



Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Hamburg University of Applied Sciences

Masterarbeit

El Ayachi Lahrach

Numerische Untersuchungen zum Einfluss von Radialwellendichtungen bei der Resonanzdurchfahrt elastischer Rotoren

El Ayachi Lahrach

**Numerische Untersuchungen zum Einfluss von
Radialwellendichtungen bei der
Resonanzdurchfahrt elastischer Rotoren**

Masterarbeit eingereicht im Rahmen der Masterprüfung

im Studiengang Berechnung und Simulation im Maschinenbau
am Department Maschinenbau und Produktion
der Fakultät Technik und Informatik
der Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg

Erstprüfer: Professor Dr.-Ing. habil. Thomas Kletschkowski

Zweitprüfer: Professor Dr.-Ing. habil. Frank Ihlenburg

Abgabedatum: 25. Januar 2016

Zusammenfassung

El Ayachi Lahrach

Thema der Masterarbeit

Numerische Untersuchungen zum Einfluss von Radialwellendichtungen bei der Resonanzdurchfahrt elastischer Rotoren

Stichworte

FEM, Strukturdynamik, Modellentwicklung, Radialwellendichtring, elastischer Rotor

Kurzzusammenfassung

Ziel der Masterarbeit ist die Untersuchung eines elastischen Rotors bei der Resonanzdurchfahrt mit finiten Elementen zur Durchführung von strukturdynamischen Analysen unter Berücksichtigung von Radialwellendichtungen.

El Ayachi Lahrach

Master Thesis title

Numerical studies on the influence of radial shaft seals at the resonance passage of flexible rotors

Keywords

FEM, structural dynamics, model development, radial shaft seals, flexible rotor

Abstract

The aim of the thesis is the investigation of an elastic rotor at the resonance passage by finite elements for the implementation of structural dynamic analysis, taking account of radial shaft seals.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	V
Tabellenverzeichnis	VII
Abkürzungsverzeichnis	VIII
1 Einleitung	1
2 Grundlagen	2
2.1 Elastischer Rotor	2
2.2 Mathematisches Rotormodell	3
2.3 Differentialgleichungen	4
2.4 Elementmatrizen zur Welle des FE-Rotormodells	10
2.5 Lösungsverfahren	29
3 Lösung der freigeschnittenen Scheibe	32
3.1 Herleitung der Differentialgleichungen	32
3.2 Berücksichtigung der Dichtung	39
3.3 Ergebnisse	42
4 Lösung mit der Finite Elemente Methode	47
4.1 Systemmatrizen des FE-Modells	47
4.2 Berücksichtigung der Dichtung	58
4.3 Lösung der Systemdifferentialgleichungen und Ergebnisse	59
5 Zusammenfassung	68
Literatur	69
Anhang	70

Abbildungsverzeichnis

1	Gleichgewicht in der ausgelenkten Lage des elastischen Rotors	2
2	Wellenauslenkung in der Abhängigkeit von $\frac{\Omega}{\omega}$	3
3	Laval-Läufer mit gewählten Koordinatensystem	4
4	Impulsbetrachtung an einem infinitesimalen Drehstabelement	5
5	Keisformige Welle	6
6	Impulsbetrachtung an einem infinitesimalen EULER-BERNOULLI-Biegebalken	8
7	Balkenelement mit 5 Freiheitsgrade	11
8	FE-Element des Balkens in xy -Ebene	12
9	HERMITESche Polynome in der xy -Ebene	17
10	FE-Element des Balkens in xz -Ebene	19
11	HERMITESche Polynome in der xz -Ebene	22
12	FE-Element des Torsionsstabes	25
13	FORMFUNKTIONEN DES STABELEMENTES	28
14	Kräftegleichgewicht an der ausgelenkten Scheibenwelle	32
15	Kräftegleichgewicht an der ausgelenkten Scheibenwelle mit Dichtung	40
16	Mit RUNGE-KUTTA-Verfahren: Durchfahren	43
17	Mit NEWMARK-Verfahren: Durchfahren	44
18	Mit RUNGE-KUTTA-Verfahren: Hängenbleiben	44
19	Mit NEWMARK-Verfahren: Hängenbleiben	45
20	Mit RUNGE-KUTTA-Verfahren: Dichtung	46
21	Mit NEWMARK-Verfahren: Dichtung	46
22	Das Berechnungsmodell des Rotors	48
23	Rechnung mit RUNGE-KUTTA-Verfahren, Fall Hängenbleiben	60
24	Rechnung mit NEWMARK-Verfahren: Fall Hängenbleiben	61

25	Mit RUNGE-KUTTA-Verfahren: Hängenbleiben	62
26	Mit NEWMARK-Verfahren: Hängenbleiben	63
27	Rechnung mit RUNGE-KUTTA-Verfahren: Mit Dichtung Durchfahren	63
28	Rechnung mit NEWMARK-Verfahren: Fall Durchfahren	64
29	Rechnung mit RUNGE-KUTTA-Verfahren: Mit Dichtung	64
30	Rechnung mit NEWMARK-Verfahren: Mit Dichtung	65
31	Rechnung mit NEWMARK-Verfahren vier Elemente: Fall Durchfahren	66
32	Rechnung mit NEWMARK-Verfahren vier Elemente: Fall Hängenbleiben	66
33	Rechnung mit NEWMARK-Verfahren acht Elemente: Fall Hängenbleiben	67

Tabellenverzeichnis

1 Parameterbedeutung	33
2 Berechnungsparameter für die freigeschnittene Scheibe	43
3 Simulationsparameter des Rotormodells	60

Abkürzungsverzeichnis

f_{ed})	N/m	Federkonstante für die Dichtung
A	mm	Fläche
f_{ed}	N/m	Federkonstante für die Dichtung
F	N	Kraft, Fliehkraft
ε	m	Exzentrizität
W		Wellendurchstoßpunkt
S		Schwerpunkt der Scheibe
F_c	N	elastische Rückstellkraft
m	kg	Masse der Scheibe
Ω	1/s	Erregerkreisfrequenz
y_w	m	Koordinate
c	N/m	Steifigkeit der Welle
Ω	1/s	Erregerkreisfrequenz
M_t	N m	Torsionsmoment
dx	m	infinitesimale Länge
dA	m ²	infinitesimale Flächenelement
dV	m ³	infinitesimale Volumenelement
ρ	kg/m ³	Dichte
dm	kg	infinitesimale Massenelement
J_p	m ⁴	polare Flächenträgheitsmoment
m_t	N m	verteilte Masse
γ	rad	Winkeländerung
ds	rad	Verdrehung
$d\theta$	rad	Verdrehwinkel
τ	N/m ²	Schubspannung
G	N/m ²	Schubmodul
$\delta\theta$		virtuelle Verschiebung
Q	N	Querkraft
q	N/m	Streckenlast
δw		virtuelle Verschiebung
L	m	länge der Welle
l	m	länge eines Elements
nu		querkontaktionszahl
δv		virtuelle Verschiebung
v_h		Ansatzfunktion
$U_1 \text{ bis } U_{10}$		Verschiebungen
$a_1 \text{ bis } a_4$		Konstanten
\mathbf{H}_{xy}		Vektor der Ansatzfunktionen
\mathbf{U}_{xy}		Verschiebungsvektor in xy -Ebene
\mathbf{H}_{xz}		Vektor der Formfunktionen
$\mathbf{M}_{e_{xy}}$		Massenmatrix
$\mathbf{K}_{e_{xy}}$		Elementsteifigkeitsmatrix
$\mathbf{M}_{e_{xy}}$		Elementmassenmatrix
$\mathbf{K}_{e_{xz}}$		Elementsteifigkeitsmatrix
$\mathbf{M}_{e_{xz}}$		Elementmassenmatrix
$\mathbf{H}_{e_{xy}}$		Vektor der Formfunktionen

$\mathbf{f}_{e_{xyV}}$		Elementstreckenlasten
$\mathbf{f}_{e_{xyS}}$		Vektor der Knotenkräfte
Q_y		Querkraft
M_z		Biegemoment
ξ		natürliche Koordinate
I_x	m^4	Flächenträgheitsmoment
I_y	m^4	Flächenträgheitsmoment
I_z	m^4	Flächenträgheitsmoment
I_p	m^4	polare Flächenträgheitsmoment
J_x	$kg\ m^4$	

1 Einleitung

Schnell rotierende Maschinen sollen im Betrieb einwandfrei laufen. Einige dieser rotierenden Maschinen werden überkritisch betrieben. Überkritisch meint hier den Betriebszustand nach durchfahren von eine oder mehrere Resonanzstellen. An diese Resonanzstellen entstehen sehr große Fliehkräfte, an denen die Rotorauslenkungen sehr groß werden können. Um große Auslenkungen und damit die Zerstörung der Maschine zu vermeiden und um die Funktion der Maschine zu kontrollieren, muss das dynamische Verhalten des Rotors beim Hochlaufen in diesen Stellen bekannt sein [1].

Das Durchfahren biegekritischer Drehzahlen ist für den sicheren Betrieb rotierender Maschinen von besonderer Bedeutung. Insbesondere muss der Antrieb über ausreichende Leistungsreserven verfügen, um nicht in der Resonanz zu verbleiben. Strukturmechanische Ansätze zur Beschreibung der Resonanzdurchfahrt elastischer Rotoren finden sich beispielsweise in [2] und [3]. Allerdings ist die dynamische Interaktion von Rotoren mit Dichtelementen, siehe [4], [5] [6], bisher noch nicht ausreichend diskutiert. Im Rahmen dieser Masterarbeit wird daher ein Modell zur Simulation der Resonanzdurchfahrt eines elastischen Rotors erstellt und mit einem Modell eines elastomeren Radialwellendichtringes gekoppelt, wobei die Methode der Finiten Elemente angewendet wird. Im Einzelnen werden dabei folgende Aufgaben erarbeitet: Den Aufbau eines Rotormodells und Simulation der Resonanzdurchfahrt sowie der Aufbau eines Dichtungsmodells unter Berücksichtigung der Gummielastizität und schließlich gekoppelte Berechnungen mit und ohne Dichtung.

2 Grundlagen

In diesem Kapitel soll ein mathematisches Modell des zu untersuchenden Rotors erstellt werden. Anschließend werden die Differentialgleichungen des Modells hergeleitet und schließlich werden die Elementmatrizen für die Berechnung vorbereitet. Für die Lösung der Systemgleichungen werden zwei numerische Verfahren zum Einsatz kommen. Dabei handelt es sich um die numerischen Verfahren nach NEWMARK und RUNGE-KUTTA.

2.1 Elastischer Rotor

Überwiegend werden rotierende Maschinen überkritisch betrieben. Das heißt, dass die Resonanzstellen bzw. die Kritischen Drehzahlen durchfahren werden, bis der Arbeitsbereich erreicht wird. Die Abbildung 1 zeigt ein das Gleichgewicht von der Fliehkraft und der Rückstellkraft eines elastischen Rotors. Aufgrund von Fertigungsungenauigkeiten, liegt der Schwerpunkt S der Scheibe nicht auf die Drehachse. Da die Maschine unsymmetrisch rotiert, hat der Schwerpunkt der Scheibe vom Rotor einen Abstand ε vom Wellendurchstoßpunkt W . Die entstandene Fliehkraft F hat nach R. GASCH UND H. PFÜTZNER: *Rotordynamik eine Einführung* [7] die Größe:

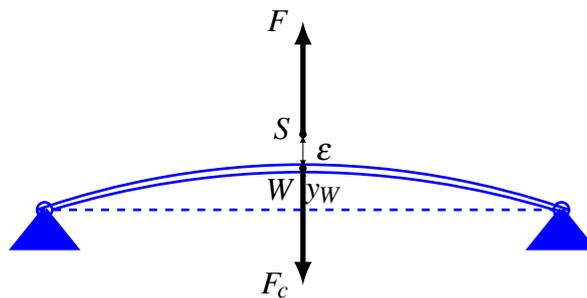


Abbildung 1: Gleichgewicht in der ausgelenkten Lage des elastischen Rotors

$$F = (y_w + \varepsilon)m\Omega^2$$

und die elastische Rückstellkraft

$$F_c = cy_w$$

Das Gleichgewicht zwischen der Fliehkraft F und die Rückstellkraft F_c liefert:

$$cy_w = (y_w + \varepsilon)m\Omega^2$$

Umformen nach der Wellenauslenkung y_W ergibt

$$y_W = \frac{\varepsilon m \Omega^2}{c - m \Omega^2} = \frac{\varepsilon \Omega^2}{\frac{c}{m} - \Omega^2}$$

Dabei ist c die Wellensteifigkeit, Ω die Erregerkreisfrequenz und m die Masse der Scheibe.

Mit der Eigenkreisfrequenz des Schwingers $\omega_0^2 = \frac{c}{m}$, erhält man für die Wellenverformung y_W in y -Richtung

$$y_W = \varepsilon \frac{\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Die Abbildung 2 stellt die Auslenkung y_W in Abhängigkeit von $\frac{\Omega}{\omega_0}$ dar, bei $\Omega = \omega_0$ werden für y_W unendliche Werte angenommen. Dieser Bereich muss schnell durchfahren werden, um die Zerstörung der Maschine zu vermeiden [7].

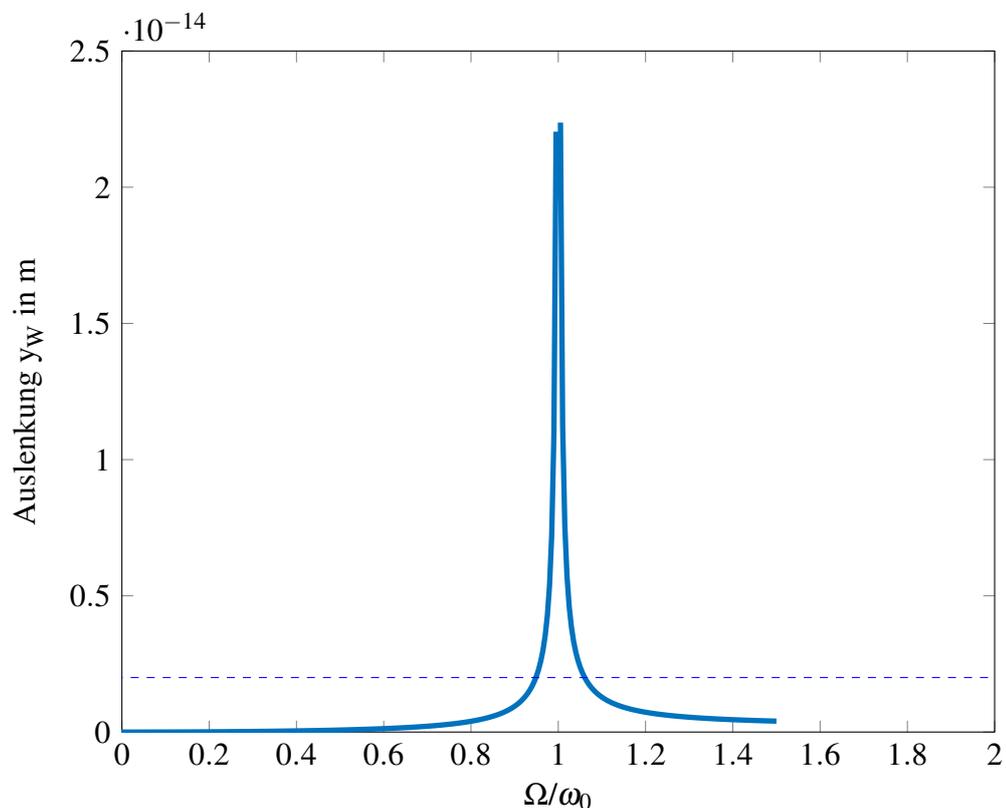


Abbildung 2: Wellenauslenkung in der Abhängigkeit von $\frac{\Omega}{\omega_0}$

2.2 Mathematisches Rotormodell

Um das Verhalten des Rotors bei der Resonanzdurchfahrt zu erläutern, wird ein so genannter Laval-Läufer – eine mittig besetzte Welle – betrachtet. Es besteht aus einer biegeelastischen Welle mit runden Kreisquerschnitt und einer einzigen Scheibe. Dabei wird die Scheibe durch

die Masse m und der Massenträgheitsmoment J_p beschrieben. Der Laval-Läufer ist an beiden Enden starr gelagert, wobei die Scheibe in der Rotationsebene verbleibt. Dadurch werden die gyroskopische Effekte ausserhalb der Drehebene nicht berücksichtigt. In der Abbildung 3 wird das entsprechende Modell des Rotors mit Antriebsdrehmoment T_a dargestellt.

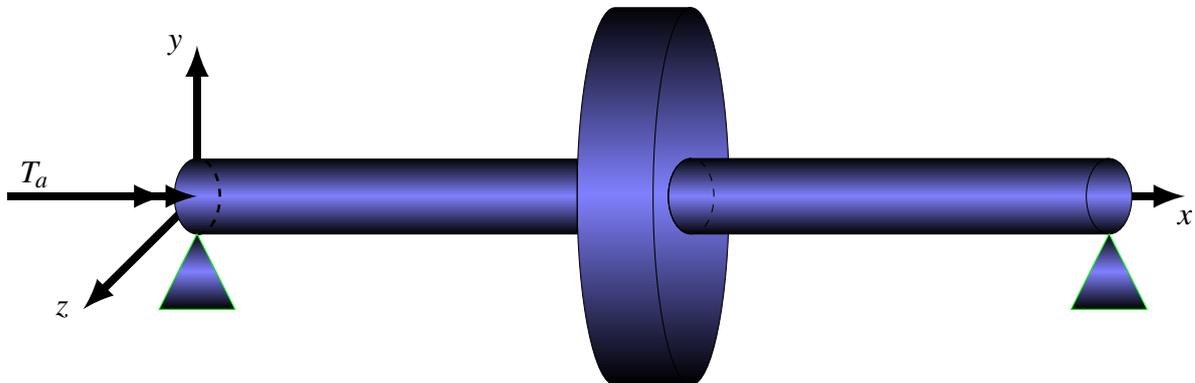


Abbildung 3: Laval-Läufer mit gewählten Koordinatensystem

Anders als die analytische Untersuchung auf das Verhalten des Rotors bei der Resonanzdurchfahrt, an der freigeschnittenen Rotorscheibe,[8] möchte man nun die verteilte Masse und Steifigkeit der Welle mitberücksichtigen.

2.3 Differentialgleichungen

Aufgrund der zu komplizierten analytischen Lösung, wird die Methode der Finiten Elemente (FEM) als bekanntes Verfahren der Strukturmechanik eingesetzt. Mit FEM wird das mathematische Modell des Rotors in N Einzelemente zerlegt. Allen Elementen liegt als Elementtyp ein Balkenelement zugrunde. Jedes Element besteht aus zwei Knoten an den Enden des Balkenelements, und pro Knoten sind 5 Freiheitsgrade vorhanden, zwei Verschiebungen quer zu Rotationsachse und drei Verdrehungen. Das Balkenelement kann als Torsionsstab um die x -Achse und als Biegebalken um xy - sowie xz -Achse getrennt behandelt werden, da die Freiheitsgrade entkoppelt sind. Als erstes wird die Differentialgleichung des Torsionsstabes und des Biegebalkens hergeleitet.

Die Differentialgleichung des Torsionsstabes

Um die Beziehungen für die rotatorische Schwingungen aufzustellen, wird analog zu B. KLEIN *FEM* [9: S. 54] hier ein Drehstab-Element mit einem runden Kreisquerschnitt eingeführt, wie in Abbildung 4 dargestellt. Nach dem Impulssatz an dem infinitesimalen Drehstab-Element wird die entsprechende Differentialgleichung aufgestellt. Dabei bedeutet M_t das Torsionsmoment, m_t

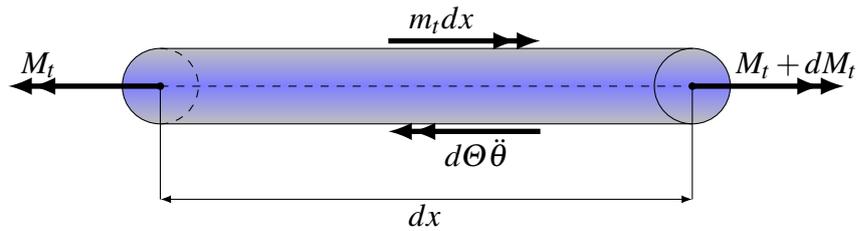


Abbildung 4: Impulsbetrachtung an einem infinitesimalen Drehstabelement

das verteilte Moment, $d\Theta\ddot{\theta}$ die Drehträgheitskraft und dx die Länge des infinitesimalen Stabes.

$$d\Theta\ddot{\theta} = -M_t + M_t + dM_t + m_t dx \quad (1)$$

mit
$$d\Theta = \int r^2 \cdot dm = \rho \int r^2 \cdot dV = \rho \int r^2 \cdot dA \cdot dx = \rho \cdot J_p \cdot dx$$

mit
$$J_p = \int r^2 \cdot dA \quad (2)$$

J_p ist das polare Flächenträgheitsmoment und gleich das Torsionsträgheitsmoment I_t bei einer Kreiswelle, ρ die Dichte, dm das infinitesimale Massenelement, dV das infinitesimale Volumenelement und dA das infinitesimale Flächenelement.

Durch Einsetzen von $d\Theta$ und Teilen durch Differential dx erhält man

$$\rho J_p \ddot{\theta} = \frac{dM_t}{dx} + m_t \quad (3)$$

In Abbildung 5 ist eine kreisförmige Welle, die an einem Ende, durch ein Moment belastet wird dargestellt. Die kinematische Beziehung zwischen der absoluten Verdrehung ds und der Winkeländerung γ bzw. zwischen der absoluten Verdrehung ds zum Verdrehwinkel $d\theta$ ist:

$$\sin(\gamma) = \frac{ds}{dx} \quad \text{und} \quad \sin(d\theta) = \frac{ds}{r}$$

$$ds = dx \cdot \sin(\gamma) = r \cdot \sin(d\theta)$$

Mit den kinematischen Annahmen, dass

- die Querschnitte ihre Gestalt behalten und
- ebene Querschnitte Eben bleiben (keine Verwölbung)

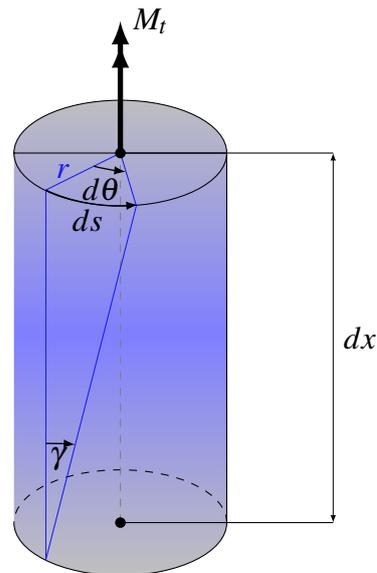


Abbildung 5: Keisformige Welle

sowie der Annahme für kleine Verformungen

$$\sin(\gamma) = \gamma \quad \text{und} \quad \sin(d\theta) = d\theta$$

besteht zwischen der Verdrehung $d\theta$ und der Winkeländerung γ (Abbildung 5) folgender Zusammenhang

$$r \cdot d\theta = \gamma \cdot dx$$

Daraus folgt

$$\gamma = r \cdot \frac{d\theta}{dx} = r \cdot \theta' \quad (4)$$

Aus dem Elastizitätsgesetz ist die Schubspannung τ als Produkt von Schubmodul G und Winkeländerung γ bekannt.

$$\tau = G \cdot \gamma$$

Durch Einsetzen der Winkeländerung γ aus (4) in das Elastizitätsgesetz, erhält man für die Schubspannung

$$\tau = G \cdot r \cdot \frac{d\theta}{dx} = G \cdot r \cdot \theta' \quad (5)$$

Das Moment aus den Schubspannungen entspricht dem im Schnitt wirkende Torsionsmoment M_t . [10]

$$\begin{aligned}
 M_t &= \int r \cdot \tau \cdot dA = \int r \cdot G \cdot r \cdot \frac{d\theta}{dx} \cdot dA \\
 &= G \cdot \int r^2 \cdot dA \cdot \frac{d\theta}{dx} \\
 &= G \cdot J_p \cdot \frac{d\theta}{dx} = G \cdot J_p \cdot \theta' \quad \text{mit} \quad J_p = \int r^2 dA \quad (6)
 \end{aligned}$$

Nun wird das Torsionsmoment M_t in die Gleichung (3) eingesetzt, das ergibt

$$\begin{aligned}
 \rho \cdot J_p \cdot \ddot{\theta} &= \frac{d}{dx}(G \cdot J_p \cdot \theta') + m_t \\
 \rho \cdot J_p \cdot \ddot{\theta} &= G \cdot J_p \cdot \theta'' + m_t \quad \text{für} \quad GJ_p = \text{const} \quad (7)
 \end{aligned}$$

Die Gleichung (7) stellt die starke Form des Gleichgewichts in jedem Punkt des Torsionsstabes dar. Hierbei bezieht sich die starke Form auf die Ordnung der Differentialgleichung (7) gegenüber der Ordnungsherabsetzung der Differentialgleichung (10) im folgenden Abschnitt.

Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Die Terme der Gleichung (7) werden auf die linke Seite gebracht, mit einer virtuellen Verschiebung $\delta\theta$ multipliziert und über die Länge l des Stabelements integriert.

$$\int_0^l \delta\theta (\rho J_p \ddot{\theta} - GJ_p \theta'' - m_t) dx = 0 \quad (8)$$

Die virtuelle Verschiebung $\delta\theta$ hat folgende Eigenschaften [11]:

- Es genügt die geometrischen Randbedingungen,
- ist infinitesimal klein
- und ist beliebig.

Das Integral wird nun als Einzelintegrale beschrieben

$$\int_0^l \delta\theta \rho J_p \ddot{\theta} dx - \overbrace{\int_0^l \delta\theta GJ_p \theta'' dx}^{\text{Therm ①}} - \int_0^l \delta\theta m_t dx = 0 \quad (9)$$

Der Term ① in Gleichung (9) wird partiell integriert

$$\int_0^l \delta \theta GJ_p \theta'' dx = \left[\delta \theta GJ_p \theta' \right]_0^l - \int_0^l \delta \theta' GJ_p \theta' dx$$

Damit nimmt die Gleichung (9) folgende Formel

$$\int_0^l \delta \theta \rho J_p \ddot{\theta} dx - \left[\delta \theta GJ_p \theta' \right]_0^l + \int_0^l \delta \theta' GJ_p \theta' dx - \int_0^l \delta \theta m_t dx = 0$$

Es ist hierbei zweckmäßig die Gleichung in innere und äußere Kräfte aufzuteilen

$$\int_0^l \delta \theta \rho J_p \ddot{\theta} dx + \int_0^l \delta \theta' GJ_p \theta' dx = \int_0^l \delta \theta m_t dx + \left[\delta \theta GJ_p \theta' \right]_0^l \quad (10)$$

Die Gleichung (10) ist die schwache Form der Differentialgleichung des Torsionsstabes. Wobei $GJ_p \theta' = M_t$ ist.

