

Masterarbeit

Tim Kühnrich

**Experimentelle Untersuchung des Einflusses der
Werkstoffdegradation in unidirektionalen
Faserverbundstrukturen auf die nichtlinearen
Ausbreitungseigenschaften von LAMB-Wellen**

*Fakultät Technik und
Informatik
Department Fahrzeugtechnik
und Flugzeugbau*

*Faculty of Engineering and
Computer Science
Department of Automotive and
Aeronautical Engineering*

Tim Kühnrich

**Experimentelle Untersuchung des Einflusses der
Werkstoffdegradation in unidirektionalen Faserverbundstrukturen
auf die nichtlinearen Ausbreitungseigenschaften von LAMB-Wellen**

Masterarbeit eingereicht im Rahmen der Masterprüfung

im Studiengang Fahrzeugbau
am Department Fahrzeugtechnik und Flugzeugbau
der Fakultät Technik und Informatik
der Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg

in Zusammenarbeit mit:

Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Maschinenbau
Professur für Mechanik
Holstenhofweg 85
22043 Hamburg

Erstprüfer: Prof. Dr. Ing. Ralf Ahrens
Zweitprüfer: Prof. Dr. Ing. Rolf Lammering
Betreuende Mitarbeiterin: Natalie Rauter, M.Sc.

Eingereicht am: 29. Februar 2016

Tim Kühnrich

Thema der Arbeit

Experimentelle Untersuchung des Einflusses der Werkstoffdegradation in unidirektionalen Faserverbundstrukturen auf die nichtlinearen Ausbreitungseigenschaften von LAMB-Wellen

Stichworte

Faserverbunde, Kontinuumsmechanik, Elastizitätsmodul, geführte Wellen, Dispersion, multimodal, Wellenausbreitung, Nichtlinearität, höherharmonische Moden, akustischer Nichtlinearitätsparameter, Wavelet-Transformation

Kurzzusammenfassung

Inhalt dieser Arbeit ist die Betrachtung der nichtlinearen Wellenausbreitungseigenschaften und der mechanischen Eigenschaften von Faserverbundstrukturen. Dabei sind unidirektionale Faserverbunde aus kohlefaserverstärkten Kunststoffen in experimentellen Verfahren auf eben diese zu untersuchen. Dazu erfolgt zunächst die Bestimmung mechanischer Eigenschaften des ungeschädigten Materials. Auf Basis dieser Daten ergeben sich die dazugehörigen Dispersionsdiagramme, aus denen die Anregungsfrequenz für die Versuche zur Wellenausbreitung resultieren. Anschließend werden Schädigungen in die Strukturen eingebracht. Die nichtlinearen Wellenausbreitungseigenschaften werden durch den relativen akustischen Nichtlinearitätsparameter ausgedrückt und experimentell bestimmt. Zugversuche an den geschädigten Strukturen ergeben die mechanischen Eigenschaften bei den entsprechenden Schädigungen, welche durch den Elastizitätsmodul repräsentiert werden. Eine Korrelationsanalyse zwischen dem Nichtlinearitätsparameter und dem Elastizitätsmodul führt zu einem Zusammenhang zwischen den beiden Materialeigenschaften.

Tim Kühnrich

Title of the paper

Experimental analysis on the influence of material degradation in unidirectional fiber composites on nonlinear wavepropagation properties of LAMB waves

Keywords

Fiber composites, continuum mechanics, Young's modulus, guided waves, dispersion, multi-modal, wave propagation, nonlinearity, higherharmonic modes, acoustic nonlinearity parameter, wavelet transformation

Abstract

Subject of this report is to analyze a correlation between mechanical properties and wave propagation properties of carbon fiber composites. Furthermore changes in those properties due to added damages are of interest. Hence, the mechanical properties of undamaged material are determined. The mechanical properties of undamaged material lead to the excitation frequency by using the dispersion relations. After adding damage due to cyclic loads the wave propagation properties of the damaged materials are measured. Measuring damaged materials mechanical properties and correlating those with the wave propagation properties links both material characteristics.

Vorwort

Die vorliegende Masterthesis entstand im Rahmen des Studienganges Fahrzeugbau als eine Abschlussarbeit zur Erlangung des Master of Science an der Hochschule für angewandte Wissenschaften Hamburg und wurde in Zusammenarbeit mit der Professur für Mechanik der Helmut-Schmidt-Universität / Universität der Bundeswehr Hamburg erarbeitet.

An dieser Stelle möchte ich meinen Dank an die Mitarbeiter der Professur für Mechanik der Helmut-Schmidt-Universität / Universität der Bundeswehr Hamburg aussprechen. Der aufgeschlossene und hilfsbereite Umgang ermöglichte es, Fragen jederzeit schnell und verständlich zu klären. Dabei gilt Frau Natalie Rauter, M.Sc. besonderer Dank. Durch ihre Betreuung in fachlichen Fragestellungen war die Umsetzung der Arbeit in dieser Form erst möglich.

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	III
Abbildungsverzeichnis	V
Tabellenverzeichnis	VI
1. Einleitung	1
1.1. Motivation	1
1.2. Aufgabenstellung	2
1.3. Gliederung der Arbeit	3
2. Grundlagen	4
2.1. Kontinuumsmechanik	4
2.2. Formen der Wellenausbreitung	8
2.2.1. Höherharmonische Moden	13
2.2.2. Nichtlinearitätsparameter	20
2.3. Signalanalyse	23
3. Nichtlineare Wellenausbreitung in den geschädigten Proben	30
3.1. Anfertigung geschädigter Proben	30
3.2. Berechnung der Dispersionsdiagramme	32
3.3. Ermittlung des normierten Nichtlinearitätsparameters	34
3.4. Ermittlung des Elastizitätsmoduls	36
3.5. Korrelationsanalyse	38
4. Zusammenfassung und Ausblick	43
A. Anhang	47
A.1. Lineares Materialverhalten	47
A.2. Herleitung der Dispersionsbeziehungen	51
A.3. Mess- und Auswertesignale	60

Symbolverzeichnis

Griechische Symbole

α	Verhältnis der Wellenzahlkomponenten x und z sowie Eigenwerte des charakteristischen Polynoms
β	absoluter akustischer Nichtlinearitätsparameter
β'	relativer akustischer Nichtlinearitätsparameter
δ	Kronecker-Delta
ε	Linearisierter Greenscher Verzerrungstensor
γ	Koeffizienten der Christoffelgleichung
λ, μ	LAMÉ-Konstanten
ν	Querkontraktionszahl
ω	Kreisfrequenz
φ	Faserwinkel
Φ	Deformation
ρ_0	Dichte des nicht deformierten Körpers
ρ	Dichte des deformierten Körpers
σ	Cauchy Spannungstensor
ζ	normierter akustischer Nichtlinearitätsparameter

Lateinische Symbole

A_1	Amplitude der primär-angeregten Mode
A_2	Ungestörte Amplitude der höherharmonischen Mode
\hat{A}_2	Amplitude der höherharmonischen Mode aufgrund der nichtlinearer Störung
A_m	Amplitude der m -ten Mode
\mathbf{A}	(Hyper)-Matrix zu den Amplituden der Verschiebung
$A_{u1,2,3}$	Amplituden der Verschiebungskomponenten
A, B, C	Elastizitätskonstanten dritter Ordnung
b	Breite der Probe
$B_{u1,2,3}$	Amplituden der Verschiebungskomponenten bei Isotropie
B	Beliebiger Körper im dreidimensionalen Raum
c_p	Phasengeschwindigkeit
c_g	Gruppengeschwindigkeit
\mathbb{C}	Stofftensor
\mathbb{C}_0	Stofftensor bei Null Grad Faserwinkel
d	Dicke der Probe
\mathbf{D}	Hypermatrix zu den Koeffizienten der Dispersionsbeziehung
E_{\perp}	Elastizitätsmodul orthogonal zur Faserrichtung
E_{\parallel}	Elastizitätsmodul entlang der Faserrichtung
\mathbf{E}	Allgemeiner Greenscher Verzerrungstensor
f_{Err}	Frequenz der primär-angeregten Mode
f_{Hh}	Frequenz der höherharmonischen Mode

f^{surf}	Oberflächenkräfte in der Struktur
f^{vol}	Volumenkräfte in der Struktur
f_n	Koeffizienten des charakteristischen Polynoms der Christoffelgleichung
$f_{E,n}$	Fehlerfortpflanzung des Elastizitätsmoduls der Probe n
$f_{\zeta,n}$	Fehlerfortpflanzung des normierten Nichtlinearitätsparameters der Probe n
F	materieller Deformationsgradient
H	materieller Verschiebungsgradient
H^{exp}	Diagonalmatrix mit Exponentialanteilen der Dispersionsbeziehung
I	Einheitstensor
k	Wellenzahlvektor
m_0	Masse des nicht deformierten Körpers
m	Masse des deformierten Körpers
n	Normalenvektor zum Flächentragwerk in der Momentankonfiguration
N	Normalenvektor zum Flächentragwerk in der Ausgangskonfiguration
p	Parameter zur Beschreibung der Longitudinalwelle bei Isotropie
p	Polarisationsvektor
P_{mn}	Leistungsfluss zwischen den Moden m und n
q	Parameter zur Beschreibung der Transversalwelle bei Isotropie
Q	Querschnittsfläche
P	Erster Piola-Kirchhoff Spannungstensor
P^L	Linearer Anteil des ersten Piola-Kirchhoff Spannungstensors
P^{NL}	Nichtlinearer Anteil des ersten Piola-Kirchhoff Spannungstensors
S	Nachgiebigkeitstensor
S	Zweiter Piola-Kirchhoff Spannungstensor
S^L	Linearer Anteil des zweiten Piola-Kirchhoff Spannungstensors
S^{NL}	Nichtlinearer Anteil des zweiten Piola-Kirchhoff Spannungstensors
t	Zeitpunkt
t	Zeitvektor
t^A	Cauchy Spannung in der Ausgangskonfiguration
t^M	Cauchy Spannung in der Momentankonfiguration
T_{trans}	Transformationsmatrix
u	Vektor der Partikelverschiebung
ü	Vektor der Partikelgeschwindigkeit
ü	Vektor der Partikelbeschleunigung
V_0	Volumen des nicht deformierten Körpers
V	Volumen des deformierten Körpers
x	Ortsvektor zum Körper B in der Momentankonfiguration
$x_{1,2,3}$	Achsen des „on-axis-Koordinatensystems“
X	Ortsvektor zum Körper B in der Ausgangskonfiguration
x, y, z	Achsen des „off-axis-Koordinatensystems“

Abbildungsverzeichnis

2.1. Konfigurationen des Körpers B nach [1]	5
2.2. Darstellung einer Longitudinalwelle im unendlichen Raum, nach [2]	9
2.3. Darstellung einer Transversalwelle im unendlichen Raum, nach [2]	9
2.4. Darstellung einer Rayleighwelle im Halbraum [2]	10
2.5. Schematische Darstellung der LAMB-Moden	11
2.6. Schematische Darstellung der symmetrischen SH-Moden	11
2.7. Schematische Darstellung der antisymmetrischen SH-Moden	12
2.8. Dispersionsdiagramm Phasengeschwindigkeit UD-CFK, Faserwinkel 0°	12
2.9. Dispersionsdiagramm Gruppengeschwindigkeit UD-CFK, Faserwinkel 0°	13
2.10. Flächentragwerk zur Generierung der Höherharmonischen	13
2.11. Gerade und ungerade Funktionen zur Beschreibung der Partikelbewegung	19
2.12. Zeitdiskretes Signal	23
2.13. Aliasing-Effekt	24
2.14. Zeitsignal mit Fensterfunktionen	25
2.15. Frequenzdiskretes Signal	26
2.16. Zeitsignal mit Fensterfunktionen in der STFT	27
2.17. Frequenz- und zeitdiskretes Signal	27
2.18. Einfluss der Teilbereiche auf die Frequenz- und Zeitdiskretisierung	28
2.19. Zeitsignal mit Morlet-Wavelet	29
2.20. Einfluss der Wavelets auf die Frequenz- und Zeitauflösung	29
3.1. Vernähtungen in einer Struktur aus UD-CFK	30
3.2. Mikroschliff einer Struktur aus UD-CFK mit Vernähtungen	31
3.3. Schädigungsarten einer Struktur aus UD-CFK	31
3.4. Dispersionsdiagramm für Phasengeschwindigkeiten der Proben aus UD-CFK	33
3.5. Dispersionsdiagramm für Gruppengeschwindigkeit der Proben aus UD-CFK	33
3.6. Schematische Darstellung des Versuchs zur nichtlinearen Wellenausbreitung	34
3.7. Aufgenommenes Zeitsignal der Probe 5 000 ₁	35
3.8. Normierter Nichtlinearitätsparameter über alle Versuche	36
3.9. Zuschnitt der Proben im Bereich der Wellenausbreitung	36
3.10. Gemessene Elastizitätsmodule der zugeschnittenen Proben	37
3.11. Korrelationsanalyse bezüglich aller Proben	38
3.12. Korrelationsanalyse mit Fehlerfortpflanzung	42
3.13. Ausschnitt der Korrelationsanalyse mit Fehlerfortpflanzung	42
4.1. Gegenüberstellung der Korrelationsanalysen mit Fehlerfortpflanzung	43
A.1. Monoklinie bei einer UD-Einzelschicht [3]	48
A.2. Transversal-Isotropie bei einer UD-Einzelschicht [3]	49
A.3. Koordinatentransformation für Wellenausbreitung in x-z-Ebene [2]	52
A.4. Zuordnung der Verschiebungskomponenten, nach [2]	57
A.5. Aufgenommene und bereinigte Zeitsignale	61
A.6. Wavelet-Koeffizienten der S_1 -Mode	62
A.7. Wavelet-Koeffizienten der S_2 -Mode	63

Tabellenverzeichnis

1.1. Materialparameter im Vergleich, nach [4, S.20 ff.]	1
3.1. Lastzyklenzahlen zur Erstellung geschädigter Proben	30
3.2. Materialparameter ungeschädigter CFK-Struktur	32
3.3. Relativer akustischer und normierter Nichtlinearitätsparameter	35
3.4. Messgenauigkeiten in der Fehlerfortpflanzung des Elastizitätsmoduls	40
3.5. Standardabweichungen in der Fehlerfortpflanzung des Elastizitätsmoduls	41

1. Einleitung

Die Thematik des Leichtbaus ist besonders im Bereich der Luftfahrt von großem Interesse. Die Verwendung von Bauteilen und Strukturen mit geringem Gewicht verringert auch das Gesamtgewicht des Flugzeuges. Diese Reduzierung wird beispielsweise genutzt, um mehr Nutzlast pro Flug aufzunehmen. Nutzlast bedeutet für die Fluggesellschaften zahlende Güter, weshalb man von dem sogenannten „Payload“ spricht. Je höher das Payload, desto Attraktiver erscheint also ein Flugzeugmodell den Fluggesellschaften. Das so eingesparte Gewicht dient dabei nicht nur der Senkung der Betriebskosten, sondern auch der Gewinnsteigerung. Die Gewichtsreduzierung ist jedoch durch weitere werkstoffspezifische Materialparameter oder durch die Anforderungen aus dem Lastenheft begrenzt. Zu weiteren Materialparametern zählen beispielsweise der Elastizitätsmodul, die Querkontraktionszahl und die spezifische Steifigkeit. Anforderungen aus dem Lastenheft können maximale äußere Lasten oder maximale Dehnungen vorgeben. Unter Verwendung eines festgelegten Materials kann eine Gewichtsreduzierung nur über die Geometrie erfolgen. Das hat unmittelbare Auswirkungen auf Bereiche, deren Anforderungen im Lastenheft eingegrenzt werden. Die Verringerung der Geometrie bedeutet eine Verringerung des Querschnittes, was bei gleichbleibender Kraft zu höheren Spannungen führt. Diese höheren Spannungen bringen bei konstantem Elastizitätsmodul größere Dehnungen mit sich, welche konstruktionsbedingt oder aus sicherheitsrelevanten Gründen nicht zulässig sind. Eine weitere Möglichkeit das Gewicht eines Bauteils zu verringern ist über dessen Dichte in Form der spezifischen Steifigkeit gegeben. Es wird somit ein anderer Werkstoff verwendet. Neben der Weiterentwicklung von beispielsweise Aluminiumlegierungen werden auch die Faserverbundwerkstoffe für einen möglichen Einsatz betrachtet. Unter diese Werkstoffe fallen beispielsweise die kohlefaserverstärkten Kunststoffe (CFK), welche je nach Zusammensetzung und Beanspruchungsrichtung durch ihren hohen Elastizitätsmodul bei geringer Dichte gegenüber Aluminium bestehen. Tabelle 1.1 macht dies für eine Einzelschicht aus unidirektionalem CFK (UD-CFK) deutlich.

Tabelle 1.1.: Materialparameter im Vergleich, nach [4, S.20 ff.]

Material	E-Modul [N/mm^2]	Dichte [g/cm^3]	Spez. Steifigkeit [m^2/s^2]
Aluminium	72800	2.56	$2.84 \cdot 10^7$
UD-CFK	110100	1.48	$7.45 \cdot 10^7$

Der Einsatz neuer Werkstoffe nimmt jedoch nicht nur auf die Konstruktion Einfluss, sondern auch auf die verwendeten Inspektionsmethoden. Diese Inspektionsmethoden dienen der Lebensdauerüberwachung und werden unter dem Begriff „Structural Health Monitoring“ (SHM) zusammengefasst. Bei dem SHM bedient man sich der sogenannten „zerstörungsfreien Prüfmethoden“, welche den strukturellen Zustand der Probe während und nach der Inspektion unverändert lassen.

1.1. Motivation

Herkömmliche Inspektionsmethoden sind beispielsweise das Ultraschall- oder das Röntgenverfahren. Beide Verfahren sind besonders zeit- und damit kostenintensiv. Das Röntgenverfahren kann nur zum Einsatz kommen, wenn beide Seiten der zu prüfenden Struktur zugänglich sind. Daher wird oftmals das Ultraschallverfahren verwendet, welches mit einem entsprechend ausgerüsteten Prüfkopf auch für einseitig zugängliche Strukturen genutzt werden kann. Durch die jedoch kleinen Prüfköpfe ergibt sich eine lange Inspektionsdauer, was

einen anhaltenden Einsatzstopp des Flugzeuges zur Folge hat. Neben der kostenintensiven Prüfung können durch dieses Flugzeug keine Nutzlasten transportiert werden, wodurch es keine Gewinne einbringt.

Ultraschallverfahren nutzen lineare Wellenausbreitungseigenschaften in Festkörpern, um Defekte zu detektieren. Bei der linearen Wellenausbreitung antwortet die Struktur in der gleichen Frequenz, in der sie angeregt wird. Die Detektion der Defekte erfolgt über die Messung der akustischen Impedanz. Sie setzt sich zusammen aus dem Produkt der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit und der Dichte des durchdrungenen Materials und ist ein Maß dafür, inwieweit eine Welle reflektiert bzw. transmittiert wird. Defekte sind im Allgemeinen Masse- oder Geometrievariationen, wie sie beispielsweise durch Risse oder im Falle von CFK durch Delamination entstehen. Das Verfahren detektiert Defekte im makroskopischen Bereich. Bei Faserverbundwerkstoffen sind jedoch bereits mikroskopische Defekte Ausgangspunkte für strukturelles Versagen, da plastische Verformungen bei diesen Werkstoffen nahezu nicht vorhanden sind. Daher sind mikroskopische Defekte frühestmöglich zu detektieren.

Zwei wichtige Anforderungen an neue Inspektionsmethoden sind somit die Zeit- und Kostenersparnis durch großflächige Inspektionen und die Detektion mikrostruktureller Defekte. Als eine alternative Inspektionsmethode hat sich die Nutzung von geführten Wellen zur Identifizierung von Defekten gezeigt. Der Vorteil besteht darin, dass diese Wellen die gesamte Bauteildicke durchdringen und sich über große Bereiche hin ausbreiten. Damit können größere Bauteilstrukturen geprüft werden und es ergibt sich eine deutlich geringere Inspektionsdauer. Geführte Wellen unterscheiden sich in LAMB-Wellen und horizontale Scherwellen (SH-Wellen). Defekte in der Bauteilstruktur ändern die Ausbreitungseigenschaften der Wellen und führen zu Strukturantworten der geschädigten Struktur. Mit bekannter Anregung und Kenntnis über die Ausbreitungseigenschaften der ungeschädigten Struktur liegen zu erwartende Strukturantworten vor. Durch einen Vergleich der Strukturantworten kann ein Rückschluss auf die Ausbreitungseigenschaften der Wellen und damit auf die Defekte in der Struktur gezogen werden. Die Ausbreitungseigenschaften können unterteilt werden in lineare und nichtlineare. Die lineare Wellenausbreitung wird genutzt, um die Ausbreitungseigenschaften für die ungeschädigte Struktur zu ermitteln. Die Verwendung nichtlinearer Ausbreitungseigenschaften macht die Detektion mikrostruktureller Defekte möglich. Unter die nichtlineare Wellenausbreitung fällt beispielsweise die Generierung höherharmonischer Wellenmoden. Die Struktur antwortet dabei nicht nur in der angeregten Frequenz, sondern zusätzlich mit ganzzahligen Vielfachen davon.

1.2. Aufgabenstellung

Gegenstand dieser Masterarbeit sind geschädigte UD-CFK Proben. Diese sind auf einen Zusammenhang zwischen den nichtlinearen Ausbreitungseigenschaften von LAMB-Wellen und den mechanischen Eigenschaften zu untersuchen. Dazu sind zunächst die Materialparameter des ungeschädigten Materials zu bestimmen. Daraus bestimmt sich die Anregungsfrequenz für die Versuche zur nichtlinearen Wellenausbreitung in den geschädigten Proben. Anschließend sind Proben mit unterschiedlichen Schädigungsgraden herzustellen. Versuche zu den nichtlinearen Ausbreitungseigenschaften der geschädigten Proben führen auf den jeweiligen relativen akustischen Nichtlinearitätsparameter. Dieser dient der Beschreibung der Nichtlinearitäten, die durch die Schädigungen in die Struktur eingebracht wurden. Die von den Versuchen abgedeckten Bereiche sind aus den Proben heraus zu trennen. Nachfolgend sind für jede geschädigte Probe die mechanischen Eigenschaften zu ermitteln. Eine abschließen-

de Korrelationsanalyse zwischen den relativen akustischen Nichtlinearitätsparametern und den mechanischen Eigenschaften der geschädigten Proben prüft auf einen Zusammenhang zwischen den untersuchten Größen.

- Erarbeitung der theoretischen Grundlagen im Bezug auf die nichtlineare Ausbreitung von LAMB-Wellen basierend auf der Entstehung kumulativer höherharmonischer Moden in dünnen Flächentragwerken aus unidirektionalen transversal-isotropischen Einzelschichten,
- Bestimmung der benötigten Kennwerte für die Untersuchung der nichtlinearen Wellenausbreitung basierend auf den Parametern des ungeschädigten Materials,
- Vorbereitung und Einbringen der Schädigungen in die einzelnen Proben,
- Experimentelle Untersuchung der nichtlinearen Wellenausbreitung und Bestimmung des relativen akustischen Nichtlinearitätsparameters,
- Bestimmung des Elastizitätsmoduls der einzelnen geschädigten Proben,
- Korrelationsanalyse unter Berücksichtigung der einzelnen Messungenauigkeiten der Ergebnisse aus der Wellenausbreitung mit den Ergebnissen der mechanischen Eigenschaften,
- Dokumentation.

1.3. Gliederung der Arbeit

In dem ersten Abschnitt der Thesis erfolgt die Einarbeitung in die theoretischen Grundlagen. Diese dienen der Darstellung kontinuumsmechanischer Zusammenhänge sowie dem Einblick in die Formen der Wellenausbreitung. Weiterhin wird auf die Generierung der höherharmonischen Moden aufgrund von Nichtlinearitäten eingegangen. Diese Grundlagen dienen der Beschreibung des akustischen Nichtlinearitätsparameters. Das Kapitel zu den theoretischen Grundlagen wird mit einer Einführung in die Signalanalyse und der verwendeten Wavelet-Transformation beendet.

