 \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial \xi_1^2} = 0. \quad (2.42)$$

2.4.2 Randbedingungen

Die gelenkige Lagerung unterbindet Verschiebungen in den Rändern und es gelten folgende Aussagen:

$$\bar{w}_0(\xi_1 = 0) = 0, \quad (2.43)$$

$$\bar{w}_0(\xi_1 = 1) = 0, \quad (2.44)$$

$$\bar{w}_0(\xi_2 = 0) = 0, \quad (2.45)$$

$$\bar{w}_0(\xi_2 = 1) = 0. \quad (2.46)$$

Auch die Momente, die von Gelenken nicht aufgenommen werden, entfallen an den Rändern. Das führt zu:

$$M_{xx}^0(\xi_1 = 0) = M_{xx}^0(\xi_1 = 1) = 0, \quad (2.47)$$

$$M_{yy}^0(\xi_2 = 0) = M_{yy}^0(\xi_2 = 1) = 0. \quad (2.48)$$

2.4.3 Auswertung

Mit dem Ansatz

$$\bar{w}_0 = W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi\xi_1}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi\xi_2}{b}\right) \quad (2.49)$$

wird deutlich, dass alle Randbedingungen (2.43) bis (2.46) erfüllt werden. Setzt man (2.49) in (2.42) ein, ergibt sich in normierter Schreibweise:

$$\pi^4 \left[\left(\frac{m^2}{a}\right)^2 + 2\beta(mn)^2 + (\alpha n^2)^2 - \bar{N}_{xx}^0 m^2 \right] W_{mn} \sin(m\pi\xi_1) \sin(n\pi\xi_2) = 0. \quad (2.50)$$

Damit es nicht zu einer trivialen Lösung kommt, muss der Term in den eckigen Klammern entfallen. Es gilt:

$$\left[\left(\frac{m^2}{a}\right)^2 + 2\beta(mn)^2 + (\alpha n^2)^2 - \bar{N}_{xx}^0 m^2 \right] = 0. \quad (2.51)$$

Der Ausdruck wird nach der Randlast \bar{N}_{xx}^0 umgeformt:

$$\bar{N}_{xx}^0 = \left(\frac{m}{a}\right)^2 + 2\beta n^2 + \left(\frac{\alpha n^2}{m}\right)^2. \quad (2.52)$$

Bei näherer Betrachtung von (2.52) wird deutlich, dass die Randlast \bar{N}_{xx}^0 die Kraft ist, bei der die Laminatplatte gerade beulen wird. Bei der Herleitung wurde das infinitesimale Schnitelement betrachtet (rechts oben in Abbildung 2.8) welches sich grenzwertig noch im ebenen Spannungszustand befindet. Daher ist die Randlast \bar{N}_{xx}^0 die Last, die mindestens nötig ist, um beim Laminat, in Abhängigkeit der Halbwellenzahlen m und n , das Beulen hervorzurufen.

Um die minimale Beullast zu berechnen, muss die Halbwellenzahl n den kleinsten Wert, also $n = 1$, annehmen. Daraus vereinfacht sich (2.52) zu:

$$\bar{N}_{xx}^0 = \left(\frac{m}{a}\right)^2 + 2\beta + \left(\frac{\alpha}{m}\right)^2. \quad (2.53)$$

Um herauszufinden, für welches m die Beullast \bar{N}_{xx}^0 einen Extremwert annimmt, wird (2.53) partiell nach der Halbwellenzahl über die Länge m abgeleitet:

$$\frac{\partial \bar{N}_{xx}^0}{\partial m} = 0. \quad (2.54)$$

Die resultierende Gleichung wird nach m aufgelöst und ergibt:

$$m = \alpha. \quad (2.55)$$

Aufgrund der einzusetzenden Parameter wird nur selten ein ganzzahliger Wert für m berechnet. Dann werden die nächstgrößere und nächstkleinere ganze Zahl gewählt und in Gleichung (2.53) eingesetzt. Das kleinere Ergebnis ist dann die gesuchte Beullast.

Ein weiterer Aspekt ist der Verlauf der Beullast \bar{N}_{xx}^0 bei einem Laminat, welches unendlich lang ist. Es stellt sich heraus, dass die Last, nach Einsetzen von m in die Gleichung (2.53), gegen einen asymptotischen Grenzwert strebt, der durch die Formel

$$\bar{N}_{xx}^0 = 2(1 + \beta) \quad (2.56)$$

beschrieben wird. Dieser Wert wird folglich nicht von der Beullast N_{xx}^0 unterschritten. Es bedeutet auch, dass zwischen der bezogenen Beullast \bar{N}_{xx}^0 und der Kreuzzahl β ein linearer Zusammenhang besteht. Ein Modenwechsel von m zu $m + 1$ tritt an den Stellen

$$\alpha = \sqrt{m^2 + m} \quad (2.57)$$

mit der auftretenden bezogenen Beullast

$$\bar{N}_{xx}^0 = 2 \left[\frac{1}{m+1} \left(m + \frac{1}{2m} + 1 \right) + \beta \right] \quad (2.58)$$

auf. Aus der Extremwertberechnung in (2.54) erschließt sich, dass die lokalen Minima an den Stellen

$$m = \alpha \quad (2.59)$$

auffindbar sind.

Auf diese markanten Kurvenverläufe und Stellen wird in Kapitel 3.1, anhand der für diese Arbeit generierten Ergebnisse, weiter eingegangen.

2.4.4 Die antimetrische Beulform

In Abbildung 2.9 sind die symmetrische und die antimetrische Beulform abgebildet. Die hellen und dunklen Bereiche weisen auf jeweils eine Richtung, in die die Platte

beult. Die Beulart der symmetrischen Beulform wird globales Beulen genannt, da sie zwei gegenüber liegende Ränder mit einer Halbwelle verbindet. Folglich handelt es sich bei der antimetrischen Beulform um ein lokales Beulmuster. Die Symmetrie bzw. Antimetrie herrscht über die Steife. Die antimetrische Beulform stellt einen Grenzbereich dar und wird von der Beullast nicht überschritten. Während dieser Verformung entkoppelt sich die Beullast der Platte von der Steife. Dabei sind die Verformungen in der Steife vernachlässigbar und das Beulverhalten nur noch von den Eigenschaften der Platte abhängig.

Aus Gründen, die im Nachbeulverhalten wiederzufinden sind, ziehen globale Beulmuster die schwerwiegenderen Folgen auf die Struktur mit sich. In dieser Arbeit wird darauf nicht weiter eingegangen, sollte jedoch erwähnt werden.

Durch eine genügend hohe Biegesteifigkeit der Steife kann die Entkopplung herbeigeführt werden, ohne dass es zu globalem Beulen kommt.

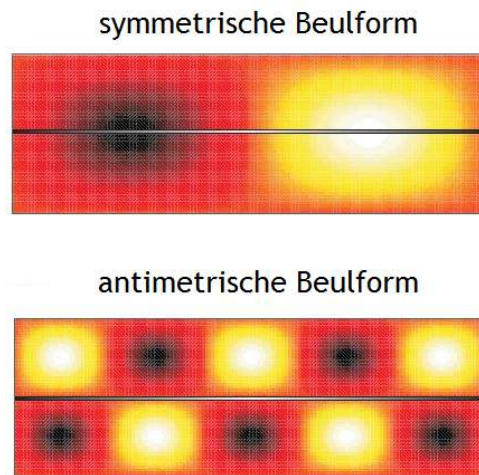


Abbildung 2.9: Symmetrische und antimetrische Beulform, [3]

Zur Ermittlung der Beullast \bar{N}_{xx}^0 wird, aufgrund der Beulform, für die Halbwellenzahl über die Breite der Wert $n = 2$ verwendet und in Formel (2.52) eingesetzt:

$$\bar{N}_{xx}^0 = \left(\frac{m}{a}\right)^2 + 2\beta n^2 + \left(\frac{\alpha n^2}{m}\right)^2 .$$

Die Anwendung der Beulbedingung nach Navier ist in diesem Fall möglich, da Platte und Steife voneinander entkoppelt sind und die Steife somit keinen versteifenden

Einfluss auf die Platte ausübt, sondern vielmehr eine Lagerung in der Feldmitte darstellt.

Da bei einer unendlich langen Laminatplatte, ebenso die Gleichung gegen einen asymptotischen Grenzwert strebt, wird sie, wie zuvor, partiell nach der Halbwellenzahl über die Länge m abgeleitet und anschließend nach m aufgelöst:

$$m = \frac{\alpha}{2}. \quad (2.60)$$

Wie bei der unversteiften Platte sind an diesen Stellen die jeweiligen Minima zu finden.

Die Modenwechsel für diese Beulformen liegen bei

$$\alpha = \frac{\sqrt{m^2 + m}}{2}. \quad (2.61)$$

Die bezogene Beullast beträgt an dieser Stelle unter Verwendung von Gleichung (2.60):

$$\bar{N}_{xx}^0 = 8 \left[\frac{1}{m+1} \left(m + \frac{1}{2m} + 1 \right) + \beta \right]. \quad (2.62)$$

Nach Einsetzen in die Beulbedingung (2.52) stellt sich heraus, dass der asymptotische Grenzwert vier mal größer ist als der Grenzwert bei globalem Beulen (2.58):

$$\bar{N}_{xx}^0 = 8(1 + \beta). \quad (2.63)$$

2.5 Lévy'sche Lösungen für uniaxial gedrückte längsausgesteifte Laminate

Neben der bereits dargestellten Navierschen Lösung existiert auch die Lévy'sche Lösung, jedoch mit dem Unterschied, dass nur zwei gegenüberliegende Ränder gelenkig gelagert sind. Die Lévy'schen Lösungen dienen der exakten Lösung und der Verifizierung von Näherungsverfahren. Im Folgenden wird das Beulproblem über diese Methode dargestellt.

2.5.1 Gültigkeit

Die Lévy'schen Lösungen sind anwendbar wenn zwei gegenüber liegende Ränder gelenkig gelagert sind. Mit dieser Annahme ergeben sich folgende Randbedingungen:

$$\bar{w}_0(\xi_1 = 0) = 0 \quad \text{und} \quad \bar{w}_0(\xi_1 = 1) = 0. \quad (2.64)$$

2.5.2 Beuldifferentialgleichung

Die bereits verwendete Differenzialgleichung (2.42) lautet:

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^4 \bar{w}_0}{\partial \xi_1^4} + 2\beta \frac{\partial^4 \bar{w}_0}{\partial \xi_2^4} + \alpha^2 \frac{\partial^4 \bar{w}_0}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^2} + \bar{N}_{xx}^0 \pi^2 \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial \xi_1^2} = 0.$$

Die Beulform lässt sich angeben als:

$$w_0(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) w(y). \quad (2.65)$$

Die normierte Form dieser Funktion ist:

$$\bar{w}_0(\xi_1, \xi_2) = \sin(m\pi\xi_1) \bar{w}(\xi_2). \quad (2.66)$$

Die in (2.65) enthaltene Funktion $w(y)$ lautet:

$$w(y) = C_1 \cosh\left(\frac{k_1 m \pi y}{a}\right) + C_2 \sinh\left(\frac{k_1 m \pi y}{a}\right) + C_3 \cos\left(\frac{k_2 m \pi y}{a}\right) + C_4 \sin\left(\frac{k_2 m \pi y}{a}\right). \quad (2.67)$$

In normierter Form lautet sie:

$$\begin{aligned} \bar{w}(\xi_2) = & C_1 \cosh\left(\kappa_1 \frac{m\pi\xi_2}{\alpha}\right) + C_2 \sinh\left(\kappa_1 \frac{m\pi\xi_2}{\alpha}\right) \\ & + C_3 \cos\left(\kappa_2 \frac{m\pi\xi_2}{\alpha}\right) + C_4 \sin\left(\kappa_2 \frac{m\pi\xi_2}{\alpha}\right). \end{aligned} \quad (2.68)$$

In der Formel (2.68) werden die Abkürzungen $k_{1,2}$ verwendet. Ausgeschrieben lauten sie

$$k_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{D_{22}} \left\{ \sqrt{(D_{12} + 2D_{66})^2 + D_{22} \left[N_{xx}^0 \left(\frac{a}{m\pi}\right)^2 - D_{11} \right] \pm (D_{12} + 2D_{66})} \right\}} \quad (2.69)$$

oder in normierter Schreibweise

$$\kappa_{1,2}^* = \sqrt[4]{\frac{D_{11}}{D_{22}}} \sqrt{\sqrt{\beta^2 + \bar{N}_{xx}^0 \left(\frac{\alpha}{m}\right)^2 - 1} \pm \beta} \quad (2.70)$$

bzw.

$$\kappa_{1,2} = \sqrt{\sqrt{\beta^2 + \bar{N}_{xx}^0 \left(\frac{\alpha}{m}\right)^2 - 1} \pm \beta}. \quad (2.71)$$

Bei der Umformung von $k_{1,2}$ in die normierte Form entsteht die Übergangsform $\kappa_{1,2}^*$. Dieser unvollkommen normierte Ausdruck enthält den Faktor $\sqrt[4]{\frac{D_{11}}{D_{22}}}$, der hier nicht aufgelöst werden kann. Bei näherer Betrachtung fällt jedoch auf, dass dieser Faktor auch in α vorkommt, was sich im weiteren Verlauf der Berechnungen als hilfreich und sogar notwendig herausstellt. Der weiter verwendete Ausdruck $\kappa_{1,2}$ ist in rein normierter Form existent, da der störende Faktor, in Verbindung mit der Länge a und der Breite b , umgeformt und in die normierte Schreibweise eingeflossen ist.

2.5.3 Grundgleichungen

Beim Modell, welches in dieser Arbeit behandelt wird und bereits in Kapitel 1.1 erläutert wurde, handelt es sich um ein symmetrisches orthotropes Laminat, welches mit beliebig vielen Steifen über die Länge versteift ist und mit einer konstanten uniaxialen Kraft \bar{N}_{xx}^0 belastet wird. Dabei verfügen die Steifen über keine Torsionssteifigkeit. Durch die i Steifen, welche die Biegesteifigkeit EI_i besitzen, unterteilt sich das Laminat in $i + 1$ Teilabschnitte.

2.5.4 Rand- und Übergangsbedingungen

Um ein Gleichungssystem aufzustellen und daraus die Beulbedingung zu erhalten, ist es nötig, dass gewisse Bedingungen gelten. Hierfür werden logische Schlüsse über die Rand- und Übergangsbedingungen gezogen.

Die Formulierung der Bedingungen in homogener Form wird im Folgenden bevorzugt und dient der Vereinfachung bei der darauf folgenden Auswertung.