Aufstellen der Differentialgleichung des Euler-Bernoulli-Balkenelement

Die Grundlage für die Berechnung des Balkenelements ist die Hypothese von Euler-Bernoulli des Biegebalkens, siehe Abbildung 6. Aus dem Gleichgewicht des infinitesimalen Balkenele-

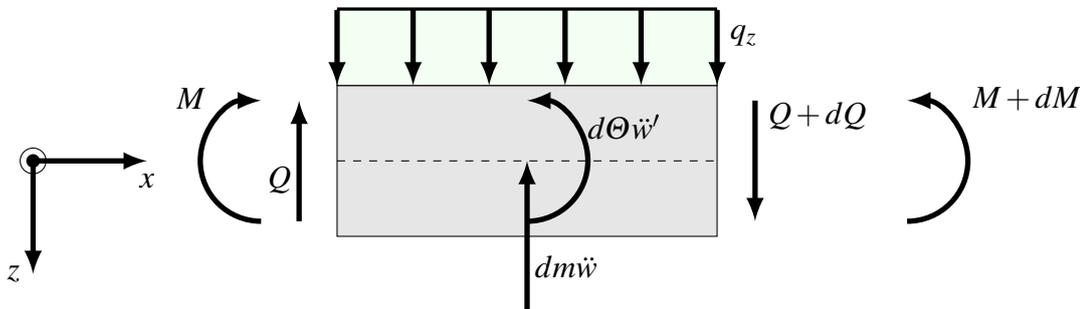


Abbildung 6: Impulsbetrachtung an einem infinitesimalen EULER-BERNOULLI-Biegebalken

ments unter Berücksichtigung der Trägheitskräfte erhält man

$$\begin{aligned} dm \ddot{w} &= -Q + Q + Q' dx + q_z dx \\ \rho A \ddot{w} dx &= Q' dx + q_z dx \end{aligned} \quad (11)$$

Dividiert man das Differential dx erhält man

$$\rho A \ddot{w} = Q' + q_z \quad (12)$$

Unter der Bedingung, dass die Summe der Momente Null ist, folgt

$$d\Theta\ddot{w}' = M + (Q + Q'dx)dx + q_z dx \frac{dx}{2} - M - M'dx - dm\ddot{w} \frac{dx}{2} \quad (13)$$

mit

$$\begin{aligned} d\Theta &= \int r^2 dm \\ &= \rho \int r^2 dA \cdot dx \\ &= \rho J_p dx. \end{aligned}$$

Nach dem Umformen und dem Eliminieren der Terme höherer Ordnung wird aus Gleichung (13)

$$\rho J_p \ddot{w}' = Q - M' \quad (14)$$

Nun wird die Gleichung (14) nach Q umgeformt sowie abgeleitet und in die Gleichung (12) eingesetzt.

$$\rho A \ddot{w} = \rho J_p \ddot{w}'' + M'' + q_z \quad (15)$$

Mit dem Einsetzen des Biegemoments $M = -EIw''$ in die Gleichung (15), bekommt man schließlich

$$\rho A \ddot{w} = \rho J_p \ddot{w}'' - EIw'''' + q_z \quad \text{mit} \quad EI = \text{konst} \quad (16)$$

Die Gleichung (16) ist die Differentialgleichung der Biegeschwingung des EULER-BERNOULLI-Balkens. Dabei ist $w = w(x, t)$ die Durchbiegung des Balkens, ρ die Dichte, A die Querschnittsfläche, EI ist die Biegesteifigkeit des Balkens.

Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Analog zu der Differentialgleichung des Torsionsstabes, wird die Gleichung (16) mit einer beliebigen Testfunktion δw multipliziert und über die Länge l des Balkens integriert

$$\int_0^l \delta w (\rho A \ddot{w} - \rho J_p \ddot{w}'' + EI_y w'''' - q_z) dx = 0$$

Das ergibt nach der Summenregel für Integrale

$$\int_0^l \delta w \rho A \ddot{w} dx - \overbrace{\int_0^l \delta w \rho J_p \ddot{w}' dx}^{\text{Therm ①}} + \overbrace{\int_0^l \delta w EI_y w'''' dx}^{\text{Therm ②}} - \int_0^l \delta w q_z dx = 0 \quad (17)$$

Nun wird der Therm ① von der Gleichung (17) einmal und der Therm ② zweimal partiell integriert

$$\int_0^l \delta w \rho A \ddot{w} dx - \left[\delta w \rho J_p \ddot{w}' \right]_0^l + \int_0^l \delta w' \rho J_p \ddot{w}' dx + \left[\delta w EI_y w'''' \right]_0^l - \left[\delta w' EI_y w'''' \right]_0^l + \int_0^l \delta w'' EI_y w'' dx - \int_0^l \delta w q_z dx = 0 \quad (18)$$

Nach Umformung erhält man

$$\int_0^l \delta w \rho A \ddot{w} dx + \int_0^l \delta w' \rho J_p \ddot{w}' dx + \int_0^l \delta w'' EI_y w'' dx = \left[\delta w \rho J_p \ddot{w}' \right]_0^l - \left[\delta w EI_y w'''' \right]_0^l + \left[\delta w' EI_y w'' \right]_0^l + \int_0^l \delta w q_z dx \quad (19)$$

Die Gleichung (19) stellt nun im Gegensatz zur Gleichung (16) die schwache Form des Gleichgewichtes des EULER-BERNOULLI-Balkens dar. Dabei ist $\rho J_p \ddot{w}' = \alpha$ die Drehträgheitskraft, $EI_y w'''' = -Q_z$ die Querkraft und $EI_y w'' = -M_y$ das Biegemoment.

$$\int_0^l \delta w \rho A \ddot{w} dx + \int_0^l \delta w' \rho J_p \ddot{w}' dx + \int_0^l \delta w'' EI_y w'' dx = \left[\delta w \alpha \right]_0^l + \left[\delta w Q_z \right]_0^l - \left[\delta w' M_y \right]_0^l + \int_0^l \delta w q_z dx \quad (20)$$

2.4 Elementmatrizen zur Welle des FE-Rotormodells

Das Balkenelement für das Rotormodell nach Abbildung 7 vereinigt einen Balken für gerade und schiefe Biegung mit einem Torsionstab. Seine Verrückungen werden beschrieben durch die Koordinaten U_1 bis U_5 des Knotens ① und U_6 bis U_{10} des Knotens ② [12: Seite 223].

Es wird vorausgesetzt:

- Konstante Querschnittsfläche $A = \text{const}$, konstante Massenbelegung $\rho = \text{const}$ und Werkstoffeigenschaften längs des Balken $EI = \text{const}$.
- Knoten ① und ② liegen in den Querschnittsschwerpunkten.
- Die Koordinaten fallen mit den entsprechenden Hauptachsen zusammen.

- Die Schubmittellinie liegt in der Schwerlinie.

Damit ergeben sich die folgenden Bestimmungsdaten des Elements:

l	die Länge des Balkenelements in m
A	die Querschnittsfläche in m^2
I_y, I_z	Flächenträgheitsmomente in m^4
I_T	Torsionsträgheitsmoment in m^4
ρ	Die Dichte in $\frac{kg}{m^3}$
E	Elastizitätsmodul in $\frac{N}{m^2}$
ν	Querkontraktionszahl

Die Gleichungen (10) und (19) stellen die schwache Form der Differentialgleichungen von

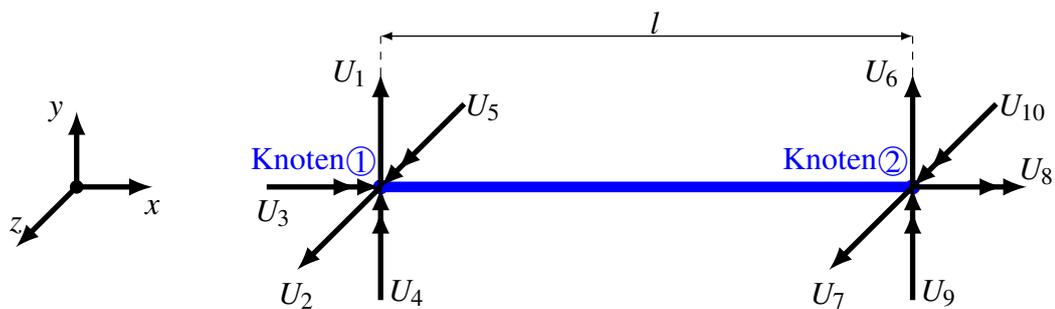


Abbildung 7: Balkenelement mit 5 Freiheitsgrade

Torsionstab und Balkenelement dar. Als Erstes werden die Elementmatrizen für das Balkenelement in die xy -Ebene zusammengebaut. Der Vektor der Elementfreiheitsgrade \mathbf{U} ist wie folgt zusammengebaut:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= [U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4 \ U_5 \ U_6 \ U_7 \ U_8 \ U_9 \ U_{10}]^T \\ &= [V_1 \ W_1 \ \varphi_1 \ W'_1 \ V'_1 \ V_2 \ W_2 \ \varphi_2 \ W'_2 \ V'_2]^T \end{aligned}$$

V_1, V_2, W_1, W_2 sind die Freiheitsgrade der Biegung und W'_1, W'_2, V'_1, V'_2 sind die Freiheitsgrade der Verdrehung um y - und z -Achse. φ_1, φ_2 sind die Verdrehungen um die x -Achse. Das Balkenelement kann in den Ebenen xy, xz und yz getrennt behandelt werden, da die Ebenen entkoppelt sind. In folgenden Abschnitt wird zuerst das Balkenelement in die xy -Ebene behandelt.

a) Elementmatrizen des Balkens in xy -Ebene

Nach der Abbildung 8 ist das Balkenelement in der xy -Ebene mit dem entsprechenden Freiheitsgrade zu sehen. Die schwache Form des Biegebalkens in der Gleichung (20) wird nun in

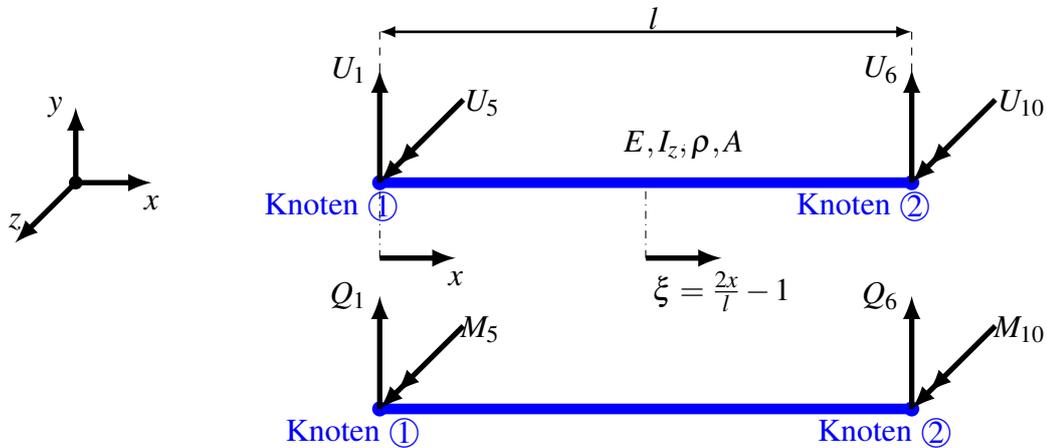


Abbildung 8: FE-Element des Balkens in xy -Ebene

die xy -Ebene geschrieben. Statt die Feldgröße $w(x,t)$, q_z , M_y , Q_z und I_y wird nun $v(x,t)$, q_y , M_z , Q_y und I_z beschrieben. Dies sieht nun wie folgt aus

$$\int_0^l \delta v \rho A \ddot{v} dx + \int_0^l \delta v' \rho J_p \ddot{v}' dx + \int_0^l \delta v'' EI_z v'' dx = \left[\delta v \alpha \right]_0^l + \left[\delta v Q_y \right]_0^l - \left[\delta v' M_z \right]_0^l + \int_0^l \delta v q_z dx \quad (21)$$

Nun wird die Verschiebung $v(x,t)$ näherungsweise durch eine geeignete Ansatzfunktionen approximiert. Da das Balkenelement in Abbildung 8 vier Freiheitsgrade hat, wird eine Ansatzfunktion dritten Grades für die gesuchte Durchbiegung in die y -Richtung gewählt:

$$v(x,t) \approx v_h(x,t) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (22)$$

und deren Ableitung

$$v'_h(x,t) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 \quad (23)$$

Mit den Verschiebungsrandbedingungen an den Knotenpunkten des Balkenelements

$$v_h(x=0,t) = U_1$$

$$v'_h(x=0,t) = U_5$$

$$v_h(x=l,t) = U_6$$

$$v'_h(x=l,t) = U_{10}$$

einsetzen in die Gleichung (22) und (23) ergibt

$$v_h(x=0,t) = U_1 = a_0$$

$$v'_h(x=0,t) = U_5 = a_1$$

$$v_h(x=l,t) = U_6 = a_0 + a_1l + a_2l^2 + a_3l^3$$

$$v'_h(x=l,t) = U_{10} = a_1 + 2a_2l + 3a_3l^2$$

Als Matrixschreibweise

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_{10} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_{10} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Nach dem Einsetzen der Gleichung (24) in die Gleichung (22) ergibt

$$\begin{aligned} v_h(x,t) &= \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_{10} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}, & x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}, & \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}, & -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_{10} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) & h_4(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_{10} \end{bmatrix} = \mathbf{H}_{xy}^T(x) \mathbf{U}_{xy}(t) \end{aligned}$$

Die Polynome $h_i(x)$ heißen *Hermitsche* Polynome und haben die Eigenschaft, dass sie am Kno-

ten ① den Wert 1 und an allen anderen Knoten den Wert 0 haben. Wie man sieht ist:

$$\begin{aligned}
 h_1(x=0) &= 1, & h'_1(x=0) &= 0, & h_1(x=l) &= 0, & h'_1(x=l) &= 0 \\
 h_2(x=0) &= 0, & h'_2(x=0) &= 1, & h_2(x=l) &= 0, & h'_2(x=l) &= 0 \\
 h_3(x=0) &= 0, & h'_3(x=0) &= 0, & h_3(x=l) &= 1, & h'_3(x=l) &= 0 \\
 h_4(x=0) &= 0, & h'_4(x=0) &= 0, & h_4(x=l) &= 0, & h'_4(x=l) &= 1
 \end{aligned}$$

Nun wird die Ansatzfunktion $v_h(x, t)$ in die schwache Form des Gleichgewichtes des Balkenelements eingesetzt, das heißt die Gleichung (21) wird mit dem finiten Balkenelement approximiert. Für die virtuelle Verschiebung δv wird die gleiche Ansatz verwendet.

$$\begin{aligned}
 v_h(x, t) &= \mathbf{H}_{xy}^T(x) \cdot \mathbf{U}_{xy}(t); & \delta v_h(x) &= \mathbf{H}_{xy}^T(x) \cdot \delta \mathbf{U}_{xy} = \delta \mathbf{U}_{xy}^T \cdot \mathbf{H}_{xy}(x) \\
 \dot{v}_h(x, t) &= \mathbf{H}_{xy}^T(x) \cdot \dot{\mathbf{U}}_{xy}(t); & \delta \dot{v}_h(x) &= \delta \mathbf{U}_{xy}^T \cdot \mathbf{H}'_{xy}(x) \\
 \ddot{v}_h(x, t) &= \mathbf{H}_{xy}^T(x) \cdot \ddot{\mathbf{U}}_{xy}(t); & \delta \ddot{v}_h(x) &= \delta \mathbf{U}_{xy}^T \cdot \mathbf{H}''_{xy}(x) \\
 v''_h(x, t) &= \mathbf{H}''_{xy}^T(x) \cdot \mathbf{U}_{xy}(t)
 \end{aligned}$$

hierin sind die virtuellen Verschiebungen von der Zeit unabhängig.

$$\begin{aligned}
 & \int_0^l \delta \mathbf{U}_{xy}^T \mathbf{H}_{xy}(x) \rho A \mathbf{H}_{xy}^T(x) \ddot{\mathbf{U}}_{xy}(t) dx + \int_0^l \delta \mathbf{U}_{xy}^T \mathbf{H}'_{xy}(x) \rho J_p \mathbf{H}'_{xy}{}^T(x) \ddot{\mathbf{U}}_{xy}(t) dx + \\
 & \int_0^l \delta \mathbf{U}_{xy}^T \mathbf{H}''_{xy}(x) EI_z \mathbf{H}''_{xy}{}^T(x) \mathbf{U}_{xy}(t) dx = \\
 & \left[\delta \mathbf{U}_{xy}^T \mathbf{H}_{xy}(x) \alpha \right]_0^l + \left[\delta \mathbf{U}_{xy}^T \mathbf{H}_{xy}(x) Q_y \right]_0^l - \left[\delta \mathbf{U}_{xy}^T \mathbf{H}'_{xy}(x) M_z \right]_0^l + \int_0^l \delta \mathbf{U}_{xy}^T \mathbf{H}_{xy}(x) q_y dx \quad (25)
 \end{aligned}$$

Durch Ausklammern der Vektor der virtuellen Verschiebung $\delta \mathbf{U}_{xy}^T$ – da sie von den x Koordinate unabhängig ist und alle Terme auf die linke Seite bringen – wird aus der Gleichung (25) folgender Ausdruck

$$\begin{aligned}
 \delta \mathbf{U}_{xy}^T & \left[\int_0^l \mathbf{H}_{xy}(x) \rho A \mathbf{H}_{xy}^T(x) \ddot{\mathbf{U}}_{xy}(t) dx + \int_0^l \mathbf{H}'_{xy}(x) \rho J_p \mathbf{H}'_{xy}{}^T(x) \ddot{\mathbf{U}}_{xy}(t) dx + \right. \\
 & \left. \int_0^l \mathbf{H}''_{xy}(x) EI_z \mathbf{H}''_{xy}{}^T(x) \mathbf{U}_{xy}(t) dx - \left[\mathbf{H}_{xy}(x) \alpha \right]_0^l - \right. \\
 & \left. \left[\mathbf{H}_{xy}(x) Q_y \right]_0^l + \left[\mathbf{H}'_{xy}(x) M_z \right]_0^l - \int_0^l \mathbf{H}_{xy}(x) q_y dx \right] = 0
 \end{aligned}$$

Da die virtuellen Verschiebungen beliebig sind, das heißt man kann $\delta \mathbf{U}_{xy}^T$ frei wählen, führt dies

dazu, dass der Klammerausdruck Null ist.

$$\begin{aligned} & \int_0^l \mathbf{H}_{xy}(x) \rho A \mathbf{H}_{xy}^T(x) dx \ddot{\mathbf{U}}_{xy}(t) + \int_0^l \mathbf{H}'_{xy}(x) \rho J_p \mathbf{H}'_{xy}{}^T(x) dx \ddot{\mathbf{U}}_{xy}(t) + \\ & \int_0^l \mathbf{H}''_{xy}(x) EI_z \mathbf{H}''_{xy}{}^T(x) dx \mathbf{U}_{xy}(t) - \left[\mathbf{H}_{xy}(x) \boldsymbol{\alpha} \right]_0^l - \\ & \left[\mathbf{H}_{xy}(x) \mathbf{Q}_y \right]_0^l + \left[\mathbf{H}'_{xy}(x) \mathbf{M}_z \right]_0^l - \int_0^l \mathbf{H}_{xy}(x) q_y dx = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

Da die Vektoren der unbekanntenen Knotenbeschleunigung $\ddot{\mathbf{U}}_{xy}^T$ und Knotenverschiebung \mathbf{U}_{xy}^T nur von der Zeit abhängig sind, folgt daraus

$$\mathbf{M}_{e_{xy}} \ddot{\mathbf{U}}_{xy}(t) + \mathbf{K}_{e_{xy}} \mathbf{U}_{xy}(t) = \mathbf{f}_{e_{xyS}} + \mathbf{f}_{e_{xyV}} \quad (27)$$

Hierin ist $\mathbf{M}_{e_{xy}} = \mathbf{M}_{e_{xyT}} + \mathbf{M}_{e_{xyR}}$ die Elementmassenmatrix, besteht aus translatorischen Anteilen $\mathbf{M}_{e_{xyT}}$ und rotatorischen Anteilen $\mathbf{M}_{e_{xyR}}$. Dabei ist

$$\mathbf{M}_{e_{xyT}} = \int_0^l \mathbf{H}_{xy}(x) \rho A \mathbf{H}_{xy}^T(x) dx$$

und

$$\mathbf{M}_{e_{xyR}} = \int_0^l \mathbf{H}'_{xy}(x) \rho J_p \mathbf{H}'_{xy}{}^T(x) dx$$

weiter ist $\mathbf{K}_{e_{xy}}$ die Elementsteifigkeitsmatrix:

$$\mathbf{K}_{e_{xy}} = \int_0^l \mathbf{H}''_{xy}(x) EI_z \mathbf{H}''_{xy}{}^T(x) dx$$

$\mathbf{f}_{e_{xyV}}$ ist der Lastvektor aus der Elementstreckenlasten

$$\mathbf{f}_{e_{xyV}} = \int_0^l \mathbf{H}_{xy}(x) q_y dx$$

und $\mathbf{f}_{e_{xyS}}$ der Vektor der Knotenkräfte:

$$\mathbf{f}_{e_{xyS}} = \left[\mathbf{H}_{xy}(x) \boldsymbol{\alpha} \right]_0^l + \left[\mathbf{H}_{xy}(x) \mathbf{Q}_y \right]_0^l - \left[\mathbf{H}'_{xy}(x) \mathbf{M}_z \right]_0^l$$

Der Vektor $\mathbf{H}_{xy}(x)$ ist an der Stelle $x = l$ bzw. $x = 0$ wie folgt definiert

$$\mathbf{H}_{xy}(x=l) = \begin{bmatrix} h_1(x=l) \\ h_2(x=l) \\ h_3(x=l) \\ h_4(x=l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{H}_{xy}(x=0) = \begin{bmatrix} h_1(x=0) \\ h_2(x=0) \\ h_3(x=0) \\ h_4(x=0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

bzw.

$$\mathbf{H}'_{xy}(x=l) = \begin{bmatrix} h'_1(x=l) \\ h'_2(x=l) \\ h'_3(x=l) \\ h'_4(x=l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{H}'_{xy}(x=0) = \begin{bmatrix} h'_1(x=0) \\ h'_2(x=0) \\ h'_3(x=0) \\ h'_4(x=0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Daraus folgt für den Vektor der Elementknotenkräfte $\mathbf{f}_{e_{xyS}}$

$$\mathbf{f}_{e_{xyS}} = \begin{bmatrix} -(\alpha' + Q) |_{x=0} \\ M |_{x=0} \\ (\alpha' + Q) |_{x=l} \\ -M |_{x=l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ M_5 \\ Q_6 \\ M_{10} \end{bmatrix}$$

Um die Integrale der Elementmatrizen einfacher auszuwerten, werden die natürlichen Koordinaten eingeführt, siehe Abbildung 8.

Mit

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{2x}{l} - 1 & \text{für} \quad -1 \leq \xi \leq 1 \\ x &= \frac{(\xi + 1)l}{2} & \text{für} \quad 0 \leq x \leq l \end{aligned} \quad (28)$$

ergeben die Interpolationspolynome $\mathbf{H}_{xy}(\xi)$

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{(\xi - 1)^2(\xi + 2)}{4} \\ h_2 &= \frac{l(\xi - 1)^2(\xi + 1)}{8} \\ h_3 &= \frac{-(\xi + 1)^2(\xi - 2)}{4} \\ h_4 &= \frac{l(\xi + 1)^2(\xi - 1)}{8} \end{aligned}$$

In der Abbildung 9 ist der Verlauf der Formfunktionen dargestellt.

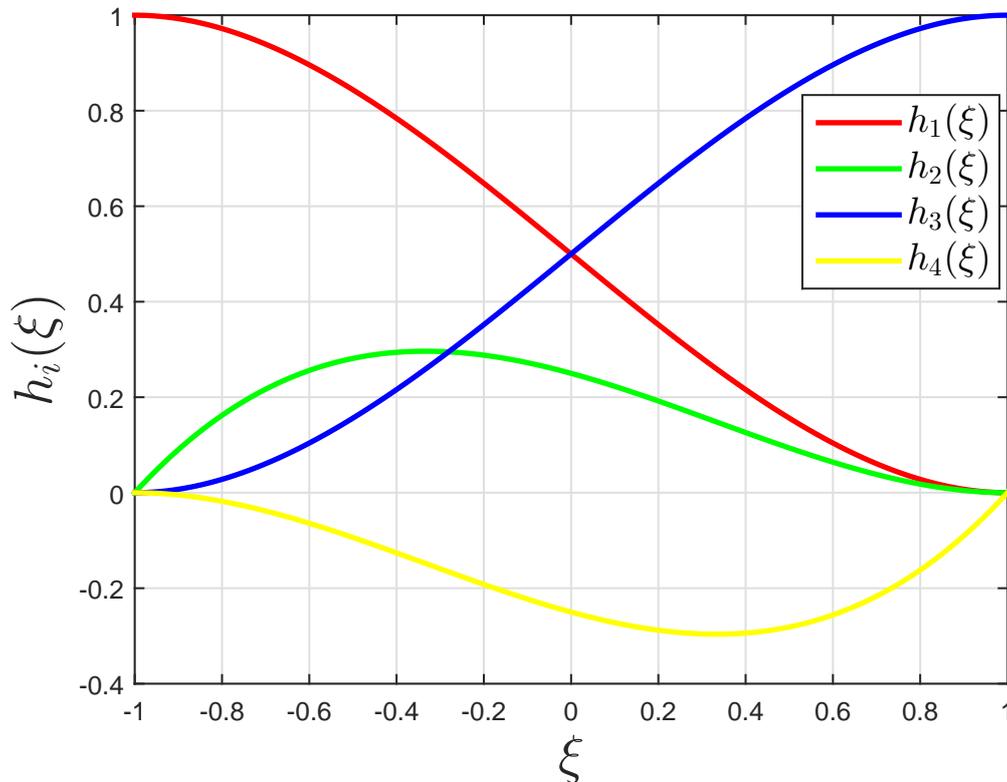


Abbildung 9: HERMITESche Polynome in der xy -Ebene

Daraus folgt für die Elementmassenmatrix

$$\mathbf{M}_{e_{xy}} = \int_0^l \mathbf{H}_{xy}(x) \rho A \mathbf{H}_{xy}^T(x) dx + \int_0^l \mathbf{H}'_{xy}(x) \rho J_p \mathbf{H}'_{xy}^T(x) dx$$

nach Transformation (28)

$$dx = \frac{l}{2} d\xi \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{l}$$

sowie für die Ableitungen der Formfunktionen

$$\mathbf{H}'_{xy}(x) = \frac{d\mathbf{H}_{xy}(x)}{dx} = \frac{d\mathbf{H}_{xy}(x)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{l} \frac{d\mathbf{H}_{xy}(x)}{d\xi} = \frac{2}{l} \mathbf{H}'_{xy}(\xi)$$

$$\mathbf{H}''_{xy}(x) = \frac{d^2\mathbf{H}_{xy}(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left[\frac{d\mathbf{H}_{xy}(x)}{dx} \right] = \frac{2}{l} \frac{d}{dx} \left[\frac{d\mathbf{H}_{xy}(x)}{d\xi} \right] = \frac{2}{l} \frac{d}{d\xi} \left[\frac{d\mathbf{H}_{xy}(x)}{dx} \right] = \frac{4}{l^2} \frac{d^2\mathbf{H}_{xy}(\xi)}{d\xi^2} = \frac{4}{l^2} \mathbf{H}''_{xy}(\xi)$$

folgender Ausdruck in natürlichen Koordinaten

$$\mathbf{M}_{e_{xy}} = \frac{l}{2} \rho A \int_{-1}^1 \mathbf{H}_{xy}(\xi) \mathbf{H}_{xy}^T(\xi) d\xi + \frac{2}{l} \rho J_p \int_{-1}^1 \mathbf{H}'_{xy}(\xi) \mathbf{H}'_{xy}^T(\xi) d\xi$$

Die Integralauswertung der Elementmassenmatrix ergibt

$$\mathbf{M}_{e_{xy}} = \begin{bmatrix} \frac{13}{35}\rho Al + \frac{6}{5l}\rho I_p & \frac{11}{210}\rho Al^2 + \frac{1}{10}\rho I_p & \frac{9}{70}\rho Al - \frac{6}{5l}\rho I_p & \frac{1}{10}\rho I_p - \frac{13}{420}\rho Al^2 \\ \frac{11}{210}\rho Al^2 + \frac{1}{10}\rho I_p & \frac{1}{105}\rho Al^3 + \frac{2}{15}\rho I_p l & \frac{13}{420}\rho Al^2 - \frac{1}{10}\rho I_p & -\frac{1}{30}\rho I_p l - \frac{1}{140}\rho Al^3 \\ \frac{9}{70}\rho Al - \frac{6}{5l}\rho I_p & \frac{13}{420}\rho Al^2 - \frac{1}{10}\rho I_p & \frac{13}{35}\rho Al + \frac{6}{5l}\rho I_p & -\frac{1}{10}\rho I_p - \frac{11}{210}\rho Al^2 \\ \frac{1}{10}\rho I_p - \frac{13}{420}\rho Al^2 & -\frac{1}{30}\rho I_p l - \frac{1}{140}\rho Al^3 & -\frac{1}{10}\rho I_p - \frac{11}{210}\rho Al^2 & \frac{1}{105}\rho Al^3 + \frac{2}{15}\rho I_p l \end{bmatrix}$$

Die Elementsteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{e_{xy}}$ erhält man analog zu der Elementmassenmatrix. Nach Transformation des Integrales in den natürlichen Koordinaten bekommt man

$$\mathbf{K}_{e_{xy}} = \int_0^l \mathbf{H}_{xy}''(x) EI_z \mathbf{H}_{xy}''^T(x) dx = \frac{8}{l^3} EI_z \int_{-1}^1 \mathbf{H}_{xy}''(\xi) \mathbf{H}_{xy}''^T(\xi) d\xi$$

Die Elemente der Elementsteifigkeitsmatrix nehmen nach der Auswertung folgende Werte an

$$\mathbf{K}_{e_{xy}} = \frac{EI_z}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

Anzumerken ist, dass sowohl die Elementsteifigkeitsmatrix als auch die Elementmassenmatrix symmetrische Matrizen sind.