Im zweiten Abschnitt werden die praktischen Anteile der Arbeit aufgezeigt. Der Aufbau des verwendeten Laminats führt zur Beschreibung der Vorgänge zum Erstellen geschädigter Proben. Unter Verwendung der Materialparameter des ungeschädigten Materials ergeben sich die Dispersionsdiagramme, aus denen die Anregungsfrequenz für die nachfolgenden Versuche resultiert. Zu den Versuchen wird jeweils auf die Versuchsaufbauten und die Versuchsdurchführungen eingegangen. Diese dienen der Bestimmung der Nichtlinearitätsparameter und der Elastizitätsmodule der Proben. Eine abschließende Korrelationsanalyse schließt mit den praktischen Anteilen der Arbeit.

Den Abschluss der Thesis bildet eine Zusammenfassung sowie ein Ausblick auf weitere Untersuchungen. Die Zusammenfassung bedient sich den einerseits erwarteten und andererseits aus den Versuchen resultierten Ergebnissen. Sie zeigt auf, ob ein Einfluss der Werkstoffdegradation auf die nichtlinearen Wellenausbreitungseigenschaften in UD-CFK auf Basis von LAMB-Wellen dargestellt werden kann. Ein Ausblick auf weitere Untersuchungen gibt an, wie weitere Zusammenhänge ermittelt oder bereits erhaltene Ergebnisse abgesichert werden können.

2. Grundlagen

Mit dem folgenden Kapitel werden die relevanten Grundlagen zum Verständnis der Thesis beschrieben. Die Grundlagen unterteilen sich zunächst in die übergeordneten Abschnitte [Kontinuumsmechanik](#) und [Formen der Wellenausbreitung](#). Die Kontinuumsmechanik dient der Darstellung und Herleitung mathematischer und mechanischer Zusammenhänge, mit denen das Ausbreitungsverhalten der Wellenformen beschrieben wird. Daraufhin folgt die Veranschaulichung der auftretenden Wellenformen unter Anwendung der kontinuumsmechanischen Grundlagen. An der Stelle wird zudem auf die Dispersionsbeziehungen im linearen Fall verwiesen sowie auf nichtlineares Ausbreitungsverhalten eingegangen.

2.1. Kontinuumsmechanik

In diesem Abschnitt erfolgt die Einführung in die für diese Thesis erforderlichen Grundlagen der Kontinuumsmechanik. Der Einstieg erfolgt anhand eines beliebigen Körpers im dreidimensionalen Raum. Dabei wird nach einer allgemeinen Einführung auf Unterschiede zwischen linearer und nichtlinearer Geometrie sowie linearem und nichtlinearem Materialverhalten hingewiesen. Der Einstieg in die Kontinuumsmechanik erfolgt in Anlehnung an [1], [5] und [6].

Die ersten Überlegungen zur Kontinuumsmechanik beginnen mit der Festlegung einer Darstellungsform, um die Bewegung eines Körpers im dreidimensionalen Raum zu beschreiben. In der Praxis werden hauptsächlich zwei Systeme aus einer unendlichen Anzahl von Referenzsystemen in Betracht gezogen, die zur Festlegung einer Darstellungsform in Frage kommen. So kann einerseits die Ausgangskonfiguration als Referenz dienen, welche dann auch als Lagrangesche oder materielle Darstellung bezeichnet wird. Diese Darstellung beschreibt die Betrachtung eines materiellen und materiefesten Teilchens, das sich durch den Raum bewegt und vom Beobachter verfolgt wird. Andererseits wird die Momentankonfiguration als Referenz genutzt, die auch mit der Eulerschen oder räumlichen Darstellung bezeichnet wird. Hierbei erfolgt die Betrachtung eines festen Ortes im Raum, durch den sich materielle Teilchen bewegen, welche nicht vom Beobachter verfolgt werden. Die Lagrangesche Darstellung findet meist in der Kontinuumsmechanik Anwendung, während die Eulersche Darstellung häufig in der Fluidmechanik verwendet wird. Zur Veranschaulichung wird ein undeformierter Körper B eingeführt, der zum Zeitpunkt $t = 0$ existiert. Der Anschauung dient dafür Abbildung 2.1. Die Lage des Körpers B kann über jedes Koordinatensystem ausgedrückt werden. Zur einfacheren Handhabung dient hier ein kartesisches Koordinatensystem. Ein auf dem Körper liegender Punkt P ist in der Ausgangskonfiguration durch den Ortsvektor \mathbf{X} bezüglich seiner Basis beschrieben

$$\mathbf{X} \in B = [X_1 \ X_2 \ X_3]^T. \quad (2.1)$$

Dieser wird über eine Deformation Φ in eine Momentankonfiguration zum Zeitpunkt $t > 0$ überführt. Der Punkt P' des deformierten Körpers $\Phi(B)$ hat nun, bezüglich der gleichen Basis, die Lage \mathbf{x} , welche aus der Vektoraddition des Punktes P der Ausgangskonfiguration mit dem Verschiebungsvektor \mathbf{u} resultiert

$$\mathbf{x} \in \Phi(B) = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T. \quad (2.2)$$

Im nächsten Schritt wird ein Linienelement des Körpers B betrachtet. In der Ausgangskonfiguration ergibt sich dieses mittels Vektoraddition des Startpunkt P mit dem Vektor $d\mathbf{X}$.

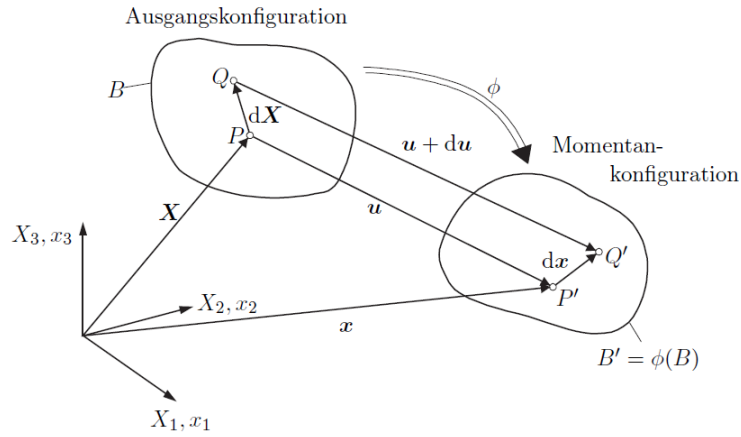


Abbildung 2.1.: Konfigurationen des Körpers B nach [1]

Die aufgebrachte Deformation streckt und dreht dieses Linienelement und bringt es in die Momentankonfiguration. In der Momentankonfiguration erfolgt die Abbildung des gleichen Linienelementes über den Startpunkt P' mit Addition des Vektors dx . Das Liniendifferential ergibt sich dann über Vektoraddition zu

$$dx = d\mathbf{X} + d\mathbf{u}. \quad (2.3)$$

Die Deformation Φ erfüllt die Bedingungen an die Stetigkeit einer Funktion, wodurch die Darstellungsformen umkehrbar sind. Die Stetigkeit der Funktion schließt somit Materialdurchdringungen und Risse aus. Die lokalen Deformationen werden über den materiellen Deformationsgradienten \mathbf{F} ausgedrückt

$$\mathbf{F} = \text{Grad } \mathbf{x}. \quad (2.4)$$

Bei dem materiellen Deformationsgradienten handelt es sich im Allgemeinen um einen un-symmetrischen Tensor, mit dem die Ausgangskonfiguration und die Momentankonfiguration aufeinander abgebildet werden können

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}. \quad (2.5)$$

Die Problematik bei der Nutzung des materiellen Deformationsgradienten zur Beschreibung der Verschiebung liegt darin, dass er nicht invariant gegenüber Starrkörperverschiebungen, wie Translationen und Rotationen ist. Statt die Differenz der Linienelemente $d\mathbf{X}$ und $d\mathbf{x}$ zu betrachten, werden die Differenzen der Quadrate herangezogen. Über Gleichung (2.5) ergibt sich

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = (\mathbf{F}d\mathbf{X}) \cdot (\mathbf{F}d\mathbf{X}) - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}, \quad (2.6)$$

woraus der Greensche Verzerrungstensor \mathbf{E} folgt

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}). \quad (2.7)$$

\mathbf{I} ist der Einheitstensor zweiter Stufe und der Vorfaktor $\frac{1}{2}$ dient der Anpassung an die Ingenieurdehnmaße. Anschließend wird der materielle Verschiebungsgradient \mathbf{H} eingeführt, mit dem Ziel den Verzerrungstensor über die Verschiebungen auszudrücken

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}) = \text{Grad } \mathbf{u}. \quad (2.8)$$

Der materielle Deformationgradient und der materielle Verschiebungsgradient stehen dabei in folgendem Zusammenhang

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{H}. \quad (2.9)$$

Einsetzen von (2.8) in (2.9) und anschließend in (2.7) führt auf den allgemeinen Greenschen Verzerrungstensor der Form

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}). \quad (2.10)$$

In diesen allgemeinen nichtlinearen Greenschen Verzerrungstensor gehen die Verschiebungen in zweiter Ordnung ein. Dabei kann im Allgemeinen nicht davon ausgegangen werden, dass die Verschiebungen infinitesimal klein sind, so dass deren zweite Ordnung vernachlässigt werden könnte. Es werden damit geometrische Nichtlinearitäten beschrieben. Dennoch ist in gesonderten Fällen die Annahme infinitesimaler Verschiebungen zulässig. Dadurch lässt sich der Verzerrungstensor \mathbf{E} auf den linearen Term vereinfachen und durch den linearisierten Greenschen Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ ausdrücken

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T). \quad (2.11)$$

Des Weiteren folgt, dass die Ausgangskonfiguration und die Momentankonfiguration zusammenfallen. Für den linearisierten Greenschen Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ ist somit keine Wahl eines Referenzsystems nötig. Die Verknüpfung des linearisierten Greenschen Verzerrungstensors mit den Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ wird über den Steifigkeitstensor \mathbb{C} hergestellt

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.12)$$

In Anhang A.1 ist ein Überblick über geltende Steifigkeitstensoren bei linearer Geometrie und linearem Materialverhalten gegeben.

Auch im allgemeinen nichtlinearen Fall ist im nächsten Schritt das Ziel, die im Körper auftretenden Spannungen aufgrund der Verschiebungen auszudrücken. Dabei werden die Verschiebungen nicht als infinitesimal klein angenommen. Somit ist zwischen einer Momentan- und einer Ausgangskonfiguration zu unterscheiden. Die Verschiebungen sind in beiden Konfigurationen unterschiedlich. Daraus folgt, dass auch die Verzerrungen und die Spannungen unterschieden werden müssen. Es ist somit notwendig zur nachfolgenden Betrachtung eine Darstellungsform zu wählen. Die in einem Körper auftretenden Spannungen werden im Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ ausgedrückt, welcher ein Tensor zweiter Stufe ist. In Voigt-Notation wird dieser wie folgt dargestellt

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{22} & \sigma_{33} & \sigma_{23} & \sigma_{13} & \sigma_{12} \end{bmatrix}^T. \quad (2.13)$$

Der Spannungstensor aus (2.13) entsteht durch einen in der Momentankonfiguration wirkenden Kraftvektor \mathbf{f} bezüglich eines Schnittflächenelements. Ist das Schnittflächenelement a

bezogen auf die Momentankonfiguration, so folgt mit dem Normalenvektor \mathbf{n} für das Theorem von Cauchy

$$\mathbf{t}^M = \frac{d\mathbf{f}}{da} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}. \quad (2.14)$$

Der Spannungsvektor \mathbf{t}^M ist dabei rein in der Momentankonfiguration beschrieben. Wie bereits erwähnt bedient man sich in der Mechanik überwiegend der Ausgangskonfiguration. Wird das Schnittflächenelement nun auf diese bezogen, folgt für ein infinitesimales Flächenelement dA und für den Normalenvektor \mathbf{N}

$$\mathbf{t}^{A,M} = \frac{d\mathbf{f}}{dA} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{N}. \quad (2.15)$$

Dabei ist \mathbf{P} der erste Piola-Kirchhoff Spannungstensor. Dieser ist ein unsymmetrischer Tensor, da er sowohl in der Momentan- als auch in der Ausgangskonfiguration beschrieben ist. Daraus folgt, dass der Spannungsvektor $\mathbf{t}^{A,M}$ in beiden Konfigurationen wirkt. Um zu einer reinen Betrachtung in der Ausgangskonfiguration zu gelangen, wird daher eine künstliche Hilfsgröße in Form des zweiten Piola-Kirchhoff Spannungstensors \mathbf{S} eingeführt, welcher sich ergibt aus

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P}. \quad (2.16)$$

Der daraus folgende Spannungsvektor \mathbf{t}^A ist damit rein in der Ausgangskonfiguration beschrieben

$$\mathbf{t}^A = \mathbf{S} \cdot \mathbf{N}. \quad (2.17)$$

Um nun den im Körper wirkenden Spannungszustand über die Verschiebungen auszudrücken muss zunächst ein Materialgesetz formuliert werden. Sowohl Murnaghan als auch Landau-Lifshitz haben dazu als eine Möglichkeit jeweils Potentialfunktionen $W(\mathbf{E})$ über eine Taylorreihenentwicklung beschrieben, welche nach dem quadratischen Term abgebrochen wird. Diese Potentialfunktion ist abhängig vom allgemeinen Greenschen Verzerrungstensor (2.10). Die nachfolgenden Beziehungen werden anhand des Landau-Lifshitz-Modells durchgeführt:

Landau-Lifshitz-Modell nach [7]

$$\begin{aligned} W(\mathbf{E}) = & \frac{1}{2} \lambda [\text{spur}(\mathbf{E})]^2 + \mu \text{ spur}(\mathbf{E}^2) + \dots \\ & \frac{1}{3} C [\text{spur}(\mathbf{E})]^3 + \dots \\ & B \text{ spur}(\mathbf{E}) \text{ spur}(\mathbf{E}^2) + \dots \\ & \frac{1}{3} A \text{ spur}(\mathbf{E}^3) \end{aligned} \quad (2.18)$$

λ und μ sind die Lamé-Konstanten und A, B, C die Elastizitätskonstanten dritter Ordnung. Letztere geben das Verhalten der Ausbreitungsgeschwindigkeit einer elastischen Welle unter einer am Körper auftretenden Spannung an. Das partielle Ableiten der Potentialfunktion nach den Verzerrungen führt auf den zweiten Piola-Kirchhoff Spannungstensor

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}}. \quad (2.19)$$

Einsetzen von (2.18) in (2.19) führt auf

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(\mathbf{E}) = & \lambda \operatorname{spur}(\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} + \dots \\ & C [\operatorname{spur}(\mathbf{E})]^2\mathbf{I} + \dots \\ & B \operatorname{spur}(\mathbf{E})\mathbf{I} + 2B \operatorname{spur}(\mathbf{E})\mathbf{E} + \dots \\ & A\mathbf{E}^2.\end{aligned}\tag{2.20}$$

Das Einsetzen des allgemeinen Greenschen Verzerrungstensors aus (2.10) drückt den zweiten Piola-Kirchhoff Spannungstensor über den Verschiebungsgradienten und somit über die Verschiebungen aus

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(\mathbf{H}) = & \frac{\lambda}{2} \operatorname{spur}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)\mathbf{I} + \mu(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) + \dots \\ & \frac{\lambda}{2} \operatorname{spur}(\mathbf{H}\mathbf{H}^T)\mathbf{I} + C[\operatorname{spur}(\mathbf{H})]^2\mathbf{I} + \dots \\ & \mu\mathbf{H}^T\mathbf{H} + B \operatorname{spur}(\mathbf{H})(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) + \dots \\ & \frac{B}{2} \operatorname{spur}(\mathbf{H}^2 + \mathbf{H}^T\mathbf{H})\mathbf{I} + \dots \\ & \frac{A}{4}[\mathbf{H}^2 + (\mathbf{H}^T)^2 + \mathbf{H}\mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T\mathbf{H}],\end{aligned}\tag{2.21}$$

welcher in einen linearen Anteil $\mathbf{S}^L(\mathbf{H})$ und einen nichtlinearen Anteil $\mathbf{S}^{NL}(\mathbf{H})$ zerlegt werden kann und sich somit ergibt aus

$$\mathbf{S}(\mathbf{H}) = \mathbf{S}^L(\mathbf{H}) + \mathbf{S}^{NL}(\mathbf{H}).\tag{2.22}$$

Mit Bezug auf (2.16) lässt sich der zweite Piola-Kirchhoff Spannungstensor auf den ersten überführen, der im weiteren Verlauf bei der Verwendung der Impulsbilanz in der Ausgangskonfiguration benötigt wird. Über die Beziehung aus (2.9) und der Aufteilung in lineare und nichtlineare Anteile (2.22) folgt der Spannungstensor

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathbf{H}) &= (\mathbf{I} + \mathbf{H})(\mathbf{S}^L(\mathbf{H}) + \mathbf{S}^{NL}(\mathbf{H})) \\ &= \mathbf{S}^L(\mathbf{H}) + \mathbf{H}\mathbf{S}^L(\mathbf{H}) + \mathbf{S}^{NL}(\mathbf{H}),\end{aligned}\tag{2.23}$$

der ebenfalls in einen linearen Anteil $\mathbf{P}^L(\mathbf{H})$ und einen nichtlinearen Anteil $\mathbf{P}^{NL}(\mathbf{H})$ zerlegt werden kann

$$\mathbf{P}(\mathbf{H}) = \mathbf{P}^L(\mathbf{H}) + \mathbf{P}^{NL}(\mathbf{H}).\tag{2.24}$$

Mit Gleichung (2.24) lassen sich die am Körper B auftretenden Spannungen aufgrund der durch die Deformation verursachten Verschiebungen ausdrücken.

2.2. Formen der Wellenausbreitung

Der folgende Abschnitt beschreibt die Grundlagen der Wellenausbreitung in Festkörpern und ist angelehnt an [2]. Es erfolgt zunächst eine materialunabhängige Betrachtung, die zur Veranschaulichung der auftretenden Wellenformen dient. Mit Beginn der Wellenausbreitung im unendlichen Raum werden im Verlauf Einschränkungen getroffen, die auf die zu betrachtenden Effekte in dünnwandigen Flächentragwerken führen. Darauf aufbauend wird die Entstehung von geführten Wellen beschrieben sowie auf die Generierung höherharmonischer

scher Moden eingegangen.

Im Falle der Wellenausbreitung in Festkörpern erfolgt der Ansatz über die Anwendung der Impulsbilanz. In diese gehen die Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$, die Volumenkräfte $\rho\mathbf{b}$ sowie die Verschiebungen \mathbf{u} in ihrer zweiten zeitlichen Ableitung ein. Im Falle einer Eulerschen Betrachtungsweise ergibt sie sich zu

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{b} = \rho\ddot{\mathbf{u}}. \quad (2.25)$$

Bei Lagrangescher Betrachtung, in der die Spannungen über den ersten Piola-Kirchhoff Spannungstensor ausgedrückt werden, folgt für die Impulsbilanz [8]

$$\operatorname{Div}[\mathbf{P}(\mathbf{H})] + \rho\mathbf{b} = \rho\ddot{\mathbf{u}}. \quad (2.26)$$

Die Bilanzgleichung ist materialunabhängig gültig. Es handelt sich dabei um ein unterbestimmtes Gleichungssystem, welches durch die entsprechenden konstitutiven Gleichungen erweitert wird.

Wellenausbreitung im unendlichen Raum

Im unendlichen Raum treten longitudinale und transversale Wellen auf, die sich jeweils mit einer dazugehörigen Phasengeschwindigkeit ausbreiten. Als Phasengeschwindigkeit wird „die Geschwindigkeit eines Punktes mit konstanter Phase einer einzelnen Welle bezeichnet“ [4, S. 7]. Eine schematische Darstellung für Longitudinalwellen ist in Abbildung 2.2 dargestellt. Die schematische Darstellung einer Transversalwelle ist in Abbildung 2.3 gezeigt. Der Unter-

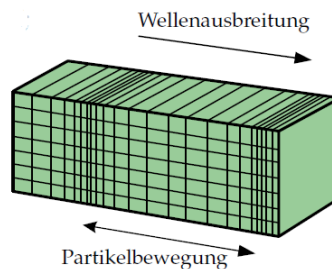


Abbildung 2.2.: Darstellung einer Longitudinalwelle im unendlichen Raum, nach [2]

schied zur Longitudinalwelle ist an der Richtung der Partikelbewegung im Vergleich mit der Wellenausbreitungsrichtung zu erkennen.

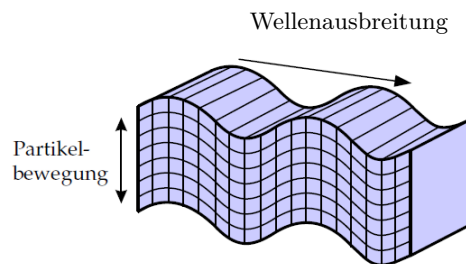


Abbildung 2.3.: Darstellung einer Transversalwelle im unendlichen Raum, nach [2]

Wellenausbreitung im halbbunendlichen Raum (Halbraum)

Der halbbunendliche Raum, auch Halbraum genannt, ist durch einen freien Rand begrenzt. An dem freien Rand treten Reflexionen der longitudinalen und transversalen Wellen auf, wodurch neue Wellen dieser Form erzeugt werden. Damit verbunden kommt es zu „Oberflächenwellen“, die sich am freien Rand über die Oberfläche ausbreiten und auch als „Rayleighwellen“ bezeichnet werden¹. Von den im Halbraum auftretenden drei Wellenformen besitzen Rayleighwellen die geringste Dämpfung [2, S. 4], wodurch sich diese am weitesten durch die Struktur ausbreiten. Eine schematische Darstellung einer Rayleighwelle ist in 2.4 abgebildet. Die sich ausbreitenden Wellenpakete besitzen eine Gruppengeschwindigkeit. Als Gruppene-

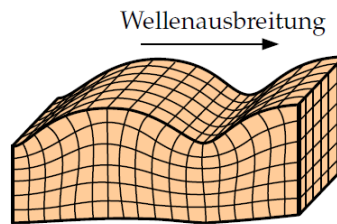


Abbildung 2.4.: Darstellung einer Rayleighwelle im Halbraum [2]

geschwindigkeit wird die Geschwindigkeit verstanden, mit der sich ein gesamtes Wellenpaket ausbreitet.