Randbedingungen

Die belasteten Ränder sind, wie bereits in Kapitel 2.5.1 erwähnt, gelenkig gelagert. Transversale Bewegungen sind somit an diesen Stellen unterbunden und führen zu den ersten benötigten Randbedingungen:

$$\bar{w}_{0,i}(\xi_{1,i} = 0) = \bar{w}_{0,i}(\xi_{1,i} = 1) = 0 . \quad (2.72)$$

Bei $\xi_{2,1} = 0$ und $\xi_{2,i+1} = 1$, also an den beiden unbelasteten Rändern, gilt durch den Ausdruck (2.66), dass dort keine Verschiebung \bar{w}_0 auftritt. Mathematisch wird dies ausgedrückt durch:

$$\bar{w}_{0,1}(\xi_{2,1} = 0) = \bar{w}_{0,i+1}(\xi_{2,i+1} = 1) = 0 . \quad (2.73)$$

Die Gelenklager können keine Momente aufnehmen, woraus die Ausdrücke

$$M_{xx,i}^0(\xi_{1,i} = 0) = M_{xx,i}^0(\xi_{1,i} = 1) = 0 \quad (2.74)$$

und

$$M_{yy,1}^0(\xi_{2,1} = 0) = M_{yy,i+1}^0(\xi_{2,i+1} = 1) = 0 . \quad (2.75)$$

folgen.

Unter Verwendung des Konstitutivgesetzes (2.20) und Beachtung, dass sich die Momente am Übergang im Gleichgewicht befinden, ergibt sich:

$$\left. \frac{\partial^2 \bar{w}_{0,1}}{\partial \xi_2^2} \right|_{\xi_{2,1}=0} + \left. \frac{\partial^2 \bar{w}_{0,1}}{\partial \xi_2^2} \right|_{\xi_{2,i+1}=1} = 0 . \quad (2.76)$$

Übergangsbedingungen

Durch ein Freikörperbild (Abb.2.10) werden die Zusammenhänge beim Übergang von einem Teilfeld i in das nächste Teilfeld $i + 1$ deutlich:

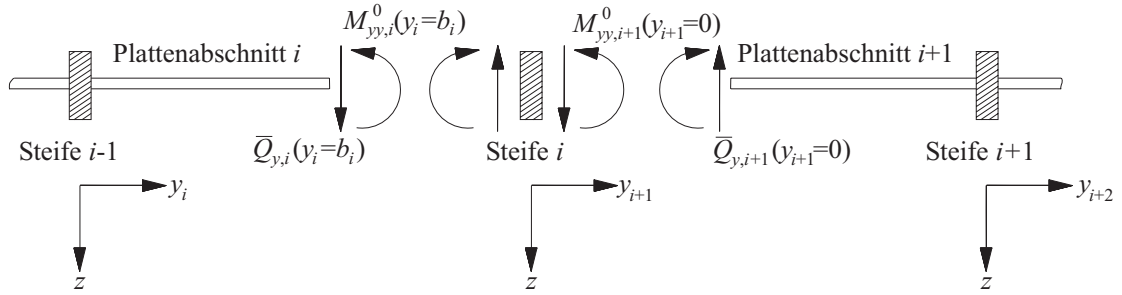


Abbildung 2.10: Freikörperbild der Steife i , [3]

Die erste Übergangsbedingung ergibt sich durch gleiche Verschiebungen $\bar{w}_{0,i}$ und $\bar{w}_{0,i+1}$ der angrenzenden Teilfelder i und $i + 1$:

$$\bar{w}_{0,i}(\xi_{2,i} = 1) - \bar{w}_{0,i+1}(\xi_{2,i+1} = 0) = 0. \quad (2.77)$$

Auch die Winkelverdrehung der Teilfelder i und $i + 1$ ist beim Übergang identisch. Dies ergibt die zweite Übergangsbedingung:

$$\left. \frac{\partial \bar{w}_{0,i}}{\partial \xi_{2,i}} \right|_{\xi_{2,i}=1} - \left. \frac{\partial \bar{w}_{0,i+1}}{\partial \xi_{2,i+1}} \right|_{\xi_{2,i+1}=0} = 0. \quad (2.78)$$

Eine weitere Bedingung ist das Momentengleichgewicht um die x -Achse, dargestellt durch den Ausdruck

$$M_{yy,i}^0(\xi_{2,i} = 1) - M_{yy,i}^0(\xi_{2,i+1} = 0) = 0. \quad (2.79)$$

Dieser ergibt, in Gebrauch mit dem Konstitutivgesetz für ein orthotropes ausgeglichenes Laminat (2.20) die dritte Übergangsbedingung:

$$\begin{aligned} & \beta \zeta \left(\left. \frac{\partial^2 w_{0,i}}{\partial \xi_1^2} \right|_{\xi_{2,i}=1} - \left. \frac{\partial^2 w_{0,i+1}}{\partial \xi_1^2} \right|_{\xi_{2,i+1}=0} \right) \\ & + \alpha^2 \left(\left. \frac{\partial^2 w_{0,i}}{\partial \xi_2^2} \right|_{\xi_{2,i}=1} - \left. \frac{\partial^2 w_{0,i+1}}{\partial \xi_2^2} \right|_{\xi_{2,i+1}=0} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Die vierte Übergangsbedingung ergibt sich aus den am Übergang auftretenden Querkräften $\bar{Q}_{y,i}$ und $\bar{Q}_{y,i+1}$. Deren Differenz stellt die Streckenlast $-q_i$ dar, welche die Steife i belastet:

$$q_i = -Q_{y,i}(y_i = b_i) + Q_{y,i+1}(y_{i+1} = 0) . \quad (2.81)$$

Unter dem Aspekt, dass die Steife in diesem Zustand als Euler-Bernoulli-Balken gesehen werden muss, gilt hier die Balkentheorie zweiter Ordnung:

$$EI_i \frac{\partial^4 w_{0,i+1}}{\partial x^4} \Big|_{y_{i+1}=0} + F_i \frac{\partial^2 w_{0,i+1}}{\partial x^2} \Big|_{y_{i+1}=0} - q_i = 0 . \quad (2.82)$$

Über die Momente M_{xy}^0 und M_{yy}^0 können die als Kirchhoffsche Ersatzkräfte dargestellten Querkräfte \bar{Q}_y angegeben werden:

$$\bar{Q}_y = 2 \frac{\partial M_{xy}^0}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}^0}{\partial y} . \quad (2.83)$$

Hier wird wieder das Konstitutivgesetz (2.20) verwendet um die Querkräfte \bar{Q}_y darzustellen. Nach Zusammenführen der Formeln (2.81), (2.82) und (2.83) ergibt sich schließlich folgende Form:

$$\begin{aligned} & EI_i \frac{\partial^4 w_{0,i+1}}{\partial x^4} \Big|_{y_{i+1}=0} \\ & + F_i \frac{\partial^2 w_{0,i+1}}{\partial x^2} \Big|_{y_{i+1}=0} \\ & + D_{22} \left(\frac{\partial^3 w_{0,i+1}}{\partial y_{i+1}^3} \Big|_{y_{i+1}=0} - \frac{\partial^3 w_{0,i}}{\partial y_i^3} \Big|_{y_i=b_i} \right) \\ & + (D_{12} + 4D_{66}) \left(\frac{\partial^3 w_{0,i+1}}{\partial x^2 y_{i+1}} \Big|_{y_{i+1}=0} - \frac{\partial^3 w_{0,i}}{\partial x^2 y_i} \Big|_{y_i=b_i} \right) = 0 . \end{aligned} \quad (2.84)$$

Nun kann die vierte Übergangsbedingung normiert dargestellt werden:

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma_i}{\alpha^2} \frac{\partial^4 \bar{w}_{0,i+1}}{\partial \xi_1^4} \Big|_{\xi_{2,i+1}=0} \\ & + \delta \bar{N}_{xx}^0 \pi^2 \frac{\partial^2 \bar{w}_{0,i+1}}{\partial \xi_1^2} \Big|_{\xi_{2,i+1}=0} \\ & + \alpha^2 \left(\frac{\partial^3 w_{0,i+1}}{\partial \xi_{2,i+1}^3} \Big|_{\xi_{2,i+1}=0} - \frac{\partial^3 \bar{w}_{0,i}}{\partial \xi_{2,i}^3} \Big|_{\xi_{2,i}=1} \right) \\ & + (2\beta - \beta\zeta) \left(\frac{\partial^3 \bar{w}_{0,i+1}}{\partial \xi_1^2 \xi_{2,i+1}} \Big|_{\xi_{2,i+1}=0} - \frac{\partial^3 \bar{w}_{0,i}}{\partial \xi_1^2 \xi_{2,i}} \Big|_{\xi_{2,i}=1} \right) = 0 . \end{aligned} \quad (2.85)$$

Mit diesen Rand- und Übergangsbedingungen ergeben sich $4i + 4$ Bedingungen, mit deren Hilfe sich die unbekanntenen $C_{1,i}$, $C_{2,i}$, $C_{3,i}$ und $C_{4,i}$ berechnen lassen.

Die erforderlichen Differentialquotienten

In der Beulgleichung, sowie in den Rand- und Übergangsbedingungen, sind Differentialquotienten enthalten, die nötig sind, um das Beulproblem zu behandeln. Dabei handelt es sich um die Ableitungen der Verschiebungsfunktion (2.66). Zur Übersicht werden im Folgenden diese Formeln dargestellt:

$$\bar{w}_0(\xi_1, \xi_2) = \sin\left(\frac{m\pi\xi_1}{\alpha}\right) \left[C_1 \cosh\left(\kappa_1 \frac{m\pi\xi_2}{\alpha}\right) + C_2 \sinh\left(\kappa_1 \frac{m\pi\xi_2}{\alpha}\right) + C_3 \cos\left(\kappa_2 \frac{m\pi\xi_2}{\alpha}\right) + C_4 \sin\left(\kappa_2 \frac{m\pi\xi_2}{\alpha}\right) \right], \quad (2.86)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial \xi_1^2} = -\sin\left(\frac{m\pi\xi_1}{\alpha}\right) \left(\frac{m\pi}{\alpha}\right)^2 \left[C_1 \cosh\left(\kappa_1 \frac{m\pi\xi_2}{\alpha}\right) + C_2 \sinh\left(\kappa_1 \frac{m\pi\xi_2}{\alpha}\right) + C_3 \cos\left(\kappa_2 \frac{m\pi\xi_2}{\alpha}\right) + C_4 \sin\left(\kappa_2 \frac{m\pi\xi_2}{\alpha}\right) \right], \quad (2.87)$$

$$\frac{\partial^4 \bar{w}_0}{\partial \xi_1^4} = \sin\left(\frac{m\pi\xi_1}{\alpha}\right) \left(\frac{m\pi}{\alpha}\right)^4 \left[C_1 \cosh\left(\kappa_1 \frac{m\pi\xi_2}{\alpha}\right) + C_2 \sinh\left(\kappa_1 \frac{m\pi\xi_2}{\alpha}\right) + C_3 \cos\left(\kappa_2 \frac{m\pi\xi_2}{\alpha}\right) + C_4 \sin\left(\kappa_2 \frac{m\pi\xi_2}{\alpha}\right) \right], \quad (2.88)$$

$$\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \xi_2} = \sin\left(\frac{m\pi\xi_1}{\alpha}\right) \left[\left(\kappa_1 \frac{m\pi}{\alpha}\right) \left(C_1 \sinh\left(\kappa_1 \frac{m\pi\xi_2}{\alpha}\right) + C_2 \cosh\left(\kappa_1 \frac{m\pi\xi_2}{\alpha}\right) \right) + \left(\kappa_2 \frac{m\pi}{\alpha}\right) \left(-C_3 \sin\left(\kappa_2 \frac{m\pi\xi_2}{\alpha}\right) + C_4 \cos\left(\kappa_2 \frac{m\pi\xi_2}{\alpha}\right) \right) \right], \quad (2.89)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial \xi_2^2} = \sin\left(\frac{m\pi\xi_1}{\alpha}\right) & \left[\left(\kappa_1 \frac{m\pi}{\alpha}\right)^2 \left(C_1 \cosh\left(\kappa_1 \frac{m\pi\xi_2}{\alpha}\right) + C_2 \sinh\left(\kappa_1 \frac{m\pi\xi_2}{\alpha}\right) \right) \right. \\ & \left. - \left(\kappa_2 \frac{m\pi}{\alpha}\right)^2 \left(C_3 \cos\left(\kappa_2 \frac{m\pi\xi_2}{\alpha}\right) + C_4 \sin\left(\kappa_2 \frac{m\pi\xi_2}{\alpha}\right) \right) \right], \end{aligned} \quad (2.90)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \bar{w}_0}{\partial \xi_2^3} = \sin\left(\frac{m\pi\xi_1}{\alpha}\right) & \left[\left(\kappa_1 \frac{m\pi}{\alpha}\right)^3 \left(C_1 \sinh\left(\kappa_1 \frac{m\pi\xi_2}{\alpha}\right) + C_2 \cosh\left(\kappa_1 \frac{m\pi\xi_2}{\alpha}\right) \right) \right. \\ & \left. + \left(\kappa_2 \frac{m\pi}{\alpha}\right)^3 \left(C_3 \sin\left(\kappa_2 \frac{m\pi\xi_2}{\alpha}\right) - C_4 \cos\left(\kappa_2 \frac{m\pi\xi_2}{\alpha}\right) \right) \right], \end{aligned} \quad (2.91)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \bar{w}_0}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2} = -\sin(m\pi\xi_1) (m\pi)^2 & \left[\left(\kappa_1 \frac{m\pi}{\alpha}\right)^3 \left(C_1 \sinh\left(\kappa_1 \frac{m\pi}{\alpha}\right) + C_2 \cosh\left(\kappa_1 \frac{m\pi}{\alpha}\right) \right) \right. \\ & \left. + \left(\kappa_2 \frac{m\pi}{\alpha}\right)^3 \left(-C_3 \sin\left(\kappa_2 \frac{m\pi}{\alpha}\right) + C_4 \cos\left(\kappa_2 \frac{m\pi}{\alpha}\right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Auswertung der Rand- und Übergangsbedingungen

In diesem Abschnitt werden die aufgestellten Rand- und Übergangsbedingungen ausgewertet.

Die Randbedingungen (2.72) und (2.73) für Teilfeld 1 führen zu den Gleichungen

$$C_{1,1} + C_{3,1} = 0 \quad (2.93)$$

und

$$\kappa_1^2 C_{1,1} - \kappa_2^2 C_{3,1} = 0. \quad (2.94)$$

Die Folgerung daraus ist, dass $C_{1,1} = 0$ und $C_{3,1} = 0$ sind.