Schließlich ist der Vektor der Streckenlasten $\mathbf{f}_{e_{xyV}}$

$$\mathbf{f}_{e_{xyV}} = \int_0^l \mathbf{H}_{xy}(x) q_y dx = \frac{l}{2} q_y \int_{-1}^1 \mathbf{H}_{xy}(\xi) d\xi = \frac{q_y l}{12} \begin{bmatrix} 6 \\ l \\ 6 \\ -l \end{bmatrix}$$

Die Umsetzung zur Berechnung der Elementmatrizen in xy-Ebene zeigt folgender Programm-ausdruck mit dem Programm MATLAB.

```

1 clc , close all , clear all
2 syms A E l rho Iz Ip xi qy real
3 % Der Vektor der Formfunktionen
4 H_xy = [((xi - 1)^2*(xi + 2))/4 , (1*(xi - 1)^2*(xi + 1))/8 , ...
5         -((xi + 1)^2*(xi - 2))/4 , (1*(xi - 1)*(xi + 1)^2)/8]';
6 H_xyst = diff(H_xy, xi , 1); % erste Ableitung von H_xy ...
   nach xi
7 H_xystst = diff(H_xy, xi , 2); % zweite Ableitung von H_xy ...

```

```

nach xi
8 % Steifigkeitsmatrix
9 K_xy = E*Iz*8/l^3*int(H_xystst*H_xystst', xi, -1,1)
10 pretty(K_xy) %mathematische Schreibweise
11 % Massenmatrix
12 M_xyT = rho*A*l/2*int(H_xy*H_xy', xi, -1,1); % Translatorisch
13 M_xyR = rho*Ip*2/l*int(H_xyst*H_xyst', xi, -1,1); % Rotatorisch
14 M_e = M_xyT+M_xyR
15 pretty(M_e)
16 % Der Vektor der Streckenlasten
17 fe_s = l*qy/2*int(H_xy, xi, -1,1)
18 pretty(fe_s)
19 subplot(1,3,1) % Plot der Matrizen
20 spy(fe_s), title('Streckenlasten')
21 subplot(1,3,2)
22 spy(M_e), title('Massenmatrix')
23 subplot(1,3,3)
24 spy(K_xy), title('Steifigkeitsmatrix')

```

b) Elementmatrizen des Balkens in xz -Ebene

Analog zu den Schritten für den Aufbau der Elementmatrizen des Balkens in der xy -Ebene, werden auch hier durchgegangen, um die Balkenmatrizen in der xz -Ebene herzuleiten.

In der Abbildung 10 ist das Balkenelement in der xz -Ebene mit Knotenfreiheitsgrade und Knotenlasten dargestellt.

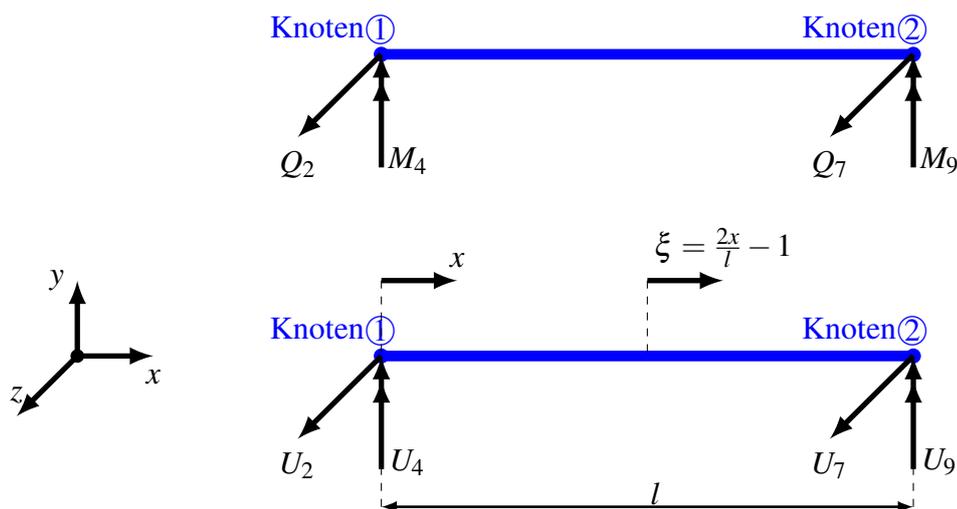


Abbildung 10: FE-Element des Balkens in xz -Ebene

Zuerst wird die gesuchte Feldgröße $w(x,t)$ in der integraler Form der Gleichung (19) näh-

ungsweise durch eine Ansatzfunktion vom dritten Grades approximiert.

$$\int_0^l \delta w \rho A \ddot{w} dx + \int_0^l \delta w' \rho J_p \ddot{w}' dx + \int_0^l \delta w'' EI_y w'' dx = \left[\delta w \rho J_p \ddot{w}' \right]_0^l - \left[\delta w EI_y w''' \right]_0^l + \left[\delta w' EI_y w'' \right]_0^l + \int_0^l \delta w q_z dx \quad (29)$$

$$w(x,t) \approx w_h(x,t) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$w'_h(x,t) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$$

Durch die Verschiebungsrandbedingungen an den beiden Knoten des Balkenelements in der Abbildung 10, können die vier unbekannte Konstanten a_0 bis a_3 bestimmt werden.

$$\left. \begin{aligned} w_h(x=0,t) = U_2 &= a_0 \\ w'_h(x=0,t) = -U_4 &= a_1 \\ w_h(x=l,t) = U_7 &= a_0 + a_1 l + a_2 l^2 + a_3 l^3 \\ w'_h(x=l,t) = -U_9 &= a_1 + 2a_2 l + 3a_3 l^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} U_2 \\ U_4 \\ U_7 \\ U_9 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & -1 & -2l & -3l^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

damit hat die approximierte Feldgröße $w_h(x,t)$

$$w_h(x,t) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \mathbf{B}^{-1} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_4 \\ U_7 \\ U_9 \end{bmatrix} = \mathbf{H}_{xz}^T(x) \mathbf{U}_{xz}(t)$$

mit

$$\mathbf{H}_{xz}^T(x) = \left[1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}, \quad -\left(x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right), \quad \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}, \quad -\left(-\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right) \right] \mathbf{B}^{-1}$$

$$\mathbf{U}_{xz}(t) = \begin{bmatrix} U_2 & U_4 & U_7 & U_9 \end{bmatrix}^T$$

Klein Stückprogramm für die Berechnung der Vektor der Formfunktionen $\mathbf{H}_{xz}(x) = (\mathbf{B}^{-1})^T \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$

```

1 % Berechnung der Vektor der Formfunktionen H_xz(x)
2 syms x 1 real
3 B      = [1 0 0 0; 0 -1 0 0;      % Matrix B
4          1 1 1^2 1^3; 0 -1 -2*1 -3*1^2];
5 V      = [1 x x^2 x^3];
6 H_xz   = (B^-1)'*V'              % Vektor der Formfunktionen
7 pretty(H_xz);                    % Mathematische Schreibweise von ...
      H_xz
8 H_x0   = subs(H_xz,x,0)          % H_xz soll an der stelle "X=0" ...
      1 sein
9 Hst_x0 = subs(diff(H_xz,x),x,0) % H'_xz soll an der stelle "X=0" ...
      1 sein
10 H_x1  = subs(H_xz,x,1),         % H_xz soll an der stelle "X=1" ...
      1 sein
11 Hst_x1 = subs(diff(H_xz,x),x,1) % H'_xz soll an der stelle "X=1" ...
      1 sein

```

Mit dem Ansatzfunktion $w_h(x,t)$ wird nun die schwache Form approximiert. Das heißt, das Intervall der Integration wird in einzelne keile Intervalle unterteilt.

Nach dem Einsetzen des Ansatzes in die Gleichung (29) und einige Umformungen bekommt man

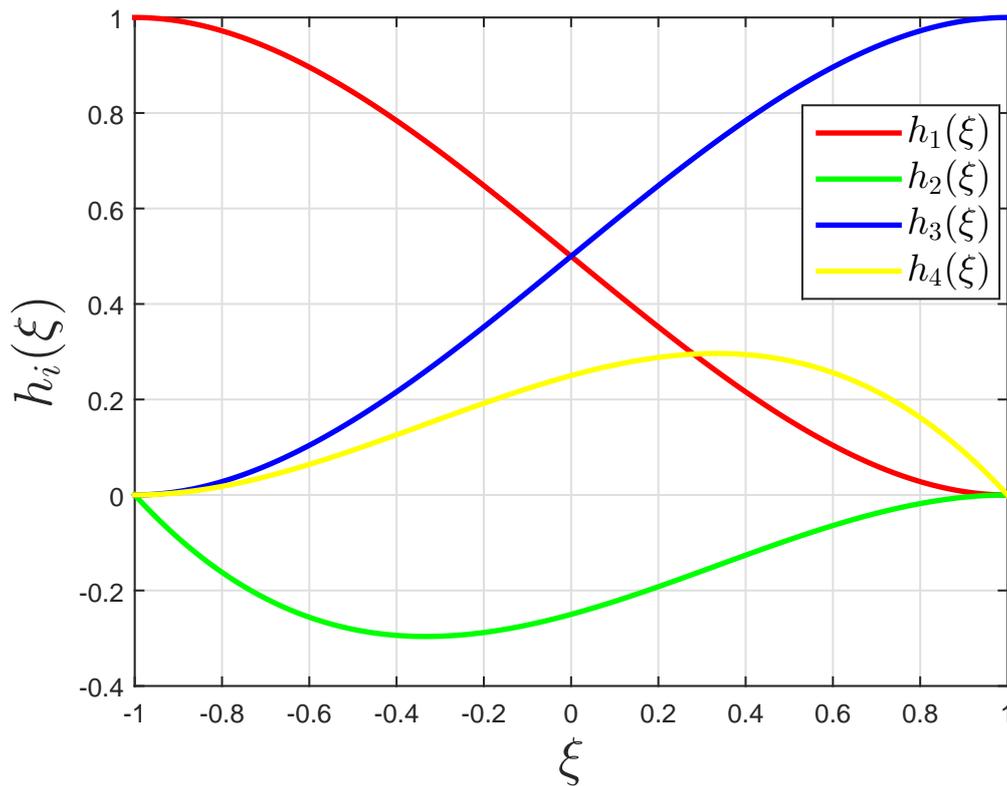


Abbildung 11: HERMITESCHE Polynome in der xz -Ebene

$$\begin{aligned}
 & \int_0^l \delta \mathbf{U}_{xz}^T \mathbf{H}_{xz}(x) \rho A \mathbf{H}_{xz}^T(x) \ddot{\mathbf{U}}_{xz}(t) dx + \int_0^l \delta \mathbf{U}_{xz}^T \mathbf{H}'_{xz}(x) \rho J_p \mathbf{H}'_{xz}(x) \ddot{\mathbf{U}}_{xz}(t) dx + \\
 & \int_0^l \delta \mathbf{U}_{xz}^T \mathbf{H}''_{xz}(x) E I_y \mathbf{H}''_{xz}(x) \mathbf{U}_{xz}(t) dx = \\
 & \left[\delta \mathbf{U}_{xz}^T \mathbf{H}_{xz}(x) \rho J_p \ddot{\mathbf{w}}' \right]_0^l - \left[\delta \mathbf{U}_{xz}^T \mathbf{H}_{xz}(x) E I_y \mathbf{w}''' \right]_0^l + \left[\delta \mathbf{U}_{xz}^T \mathbf{H}'_{xz}(x) E I_y \mathbf{w}'' \right]_0^l + \\
 & \int_0^l \delta \mathbf{U}_{xz}^T \mathbf{H}_{xz}(x) q_z dx \quad (30)
 \end{aligned}$$

Auch hier wird die Virtuelle Verschiebung $\delta \mathbf{U}_{xz}^T$ ausgeklammert und die Vektorverschiebung

$\mathbf{U}_{xz}(t)$ sowie die Vektorbeschleunigung $\ddot{\mathbf{U}}_{xz}(t)$ hinter dem Integrale gezogen

$$\delta \mathbf{U}_{xz}^T \left[\int_0^l \mathbf{H}_{xz}(x) \rho A \mathbf{H}_{xz}^T(x) dx \ddot{\mathbf{U}}_{xz}(t) + \int_0^l \mathbf{H}'_{xz}(x) \rho J_p \mathbf{H}'_{xz}(x) dx \ddot{\mathbf{U}}_{xz}(t) + \int_0^l \mathbf{H}_{xz}''(x) EI_y \mathbf{H}_{xz}''^T(x) dx \mathbf{U}_{xz}(t) - \left[\mathbf{H}_{xz}(x) \rho J_p \ddot{w}' \right]_0^l + \left[\mathbf{H}_{xz}(x) EI_y w'''' \right]_0^l - \left[\mathbf{H}'_{xz}(x) EI_y w'' \right]_0^l - \int_0^l \mathbf{H}_{xz}(x) q_z dx \right] = 0$$

Da die virtuellen Verschiebungen beliebig sind, ist der Klammerausdruck Null. Es folgt daraus die Schwingungsgleichung.

$$\mathbf{M}_{e_{xz}} \ddot{\mathbf{U}}_{xz}(t) + \mathbf{K}_{e_{xz}} \mathbf{U}_{xz}(t) = \mathbf{f}_{e_{xzS}} + \mathbf{f}_{e_{xzV}} \quad (31)$$

Dabei ist

$$\mathbf{M}_{e_{xz}} = \mathbf{M}_{e_{xzT}} + \mathbf{M}_{e_{xzR}} \quad \text{die Massenmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{e_{xzT}} = \int_0^l \mathbf{H}_{xz}(x) \rho A \mathbf{H}_{xz}^T(x) dx \quad \text{translatorischer Anteil}$$

$$\mathbf{M}_{e_{xzR}} = \int_0^l \mathbf{H}'_{xz}(x) \rho J_p \mathbf{H}'_{xz}(x) dx \quad \text{rotatorischer Anteil}$$

$$\mathbf{K}_{e_{xz}} = \int_0^l \mathbf{H}_{xz}''(x) EI_y \mathbf{H}_{xz}''^T(x) dx \quad \text{die Steifigkeitsmatrix}$$

$$\mathbf{f}_{e_{xzS}} = \left[\mathbf{H}_{xz}(x) \rho J_p \ddot{w}' \right]_0^l - \left[\mathbf{H}_{xz}(x) EI_y w'''' \right]_0^l + \left[\mathbf{H}'_{xz}(x) EI_y w'' \right]_0^l \quad \text{der Vektor der Knotenlasten}$$

$$\mathbf{f}_{e_{xzV}} = \int_0^l \mathbf{H}_{xz}(x) q_z dx \quad \text{der Vektor der Streckenlasten}$$

Genauso wie in der xy -Ebene, werden hier auch die Integrale in den natürlichen Koordinaten transformiert. mit

$$\xi = \frac{2x}{l} - 1 \quad \forall \quad -1 \leq \xi \leq 1$$

$$dx = \frac{l}{2} d\xi$$

$$\mathbf{H}'_{xz}(x) = \frac{d\mathbf{H}_{xz}(x)}{dx} = \frac{d\mathbf{H}_{xz}(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{l} \frac{d\mathbf{H}_{xz}(\xi)}{d\xi} = \frac{2}{l} \mathbf{H}'_{xz}(\xi)$$

$$\mathbf{H}_{xz}''(x) = \frac{4}{l^2} \mathbf{H}_{xz}''(\xi)$$

folgt für die Matrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{e_{xz}} &= \frac{l}{2} \rho A \int_{-1}^l \mathbf{H}_{xz}(\xi) \mathbf{H}_{xz}^T(\xi) d\xi + \frac{2}{l} \rho J_p \int_{-1}^l \mathbf{H}'_{xz}(\xi) \mathbf{H}'_{xz}^T(\xi) d\xi \\ \mathbf{K}_{e_{xz}} &= \frac{8}{l^3} EI_y \int_{-1}^l \mathbf{H}''_{xz}(\xi) \mathbf{H}''_{xz}^T(\xi) d\xi \\ \mathbf{f}_{e_{xzS}} &= \left[\mathbf{H}_{xz}(x) \rho J_p \ddot{w}' \right]_0^l - \left[\mathbf{H}_{xz}(x) EI_y w''' \right]_0^l + \left[\mathbf{H}'_{xz}(x) EI_y w'' \right]_0^l \\ &= \left[\mathbf{H}_{xz}(x) \rho J_p \ddot{w}' - \mathbf{H}_{xz}(x) EI_y w''' + \mathbf{H}'_{xz}(x) EI_y w'' \right]_0^l = \begin{bmatrix} Q_2 \\ M_4 \\ Q_7 \\ M_9 \end{bmatrix} \\ \mathbf{f}_{e_{xzV}} &= \int_0^l \mathbf{H}_{xz}(x) q_z dx = \frac{l}{2} q_z \int_{-1}^l \mathbf{H}_{xz}(\xi) d\xi = \frac{q_z l}{12} \begin{bmatrix} 6 \\ -l \\ 6 \\ l \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Die berechneten Matrizen $\mathbf{M}_{e_{xz}}$ und $\mathbf{K}_{e_{xz}}$ sehen wie folgt aus:

$$\mathbf{M}_{e_{xz}} = \begin{bmatrix} \frac{13}{35} \rho A l + \frac{6}{5l} \rho I_p & -\frac{11}{210} \rho A l^2 - \frac{1}{10} \rho I_p & \frac{9}{70} \rho A l - \frac{6}{5l} \rho I_p & -\frac{1}{10} \rho I_p + \frac{13}{420} \rho A l^2 \\ -\frac{11}{210} \rho A l^2 - \frac{1}{10} \rho I_p & \frac{1}{105} \rho A l^3 + \frac{2}{15} \rho I_p l & -\frac{13}{420} \rho A l^2 + \frac{1}{10} \rho I_p & -\frac{1}{30} \rho I_p l - \frac{1}{140} \rho A l^3 \\ \frac{9}{70} \rho A l - \frac{6}{5l} \rho I_p & -\frac{13}{420} \rho A l^2 + \frac{1}{10} \rho I_p & \frac{13}{35} \rho A l + \frac{6}{5l} \rho I_p & \frac{1}{10} \rho I_p + \frac{11}{210} \rho A l^2 \\ -\frac{1}{10} \rho I_p + \frac{13}{420} \rho A l^2 & -\frac{1}{30} \rho I_p l - \frac{1}{140} \rho A l^3 & \frac{1}{10} \rho I_p + \frac{11}{210} \rho A l^2 & \frac{1}{105} \rho A l^3 + \frac{2}{15} \rho I_p l \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{e_{xz}} = \frac{EI_y}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

Für die Kontrolle auch hier das Matlab Programm

```

1 % xz -Ebene
2 syms A E l rho Iy Ip xi qz real
3 % Der Vektor der Formfunktionen
4 H_xz = [((xi - 1)^2*(xi + 2))/4 , -(1*(xi - 1)^2*(xi + 1))/8 , ...
5         -((xi + 1)^2*(xi - 2))/4 , -(1*(xi - 1)*(xi + 1)^2)/8]';
6 H_xzst = diff(H_xz, xi, 1); % erste Ableitung von H_xy ...
   nach xi
7 H_xzstst = diff(H_xz, xi, 2); % zweite Ableitung von H_xy ...

```

```

nach xi
8 % Steifigkeitsmatrix
9 Ke_xz = E*Iy*8/l^3*int(H_xzstst*H_xzstst',xi,-1,1)
10 pretty(Ke_xz) % mathematische ...
    Schreibweise
11 % Massenmatrix
12 M_xzT = rho*A*l/2*int(H_xz*H_xz',xi,-1,1); % Translatorisch
13 M_xzR = rho*Ip*2/l*int(H_xzst*H_xzst',xi,-1,1); % Rotatorisch
14 Me_xz = M_xzT+M_xzR
15 pretty(Me_xz)
16 % Der Vektor der Streckenlasten
17 fexz_v = l*qz/2*int(H_xz,xi,-1,1)
18 pretty(fexz_v)
19 subplot(1,3,1) % Plot der Matrizen
20 spy(fexz_v),title('Streckenlasten')
21 subplot(1,3,2)
22 spy(Me_xz),title('Massenmatrix')
23 subplot(1,3,3)
24 spy(Ke_xz),title('Steifigkeitsmatrix')

```

c) Elementmatrizen des Torsionsstabes

Nachdem die Elementmatrizen des Balkens in der beiden Ebenen fertiggestellt sind, wird nun die Elementmatrizen und die Knotenkräfte des Torsionsstab erstellt.

Die Abbildung 12 zeigt das Torsionsstabelement mit den zugehörigen Freiheitsgrade und Knotenlasten.

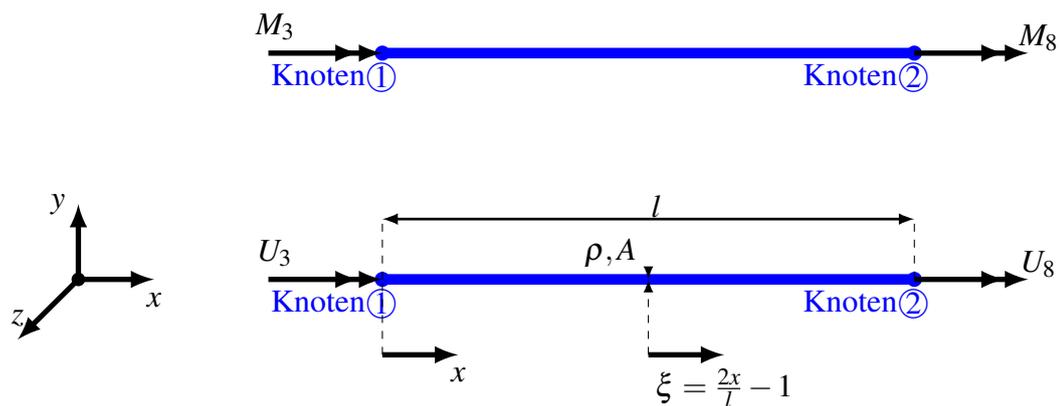


Abbildung 12: FE-Element des Torsionsstabes

Die schwache Form des Stabes laute nach der Gleichung (10) wie folgt

$$\int_0^l \delta \theta \rho J_p \ddot{\theta} dx + \int_0^l \delta \theta' G J_p \theta' dx = \int_0^l \delta \theta m_t dx + \left[\delta \theta M_t \right]_0^l \quad (32)$$

Für die Verschiebung $\theta(x, t)$ muss mindestens lineare Ansatzfunktion gewählt werden, da sonst die Bedingung $M_t = G J_p \theta'$ nicht erfüllt ist. Von daher wird für die Verdrehung des Stabes um die x -Achse folgenden Ansatzfunktion

$$\theta(x, t) \approx \theta_h(x, t) = a_0 + a_1 x = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Mit der Verschiebungsrandbedingung an den beiden Endknoten des Stabes

$$\theta_h(x = 0, t) = U_3 = a_0 \quad \text{und} \quad \theta_h(x = l, t) = U_8 = a_0 + a_1 l$$

erhält man für die unbekanntenen Konstanten a_0 und a_1 folgendes

$$\begin{bmatrix} U_3 \\ U_8 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

Nach Einsetzen in die Gleichung (33) ergibt für die Ansatzfunktion $\theta_h(x, t)$ folgendes

$$\theta_h(x, t) = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} C^{-1} \begin{bmatrix} U_3 \\ U_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} & \frac{x}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_3 \\ U_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_3 \\ U_8 \end{bmatrix} = \mathbf{N}^T(x) \mathbf{U}_x(t) \quad (34)$$

Für die Virtuelle Verschiebung $\delta \theta$ wird die Gleichung Ansatz verwendet

$$\delta \theta \approx \delta \theta_h = \mathbf{N}^T(x) \delta \mathbf{U}_x = \delta \mathbf{U}_x^T \mathbf{N}(x)$$

Nun wird die Ansatzfunktion in die schwache Form, Gleichung (32), eingesetzt, das ergibt

$$\int_0^l \delta \mathbf{U}_x^T \mathbf{N}(x) \rho J_p \mathbf{N}^T(x) \ddot{\mathbf{U}}_x(t) dx + \int_0^l \delta \mathbf{U}_x^T \mathbf{N}'(x) G J_p \mathbf{N}'^T(x) \mathbf{U}_x(t) dx = \int_0^l \delta \mathbf{U}_x^T \mathbf{N}(x) m_t dx + \left[\delta \mathbf{U}_x^T \mathbf{N}(x) M_t \right]_0^l \quad (35)$$

Die virtuellen Verschiebungen sind beliebig, sie werden vom Integral ausgeklammert. Es ergibt

bleibt schließlich folgendes

$$\int_0^l \mathbf{N}(x) \rho J_p \mathbf{N}^T(x) \ddot{\mathbf{U}}_x(t) dx + \int_0^l \mathbf{N}'(x) G J_p \mathbf{N}'^T(x) \mathbf{U}_x(t) dx = \int_0^l \mathbf{N}(x) m_t dx + \left[\mathbf{N}(x) M_t \right]_0^l \quad (36)$$

Daraus folgt

$$\mathbf{M}_{e_x} \ddot{\mathbf{U}}_x(t) + \mathbf{K}_{e_x} \mathbf{U}_x(t) = \mathbf{f}_{e_{xV}} + \mathbf{f}_{e_{xS}} \quad (37)$$