Wellenausbreitung in dünnwandigen Flächentragwerken

Eine weitere Begrenzung durch einen zweiten freien Rand führt zu den dünnwandigen Flächentragwerken. An dem zweiten freien Rand kommt es ebenfalls zu Reflexionen von Longitudinal- und Transversalwellen. Die aus den Reflexionen erzeugten Wellen sind zwischen den freien Rändern geführt, wodurch diese Wellenform die Bezeichnung „geführte Welle“ erhalten hat. Da diese Wellenform von Horace Lamb 1917 das erste Mal beschrieben wurde, ist der Begriff der „LAMB-Welle“ üblich [9]. Neben LAMB-Wellen treten zudem horizontale Scherwellen (SH-Wellen) auf, die je nach Materialverhalten oder betrachteter Ausbreitungsrichtung an die LAMB-Wellen gekoppelt sind. Beide Wellenformen treten in zwei unterschiedlichen Schwingungsmoden auf. Zum Einen gibt es symmetrische Moden und zum Anderen antisymmetrische Moden. Abbildung 2.5 zeigt schematisch diese Moden für LAMB-Wellen. Bei LAMB-Wellen treten die Partikelbewegungen und die Wellenausbreitung in der $X_1 - X_3$ -Ebene auf. In Abbildung 2.6 ist eine schematische Darstellung der fundamentalen symmetrischen SH-Mode zu erkennen. Bei SH-Moden liegt die Wellenausbreitungsrichtung weiterhin in $X_1 - X_3$ -Ebene vor. Die Partikelbewegung tritt jedoch in $X_2 - X_3$ -Ebene auf. Im Falle symmetrischer SH-Moden sind die Partikelbewegungen der Oberkante und Unterkante gleichsinnig. In Abbildung 2.7 ist die schematische Darstellung der fundamentalen antisymmetrischen SH-Mode gezeigt. Im Falle antisymmetrischer SH-Moden sind die Partikelbewegungen der Oberkante und Unterkante gegensinnig. Eine besondere Eigenschaft von LAMB-Wellen und SH-Wellen liegt darin, dass diese dispersiv und multimodal sind. Dispersives Verhalten bedeutet, dass die Geschwindigkeit der Welle abhängig ist von deren Frequenz. Multimodales Verhalten gibt an, dass für jede Wellenform von LAMB- und SH-Wellen neben den fundamentalen Moden auch Moden höherer Ordnung existieren. Um diese

¹ Erstmalige Beschreibung in 1885 durch John William Strutt, 3rd Baron Rayleigh

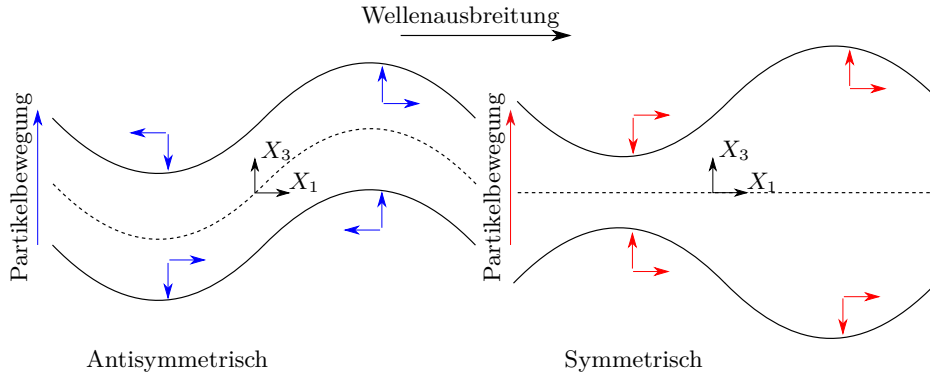


Abbildung 2.5.: Schematische Darstellung der LAMB-Moden

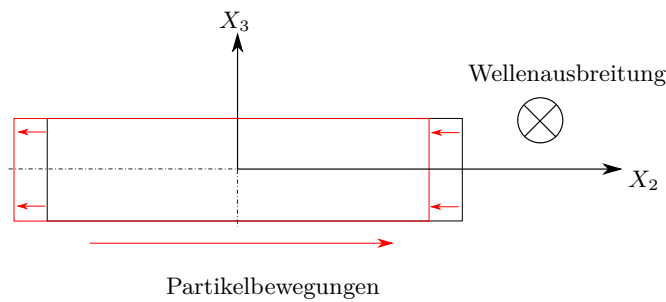


Abbildung 2.6.: Schematische Darstellung der symmetrischen SH-Moden

Eigenschaften darzustellen werden die so genannten Dispersionsbeziehungen aufgestellt und in einem Dispersionsdiagramm abgebildet. Die Herleitung der Dispersionsbeziehung ist im Anhang A.2 in [Herleitung der Dispersionsbeziehungen](#) aufgeführt und bedient sich dabei den Ansätzen und Zusammenhängen des linearisierten Verzerrungstensors. Ein solches Dispersionsdiagramm ist am Beispiel einer UD-CFK-Einzelschicht mit einem Faserwinkel von Null Grad in Abbildung 2.8 für Frequenz-Dicken-Paare bis $6.0 \text{ MHz} \cdot \text{mm}$ dargestellt. Üblicherweise werden die Phasengeschwindigkeiten über dem Produkt aus Frequenz und Plattendicke aufgetragen, um ein von der Plattendicke unabhängiges Dispersionsdiagramm zu erhalten. Abbildung 2.8 zeigt die dispersiven und multimodalen Eigenschaften von geführten Wellen in einem Dispersionsdiagramm für Phasengeschwindigkeiten. Die Dispersion ist daran zu erkennen, dass sich die Phasengeschwindigkeiten der Wellen mit der Frequenz ändern. Die Bezeichnung A_0 ist an die Ordnung der Mode geknüpft und steht dabei für die erste antisymmetrische Mode vom Typ der LAMB-Wellen. S_0 bezeichnet die erste symmetrische LAMB-Welle. Allgemein werden antisymmetrische Moden durch gestrichelte Kurvenverläufe markiert und symmetrische Moden mit durchgezogenen Kurvenverläufen. Die Kreisfrequenz der Mode $\omega = 2\pi f$ steht mit der Phasengeschwindigkeit über die Wellenzahl k in folgendem Zusammenhang

$$k = \frac{\omega}{c_p}. \quad (2.27)$$

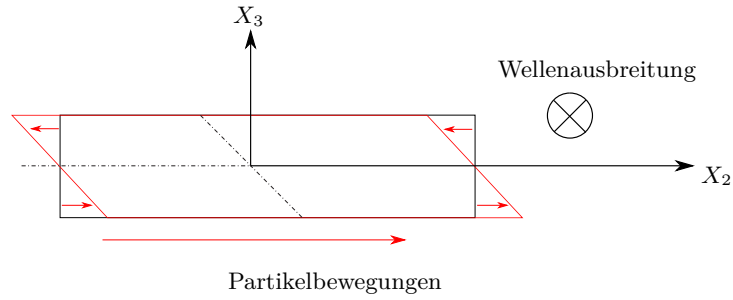


Abbildung 2.7.: Schematische Darstellung der antisymmetrischen SH-Moden

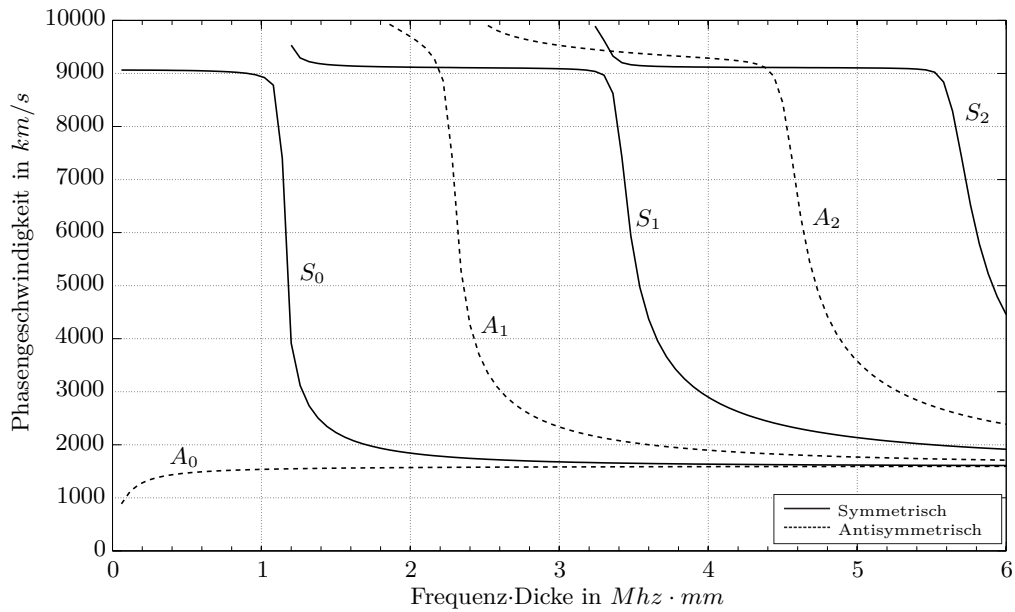


Abbildung 2.8.: Dispersionsdiagramm Phasengeschwindigkeit UD-CFK, Faserwinkel 0°

Über die Beziehung in Gleichung (2.28) können aus den Phasengeschwindigkeiten die entsprechenden Gruppengeschwindigkeiten c_g berechnet werden

$$c_g = c_p^2 \left(c_p - \omega \frac{\partial c_p}{\partial \omega} \right)^{-1}. \quad (2.28)$$

Abbildung 2.9 zeigt das dazugehörige Dispersionsdiagramm für Gruppengeschwindigkeiten. Die Bezeichnung der Moden findet dabei nach dem gleichen Schema statt. In beiden Dispersionsdiagrammen sind für den hier betrachteten Fall keine SH-Wellen abgebildet. Der Grund dafür liegt im verwendeten Algorithmus für UD-CFK. Liegt die Wellenausbreitung entlang der Faserrichtung vor lassen sich LAMB-Wellen und SH-Wellen entkoppelt voneinander betrachten (vgl. A.2).

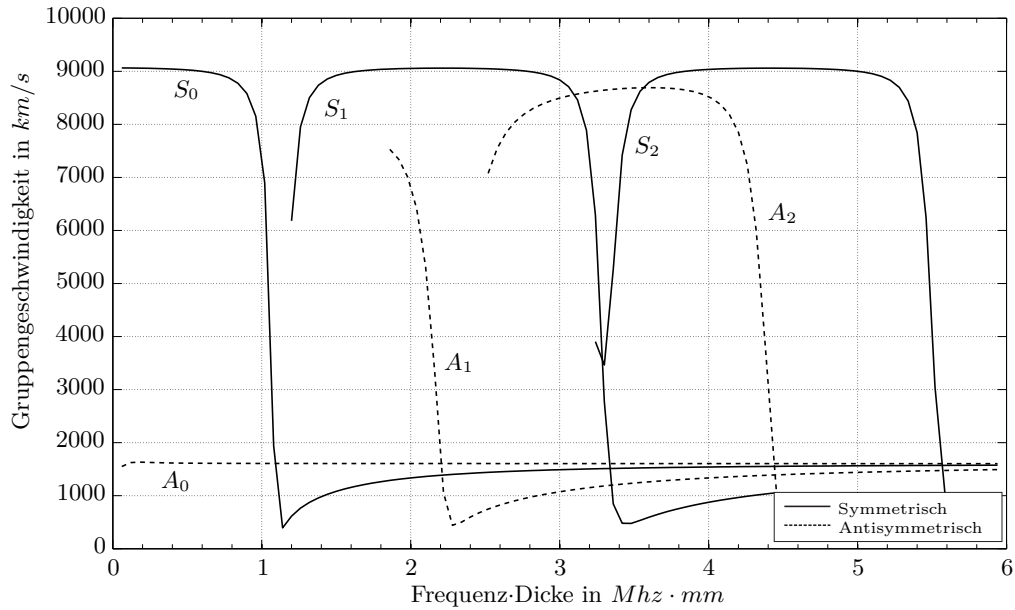


Abbildung 2.9.: Dispersionsdiagramm Gruppengeschwindigkeit UD-CFK, Faserwinkel 0°

2.2.1. Höherharmonische Moden

Mit Kenntnis der Grundlagen zur Kontinuumsmechanik sowie der in dünnwandigen Flächentragwerken auftretenden Wellenformen, folgt nun die Betrachtung von Wellenausbreitungseigenschaften durch nichtlineare Geometrie und nichtlineares Materialverhalten. Diese Wellenausbreitungseigenschaften werden im Folgenden unter der nichtlinearen Wellenausbreitung zusammengefasst. Durch die Nichtlinearitäten kommt es zur Generierung von höherharmonischen Moden. Das bedeutet, dass sich neben einer primär-angeregten Mode zusätzliche Wellen höherer Ordnungen ausbreiten. Mit steigender Ordnung nehmen die Amplituden der Wellen ab. Nachfolgend wird ausschließlich die Welle zweiter Ordnung betrachtet. Diese zweite Welle wird im Folgenden als die Höherharmonische bezeichnet und entsteht einzig aus der primär-angeregten Mode. Sie wird nicht von Außen angeregt. Zur Veranschaulichung des betrachteten Flächentragwerkes dient Abbildung 2.10. Grundlage der Beschreibung der Hö-

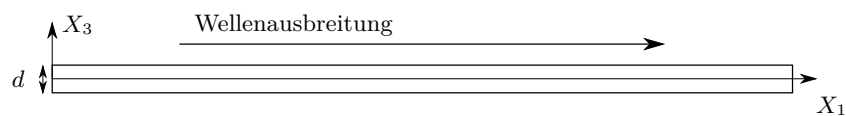


Abbildung 2.10.: Flächentragwerk zur Generierung der Höherharmonischen

herharmonischen ist die Potentialfunktion nach Landau-Lifshitz aus (2.18). Über den zweiten Piola-Kirchhoff Spannungstensor aus (2.19) lassen sich die Spannungen durch die Verschiebungen in (2.24) ausdrücken. Die Generierung der Höherharmonischen geht in folgenden Ansatz für die Verschiebungen aus Überlagerung beider Wellen ein

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, \mathbf{t}) = \mathbf{u}_1(\mathbf{X}, \mathbf{t}) + \mathbf{u}_2(\mathbf{X}, \mathbf{t}). \quad (2.29)$$

Hierbei gilt jedoch, dass die Verschiebungen der Höherharmonischen $\mathbf{u}_2(\mathbf{X}, \mathbf{t})$ wesentlich kleiner sind als die Verschiebungen der primär-angeregten Mode $\mathbf{u}_1(\mathbf{X}, \mathbf{t})$

$$|\mathbf{u}_2(\mathbf{X}, \mathbf{t})| \ll |\mathbf{u}_1(\mathbf{X}, \mathbf{t})|. \quad (2.30)$$

Aus (2.29) folgt für den materiellen Verschiebungsgradient

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{u}) &= \mathbf{H}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \\ &= \mathbf{H}(\mathbf{u}_1) + \mathbf{H}(\mathbf{u}_2) \\ &= \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Für den Verschiebungsgradienten gilt wegen (2.30)

$$|\mathbf{H}_2| \ll |\mathbf{H}_1|. \quad (2.32)$$

Der Ansatz aus (2.31) wird in den ersten Piola-Kirchhoff Spannungstensor (2.24) eingesetzt

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2) &= \mathbf{P}^L(\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2) + \mathbf{P}^{NL}(\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2) \\ &= \mathbf{P}^L(\mathbf{H}_1) + \mathbf{P}^L(\mathbf{H}_2) + \mathbf{P}^{NL}(\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Der nichtlineare Term beinhaltet drei Einzelterme, welche nach [7] mit der folgenden Notation beschrieben werden²

$$\mathbf{P}^{NL}(\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2) = \mathbf{P}^{NL}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_1, 2) + \mathbf{P}^{NL}(\mathbf{H}_2, \mathbf{H}_2, 2) + \mathbf{P}^{NL}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, 2). \quad (2.34)$$

Die drei Terme beschreiben der Reihenfolge nach die folgenden Vorgänge:

- Selbstinteraktion der primär-angeregten Mode mit sich selbst,
- Selbstinteraktion der Höherharmonischen mit sich selbst,
- Wechselwirkung der primär-angeregten Mode und der Höherharmonischen.

Aufgrund von (2.32) können die Terme $\mathbf{P}^{NL}(\mathbf{H}_2, \mathbf{H}_2, 2)$ und $\mathbf{P}^{NL}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, 2)$ vernachlässigt werden. Der Spannungszustand des Körpers, der durch die Verschiebungen aus der primär-angeregten Mode und der Höherharmonischen entsteht, wird somit beschrieben durch

$$\mathbf{P}(\mathbf{H}) = \mathbf{P}^L(\mathbf{H}_1) + \mathbf{P}^L(\mathbf{H}_2) + \mathbf{P}^{NL}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_1, 2). \quad (2.35)$$

Einsetzen von (2.35) in die Impulsbilanz bei Lagrangescher Betrachtung (2.26) und unter Vernachlässigung der Volumenkräfte führt auf eine homogene Differentialgleichung der Form

$$\text{Div}[\mathbf{P}(\mathbf{H})] - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}. \quad (2.36)$$

Zusätzlich gilt die Bedingung an spannungsfreie Ränder mit \mathbf{N} als Normalenvektor zur Oberfläche des Flächentragwerkes (vgl. (2.15))

$$\mathbf{P}(\mathbf{H}) \cdot \mathbf{N} = \mathbf{0}. \quad (2.37)$$

Diese Differentialgleichung stellt die allgemeine Bewegungsgleichung dar, auf deren linken Seite die Antwort des Systems beschrieben wird und deren rechte Seite die Erregerseite wie-

² Durch die 2 wird angezeigt, dass es sich hierbei um Produkte von Verschiebungen bzw. Verschiebungsgradienten in zweiter Ordnung handelt.

dergibt. Aus (2.36) folgen unter Berücksichtigung von (2.35) zwei getrennte lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Die erste Differentialgleichung ist homogen und beschreibt die Bewegungsgleichung der primär-angeregten Mode

$$\text{Div}[\mathbf{P}^L(\mathbf{H}_1)] - \rho\ddot{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{0}. \quad (2.38)$$

Die Erregerseite von (2.38) ist Null. Das bedeutet, dass nach einmaliger Anregung das System sich selbst überlassen wird und keine weitere Erregung erfolgt. Für die spannungsfreien Ränder ergibt sich über Einsetzen von (2.35) in (2.37) zur Beschreibung der primär-angeregten Mode die Bedingung

$$\mathbf{P}^L(\mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{N} = \mathbf{0}. \quad (2.39)$$

Die zweite Differentialgleichung ergibt sich zu

$$\text{Div}[\mathbf{P}^L(\mathbf{H}_2)] + \text{Div}[\mathbf{P}^{NL}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_1, 2)] - \rho\ddot{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{0}. \quad (2.40)$$

In Gleichung (2.40) werden alle Terme, die nicht von den Verschiebungen \mathbf{u}_2 der Höherharmonischen abhängen auf die rechte Seite gebracht, sodass folgt

$$\text{Div}[\mathbf{P}^L(\mathbf{H}_2)] - \rho\ddot{\mathbf{u}}_2 = -\text{Div}[\mathbf{P}^{NL}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_1, 2)]. \quad (2.41)$$

Es wird deutlich, dass es sich dabei um eine inhomogene Differentialgleichung handelt. Die rechte Seite ist ungleich Null und zudem abhängig von den Verschiebungen aus der primär-angeregten Mode. Das hat zur Folge, dass über diese Verschiebungen eine Anregung der Höherharmonischen aus den Nichtlinearitäten entsteht. Für die Spannungsrandbedingung folgt nach gleicher Sortierung

$$\mathbf{P}^L(\mathbf{H}_2) \cdot \mathbf{N} = -\mathbf{P}^{NL}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_1, 2) \cdot \mathbf{N} \quad (2.42)$$

Folgender Ansatz wird für die Verschiebungen der primär-angeregten Mode durch eine harmonische Welle im dreidimensionalen Raum gewählt

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{X}, \mathbf{t}) = \text{Re}[\mathbf{u}_1(X_3)e^{i(\mathbf{k}X_1 - \omega\mathbf{t})}]. \quad (2.43)$$

Ein analoger Ansatz führt auf der Dispersionsbeziehungen wie sie in A.2 durchgeführt werden. Die Anregung der Höherharmonischen durch die Nichtlinearitäten in (2.41) wird durch Terme zweiter Ordnung der Verschiebungen \mathbf{u}_1 beschrieben, wie an (2.21), (2.23) und (2.24) zu erkennen ist. Für die Erregerseite der Höherharmonischen folgen über den Ansatz aus (2.43) Terme der Form

$$e^{i(2\mathbf{k}X_1 - 2\omega\mathbf{t})}. \quad (2.44)$$

Die Erregerseite gibt für die Höherharmonische somit eine Anregung der doppelten Kreisfrequenz der primär-angeregten Mode vor. Da es sich bei der Differentialgleichung der Höherharmonischen um eine des linearen Typs handelt, antwortet das System mit eben dieser doppelten Kreisfrequenz 2ω . Durch die dispersiven und multimodalen Eigenschaften der geführten Wellen werden neben der Höherharmonischen jedoch auch weitere Moden angeregt.

Um die Lösung der Verschiebungen zu erhalten, die nur die Höherharmonische betreffen werden zwei Verfahren angewendet, die in den Arbeiten von [10] und [11] beschrieben werden. Zunächst folgt die Anwendung der komplexen Reziprozitätsbeziehung (complex reciprocity

relation). Diese besagt, dass zwei beliebige Lösungen, die die Wellengleichungen erfüllen in folgender Beziehung stehen

$$\text{Grad}[\mathbf{P}_1(\mathbf{X}, \mathbf{t}) \cdot \dot{\mathbf{u}}_2^*(\mathbf{X}, \mathbf{t})] + \text{Grad}[\mathbf{P}_1^*(\mathbf{X}, \mathbf{t}) \cdot \dot{\mathbf{u}}_2(\mathbf{X}, \mathbf{t})] = 0. \quad (2.45)$$

Mit einem Stern versehene Größen zeigen die konjugiert komplexen Anteile der Lösungen an. $\dot{\mathbf{u}}$ gibt die Partikelgeschwindigkeit an. Gleichung (2.45) beschreibt den Kreuzeffekt aus Partikelgeschwindigkeit und Spannung. So führen Spannungen im Körper zu Partikelgeschwindigkeiten und Partikelgeschwindigkeiten wiederum zu Spannungen. Mit dem Produkt aus Partikelgeschwindigkeit und Spannung wird ein Leistungsfluss pro Fläche beschrieben. Durch die Gradientenbildung ergibt sich der maximale Leistungsflussanstieg. Aufgrund des Kreuzeffektes führen sowohl Partikelgeschwindigkeiten als auch Spannungen zu Leistungsflüssen im Flächentragwerk. Nun zeigt sich an (2.45) weiter, dass der Leistungsfluss, der durch eine der beiden Größen entsteht, vom gleichen Betrag, aber unterschiedlich gerichtet sein muss, wie der Leistungsfluss, den die entsprechend andere Größe erzeugt.

Das zweite Verfahren ist die Eigenmoden-Entwicklung (normal mode expansion). Die Eigenmoden-Entwicklung nutzt dabei die Bedingung, dass zwei Eigenmoden m und n orthogonal zueinander stehen. Für zwei Vektoren $\boldsymbol{\kappa}$, die orthogonal zueinander stehen, sodass $m \neq n$ gilt, folgt

$$\int_a^b \boldsymbol{\kappa}_m(x) \boldsymbol{\kappa}_n(x) dx = 0. \quad (2.46)$$

Diese Beziehung lässt sich nutzen, um einzelne Moden entkoppelt zu betrachten. Auf eine ausführliche Herleitung wird aufgrund des Umfangs verzichtet und stattdessen auf [10] und [11] verwiesen. Die aus beiden Verfahren resultierende Differentialgleichung bezüglich einer primär-angeregten Mode n und einer daraus angeregten Mode m hat schließlich die Form

$$4P_{mn} \left(\frac{\partial \mathbb{A}_m}{\partial X_1} - ik_n^* X_1 \right) = (f_n^{surf} + f_n^{vol}). \quad (2.47)$$

P_{mn} gibt den Leistungsfluss an, der in Ausbreitungsrichtung bezüglich der Einheitsbreite durch das Flächentragwerk läuft und wird beschrieben durch

$$P_{mn} = -\frac{1}{4} \int_{-d/2}^{d/2} \left(\frac{\mathbf{P}_m \dot{\mathbf{u}}_n^* + \mathbf{P}_n^* \dot{\mathbf{u}}_m}{4} \cdot \mathbf{N}_1 \right) dX_3. \quad (2.48)$$

f_n^{surf} dient der Beschreibung der Oberflächenkräfte an den Rändern bei $d/2$ und $-d/2$. Die Oberflächenkräfte werden von den Verschiebungen der primär-angeregten Mode in das Flächentragwerk eingeleitet

$$f_n^{surf} = -\frac{1}{2} [\dot{\mathbf{u}}_n^* \cdot \mathbf{P}^{NL}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_1, 2)] \cdot \mathbf{N}_2 \Big|_{-d/2}^{d/2}. \quad (2.49)$$

f_n^{vol} beschreibt Volumenkräfte im Flächentragwerk, welche ebenfalls aus den Verschiebungen der primär-angeregten Mode entstehen und sich durch das Bauteil ausbreiten

$$f_n^{vol} = \frac{1}{2} \int_{-d/2}^{d/2} \dot{\mathbf{u}}_n^* \cdot \text{Div}[\mathbf{P}^{NL}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_1, 2)] dX_3. \quad (2.50)$$

\mathbb{A}_m stellt die Amplituden der m -ten höherharmonischen Mode dar. Gleichung (2.47) ist für die betrachteten Wellen erfüllt, wenn für \mathbb{A}_m mit $k_n^* = 2k$ gilt

$$\mathbb{A}_m(X_1) = \frac{(f_n^{surf} + f_n^{vol})}{4P_{mn}} X_1. \quad (2.51)$$

An Gleichung (2.51) ist deutlich zu erkennen, dass mit steigender Ausbreitungslänge X_1 die Amplitude linear ansteigt. Dafür müssen jedoch folgende Bedingungen gelten, die sich aus (2.51) ableiten lassen.