Aus den Bedingungen für den gegenüberliegenden Rand, also am Teilfeld $i + 1$ resultieren die Gleichungen

$$\begin{aligned} C_{1,i+1} \cosh\left(\kappa_1 \frac{m\pi}{\alpha_{i+1}}\right) + C_{2,i+1} \sinh\left(\kappa_1 \frac{m\pi}{\alpha_{i+1}}\right) \\ + C_{3,i+1} \cos\left(\kappa_2 \frac{m\pi}{\alpha_{i+1}}\right) + C_{4,i+1} \sin\left(\kappa_2 \frac{m\pi}{\alpha_{i+1}}\right) = 0 \end{aligned} \quad (2.95)$$

und

$$\begin{aligned} \kappa_1^2 \left[C_{1,i+1} \cosh\left(\kappa_1 \frac{m\pi}{\alpha_{i+1}}\right) + C_{2,i+1} \sinh\left(\kappa_1 \frac{m\pi}{\alpha_{i+1}}\right) \right] \\ + \kappa_2^2 \left[C_{3,i+1} \cos\left(\kappa_2 \frac{m\pi}{\alpha_{i+1}}\right) + C_{4,i+1} \sin\left(\kappa_2 \frac{m\pi}{\alpha_{i+1}}\right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Die erste Übergangsbedingung (2.77) wird nach Auswertung zu:

$$\begin{aligned} C_{1,i} \cosh\left(\kappa_1 \frac{m\pi}{\alpha}\right) + C_{2,i} \sinh\left(\kappa_1 \frac{m\pi}{\alpha}\right) + C_{3,i} \cos\left(\kappa_2 \frac{m\pi}{\alpha}\right) + C_{4,i} \sin\left(\kappa_2 \frac{m\pi}{\alpha}\right) \\ - (C_{1,i+1} + C_{3,i+1}) = 0. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Die zweite Übergangsbedingung (2.78) wird nach Auswertung zu:

$$\begin{aligned} \kappa_1 \frac{m\pi}{\alpha} \left[C_{1,i} \sinh\left(\kappa_1 \frac{m\pi}{\alpha}\right) + C_{2,i} \cosh\left(\kappa_1 \frac{m\pi}{\alpha}\right) - C_{2,i+1} \right] \\ + \kappa_2 \frac{m\pi}{\alpha} \left[C_{3,i} \sin\left(\kappa_2 \frac{m\pi}{\alpha}\right) + C_{4,i} \cos\left(\kappa_2 \frac{m\pi}{\alpha}\right) - C_{4,i+1} \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Die dritte Übergangsbedingung (2.80) geht in folgende Form über:

$$\begin{aligned} (\kappa_1^2 - \beta\zeta) \left[C_{1,i} \cosh\left(\kappa_1 \frac{m\pi}{\alpha}\right) + C_{2,i} \sinh\left(\kappa_1 \frac{m\pi}{\alpha}\right) - C_{1,i+1} \right] \\ - (\kappa_2^2 - \beta\zeta) \left[C_{3,i} \cos\left(\kappa_2 \frac{m\pi}{\alpha}\right) + C_{4,i} \sin\left(\kappa_2 \frac{m\pi}{\alpha}\right) - C_{3,i+1} \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Die vierte Übergangsbedingung (2.85) wird nach Auswertung zu:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\gamma}{\alpha^2} (m\pi)^2 - \delta \bar{N}_{xx}^0 \pi^2 \right) (C_{1,i+1} + C_{3,i+1}) \\ - \kappa_1 \frac{m\pi}{\alpha} [\kappa_1^2 - (2\beta - \beta\zeta)] \left[C_{1,i} \sinh\left(\kappa_1 \frac{m\pi}{\alpha}\right) + C_{2,i} \cosh\left(\kappa_1 \frac{m\pi}{\alpha}\right) \right] \\ + \kappa_2 \frac{m\pi}{\alpha} [\kappa_2^2 - (2\beta - \beta\zeta)] \left[-C_{3,i} \sin\left(\kappa_2 \frac{m\pi}{\alpha}\right) + C_{4,i} \cos\left(\kappa_2 \frac{m\pi}{\alpha}\right) \right] \\ + \kappa_1 \frac{m\pi}{\alpha} [\kappa_1^2 - (2\beta - \beta\zeta)] C_{2,i+1} \\ + \kappa_2 \frac{m\pi}{\alpha} [\kappa_2^2 - (2\beta - \beta\zeta)] C_{4,i+1} = 0. \end{aligned} \quad (2.100)$$

2.5.5 Beulbedingungen

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie aus den Rand- und Übergangsbedingungen die normierte transzendente Beulbedingung zu erhalten ist.

Laminat mit n beliebigen Längssteifen an beliebigen Positionen

Aus den Rand- und Übergangsbedingungen ergibt sich ein homogenes lineares Gleichungssystem. Es gilt für die $4(i+1) - 2$ Konstanten C_1, C_2, C_3 und C_4 . Aus den Randbedingungen für das erste Teilfeld fallen die Konstanten $C_{1,1}$ und $C_{3,1}$ weg. Um bei der Lösung ein nichttriviales Ergebnis zu erhalten, muss die Bedingung:

$$\det(\underline{\underline{M}}) = 0 \quad (2.101)$$

erfüllt werden. Die Auswertung zur Bestimmung der bezogenen Beullast \bar{N}_{xx}^0 ergibt dann folgende Matrix:

$$\det \begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_1 & \underline{\underline{M}}_{2,1} & \underline{\underline{0}}_{(4x4)} & \underline{\underline{0}}_{(4x4)} & \cdots & \underline{\underline{0}}_{(4x4)} & \underline{\underline{0}}_{(4x4)} \\ \underline{\underline{0}}_{(4x2)} & \underline{\underline{M}}_{3,2} & \underline{\underline{M}}_{2,2} & \underline{\underline{0}}_{(4x4)} & \cdots & \underline{\underline{0}}_{(4x4)} & \underline{\underline{0}}_{(4x4)} \\ \underline{\underline{0}}_{(4x2)} & \underline{\underline{0}}_{(4x4)} & \underline{\underline{M}}_{3,3} & \underline{\underline{M}}_{2,3} & \cdots & \underline{\underline{0}}_{(4x4)} & \underline{\underline{0}}_{(4x4)} \\ \underline{\underline{0}}_{(4x2)} & \underline{\underline{0}}_{(4x4)} & \underline{\underline{0}}_{(4x4)} & \underline{\underline{M}}_{3,4} & \cdots & \underline{\underline{0}}_{(4x4)} & \underline{\underline{0}}_{(4x4)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \underline{\underline{0}}_{(4x2)} & \underline{\underline{0}}_{(4x4)} & \underline{\underline{0}}_{(4x4)} & \underline{\underline{0}}_{(4x4)} & \underline{\underline{0}}_{(4x4)} & \underline{\underline{M}}_{3,i} & \underline{\underline{M}}_{2,i} \\ \underline{\underline{0}}_{(2x2)} & \underline{\underline{0}}_{(2x4)} & \underline{\underline{0}}_{(2x4)} & \underline{\underline{0}}_{(2x4)} & \underline{\underline{0}}_{(2x4)} & \underline{\underline{0}}_{(2x4)} & \underline{\underline{M}}_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.102)$$

Die Matrix $\underline{\underline{M}}_1$ ergibt sich aus den Übergangsbedingungen des ersten Teilfeldes. Da $C_{1,1} = 0$ und $C_{3,1} = 0$ sind, entfallen die erste und dritte Spalte.

Die Matrix $\underline{\underline{M}}_{2,i}$ wird aus den Übergangsbedingungen aus Teilfeld $i+1$ aufgebaut und aus Gründen des Platzmangels und der besseren Übersicht, genau wie Matrix $\underline{\underline{M}}_{3,i}$, in transponierter Form dargestellt.

Die Ähnlichkeit der Matrizen $\underline{\underline{M}}_{3,i}$ und $\underline{\underline{M}}_1$ resultiert daraus, dass sie auf den gleichen Übergangsbedingungen basieren, jedoch für verschiedene Teilfelder gelten. Matrix $\underline{\underline{M}}_1$ kann somit auch als $\underline{\underline{M}}_{3,1}$ beschrieben werden. Die Schlussfolgerung ist, dass Matrix $\underline{\underline{M}}_{3,i}$ nur auftritt, wenn mindestens zwei Steifen vorhanden sind.

Die Matrix $\underline{\underline{M}}_4$ enthält die Randbedingungen am Teilfeld $i + 1$. Der Aufbau dieser vier Matrizen ist:

$$\underline{\underline{M}}_1 = \begin{bmatrix} \tau_{2,1} & \tau_{4,1} \\ \tau_{1,1}\kappa_1 & \tau_{3,1}\kappa_2 \\ \tau_{2,1}(\kappa_1^2 - \beta\zeta) & -\tau_{4,1}(\kappa_2^2 + \beta\zeta) \\ -\tau_{1,1}\kappa_1 \frac{m\pi}{\alpha_i}(\kappa_1^2 - (2\beta - \beta\zeta)) & \tau_{3,1}\kappa_2 \frac{m\pi}{\alpha_i}(\kappa_2^2 + (2\beta - \beta\zeta)) \end{bmatrix}, \quad (2.103)$$

$$\underline{\underline{M}}_{2,i}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -\kappa_1^2 + \beta\zeta & \gamma_i \left(\frac{m\pi}{\alpha_i}\right)^2 - \delta \bar{N}_{xx}^0 \\ 0 & -\kappa_1 & 0 & \kappa_1 \frac{m\pi}{\alpha_i}(\kappa_1 + (2\beta - \beta\zeta)) \\ -1 & 0 & \kappa_2^2 + \beta\zeta & \gamma_i \left(\frac{m\pi}{\alpha_i}\right)^2 - \delta \bar{N}_{xx}^0 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & -\kappa_2 \frac{m\pi}{\alpha_i}(\kappa_2 + (2\beta - \beta\zeta)) \end{bmatrix}, \quad (2.104)$$

$$\underline{\underline{M}}_{3,i}^T = \begin{bmatrix} \tau_{1,i} & \tau_{2,i}\kappa_1 & \tau_{1,i}(\kappa_2^2 - \beta\zeta) & -\tau_{2,i}\kappa_1 \frac{m\pi}{\alpha_i}(\kappa_1^2 - (2\beta - \beta\zeta)) \\ \tau_{2,i} & \tau_{1,i}\kappa_1 & \tau_{2,i}(\kappa_1^2 - \beta\zeta) & -\tau_{1,i}\kappa_1 \frac{m\pi}{\alpha_i}(\kappa_1^2 - (2\beta - \beta\zeta)) \\ \tau_{3,i} & -\tau_{4,i}\kappa_2 & -\tau_{3,i}(\kappa_2^2 + \beta\zeta) & -\tau_{4,i}\kappa_1 \frac{m\pi}{\alpha_i}(\kappa_1^2 + (2\beta - \beta\zeta)) \\ \tau_{4,i} & \tau_{3,i}\kappa_2 & -\tau_{4,i}(\kappa_2^2 + \beta\zeta) & \tau_{3,i}\kappa_1 \frac{m\pi}{\alpha_i}(\kappa_1^2 + (2\beta - \beta\zeta)) \end{bmatrix}, \quad (2.105)$$

$$\underline{\underline{M}}_4 = \begin{bmatrix} \tau_{1,i+1} & \tau_{2,i+1} & \tau_{3,i+1} & \tau_{4,i+1} \\ \tau_{1,i+1}\kappa_1^2 & \tau_{2,i+1}\kappa_1^2 & \tau_{3,i+1}\kappa_2^2 & \tau_{4,i+1}\kappa_2^2 \end{bmatrix}, \quad (2.106)$$

Zur weiteren Vereinfachung werden Abkürzungen eingeführt, welche die trigonometrischen Funktionen ersetzen:

$$\tau_{1,i} = \cosh\left(\kappa_1 \frac{m\pi}{\alpha_i}\right), \quad (2.107)$$

$$\tau_{2,i} = \sinh\left(\kappa_1 \frac{m\pi}{\alpha_i}\right), \quad (2.108)$$

$$\tau_{3,i} = \cos\left(\kappa_2 \frac{m\pi}{\alpha_i}\right), \quad (2.109)$$

$$\tau_{4,i} = \sin\left(\kappa_2 \frac{m\pi}{\alpha_i}\right). \quad (2.110)$$

Laminat mit einer Längssteife

Für ein einfach ausgesteiftes Laminat an beliebiger Stelle gilt $i = 1$. Daraus ergibt sich folgende Koeffizientenmatrix:

$$\det \begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_1 & \underline{\underline{M}}_{2,1} \\ \underline{\underline{0}}_{(2 \times 2)} & \underline{\underline{M}}_4 \end{bmatrix} = 0. \quad (2.111)$$

Die ausgewertete Determinante dieser Matrix ergibt folgende normierte Beulbedingung:

$$\left[\kappa_1 \frac{\sin\left(\kappa_2 \frac{m\pi}{\alpha_1}\right) \sin\left(\kappa_2 \frac{m\pi}{\alpha_2}\right)}{\sin\left(\kappa_2 \frac{m\pi}{\alpha}\right)} + \frac{\sinh\left(\kappa_2 \frac{m\pi}{\alpha_1}\right) \sinh\left(\kappa_2 \frac{m\pi}{\alpha_2}\right)}{\sinh\left(\kappa_2 \frac{m\pi}{\alpha}\right)} \right] \left(\frac{\gamma}{\alpha} (m\pi)^2 - \delta \bar{N}_{xx}^0 \pi^2 \alpha \right) + 4m\pi \sqrt{\left(\bar{N}_{xx}^0 \left(\frac{\alpha}{m} \right)^2 - 1 \right)^2 + \beta^2 \left(\bar{N}_{xx}^0 \left(\frac{\alpha}{m} \right)^2 - 1 \right)} = 0. \quad (2.112)$$

Laminat mit zentrischer Längssteife

Zur Veranschaulichung dient Abbildung 2.11 und stellt ein allseitig gelenkig gelagertes und zentrisch versteiftes Laminat unter uniaxialer Belastung dar.

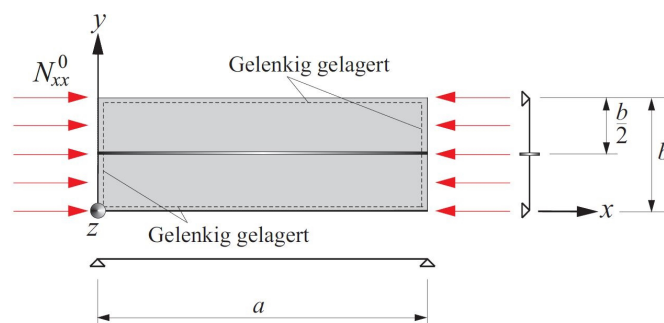


Abbildung 2.11: Zentrisch versteifte Laminatplatte, [3]

Liegt die Steife zentrisch, ergeben sich aus den Breiten der Teilfeder 1 und 2 die bezogenen Seitenverhältnisse:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}. \quad (2.113)$$

Diese führen zu einer Vereinfachung für die Beulbedingung, die es erlaubt, die trigonometrischen Funktionen zusammenzufassen. Die genutzten Additionstheoreme sind:

$$\sin(2f) = 2 \sin(f) \cos(f) , \quad (2.114)$$

$$\sinh(2f) = 2 \sinh(f) \cosh(f) , \quad (2.115)$$

$$\tan(f) = \frac{\sin(f)}{\cos(f)} \quad (2.116)$$

und

$$\tanh(f) = \frac{\sinh(f)}{\cosh(f)} . \quad (2.117)$$

Damit ergibt sich folgende Beulbedingung:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\gamma}{\alpha} (m\pi)^2 - \delta \bar{N}_{xx}^0 \pi^2 \alpha \right) \left[\kappa_1 \tan \left(\kappa_2 \frac{m\pi}{2\alpha} \right) + \kappa_2 \tanh \left(\kappa_1 \frac{m\pi}{2\alpha} \right) \right] \\ & + 4m\pi \sqrt{\left(\bar{N}_{xx}^0 \left(\frac{\alpha}{m} \right)^2 - 1 \right)^2 + \beta^2 \left(\bar{N}_{xx}^0 \left(\frac{\alpha}{m} \right)^2 - 1 \right)} = 0 . \end{aligned} \quad (2.118)$$

Mit dieser Formel kann die Beullast numerisch berechnet um anschließend als Bemessungskurve abgebildet zu werden. Dabei können, durch variieren der Parameter, verschiedene Fälle der einfach zentrisch versteiften Platte dargestellt werden. Auf die selbe Art lassen sich die transzendenten Beulbedingungen für unterschiedliche Modelle herleiten.