Dabei ist

$$\mathbf{M}_{e_x} = \rho J_p \int_0^l \mathbf{N}(x) \mathbf{N}^T(x) dx$$

die Elementmassenmatrix des Torsionsstabes,

$$\mathbf{K}_{e_x} = G J_p \int_0^l \mathbf{N}'(x) \mathbf{N}'^T(x) dx$$

die Elementsteifigkeitsmatrix,

$$\mathbf{f}_{e_{xV}} = \int_0^l \mathbf{N}(x) m_t dx$$

der Vektor der verteilte Moment,

$$\mathbf{f}_{e_{xS}} = \left[\mathbf{N}(x) M_t \right]_0^l$$

Vektor der Knotenkräfte des Torsionsstabes. Transformiert man die Integrale in die Natürlichen Koordinaten bekommt man folgendes:

$$\xi = \frac{2x}{l} - 1 \quad \implies \quad dx = \frac{l}{2} d\xi \quad \text{für} \quad -1 \leq \xi \leq 1$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(x) &= \left[1 - \frac{x}{l} \quad \frac{x}{l} \right] \quad \implies \quad \mathbf{N}(\xi) = \left[\frac{1}{2}(1 - \xi) \quad \frac{1}{2}(1 + \xi) \right] \\ \mathbf{N}'(x) &= \frac{2}{l} \mathbf{N}'(\xi) \end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_{e_x} = \rho J_p \frac{l}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{N}(\xi) \mathbf{N}^T(\xi) d\xi \quad (38)$$

$$\mathbf{K}_{e_x} = GJ_p \frac{2}{l} \int_{-1}^1 \mathbf{N}'(\xi) \mathbf{N}'^T(\xi) d\xi \quad (39)$$

$$\mathbf{f}_{e_{xv}} = m_t \frac{l}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{N}(\xi) d\xi \quad (40)$$

$$\mathbf{f}_{e_{xs}} = \left[\mathbf{N}(\xi) M_t \right]_{-1}^1 = \begin{bmatrix} N_1(\xi=1) \\ N_2(\xi=1) \end{bmatrix} M_t |_{\xi=1} - \begin{bmatrix} N_1(\xi=-1) \\ N_2(\xi=-1) \end{bmatrix} M_t |_{\xi=-1} \quad (41)$$

$$= \begin{bmatrix} -M_t |_{\xi=-1} \\ M_t |_{\xi=1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_3 \\ M_8 \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$\mathbf{M}_{e_x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \rho J_p l & \frac{1}{6} \rho J_p l \\ \frac{1}{6} \rho J_p l & \frac{1}{3} \rho J_p l \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{e_x} = \begin{bmatrix} \frac{GJ_p}{l} & -\frac{GJ_p}{l} \\ -\frac{GJ_p}{l} & \frac{GJ_p}{l} \end{bmatrix} \quad (43)$$

Die Abbildung 13 zeigt den Verlauf der Formfunktion $\mathbf{N}(\xi)$ Für die Berechnung der Element-

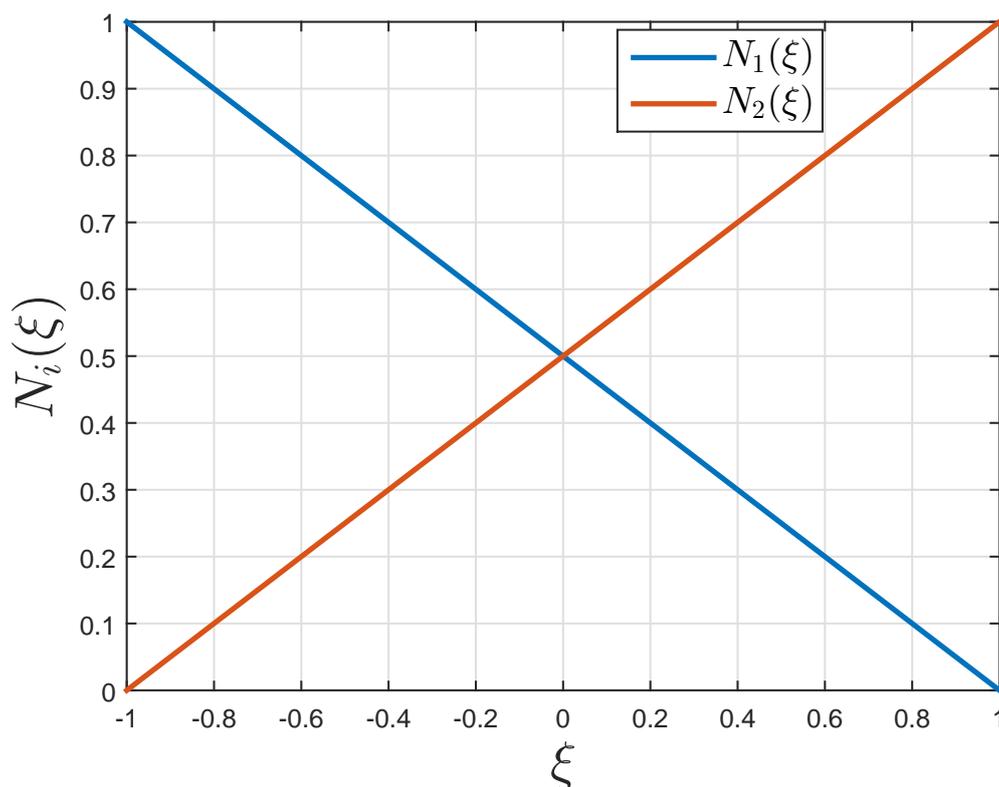


Abbildung 13: FORMFUNKTIONEN DES STABELEMENTES

matrizen des Stabes ist das folgende MATLAB Skript

```

1 syms xi l Jp G rho m_t
2 N = [(1 - xi)/2 (1+xi)/2]';
3 Nst = diff(N, xi, 1);
4 % Steifigkeitsmatrix des Elementstabes
5 K_ex = G*Jp*2/l*int(Nst*Nst', xi, -1, 1)
6 % Massenmatrix des Elementstabes
7 M_ex = rho*Jp*l/2*int(N*N', -1, 1)
8 % Vektor der verteilte Momente
9 fexV = m_t*l/2*int(N, -1, 1)

```

2.5 Lösungsverfahren

Die Differentialgleichungen in dieser Arbeit werden mit zwei Integrationsverfahren integriert. Das erste ist das RUNGE-KUTTA Verfahren und das zweite ist das NEWMARK Verfahren.

Rung-Kutta-Verfahren

Das RUNGE-KUTTA-Verfahren wird auf die Differentialgleichungen erster Ordnung angewendet. Eine Differentialgleichung erster Ordnung hat die Form

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = f(t, y(t)) \quad ; \quad y(t_0) = y_0 \quad (44)$$

durch integration innerhalb des intervalls $[t_n, t_{n+1}]$ folgt

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} dy &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \\ y(t_{n+1}) - y(t_n) &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \\ y(t_{n+1}) &= y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \end{aligned} \quad (45)$$

Hierin stellt der letzte Summand in Gleichung (45) die gesuchte Funktion dar. Der Summand wird näherungsweise an vier Stellen der Schrittweite $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ ausgewertet. Für den Summand erhält man die Vorschrift [13]

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \approx \frac{\Delta t}{6} \left(k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4 \right)$$

Für die Gleichung (44) folgt

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{6} \left(k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4 \right) \quad (46)$$

für die Vereinfachung

$$y_{n+1} = y(t_{n+1}) ; \quad y_n = y(t_n)$$

mit

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n) \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{\Delta t}{2} k_1\right) \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{\Delta t}{2} k_2\right) \\ k_4 &= f(t_n + \Delta t, y_n + \Delta t k_3) \end{aligned}$$

Wobei die k_1 bis k_4 die Funktionswerte von $f(t, y(t))$ innerhalb des Zeitschrittes $\Delta t = [t_n, t_{n+1}]$ sind. Die Gleichung (46) wird auf Differentialgleichungen erster Ordnung angewendet.

Newmark-Verfahren

Das zweite Verfahren nach NEWMARK, ist ein implizites Integrationsverfahren. Im Unterschied zu den expliziten Methoden, wird die Schwingungsdifferentialgleichung

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_n + \mathbf{D}\dot{\mathbf{U}}_n + \mathbf{K}\mathbf{U}_n = \mathbf{F}(t_n) \quad (47)$$

mit diesem Verfahren nicht zum Zeitpunkt t_n , sondern im nächsten Zeitpunkt t_{n+1} ausgewertet [13: Seite 391]. Beim NEWMARK-Verfahren werden die Verschiebungen und Geschwindigkeiten der Differentialgleichung zur Zeitpunkt t_{n+1} wie folgt approximiert [14]

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_n + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left[(1 - 2\beta) \ddot{\mathbf{U}}_n + 2\beta \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \right] \quad (48)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1} = \dot{\mathbf{U}}_n + \Delta t \left[(1 - \gamma) \ddot{\mathbf{U}}_n + \gamma \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \right] \quad (49)$$

$\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}$, $\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$, \mathbf{U}_{n+1} ist der Beschleunigungs- Geschwindigkeits- und Verschiebungsvektor zur Zeit $(t + \Delta t)$, und $\ddot{\mathbf{U}}_n$, $\dot{\mathbf{U}}_n$, \mathbf{U}_n ist zur Zeit t . Δt die Integrationsschrittweite, β und γ sind konstante NEWMARK-Parameter. Nach [14] ist $0 \leq \beta \leq 0.5$ und $0 \leq \gamma \leq 1$. Anschließend wird die Gleichung (48) nach $\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}$ umgeformt und in die Gleichung (49) eingesetzt, auf dieser Art entsteht der Beschleunigungsvektor und der Geschwindigkeitsvektor in Abhängigkeit von dem

Verschiebungsvektor zum Zeitpunkt t_{n+1} .

$$\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \left[\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n \right] - \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{\mathbf{U}}_n - \frac{(1-2\beta)}{2\beta} \ddot{\mathbf{U}}_n \quad (50)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \left[\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n \right] + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \dot{\mathbf{U}}_n + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \ddot{\mathbf{U}}_n \quad (51)$$

Es werden die folgenden Konstanten für die Vereinfachung der Gleichungen eingeführt

$$\alpha_1 = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\beta\Delta t}, \quad \alpha_3 = \frac{(1-2\beta)}{2\beta}$$

$$\alpha_4 = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}, \quad \alpha_5 = 1 - \frac{\gamma}{\beta}, \quad \alpha_6 = \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)$$

Betrachtet wird nun die allgemeine Schwingungsgleichung zur Zeit t_{n+1}

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{U}}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{F}(t_{n+1}) \quad (52)$$

mit \mathbf{M} die Massenmatrix, \mathbf{D} die Dämpfungsmatrix, \mathbf{K} die Steifigkeitsmatrix und $\mathbf{F}(t_{n+1})$ der Kraftvektor. Nach dem Einsetzen des Beschleunigungs- und Geschwindigkeitsvektors (Gleichung (50) und (51)) in die Schwingungsgleichung (Gleichung (52)) erhält man

$$\mathbf{M} \left[\alpha_1 (\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n) - \alpha_2 \dot{\mathbf{U}}_n - \alpha_3 \ddot{\mathbf{U}}_n \right] +$$

$$\mathbf{D} \left[\alpha_4 (\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n) + \alpha_5 \dot{\mathbf{U}}_n + \alpha_6 \ddot{\mathbf{U}}_n \right] + \mathbf{K}\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{F}(t_{n+1}) \quad (53)$$

umformen nach \mathbf{U}_{n+1}

$$\left[\alpha_1 \mathbf{M} + \alpha_4 \mathbf{D} + \mathbf{K} \right] \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{F}(t_{n+1}) - \mathbf{M} \left[-\alpha_1 \mathbf{U}_n - \alpha_2 \dot{\mathbf{U}}_n - \alpha_3 \ddot{\mathbf{U}}_n \right] -$$

$$\mathbf{D} \left[-\alpha_4 \mathbf{U}_n + \alpha_5 \dot{\mathbf{U}}_n + \alpha_6 \ddot{\mathbf{U}}_n \right]$$

Daraus folgt

$$\mathbf{U}_{n+1} = \frac{\left[\mathbf{F}(t_{n+1}) - \mathbf{M} \left[-\alpha_1 \mathbf{U}_n - \alpha_2 \dot{\mathbf{U}}_n - \alpha_3 \ddot{\mathbf{U}}_n \right] - \mathbf{D} \left[-\alpha_4 \mathbf{U}_n + \alpha_5 \dot{\mathbf{U}}_n + \alpha_6 \ddot{\mathbf{U}}_n \right] \right]}{\left[\alpha_1 \mathbf{M} + \alpha_4 \mathbf{D} + \mathbf{K} \right]} \quad (54)$$

Mit den Anfangsbedingungen $\mathbf{U}_n = \mathbf{U}_0$, $\dot{\mathbf{U}}_n = \dot{\mathbf{U}}_0$, $\ddot{\mathbf{U}}_n = \ddot{\mathbf{U}}_0$ zur Zeitpunkt t werden die Verschiebungen zur Zeit $t + 1$ gerechnet, und mit der Gleichung (50) und (51) werden die Beschleunigungen und Geschwindigkeiten berechnet. Dies ist möglich nur wenn \mathbf{M} , \mathbf{D} , \mathbf{K} und \mathbf{F} von den

Verschiebungsvektor \mathbf{U} unabhängig sind.

3 Lösung der freigeschnittenen Scheibe

In diesem Abschnitt wird die Untersuchung des Rotors an einem freigeschnittenen Scheibe durchgeführt.

3.1 Herleitung der Differentialgleichungen

Das Modell eines biegeelastischen Rotors besteht aus einer massebehafteten Scheibe und einer elastischen masselosen runden Welle. In der Mitte der Welle ist die Scheibe angeordnet und das Drehzentrum liegt in der Mittelebene der Scheibe, dieser Punkt wird Wellendurchstosspunkt W genannt. Die Exzentrizität ε ist der Abstand zwischen W und der Scheibenschwerpunkt S . Die Verschiebungen von W und S in der (y,z) -Ebene werden mit y_W, z_W und y_S, z_S bezeichnet. Die Scheibe ist gegenüber der Umgebung gegen Translation gedämpft, ausgedrückt mit der Dämpfungskonstante d . Die Lager sind Starr und die Dämpfungskräfte werden vernachlässigt [7: Seite 9] [12: Seite 147]. Weiter wird vorausgesetzt, dass die Scheibe sich nicht schräg stellt.

Nun werden alle auf die Scheibe wirkende Kräfte (Trägheitskräfte und Dämpfungskräfte) im Schwerpunkt S sowie die im Wellendurchstosspunkt W , wirkende elastische Rückstellkräfte c_{yW} und c_{zW} in y,z -Ebene betrachtet, siehe Abbildung 14. Mit dem Kräfte- und Momenteleichgewicht in y und z -Richtung werden die Bewegungsgleichungen aufgestellt.

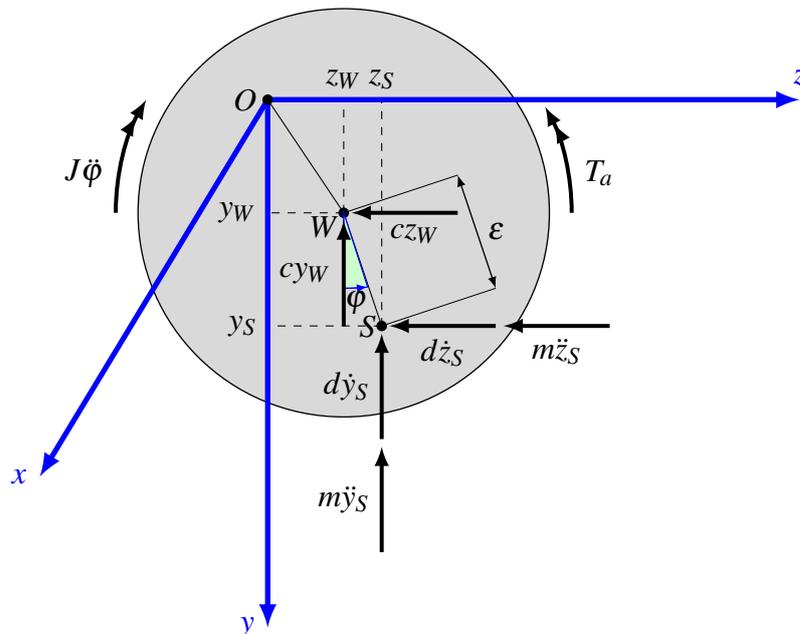


Abbildung 14: Kräftegleichgewicht an der ausgelenkten Scheibenwelle

$$m\ddot{y}_S + d\dot{y}_S + cy_W = 0 \quad (55)$$

$$m\ddot{z}_S + d\dot{z}_S + cz_W = 0 \quad (56)$$

$$J\ddot{\varphi} = T_a + c\varepsilon(z_W \cos(\varphi) - y_W \sin(\varphi)) \quad (57)$$

Symbol	Name
m	Masse der Scheibe
d	Dämpfung
c	Steifigkeit der Welle
J	Massenträgheitsmoment der Scheibe
ε	Exzentrizität
T_a	Antriebsmoment
$\dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$	Drehgeschwindigkeit und Drehbeschleunigung

Tabelle 1: Parameterbedeutung

Zwischen der Wellendurchstoßpunkt W und Scheibenschwerpunkt S besteht der Zusammenhang:

$$y_S = y_W + \varepsilon \cos(\varphi) \quad (58)$$

$$z_S = z_W + \varepsilon \sin(\varphi) \quad (59)$$

Durch die erste und zweite Ableitung nach der Zeit der Gleichungen (58) und (59) bekommt man

$$\dot{y}_S = \dot{y}_W - \varepsilon \dot{\varphi} \sin(\varphi)$$

$$\ddot{y}_S = \ddot{y}_W - \varepsilon \ddot{\varphi} \sin(\varphi) - \varepsilon \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi)$$

$$\dot{z}_S = \dot{z}_W + \varepsilon \dot{\varphi} \cos(\varphi)$$

$$\ddot{z}_S = \ddot{z}_W + \varepsilon \ddot{\varphi} \cos(\varphi) - \varepsilon \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi)$$

Mit einsetzen von den Geschwindigkeiten \dot{y}_S , \dot{z}_S und den Beschleunigungen \ddot{y}_S , \ddot{z}_S , werden die Gleichungen (55) bis (57) auf den Wellendurchstoßpunkt W umgeformt.

$$m\ddot{y}_W - m\varepsilon \ddot{\varphi} \sin(\varphi) - m\varepsilon \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi) + d\dot{y}_W - d\varepsilon \dot{\varphi} \sin(\varphi) + cy_W = 0 \quad (60)$$

$$m\ddot{z}_W + m\varepsilon \ddot{\varphi} \cos(\varphi) - m\varepsilon \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) + d\dot{z}_W + d\varepsilon \dot{\varphi} \cos(\varphi) + cz_W = 0 \quad (61)$$

$$J\ddot{\varphi} = T_a + c\varepsilon(z_W \cos(\varphi) - y_W \sin(\varphi)) \quad (62)$$

Teilt man durch die Masse der Scheibe m mit Berücksichtigung der folgenden Abkürzungen:

$$\frac{d}{m} = 2D\omega_0 \quad \frac{c}{m} = \omega_0^2$$

dabei ist D das Lehrsches Dämpfungsmaß und ω_0 die Eigenkreisfrequenz des Schwingungssystems. Dann bekommt man

$$\ddot{y}_W - \varepsilon \ddot{\varphi} \sin(\varphi) - \varepsilon \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi) + 2D\omega_0 \dot{y}_W - 2D\omega_0 \varepsilon \dot{\varphi} \sin(\varphi) + \omega_0^2 y_W = 0 \quad (63)$$

$$\ddot{z}_W + \varepsilon \ddot{\varphi} \cos(\varphi) - \varepsilon \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) + 2D\omega_0 \dot{z}_W + 2D\omega_0 \varepsilon \dot{\varphi} \cos(\varphi) + \omega_0^2 z_W = 0 \quad (64)$$

$$J\ddot{\varphi} = T_a + c\varepsilon(z_W \cos(\varphi) - y_W \sin(\varphi)) \quad (65)$$

Die Koordinaten hängen von den Parametern ε , D , ω_0 , T_a , c ab. Es werden dimensionslose Größen eingeführt um diese Parameter zu reduzieren.

Es wird die bezogene Zeit $\tau = \omega_0 t$ definiert [1].

Für die Zeitableitungen folgt:

$$\dot{y}_W = \frac{dy_W}{dt} = \frac{dy_W}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \omega_0 y'_W,$$

$$\dot{z}_W = \omega_0 z'_W,$$

$$\ddot{y}_W = \frac{d}{dt} \left[\frac{dy_W}{dt} \right] = \omega_0 \frac{d}{d\tau} \left[\frac{dy_W}{dt} \right] = \omega_0 \frac{d}{d\tau} \left[\omega_0 \frac{dy_W}{d\tau} \right] = \omega_0^2 y''_W,$$

$$\ddot{z}_W = \omega_0^2 z''_W,$$

$$\text{und } \ddot{\varphi} = \omega_0^2 \varphi''$$

Nachdem diese Größen in die Differentialgleichungen (63) bis (65) eingesetzt werden sowie durch ω_0^2 dividieren, erhält man

$$y''_W - \varepsilon \varphi'' \sin(\varphi) - \varepsilon \dot{\varphi}'^2 \cos(\varphi) + 2Dy'_W - 2D\varepsilon \dot{\varphi}' \sin(\varphi) + y_W = 0 \quad (66)$$

$$z''_W + \varepsilon \varphi'' \cos(\varphi) - \varepsilon \dot{\varphi}'^2 \sin(\varphi) + 2Dz'_W + 2D\varepsilon \dot{\varphi}' \cos(\varphi) + z_W = 0 \quad (67)$$

$$\varphi'' = \frac{T_a}{J\omega_0^2} + \frac{c\varepsilon}{J\omega_0^2} (z_W \cos(\varphi) - y_W \sin(\varphi)) \quad (68)$$

Erneut ist eine dimensionslose Kenngröße nötig um die Exzentrizität ε zu eliminieren. Mit den dimensionslosen Koordinaten

$$y = \frac{y_W}{\varepsilon}, \quad z = \frac{z_W}{\varepsilon}$$

und durch teilen der Gleichungen mit ε , folgt

$$y'' - \varphi'' \sin(\varphi) - \varphi'^2 \cos(\varphi) + 2Dy' - 2D\varphi' \sin(\varphi) + y = 0 \quad (69)$$

$$z'' + \varphi'' \cos(\varphi) - \varphi'^2 \sin(\varphi) + 2Dz' + 2D\varphi' \cos(\varphi) + z = 0 \quad (70)$$

$$\varphi'' = \underbrace{\frac{T_a}{J\omega_0^2}}_T + \underbrace{\frac{c\varepsilon^2}{J\omega_0^2}}_e (z \cos(\varphi) - y \sin(\varphi)) \quad (71)$$

Dabei ist e die bezogene Exzentrizität und T das bezogene Antriebsmoment.

In Matrizenschreibweise können die Gleichungen wie folgt aussehen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\varphi) \\ 0 & 1 & \cos(\varphi) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'' \\ z'' \\ \varphi'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2D & 0 & -\varphi' \cos(\varphi) - 2D \sin(\varphi) \\ 0 & 2D & -\varphi' \sin(\varphi) + 2D \cos(\varphi) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' \\ z' \\ \varphi' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ e \sin(\varphi) & -e \cos(\varphi) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T \end{bmatrix}$$

Mit dem Beschleunigungsvektor \mathbf{U}'' , dem Dämpfungsvektor \mathbf{U}' und dem Verschiebungsvektor \mathbf{U}

$$\begin{aligned} \mathbf{U}'' &= [y'' \quad z'' \quad \varphi'']^T = [U_1'' \quad U_2'' \quad U_3'']^T \\ \mathbf{U}' &= [y' \quad z' \quad \varphi']^T = [U_1' \quad U_2' \quad U_3']^T \\ \mathbf{U} &= [y \quad z \quad \varphi]^T = [U_1 \quad U_2 \quad U_3]^T \\ \mathbf{F} &= [0 \quad 0 \quad T]^T \end{aligned}$$

folgt die Differentialgleichung zu

$$\mathbf{M}\mathbf{U}'' + \mathbf{D}\mathbf{U}' + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (72)$$

mit

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\varphi) \\ 0 & 1 & \cos(\varphi) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2D & 0 & -\varphi' \cos(\varphi) - 2D \sin(\varphi) \\ 0 & 2D & -\varphi' \sin(\varphi) + 2D \cos(\varphi) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ e \sin(\varphi) & -e \cos(\varphi) & 0 \end{bmatrix}$$

wobei \mathbf{M} die Massenmatrix, \mathbf{D} die Dämpfungsmatrix und \mathbf{K} die Steifigkeitsmatrix ist.

Die Gleichung (72) ist eine nicht lineare Differentialgleichung von zweiter Ordnung. Sie wird mit zwei numerische Methoden gelöst. Zum einen mit dem RUNGE-KUTTA-Verfahren und zum anderen mit dem NEUMARK-Verfahren.

a) Runge-Kutta-Verfahren

Mit RUNGE-KUTTA-Verfahren muss als erstes die Differentialgleichung auf die erste Ordnung gebracht werden. Das heisst die Gleichung (72) mit drei weiteren weiten Größen beschrieben wird.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} \implies \mathbf{U}' = \begin{bmatrix} U'_1 \\ U'_2 \\ U'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} \implies \mathbf{U}'' = \begin{bmatrix} U''_1 \\ U''_2 \\ U''_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U'_4 \\ U'_5 \\ U'_6 \end{bmatrix}$$

Mit den doppelten Freiheitsgraden nimmt die Differentialgleichung (72) folgende Form an

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} U'_4 \\ U'_5 \\ U'_6 \end{bmatrix} + \mathbf{D} \begin{bmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} + \mathbf{K} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \mathbf{F} \quad (73)$$

Schließlich bekommt man die Differentialgleichungen in der Form

$$\begin{bmatrix} U'_1 \\ U'_2 \\ U'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} \quad (74)$$

$$\begin{bmatrix} U'_4 \\ U'_5 \\ U'_6 \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{-1} \left(-\mathbf{D} \begin{bmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} - \mathbf{K} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} + \mathbf{F} \right) \quad (75)$$

Das folgende Programm zeigt die Gleichungen in MATLAB. Rechnet man ohne Dichtung, können die Parameter alpha und beta für die Dichtung im Programm (Dgl_mit_Dichtung) auf Null gesetzt werden.

```

1 % Funktion der Differentialgleichungen
2 function [dU] = Dgl_mit_Dichtung ( t , U) %#ok<*INUSL>
3 % t : Zeit
4 % U : Verschiebung
5 global d ep T sdof alpha beta
6 dU = zeros(2*sdof,1);
7 iii = 1:2*sdof;
8 U = U(iii)';
9 phi = U(3);
10 phip = U(6);
11 % Massenmatrix
12 M = [1, 0, -sin(phi);
13      0, 1, cos(phi);
14      0, 0, 1];
15 % Daempfungsmatrix
16 D = [2*d*(1+alpha), 0, (-2*d*sin(phi)-phip*cos(phi));
17      0, 2*d*(1+alpha), (2*d*cos(phi)-phip*sin(phi));
18      alpha*2*d*ep*sin(phi), -alpha*2*d*ep*cos(phi), 0];
19 % Steifigkeitsmatrix
20 K = [1+beta, 0, 0;
21      0, 1+beta, 0;
22      (1+beta)*ep*sin(phi), -(1+beta)*ep*cos(phi), 0];
23 % Kraftvektor
24 f = zeros(3,1);
25 f(3) = T;
26 dU(1:sdof) = U(sdof+1:2*sdof);
27 dU(sdof+1:2*sdof) = M\(-D*U(sdof+1:2*sdof)-K*U(1:sdof)+f(:));
28 end

```

Siehe das komplette MATLAB-Programm RK_OhneDichtung und RK_MitDichtung in dem beige-fügten Datenträger.

b) Neumark-Verfahren

Die Differentialgleichungen (72) werden so umgeformt, dass diese mit dem NEWMARK-Verfahren gelöst werden können.