1. Zwischen den Moden m und n muss ein Leistungsfluss $P_{mn} \neq 0$ vorhanden sein. Das folgt aus der Orthogonalitätsbeziehung, da $m = n$ gilt und beide Moden somit nicht orthogonal sind.
2. Die Summe der Oberflächen- und Volumenkräfte der primär-angeregten Mode muss ungleich Null sein: $(f_n^{surf} + f_n^{vol}) \neq 0$
3. Des Weiteren muss wie bereits beschrieben gelten, dass $k_n^* = 2k$, welches aus (2.44) und (2.27) folgt. Dies hat den linearen Anstieg der Amplitude mit steigender Ausbreitungslänge zur Folge.

Die ersten beiden Bedingungen lassen sich unter der „Kraftfluss-Bedingung“ oder dem „Non-zero Power-Flux“ zusammenfassen. Die dritte Bedingung wird mit der „Gleichheit der Phasengeschwindigkeiten“ beschrieben. Diese bilden die „Interne Resonanz“. Gilt die interne Resonanz, so wächst die Amplitude der Höherharmonischen mit der Ausbreitungslänge. Es werden somit kumulative Höherharmonische angeregt. Dieser Sachverhalt ist besonders für experimentelle Betrachtungen wichtig, da die sehr kleinen Amplituden der Höherharmonischen andernfalls nicht detektiert werden könnten. Über entsprechend lange Proben lässt sich durch die steigende Amplitude diese Problematik beheben.

Nachfolgend stellt sich die Frage, welche geführten Wellen zur primären Anregung in Frage kommen, um daraus möglichst hohe interne Resonanz zu erhalten. Mit dieser Fragestellung hat sich bereits [12] befasst. Die dort zu findenden Überlegungen werden an dieser Stelle aufgegriffen und erläutert. Dazu wird auf die Abbildung 2.5 verwiesen. Die Partikelbewegungen sind über rote bzw. blaue Pfeile angedeutet. Der Verschiebungsvektor \mathbf{u} eines Partikels der Form

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

unterscheidet sich für antisymmetrische und symmetrische LAMB-Wellen. Symmetrische Verschiebungen bezüglich der Mitte des Flächentragwerkes werden mit S abgekürzt. Antisymmetrische Verschiebungen mit A . Für den Vektor der Partikelgeschwindigkeiten $\dot{\mathbf{u}}$ gelten die gleichen Richtungen, sodass für antisymmetrische Partikelgeschwindigkeiten folgt

$$\dot{\mathbf{u}}^{anti} = \begin{pmatrix} A \\ 0 \\ S \end{pmatrix}, \quad (2.53)$$

während sich symmetrische Partikelgeschwindigkeiten ergeben zu

$$\dot{\mathbf{u}}^{sym} = \begin{pmatrix} S \\ 0 \\ A \end{pmatrix}. \quad (2.54)$$

Die Verschiebungsgradienten sind entsprechend für die antisymmetrischen Moden

$$H^{anti} = \begin{bmatrix} A & 0 & S \\ 0 & 0 & 0 \\ S & 0 & A \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

und für symmetrische Moden

$$H^{sym} = \begin{bmatrix} S & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & S \end{bmatrix}. \quad (2.56)$$

Für den betrachteten nichtlinearen Term des ersten Piola-Kirchhoff Spannungstensors folgt weiter

$$\mathbf{P}^{NL}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_1, 2) = \begin{bmatrix} S & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & S \end{bmatrix}, \quad (2.57)$$

welcher für antisymmetrische und symmetrische Moden identische Formen aufweist. Die Divergenz des nichtlinearen Terms $\mathbf{P}^{NL}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_1, 2)$ ergibt sich zu

$$\text{Div}[\mathbf{P}^{NL}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_1, 2)] = \begin{pmatrix} S \\ 0 \\ A \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

Antisymmetrische Verschiebungen werden durch ungerade Funktionen beschrieben, während symmetrische aus geraden Funktionen hervorgehen. Dies lässt sich leicht am Beispiel aus Abbildung 2.11 zeigen. So lässt sich beispielsweise die Partikelbewegung symmetrischer Moden in X_1 -Richtung schematisch übertragen auf eine gerade Funktion, wie sie in Abbildung 2.11 durch $4x^2$ dargestellt ist. Nun gilt, dass Produkte aus einer geraden und einer ungeraden Funktion immer auf ungerade Funktionen führen. Während Produkte gleichartiger Funktionen immer in geraden resultieren. Abbildung 2.11 macht zudem deutlich, dass für gerade Funktionen $Y(-X) = Y(X)$ und für ungerade Funktionen $Y(-X) = -Y(X)$ gilt. Vor diesem Hintergrund und unter Verwendung von Gleichung (2.53) bis (2.58) werden die Gleichungen (2.49) und (2.50) betrachtet. Für die Oberflächenkräfte antisymmetrischer primär-angeregter Moden folgt

$$f_{anti}^{surf} = -\frac{1}{2}(AA + SS)|_{-d/2}^{d/2} = 0, \quad (2.59)$$

da sich die Oberflächenkräfte der geraden Funktionen an den Rändern aufheben. Für symmetrische primär-angeregte Moden ergibt sich bei den Oberflächenkräften

$$f_{sym}^{surf} = -\frac{1}{2}(AS + SA)|_{-d/2}^{d/2} \neq 0. \quad (2.60)$$

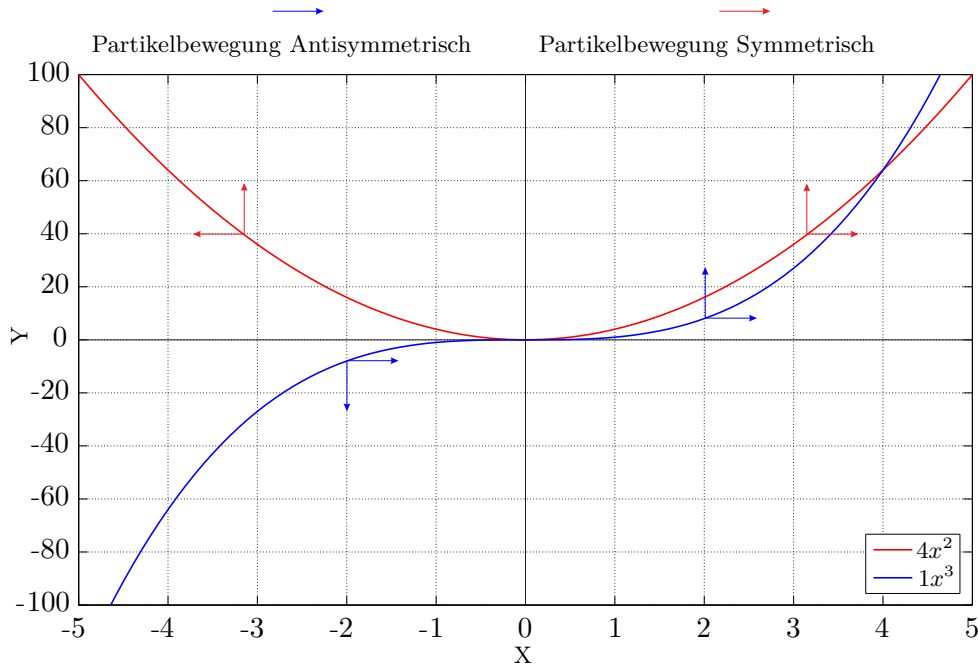


Abbildung 2.11.: Gerade und ungerade Funktionen zur schematischen Beschreibung der Partikelbewegung

Die Kraftfluss-Bedingung gibt jedoch vor, dass die Summe aus Oberflächen- und Volumenkräften ungleich Null sein muss. Für die Volumenkräfte ergibt sich für antisymmetrische primär-angeregte Moden

$$f_{anti}^{vol} = \frac{1}{2} \int_{-d/2}^{d/2} \begin{pmatrix} A \\ 0 \\ S \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S \\ 0 \\ A \end{pmatrix} = 0. \quad (2.61)$$

Dabei ergeben die Produkte der Funktionen ungerade Funktionen, die jedoch durch die Integration über die Dicke in gerade überführt werden. Daraus folgt, dass die Volumenkräfte der antisymmetrischen primär-angeregten Moden ebenfalls Null sind. Für symmetrische primär-angeregte Moden folgt aus den Volumenkräften

$$f_{sym}^{vol} = \frac{1}{2} \int_{-d/2}^{d/2} \begin{pmatrix} S \\ 0 \\ A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S \\ 0 \\ A \end{pmatrix} \neq 0. \quad (2.62)$$

Wird die gerade Funktion durch die Dickenintegration in eine ungerade überführt, weisen die symmetrischen primär-angeregten Moden Volumenkräfte ungleich Null auf. Daraus folgt, dass zur primären Anregung symmetrische Moden in Frage kommen, da für diese gilt, dass $(f_n^{surf} + f_n^{vol}) \neq 0$ ist. Antisymmetrische Moden erfüllen die Kraftflussbedingung hingegen nicht und können somit nicht zur Generierung Höherharmonischer durch primäre Anregung genutzt werden. [12] führt weitere Betrachtungen durch, welche der symmetrischen Moden die höchste interne Resonanz aufweisen. Aufgrund des Umfangs wird an dieser Stelle auf die Beleuchtung der Untersuchungen verzichtet. Es wurde jedoch gezeigt, dass die primär-angeregte S_1 -Mode mit der Höherharmonischen S_2 hohe interne Resonanzen aufweist und beide Moden im Gegensatz zu den SH-Wellen in der Praxis leichter anzuregen und zu detektieren sind.

2.2.2. Nichtlinearitätsparameter

Mit Kenntnis der Generierung und Beschreibung der Höherharmonischen durch die primär-angeregte Mode folgt die Herleitung des absoluten akustischen Nichtlinearitätsparameters β . Dieser folgt aus der Betrachtung einer Longitudinalwelle in einem Dehnstab und ist an den Arbeiten von [13] und [14] angelehnt. Zu beachten ist, dass LAMB-Wellen nur in dünnwandigen Flächentragwerken durch die Reflexionen an den Rändern auftreten (vgl. 2.2). Daraus ergibt sich, dass β als absoluter Wert nicht für LAMB-Wellen zulässig ist. Daher wird ein relativer akustischer Nichtlinearitätsparameter β' abgeleitet. Mit β' lassen sich vergleichende Aussagen zu den Nichtlinearitäten im Material treffen.

Die Beschreibung der Longitudinalwelle in einem Dehnstab folgt über die Bewegungsgleichung für eine eindimensionale Welle

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}. \quad (2.63)$$

Das Hookeschen Gesetzes wird erweitert über eine Taylorreihenentwicklung an der Stelle ε_0 , welche der statischen Vordehnung entspricht. Dieses Vorgehen ist vergleichbar mit dem Aufstellen der Potentialfunktion aus (2.18). Der Abbruch nach dem quadratischen Term führt zur Beschreibung eines quadratisch nichtlinearen Systems [13]

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \varepsilon + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varepsilon^2} \varepsilon^2. \quad (2.64)$$

Es wird der Fall betrachtet, in dem keine statische Vordehnung vorhanden ist, wodurch die statische Vorspannung σ_0 zu Null wird. Die partielle Ableitung im linearen Anteil von (2.64) entspricht dem Elastizitätsmodul E . Für den quadratischen Anteil wird ein nichtlinearer Steifigkeitsmodul C^{III} eingeführt. Mit diesem wird analog zu den Steifigkeiten dritter Ordnung das Verhalten der Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle unter Spannung beschrieben. Daraus folgt

$$\sigma = E\varepsilon \left(1 + \frac{1}{2} \frac{C^{III}}{E} \varepsilon \right). \quad (2.65)$$

Im Weiteren wird die Notation aus [14] verwendet und der absolute akustische Nichtlinearitätsparameter $\beta = -\frac{C^{III}}{E}$ eingeführt. Damit werden die Spannungen in einem quadratisch nichtlinearen System aufgrund der Dehnungen beschrieben durch

$$\sigma = E\varepsilon \left(1 - \frac{1}{2} \beta \varepsilon \right). \quad (2.66)$$

Durch Einsetzen von (2.66) in (2.63) und unter Verwendung von $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$ resultiert die Beschreibung der eindimensionalen Welle über die Feldgleichung

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \beta E \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \rho \ddot{u} &= E u'' - \frac{1}{2} \beta E u' u''. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Die Lösung dieser nichtlinearen Differentialgleichung folgt über Anwendung der Störungsrechnung. Dabei wird der absolute akustische Nichtlinearitätsparameter mit $\beta \ll 1$ als Störgröße angenommen. Die Verschiebung u setzt sich weiterhin zusammen aus den Verschiebungen der primär-angeregten Mode u_1 und denen der Höherharmonischen u_2 . Aus (2.30) ist bekannt,

dass die Verschiebungen der Höherharmonischen deutlich kleiner sind, als die der primär-angeregten Mode. In den folgenden Ansatz geht dieser Zusammenhang über β ein, sodass folgt

$$u = u_1 + \beta u_2. \quad (2.68)$$

Einsetzen von (2.68) in (2.67) und Koeffizientenvergleich in Ordnungen von β führt auf zwei lineare Differentialgleichungen. Für β^0 ergibt sich

$$\rho \ddot{u}_1 - E u_1'' = 0, \quad (2.69)$$

welche die primär-angeregte eindimensionale Welle beschreibt. Für β^1 folgt

$$\rho \ddot{u}_2 - E u_2'' = -\frac{1}{2} E u_1' u_1'', \quad (2.70)$$

wodurch die Höhermarmonische aus der Anregung der primär-angeregte Welle beschrieben wird. Für Gleichung (2.69) wird nun die homogene Lösung gesucht. Dazu dient der Ansatz über eine harmonische Welle der Form

$$u_1 = A_1 \cdot \cos(kx - \omega t). \quad (2.71)$$

Örtliches und zeitliches Ableiten von (2.71) und Einsetzen in (2.69) führt auf

$$[-\rho\omega^2 + Ek^2]A_1 \cos(kx - \omega t) = 0. \quad (2.72)$$

Für nichttriviale Lösungen in denen gilt $A_1 \cos(kx - \omega t) \neq 0$ folgt

$$\rho\omega^2 = Ek^2, \quad (2.73)$$

was den bereits bekannten Zusammenhang aus (2.27) bestätigt

$$c_p = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (2.74)$$

Für die zweite Differentialgleichung (2.70) führt ein analoger Ansatz im homogenen Fall auf die identische Lösung. Zur Betrachtung der inhomogenen Lösung wird zunächst die Erregerseite mit (2.71) betrachtet

$$\begin{aligned} u_1' u_1'' &= k^3 A_1^2 \sin(kx - \omega t) \cos(kx - \omega t), \\ &= \frac{1}{2} k^3 A_1^2 \sin(2kx - 2\omega t). \end{aligned} \quad (2.75)$$

Daraus und aus der bekannten homogenen Lösung folgt für (2.70)

$$\ddot{u}_2 - c_p^2 u_2'' = -\frac{1}{4} c_p^2 k^3 A_1^2 \sin(2kx - 2\omega t). \quad (2.76)$$

Die Erregerseite gibt dem System somit eine sinusförmige Anregung mit dem doppelten der primär-anregenden Kreisfrequenz ω und der doppelten Wellenzahl k vor. Da es sich um ein quadratisch nichtlineares System handelt wird angenommen, dass der Ansatz für u_2 in der Form $u_2 \sim u_1^2$ vorliegen muss. Es gilt somit, dass ein sinusförmiger Ansatz gefunden werden

muss, der auf doppelte Kreisfrequenzen und doppelte Wellenzahlen führt und das quadratisch nichtlineare System wiedergibt

$$\begin{aligned} u_2 &= A_2 x \sin^2(kx - \omega t), \\ &= \frac{1}{2} A_2 x [1 - \cos(2kx - 2\omega t)]. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Dieser Ansatz führt mit den örtlichen und zeitlichen Ableitungen sowie Einsetzen in (2.76) auf die Lösung des inhomogenen Falles

$$A_2 = \frac{1}{8} k^2 A_1^2, \quad (2.78)$$

womit das ungestörte Amplitudenverhältnis zwischen der primär-angeregten Mode A_1 und der Höherharmonischen A_2 beschrieben wird. Einsetzen von (2.71), (2.77) und (2.78) in (2.68) führt auf

$$\begin{aligned} u &= A_1 \cos(kx - \omega t) + \frac{1}{8} k^2 A_1^2 x \beta \sin^2(kx - \omega t), \\ &= A_1 \cos(kx - \omega t) + \hat{A}_2 \sin^2(kx - \omega t) \end{aligned} \quad (2.79)$$

Mit \hat{A}_2 wird nun die gestörte Amplitude aufgrund der Nichtlinearitäten in β angegeben. Durch Umstellen nach β lassen sich diese Nichtlinearitäten mit dem Amplitudenverhältnis beschreiben

$$\beta = \frac{8}{kx} \frac{\hat{A}_2}{A_1^2}, \quad (2.80)$$

wodurch der absolute akustische Nichtlinearitätsparameter beschrieben ist. Wie bereits eingangs erwähnt, bezieht sich die Herleitung dessen auf Longitudinalwellen in einem Dehnstab. Absolute Aussagen zu den Nichtlinearitäten in einem Flächentragwerk sind somit nicht zulässig. Um jedoch eine relativierte Aussage über die Nichtlinearitäten in Flächentragwerken zu erhalten, wird der relative akustische Nichtlinearitätsparameter β' abgeleitet

$$\begin{aligned} \beta &\sim \frac{\hat{A}_2}{A_1}, \\ \beta' &= \frac{\hat{A}_2}{A_1}. \end{aligned} \quad (2.81)$$

An (2.81) lässt sich einfach erkennen, dass mit größerer Amplitude der Höherharmonischen \hat{A}_2 bei gleichbleibender Amplitude der primär-angeregten Mode A_1 auch der Nichtlinearitätsparameter größer wird. Dies lässt sich mit Blick auf die Gleichungen (2.49) und (2.50) verdeutlichen. Stärkere Nichtlinearitäten führen zu größeren Oberflächenkräften und Volumenkräften. Damit nimmt ebenfalls deren Summe zu. Eingesetzt in (2.51) führt dies zu einem größeren Vorfaktor, der die Steigung der Amplitude über die Ausbreitungslänge beschreibt. Die gemessenen relativen Nichtlinearitätsparameter werden im weiteren Verlauf auf den minimalen gemessenen Wert β'_0 normiert und über den normierten Nichtlinearitätsparameter ζ ausgedrückt

$$\zeta = \frac{\beta'}{\beta'_0}. \quad (2.82)$$

2.3. Signalanalyse

In Abschnitt 2.2.2 wurde der relative akustische Nichtlinearitätsparameter hergeleitet, welcher durch Gleichung (2.81) beschrieben wird. Daraus geht hervor, dass die Amplituden der primär-angeregten Mode und der Höherharmonischen bekannt sein müssen. Die Amplitude der primär-angeregten Mode tritt bei der Erregerfrequenz f_{Err} auf, während die Amplitude der Höherharmonischen bei dem Doppelten der Erregerfrequenz $f_{Hh} = 2f_{Err}$ entsteht (vgl. 2.2.1). Im Versuch müssen somit die frequenzabhängigen Amplituden bestimmt werden. Dazu wird durch einen Aktor ein Anregungssignal durch eine Probe geschickt, welches an anderer Stelle durch einen Sensor aufgenommen wird. Das aufgenommene Signal ist im Zeitbereich diskretisiert. Abbildung 2.12 verdeutlicht durch den schraffierten Bereich schematisch, dass zu einem gegebenen Zeitpunkt t Informationen zu der Signalamplitude vorliegen. Informationen zu den Signalamplituden bezüglich einer bestimmten Frequenz sind nicht abzulesen. Die Diskretisierung des Zeitsignals ist dabei gebunden an mehrere Bedingungen, um Infor-

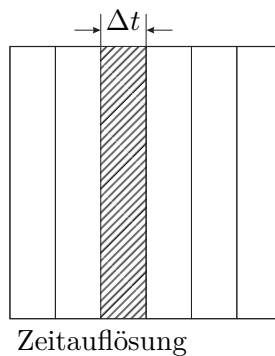


Abbildung 2.12.: Zeitdiskretes Signal

mationsverlust bei der Abtastung zu vermeiden. Die niedrigste Frequenz f_{Min} , die aus der Abtastung rekonstruiert werden kann, gibt die Frequenzauflösung Δf vor. Sie ist abhängig von der Messdauer T_{Mess} , die wiederum unterteilt ist in diskrete Teilbereiche Δt mit N Stützstellen

$$\Delta f = f_{Min} = \frac{1}{T_{Mess}} = \frac{1}{N \cdot \Delta t}. \quad (2.83)$$

Die maximale Frequenz, die durch die Abtastung rekonstruiert werden kann, ergibt sich aus dem Abtasttheorem von Shannon. Dieses gibt vor, dass die Abtastfrequenz f_{Abt} mindestens dem Doppelten der maximalen Frequenz f_{Max} im Signal entsprechen muss

$$f_{Abt} = 2f_{Max}. \quad (2.84)$$

Da in einigen Fällen die Abtastung nach Shannon dennoch zu gering sein kann, liegen Abtastfrequenzen in der Anwendung meist bei dem Fünf- bis Siebenfachen der maximalen Frequenz. Vor der Signalanalyse ist die Eingrenzung der geringsten und höchsten Frequenzen jedoch nicht immer exakt möglich. Dadurch kann es zu Unterabtastungen kommen. Dieser Effekt wird als „Aliasing“ bezeichnet. Zur Veranschaulichung dient Abbildung 2.13. Der gestrichelte blaue Kurvenverlauf beschreibt das Originalsignal einer sinusförmigen Schwingung von 12.5 Hz . Eine Abtastung des Signals mit dem Abtasttheorem von $2 \cdot 12.5 \text{ Hz}$ führt auf eine der erwähnten Ausnahmen, in denen das Abtasttheorem unzureichend ist. Der rote Kurvenverlauf zeigt, dass dadurch keine Frequenz ermittelt wird. Die Abtastung mit dem Fünffachen der Frequenz ist durch den grünen Kurvenverlauf angezeigt und gibt die Frequenz näherungsweise wieder. Eine Unterabtastung mit $0.4 \cdot 12.5 \text{ Hz}$ wird mit dem lilafarbenen Kur-

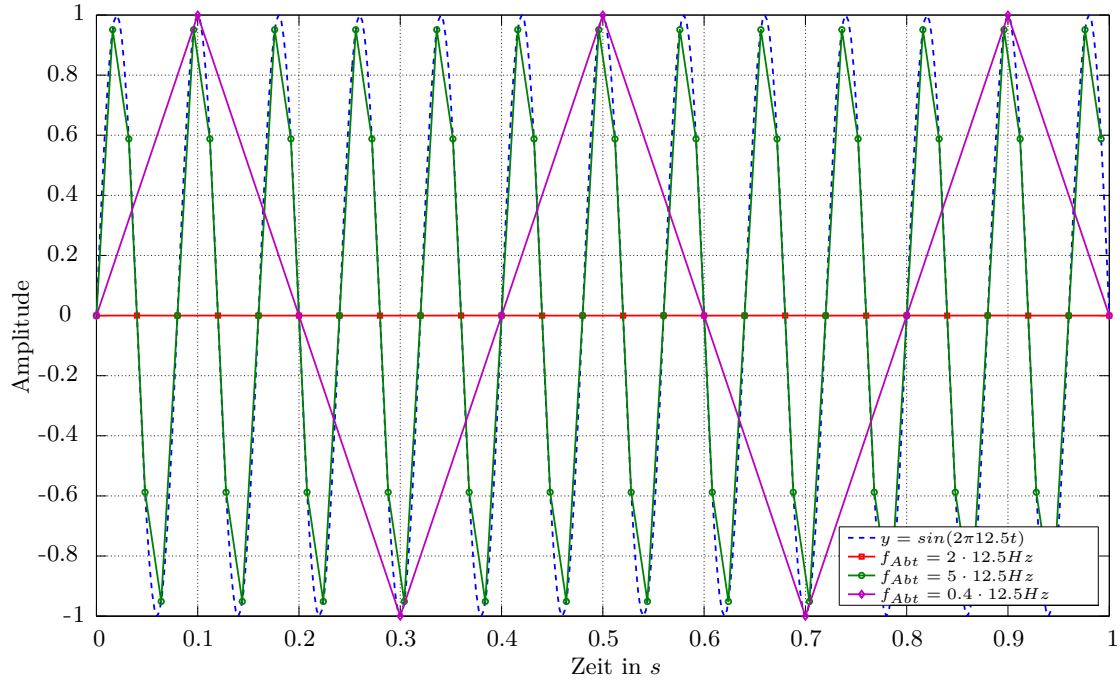


Abbildung 2.13.: Aliasing-Effekt

ververlauf beschrieben. Es ist deutlich zu sehen, dass statt der Frequenz von 12.5 Hz eine 2.5 Hz Schwingung ermittelt wird. Das bedeutet, dass der Aliasing-Effekt zu Frequenzen im Messsignal führt, die im tatsächlichen Signal nicht vorhanden sind. Um dem Aliasing-Effekt entgegenzuwirken werden Tiefpass-Filter verwendet. Diese lassen tiefe Frequenzen bis zu einer angegebenen Filter-Eck-Frequenz passieren, während höhere Frequenzen aus dem Signal gefiltert werden. Wurde das Anregungssignal von dem Sensor aufgenommen, liegen Informationen zu den Amplituden im Zeitbereich vor. Jedoch sind Informationen zu den Amplituden bei entsprechenden Frequenzen erforderlich, um den Nichtlinearitätsparameter zu bestimmen. Es muss daher eine Transformation des gemessenen Signals vom Zeitbereich in den Frequenzbereich durchgeführt werden. Eine solche Transformation bietet die Fourier-Transformation. Auf Herleitungen zur Fourier-Reihe und zur Fourier-Transformation wird an dieser Stelle verzichtet, da diese in zahlreicher Fachliteratur zu finden sind. In [15] wird das Thema umfassend beleuchtet. Die weiteren Ausführungen basieren auf [4], [16] und [17].