3 Auswertung der Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse aus den analytischen Lösungen dargestellt und gedeutet. Zur besseren Übersicht und für das einfachere Verständnis werden einige bereits erwähnte Formeln an gegebener Stelle erneut aufgeführt.

Zunächst soll jedoch erläutert werden, wie Bemessungskurven, die durch ihre Form auch Girlandenkurven genannt werden, aufgebaut sind.

In Abbildung 3.1 sind Beulkurven eines unversteiften Laminates für jeweils eine Halbwelle über die Länge m abgebildet. Jede Kurve repräsentiert somit eine Beulform, die auch Modus genannt wird. Folglich wird der Wechsel von einer Beulform in die nächste als Modenwechsel bezeichnet. Dabei erhöht sich die Anzahl der Halbwellen um eins. Zur einfacheren Unterscheidung und Verdeutlichung der Girlandenform sind sie farbig dargestellt.

In den Bemessungsdiagrammen ist nur die Belastungsgrenze von Bedeutung, da das Beulen bei dieser Last einsetzt. Welche Beulform vorliegt, also aus wie vielen Halbwellen die Verformung besteht, hat keine Relevanz. Daher werden bloß die niedrigsten Kurvenbereiche aus allen Kurven beachtet und, wie in Abbildung 3.2 dargestellt, zu einer Girlandenkurve zusammengefasst.

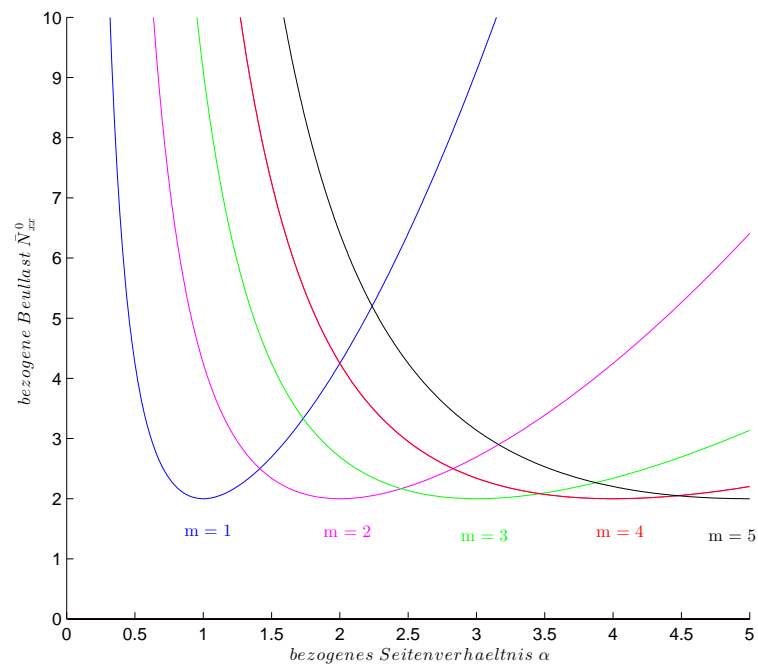
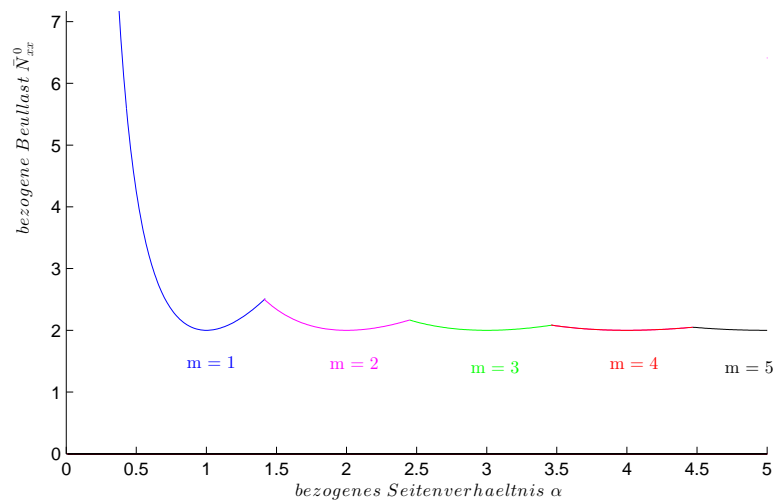
Abbildung 3.1: Kurven mit unterschiedlicher Halbwellenzahl m 

Abbildung 3.2: Girlandenkurve

Beim Vergleich der beiden Diagramme wird deutlich, welche Segmente für den Aufbau einer Girlandenkurve nötig sind. Die Anzahl der Halbwellen sind dann über die lokalen Minima abzählbar und werden im weiteren Verlauf nicht angegeben.

3.1 Die unversteifte Platte

Bei der unversteiften Platte, in Abbildung 2.7 dargestellt, bedient man sich der Lösung nach Navier (2.53):

$$\bar{N}_{xx}^0 = \left(\frac{m}{a}\right)^2 + 2\beta + \left(\frac{\alpha}{m}\right)^2 .$$

In Abbildung 3.3 sind die Girlandenkurven und deren asymptotische Grenzwerte einer unversteiften Platte dargestellt. Der Wert der Kreuzzahl β verläuft dabei von 0 bis 3 in Schritten von 0,5. Und auch die Zählweise verläuft in der Abbildung von unten nach oben.

Wie in der Beulbedingung erkennbar ist, unterscheiden sich die Ergebnisse nur in der Kreuzzahl β , welche deren Lage in der Ordinate beeinflusst. Dabei wird deutlich, dass, wie in Kapitel 2.4.3 bereits festgestellt, die Kurve sich einem asymptotischen Grenzwert nähert und dieser nie unterschritten wird. Dieser asymptotische Grenzwert wird festgelegt durch die Formel (2.58)

$$\bar{N}_{xx}^0 = 2(1 + \beta) .$$

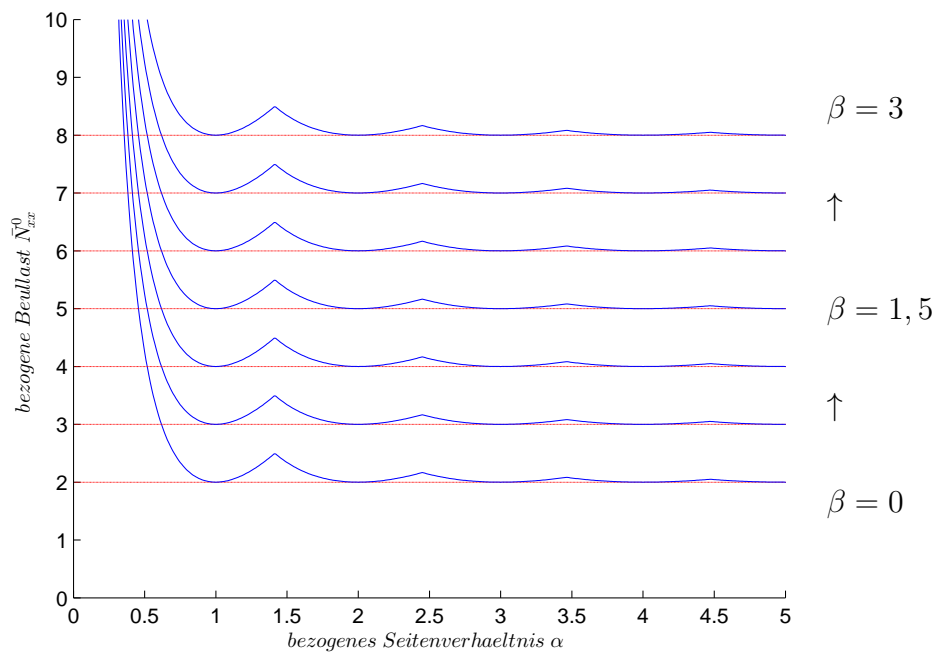


Abbildung 3.3: Girlandenkurven mit unterschiedlichem Parameter β und asymptotischem Grenzwert bei unversteiften Laminaten

Zum Vergleich und zur Verifizierung dient die Abbildung 3.4, bei der auch der asymptotische Grenzwert abgebildet ist.

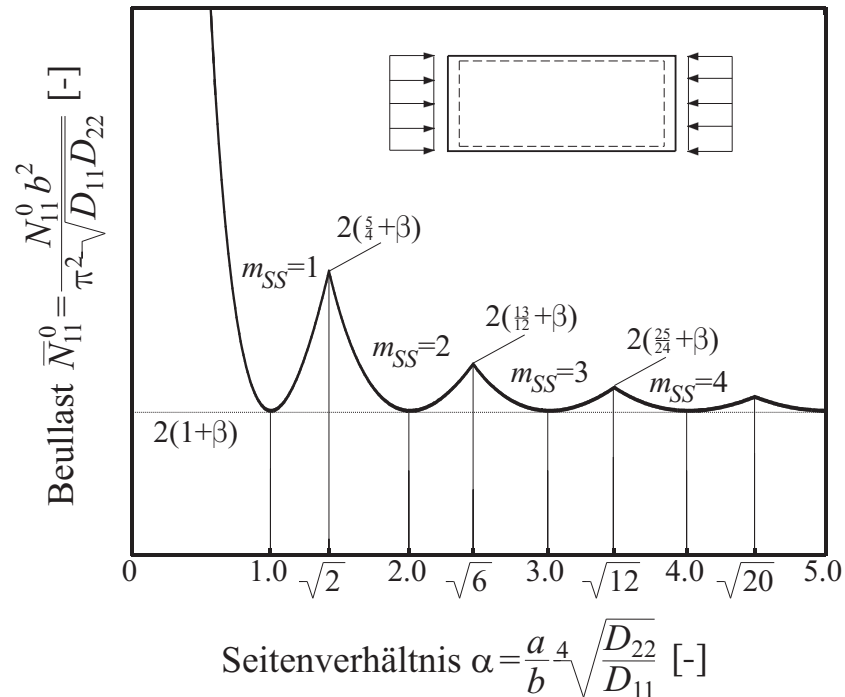


Abbildung 3.4: Girlandenkurve mit asymptotischem Grenzwert von unversteiftem Laminat, [3]

Diese Kurven stellen, durch die Tatsache, dass sie keine bezogene Biegesteifigkeit besitzen, also $\gamma = 0$ ist, die untere Grenze der Bemessungskurven in Kapitel 3.4 dar. Es ist zu erkennen, dass nach Formel (2.59) an den Stellen $\alpha = m$ die lokalen Minima liegen. Die Positionen der Modenwechsel sind nach der Formel (2.57)

$$\alpha = \sqrt{m^2 + m}$$

im vorangegangenen Kapitel beschrieben.

Sie stellen gleichzeitig die lokalen Maxima dar, mit den bezogenen Belastungen nach Formel (2.58):

$$\bar{N}_{xx}^0 = 2 \left[\frac{1}{m+1} \left(m + \frac{1}{2m} + 1 \right) + \beta \right].$$

3.2 Die antimetrische Beulform

In Abbildung 3.2 sind die Girlandenkurven der antimetrischen Beulformen dargestellt. Die Darstellungs- und Zählweise ist wie im Abschnitt zuvor. Die Kreuzzahl β verläuft also von 0 bis 3 in Schritten von 0,5. Gezählt wird, wie dargestellt, von unten nach oben. Ein Vergleich dieser Kurven mit bereits vorhandenen folgt in Kapitel 3.4 bei den jeweiligen Ergebnissen der einfach versteiften Laminatplatte.

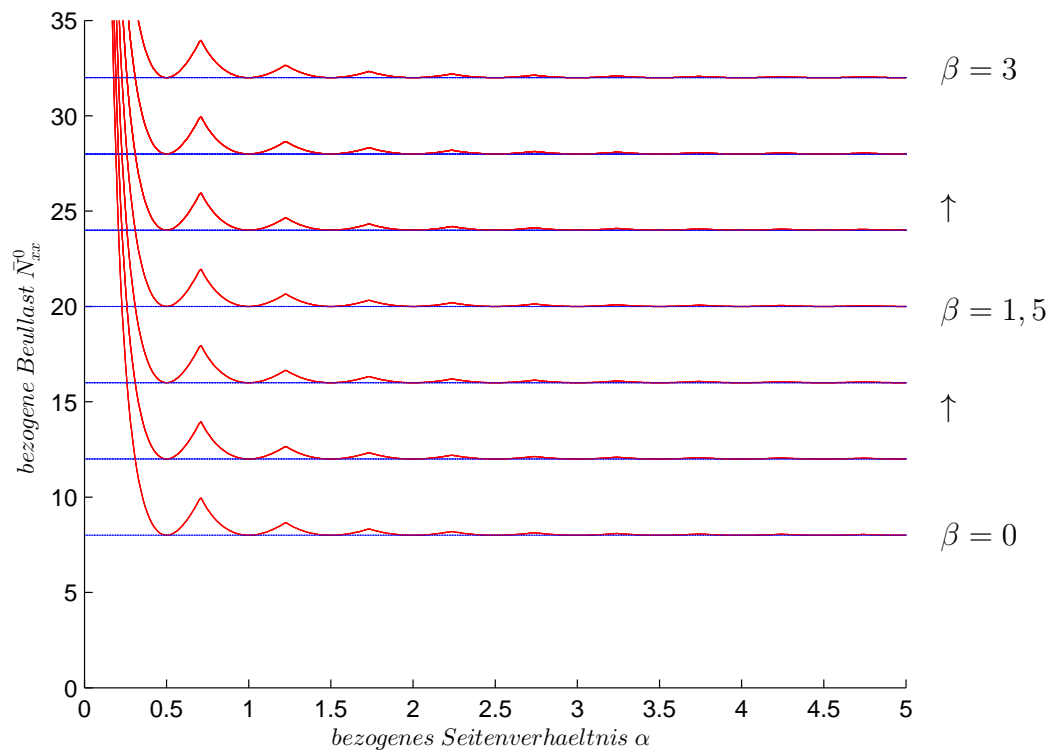


Abbildung 3.5: Girlandenkurven mit unterschiedlichem Parameter β und asymptotischem Grenzwert