Als erstes werden in den Gleichungen (69) bis (71) die nichtlineare Terme auf die rechte Seite

gebracht.

$$y'' + 2Dy' + y = \varphi'' \sin(\varphi) + \varphi'^2 \cos(\varphi) + 2D\varphi' \sin(\varphi) \quad (76)$$

$$z'' + 2Dz' + z = -\varphi'' \cos(\varphi) + \varphi'^2 \sin(\varphi) - 2D\varphi' \cos(\varphi) \quad (77)$$

$$\varphi'' = T + ez \cos(\varphi) - ey \sin(\varphi) \quad (78)$$

Schreibt man diese Gleichungen nun als Matrixschreibweise um, erhält man

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} y'' \\ z'' \\ \varphi'' \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}''} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2D & 0 & 0 \\ 0 & 2D & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} y' \\ z' \\ \varphi' \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}'} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} y \\ z \\ \varphi \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi'' \sin(\varphi) + \varphi'^2 \cos(\varphi) + 2D\varphi' \sin(\varphi) \\ -\varphi'' \cos(\varphi) + \varphi'^2 \sin(\varphi) - 2D\varphi' \cos(\varphi) \\ T + ez \cos(\varphi) - ey \sin(\varphi) \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}} \quad (79)$$

Oder als Kurzschreibweise

$$\mathbf{M}\mathbf{U}'' + \mathbf{D}\mathbf{U}' + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{U}'', \mathbf{U}', \mathbf{U})$$

Wird diese Gleichung nach (53) (siehe Abschnitt 2.5) umgeformt und alle Terme auf die linke Seite gebracht, ergibt dies folgendes

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}_{n+1}) = \mathbf{M} \left[\alpha_1(\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n) - \alpha_2 \dot{\mathbf{U}}_n - \alpha_3 \ddot{\mathbf{U}}_n \right] + \mathbf{D} \left[\alpha_4(\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n) + \alpha_5 \dot{\mathbf{U}}_n + \alpha_6 \ddot{\mathbf{U}}_n \right] + \mathbf{K}\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{F}(t_{n+1}) = 0 \quad (80)$$

Dabei ist

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2D & 0 & 0 \\ 0 & 2D & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}(t_{n+1}) = \begin{bmatrix} \varphi'' \sin(\varphi) + \varphi'^2 \cos(\varphi) + 2D\varphi' \sin(\varphi) \\ -\varphi'' \cos(\varphi) + \varphi'^2 \sin(\varphi) - 2D\varphi' \cos(\varphi) \\ T + ez \cos(\varphi) - ey \sin(\varphi) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} y \\ z \\ \varphi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}' = \begin{bmatrix} y' \\ z' \\ \varphi' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}'' = \begin{bmatrix} y'' \\ z'' \\ \varphi'' \end{bmatrix}$$

Da der Kraftvektor $\mathbf{F}(t_{n+1})$ von den gesuchten Verschiebungen abhängt, ist die Gleichung (80) nichtlinear. Eine direkte Lösung dafür ist nicht möglich. Mit dem NEWTON-RAPHSON-

Verfahren kann sie linearisiert und iterativ gelöst werden.

Auf der rechten Seite der Gleichung (80) steht eine Null, dass heißt für die Nullstellenbestimmung gilt die Iterationsvorschrift [15] und [16]. Die TAYLOR-Reihe für die Gleichung (80) lautet

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}_{n+1}^{i+1}) = \mathbf{f}(\mathbf{U}_{n+1}^i) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{U}_{n+1})}{\partial \mathbf{U}_{n+1}} \right|_{\mathbf{U}_{n+1}^i} \left[\mathbf{U}_{n+1}^{i+1} - \mathbf{U}_{n+1}^i \right] + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \mathbf{f}(\mathbf{U}_{n+1})}{\partial \mathbf{U}_{n+1}^2} \right|_{\mathbf{U}_{n+1}^i} \left[\mathbf{U}_{n+1}^{i+1} - \mathbf{U}_{n+1}^i \right]^2 + \dots \quad (81)$$

Bricht man die TAYLOR-Reihe nach dem linearen Term ab, bekommt man folgendes

$$\mathbf{U}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{U}_{n+1}^i - \frac{\mathbf{f}(\mathbf{U}_{n+1})}{\left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{U}_{n+1})}{\partial \mathbf{U}_{n+1}} \right|_{\mathbf{U}_{n+1}^i}} \quad \text{für } i=1,2,3,\dots \quad \text{und} \quad \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{U}_{n+1})}{\partial \mathbf{U}_{n+1}} \right|_{\mathbf{U}_{n+1}^i} \neq 0 \quad (82)$$

Siehe das MATLAB-Programm Newmark_OhneDichtung in dem beigefügten Datenträger.

3.2 Berücksichtigung der Dichtung

Das Radialwellendichtring wird als Feder-Dämpfer zur Untersuchung des Rotor modelliert. Die Abbildung 15 zeigt das angebrachte Feder-Dämpfer-Elemente im Wellendurchstoßpunkt W des Rotors. Die Dämpfungselemente haben die Konstanten b und k .

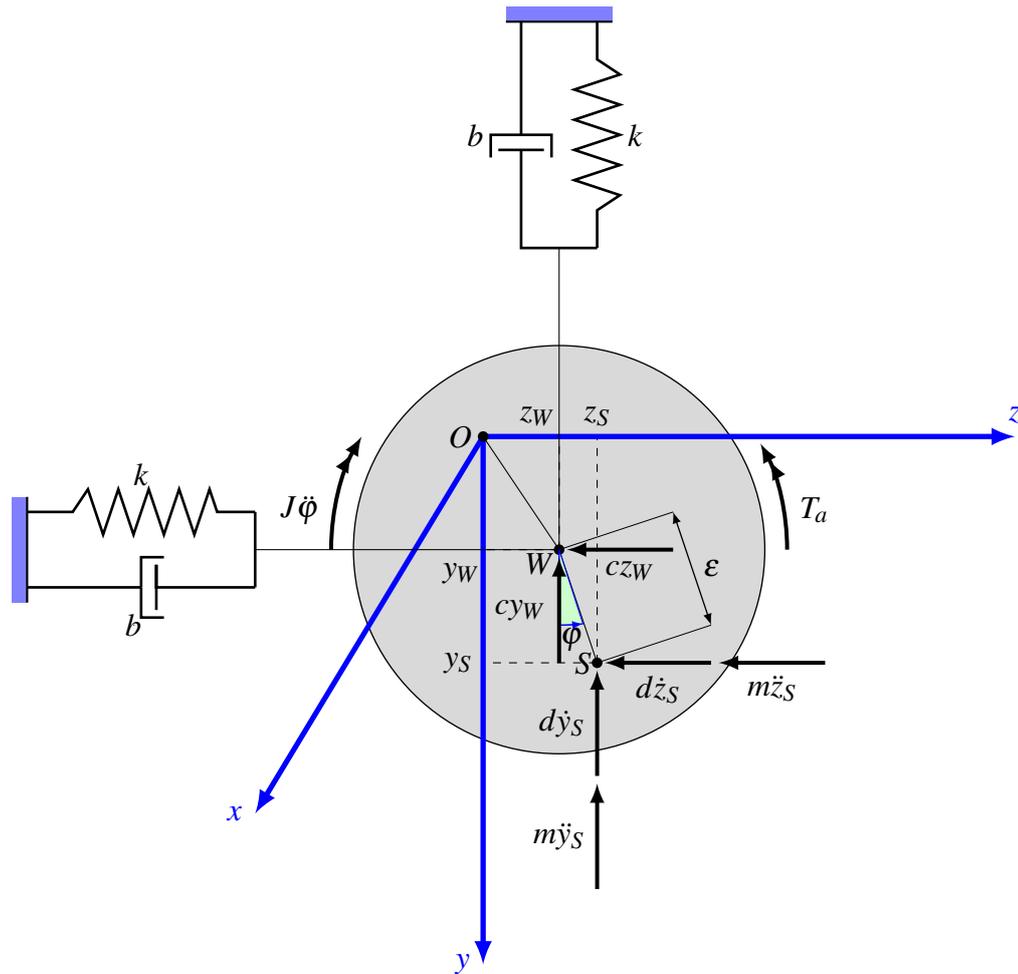


Abbildung 15: Kräftegleichgewicht an der ausgelenkten Scheibenwelle mit Dichtung

Das Kräfte- und Momentengleichgewicht nach Abbildung 15 ergibt folgende Beziehungen:

$$m\ddot{y}_S + d\dot{y}_S + b\dot{y}_W + (c+k)y_W = 0 \quad (83)$$

$$m\ddot{z}_S + d\dot{z}_S + b\dot{z}_W + (c+k)z_W = 0 \quad (84)$$

$$J\ddot{\varphi} = T_a + \varepsilon \left[((k+c)z_W \cos(\varphi) - (k+c)y_W \sin(\varphi)) \right] + \varepsilon b \left[(\dot{z}_W \cos(\varphi) - \dot{y}_W \sin(\varphi)) \right] \quad (85)$$

Nach dem man die Koordinaten des Scheibenschwerpunkts eliminiert, siehe Abschnitt 3.1, erhält man

$$m\ddot{y}_W - m\varepsilon\ddot{\varphi} \sin(\varphi) - m\varepsilon\dot{\varphi}^2 \cos(\varphi) + d\dot{y}_W - d\varepsilon\dot{\varphi} \sin(\varphi) + b\dot{y}_W + (c+k)y_W = 0 \quad (86)$$

$$m\ddot{z}_W + m\varepsilon\ddot{\varphi} \cos(\varphi) - m\varepsilon\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) + d\dot{z}_W + d\varepsilon\dot{\varphi} \cos(\varphi) + b\dot{z}_W + (c+k)z_W = 0 \quad (87)$$

$$J\ddot{\varphi} = T_a + \varepsilon \left[((k+c)z_W \cos(\varphi) - (k+c)y_W \sin(\varphi)) \right] + \varepsilon b \left[(\dot{z}_W \cos(\varphi) - \dot{y}_W \sin(\varphi)) \right] \quad (88)$$

Analog zu Abschnitt 3.1 werden hier dimensionslose Größen eingeführt. Das ergibt nach dem Dividieren durch die Eigenkreisfrequenz ω_0 folgendes

$$y''_W - \varepsilon \varphi'' \sin(\varphi) - \varepsilon \varphi'^2 \cos(\varphi) + 2Dy'_W - 2D\varepsilon \varphi' \sin(\varphi) + 2D\alpha y'_W + (1 + \beta)y_W = 0 \quad (89)$$

$$z''_W + \varepsilon \varphi'' \cos(\varphi) - \varepsilon \varphi'^2 \sin(\varphi) + 2Dz'_W + 2D\varepsilon \varphi' \cos(\varphi) + 2D\alpha z'_W + (1 + \beta)z_W = 0 \quad (90)$$

$$\varphi'' = \frac{T_a}{J\omega_0^2} + \frac{(c+k)\varepsilon}{J\omega_0^2} (z_W \cos(\varphi) - y_W \sin(\varphi)) + \frac{\varepsilon b}{J\omega_0} \left[(z'_W \cos(\varphi) - y'_W \sin(\varphi)) \right] \quad (91)$$

Dabei ist:

$$\frac{b}{m} = \frac{b}{d} \frac{d}{m} = 2D\omega_0\alpha \quad \text{mit} \quad \frac{b}{d} = \alpha \quad \text{dimensionslose Dämpfung}$$

$$\frac{c+k}{m} = \frac{c}{m} + \frac{k}{m} = \omega_0^2 + \frac{k}{c} \frac{c}{m} = \omega_0^2(1 + \beta) \quad \text{mit} \quad \frac{k}{c} = \beta \quad \text{dimensionslose Steifigkeit}$$

Dividiert man nun durch die Exzentrizität ε sowie die dimensionslosen Koordinaten $\frac{y_W}{\varepsilon} = y$ und $\frac{z_W}{\varepsilon} = z$, nehmen die Gleichungen folgende Form an

$$y'' - \varphi'' \sin(\varphi) - \varphi'^2 \cos(\varphi) + 2D(1 + \alpha)y' - 2D\varphi' \sin(\varphi) + (1 + \beta)y = 0$$

$$z'' + \varphi'' \cos(\varphi) - \varphi'^2 \sin(\varphi) + 2D(1 + \alpha)z' + 2D\varphi' \cos(\varphi) + (1 + \beta)z = 0$$

$$\varphi'' = \underbrace{\frac{T_a}{J\omega_0^2}}_T + \underbrace{\frac{(c+k)\varepsilon^2}{J\omega_0^2}}_{e(1+\beta)} (z \cos(\varphi) - y \sin(\varphi)) + \underbrace{\frac{\varepsilon^2 b}{J\omega_0}}_{2eD\alpha} \left[(z' \cos(\varphi) - y' \sin(\varphi)) \right] \quad (92)$$

Dabei ist:

$$\frac{(c+k)\varepsilon^2}{J\omega_0^2} = \frac{c\varepsilon^2}{J\omega_0^2} + \frac{k\varepsilon^2}{J\omega_0^2} = e + \frac{\varepsilon^2}{\omega_0^2 i^2} \frac{k}{m} = e(1 + \beta) \quad i^2 : \text{ der Trägheitsradius}$$

$$\frac{\varepsilon^2 b}{J\omega_0} = \frac{\varepsilon^2}{i^2 \omega_0} \frac{b}{m} = 2eD\alpha$$

Die Gleichungen (92) werden nun analog wie bei der Berechnung ohne die Dämpfungselemente für beide Verfahren umgeformt.

Für die Lösung mit dem RUNGE-KUTTA-Verfahren folgt

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\varphi) \\ 0 & 1 & \cos(\varphi) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'' \\ z'' \\ \varphi'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2D(1+\alpha) & 0 & -\varphi' \cos(\varphi) - 2D \sin(\varphi) \\ 0 & 2D(1+\alpha) & -\varphi' \sin(\varphi) + 2D \cos(\varphi) \\ 2eD\alpha \sin(\varphi) & -2eD\alpha \cos(\varphi) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' \\ z' \\ \varphi' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1+\beta & 0 & e(1+\beta) \sin(\varphi) \\ 0 & 1+\beta & -e(1+\beta) \cos(\varphi) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T \end{bmatrix} \quad (93)$$

Für die Lösung mit dem NEWMARK-Verfahren folgt

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'' \\ z'' \\ \varphi'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2D(1+\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 2D(1+\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' \\ z' \\ \varphi' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1+\beta & 0 & 0 \\ 0 & 1+\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi'' \sin(\varphi) + \varphi'^2 \cos(\varphi) + 2D\varphi' \sin(\varphi) \\ -\varphi'' \cos(\varphi) + \varphi'^2 \sin(\varphi) - 2D\varphi' \cos(\varphi) \\ T + e(1+\beta) \left[z \cos(\varphi) - y \sin(\varphi) \right] + 2eD\alpha \left[z' \cos(\varphi) - y' \sin(\varphi) \right] \end{bmatrix} \quad (94)$$

3.3 Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden die Simulationsergebnisse dargestellt und diskutiert. Die Differentialgleichungen sind in dem dimensionslosen Zeitintervall $t_0 = 0$ bis $t_{end} = 600$ mit einer Schrittweite $\Delta t = 0.1$ (in MATLAB Programm $\Delta t = dt$) integriert. Die Anfangsbedingungen sind alle Null bei der Anfangszeit $t = 0$. Es wird nur die Auslenkung in y-Richtung über die Zeit betrachtet und dargestellt, da der Wellenquerschnitt symmetrisch ist. Die Winkelgeschwindigkeit φ wird über die Auslenkung dargestellt. Alle genannten Informationen gelten für beide Verfahren.

Die MATLAB Programme RK_OhneDichtung, RK_MitDichtung, Newmark_OhneDichtung und Newmark_MitDichtung sind in dem beigefügten Datenträger enthalten.

Die folgenden Abbildungen 16 und 17 zeigen den Verlauf der Auslenkung in y-Richtung und der Winkelgeschwindigkeit in den Wellendurchstoßpunkt W . Wie in den Abbildungen zu sehen, liefern beide Verfahren mit dem Antriebsmoment von $T = 0.012$ gleiche Ergebnisse. Der Lavall-Läufer fährt die Resonanzstelle durch. In der Nähe der Resonanzstelle verlangsamt sich die Drehgeschwindigkeit, da sie mit dem Auslenkung gekoppelt ist.

Parameter	Wert	Symbol in MATLAB
Dämpfungsgrad D	0,02	d
bezogene Exzentrizität e	10^{-3}	ep
bezogene Dämpfung α	1,32	alpha
bezogene Steifigkeit β	0,09	beta
bezogene Antriebsmoment T	0.011 und 0.012	T

Tabelle 2: Berechnungsparameter für die freigeschnittene Scheibe

Resonanzdurchfahrt ohne Dichtung für $\epsilon = 0.001$ & $T = 0.012$

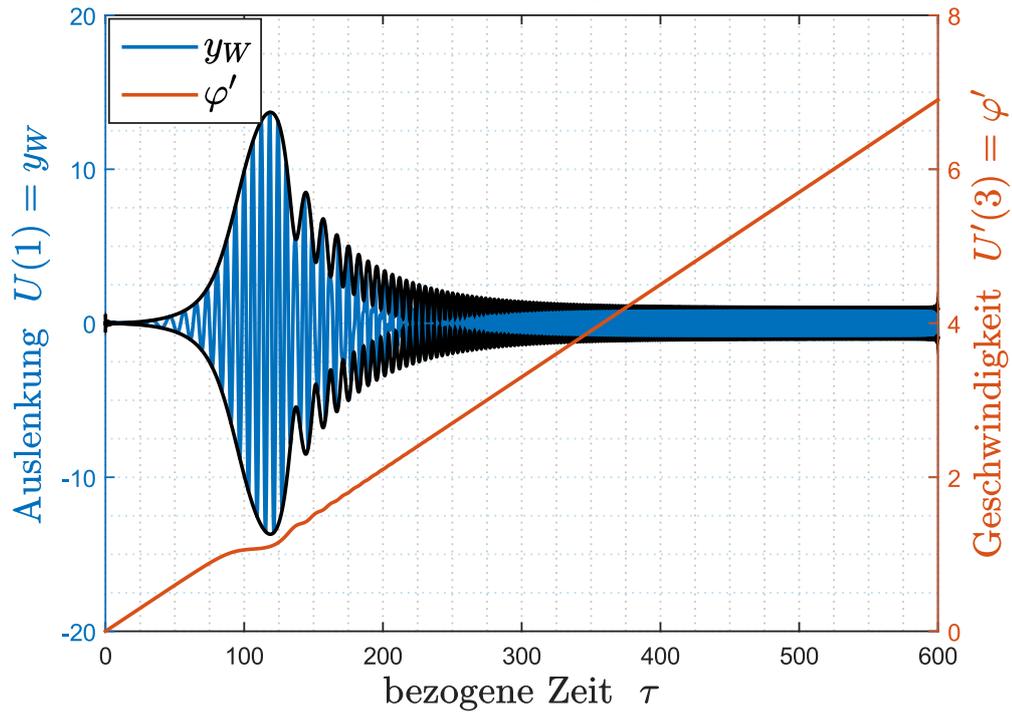


Abbildung 16: Mit RUNGE-KUTTA-Verfahren: Durchfahren

Resonanzdurchfahrt ohne Dichtung für $\epsilon = 0.001$ & $T = 0.012$

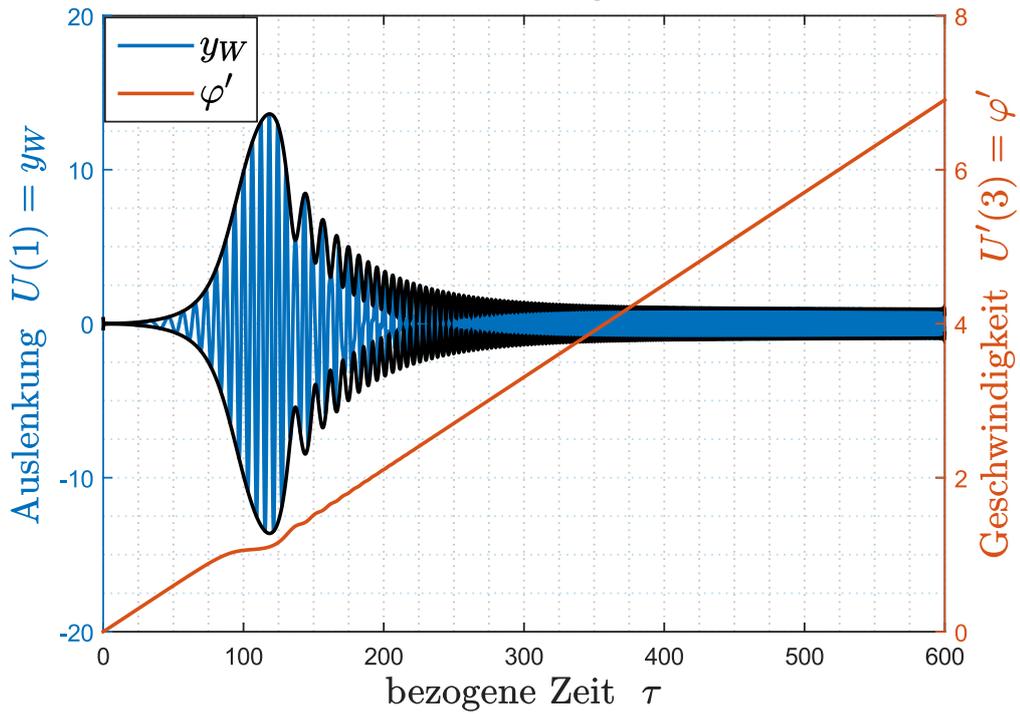


Abbildung 17: Mit NEWMARK-Verfahren: Durchfahren

Resonanzdurchfahrt ohne Dichtung für $\epsilon = 0.001$ & $T = 0.011$

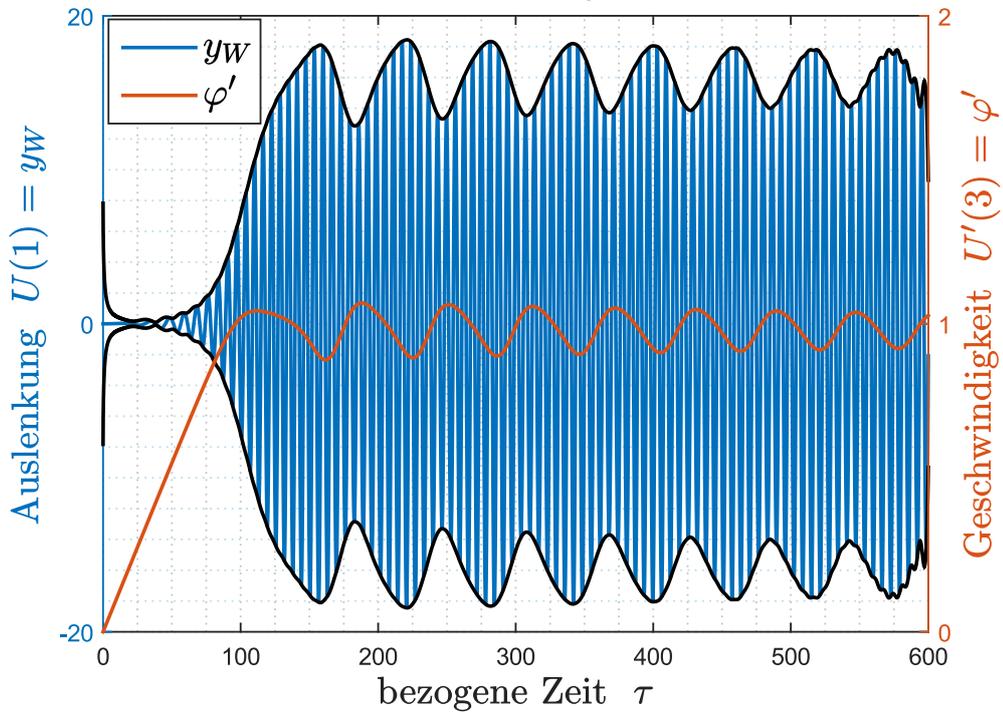


Abbildung 18: Mit RUNGE-KUTTA-Verfahren: Hängenbleiben

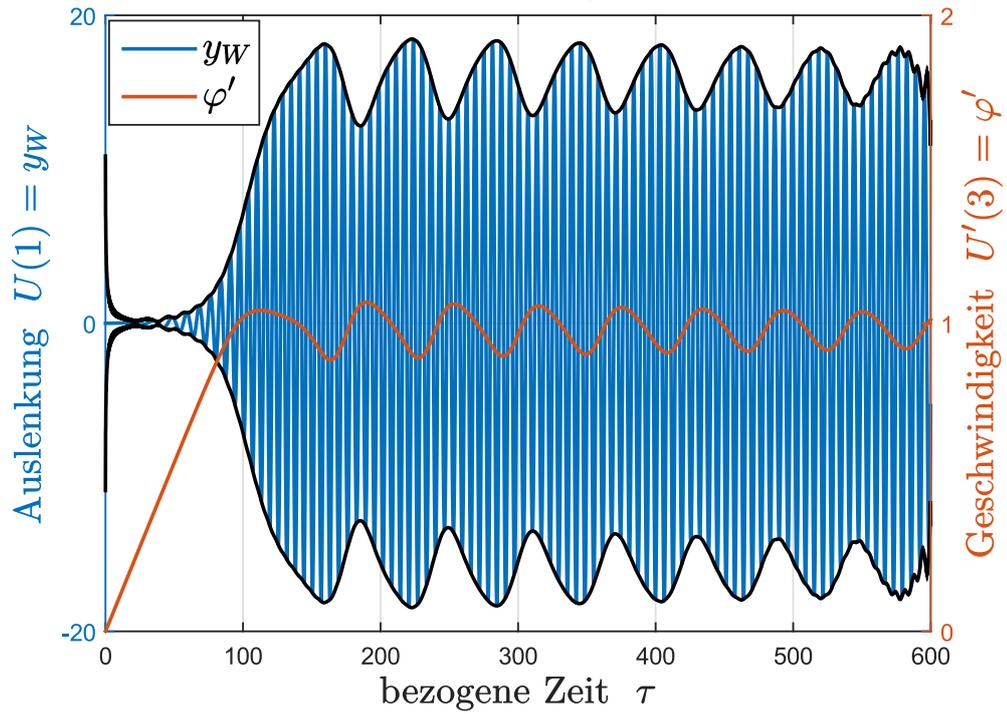
Resonanzdurchfahrt ohne Dichtung für $\epsilon = 0.001$ & $T = 0.011$ 

Abbildung 19: Mit NEWMARK-Verfahren: Hängenbleiben

Unter dem schwächsten Antriebsmoment von $T = 0.011$ ist der Fall des Hängenbleiben in der Resonanzstelle dargestellt, Abbildung 18 und 19.