Die Fourier-Reihe basiert auf dem Zusammenhang, dass Sinus und Kosinus ein Orthogonalsystem bilden. Des Weiteren ist der Grundgedanke, dass sich jede periodische und zeitkontinuierliche Funktion $f(t)$ aus einer Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen beschreiben lässt. In komplexer Schreibweise gilt

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\omega_o t}, \quad (2.85)$$

mit ω_o als Basiskreisfrequenz. C_n ist dabei der komplexe Fourier-Koeffizient, der sich aus Umformung mit der Periodendauer T ergibt zu

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} [f(t)e^{in\omega_o t}] dt. \quad (2.86)$$

Die Fourier-Transformation erweitert den Grundgedanken auch auf nicht periodische aber weiterhin zeitkontinuierliche Funktionen $x(t)$. Dabei gilt, dass die Periodendauer gegen Unendlich läuft

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[\int_{\hat{t}=-\infty}^{\infty} x(\hat{t}) e^{-i\omega\hat{t}} d\hat{t} \right]}_{X(i\omega)} d\omega. \quad (2.87)$$

Das innere Integral $X(i\omega)$ wird als Fourier-Transformierte bezeichnet und ist eine Funktion der Kreisfrequenz. Da bei den Versuchen die Funktionen weder kontinuierlich noch unendlich sind, sondern über eine Messdauer T zu jedem Zeitpunkt t_n ein Wert ermittelt wird, bedient man sich der diskreten Fourier-Transformation. Dabei wird das gesamte Signal mit einer Fensterfunktion multipliziert, deren Anfang und Ende die bewertete Funktion zu Null setzt und in der Mitte den maximalen Wert Eins erreicht. Beispiele für solche Fensterfunktionen sind das Dreieck-Fenster oder das Hanning-Fenster. In Abbildung 2.14 sind das Zeitsignal $x(t) = 0.25 \cdot [\sin(2t)^{1.6} + 2 \cos(t) + \tanh 2(t-2)]$ sowie die beiden erwähnten Fensterfunktionen dargestellt. Die bewertete Funktion lässt sich damit als quasi-periodisch ansehen. An dieser

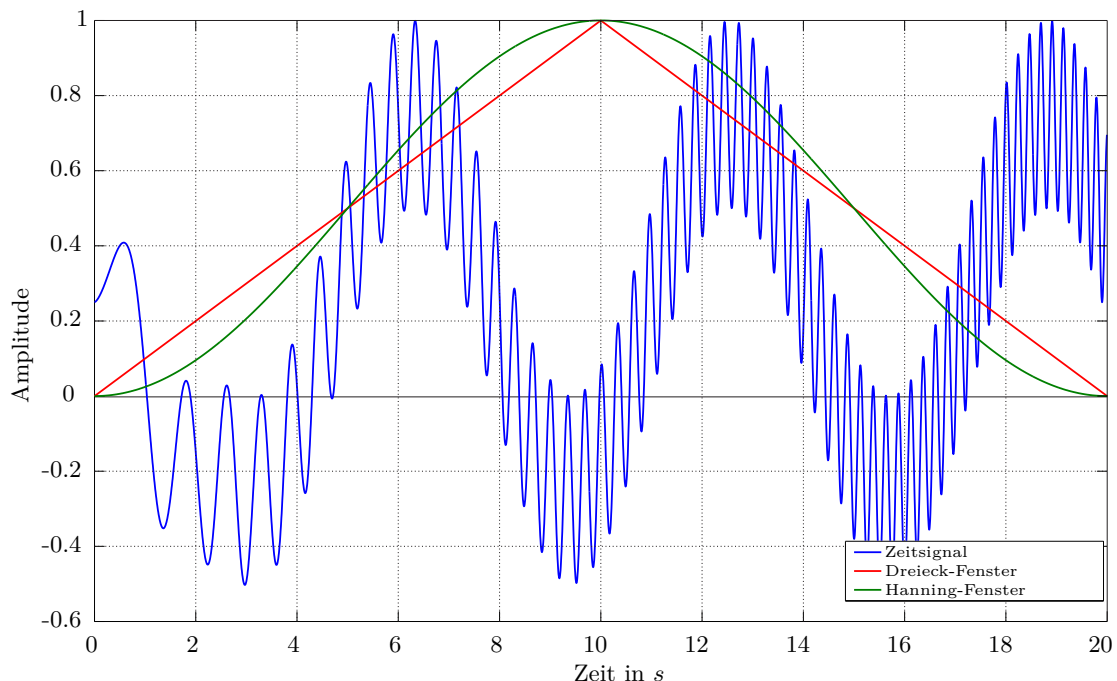


Abbildung 2.14.: Zeitsignal mit Fensterfunktionen

Stelle sei noch zu erwähnen, dass durch den Einsatz der Fensterfunktionen und abhängig davon, ob der Zeitbereich des Signals ein ganzzahliges Vielfaches der Periodendauer ist, es zu sogenannten „Nebenbändern“ kommen kann. Diese treten bei der Fourier-Transformation auf und zeigen um die tatsächlich vorhandene Frequenz Nebenfrequenzen an, die nicht im Signal vorhanden sind. Liegen im Zeitbereich ganzzahlige Vielfache der Periodendauer vor, so treten die Nebenbänder durch die Fensterfunktionen auf. Ist dem nicht so, kommt es durch die nicht vorhandene Periodizität zu den Nebenbändern, die dann durch die Fensterfunktionen verringert werden.

Aus den diskreten Zeitwerten $x(k)$ lassen sich bei der diskreten Fourier-Transformation die diskreten Frequenzwerte $X(n)$ bestimmen über

$$X(n) = \sum_{g=0}^{N-1} x(k) e^{-i2\pi k \frac{n}{N}}, \quad (2.88)$$

mit $g = n = 0, 1, \dots, N - 1$. Abbildung 2.15 veranschaulicht den Nutzen der Fourier-Transformation. Der schraffierte Bereich zeigt, dass zu einer gegebenen Frequenz Informationen zur Signalamplitude vorliegen. Dafür ist jedoch keine Aussage mehr darüber möglich, zu welchem Zeitpunkt die Signalamplitude auftritt. Eine reine Frequenzauflösung des Mess-

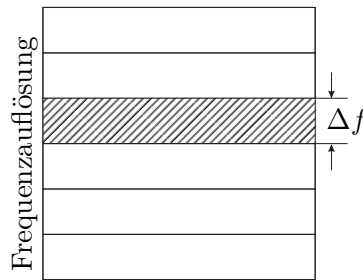


Abbildung 2.15.: Frequenzdiskretes Signal

signals ist nicht ausreichend, um den Nichtlinearitätsparameter zu bestimmen. Durch das multimodale Verhalten geführter Wellen in Flächentragwerken, werden bei der Anregung mit einer vorgegebenen Erregerfrequenz f_{Err} neben der gewünschten Mode noch weitere Moden angeregt. Dies hat zur Folge, dass bei einer Fourier-Transformation die Informationen zu der Signalamplitude bei $f = f_{Err}$ alle erregten Moden enthält. Eine Aussage darüber, welchen Anteil die relevante Mode an der Amplitude A_1 hat ist nicht möglich. Zum Vorteil wird dabei die zweite Eigenschaft geführter Wellen in Flächentragwerken. Ein dispersives Verhalten bewirkt, dass sich die erregten Moden bei f_{Err} mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten ausbreiten. Daraus folgt, dass jede Welle zu einem anderen Zeitpunkt im Sensor aufgenommen wird. Ziel ist somit eine Darstellung, in der eine Aussage darüber ermöglicht wird, welche Frequenzen zu einem bestimmten Zeitpunkt in die Informationen zur Amplitude eingehen.

Der nächste Schritt ist daher die Kurzzeit-Fourier-Transformation (STFT), zu der auch die Gabor-Transformation zählt. Dabei wird das Zeitsignal in Teilbereiche unterteilt. Das gesamte wird dann im jeweiligen Teilbereich mit einer Fensterfunktion multipliziert, während der Rest des Signals zu Null wird. Das Ergebnis des gefensterten Teilbereiches wird anschließend fourier-transformiert. Die Abbildung 2.16 zeigt das bereits verwendete Zeitsignal mit einer Unterteilung in fünf Teilbereiche und den jeweiligen Dreieck- und Hanning-Fenstern. Die jeweilige gefensterte Funktion $x_h(t, b)$ ergibt sich nach Multiplikation des Teilbereiches der Originalfunktion $x(t)$ mit der Fensterfunktion h zu

$$x_h(t, b) = x(t) \cdot h(t - b), \quad (2.89)$$

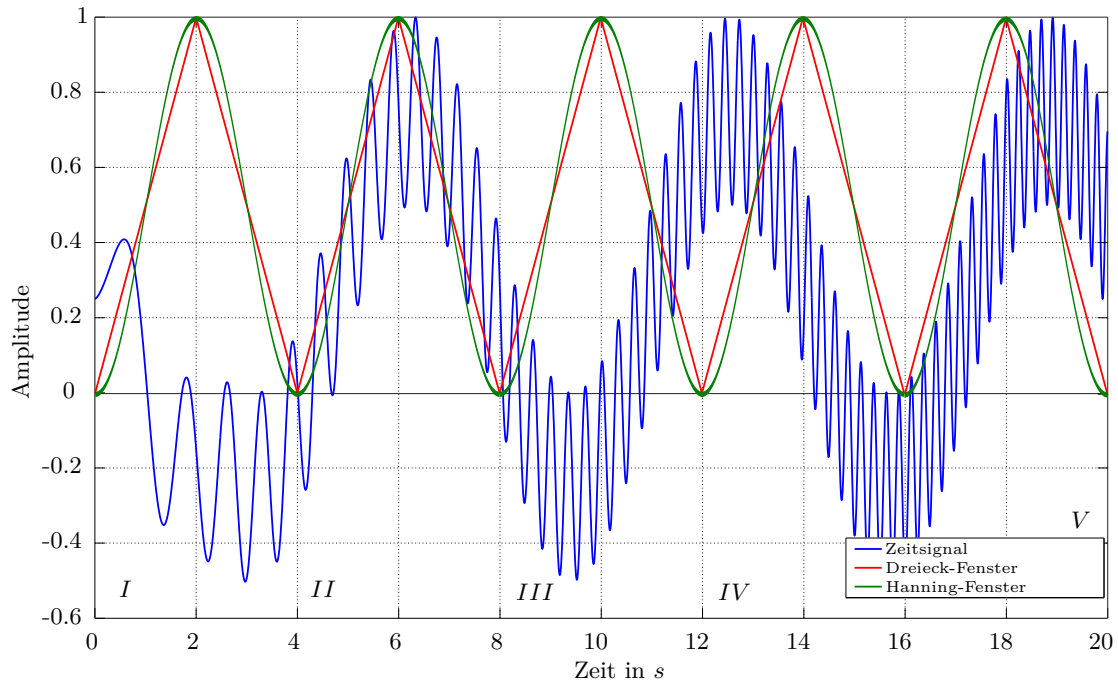


Abbildung 2.16.: Zeitsignal mit Fensterfunktionen in der STFT

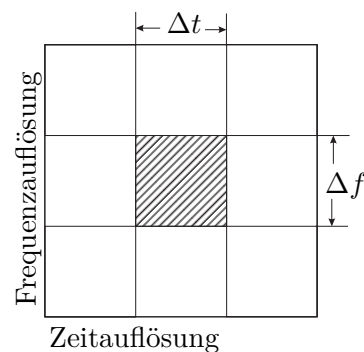


Abbildung 2.17.: Frequenz- und zeitdiskretes Signal

wobei b die zeitliche Position des Fensters angibt. Eingesetzt in die Fourier-Transformierte aus (2.87) ergibt sich eine Funktion, die von der Zeit um die Position b und von der Frequenz abhängig ist

$$X(b, i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot h(t - b)^{-i\omega t} dt. \quad (2.90)$$

Damit entsteht die gewünschte Verbindung von Frequenz- und Zeitaufloesung. Abbildung 2.17 zeigt schematisch den Zusammenhang. Der schraffierte Bereich zeigt an, dass zu einem bestimmten Zeitpunkt t bekannt ist, welche Frequenzen f Informationen zu der Signalamplitude liefern. Diese Darstellung ist vergleichbar mit einem Notenblatt. Dort wird angegeben, zu welchem Zeitpunkt eine bestimmte Frequenz zu spielen ist.

Nun ergeben sich zwei Möglichkeiten um die Teilbereiche zu wählen. Fall *I* wäre, die Teilbereiche sehr klein zu unterteilen. Das resultiert in einer sehr genauen Zeitaufloesung, hat jedoch eine schlechte Frequenzaufloesung zur Folge. Beschrieben wurde dieser Zusammenhang von Karl Küpfmüller und wird als Küpfmüllersche Unbestimmtheitsrelation bezeichnet, welche

mit der Heisenbergschen Unschärferelation aus der Quantenmechanik verwandt ist. Daraus geht hervor, dass das Produkt aus einer definierten Zeitdauer und Frequenzbreite konstant ist

$$\Delta t \cdot \Delta f = \text{const.} \quad (2.91)$$

Anschaulich lässt sich der Zusammenhang an Abbildung 2.16 verdeutlichen. Mit kleiner werdenden Teilbereichen, werden niedrige Frequenzen mit großen Wellenlängen nicht mehr in den Fourier-Transformationen erfasst. Dafür werden hohe Frequenzen zeitlich präzise ermittelt. Wird nun Fall II betrachtet, in dem die Teilbereiche vergrößert werden, folgt eine gute Frequenzauflösung, bei schlechterer Zeitauflösung. Abbildung 2.18 verdeutlicht die beiden Fälle. Diesem Umstand wird nun mit der Wavelet-Transformation begegnet. Anstelle einer

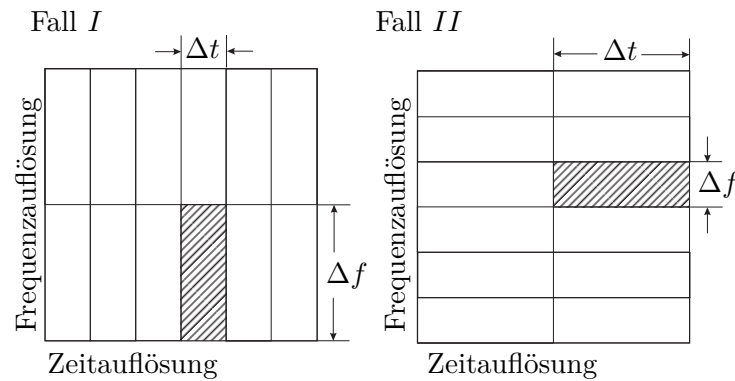


Abbildung 2.18.: Einfluss der Teilbereiche auf die Frequenz- und Zeitdiskretisierung

Fensterfunktion wird hierbei ein so genanntes „Mother-Wavelet“ verwendet. Dabei handelt es sich um eine oszillierende Funktion $\psi(t)$

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad (2.92)$$

mit $a \neq 0$ als Skalierungsparameter und b als zeitliche Position des Mother-Wavelets. Bei der Wavelet-Transformation wird das mit dem Originalsignal multiplizierte Mother-Wavelet über der Zeit integriert

$$W_\psi(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \psi_{a,b}^*(t) dt. \quad (2.93)$$

Anschaulich wird das mit dem Parameter a skalierte Wavelet dadurch über den gesamten Zeitraum des Signales verschoben. Durch die Skalierung werden die zwei Fälle, die bei der STFT bereits beschrieben wurden verbunden.

So wird zunächst ein breit skaliertes Wavelet auf die Funktion angewendet. Dadurch werden niedrige Frequenzen mit großen Wellenlängen ermittelt, bei denen die zeitliche Zuordnung jedoch unpräzise ist. Anschließend wird das Wavelet kleiner skaliert und der Vorgang wiederholt. Mit kleiner werdender Skalierung werden steigende Frequenzen bei zeitlich präziser werdenden Zuordnungen ermittelt. Abbildung 2.19 zeigt das bereits bekannte Zeitsignal mit zwei unterschiedlich skalierten Wavelets. Bei den Waveletfunktionen handelt es sich um das Morlet-Wavelet, das im Rahmen dieser Arbeit verwendet wurde. Die beschriebenen Zusammenhänge werden dadurch verdeutlicht. Daraus ergibt sich eine gute Möglichkeit, um Frequenz- und Zeitauflösung zu verbinden. Im Vergleich zu Abbildung 2.17 aus der STFT macht Abbildung 2.20 die Vorteile der Wavelet-Transformation im Bezug auf steigende Fre-

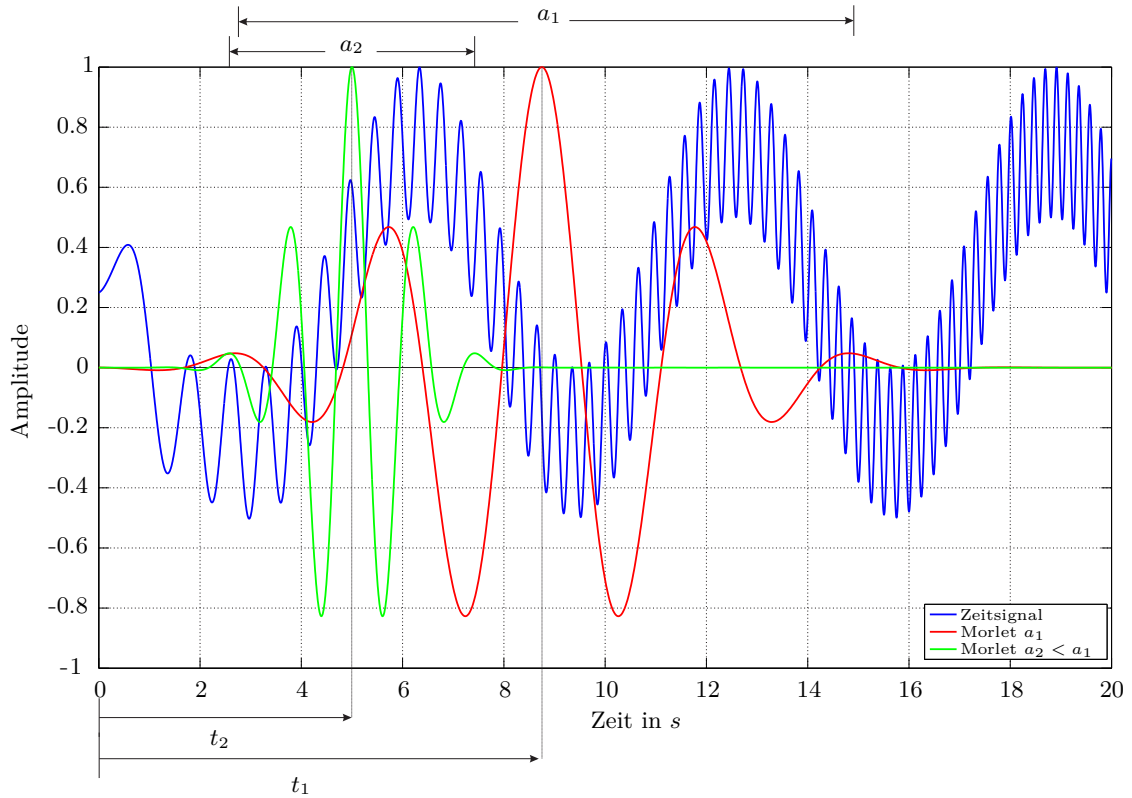


Abbildung 2.19.: Zeitsignal mit Morlet-Wavelet

quenzen deutlich. Mit der Wavelet-Transformation können somit die frequenzabhängigen

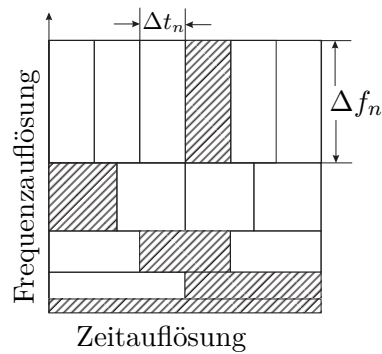


Abbildung 2.20.: Einfluss der Wavelets auf die Frequenz- und Zeitaufösung

Amplituden der einzelnen relevanten Moden ermittelt werden. Daraus erfolgt anschließend die Berechnung der relativen akustischen Nichtlinearitätsparameters.

3. Nichtlineare Wellenausbreitung in den geschädigten Proben

Das nachfolgende Kapitel befasst sich mit den praktischen Anteilen der Arbeit. Darin wird auf die experimentellen Verfahren zur Bestimmung des normierten Nichtlinearitätsparameters sowie des Elastizitätsmoduls eingegangen. Das beinhaltet die Beschreibung der Versuchsaufbauten, Versuchsdurchführungen und schließt das Auswerteverfahren der Korrelationsanalyse mit Fehlerfortpflanzung ein.