Diese Verformungsart ist für das Beulverhalten besonders wichtig, da sie mit lokalem Beulmuster die obere Grenze darstellt. Dabei ist die generalisierte Biegesteifigkeit $\gamma = \infty$. Es ist zu erkennen, dass die lokalen Minima in Schritten von 0,5 auftreten. Zu berechnen nach Formel (2.60):

$$m = 2\alpha .$$

Die Modenwechsel liegen nach Formel (2.61) bei

$$\alpha = \frac{\sqrt{m^2 + m}}{2},$$

mit der bezogenen Beullast nach Gleichung (2.62)

$$\bar{N}_{xx}^0 = 8 \left[\frac{1}{m+1} \left(m + \frac{1}{2m} + 1 \right) + \beta \right].$$

Der asymptotische Grenzwert dieser Kurven liegt nach Formel (2.63) bei

$$\bar{N}_{xx}^0 = 8(1 + \beta).$$

3.3 Parameterstudie

Weil der gesuchte Parameter, die normierte Beullast \bar{N}_{xx}^0 , nur numerisch lösbar ist und die Beulbedingung durch die trigonometrischen Funktionen unendlich viele Lösungen hat, dient die Software MATLAB zur Berechnung und Erzeugung der Bemessungsdiagramme. Das gesamte MATLAB-Skript ist im Anhang A zu finden. Zur Generierung einer Girlandenkurve sind im Durchschnitt etwa 250 Sekunden Berechnungsdauer nötig. Zum Lösen wurde der Befehl *vpasolve* genutzt, der zur iterativen Suche eine Vorgabe für den Startwert benötigt. Zu diesem Zweck wird eine Parameterstudie durchgeführt, wobei der Bereich zwischen dem oberen und unteren Grenzwert der gesuchten Kurve, also den asymptotischen Grenzwerten der unversteiften und der unendlich versteiften Laminatplatte variiert. Die asymptotischen Grenzwerte liegen bei gleicher Kreuzzahl β , nach (2.58) und (2.63), um den Faktor 4 auseinander. Deshalb werden die Ergebnisse der einzelnen Werte mit den Faktoren $c = 1$ bis $c = 4$ multipliziert und als Startwerte für die Suche vorgegeben. Zur kürzeren Berechnungsdauer werden die Ergebnisse von einer Halbwelle über die Länge $m = 1$ dargestellt. Es werden exemplarisch nur einige Kurven dargestellt und miteinander verglichen, wobei noch zu erwähnen ist, dass hier die antisymmetrisch Beulform und die resultierende Grenze nicht berücksichtigt wird.

Die Abbildungen 3.6 und 3.7 zeigen die Halbwellenkurven mit den Parametern $\beta = 0$, $\gamma = 100$ und dem Faktor $c = 1$ bzw. $c = 4$. Es ist zu erkennen, dass die Kurve in Abbildung 3.7 Sprünge macht und ab einem Wert von etwa $\alpha = 4,5$ abfällt. Die Kurve in Abbildung 3.6 hingegen verläuft ohne Sprünge und steigt im Verlauf weiter

an. Aus diesen Ergebnissen wird als Startwert für den Befehl *vpasolve* die Gitterkurve der unversteiften Platte gewählt.

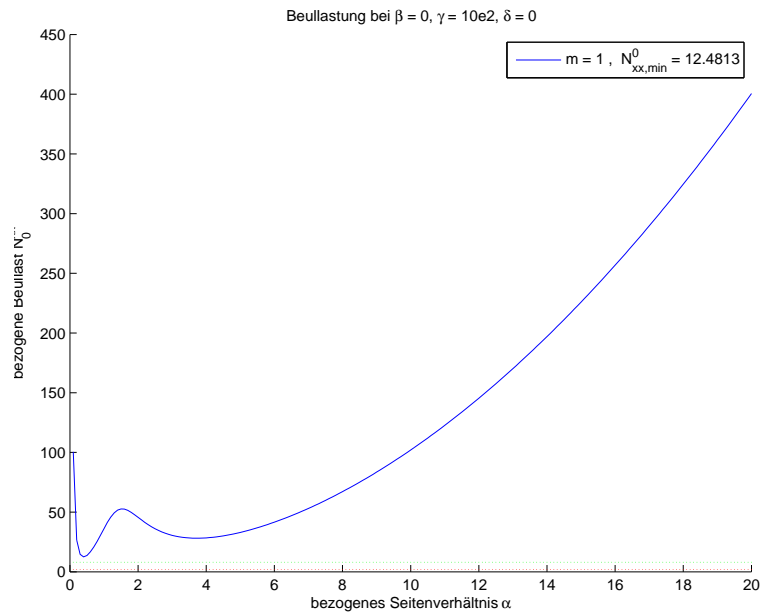


Abbildung 3.6: Halbwellenkurve mit $\gamma = 10^2$ und Faktor $c = 1$

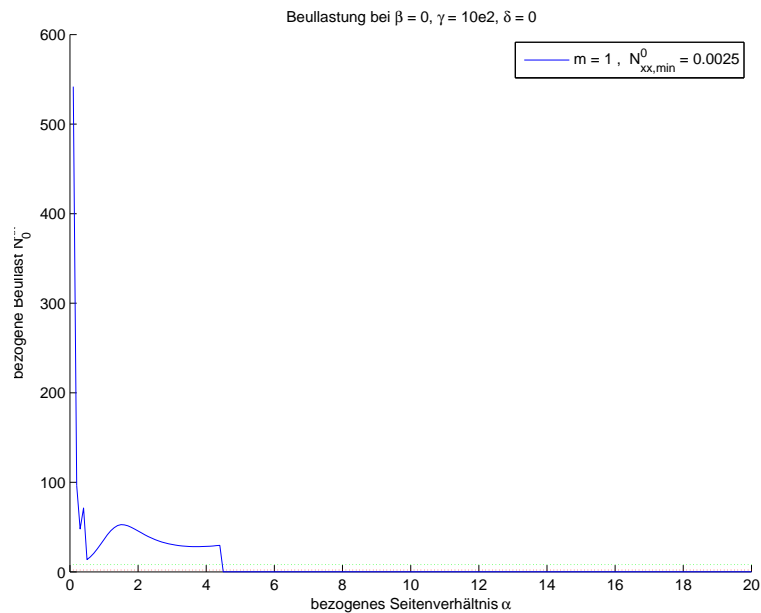


Abbildung 3.7: Halbwellenkurve mit $\gamma = 10^2$ und Faktor $c = 4$

3.4 Die einfach zentrisch versteifte Platte

Die generierten Ergebnisse für eine zentrisch versteifte Platte sind hier in Form von Girlandenkurven abgebildet. Die verwendeten Farben symbolisieren bei allen Diagrammen durchgehend die unterschiedlichen Steifigkeiten als bezogene Biegesteifigkeit γ und wurden aus den vorangehenden Abschnitten dieses Kapitels übernommen. Die in der Farbe Cyan beschriebenen Kurven stehen für unterschiedliche ganzzahlige Werte für die bezogenen Biegesteifigkeiten γ . Die Zählweise ist mit steigendem γ von unten nach oben, wobei im Verlauf und mit ansteigender Kreuzzahl β auch unterschiedliche Schrittweiten auftreten.

Bei Erhöhung der Biegesteifigkeit verschieben sich die Kurven nach oben und werden zudem auch flacher. Dies wird in Abbildung 3.8 dargestellt. Die Kurve der unversteiften Platte ist dabei eine Einhüllende und bildet, wie bereits erwähnt, die unterste Grenze. Dies gilt natürlich nur bei Kurven mit gleicher Halbwellenzahl.

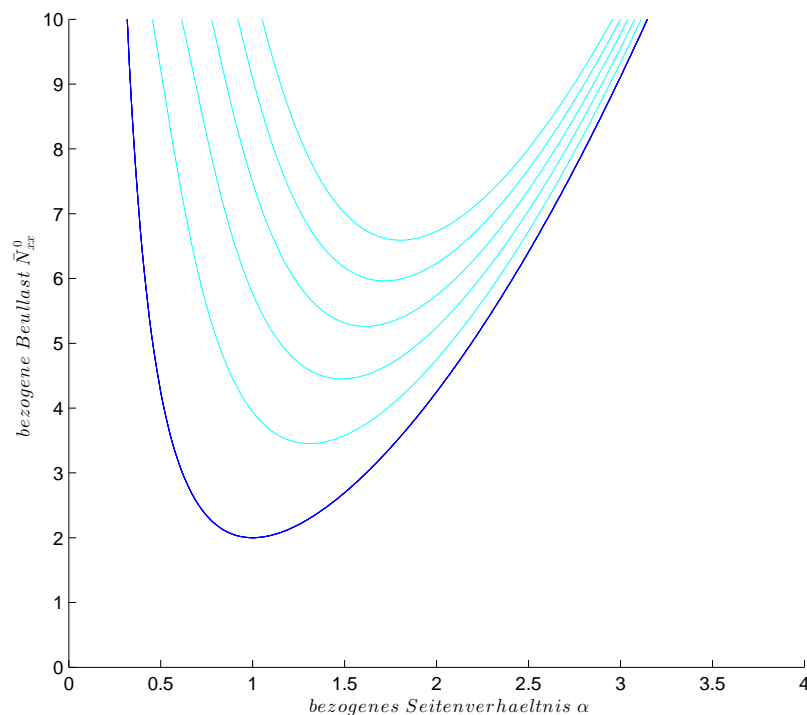


Abbildung 3.8: Beulkurven bei Laminat mit unterschiedlichen γ bei Halbwellenzahl $m = 1$

Die Girlandenkurven der unversteiften Laminatplatte und der antimetrischen Beulform wurden bereits ausreichend in den vorangegangenen Abschnitten erläutert. Daher wird die Aufmerksamkeit nun auf die Kurven gerichtet die dazwischen liegen.

Bemessungskurven mit Kreuzzahl $\beta = 0$

Die Abbildung 3.9 zeigt die Girlandenkurven einer Laminatplatte mit dem Parameter $\beta = 0$. Wie bereits angemerkt, steht die dunkelblaue Kurve für die unversteifte Platte und die rote für die antimetrische Beulform der versteiften Platte. Bei diesen Kurven handelt es sich um die selben Kurven aus den Abbildungen 3.3 und 3.5 Die cyanfarbenen gehören zu Laminaten mit unterschiedlichem γ .

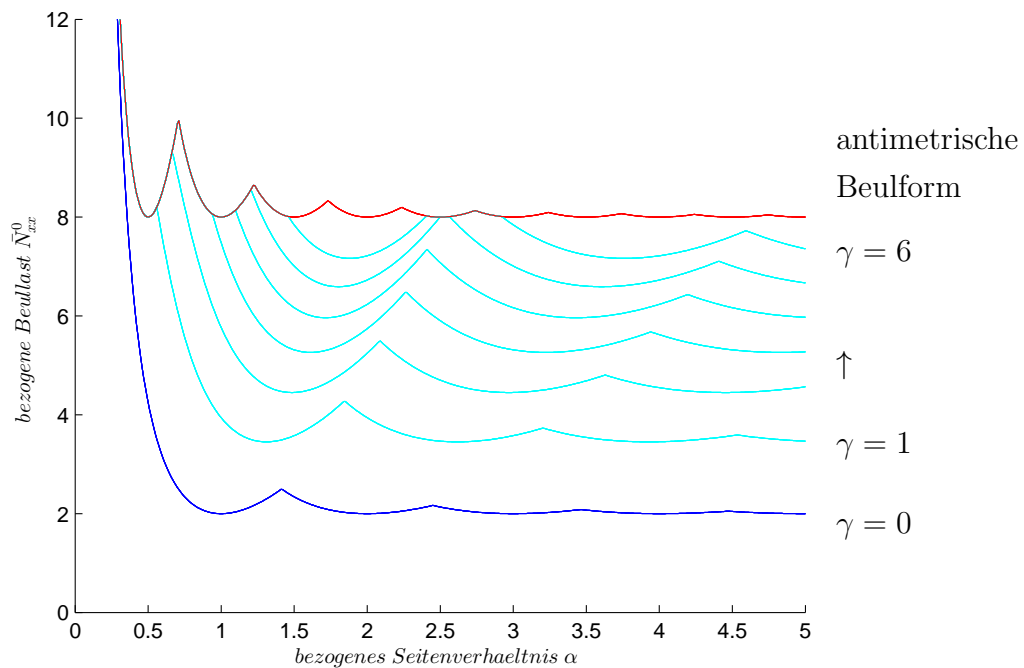


Abbildung 3.9: Generierte Bemessungskurven mit Kreuzzahl $\beta = 0$ und $\gamma = \{1, 2, 3, \dots, 6\}$

Die bezogene Beullast \bar{N}_{xx}^0 wird, ausgehend vom ersten Minimum, bei kleiner werdendem bezogenem Seitenverhältnis α immer größer und strebt gegen unendlich,

wenn α gegen Null geht. Erkennbar ist, wie bereits in Kapitel 3.2 erläutert, dass die antimetrische Beulform als obere Grenze dient und dessen asymptotische Grenzwert nach Gleichung (2.63) bei $\bar{N}_{xx}^0 = 8$ liegt. Dieser Grenzwert liegt vier mal höher als der der unversteiften Kurve, der nach Gleichung (2.58) bei $\bar{N}_{xx}^0 = 2$ liegt. Der Verlauf der Kurven mit verschiedenen bezogenen Biegesteifigkeiten erhöht sich mit steigendem γ . Dadurch steigert sich der Widerstand gegen die Verformung und somit auch die Beulbelastung.

Die Girlandenkurve mit $\gamma = 1$ verläuft zu Beginn auf der roten Kurve. Das bedeutet, dass bei Erreichen der Beulbelastung die antimetrische Form mit einer Halbwelle über die Länge $m = 1$ hervorgerufen wird. Wenn sie sich kurz nach dem Minimum absenkt, wird aus dem lokalen eine globales Beulmuster. Die Halbwellenzahl über die Breite ändert sich dabei von $n = 2$ zu $n = 1$. Beide Beulmuster weisen aber immer noch die gleiche Halbwellenzahl über die Länge $m = 1$ auf. Die folgenden Beulmuster verlaufen unterhalb der antimetrischen Beulform und sind somit global. Am nächsten Maximum kommt es zu einem Modenwechsel und die Halbwellenzahl ändert sich von $m = 1$ zu $m = 2$. Bei den anderen Girlandenkurven ist der Verlauf des Beulverhaltens genauso abzulesen. Für eine genauere Betrachtung ist die oberste cyanfarbene Girlandenkurve mit einer bezogenen Biegesteifigkeit von $\gamma = 6$, die bei etwa $\alpha = 1,5$ in ein globales Beulmuster übergeht. An dieser Stelle besitzt die Platte ein Beulmuster mit $m = 3$ Halbwellen über die Länge und $n = 2$ Halbwellen über die Breite. Beim Wechsel von einem lokalen zu einem globalen Beulmuster ändert sich die Halbwellenzahl über die Länge von $m = 3$ zu $m = 1$. Zur Erklärung wird auf Abbildung 3.8 zurückgegriffen. Die Anzahl der Halbwellen ist auf diese Art über die Einhüllende, also der Kurve der unversteiften Platte, ablesbar.