Resonanzdurchfahrt mit Dichtung für $\epsilon = 0.001$ & $T = 0.011$

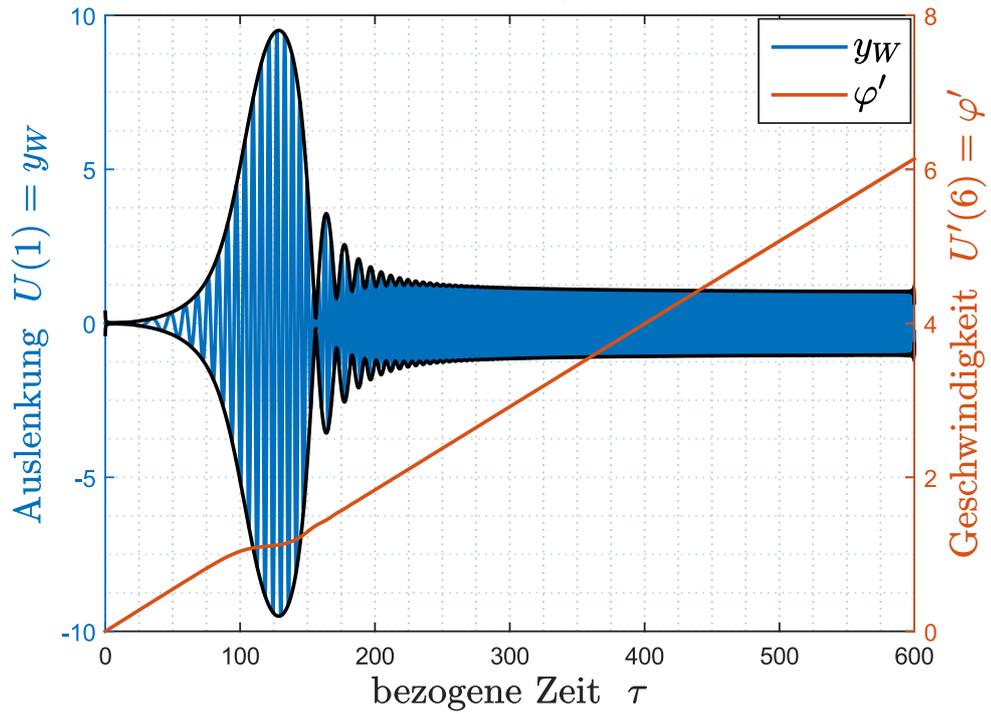


Abbildung 20: Mit RUNGE-KUTTA-Verfahren: Dichtung

Resonanzdurchfahrt mit Dichtung für $\epsilon = 0.001$ & $T = 0.011$

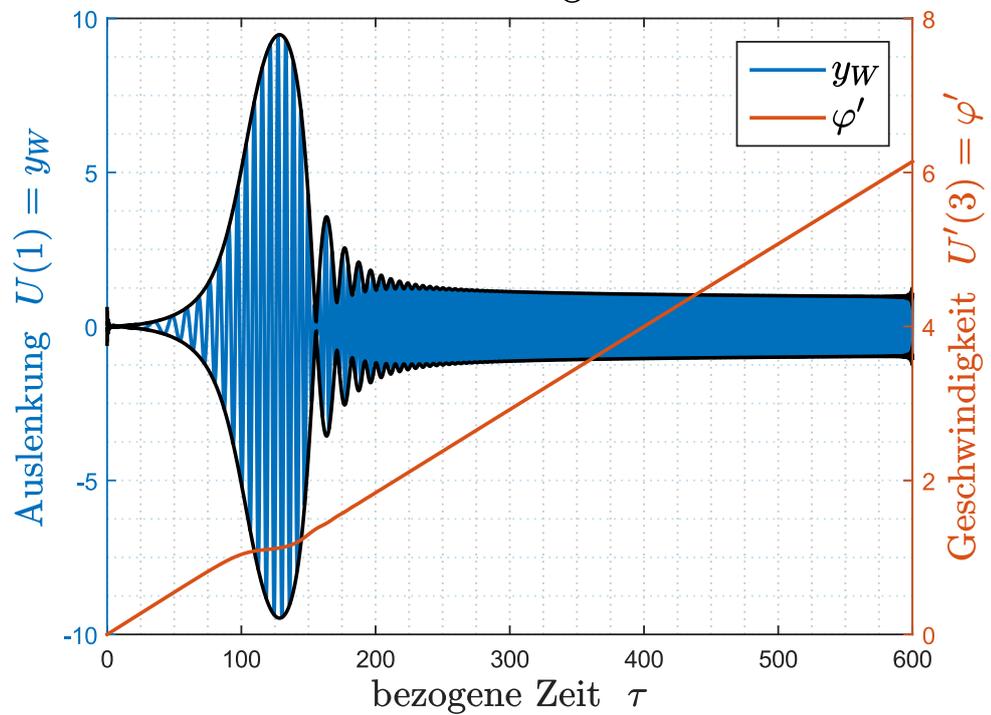


Abbildung 21: Mit NEWMARK-Verfahren: Dichtung

In den Abbildungen 20 und 21 wurde mit der Dichtung gerechnet. Im Vergleich zu den Abbildungen 18 und 19 ist hier kein Hängenbleiben des Rotors mehr in der Resonanzstelle beim Hochfahren. Die Dämpfung hat einen Einfluß auf die Auslenkungen und der Rotor bleibt nicht mehr in der Resonanzstelle hängen.

4 Lösung mit der Finite Elemente Methode

In diesem Abschnitt wird das mathematische Modell mit der Methode der Finiten Elemente gelöst. Analog zu der Lösung an der freigeschnittenen Scheibe wird hier auch das Modell ohne und mit Dichtung gelöst.

4.1 Systemmatrizen des FE-Modells

In der Abbildung 22 ist das gesammte FE-Modell des Rotors dargestellt. Das obere Bild der Abbildung 22 zeigt das FE-Modell als Balkenelement mit 5 Freiheitsgrade pro Knoten. An den Knoten ① ist das Antriebsmoment T_a gezeichnet. Die Scheibe des Rotors wird als starrerem Körper modelliert. Sie wird durch ihre Masse und ihre Massenträgheitsmomente bezüglich des Schwerpunktes erfasst. Der Scheibenschwerpunkt hat die Verschiebungen U_{1S} bzw. U_{2S} in y bzw. z -Achse sowie die Verdrehung U_{3S} um die x -Achse. Die Verschiebung in x -Achse und die Verdrehungen um y bzw. z -Achse werden nicht berücksichtigt. Im folgenden Vektor U_S sind die Freiheitsgrade des starrerem Körpers zusammengefasst.

$$\mathbf{U}_S = \begin{bmatrix} U_{1S} \\ U_{2S} \\ U_{3S} \\ U_{4S} = 0 \\ U_{5S} = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{1S} \\ U_{2S} \\ U_{3S} \end{bmatrix}$$

Daraus folgt analog für den Dämpfungsvektor und den Beschleunigungsvektor ebenfalls im Schwerpunkt S

$$\dot{\mathbf{U}}_S = \begin{bmatrix} \dot{U}_{1S} \\ \dot{U}_{2S} \\ \dot{U}_{3S} \end{bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{U}}_S = \begin{bmatrix} \ddot{U}_{1S} \\ \ddot{U}_{2S} \\ \ddot{U}_{3S} \end{bmatrix}$$

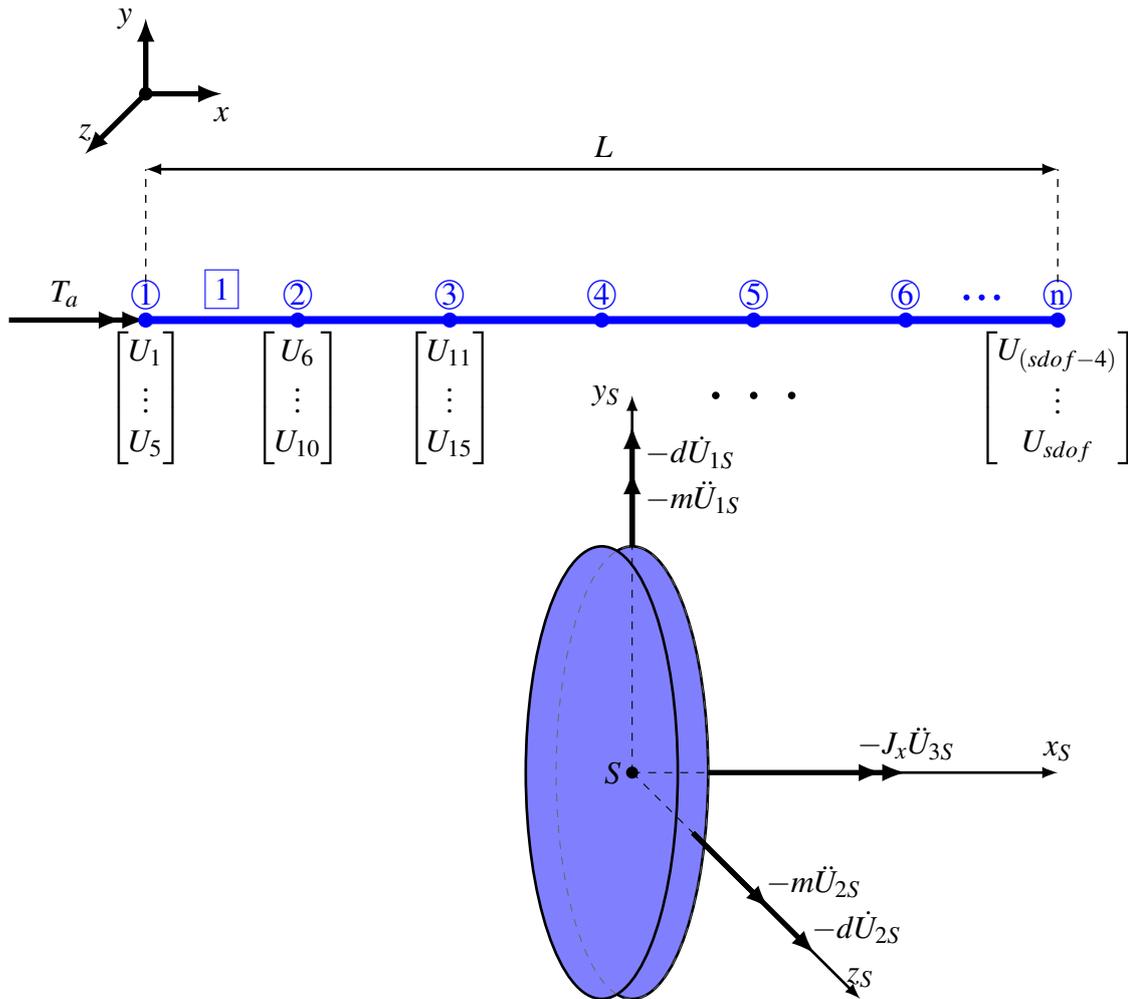


Abbildung 22: Das Berechnungsmodell des Rotors

Die auf die Scheibe wirkende Trägheitskräfte $F_{T_y} = -m\ddot{U}_{1S}$, $F_{T_z} = -m\ddot{U}_{2S}$ und $F_{T_x} = -J_x\ddot{U}_{3S}$ sowie die Dämpfungskräfte $F_{d_y} = -d\dot{U}_{1S}$ und $F_{d_z} = -d\dot{U}_{2S}$ müssen für die Berechnung berücksichtigt werden. Sie können nicht direkt in dem Prinzip der virtuellen Verschiebung für das Balkenelement addiert werden, da sie nicht in Wellendurchstoßpunkt wirken sondern in Schwerpunkt der Scheibe S . Daher müssen sie auf den Wellendurchstoßpunkt W transformiert werden. Die Scheibe sitzt mittig bezüglich der Gesamtlänge der Welle, in Übereinstimmung zu den gewählten Annahmen.

Der Knoten, in dem die Verschiebungen der Scheibe vom Schwerpunkt auf die Wellendurchstoßpunkt transformiert werden, wird zukünftig *node* genannt und in der Simulation als Kennzeichner verwendet. Wenn die Anzahl der Elemente eine gerade Zahl ist, wird für den Knoten *node* folgende Formel verwendet

$$node = \frac{\text{Anzahl der Elemente}}{2} + 1 = \frac{nel}{2} + 1$$

Wobei nel die Anzahl der Elemente ist. In diesem Fall sitzt die Scheibe immer mittig auf der Welle, in Bezug auf die Gesamtlänge.

Wenn die Anzahl der Elemente eine ungerade Zahl ist, wird für den Knoten $node$ die folgende Formel verwendet

$$node = \frac{\text{Anzahl der Elemente} + 1}{2} + 1$$

Die Scheibe sitzt danach nicht mittig auf die Welle.

Da jeder Knoten des Berechnungsmodells 5 Freiheitsgrade $ndof (= 5)$ hat und die Scheibe nur Drei, muss bei der Transformation, von der Scheibe auf die Welle, auf die Richtung des jeweiligen Freiheitsgrad geachtet werden. Nach Gleichungen (58) und (59) ist der Zusammenhang zwischen W und S wie folgt vergleiche mit Abbildung 7 :

$$U_{1S} = U_{(node \cdot ndof) - 4} + \varepsilon \cos(U_{(node \cdot ndof) - 2}) \quad (95)$$

$$U_{2S} = U_{(node \cdot ndof) - 3} + \varepsilon \sin(U_{(node \cdot ndof) - 2}) \quad (96)$$

$$U_{3S} = U_{(node \cdot ndof) - 2} \quad (97)$$

Für die Vereinfachung wird folgende Schreibweise verwendet

$$Y_W = U_{(node \cdot ndof) - 4}, \quad Z_W = U_{(node \cdot ndof) - 3}, \quad \varphi = U_{(node \cdot ndof) - 2}$$

Die erste und zweiten Ableitung nach der Zeit für die Scheibenfreiheitsgrade ergeben

$$\dot{U}_{1S} = \dot{Y}_W - \varepsilon \dot{\varphi} \sin(\varphi) \quad (98)$$

$$\dot{U}_{2S} = \dot{Z}_W + \varepsilon \dot{\varphi} \cos(\varphi) \quad (99)$$

$$\dot{U}_{3S} = \dot{\varphi} \quad (100)$$

$$\ddot{U}_{1S} = \ddot{Y}_W - \varepsilon \ddot{\varphi} \sin(\varphi) - \varepsilon \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \quad (101)$$

$$\ddot{U}_{2S} = \ddot{Z}_W + \varepsilon \ddot{\varphi} \cos \varphi - \varepsilon \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \quad (102)$$

$$\ddot{U}_{3S} = \ddot{\varphi} \quad (103)$$

Schließlich ergibt sich für die Dämpfungskräfte und Trägheitskräfte der Scheibe nach der Multiplikation mit der Dämpfungskonstante d , der Scheibenmasse m und Massenträgheitsmoment

J_x in Wellendurchstoßpunkt folgende Beziehungen

$$\begin{aligned}
 d\dot{U}_{1S} &= d\dot{Y}_W - d\varepsilon\dot{\varphi} \sin(\varphi) \\
 d\dot{U}_{2S} &= d\dot{Z}_W + d\varepsilon\dot{\varphi} \cos(\varphi) \\
 m\ddot{U}_{1S} &= m\ddot{Y}_W - m\varepsilon\ddot{\varphi} \sin(\varphi) - m\varepsilon\dot{\varphi}^2 \cos \varphi \\
 m\ddot{U}_{2S} &= m\ddot{Z}_W + m\varepsilon\ddot{\varphi} \cos \varphi - m\varepsilon\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \\
 J_x\ddot{U}_{3S} &= J_x\ddot{\varphi}
 \end{aligned} \tag{104}$$

Da die Schwingungsgleichung mit zwei Verfahren gelöst wird, werden die Gleichungen (104) in zwei Varianten als Matrixschreibweise geschrieben. Zuerst wird das Verfahren nach RUNGE-KUTTA und anschließend nach NEWMARK dargestellt. Hierbei wird die Gesamtanzahl an Freiheitsgrade des Systems, die Systemfreiheitsgrade, benötigt

$$s dof = ndof \cdot (nel + 1)$$

Runge-Kutta-Verfahren

Werden die Gleichungen (104) als Matrixschreibweise geschrieben, dann erhält man folgendes

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{1S} \\ \dot{U}_{2S} \\ \dot{U}_{3S} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{1S} \\ \dot{U}_{2S} \\ \dot{U}_{3S} \end{bmatrix} = \\
 & \begin{bmatrix} m & 0 & -m\varepsilon \sin(\varphi) \\ 0 & m & m\varepsilon \cos(\varphi) \\ 0 & 0 & J_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{Y}_W \\ \dot{Z}_W \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & 0 & -m\varepsilon\dot{\varphi} \cos(\varphi) - d\varepsilon \sin(\varphi) \\ 0 & d & -m\varepsilon\dot{\varphi} \sin(\varphi) + d\varepsilon \cos(\varphi) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{Y}_W \\ \dot{Z}_W \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \tag{105}
 \end{aligned}$$

Wenn man die Gleichung (105) auf Systemfreiheitsgrade erweitert, spannen sich die Matrizen zu $(s dof \times s dof)$ und die Vektoren zu $(s dof \times 1)$ große Abbildungen auf.

Dies sieht wie folgt aus

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \\
 & \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m & 0 & -m\varepsilon \sin(\varphi) \\ 0 & m & m\varepsilon \cos(\varphi) \\ 0 & 0 & J_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{MM}_S} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{U}}} + \\
 & \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & 0 & -m\varepsilon \dot{\varphi} \cos(\varphi) - d\varepsilon \sin(\varphi) \\ 0 & d & -m\varepsilon \dot{\varphi} \sin(\varphi) + d\varepsilon \cos(\varphi) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{DD}_S} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{U}}} \quad (106)
 \end{aligned}$$

Daraus folgt eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Ihre Massenmatrix \mathbf{MM}_S und ihre Dämpfungsmatrix \mathbf{DD}_S der Scheibe werden zu den Massenmatrix und Dämpfungsmatrix des Balkens addiert, da die gleichen Freiheitsgrade haben. \mathbf{MM}_S bzw. \mathbf{DD}_S sind die Scheibenmassenmatrix bzw. Scheibendämpfungsmatrix, bestehend aus $s dof \times s dof$ Elemente.

Nicht gezeigte Elemente von \mathbf{MM}_S bzw. \mathbf{DD}_S der Gleichung (106) sind Null. $\ddot{\mathbf{U}}$ bzw. $\dot{\mathbf{U}}$ sind die Beschleunigungsvektor bzw. die Geschwindigkeitsvektor des Systems und haben eine Länge von $s dof \times 1$.

Schreibt man nun die Bewegungsgleichung des Balkens mit der Gleichung der Scheibe zusammen erhält man

$$(\mathbf{MM}_B + \mathbf{MM}_S)\ddot{\mathbf{U}} + (\mathbf{DD}_B + \mathbf{DD}_S)\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{KK}_B\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (107)$$

Es bedeuten in Gleichung (107):

\mathbf{MM}_B die Massenmatrix des Balkens im Gesamtsystem, mit einer Größe von $(s dof \times s dof)$

\mathbf{DD}_B die Dämpfungsmatrix des Balkens im System, mit einer Größe von $(s dof \times s dof)$.

Da der Balken ohne Dämpfung gerechnet wird, ist die Balkendämpfungsmatrix eine Nullmatrix

\mathbf{KK}_B die Steifigkeitsmatrix des Balkens im System, mit einer Größe von $(s dof \times s dof)$.

\mathbf{F} der Vektor der Balkenknotenkräfte im System ist $(s dof \times 1)$ Spaltenvektor

$$\mathbf{F} = \mathbf{ff}_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & T_a & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$$

Die Assemblierung der Systemmatrizen des Balkens zeigt folgender Programmausdruck

```

1 for iel = 1:nel % iel: Laufvariable; nel: Anzahl der Elemente
2 index = Assemblierung(iel, nnel, ndof); % nnel=2, Elementknotenanzahl
3 % Balkenelementmatrizen
4 [Keb, Deb, Meb, Feb] = Balkenelement(A, E, G, Ix, Iy, Iz, l, Ip, rho);
5 % Balkensystemmatrizen
6 [MMb, DDb, KKb, ffb] = ...
    Balkensystemmatrizen(MMb, DDb, KKb, ffb, Meb, Deb, Keb, Feb, index);
7 ffb(3) = Ta;
8 end

```

Die MATLAB-Funktion Assemblierung gibt den index als Vektor zurück. Der index besteht aus den Freiheitsgraden des jeweiligen Elements und gibt die Zugehörigkeit zum Gesamtsystem an. Die Funktion Balkenelement berechnet hierbei die Balkenelementmatrizen. Die Funktion Balkensystemmatrizen hingegen assembliert die Elementmatrizen in die Systemmatrizen. Diese drei Funktionen werden zuerst von dem MATLAB-Skript Systemmatrizen und schließlich von der MATLAB-Funktion Runge_Kutta aufgerufen.

Um die Differentialgleichung (107) mit dem RUNGE-KUTTA-Verfahren zu integrieren, soll sie

zuerst auf eine Differentialgleichung erster Ordnung umgeformt werden. Mit dem Vektor der Systemfreiheitsgrade \mathbf{U}

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1 & \dots & U_{sdof} \end{bmatrix}^T$$

ist

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{U}} &= \begin{bmatrix} \dot{U}_1 & \dots & \dot{U}_{sdof} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} U_{sdof+1} & \dots & U_{2 \times sdof} \end{bmatrix}^T \\ \ddot{\mathbf{U}} &= \begin{bmatrix} \ddot{U}_1 & \dots & \ddot{U}_{sdof} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \dot{U}_{sdof+1} & \dots & \dot{U}_{2 \times sdof} \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

Daraus folgt für die Gleichung (107)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dots \\ \dot{U}_{sdof} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} U_{sdof+1} \\ \vdots \\ U_{2 \times sdof} \end{bmatrix} \\ (\mathbf{MM}_B + \mathbf{MM}_S) \begin{bmatrix} \dot{U}_{sdof+1} \\ \vdots \\ \dot{U}_{2 \times sdof} \end{bmatrix} + (\mathbf{DD}_B + \mathbf{DD}_S) \begin{bmatrix} U_{sdof+1} \\ \vdots \\ U_{2 \times sdof} \end{bmatrix} + \mathbf{KK}_B \begin{bmatrix} U_1 \\ \dots \\ U_{sdof} \end{bmatrix} &= \mathbf{F} \end{aligned} \quad (108)$$

Randbedingungen

Um die Gleichungen (108) lösen zu können, müssen sie noch an die Randbedingungen angepasst werden.

Das Rotormodell ist an den Endknoten in y -Richtung und in z -Richtung gesperrt, das heißt die Freiheitsgrade U_1 und U_2 an den Knoten ① und die Freiheitsgrade U_{sdof-4} und U_{sdof-3} an den Knoten $nnode = nel + 1$ ($nnode =$ Anzahl der Systemknoten) haben den Wert Null. Die übrigen Systemfreiheitsgrade sind in den folgenden Vektor zusammengefasst

$$\begin{aligned} free &= \begin{bmatrix} 3 & 4 & \dots & (sdof-5) & (sdof-2) & \dots & sdof \end{bmatrix} && \text{freie Freiheitsgrade} \\ fixed &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & (sdof-4) & (sdof-3) \end{bmatrix} && \text{gesperrte Freiheitsgrade} \end{aligned}$$

Da die Systemfreiheitsgrade in der Gleichungen (108) aufgrund des Lösungsverfahrens verdop-

pelt sind, müssen die gesperrten Freiheitsgrade des Geschwindigkeitsvektors auf Null gesetzt werden.

Freie Freiheitsgrade für die Geschwindigkeiten:

$$freep = \begin{bmatrix} sdof + 3 & sdof + 4 & \dots & (2 \cdot sdof - 5) & (2 \cdot sdof - 2) & \dots & 2 \cdot sdof \end{bmatrix}$$

Gesperrte Freiheitsgrade für die Geschwindigkeiten:

$$fixedp = \begin{bmatrix} sdof + 1 & sdof + 2 & (2 \cdot sdof - 4) & (2 \cdot sdof - 3) \end{bmatrix}$$

Zusätzlich zu den Randbedingungen sollen auch die Anfangsbedingungen für die Zeit an der Stelle t_0 definiert werden. Hier wird der Verschiebungsvektor \mathbf{U} zur Zeit $t = 0$ den Wert Null haben. Das folgende Programmcode zeigt die MALTLAB Funktion der Bewegungsgleichungen. Das komplette Programm ist im Anhang unter den Namen RK_OhneDichtung.

```

1 % Function , die die Differenzialgleichungen definiert:
2 function [dU] = Dgl ( t , U)
3 % t : Zeit
4 % U : Verschiebung (Auslenkung)
5 global MMs_red DDs_red KKs_red ffs_red free freep Jx m ep d
6 global MMb_red DDb_red Kkb_red ffb_red sdof node ndof
7 dU = zeros (2*sdof , 1);
8 i = 1:2*sdof; % Laufvariable
9 U = U(i)';
10 % U = [U(1), ..., U(sdof), U(sdof+1), ..., U(2*sdof)]'; Fhg.
11 % U(1), ..., U(sdof) sind die Verschiebungen
12 % U(sdof+1), ..., U(2*sdof) sind die Geschwindigkeiten
13 phi = U((node*ndof) - 2); % Verschiebung an W
14 phip = U(((node*ndof) - 2) + sdof); % Geschwindigkeit an W
15 % Systemmatrizen der Scheibe
16 % Massenmatrix der Scheibe
17 MMs = zeros (sdof , sdof);
18 MMs((node*ndof) - 4 , (node*ndof) - 2) = -m*ep*sin(phi);
19 MMs((node*ndof) - 3 , (node*ndof) - 2) = m*ep*cos(phi);
20 MMs((node*ndof) - 4 , (node*ndof) - 4) = m;
21 MMs((node*ndof) - 3 , (node*ndof) - 3) = m;
22 MMs((node*ndof) - 2 , (node*ndof) - 2) = Jx;
23 MMs_red = MMs (free , free);
24 % Daempfungsmatrix der Scheibe
25 DDs = zeros (sdof , sdof);
26 DDs((node*ndof) - 4 , (node*ndof) - 2) = -d*ep*sin(phi) - m*ep*cos(phi)*phip;
    
```

```

27 DDs((node*ndof) -3 ,(node*ndof) -2) = d*ep*cos(phi) -m*ep*sin(phi)*phip;
28 DDs((node*ndof) -4 ,(node*ndof) -4) = d;
29 DDs((node*ndof) -3 ,(node*ndof) -3) = d;
30 DDs_red = DDs(free , free );
31 % Steifigkeitsmatrix der Scheibe
32 KKs      = zeros(sdof ,sdof);
33 KKs_red  = KKs(free , free );
34 % Knotenkraftvektor der Scheibe
35 ffs      = zeros(sdof ,1);
36 ffs_red  = ffs(free ,1);
37 MMatrix  = MMb_red+MMs_red;
38 DMatrix  = DDb_red+DDs_red;
39 KMatrix  = KKb_red+KKs_red;
40 FVektor  = ffb_red+ffs_red;
41 % DGL in erster Ordnung
42 dU(free) = U(freep);
43 dU(freep) = MMatrix\(- DMatrix*U(freep) -KMatrix*U(free)+FVektor);
44 assignin('base','dU',dU(free)) % ausgabe von dU(free) in Workspace
45 assignin('base','dU',dU(freep)) % ausgabe von dU(freep) in Workspace
46 end
    
```

Newmark-Verfahren

Für das NEWMARK-Verfahren werden die Gleichungen (104) wie folgt umgeformt

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{1S} \\ \dot{U}_{2S} \\ \dot{U}_{3S} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{1S} \\ \dot{U}_{2S} \\ \dot{U}_{3S} \end{bmatrix} = \\
 & \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{Y}_W \\ \dot{Z}_W \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{Y}_W \\ \dot{Z}_W \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m\varepsilon\ddot{\phi}\sin(\varphi) - m\varepsilon\dot{\phi}^2\cos(\varphi) - d\varepsilon\dot{\phi}\sin(\varphi) \\ m\varepsilon\ddot{\phi}\cos(\varphi) - m\varepsilon\dot{\phi}^2\sin(\varphi) + d\varepsilon\dot{\phi}\cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \\
 & \hspace{20em} (109)
 \end{aligned}$$

Man erhält danach die folgende Gleichung

$$(\mathbf{M}\mathbf{M}_B + \mathbf{M}\mathbf{M}_S)\ddot{\mathbf{U}} + (\mathbf{D}\mathbf{D}_B + \mathbf{D}\mathbf{D}_S)\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{K}_B\mathbf{U} + \mathbf{F}_S = \mathbf{F} \quad (111)$$

Mit der Umformung nach NEWMARK (53) kann man die Gleichung (111) folgend umschreiben

$$(\mathbf{M}\mathbf{M}_B + \mathbf{M}\mathbf{M}_S) \left[\alpha_1(\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n) - \alpha_2\dot{\mathbf{U}}_n - \alpha_3\ddot{\mathbf{U}}_n \right] + (\mathbf{D}\mathbf{D}_B + \mathbf{D}\mathbf{D}_S) \left[\alpha_4(\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n) + \alpha_5\dot{\mathbf{U}}_n + \alpha_6\ddot{\mathbf{U}}_n \right] + \mathbf{K}\mathbf{K}_B\mathbf{U}_{n+1} + \mathbf{F}_S(t_{n+1}) = \mathbf{F}(t_{n+1}) \quad (112)$$

Eine Umformung und Lösung der Gleichung ist nicht möglich, da der Kraftvektor \mathbf{F}_S von den Verschiebungsvektor $\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}(t_{n+1})$ abhängt. Damit ist sie eine nichtlineare Gleichung und kann nur durch Iterieren des Verschiebungsvektors \mathbf{U}_{n+1} gelöst werden. Die am häufigsten in der FEM angewandte Methode für das Lösen von Systemgleichungen, ist das NEWTON-RAPHSON-Verfahren [14]. Wenn man die Gleichung (112) auf die folgende Form umschreibt

$$(\mathbf{M}\mathbf{M}_B + \mathbf{M}\mathbf{M}_S) \left[\alpha_1(\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n) - \alpha_2\dot{\mathbf{U}}_n - \alpha_3\ddot{\mathbf{U}}_n \right] + (\mathbf{D}\mathbf{D}_B + \mathbf{D}\mathbf{D}_S) \left[\alpha_4(\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n) + \alpha_5\dot{\mathbf{U}}_n + \alpha_6\ddot{\mathbf{U}}_n \right] + \mathbf{K}\mathbf{K}_B\mathbf{U}_{n+1} + \mathbf{F}_S(t_{n+1}) - \mathbf{F}(t_{n+1}) = 0 = \mathbf{f}(\mathbf{U}_{n+1}) \quad (113)$$

kann man sehen, dass sie Null wird, wenn es einen Vektor \mathbf{U}_{n+1}^{i+1} gibt, dass die Bedingung $\mathbf{f}(\mathbf{U}_{n+1}^{i+1}) = 0$ erfüllt. Mit dem bekannten \mathbf{U}_{n+1}^i gibt die TAYLOR'sche Reihenentwicklung [17] für \mathbf{U}_{n+1}^{i+1} nachfolgender Lösung

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}_{n+1}^{i+1}) = \mathbf{f}(\mathbf{U}_{n+1}^i) + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{U}_{n+1})}{\partial \mathbf{U}_{n+1}} \Big|_{\mathbf{U}_{n+1}^i} \left[\mathbf{U}_{n+1}^{i+1} - \mathbf{U}_{n+1}^i \right] + \text{Terme höherer Ordnung} \quad (114)$$

Dabei ist $\mathbf{f}(\mathbf{U}_{n+1}^i)$ der Funktionswert an der Stelle des Zeitschrittes t_{n+1} sowie ist $\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{U}_{n+1})}{\partial \mathbf{U}_{n+1}} \Big|_{\mathbf{U}_{n+1}^i}$ die Ableitung der Funktion $\mathbf{f}(\mathbf{U}_{n+1})$ nach dem Verschiebungsvektor \mathbf{U}_{n+1} an der Stelle t_{n+1} .