3.1. Anfertigung geschädigter Proben

Zunächst erfolgt die Anfertigung der geschädigten Proben. Dazu werden zwölf identische Proben der Maße $600\text{ mm} \times 80\text{ mm} \times 2.27\text{ mm}$ gleichermaßen auf vier Lastzyklenzahlen verteilt, welche der Tabelle 3.1 zu entnehmen sind. Durch die verschiedenen Lastzyklenzahlen

Tabelle 3.1.: Lastzyklenzahlen zur Erstellung geschädigter Proben

Lastzyklenzahl	5 000	10 000	15 000	20 000
----------------	-------	--------	--------	--------

sollen unterschiedliche Schädigungen in die Struktur eingebracht werden. Es ist somit auf einen möglichen Zusammenhang zwischen der Anzahl an Lastzyklen und den mechanischen Eigenschaften zu prüfen. Die Proben werden bei der entsprechenden Anzahl einer zyklischen Zug-Schwell-Bestlastung von $10 - 200\text{ kN}$ ausgesetzt.

Bei den Proben handelt es sich um ein Laminat aus vier so genannten „Prepregs“ mit jeweils einem Faserwinkel von Null Grad. Um die unidirektionalen Fasern während der Fertigung des Laminats in der gewünschten Lage zu halten, werden Vernähungen in die Prepregs eingebracht. Diese Vernähungen sind in Abbildung 3.1 deutlich zu erkennen. Durch die Ver-

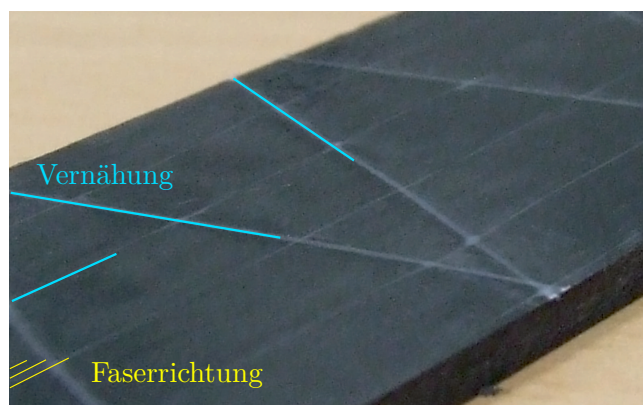


Abbildung 3.1.: Vernähungen in einer Struktur aus UD-CFK

nähungen werden nicht zu vernachlässigende Inhomogenitäten in die Struktur eingebracht. Sie haben keinen unmittelbaren Einfluss auf die Festigkeit des Materials, stellen jedoch Ausgangspunkte für Initialschäden dar. Bei dem Aufbringen der Belastung reißen einige der Vernähungen, was zu Schäden in dem Matrixmaterial des Laminats führt. Das hat mittelbar einen Einfluss auf die Festigkeit der Struktur, da ausgehend von den Initialschäden die

Struktur durch Defekte geschwächt wird. Dies wird deutlich bei der Betrachtung eines Mikroschliffs, wie er in Abbildung 3.2 dargestellt ist. Einige exemplarische Vernähungen sind

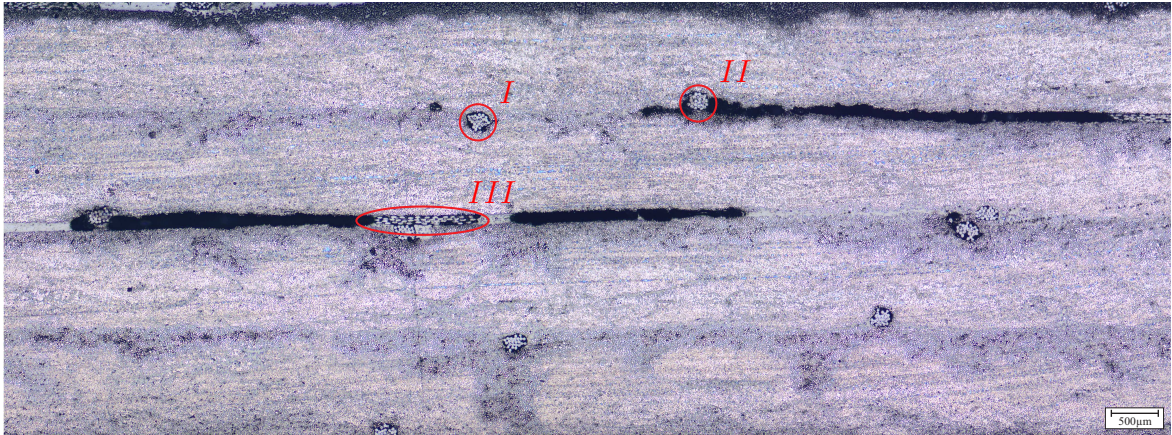


Abbildung 3.2.: Mikroschliff einer Struktur aus UD-CFK mit Vernähungen

mit rot markierten Bereichen gekennzeichnet. Sie weisen Durchmesser von ca. $200 \mu m$ auf und liegen an den Rändern des Laminats sowie zwischen den Schichten der Prepregs. Die vier Schichten des Laminates sind an den horizontal verlaufenden dunkelgrauen Verklebungen zu erkennen. Vernähung *I* und *II* liegen nahezu orthogonal zur Schnitttrichtung, was dem Kreisquerschnitt zu entnehmen ist. Der schwarze punktförmige Bereich neben Vernähung *I* resultiert aus einer Pore, die bei der Fertigung entstanden ist. Auch diese führen mittelbar zu einer Schwächung der Struktur. Um die Bereiche *II* und *III* herum liegt Delamination vor, was aus den großen schwarzen Bereichen hervorgeht, die sich horizontal entlang der Verklebungen ausbreiten. Dort haben sich die Einzelschichten des Laminates von einander getrennt. Die Vernähung aus Bereich *III* liegt schräg zur Schnitttrichtung, was in dem elliptischen Querschnitt resultiert. Von diesen Defekten ausgehend, wandern Risse durch die Struktur und führen zu Schädigungen, die sich nach Abbildung 3.3 zwischen den Prepregs-Schichten in zwei Richtungen ausbilden.

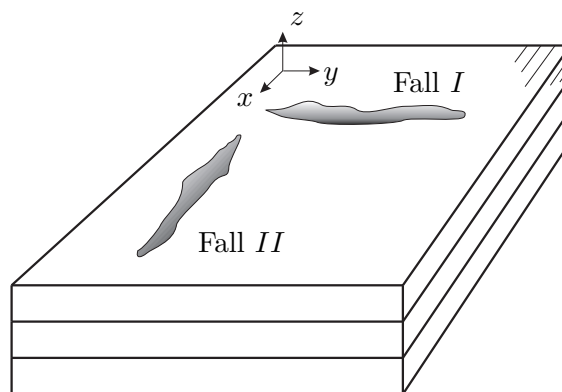


Abbildung 3.3.: Schädigungsarten einer Struktur aus UD-CFK infolge des Versagens von Vernähungen

Die Hauptrichtungen, in denen sich die Risse ausbreiten können, sind durch die Fälle *I* und *II* abgebildet. Fall *I* beschreibt Schädigungen orthogonal zur Faserrichtung, während

der Riss aus Fall *II* mit der Faserrichtung verläuft. Der Einfluss beider Rissarten auf den Elastizitätsmodul hängt davon ab, ob die Risse zu Delamination führen, was einen Abfall in der Festigkeit des Struktur zur Folge hat. Mikrostrukturelle Schädigungen spiegeln sich dagegen nicht im Elastizitätsmodul wider. Die Beeinflussung des Nichtlinearitätsparameters hängt mit Kontaktbedingungen beim Rissöffnen und Riss schließen zusammen. Kräfte können dabei nur übertragen werden, wenn der Riss geschlossen ist. Das führt in der nichtlinearen Wellenausbreitung zur Anregung der Höherharmonischen. Die Nichtlinearitäten aufgrund der diskreten Risse werden im Modell aus Abschnitt 2.2.1 durch das nichtlineare Materialgesetz an der gesamten Struktur abgebildet (vgl. Landau-Lifshitz (2.18)). Je größer die Risse, desto stärker kommen die Nichtlinearitäten bei den Kontaktbedingungen zum Tragen und desto größer fällt der Nichtlinearitätsparameter aus.

3.2. Berechnung der Dispersionsdiagramme

Im nächsten Schritt ist die Anregungsfrequenz zu bestimmen, mit der die Proben im Versuch zur nichtlinearen Wellenausbreitung anzuregen sind. Diese richtet sich nach den Bedingungen der internen Resonanz. Daraus folgt, dass eine solche Anregungsfrequenz gewählt werden muss, die eine Erregung der S_1 -Mode bewirkt, deren Phasengeschwindigkeit mit der S_2 -Mode übereinstimmt und bei der die Frequenz der S_2 -Mode dem Doppelten der Anregungsfrequenz entspricht. Zur Bestimmung der Anregungsfrequenz wird ein Dispersionsdiagramm mit den Materialkennwerten aus Tabelle 3.2 erzeugt. Die Berechnung der Dispersionsdiagramme er-

Tabelle 3.2.: Materialparameter ungeschädigter CFK-Struktur

Parameter	Wert	Dimension
ρ	1535	$[kg/m^3]$
μ	0.37	$[-]$
$E_{ }$	125.0	$[GPa]$
E_{\perp}	8.094	$[GPa]$
G_{12}	3.981	$[GPa]$
G_{23}	3.75	$[GPa]$

folgt über einen MATLAB-Code aus [4]. Dieser Code beruht auf den Zusammenhängen aus A.2 bezüglich transversal-isotroper Festkörper und ist für UD-CFK ausgelegt. Die daraus entstehenden Dispersionsdiagramme für Phasen- und Gruppengeschwindigkeiten sind in den Abbildungen 3.4 und 3.5 dargestellt. Bereits in Abbildung 3.4 ist zu erkennen, dass neben der S_1 -Mode ebenfalls die A_0 -Mode sowie die S_0 -Mode angeregt werden. Ein Blick auf Abbildung 3.5 zeigt, dass zusätzlich eine Anregung der A_1 -Mode erfolgt. Weiterhin ist zu erkennen, dass sich die zusätzlich angeregten Moden mit geringeren Gruppengeschwindigkeiten ausbreiten.

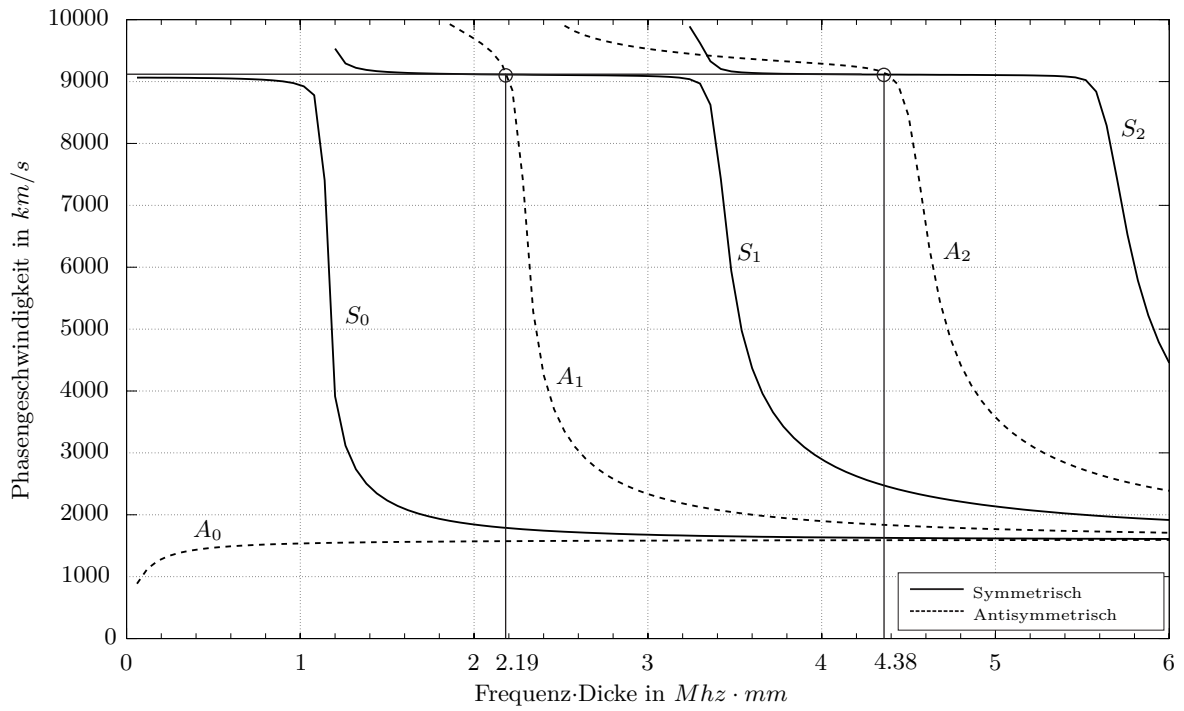


Abbildung 3.4.: Dispersionsdiagramm für Phasengeschwindigkeiten der Proben aus UD-CFK

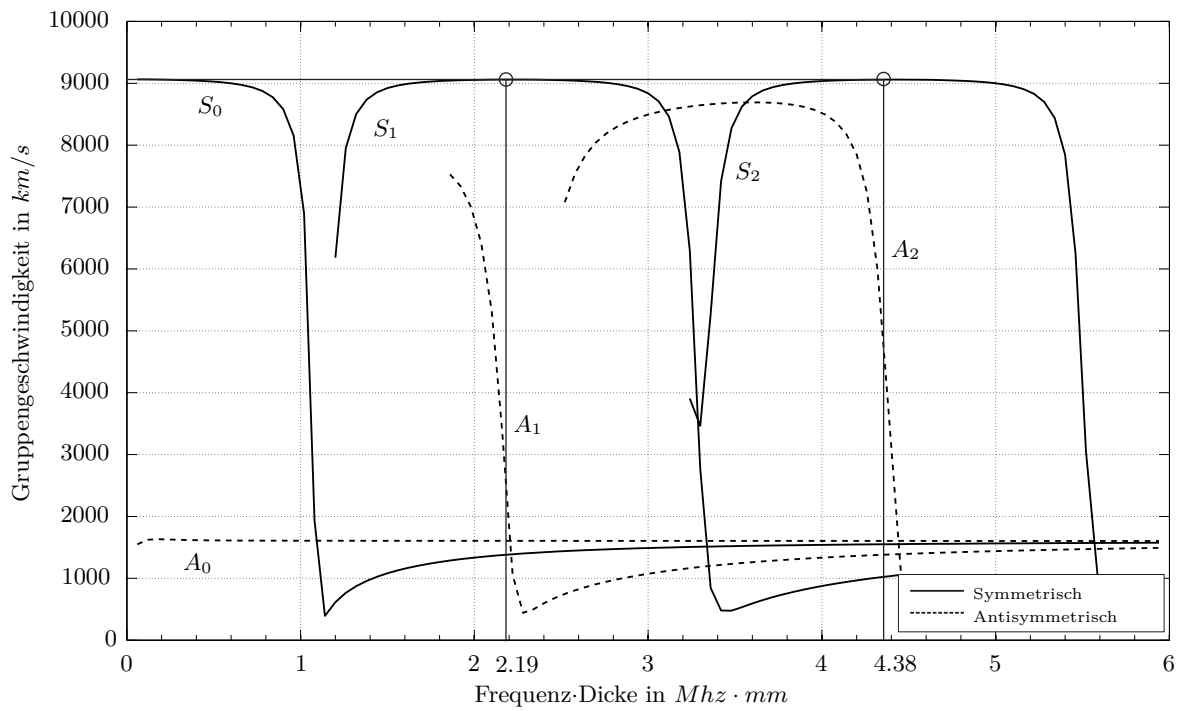


Abbildung 3.5.: Dispersionsdiagramm für Gruppengeschwindigkeit der Proben aus UD-CFK

3.3. Ermittlung des normierten Nichtlinearitätsparameters

Aus den Dispersionsdiagrammen lässt sich für die S_1 -Mode eine Anregungsfrequenz von 2.19 MHz bei einer 1.0 mm dicken Platte ermitteln. Die verwendeten Proben weisen hingegen eine Dicke von 2.27 mm auf, woraus eine Anregungsfrequenz von 965 MHz resultiert. Die Anregung erfolgt ebenso wie die Messung über Piezokeramiken. Aktor und Sensor werden in einem Abstand von 250 mm auf den Proben verklebt, wobei diese mittig auf der Probe platziert werden. Das verringert die Auswirkungen von Reflexionen an den Plattenrändern auf die Messung. Der Aktor weist eine Dicke von 0.25 mm und der Sensor von 0.1 mm auf. Es wurde darauf geachtet, möglichst dünne Keramiken zu verwenden. Die Gründe dafür liegen darin, dass die Probe durch die Keramiken möglichst unbeeinflusst bleiben sollen. Die verklebten Aktoren und Sensoren bilden Steifigkeitssprünge an den Plattenrändern aus, was entgegen der Bedingung an die freien Ränder ist und sich somit auf die Wellenausbreitung auswirkt (vgl. 2.2). Des Weiteren sind dünnere Keramiken nachgiebiger, wodurch sie größere Verformungen durchführen können. Folglich kommt der Piezo-Elektrische-Effekt stärker zum Tragen und die Messempfindlichkeit nimmt zu. Der Messaufbau ist der schematischen Darstellung aus Abbildung 3.6 zu entnehmen. Die Probe wird zur Messung auf einer

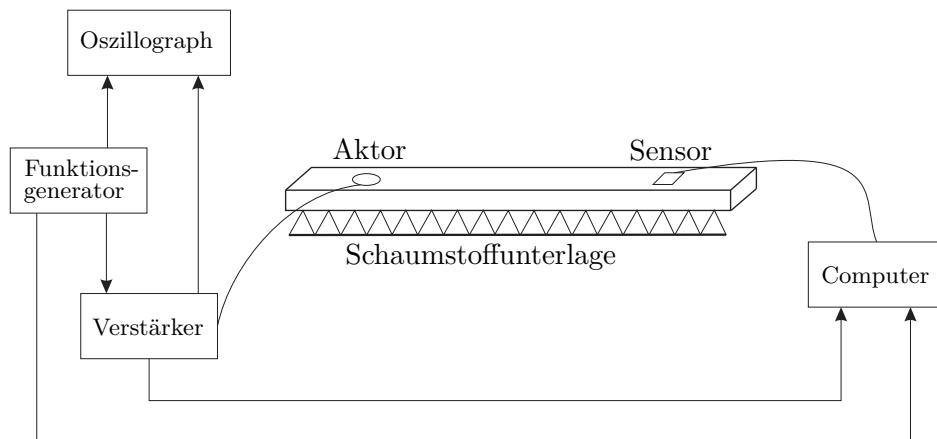


Abbildung 3.6.: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus zur nichtlinearen Wellenausbreitung

Schaumstoffunterlage platziert, um der Bedingung an die freien Ränder gerecht zu werden. Ein Oszillograph zeigt die vorgegebene Anregung aus dem Funktionsgenerator an. Diese Anregung wird über einen Verstärker geleitet und ebenfalls am Oszillograph ausgegeben. Über den Piezo-Aktor in die Probe eingeleitet kommt es zur Ausbreitung von geführten Wellen. Die Verschiebungen, die aufgrund der Wellen entstehen, werden von dem Piezo-Sensor aufgenommen, an einen Computer mit entsprechender Messkarte weitergegeben und aufgezeichnet. Über 10 000 Wiederholungen je Probe erfolgt die statistische Absicherung der Versuche, wobei der Messaufbau unverändert bleibt. Das bedeutet, dass die Piezokeramiken nicht von der Probe entfernt und neu verklebt werden. Der Grund dafür ist, dass ein Entfernen der verklebten Piezokeramiken nur über ein Abschlagen möglich ist. Dabei besteht jedoch das Risiko, dass durch wiederholtes Abschlagen an der gleichen Probe weitere Schädigungen in diese eingebracht werden und das Ergebnis verfälscht wird. Daher erfolgt eine Mittelung über 10 000 einzelne Burst-Signale, die aus einer sinusförmigen Anregung entstehen.

Die Auswertung der aufgenommenen Signale erfolgt über eine Wavelet-Transformation in Form eines MATLAB-Codes, der von der Helmut-Schmidt-Universität zur Verfügung ge-

stellt wurde. Die relevanten Bereiche der aufgenommenen Zeitsignale sind in Anhang A.3 beigefügt. In Abbildung 3.7 ist ein Zeitsignal dargestellt, das die gesamte Messdauer einer Messung enthält. Dabei ist zu erkennen, dass bereits zum Messbeginn ein Ausschlag vom

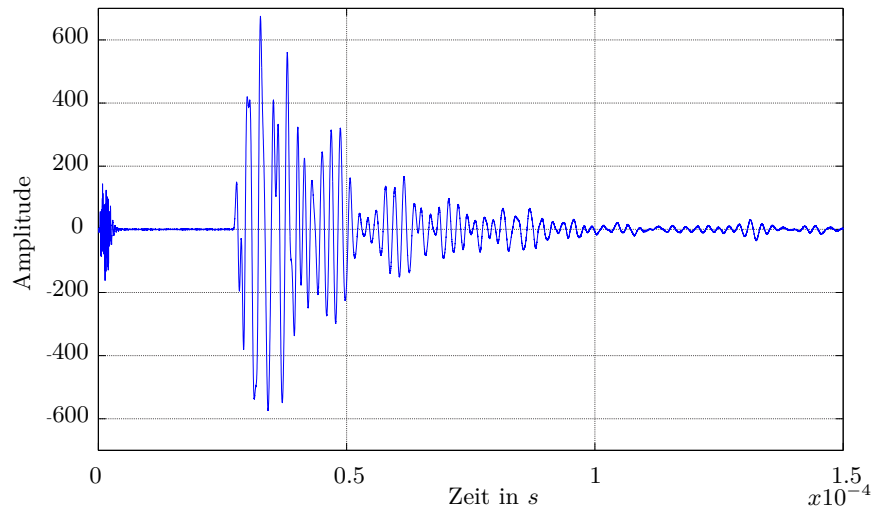


Abbildung 3.7.: Aufgenommenes Zeitsignal der Probe 5 000₁

Sensor aufgezeichnet wird. Es handelt sich jedoch nicht um einen auf Verschiebungen basierenden Ausschlag, da keine geführte Welle über eine so hohe Gruppengeschwindigkeit verfügt. Vielmehr werden durch die bestromten Messkabel Magnetfelder erzeugt, welche sich gegenseitig beeinflussen. Das Magnetfeld, das sich von der Piezo-Aktor-Seite ausgehend ausbreitet, trifft auf das Piezo-Sensor seitige Kabel und führt dort zu den störenden Signalen. Daher werden die Zeitsignale in dem verwendeten MATLAB-Code zunächst bereinigt. Ein anschließender digitaler Tiefpassfilter verringert das Messrauschen in den Zeitsignalen. Das Ergebnis der Wavelet-Transformation liegt in Form der Wavelet-Koeffizienten vor, welche für die S_1 - und S_2 -Mode ebenfalls in Anhang A.3 abgebildet sind. Die Wavelet-Koeffizienten repräsentieren dabei die Amplituden der primär-angeregten Mode und der Höherharmonischen. Der Quotient aus beiden gibt den relativen akustischen Nichtlinearitätsparameter β' wieder. Die Ergebnisse sind Tabelle 3.3 zu entnehmen. In Tabelle 3.3 ist zusätzlich der