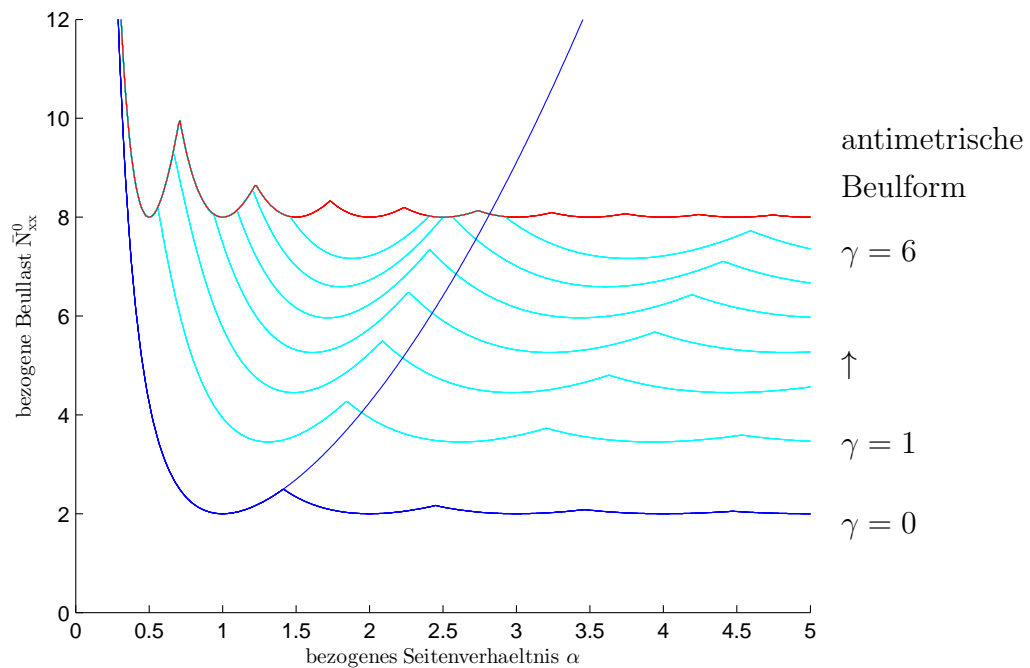


Abbildung 3.10: Generierte Bemessungskurven mit Kreuzzahl $\beta = 0$,
 $\gamma = \{1, 2, 3, \dots, 6\}$ und gesamter Beulkurve für unversteifte Platte
mit Halbwellenzahl $m = 1$

Zum Vergleich der erstellten Bemessungskurven dient Abbildung 3.11, in der die Verläufe oberhalb der antisymmetrischen Beulform gestrichelt dargestellt sind. In dieser Arbeit sind entsprechende Kurven und Kurvenabschnitte nicht bearbeitet worden und sind daher zu vernachlässigen. Genauso die Kurven mit Werte für die bezogene Dehnsteifigkeit $\delta \neq 0$.

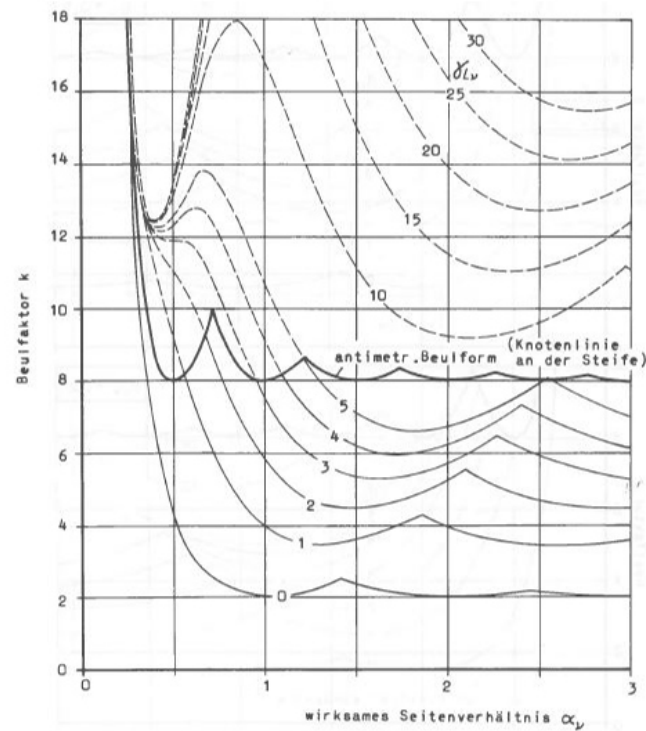


Abbildung 3.11: Bemessungskurven mit Kreuzzahl $\beta = 0$, [4].

Da nun alle wesentlichen Verläufe und markanten Stellen, durch die allgemeine Gültigkeit auf übrige Bemessungsdiagramme, erläutert sind, werden im weiteren Vorgehen nur die Diagramme beschrieben.

Bemessungskurven mit Kreuzzahl $\beta = 0,5$

Im Diagramm der Abbildung 3.10 sind die Bemessungskurven für Laminatplatten mit der Kreuzzahl $\beta = 0,5$. Die bezogene Biegesteifigkeit nimmt dabei Werte von $\gamma = 1$ bis $\gamma = 6$ und von $\gamma = 8$ bis $\gamma = 12$ in Schritten von 2 an.

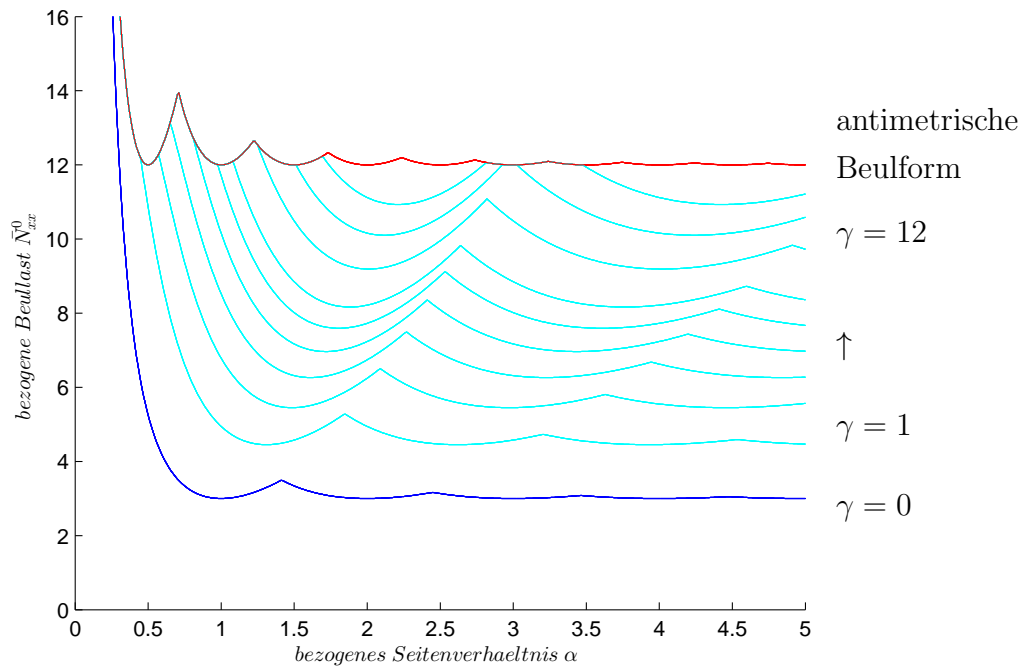
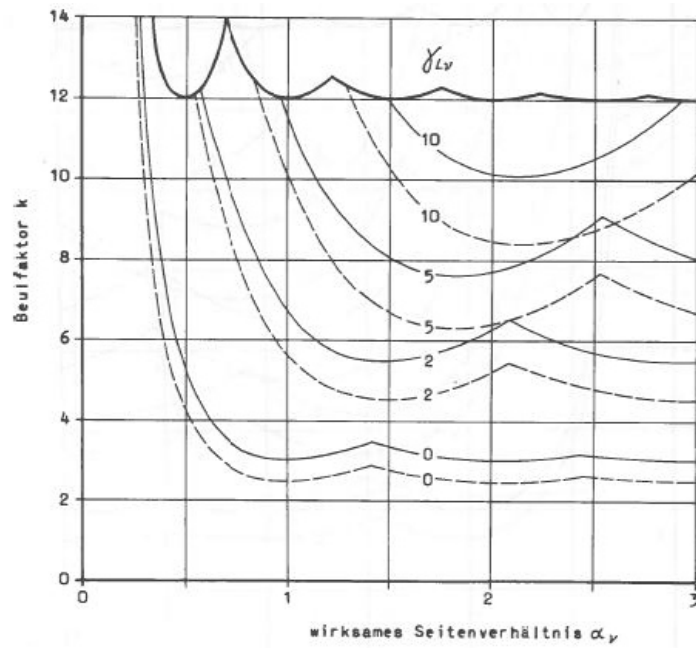


Abbildung 3.12: Generierte Bemessungskurven mit Kreuzzahl $\beta = 0,5$ und $\gamma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$

Die asymptotischen Grenzwerte der unversteiften und der unendlich versteiften Platte unterscheiden sich auch hier um den Faktor 4 und liegen im unteren Bereich des Diagramms bei $\bar{N}_{xx}^0 = 3$ und im oberen bei $\bar{N}_{xx}^0 = 12$. Es fällt auf, dass die Kurven sich nach Erhöhung der Kreuzzahl β , im Vergleich zu den Kurven aus Abbildung 3.7, nach oben verschoben haben.

Auch für diese Ergebnisse gibt es ein Vergleichsdiagramm (s. Abb. 3.13) über das die Übereinstimmungen überprüft werden können.

Abbildung 3.13: Bemessungskurven mit Kreuzzahl $\beta = 0,5$, [4].

Bemessungskurven mit Kreuzzahl $\beta = 1$

Der Parameter für die bezogene Biegesteifigkeit γ wurde zur Generierung der Bemessungskurven in Abbildung 3.12 nach den Vorgaben aus der Abbildung 3.15 gewählt, wobei es hauptsächlich um die Übersicht beim späteren Vergleich geht.

Die bezogene Biegesteifigkeit verläuft von $\gamma = 2$ bis $\gamma = 20$ mit einer Schrittweite von 2. Die Kreuzzahl hat den Wert $\beta = 1$.

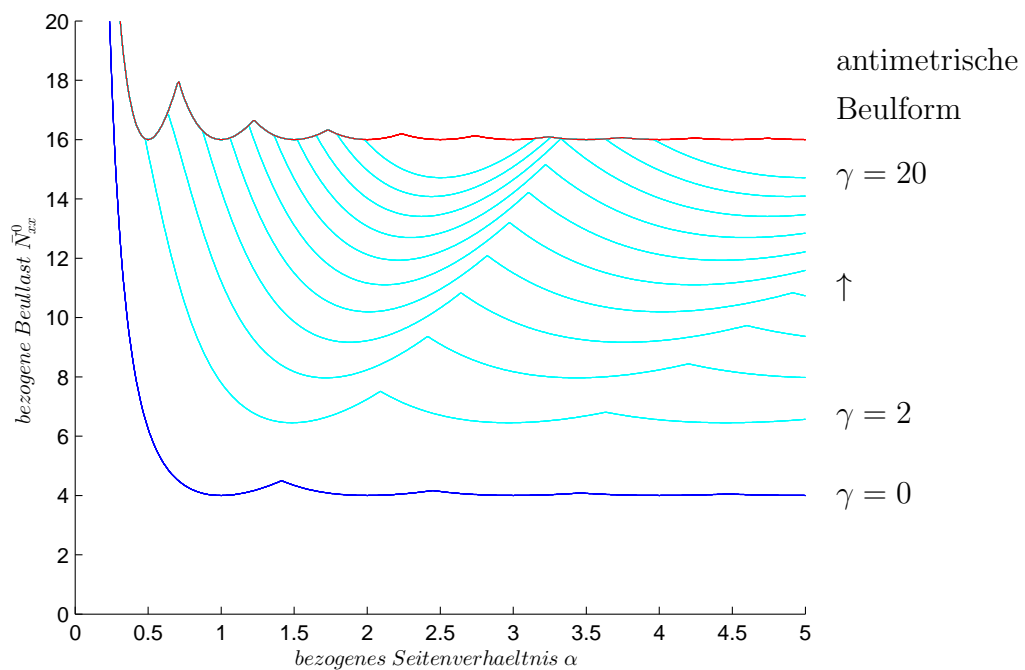


Abbildung 3.14: Generierte Bemessungskurven mit Kreuzzahl $\beta = 1$ und $\gamma = \{2, 4, 6, 8, \dots 20\}$

Durch $\beta = 1$ liegen die unteren asymptotischen Grenzwerte, also bei der unversteiften Platte, bei $\bar{N}_{xx}^0 = 4$ und oben bei $\bar{N}_{xx}^0 = 16$. Zum Vergleich der Bemessungskurven dient Abbildung 3.15.

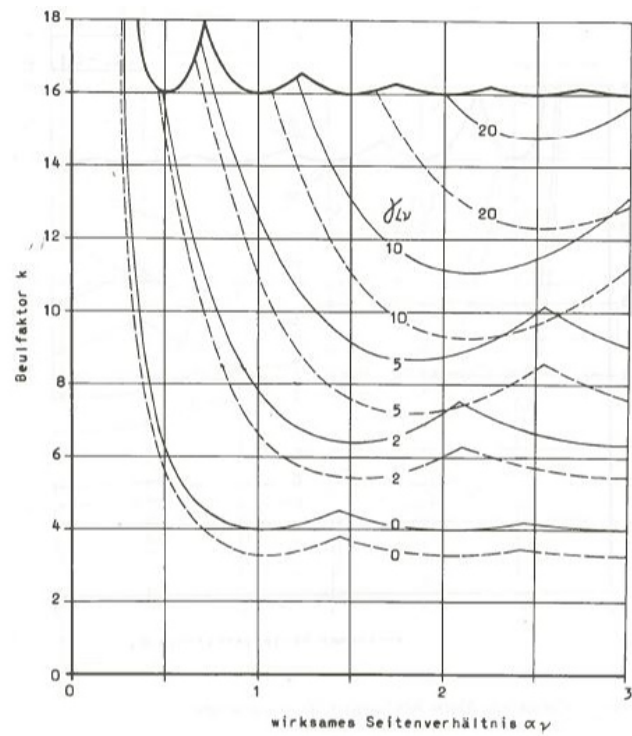


Abbildung 3.15: Bemessungskurven mit Kreuzzahl $\beta = 1$, [4].

Bemessungskurven mit Kreuzzahl $\beta = 1,5$

Die bezogene Biegesteifigkeit nimmt in Abbildung 3.14 Werte von $\gamma = 1$ bis $\gamma = 5$ und $\gamma = 10$ bis $\gamma = 30$ mit der Schrittweite 5 an. Die Kreuzzahl hat für diese Kurven den Wert $\beta = 1,5$.