Nach Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung vereinfacht sich die Gleichung (114).

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}_{n+1}^{i+1}) = \mathbf{f}(\mathbf{U}_{n+1}^i) + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{U}_{n+1})}{\partial \mathbf{U}_{n+1}} \Big|_{\mathbf{U}_{n+1}^i} \left[\mathbf{U}_{n+1}^{i+1} - \mathbf{U}_{n+1}^i \right] \quad (115)$$

Wenn \mathbf{U}_{n+1}^{i+1} eine Lösung der Funktion $\mathbf{f}(\mathbf{U}_{n+1})$ ist, ergibt für

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{U}_{n+1}^i) + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{U}_{n+1})}{\partial \mathbf{U}_{n+1}} \bigg|_{\mathbf{U}_{n+1}^i} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{n+1}^{i+1} - \mathbf{U}_{n+1}^i \end{bmatrix} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{U}_{n+1})}{\partial \mathbf{U}_{n+1}} \bigg|_{\mathbf{U}_{n+1}^i} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{n+1}^{i+1} - \mathbf{U}_{n+1}^i \end{bmatrix}}_{\delta \mathbf{U}_{n+1}^{i+1}} &= -\mathbf{f}(\mathbf{U}_{n+1}^i) \\ \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{U}_{n+1})}{\partial \mathbf{U}_{n+1}} \bigg|_{\mathbf{U}_{n+1}^i} \delta \mathbf{U}_{n+1}^{i+1} &= -\mathbf{f}(\mathbf{U}_{n+1}^i) \end{aligned} \quad (116)$$

In der Gleichung (116) wird der Verschiebungszuwachs $\delta \mathbf{U}_{n+1}^{i+1}$ berechnet und anschließend die verbesserte Verschiebungslösung $\mathbf{U}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{U}_{n+1}^i + \delta \mathbf{U}_{n+1}^{i+1}$ für den nächsten Zeitschritt verwendet.

Randbedingungen

Genauso wie beim RUNGE-KUTTA-Verfahren sollen hier auch die Randbedingungen des Berechnungsmodell berücksichtigt werden. Die Konstante Matrizen \mathbf{MM}_B , \mathbf{MM}_S , \mathbf{DD}_B , \mathbf{DD}_S und \mathbf{KK}_B haben $(s dof \times s dof)$ Elemente. Alle diese Matrizen müssen auf $(s dof - 4 \times s dof - 4)$ reduziert werden. Da an den beiden Endknoten des Modells je zwei Freiheitsgrade gesperrt sind. Sowohl der verschiebungsabhängige Vektor \mathbf{F}_S als auch die Vektoren \mathbf{U} , $\dot{\mathbf{U}}$ und $\ddot{\mathbf{U}}$ haben die Länge $(s dof \times 1)$, siehe die Gleichung (110). Diese Vektoren werden auf $(s dof - 2 \times 1)$ reduziert. Die Anfangsbedingungen für die Verschiebungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen werden bei der Lösung zur Zeit $t = 0$ auf Null gesetzt.

Das Programmcode für die Lösung mit NEWMARK-Verfahren ist im Anhang unter den Namen Newmark_OhneDichtung.

4.2 Berücksichtigung der Dichtung

Analog wie in dem Abschnitt 3.2 wird für die Dichtung ein Feder-Dämpfer-Element verwendet, bestehend aus ein Feder mit der Konstante fed und ein Dämpfer mit der Konstante dae , am Wellendurchstoßpunkt W angebracht. Sie werden als ein Stabelement modelliert, ihre Elementsteifigkeitsmatrix $spring$ und $daemp$ ihre Elementdämpfungsmatrix sehen in die beiden Ebenen (xy und xz) wie folgt aus, siehe [18: Seite 17]

$$spring = fed \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad daemp = dae \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (117)$$

Sie haben zwei Freiheitsgrade; der erste Freiheitsgrad ist am Wellendurchstoßpunkt W und hat die Verschiebung $U_{(node \times ndof)-4}$ in y -Richtung sowie $U_{(node \times ndof)-3}$ in z -Richtung und der zweite Freiheitsgrad ist an sein Endknoten und wird mit U_{sdof+1} genannt. Der Freiheitsgrad am Endknoten des Federelements und des Dämpferelements ist in beide Richtungen gesperrt. Die Systemmatrizen des Federelements und des Dämpferelements haben $(sdof + 1 \times sdof + 1)$ Elemente. Für ihren Zusammenbau wurde folgendes MATLAB Skript erstellt:

```

1 Kfeder = zeros(sdof+1, sdof+1);           % Systemfedersteifigkeit
2 Ddaemp = zeros(sdof+1, sdof+1);         % Systemedaempfersteifigkeit
3 % Steifigkeitsmatrix des Federelements
4 spring = fed*[1 -1; -1 1];
5 % Daempfungsmatrix des Daempferelements
6 daemp = dae*[1 -1; -1 1];
7 % Assemblierung des der Systemmatrizen des Feders und des Daempfers
8 % Feder in y-Richtung
9 Kfeder([(node*ndof)-4 sdof+1], [(node*ndof)-4 sdof+1]) = ...
10 Kfeder([(node*ndof)-4 sdof+1], [(node*ndof)-4 sdof+1])+spring;
11 % Feder in z-Richtung
12 Kfeder([(node*ndof)-3 sdof+1], [(node*ndof)-3 sdof+1]) = ...
13 Kfeder([(node*ndof)-3 sdof+1], [(node*ndof)-3 sdof+1])+spring;
14 % Daempfer in y-Richtung
15 Ddaemp([(node*ndof)-4 sdof+1], [(node*ndof)-4 sdof+1]) = ...
16 Ddaemp([(node*ndof)-4 sdof+1], [(node*ndof)-4 sdof+1])+daemp;
17 % Daempfer in z-Richtung
18 Ddaemp([(node*ndof)-3 sdof+1], [(node*ndof)-3 sdof+1]) = ...
19 Ddaemp([(node*ndof)-3 sdof+1], [(node*ndof)-3 sdof+1])+daemp;

```

Das Programmcode für die Berechnung mit dem Dichtungselemente ist im beigefügten Datenträger unter den Namen: RK_MitDichtung für die Simulation mit RUNGE-KUTTA-Verfahren, und Newmark_MitDichtung für die Integration mit NEWMARK-Methode hinterlegt.

4.3 Lösung der Systemdifferentialgleichungen und Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der Untersuchung des Rotors dargestellt. Die nachfolgende Tabelle enthält die Parameter für die Berechnung. Es wurde mit eines Integrationszeit-schritt von $\Delta t = 10^{-4}$ gerechnet. Das Integrationsintervall ist von $t_0 = 0$ bis $t_{end} = 6$ Sekunden.

Parameter	Wert	Symbol in MATLAB
Wellenradius R_b	0,025 in m	Rb
Scheibenradius R_s	0,160 in m	Rs
Wellenquerschnittsfläche A	$\pi \cdot R_b^2$ in m^2	A
E-Modul E	$2,1 \cdot 10^{11}$ in N/m^2	E
Querkontaktionszahl ν	0,3	nu
Schubmodul G	$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ in N/m^2	G
Dichte der Welle ρ	7850 in kg/m^3	rho
Länge der Welle L	1,1 in m	L
Masse der Scheibe m	10 in kg	m
Flächenträgheitsmoment I_x x -Achse	$\pi \cdot \frac{(2R_b)^4}{32}$ in m^4	Ix
Flächenträgheitsmoment I_y y -Achse	$\frac{A \cdot R_b^2}{4}$ in m^4	Iy
Flächenträgheitsmoment I_z z -Achse	$\frac{A \cdot R_b^2}{4}$ in m^4	Iz
Polare Flächenträgheitsmoment I_p	$\pi \cdot \frac{(2R_b)^4}{32}$ in m^4	Ip
Dämpfung d	0,02 in $\text{N s}/\text{m}$	d
Antriebsmoment T_a	25 und 0,8 in N m	Ta
Exzentrizität ε	0,001 in m	ep
Massenträgheitsmoment der Scheibe J_x	$\frac{m \cdot R_s^2}{2} + m \cdot \varepsilon^2$ in kg m^2	Jx
Federkonstante der Dichtung fed	15 in N/m	fed
Dämpferkonstante der Dichtung dae	150 in Ns/m	dae

Tabelle 3: Simulationsparameter des Rotormodells

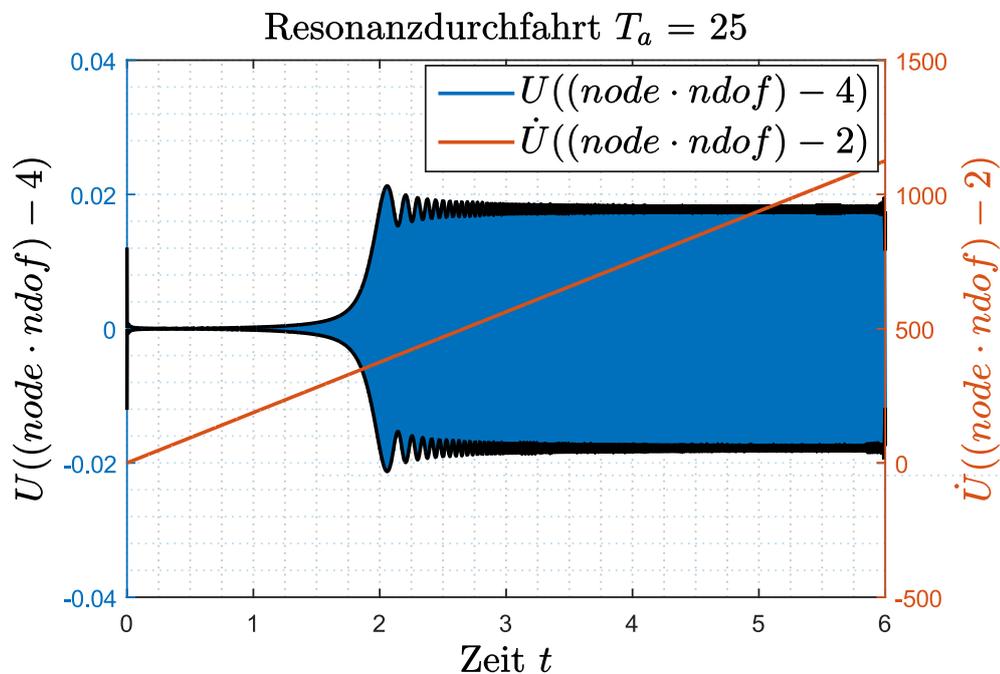


Abbildung 23: Rechnung mit RUNGE-KUTTA-Verfahren, Fall Hängenbleiben

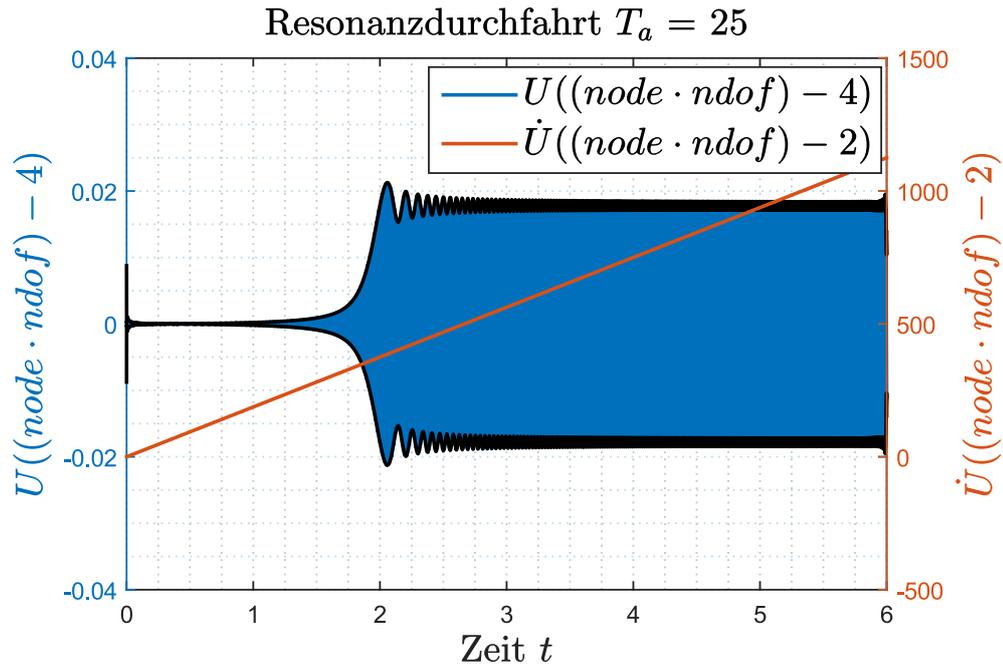


Abbildung 24: Rechnung mit NEWMARK-Verfahren: Fall Hängenbleiben

Die Abbildungen 23 und 24 zeigen den Fall des Hängenbleibens. Auch hier liefern beide Verfahren die gleichen Ergebnisse wie im Kapitel 3.3. Die Simulation erfolgte ohne Dichtung und mit einem Antriebsmoment von $T_a = 25$ N m. In diesen Abbildungen steigt der Verlauf der Drehgeschwindigkeit im Vergleich zu den Fall des Hängenbleibens im Abschnitt 3.3 linear. Das liegt daran dass die Drehgeschwindigkeit und die Auslenkungen im Wellendurchstoßpunkt W des Rotors voneinander nicht stark abhängig sind. Das kann man zeigen, wenn man das Gleichgewicht im Wellendurchstoßpunkt W aufstellt, und damit die Drehträgheitskraft ersetzt. Das sieht wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
 J_x \ddot{U}_{3S} &= J_x \ddot{\phi} = \varepsilon \sin(\varphi) \left[d\dot{U}_{1S} + m\ddot{U}_{1S} \right] - \varepsilon \cos(\varphi) \left[d\dot{U}_{2S} + m\ddot{U}_{2S} \right] \\
 &= \varepsilon \sin(\varphi) \left[d\dot{Y}_W - d\varepsilon\dot{\phi} \sin(\varphi) + m\dot{Y}_W - m\varepsilon\dot{\phi} \sin(\varphi) - m\varepsilon\dot{\phi}^2 \cos(\varphi) \right] - \\
 &\varepsilon \cos(\varphi) \left[d\dot{Z}_W + d\varepsilon\dot{\phi} \cos(\varphi) + m\dot{Z}_W + m\varepsilon\dot{\phi} \cos(\varphi) - m\varepsilon\dot{\phi}^2 \sin(\varphi) \right] \\
 &= \varepsilon d \sin(\varphi) \dot{Y}_W - \varepsilon d \cos(\varphi) \dot{Z}_W - d\varepsilon^2 \dot{\phi} + \varepsilon m \sin(\varphi) \dot{Y}_W - \varepsilon m \cos(\varphi) \dot{Z}_W - m\varepsilon^2 \dot{\phi} \quad (118)
 \end{aligned}$$

Zur Erinnerung ist:

$$Y_W = U_{(node \cdot ndof) - 4}$$

$$Z_W = U_{(node \cdot ndof) - 3}$$

$$\varphi = U_{(node \cdot ndof) - 2}$$

Statt $J_x \ddot{\varphi}$ in den Gleichungen (106) und den Gleichungen (110) wird mit dieser Gleichung (118) gerechnet.

Nach der Rechnung stellen die Abbildungen 25 und 26 die Ergebnisse dar. Sie zeigen den Fall des Hängenbleibens des Rotors in der Resonanzstelle. Der Verlauf der Drehgeschwindigkeit ändert sich genau ab dem Punkt wo die Auslenkungen groß werden.

Die unteren Abbildungen 27 und 28 zeigen die Rechnung mit Dichtung. Der Rotor ist an der Resonanzstelle nicht hängengeblieben.