Tabelle 3.3.: Relativer akustischer und normierter Nichtlinearitätsparameter

n	Bezeichnung	β'_n [-]	ζ_n [-]	n	Bezeichnung	β'_n [-]	ζ_n [-]
1	5 000 ₁	19.05	2.24	7	15 000 ₁	16.30	1.92
2	5 000 ₂	16.12	1.90	8	15 000 ₂	66.89	7.87
3	5 000 ₃	15.55	1.83	9	15 000 ₃	11.24	1.32
4	10 000 ₁	15.97	1.88	10	20 000 ₁	25.42	2.99
5	10 000 ₂	9.85	1.16	11	20 000 ₂	16.96	2.00
6	10 000 ₃	28.15	3.31	12	20 000 ₃	8.50	1.00

normierte Nichtlinearitätsparameter ζ dargestellt. Die Normierung basiert auf dem relativen akustischen Nichtlinearitätsparameter von Versuch 12, da dieser den niedrigsten Wert aufweist. Die Verteilung der normierten Nichtlinearitätsparameter ist über die Versuche in Abbildung 3.8 dargestellt. Es ist zu erkennen, dass Versuch 8 einen deutlich erhöhten Wert

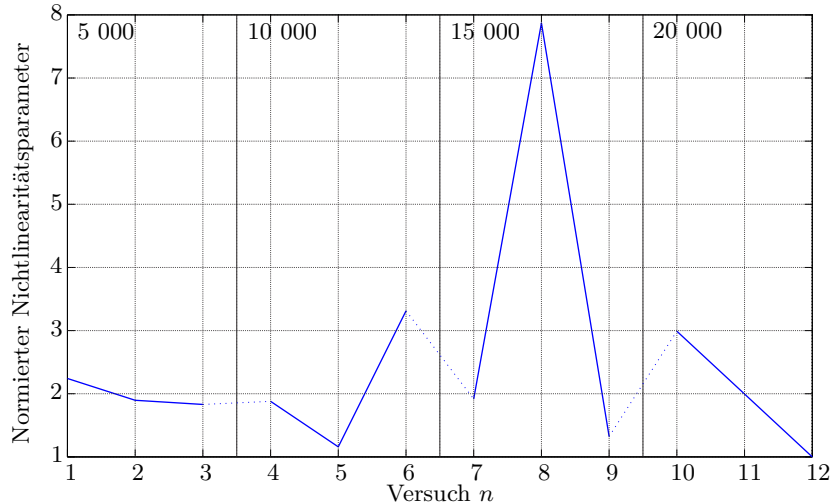


Abbildung 3.8.: Normierter Nichtlinearitätsparameter über alle Versuche

für den normierten Nichtlinearitätsparameter anzeigt. In dieser Probe ist demnach das höchste Maß an Nichtlinearitäten enthalten. Sie besitzt somit die größten Schädigungen in Form von Rissen an denen durch die Kontaktbedingungen höherharmonische Moden entstehen. Ob diese Risse Delamination aufweisen und im gleichen Maß den Elastizitätsmodul beeinflussen, zeigt sich bei der Ermittlung der Elastizitätsmodule. Die Betrachtung der nichtlinearen Wellenausbreitung, im Besonderen bezüglich des Nichtlinearitätsparameters sind nur in dem Bereich zwischen Aktor und Sensor möglich. Um im Weiteren Aussagen zu den mechanischen

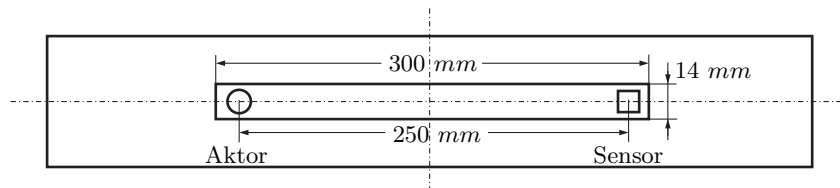


Abbildung 3.9.: Zuschnitt der Proben im Bereich der Wellenausbreitung

Eigenschaften in Form des Elastizitätsmoduls und aufgrund der Schädigungen der Proben zu ermöglichen, werden die Proben daher auf diesen Bereich zugeschnitten. Abbildung 3.9 zeigt den relevanten Bereich zwischen Aktor und Sensor von 250 mm an. Um die Piezokeramiken herum werden die Proben daher auf die Maße 300 mm x 14 mm zugeschnitten. Die zugeschnittenen Proben werden anschließend auf ihre mechanischen Eigenschaften hin untersucht.

3.4. Ermittlung des Elastizitätsmoduls

Zur Bewertung der mechanischen Eigenschaften der zugeschnittenen Proben und einer weiterführenden Korrelation mit den normierten Nichtlinearitätsparametern, werden die Proben in einem einachsigen Zugversuch auf den Elastizitätsmodul geprüft. Dazu sind zunächst die Piezokeramiken von den Proben zu entfernen. Anschließend werden die Proben auf einer Versuchslänge von 200 mm in die Prüfvorrichtung eingespannt. Die Prüfmaschine fährt kraft geregelt von 0 – 12 000 N, wobei der Auswertebereich der Elastizitätsmodule zwischen 1 000 – 12 000 N liegt. Je Probe werden die Versuche zehnfach wiederholt und die Proben zwi-

schen den Wiederholungen neu eingespannt. Für die Messung der Längenänderung wird ein Laser-Extensometer verwendet. Dieses projiziert ein Speckle-Muster auf die Probe, mit dem die Verschiebungen der Messpunkte nachverfolgt werden. Die Elastizitätsmodule ergeben sich abschließend aus den gemessenen Längenänderungen bezüglich den Dicken und Breiten der Proben im angegebenen Auswertebereich. Die Ergebnisse der Elastizitätsmodulbestimmung sind in Abbildung 3.10 dargestellt. Abgebildet sind die Versuche der vier Lastzyklenzahlen

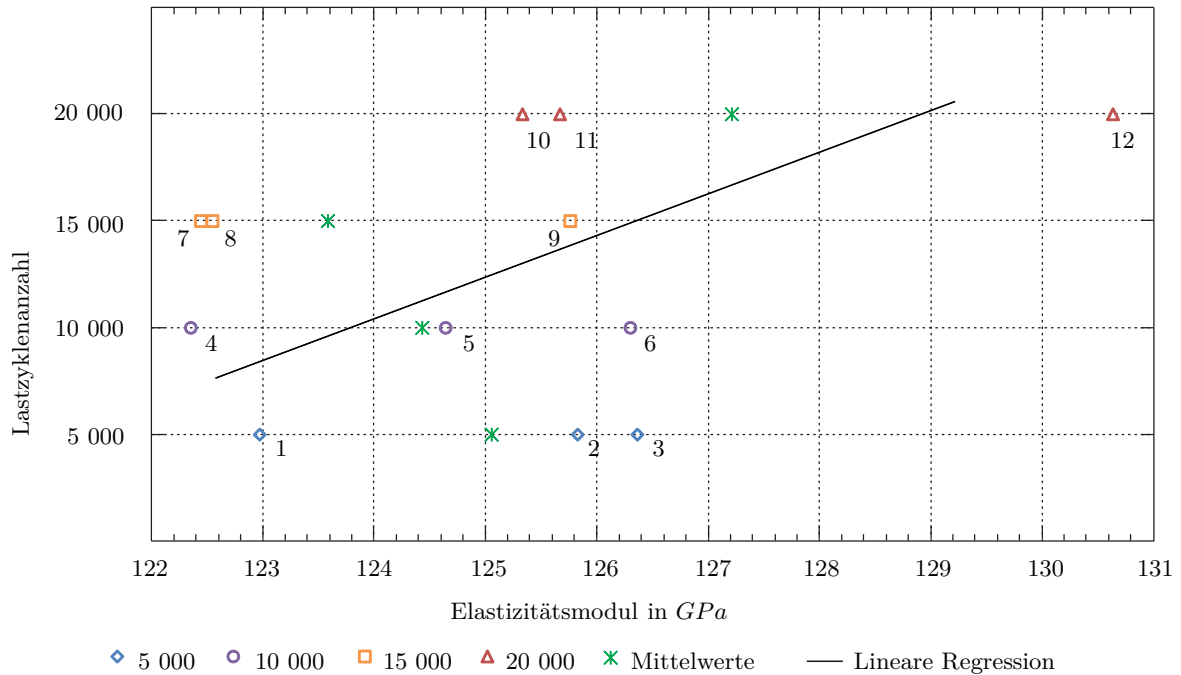


Abbildung 3.10.: Gemessene Elastizitätsmodule der zugeschnittenen Proben

mit den jeweiligen drei Proben. Dabei lassen sich zunächst zwei Aussagen treffen. Zum Einen schwanken innerhalb gleicher Lastzyklenzahlen die gemessenen Elastizitätsmodule. Zum Anderen ist aus einer linearen Regression kein plausibler linearer Zusammenhang zwischen der Lastzyklenzahl und dem Elastizitätsmodul festzustellen. Die Streuung in den gemessenen Elastizitätsmodulen erklärt sich durch die unterschiedliche Anzahl an Initialschäden je Probe. Es ist nicht anzunehmen, dass in jeder Probe die gleiche Anzahl an Vernähungen reißt, von denen ausgehend sich die Risse durch die Struktur ausbreiten. Zudem lässt sich ohne Korrelation mit dem Elastizitätsmodul nicht sagen, ob vorwiegend mikro- oder makrostrukturelle Schädigungen vorliegen. An der Regression zeigt sich, dass deren positive Steigung nicht der Annahme entspricht, dass mit steigender Lastzyklenzahl der Elastizitätsmodul abnimmt. Ein Grund dafür liegt ebenfalls in den verschiedenen Schädigungsgrößen. Es besteht die Möglichkeit, dass in einigen Proben überwiegend mikrostrukturelle Risse vorliegen, welche sich im Elastizitätsmodul nicht widerspiegeln. Mit Blick auf die Daten aus Abbildung 3.8 zeigt sich bereits für Probe 8, dass diese mit dem größten Nichtlinearitätsparameter einen der niedrigsten Elastizitätsmodule aufweist. Daraus lässt sich auf überwiegend makrostrukturelle Schädigungen in der Probe schließen, an denen höherharmonische Moden generiert werden und die zu einer Verringerung des Elastizitätsmoduls beitragen. Zur weiterführenden korrelierten Betrachtung der Nichtlinearitätsparameter und der Elastizitätsmodule erfolgt im nächsten Schritt eine Korrelationsanalyse aller Proben.

3.5. Korrelationsanalyse

Ein möglicher Zusammenhang zwischen den mechanischen Eigenschaften und den Eigenschaften der nichtlinearen Wellenausbreitung resultiert aus der Bestimmung einer Regressionsgeraden. Die Größe zur Beschreibung der mechanischen Eigenschaften über den Elastizitätsmodul E wird dabei mit dem normierten Nichtlinearitätsparameter ζ korreliert. Quantitative Aussagen zur Regression sind aufgrund der geringen Datenmenge nicht möglich. Sie geben jedoch Aufschluss über mögliche Tendenzen, mit denen beide Größen korrelieren. Die Bestimmung der Regressionsgeraden aus allen Messpunkten erfolgt nach der Methode der kleinsten Quadrate und bildet den ersten Schritt in der Auswertung der Messpunkte. Abbildung 3.11 zeigt zunächst die Regressionsgerade bezüglich aller Messpunkte. Das Auftragen

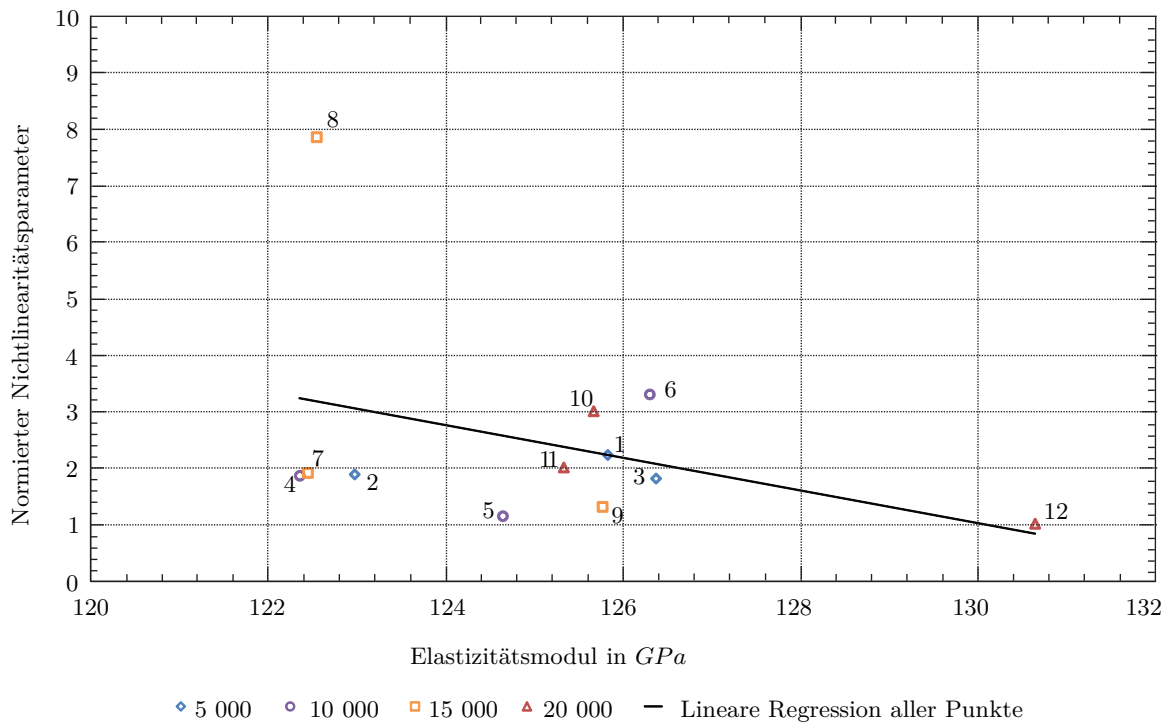


Abbildung 3.11.: Korrelationsanalyse bezüglich aller Proben zwischen ζ und E

des Nichtlinearitätsparameters gegenüber dem Elastizitätsmodul zeigt für Probe 8 deutlich den bereits aus den Abbildungen 3.8 und 3.10 geschlossenen Zusammenhang. Der auffallend große normierte Nichtlinearitätsparameter bei geringem Elastizitätsmodul gegenüber den anderen Proben weist darauf hin, dass überwiegend makrostrukturelle Schädigungen vorliegen. Weiterhin zeigt sich, dass Probe 12 mit der größten Lastzyklenzahl den größten Elastizitätsmodul aufweist. Zusätzlich besitzt diese Probe den geringsten normierten Nichtlinearitätsparameter. Somit liegen vergleichsweise weniger Schädigungen sowohl mikro- als auch makrostruktureller Art vor. Es wird die Aussage bestätigt, dass die Lastzyklenzahl kein Maß dafür ist, inwieweit eine Struktur geschädigt ist.

Die Kernaussage aus Abbildung 3.11 spiegelt sich im Verlauf der Regressionsgeraden wieder. Daran zeigt sich, dass ein hoher Elastizitätsmodul mit einem geringen normierten Nichtlinearitätsparameter einhergeht. Das entspricht den Erwartungen, da die Nichtlinearitäten als Maß der Schädigungen dienen. Je weniger Schädigungen in der Struktur vorhanden sind, desto höher ist die verbliebene Festigkeit. Mit der Regressionsgerade über alle Punkte wird

zunächst nur eine grobe Abschätzung beschrieben, da noch nicht abgesichert ist, wie viele Messpunkte sich tatsächlich durch diese abbilden lassen. Es fehlt dabei die Berücksichtigung der Messungenauigkeiten der Versuche.

Für diese Messungenauigkeiten werden bezüglich beider Größen daher die entsprechenden Fehlerfortpflanzungen berechnet. Die Fehlerfortpflanzungen geben einen Wahrscheinlichkeitsbereich um den gemessenen Wert an. Der wahre Wert eines Messpunktes liegt dann zu 100 % innerhalb des jeweiligen Bereiches. Verläuft die Regressionsgerade durch einen solchen Bereich, lässt sich der wahre Wert des Messpunktes über diese abbilden. Eine weitere Regressionsgerade, die die Wahrscheinlichkeitsbereiche der Messpunkte einbezieht, bildet somit einen präziseren linearen Zusammenhang zwischen dem Elastizitätsmodul und dem normierten Nichtlinearitätsparameter ab.

Die Berechnung der jeweiligen Fehlerfortpflanzungen ergibt sich aus den Versuchsdurchführungen. Der Elastizitätsmodul resultiert dabei aus dem bereits beschriebenen einachsigen Zugversuch, bei dem die Längenänderungen an den Proben gemessen werden. Die Bestimmungsgleichung ist eine Funktion verschiedener Messgrößen und ergibt sich über

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{\sigma}{\varepsilon} \\
 &= \frac{F \cdot l}{Q \cdot \Delta l} \\
 &= \frac{(F_{En} - F_{St}) \cdot l}{d \cdot b \cdot (l_{En} - l_{St})}.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Die Indizes St und En stehen dabei für den ersten bzw. letzten Messpunkt der Kurve, aus dem die Elastizitätsmodulermittlung folgt. F gibt die angreifenden Zugkräfte an. Die Größe d bildet die Dicke und b die Breite der jeweiligen Probe ab. Die Versuchslänge ist über l angegeben. Die erwähnten Messgrößen sind voneinander unabhängig, haben mit ihren jeweiligen Unsicherheiten jedoch einen Einfluss auf den endgültigen Fehler. So können sich die Unsicherheiten verschiedener Größen aufheben oder verstärken. Zur Bestimmung des endgültigen Fehlers $f_{E,n}$ eines Elastizitätsmoduls E für eine Probe n wird das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz angewandt

$$f_{E,n} = \sqrt{\sum_{k=1}^K \left(\frac{\partial E_n}{\partial x_k} \cdot \Delta s_k \right)^2}. \tag{3.2}$$

Die partiellen Ableitungen beschreiben das Verhalten der Funktion an dem Messpunkt aufgrund der jeweiligen abgeleiteten Größe. Über die Multiplikation mit den entsprechenden Unsicherheiten Δs_k erhält jede Messgröße eine Gewichtung am endgültigen Fehler. Über

den Wurzelausdruck wird dem gegenseitigen Aufheben von Unsicherheiten begegnet. Einsetzen von (3.1) in (3.2) führt auf

$$\begin{aligned}
 f_{E,n} = & \sqrt{\left(\frac{l}{db(l_{En} - l_{St})} \Delta s_1\right)^2 + \left(\frac{l}{db(l_{En} - l_{St})} \Delta s_2\right)^2} \dots \\
 & + \frac{\left(\frac{(F_{En} - F_{St})}{db(l_{En} - l_{St})} \Delta s_3\right)^2 + \left(\frac{(F_{En} - F_{St})l}{d^2b(l_{En} - l_{St})} \Delta s_4\right)^2}{\dots} \\
 & + \frac{\left(\frac{(F_{En} - F_{St})l}{db^2(l_{En} - l_{St})} \Delta s_5\right)^2 + \left(\frac{(F_{En} - F_{St})l}{db(l_{En} - l_{St})^2} \Delta s_6\right)^2}{\dots} \\
 & + \left(\frac{(F_{En} - F_{St})l}{db(l_{En} - l_{St})^2} \Delta s_7\right)^2. \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

Mit Gleichung (3.3) wird der endgültige Fehler einer Elastizitätsmodulmessung aufgrund aller Unsicherheiten der beteiligten Messgrößen beschrieben. Da die Versuchslänge im Versuch durch die Prüfvorrichtung vorgegeben wird und die Versuche zudem kraftgeregelt ablaufen, liegen für diese Größen keine Standardabweichungen vor. Für die Unsicherheiten $\Delta s_1 - \Delta s_3$ werden daher die entsprechenden Messgenauigkeiten verwendet. Für $\Delta s_4 - \Delta s_7$ wird sich der Standardabweichungen bedient, die aus wiederholten Messungen resultieren. Die für alle Proben gültigen und verwendeten Messgenauigkeiten sind in Tabelle 3.4 aufgeführt. Die Standardabweichungen für jede Probe n sind der Tabelle 3.5 zu entnehmen. Dabei ist zu beachten, dass aufgrund der Längenmessung l_{St} bei 1 000 N nahezu keine Längenänderungen messbar sind. Die daraus resultierende Standardabweichung Δs_7 geht damit gegen Null. Für

Tabelle 3.4.: Messgenauigkeiten in der Fehlerfortpflanzung des Elastizitätsmoduls

Bezug	Unsicherheit	Wert	Dimension
F_{En}	Δs_1	15.6	$[N]$
F_{St}	Δs_2	1.3	$[N]$
l	Δs_3	0.6	$[mm]$

den normierten Nichtlinearitätsparameter wird auf die Gleichungen (2.82) und (2.81) verwiesen. Der Fehler bei der Bestimmung der Amplituden ist dabei ebenfalls mit Unsicherheiten behaftet. Die Unsicherheiten können jedoch aufgrund des Versuchsaufbaus nicht komplett über Standardabweichungen oder bekannte Messgenauigkeiten abgedeckt werden. Das liegt in dem bereits erwähnten Grund, dass ein wiederholtes Entfernen der Piezokeramiken die Ergebnisse verfälschen würde. Äußere Einflüsse, wie beispielsweise der Einfluss der Klebeschicht lässt sich damit nicht abdecken. Aufgrund dieser Problematik wird ein maximaler Fehler bei der Bestimmung des normierten Nichtlinearitätsparameters angenommen. Die Berechnung des endgültigen Fehlers $f_{\zeta,n}$ erfolgt für jede Probe n nach

$$f_{\zeta,n} = \sum_{k=1}^K \left| \frac{\partial \zeta_n}{\partial y_k} \right| \cdot \Delta s_k. \tag{3.4}$$

Tabelle 3.5.: Standardabweichungen in der Fehlerfortpflanzung des Elastizitätsmoduls

Bezug n	d Δs_4 [mm]	b Δs_5 [mm]	l_{En} Δs_6 [mm]	l_{St} Δs_7 [mm]
1	0.0074	0.0374	0.002	0
2	0.0170	0.0510	0.001	0
3	0.0190	0.0583	0.001	0
4	0.0056	0.0510	0.001	0
5	0.0037	0.1602	0.001	0
6	0.0216	0.0374	0.001	0
7	0.0074	0.0200	0.003	0.001
8	0.0065	0.0374	0.005	0.001
9	0.0031	0.0200	0.002	0
10	0.0150	0.0316	0.001	0
11	0.0247	0.0800	0.001	0
12	0.0203	0.0400	0.001	0

Das Einsetzen von (2.82) in (3.4) und unter Berücksichtigung eines Fehlers von $\pm 10\%$ resultiert ein maximaler Fehler des normierten Nichtlinearitätsparameters einer entsprechenden Probe

$$f_{\zeta,n} = \pm 0.2 \cdot \zeta_n. \quad (3.5)$$

Unter Berücksichtigung der angeführten Fehlerfortpflanzungen ergibt sich das Diagramm zur Korrelationsanalyse aus Abbildung 3.12. Für die Proben 8 und 12 wurden zu den Fehlerkreuzen die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsbereiche angefügt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind diese für alle anderen Proben nicht dargestellt. Zusätzlich dient Abbildung 3.13 der Darstellung der Messpunkte im Elastizitätsmodulbereich von $122.0 - 128.0 \text{ GPa}$ bei normierten Nichtlinearitätsparametern von $1 - 4$. Dabei ist zu erkennen, dass die lineare Regressionsgerade mittels kleinster Quadrate aus allen Proben vier Messpunkte, zuzüglich dem Messpunkt 12 aus Abbildung 3.12, abbildet. Die lineare Regression unter Berücksichtigung der Fehlerfortpflanzung bildet inklusive Messpunkt 12 acht Messpunkt ab.

Diese zweite Regressionsgerade bestätigt damit die Tendenz, die bereits in einer ersten Regression über alle Punkte abgeschätzt werden konnte. Mit einem Abfall des Elastizitätsmoduls aufgrund der Schädigungen in der Struktur geht eine Zunahme des normierten Nichtlinearitätsparameters einher.