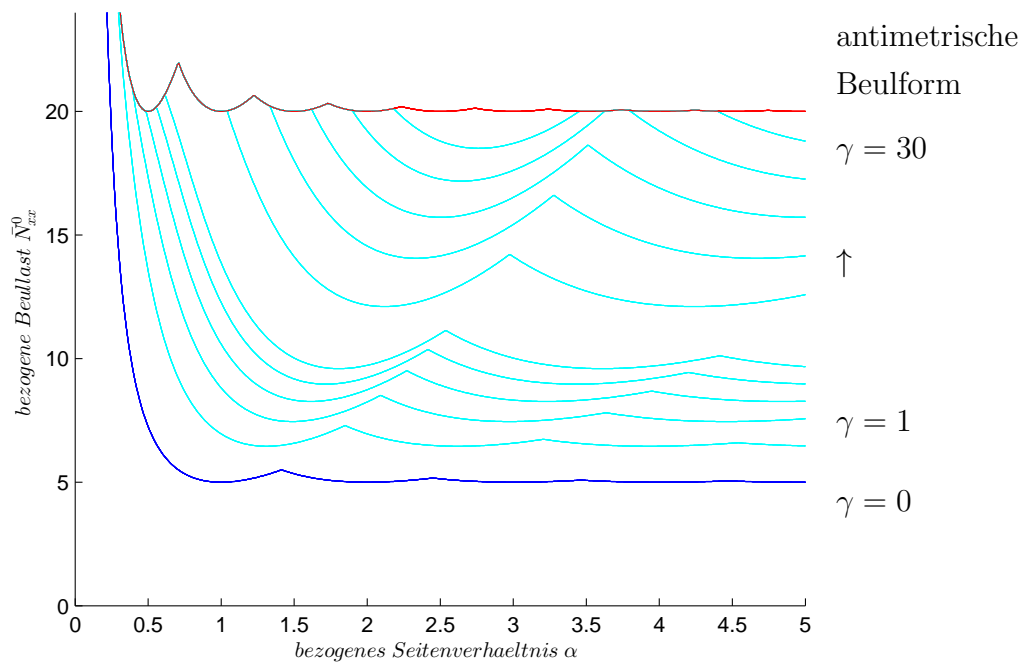
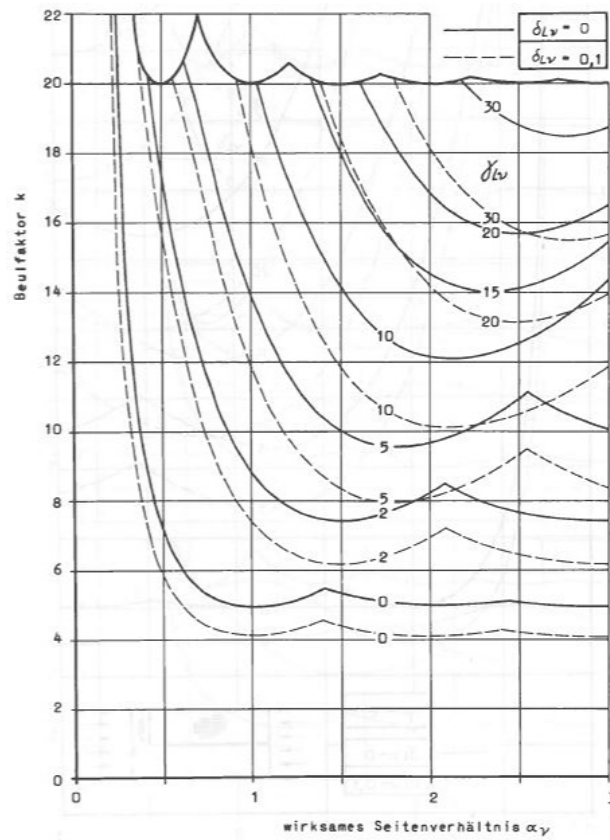


Abbildung 3.16: Generierte Bemessungskurven mit Kreuzzahl $\beta = 1,5$ und $\gamma = \{1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 20, 25, 30\}$

Die asymptotischen Grenzen liegen für den oberen Bereich bei $\bar{N}_{xx}^0 = 20$ und für den unteren bei $\bar{N}_{xx}^0 = 5$. Auch hier wird der vierfache Abstand der Werte dargestellt. Beim Vergleich mit Diagramm (Abb. 3.17), zeigt sich bei den Ergebnissen eine erneute Übereinstimmung mit den generierten Kurven.

Abbildung 3.17: Bemessungskurven mit Kreuzzahl $\beta = 1,5$, [4].

Bemessungskurven mit Kreuzzahl $\beta = 2$

Die Kreuzzahl hat in folgender Abbildung 3.16 den Wert $\beta = 2$. Die bezogene Beullast verläuft dabei von $\gamma = 1$ bis $\gamma = 5$ und von $\gamma = 10$ bis $\gamma = 40$ mit einer Schrittweite von 10.

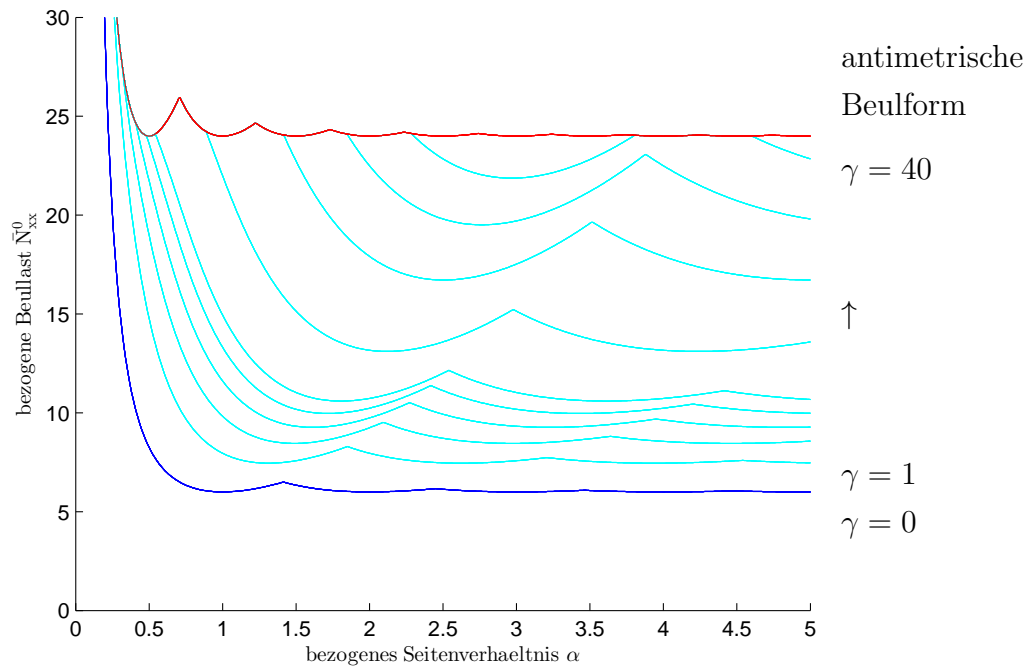


Abbildung 3.18: Generierte Bemessungskurven mit Kreuzzahl $\beta = 2$ und $\gamma = \{1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 30, 40\}$

Das in Abbildung 3.19 befindliche Diagramm stellt die Bemessungskurven für die Fälle $\beta = 2$ mit den unterschiedlichen γ dar. Die Kurven aus den durchgezogenen Linien stimmen mit den für diese Arbeit Generierten überein.

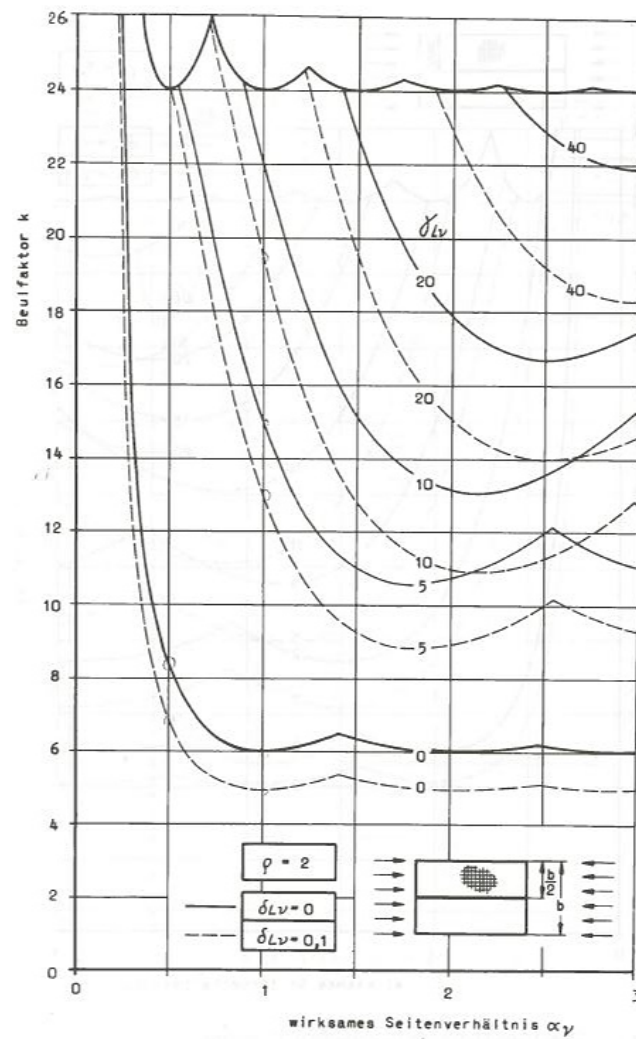


Abbildung 3.19: Bemessungskurven mit Kreuzzahl $\beta = 2$, [4].

Für die noch folgenden Bemessungskurven liegen keine Vergleichskurven vor.

Bemessungskurven mit Kreuzzahl $\beta = 2,5$

Die Bemessungskurven, die in Abbildung 3.19 dargestellt sind, haben die Kreuzzahl $\beta = 2,5$. Der Parameter γ nimmt, für den unteren Bereich des Diagrammes, Werte von 1 bis 5 und für den oberen Werte von 10 bis 50 im Abstand von 10 an.

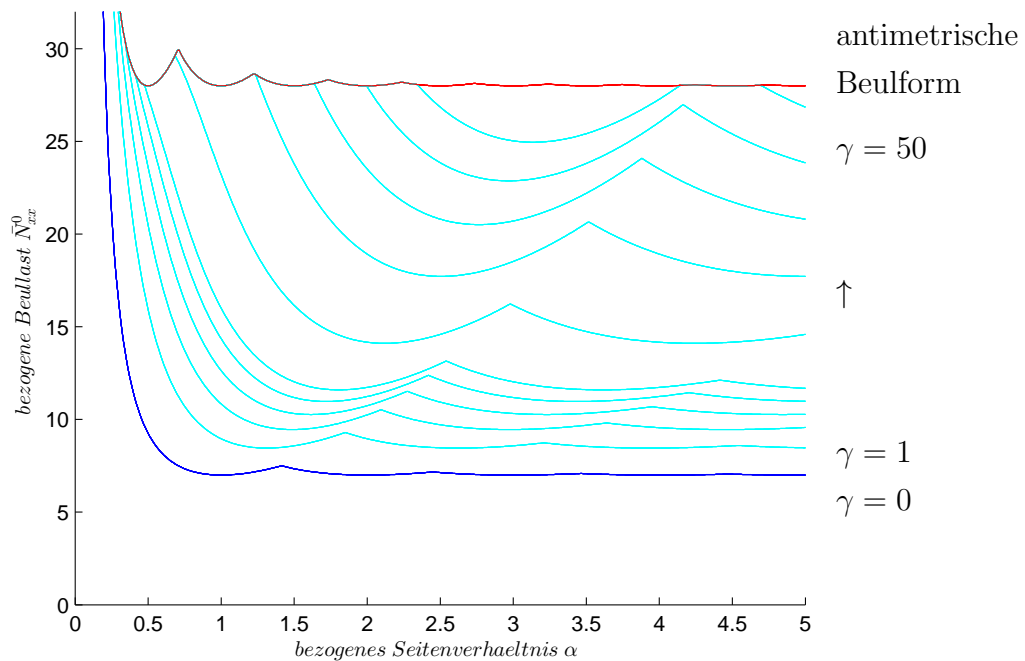


Abbildung 3.20: Generierte Bemessungskurven mit Kreuzzahl $\beta = 2,5$ und $\gamma = \{1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 30, 40, 50\}$

Bemessungskurven mit Kreuzzahl $\beta = 3$

Im letzten Fall hat die Kreuzzahl den Wert $\beta = 3$. Die bezogene Biegesteifigkeit verläuft von $\gamma = 1$ bis $\gamma = 5$ und von $\gamma = 10$ bis $\gamma = 70$ mit einer Schrittlänge von 10.

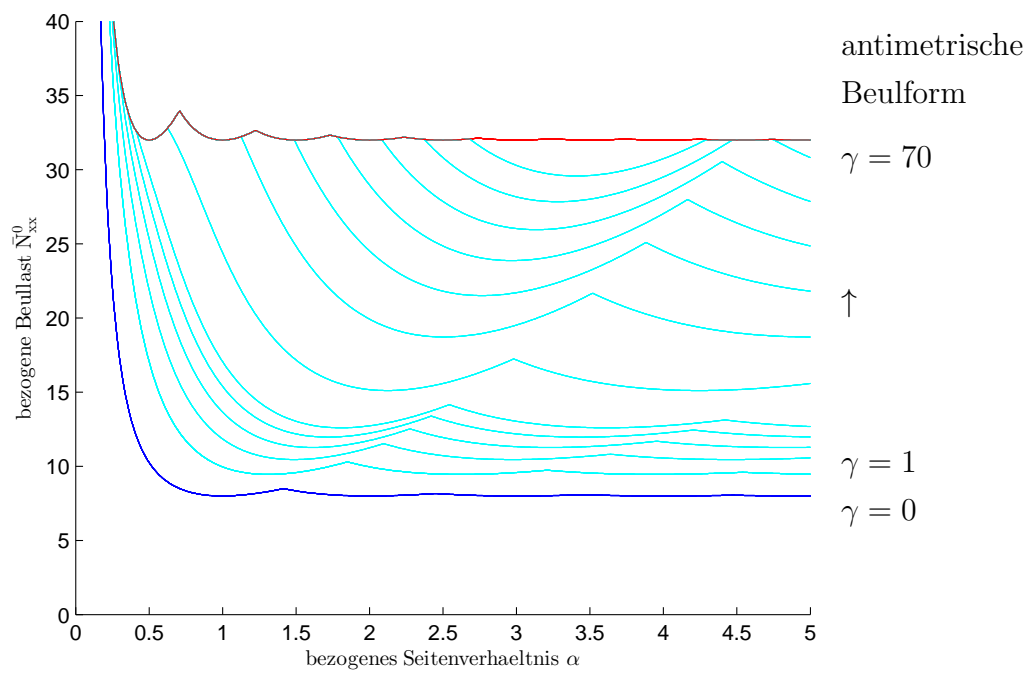


Abbildung 3.21: Generierte Bemessungskurven mit Kreuzzahl $\beta = 3$ und $\gamma = \{1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 30, \dots, 70\}$

4 Zusammenfassung und Ausblick

4.1 Zusammenfassung

Mit Hilfe der Navierschen Lösungen wurden die Beulbedingungen für eine unversteifte (2.53) und eine unendlich versteifte Laminatplatte (2.52) in normierter Form analytisch gelöst und für verschiedene Parameter graphisch dargestellt (Abb. 3.3 und 3.5). Mit den Lévy'schen Lösungen wurden die Rand- und Übergangsbedingungen für eine einfach zentrisch versteifte Platte zunächst aufgestellt und ausgewertet. Hieraus konnte dann ein homogenes Gleichungssystem aufgestellt werden, um daraus die transzendente Beulbedingung (2.118) zu gewinnen. Jedoch war es während dieser Arbeit nicht möglich, die Determinante der aufgestellten Matrix zu lösen. Die verwendeten Programme MATLAB und MAPLE konnten in der Bearbeitungsdauer keine verwertbaren Ergebnisse liefern. Mögliche Ursachen könnten sein, dass selbst kleine Schreib- oder Vorzeichenfehler zu komplizierten Ergebnissen führen können. So hat die Software MAPLE, welche für symbolische Rechenoperationen geeignet ist, die teilweise seitenlangen Terme nicht zusammenfassen können. MATLAB hingegen bietet bei der Ergebnisdarstellung keine gute Übersichtlichkeit, denn die Lösungen werden in einer Zeile ausgegeben. Bei langen Ausgaben erschwert dies die Identifizierung der einzelnen Terme. Die Lösung erbrachte der Vergleich der ausgewerteten Rand- und Übergangsbedingungen zwischen den Schreibweisen. Dabei wurden die einheitenbehafteten Rand- und Übergangsbedingungen aus [3] in die dimensionslose Schreibweise überführt und denen in normierter Schreibweise hergeleiteten gegenüber gestellt. Die Tatsache, dass diese identisch sind, führt zur Schlussfolgerung, dass die Überführung der Beulbedingung aus [3] in die einheitenlose Form die gesuchte Beulbedingung liefert. Den abschließenden Beweis liefert die Übereinstimmung der generierten Bemessungsdiagramme mit den Referendiagrammen [4].