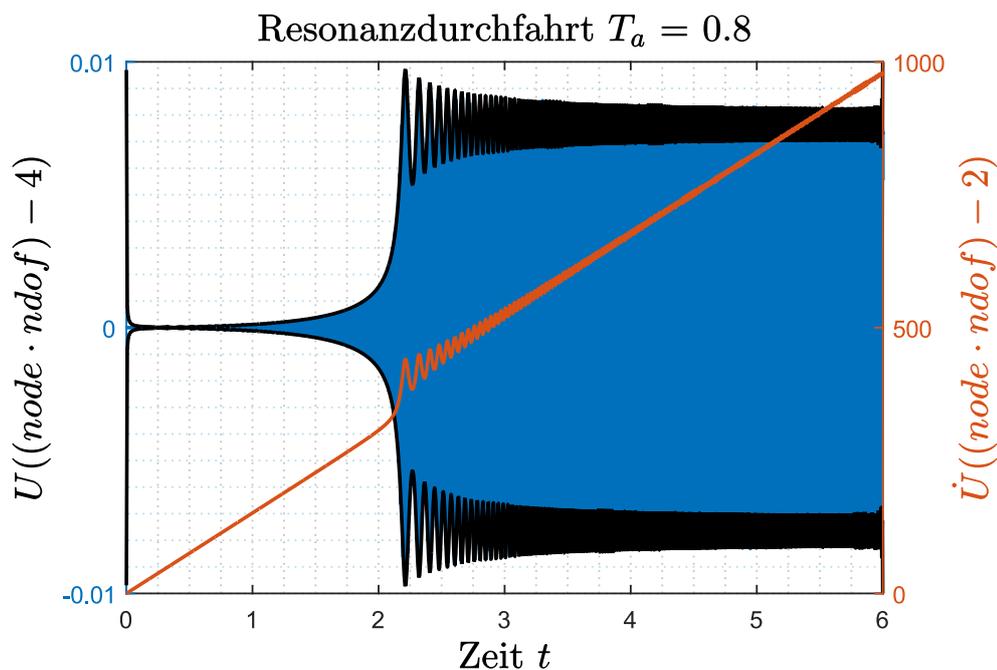


Abbildung 25: Mit RUNGE-KUTTA-Verfahren: Hängenbleiben

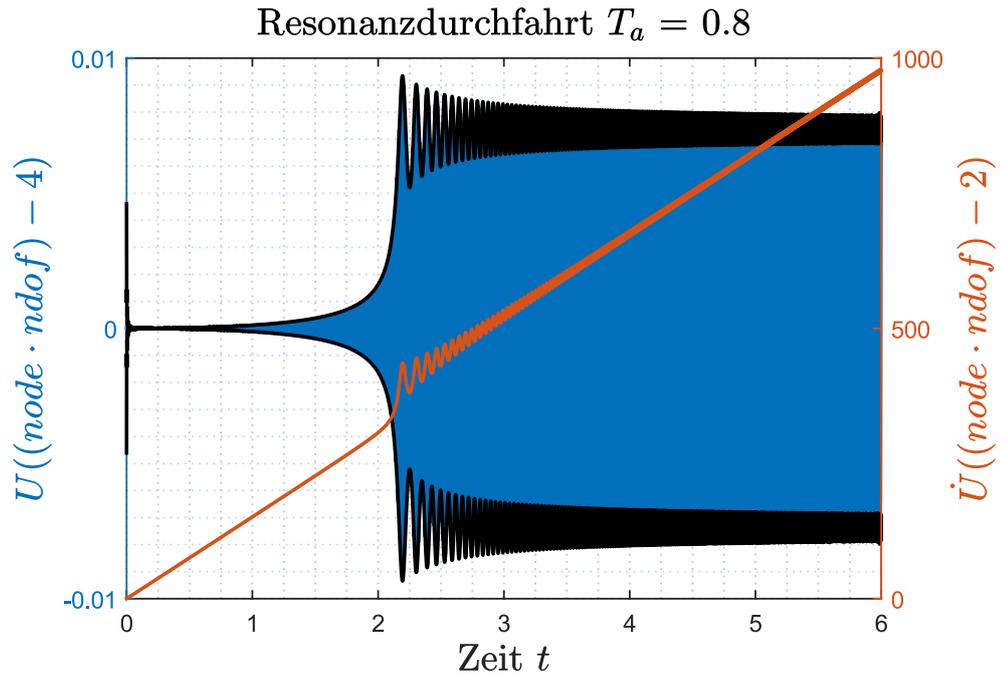


Abbildung 26: Mit NEWMARK-Verfahren: Hängenbleiben

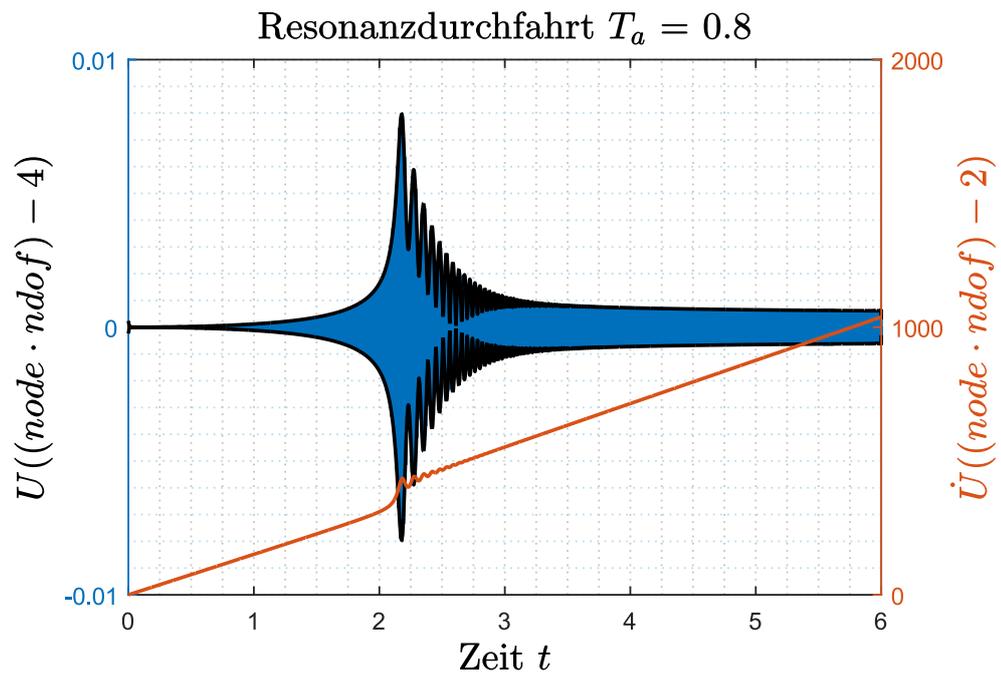


Abbildung 27: Rechnung mit RUNGE-KUTTA-Verfahren: Mit Dichtung Durchfahren

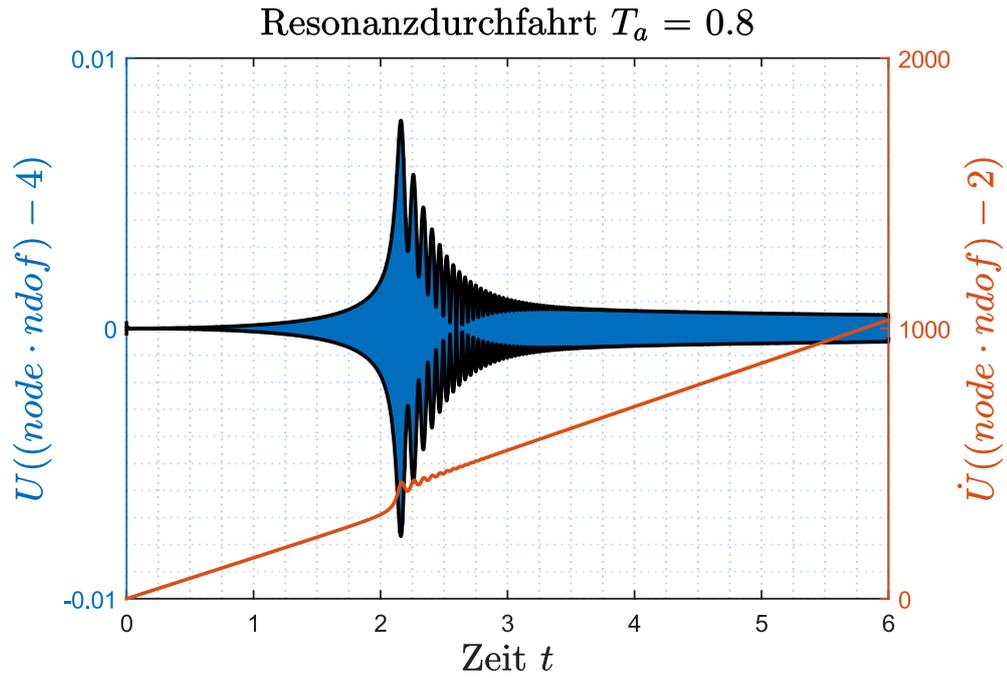


Abbildung 28: Rechnung mit NEWMARK-Verfahren: Fall Durchfahren

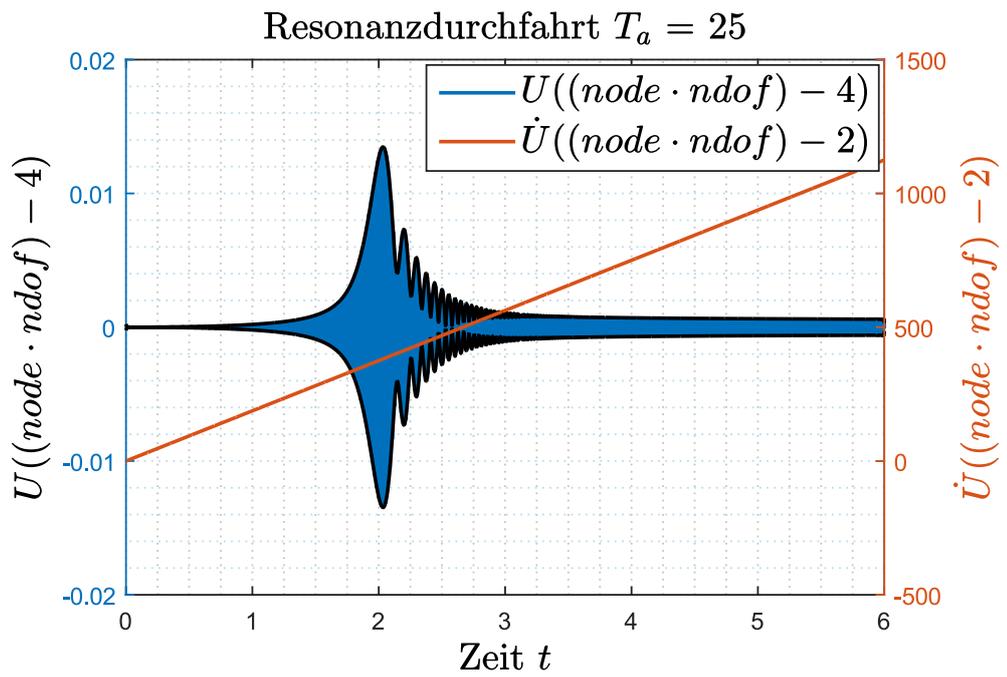


Abbildung 29: Rechnung mit RUNGE-KUTTA-Verfahren: Mit Dichtung

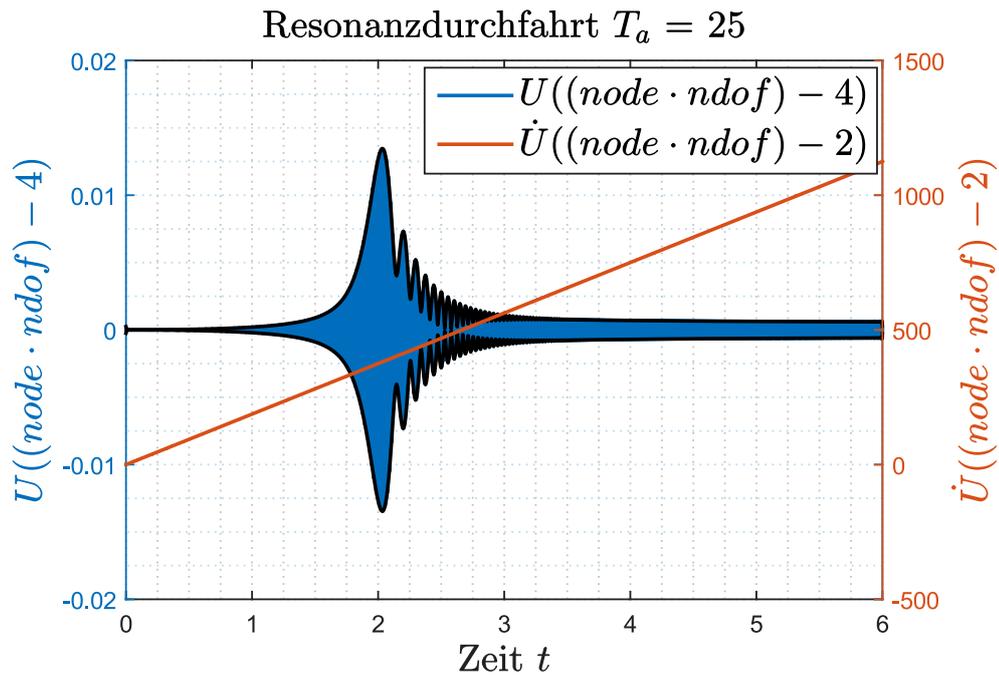


Abbildung 30: Rechnung mit NEWMARK-Verfahren: Mit Dichtung

Die Rechnungen mit Dichtung zeigen die Abbildungen 29 und 30. Es gelingt den Rotor die Durchfahrt in der Resonanzstelle. Im Vergleich zu der Lösung der freigeschnittenen Scheibe bleibt der Rotor ohne Dichtung immer in der Resonanzstelle hängen. Da das Antriebsmoment keinen Einfluß auf die Auslenkungen im Wellendurchstoßpunkt hat. Die nachfolgende Bilder zeigen die Simulation mit vier und mit acht Elemente $nel = 4$ und $nel = 8$.

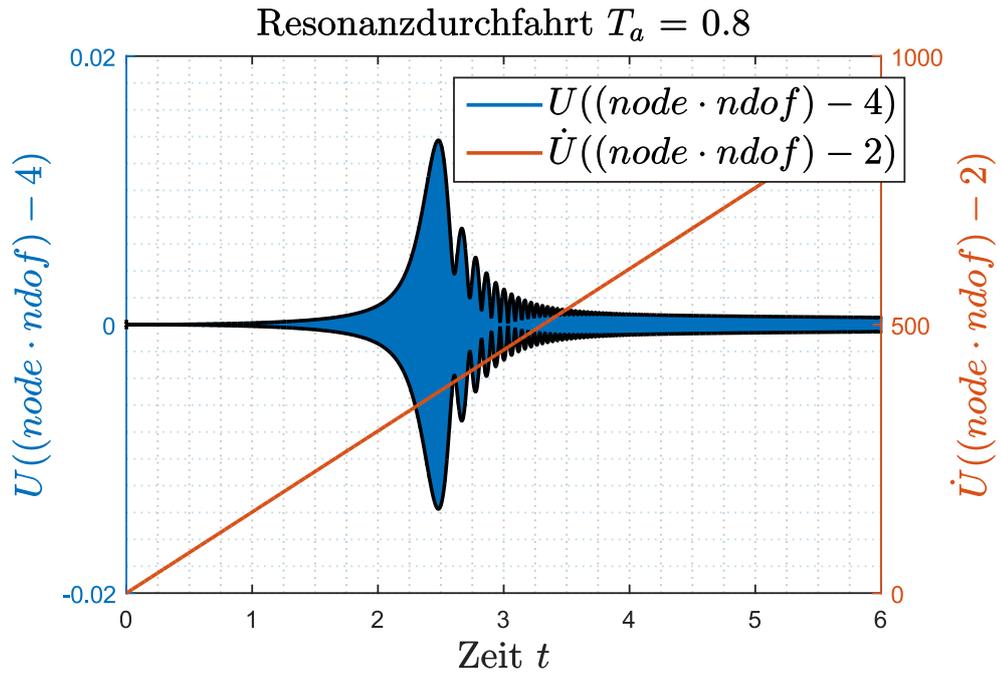


Abbildung 31: Rechnung mit NEWMARK-Verfahren vier Elemente: Fall Durchfahren

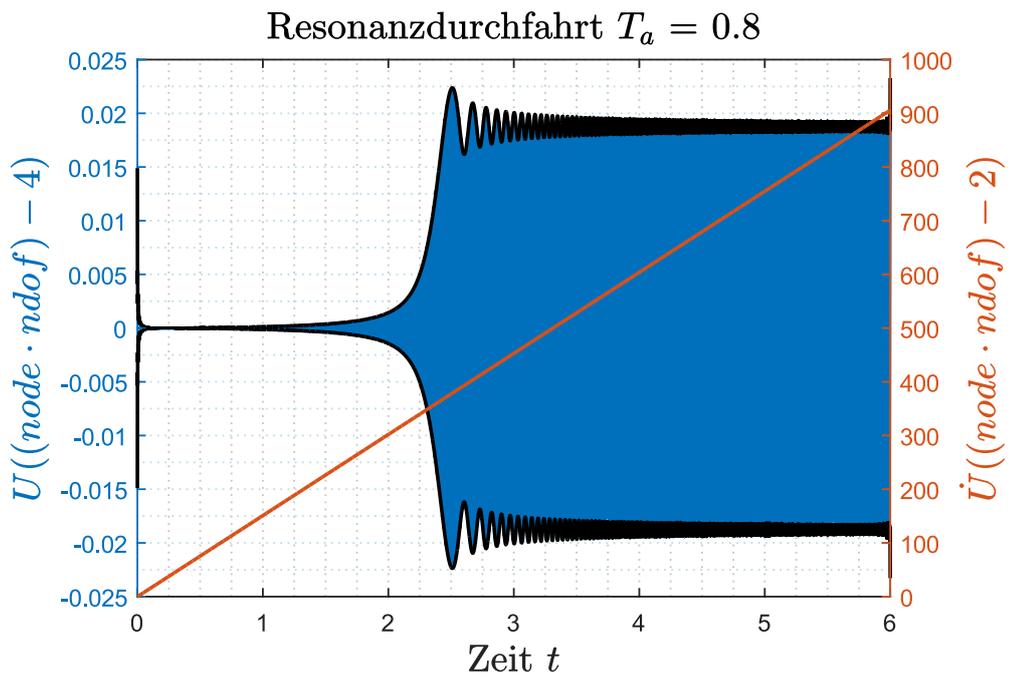


Abbildung 32: Rechnung mit NEWMARK-Verfahren vier Elemente: Fall Hängenbleiben

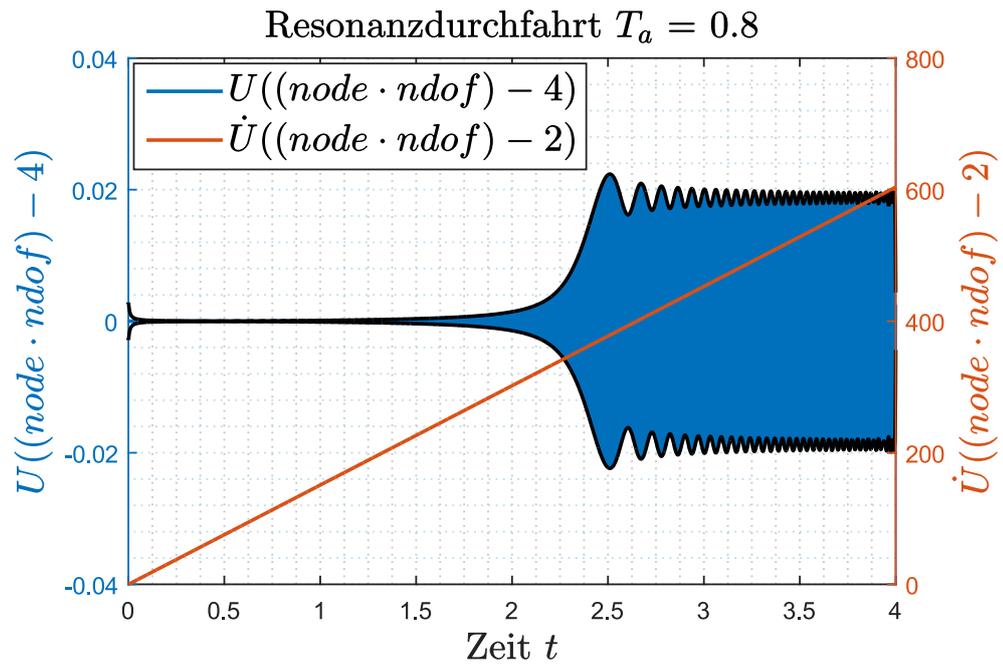


Abbildung 33: Rechnung mit NEWMARK-Verfahren acht Elemente: Fall Hängenbleiben

5 Zusammenfassung

Ziel dieser Masterarbeit war die numerischen Untersuchen eines elastischen Rotors mit einem Dämpfungselement. Dieses Ziel wurde einmal mit den beiden Integrationsverfahren, dem RUNGE-KUTTA-Verfahren und dem NEWMARK-Verfahren, untersucht. Es zeigte sich zweckmäßig bei der Lösung der Differentialgleichungen diese zum einen mit der Finiten-Elemente-Methode zu lösen, siehe Kapitel 4, und zum anderen die Differentialgleichungen zuvor auf die normierte dimensionslose Form zu bringen, damit werden die Zustandsgrößen in den Differentialgleichungen mit einer geringeren Anzahl von Parametern beschrieben, siehe Kapitel 3. Die in den einzelnen Kapiteln enthaltenen Ergebnisse führten zu einem besseren Verständnis des Einflusses vom Antriebsmoment auf das Rotorverhalten. Besonders mit und ohne Dämpfungselementen. Im Abschnitt 3.3 haben die präsentierten Simulationsergebnisse gezeigt, dass der Rotor beim schwächeren Antrieb an der Resonanzstelle hängenbleibt. Dagegen fährt der Rotor mit einem gering größeren Antrieb die Resonanzstelle durch. Für den Fall unter Berücksichtigung von Dämpfungselementen läuft der Rotor mit einem schwächeren Antrieb die Resonanzstelle durch. Die Lösungen mit der Finite-Elemente-Methode hat die Gleiche Ergebnisse gezeigt. Aber im Fall ohne Dämpfung gab es Unterschiede gegenüber der Lösung zur freigeschnittene Scheibe.

Erweiterungen zu den aufgezeigten Algorithmen sind unter anderem das Berücksichtigen von mehreren Scheiben sowie den Einbau von aussermittige Scheiben. Ebenso ist das Programm um weitere Dämpfungselemente, zum Beispiel in den Lagern und zur Welle, und modale Untersuchungen erweiterbar.

Literatur

- [1] DRESIG, H.: *Schwingungen und mechanische Antriebssysteme*. 2. Aufl. Berlin Heidelberg : Springer, 2006.
- [2] GASCH, R. u. a.: „Acceleration of unbalanced flexible rotors through the critical speeds“. In: *Sound and Vibration* 63.3 (1979), S. 393–409.
- [3] GASCH, R. u. a.: *Strukturdynamik*. 2. Aufl. Berlin Heidelberg : Springer, 2012.
- [4] MÜLLER, K.: *Abdichtung bewegter Maschinenteile*. Bad Vilbel : Medienverlag, 1990.
- [5] NEUMANN, K.: *Ein Beitrag zur Dichtwirkung von Radialwellendichtringen unter besonderer Berücksichtigung dynamischer Beanspruchungen*. Zwickau : Ingenieurhochschule, 1982.
- [6] P. KLETSCHKOWSKI, P. M.: *First investigations on actuation forces in adaptive rotary shaft seals*. 2014.
- [7] GASCH, R.; PFÜTZNER, H.: *Rotordynamik eine Einführung*. 1. Aufl. Berlin Heidelberg : Springer, 1975.
- [8] GASCH, R. u. a.: *Rotordynamik*. 2. Aufl. Berlin Heidelberg New York : Springer, 2002.
- [9] KLEIN, B.: *Grundlagen und Anwendungen der Finite-Element-Methode im Maschinen- und Flugzeugbau*. 10. Aufl. Wiesbaden : Springer vieweg, 2015.
- [10] GROSS, D. u. a.: *Technische Mechanik 2*. 12. Aufl. Berlin Heidelberg : Springer, 2014.
- [11] KUHL, D.; MESCHKE, G.: *Vorlesungsskript; Finite Elemente Methoden I & II*. 4. Aufl. Ruhr-Universität Bochum, 2002.
- [12] KRÄMER, E.: *Maschinendynamik*. Springer, 1984.
- [13] GROSS, D. u. a.: *Technische Mechanik 4*. 9. Aufl. Berlin Heidelberg : Berlin Heidelberg, 2014.
- [14] WRIGGERS, P.: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Berlin Heidelberg : Springer, 2001.
- [15] RUST, W.: *Nichtlineare-Finite-Elemente-Berechnungen*. 2. Aufl. Berlin Heidelberg : Springer, 2011.
- [16] GROSS, D. u. a.: *Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik 4*. 2. Aufl. Berlin Heidelberg : Springer, 2012.
- [17] BATHE, K.-J.: *Finite-Elemente-Methoden*. 2. Aufl. Berlin Heidelberg New York : Springer, 2002.
- [18] BETTEN, J.: *Finite Elemente für Ingenieure 1*. Berlin Heidelberg : Springer, 2003.

Anhang

Zusammenbau der Elementmatrizen des Balkens:

$$\mathbf{M}_{e_{xy}} \ddot{\mathbf{U}}_e + \mathbf{K}_{e_{xy}} \mathbf{U}_e = \mathbf{F}_{e_{xy}} = \mathbf{f}_{e_{xyV}} + \mathbf{f}_{e_{xyS}}$$

$$\mathbf{M}_{e_{xz}} \ddot{\mathbf{U}}_e + \mathbf{K}_{e_{xz}} \mathbf{U}_e = \mathbf{F}_{e_{xz}} = \mathbf{f}_{e_{xzV}} + \mathbf{f}_{e_{xzS}}$$

$$\mathbf{M}_{e_x} \ddot{\mathbf{U}}_e + \mathbf{K}_{e_x} \mathbf{U}_e = \mathbf{F}_{e_x} = \mathbf{f}_{e_{xV}} + \mathbf{f}_{e_{xS}}$$

$$\Rightarrow \left[\mathbf{M}_{e_{xy}} + \mathbf{M}_{e_{xz}} + \mathbf{M}_{e_x} \right] \ddot{\mathbf{U}}_e + \left[\mathbf{K}_{e_{xy}} + \mathbf{K}_{e_{xz}} + \mathbf{K}_{e_x} \right] \mathbf{U}_e = \mathbf{F}_{e_{xy}} + \mathbf{F}_{e_{xz}} + \mathbf{F}_{e_x}$$

$$\mathbf{U}_e = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 & U_{10} \end{bmatrix}^T$$

$$\dot{\mathbf{U}}_e = \begin{bmatrix} \dot{U}_1 & \dot{U}_2 & \dot{U}_3 & \dot{U}_4 & \dot{U}_5 & \dot{U}_6 & \dot{U}_7 & \dot{U}_8 & \dot{U}_9 & \dot{U}_{10} \end{bmatrix}^T$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_e = \begin{bmatrix} \ddot{U}_1 & \ddot{U}_2 & \ddot{U}_3 & \ddot{U}_4 & \ddot{U}_5 & \ddot{U}_6 & \ddot{U}_7 & \ddot{U}_8 & \ddot{U}_9 & \ddot{U}_{10} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{f}_{e_{xyV}} = 0$$

$$\mathbf{f}_{e_{xzV}} = 0$$

$$\mathbf{f}_{e_{xV}} = 0$$

$$\mathbf{f}_{e_{xyS}} = 0$$

$$\mathbf{f}_{e_{xzS}} = 0$$

$$\mathbf{f}_{e_{xS}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & T_a & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$$

xy-Ebene

$$\mathbf{M}_{e_{xy}} = \begin{bmatrix} \frac{13}{35}\rho Al + \frac{6}{5l}\rho I_p & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{210}\rho Al^2 + \frac{1}{10}\rho I_p & \frac{9}{70}\rho Al - \frac{6}{5l}\rho I_p & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10}\rho I_p - \frac{13}{420}\rho Al^2; & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0; & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0; & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0; & & & & & & & & \\ \frac{11}{210}\rho Al^2 + \frac{1}{10}\rho I_p & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{105}\rho Al^3 + \frac{2}{15}\rho I_p l & \frac{13}{420}\rho Al^2 - \frac{1}{10}\rho I_p & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30}\rho I_p l - \frac{1}{140}\rho Al^3; & & & & & & & & \\ \frac{9}{70}\rho Al - \frac{6}{5l}\rho I_p & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{420}\rho Al^2 - \frac{1}{10}\rho I_p & \frac{13}{35}\rho Al + \frac{6}{5l}\rho I_p & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{10}\rho I_p - \frac{11}{210}\rho Al^2; & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0; & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0; & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0; & & & & & & & & \\ \frac{1}{10}\rho I_p - \frac{13}{420}\rho Al^2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{30}\rho I_p l - \frac{1}{140}\rho Al^3 & -\frac{1}{10}\rho I_p - \frac{11}{210}\rho Al^2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{105}\rho Al^3 + \frac{2}{15}\rho I_p l; & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{e_{xy}} = \frac{EI_z}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 & 6l & -12 & 0 & 0 & 0 & 6l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6l & 0 & 0 & 0 & 4l^2 & -6l & 0 & 0 & 0 & 2l^2 \\ -12 & 0 & 0 & 0 & -6l & 12 & 0 & 0 & 0 & -6l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6l & 0 & 0 & 0 & 2l^2 & -6l & 0 & 0 & 0 & 4l^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{e_{xy}} = 0$$

xz-Ebene

$$\mathbf{M}_{e_{xz}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{35}\rho Al + \frac{6}{5l}\rho I_p & 0 & -\frac{11}{210}\rho Al^2 - \frac{1}{10}\rho I_p & 0 & 0 & \frac{9}{70}\rho Al - \frac{6}{5l}\rho I_p & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10}\rho I_p + \frac{13}{420}\rho Al^2 & 0; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{11}{210}\rho Al^2 - \frac{1}{10}\rho I_p & 0 & \frac{1}{105}\rho Al^3 + \frac{2}{15}\rho I_p l & 0 & 0 & -\frac{13}{420}\rho Al^2 + \frac{1}{10}\rho I_p & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{30}\rho I_p l - \frac{1}{140}\rho Al^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{70}\rho Al - \frac{6}{5l}\rho I_p & 0 & -\frac{13}{420}\rho Al^2 + \frac{1}{10}\rho I_p & 0 & 0 & \frac{13}{35}\rho Al + \frac{6}{5l}\rho I_p & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10}\rho I_p + \frac{11}{210}\rho Al^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10}\rho I_p + \frac{13}{420}\rho Al^2 & 0 & -\frac{1}{30}\rho I_p l - \frac{1}{140}\rho Al^3 & 0 & 0 & \frac{1}{10}\rho I_p + \frac{11}{210}\rho Al^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{105}\rho Al^3 + \frac{2}{15}\rho I_p l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{e_{xz}} = \frac{EI_y}{l^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -6l & 0 & 0 & -12 & 0 & -6l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6l & 0 & 4l^2 & 0 & 0 & 6l & 0 & 2l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & 6l & 0 & 0 & 12 & 0 & 6l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6l & 0 & 2l^2 & 0 & 0 & 6l & 0 & 4l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{e_{xz}} = 0$$

x-Ebene

$$\mathbf{M}_{e_x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\rho l J_p & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6}\rho l J_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}\rho l J_p & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\rho l J_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{e_x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{GJ_p}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_p}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{GJ_p}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_p}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```

1 clc , close all , clear all %#ok<*CLSCR,*CLFUN>
2 syms A E G l rho Ix Iy Iz Ip xi FM
3
4 % Stab unter ...
5   Torsion.....
6 % =====
7 % Vektor der Formfunktionen
8 % H(x) = [1-x/L x/L]
9 % xi = (2*x/L) -1
10 % H(xi) = [(1-xi)/2 (1+xi)/2]; % -1 ≤ xi ≤ 1 ; 0 ≤ x ≤ l
11 % Stabelement: M3----->> u3----->> ----->>u8 ----->>M8
12 N = [0 0 (1-xi)/2 0 0 0 0 (1+xi)/2 0 0];
13 Nst = diff(N,xi,1);

```

```

14 % Steifigkeitsmatrix
15 K_ex = G*Ix*2/l*int(Nst.'*Nst,xi,-1,1)
16 % Massenmatrix
17 M_ex = rho*Ix*1/2*int(N.'*N,-1,1)
18
19 % ...
    Balkenelement_xy - Richtung .....
20 % =====
21 % Hermit - Polynome
22 % xi = (2*x/l)-1 ; -1 ≤ xi ≤ 1 ; 0 ≤ x ≤ l
23 %H_xy = [1-3*x^2/l^2+2*x^3/l^3, x-2*x^2/l+x^3/l^2, ...
    3*x^2/l^2-2*x^3/l^3, ...
24 % -x^2/l+x^3/l^2];
25 H_xy = [((xi - 1)^2*(xi + 2))/4, 0, 0, 0, (1*(xi - 1)^2*(xi + 1))/8, ...
26 -(xi + 1)^2*(xi - 2))/4,0, 0, 0, (1*(xi - 1)*(xi + 1)^2)/8];
27
28 H_xyst = diff(H_xy,xi,1); % erste Ableitung von h nach xi
29 H_xystst = diff(H_xy,xi,2); % zweite Ableitung von h nach xi
30 % Steifigkeitsmatrix
31 K_xy = E*Iz*8/l^3*int(H_xystst.'*H_xystst,xi,-1,1)
32 % Massenmatrix
33 M_xyT = rho*A*1/2*int(H_xy.'*H_xy,xi,-1,1) % Translatorisch
34 M_xyR = rho*Ip*2/l*int(H_xyst.'*H_xyst,xi,-1,1) % Rotatorisch
35 % ...
    Balkenelement_xz - Richtung .....
36 % =====
37 % Hermit - Polynome
38 H_xz = [0, ((xi - 1)^2*(xi + 2))/4, 0, -(1*(xi - 1)^2*(xi + 1))/8, ...
39 0, 0, -(xi + 1)^2*(xi - 2))/4, 0, -(1*(xi - 1)*(xi + 1)^2)/8, 0];
40 H_xzst = diff(H_xz,xi,1); % erste Ableitung von h nach xi
41 H_xzstst=diff(H_xz,xi,2); % zweite Ableitung von h ...
    nach xi
42 % Steifigkeitsmatrix
43 K_xz=E*Iy*8/l^3*int(H_xzstst.'*H_xzstst,xi,-1,1)
44 % Massenmatrix
45 M_xzT=rho*A*1/2*int(H_xz.'*H_xz,xi,-1,1) % Translatorisch
46 M_xzR=rho*Ip*2/l*int(H_xzst.'*H_xzst,xi,-1,1) % Rotatorisch
47
48 % Elementmatrizen des ...
    Balkens .....
49 % =====
50 % Ergebnisse:
51 Feb = sparse(zeros(10,1))
52
53 Keb = K_ex+K_xy+K_xz

```

```
54 pretty (Keb), figure, spy (Keb, '.'),  
55 title ('$$Steifigkeitsmatrix$$', 'Interpreter', 'Latex', 'fontsize', 16)  
56  
57 Deb = sparse (zeros (10))  
58  
59 Meb = M_ex+M_xyT+M_xyR+M_xzT+M_xzR  
60 pretty (Meb), figure, spy (Meb, '.' )  
61 title ('$$Massenmatrix$$', 'Interpreter', 'Latex', 'fontsize', 16)
```