Um die Qualität der graphischen Ergebnisse zu überprüfen, wurde eine Parameterstudie durchgeführt, in der ein variierender Faktor den Startwert bei der iterativen Suche beeinflusst. Dies führt zum Ergebnis, dass die Funktion für die Beulbedingung der unversteiften Platte zu den korrekten Ergebnissen führt (Abb. 3.6).

Vorhandene Diagramme aus einer Zeitschrift des VDI [4] bestätigen die Richtigkeit der generierten Kurven und der Vorgehensweise. Darüber hinaus wurden weitere Diagramme (3.18 und 3.19) erzeugt, die dort nicht enthalten sind, jedoch als korrekt angenommen werden können.

Aus den Ergebnisse ist ersichtlich, dass eine biegesteifere Steife, also mit ansteigendem γ , erst bei einer höheren bezogene Beullast verformt wird. Ist die bezogene Biegesteifigkeit groß genug, erreicht die Bemessungskurve die antimetrische Form und führt, ohne ein globales Belmuster anzunehmen, zum bevorzugten lokalen Beulen.

4.2 Ausblick

Auf die selbe Art und Weise, wie sie in dieser Arbeit beschrieben ist, können weitere Beulbedingungen hergeleitet und für verschiedene Fälle und somit Laminatgruppen dargestellt werden. Zur Variation stehen jegliche hier angegebenen Parameter zur Verfügung. So können verschiedene Versteifungsarten miteinander kombiniert und behandelt werden und die Anzahl an Steifen und deren Position verändert werden. Es besteht auch die Möglichkeit die Materialeigenschaften und den Lagenaufbau des Laminats zu verändern um somit ein breites Feld an Bemessungskurven zu erhalten. Trotz der begrenzten Wertebereiche einiger dimensionslosen Parameter, ist es dennoch möglich daraus eine immense Anzahl an Kombinationen und damit Ergebnismengen zu produzieren. In dieser Arbeit sind allseitig gelenkige Laminatplatten untersucht worden. So wäre zudem noch zu untersuchen, wie sich unterschiedliche Lagerungsarten auf die Randbedingungen und folglich die transzendente Beulbedingung auswirken.

Bei der vorangehenden Entwicklung der Beulbedingung ist eine Software zu empfehlen, die bei der Berechnung behilflich ist, da der Rechenaufwand immer größer wird, je mehr Versteifungen an einer Laminatplatte wirken. Die Software sollte übersichtlich bei der Ein- und Ausgabe der Werte sein und die Rechnung Schrittweise durchführen, wie etwa der der Debug-Modus in MATLAB. Dadurch wäre die

Fehlersuche erheblich vereinfacht. Zu beachten ist, dass schon bei einer vorhandenen Steife die quadratische Matrix (2.102) bereits aus sechs Zeilen und Spalten besteht und bei jeder zusätzlichen Steife, durch vier neue Übergangsbedingungen, die Matrix um vier Spalten und Zeilen erweitert wird.

Des Weiteren können die erstellten Bemessungsdiagramme um die Dehnsteifigkeit δ erweitert und der Einfluss dieses Parameters für alle Konstellationsmöglichkeiten berücksichtigt und dargestellt werden.

Eine andere Lösung wäre die Programmierung eines universellen Skriptes bei dem bloß die benötigten Werkstoffparameter, Randbedingungen und die Anzahl und Positionen der Steifen angegeben werden. Daraus wird dann die resultierende transzendente Beulbedingung berechnet, aus der dann die Bemessungskurven generiert werden. Die Beulbedingung müsste dann nicht zuvor für jede Konstellation berechnet werden, um die Girlandenkurven zu erhalten. Ein weiterer Schritt wäre die Einspeisung der Ergebnisse in eine Datenbank auf die Hochschulen, Universitäten, Hersteller, Firmen und andere Zugriff haben, die diese Informationen benötigen. Damit wäre der große Vorteil der dimensionslosen Schreibweise, nämlich dass die Ergebnisse für Laminat mit gleichen dimensionslosen Parametern gültig sind, sinnvoll genutzt.

Literaturverzeichnis

- [1] MATHWORKS (HERAUSGEBER): *Matlab 2013b Handbuch*. Mathworks, www.mathworks.de/help
- [2] MAPLESOFT (HERAUSGEBER): *Maple 17 Handbuch*. Maplesoft, www.maplesoft.com/support/help
- [3] MITTELSTEDT, C.; BECKER, W.: *Strukturmechanik ebener Laminate*. Darmstadt, Manuskript, im Druck befindlich 2014
- [4] WIEDEMANN, J.: *Druckbeulwerte der orthotropen Platte mit zusätzlichen Einzelsteifen*. VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf, Fortschritt-Berichte, Reihe 1, Nr. 6, Januar 1966
- [5] MARUMAN: www.maruman.co.jp/eng2, aufgerufen im Januar 2013
- [6] BMW: www.bmw.de, aufgerufen im Dezember 2013
- [7] TENNISTOWN: www.tennistown.de/dunlop-aerogel-4d.php, aufgerufen im Januar 2013
- [8] WIKIPEDIA: www.de.wikipedia.org, aufgerufen im Januar 2013
- [9] BOEING: www.boeing.com, aufgerufen im Januar 2013
- [10] WIEDEMANN, J.: *Leichtbau: Band 1, Elemente*. Springer Verlag, Berlin 1986

A MATLAB-Skript

```
% Beulverhalten einer Platte mit einer symmetrisch angeordneten Steife
%
% Generierung der Girlandenkurven

%% Löschen von Speicher und Schliessen offener Fenster
clc
clear all
close all

tic ;                % Start der Zeitmessung

%% Parameter

mh = 1:5 ;          % Vektor fuer Halbwellen
a = 1:500 ;        % Vektor fuer Alpha
d = 0 ;            % Vektor fuer Delta
g = 1:5 ;          % Vektor fuer Gamma
l = 0 ;            % Anfangswert Laufzaehler

fg = 1 ;           % Umrechnungsfaktor fuer Gamma
fd = 0.1 ;         % Umrechnungsfaktor fuer Delta

beta = 2 ;         % Seydelscher Orthotropiefaktor / Kreuzfaktor
b = 2 ;            % Umrechnungsfaktor fuer Beta
NG = 2*(1+beta) ; % unterer Grenzwert

%% Plot-Bereich und Exponent von alpha
```

```

a_max = max(a) ;           % alpha-max
n = 0 ;                   % Startwert fuer Exponenten
while a_max>5             % Bedingung: obere Grenze fuer alpha
    a_max = a_max/10 ;    % mit 1/10 multiplizieren bis Bedingung erfuehlt ist
    n = n+1 ;             % Erhoehung des Exponenten bei jedem Durchlauf
end

a_p = 10^-n:10^-n:a_max ; % Plotbereich und Aufloesung der Kurve
fa = a_max/max(a) ;      % Umrechnungsfaktor fuer alpha

ym = 30 ;                 % Maiximalwert der y-Achse

%% Berechnung von Grenzwert c

c = zeros(max(mh), length(a)) ; % Erstellung der c-Matrix

for alphai = a ;          % Schleife fur jedes m im Intervall alpha
    alpha = alphai*fa ;   % alpha: bezogenes Seitenverhaeltnis
    for m = mh;           % m: Anzahl Halbwellen
        Nu = (m/alpha)^2+(alpha/m)^2+2*beta + 0.00001 ; % Beulbedingung
        c(m,alphai) = Nu ; % Uebertragung des Wertes in c-Matrix
    end
end

end

%% Beulbedingung unversteifte Platte

Gu = zeros(1,length(a)) ; % Erstellung der Gu-Matrix (unversteifte Platte)
m = 1 ;                   % Startwert der Halbwellen ueber die Laenge

for alphai = a ;          % Schleife fuer Girlandenkurve
    alpha = alphai*fa ;   % alpha: bezogenes Seitenverhaeltnis
    if alpha > sqrt(m^2+m) % Position des Modenwechsels
        m = m+1 ;        % Aenderung des Modus
    end
    Gu(1,alphai) = (m/alpha)^2+(alpha/m)^2+(2*beta); % Beulbedingung

```

```

end

%% Beulbedingung unversteifte Platte, antimetrische Beulform

Go = zeros(1,length(a)) ; % Erstellung der Gu-Matrix (unversteifte Platte)
n = 2 ; % Anzahl der Halbwellen ueber die Breite

for m = 1:2*a_max
    for alphai = 1:max(a) ; % Schleife fuer Girlandenkurve
        alpha = alphai*fa ; % alpha: bezogenes Seitenverhältnis
            % Beulbedingung
        Go(m,alphai) = (m/alpha)^2+((alpha*n^2)/m)^2+(2*beta*n^2);
    end
end

for alphai = a ; % Auslesen der Werte fuer die Girlandenkurve
    Go1(alphai) = min(Go(:,alphai));
end

%% Beulbedingung versteifte Platte

G0 = zeros(length(mh), length(a), length(d), length(g)) ; % Kurven-Matrix
G1 = zeros(length(a), length(d), length(g)) ; % Girlanden-Matrix
f = length(g) ; % figure-Vektor

for gamma = g % gamma: bezogene Biegesteifigkeit
    for deltai = d ;
        delta = deltai*fd; % delta: bezogene Dahnsteifigkeit
        for alphai = a ;
            alpha = alphai*fa ; % alpha: bezogenes Seitenverhältnis
            for m = mh;
                syms BB1(N_)
                    % kappa1 und kappa2
                kappa1 = sqrt(sqrt(beta^2+N_*(alpha/m)^2-1)+beta) ;
            end
        end
    end
end

```

```

kappa2 = sqrt(sqrt(beta^2+N_*(alpha/m)^2-1)-beta) ;

                                % Beulbedingung
BB1 = (gamma*(m*pi)^2/alpha-delta*N_*pi^2*alpha)*...
      (kappa1*tan(kappa2*m*pi/(2*alpha))...
      -kappa2*tanh(kappa1*m*pi/(2*alpha)))...
      +4*(m*pi)*sqrt((N_*(alpha/m)^2-1)^2+...
      beta^2*(N_*(alpha/m)^2-1)) ;

                                % Berechnung der Beulbelastung
G0(m,alphai,deltai+1,gamma)=vpasolve(BB1==0,c(m,alphai));

                                % Laufzaehler
l = l+1
end
end
end

for deltai = d ;                % Schleife zum erstellen der Girlandenkurve
    delta = deltai*fd;
    for alphai = a ;
        % Auslesen der Werte fuer die Girlandenkurve
        if min(G0(:,alphai,deltai+1,gamma))<Go1(alphai)
            G1(alphai,deltai+1,gamma) = min(G0(:,alphai,deltai+1,gamma));
        else G1(alphai,deltai+1,gamma) = Go1(alphai) ;
        end
    end
end

% Plot und speichern der figures

f(1) = figure(1);

hold on
for deltai = d                % Schleife zum plotten der Girlandenkurven
    delta = deltai*fd ;

```

```

        for m = mh
            pl2 = plot(a_p,G1(:,deltai+1,gamma),'c');
            axis ([0 a_max 0 ym]) % Längen von x- und y-Achse
        end
    end

    pl3 = plot(a_p,Gu,'b'); % Plotten der Girlandenkurve, unversteifte Platte
    pl1 = plot(a_p,Go1,'r'); % Plotten der GK, unverst. Platte, antimetr. Beulf.

    plot(a_p,NG) % Plotten des unteren Grenzwertes

%     title(['Beulbelastung bei \beta = ',num2str(beta), ', \gamma = 0...',...
%           num2str(max(g)), ', \delta = ',num2str(delta), ', \alpha = ',num2str(a_
%
strx = '$\rm{bezogenes \; Seitenverhaeltnis} \; \alpha$' ;
stry = '$\rm{bezogene \; Beullast} \; \bar{N}_{xx}^0$' ;
xl = xlabel(strx, 'interpreter','latex') ; % Bezeichnung x-Achse
yl = ylabel(stry, 'interpreter','latex') ; % Bezeichnung y-Achse
l = legend([pl1 pl2 pl3 ],'$ \rm{antimetrische \; Beulform} $',...
           '$ \rm{versteifte \; Platte} $','$ \rm{unversteifte \; Platte} $');
set(l,'FontSize',12,'Interpreter','latex','Location','NorthEast')

br = 16 ; % Breite des Plots
ho = 12 ; % Hoehe des Plots

hold off

% Plazieren des plot in der linken oberen Ecke
set(gcf, 'PaperPosition', [0 0 br ho]);

% Definieren der Breite und Hoehe des Blattes
set(gcf, 'PaperSize', [br ho]);

% Speichern der figures als .PDF
print(gcf, '-dpdf', ['ESs_GK_b', num2str(beta*10), '_g', num2str(gamma), ...
                    '_d', num2str(d), '_a', num2str(max(a)), '_y', num2str(ym)]) ;

```