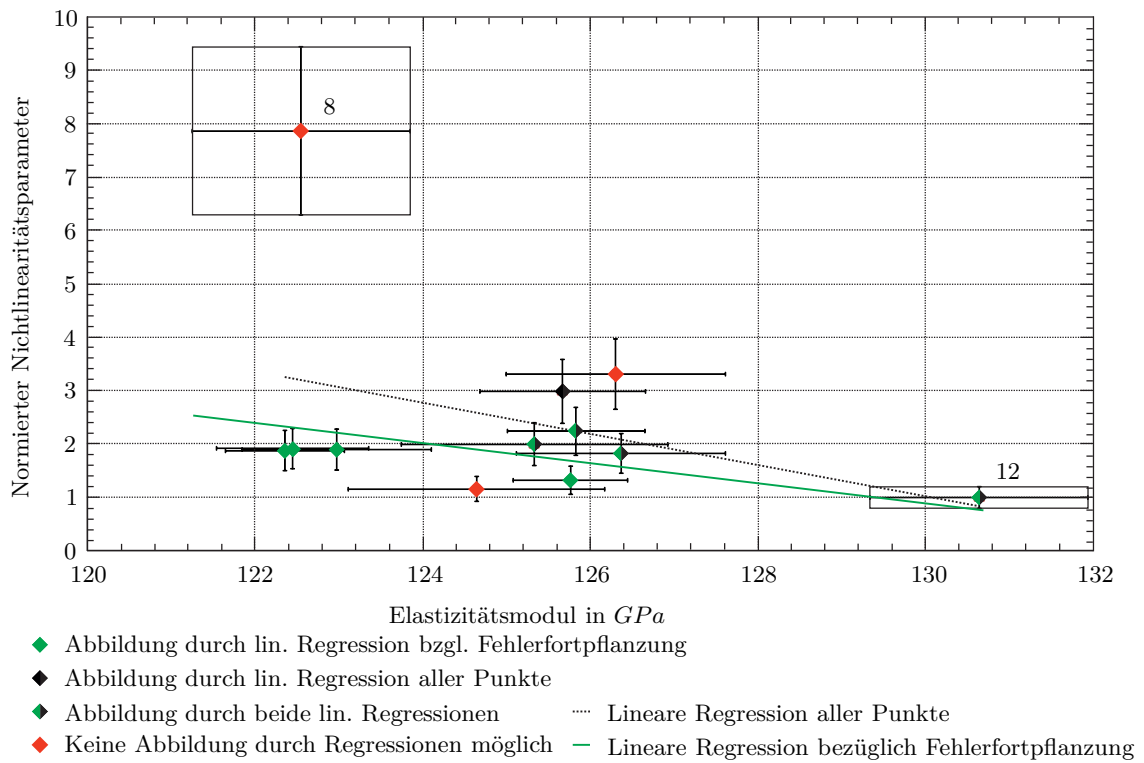


Abbildung 3.12.: Korrelationsanalyse mit Fehlerfortpflanzung bezüglich aller Proben zwischen ζ und E

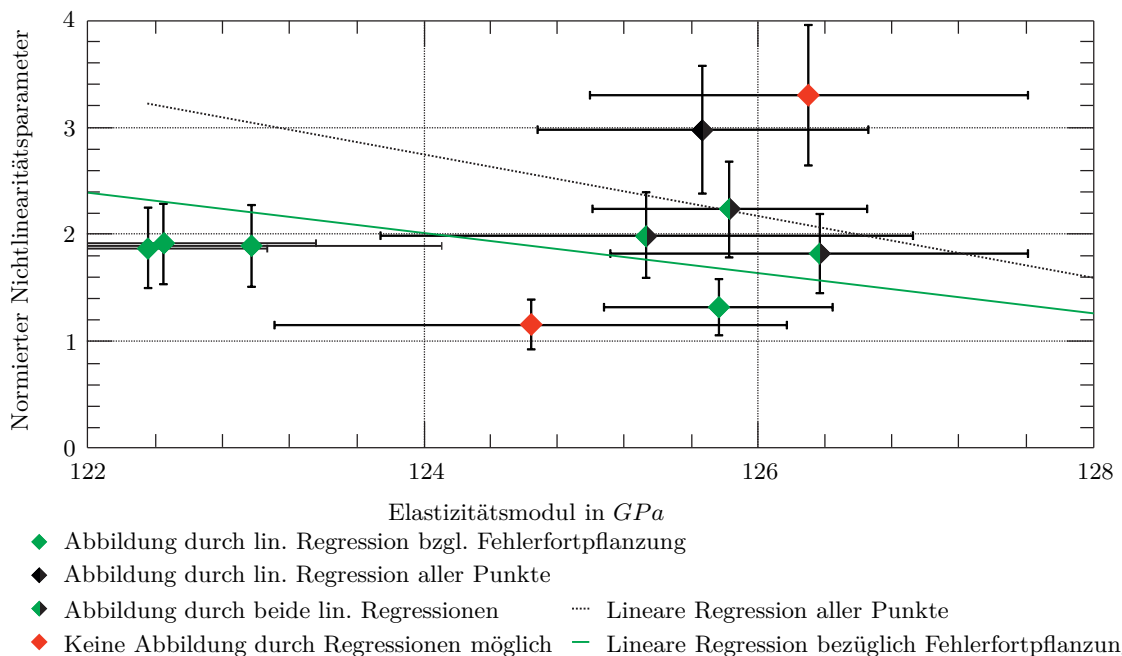


Abbildung 3.13.: Ausschnitt der Korrelationsanalyse mit Fehlerfortpflanzung bezüglich aller Proben zwischen ζ und E

4. Zusammenfassung und Ausblick

In den praktischen Teilen der Arbeit konnte gezeigt werden, dass zwischen der Werkstoffdegradation und den nichtlinearen Wellenausbreitungseigenschaften ein linearer Zusammenhang zu erkennen ist. Das Abbilden der Werkstoffdegradation über abnehmende Elastizitätsmodul zeigt eine geringfügige Zunahme im normierten Nichtlinearitätsparameter. Dieser ist ein Maß für die nichtlinearen Wellenausbreitungseigenschaften der LAMB-Wellen in den untersuchten unidirektionalen Faserverbundstrukturen. Die nichtlinearen Wellenausbreitungseigenschaften werden durch die Generierung der Höherharmonischen aus der primärangeregten Mode repräsentiert. Mit Zunahme der Nichtlinearitäten aufgrund von mikro- und makrostrukturellen Schädigungen wächst der akustische Nichtlinearitätsparameter an. Gleichzeitig schwächen besonders makrostrukturelle Schädigungen die Struktur, was zur Abnahme des Elastizitätsmoduls führt. Abbildung 4.1 zeigt den ermittelten linearen Zusammenhang. Neben der Regression aller Messpunkte findet sich ebenfalls die Regression mit Berücksichtigung der Fehlerfortpflanzung. Durch das Einbeziehen der Fehlerfortpflanzungen

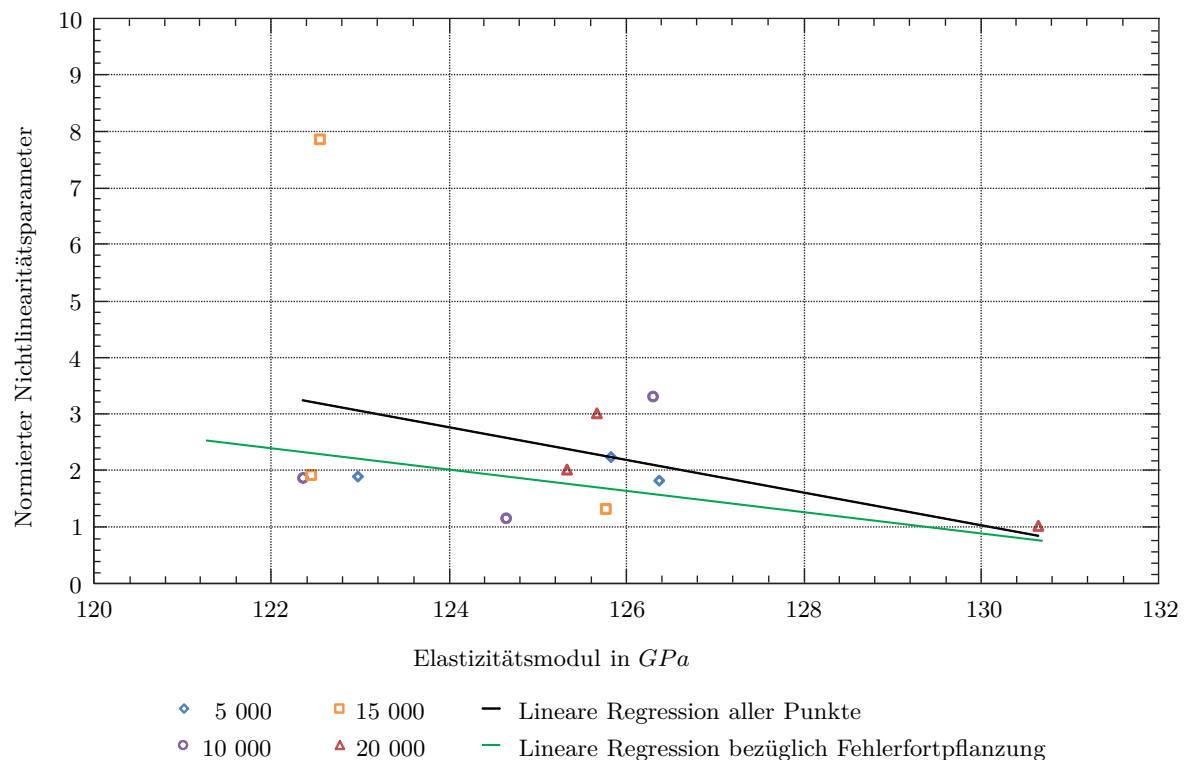


Abbildung 4.1.: Gegenüberstellung der Korrelationsanalysen mit Fehlerfortpflanzung bezüglich aller Proben zwischen ζ und E

lassen sich acht Messpunkte über die Regression ausdrücken, während es ohne Fehlerfortpflanzung fünf Messpunkte sind. Die Tendenzen beider Regressionsgeraden entspricht den Erwartungen, dass mit zunehmender Werkstoffdegradation die Nichtlinearitäten in Form von Schädigungen in der Struktur zunehmen. Dadurch nimmt der normierte Nichtlinearitätsparameter zu und die Festigkeit in Form des Elastizitätsmoduls ab.

Alternative Möglichkeiten, die Piezokeramiken auf die Proben zu bringen, um ein wiederholtes Entfernen und erneutes Anbringen zu ermöglichen, führen zu einer Präzisierung der Fehlerfortpflanzung bezüglich des normierten Nichtlinearitätsparameters. Mit einer solchen Möglichkeit ergäbe sich des Weiteren, dass die Proben bereits vor der Einbringung von

Schädigungen auf die nichtlineare Wellenausbreitung hin zu untersuchen sind. Das führt zu vergleichenden Aussagen der nichtlinearen Wellenausbreitung jeder einzelnen Probe vor und nach der Schädigung.

Weiterhin empfiehlt es sich, Ultraschalluntersuchungen zu vereinzelt Proben durchzuführen. So könnte die an Probe 8 getroffene Aussage bestätigt werden, dass maßgeblich makrostrukturelle Schädigungen vorliegen.

Eine weitere Vertiefung in die Problematik könnte dem Umstand dienen, dass nur ein kleiner Bereich der Proben zwischen den Piezokeramiken Aussagen zur nichtlinearen Wellenausbreitung ermöglichen. Damit einhergehend könnten Versuche in beliebigen Winkeln zur Faserrichtung durchgeführt werden. Die Steifigkeitssprünge, die dann durch die Fasern hervorgerufen werden, würden jedoch die gezielte Generierung der höherharmonischen Moden erschweren.

Im Allgemeinen reichen die vorgenommenen Untersuchungen an zwölf Proben aus, um die erwarteten Tendenzen zu bestätigen, dass zwischen der Werkstoffdegradation und dem nichtlinearen Ausbreitungsverhalten von LAMB-Wellen ein linearer Zusammenhang besteht. Zur Ausarbeitung eines aussagekräftigen Modells ist jedoch eine Vielzahl weiterer Versuche nötig. Ein solches Modell bietet anschließend die Möglichkeit neue Inspektionsmethoden zu entwickeln. Eine Anregung der Bauteilstruktur in definierten Frequenzen und das Messen des Antwortsignals führt auf den normierten Nichtlinearitätsparameter, was Aussagen zu Schädigungen und der vorhanden Restfestigkeit ermöglicht.

Literaturverzeichnis

- [1] Prof. Dr.-Ing. R. Lammering. *Mechanik III - Einführung in die Elastizitätstheorie und numerische Mechanik [Vorlesungsskriptum]*. Institut für Mechanik, Helmut-Schmidt-Universität / Univ. d. Bundeswehr Hamburg, 2013.
- [2] N. Rauter; M. N. Neumann; R. Lammering; B. Hennings; A. Asmus. *Elastische Wellen in Laminaten aus Faserverbundwerkstoffen [unveröffentlicht]*. Helmut-Schmidt-Universität / Univ. d. Bundeswehr Hamburg, 2013.
- [3] V. Ngoc Nguyen. *Erstellung von Dispersionsdiagrammen zur Charakterisierung der Ausbreitungseigenschaften von LAMB-Wellen in unidirektionalen Faserverbundschichten [Studienarbeit]*. Institut für Mechanik, Helmut-Schmidt-Universität / Univ. d. Bundeswehr Hamburg, 2014.
- [4] N. Rauter. *Ermittlung des Maßes der Nichtlinearität einer Platte mittels experimenteller Untersuchungen linearer und nichtlinearer Ausbreitungseigenschaften von LAMB-Wellen [Masterthesis]*. Institut für Mechanik, Helmut-Schmidt-Universität / Univ. d. Bundeswehr Hamburg, 2012.
- [5] H. Mang; G. Hofstetter. *Festigkeitslehre*. Springer Vieweg, 2013.
- [6] J. Altenbach; H. Altenbach. *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. B. G. Teubner Stuttgart, 1994.
- [7] V. K. Chillara; C. J. Lissenden. *Review of nonlinear ultrasonic guided wave non-destructive evaluation: theory, numerics, and experiments*. Society of Photo-Optical-Instrumentation Engineers (SPIE), 2015.
- [8] Priv. Doz. Dr.-Ing. H. Parisch. *Festkörper-Kontinuumsmechanik*. B. G. Teubner Stuttgart, 2003.
- [9] H. Lamb. *On Waves in an Elastic Plate*. Royal Society, 1917.
- [10] J. L. Rose. *Ultrasonic Waves in Solid Media*. Cambridge University Press, 1999.
- [11] B. A. Alexander. *Acoustic Fields and Waves in Solids*. Robert E. Krieger Publishing Company, 1990.
- [12] Y. Liu; V. K. Chillara; C. J. Lissenden. *On selection of primary modes for generation of strong internally resonant second harmonics in plate*. Elsevier Science Ltd., 2013.
- [13] C. Bermes. *Generation and detection of nonlinear Lamb waves for the characterization of material nonlinearities*. School of Civil and Environmental Engineering, Georgia Institute of Technology, 2006.
- [14] J. H. Cantrell. *Substructural organization, dislocation plasticity and harmonic generation in cyclically stressed wavy slip metals*. The Royal Society, 2004.
- [15] Prof. Dr.-Ing. A. Mertins. *Signaltheorie*. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2013.
- [16] Prof. Dr.-Ing. R. Ahrens. *Angewandte Schwingungslehre [Vorlesungsskriptum]*. Department Fahrzeugtechnik und Flugzeugbau / Hochschule für angewandte Wissenschaften Hamburg, 2014.

- [17] J. N. Kutz. *Data-Driven Modeling & Scientific Computation*. Oxford University Press, 2013.
- [18] V. Ngoc Nguyen. *Berechnung und Analyse von Dispersionsdiagrammen von LAMB-Wellen für geschichtete Faserverbundstrukturen mit experimenteller Verifikation [Masterthesis]*. Institut für Mechanik, Helmut-Schmidt-Universität / Univ. d. Bundeswehr Hamburg, 2014.

A. Anhang

A.1. Lineares Materialverhalten

Nachfolgend wird ein Überblick über lineares Materialverhalten gegeben. Ziel ist es, eine Beziehung zwischen den Verzerrungen und Spannungen herzustellen. Diese Beziehung geht aus der Belegung des Elastizitätstensors (Stofftensors) hervor, weshalb die entsprechenden Stofftensoren betrachtet werden. Das Hookesche Gesetz stellt eine solche Beziehung her. Im Falle linearer Geometrie, folgt lineares Materialverhalten, da die Verschiebungen zweiter Ordnung im linearisierten Greenschen Verzerrungstensor vernachlässigt werden. Durch das Hookesche Gesetz werden an einem Körper vorliegende Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ über den vierstufigen Stofftensor \mathbb{C} in Zusammenhang zu den auftretenden Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}$ gesetzt. Für den allgemeinen elastischen Festkörper lässt sich das Hookesche Gesetz wie folgt darstellen

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (\text{A.1})$$

An Gleichung (A.1) wird deutlich, dass der Steifigkeitstensor \mathbb{C} entscheidend ist, welche Verzerrungen zu welchen Spannungen führen.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Eine andere Schreibweise des Hookeschen Gesetzes lässt sich mit dem Nachgiebigkeitstensor \mathbb{S} realisieren. Der Nachgiebigkeitstensor bildet die Inverse zum Stofftensor. Es gilt

$$\mathbb{C} : \mathbb{S} = \mathbf{I}. \quad (\text{A.3})$$

Dabei ist \mathbf{I} der Einheitstensor vierter Stufe. Der Nachgiebigkeitstensor findet bei der angewandten Berechnung von Dispersiondiagrammen Verwendung. Damit folgt für das Hookesche Gesetz

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbb{S} : \boldsymbol{\sigma}. \quad (\text{A.4})$$

Der Nachgiebigkeitstensor \mathbb{S} verknüpft nun die Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ und Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Anisotroper Stofftensor

Ein Stofftensor mit 36 beschreibenden Größen, wie er in Gleichung (A.2) dargestellt ist, lässt sich aufgrund der linearen Materialtheorie und aus den Potentialeigenschaften der Formänderungsenergie zum anisotropen Stofftensor vereinfachen [4, S. 76]. Damit wird ein allgemeingültiger Stofftensor für anisotropes Materialverhalten mit 21 beschreibenden Größen bei voller Besetzung erzeugt

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & \text{sym.} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

In diesen gehen durch die volle Belegung alle Verzerrungen in alle Spannungen ein. Am Beispiel der ersten Hauptspannung σ_{11} folgt

$$\sigma_{11} = C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{12} + C_{13}\varepsilon_{13} + C_{14}\varepsilon_{32} + C_{15}\varepsilon_{31} + C_{16}\varepsilon_{21}. \quad (\text{A.6})$$

Somit führt jede Verzerrung, unabhängig von der wirkenden Richtung, zu jeder Spannung im Körper.

Monokliner Stofftensor

Fügt man dem Material eine Symmetrieebene hinzu, ergibt sich ein monoklines Materialverhalten. Ein Beispiel für Monoklinie ist in Abbildung A.1 an einer UD-Einzelschicht dargestellt. Das abgebildete Koordinatensystem ist ein so genanntes „off-axis-System“, welches nicht par-

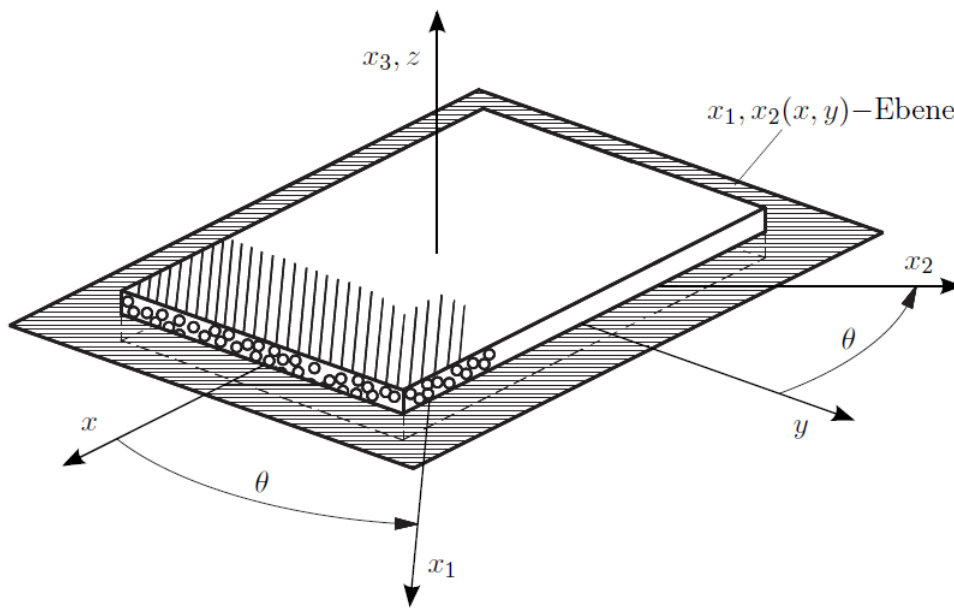


Abbildung A.1.: Monoklinie bei einer UD-Einzelschicht [3]

allel zu der Faserrichtung der UD-Einzelschicht verläuft. Die Koordinaten x, y, z lassen sich mit dem Winkel θ in ein „on-axis-System“ mit den Koordinaten x_1, x_2, x_3 transformieren. Dabei liegen die Faserrichtung und das Bezugskordinatensystem parallel. Im off-axis-System vereinfacht sich der Stofftensor zu 13 beschreibenden Größen bei 20 besetzten Elementen

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ & & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ & sym. & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Die Nebenelemente C_{45}, C_{16}, C_{26} und C_{36} sorgen dabei für eine Zug-Schub-Kopplung zwischen den Spannungen und Verzerrungen.

Transversal-isotroper Stofftensor

Unter Einführung zwei weiterer Symmetrieebenen liegt transversal-isotropes Materialverhalten vor. Als Beispiel für Transversal-Isotropie wird Abbildung A.2 hinzugezogen. Bei die-

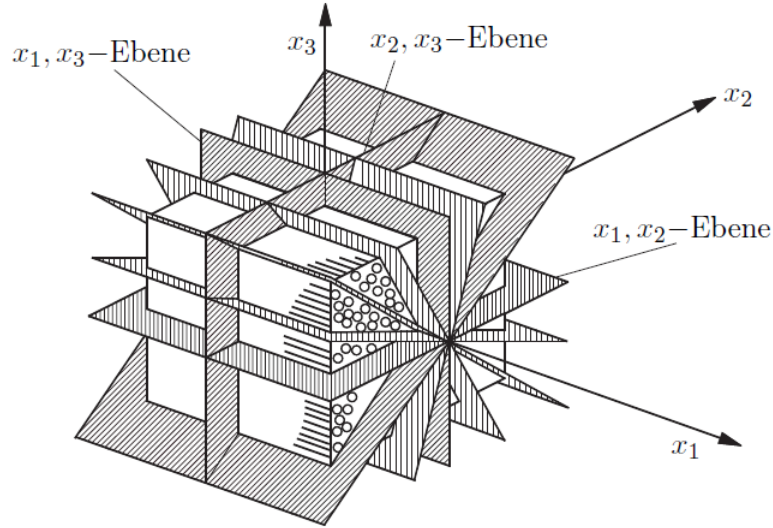


Abbildung A.2.: Transversal-Isotropie bei einer UD-Einzelschicht [3]

sem Fall liegen Bezugskordinatensystem und Faserrichtung parallel zueinander, weshalb ein „on-axis-System“ vorliegt. Der Stofftensor vereinfacht sich bei Transversal-Isotropie zu fünf beschreibenden Größen bei der Besetzung von 12 Elementen

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & sym. & & \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{55} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Die Nebenelemente, die zur Zug-Schub-Kopplung bei Monoklinie führen, verschwinden für den transversal-isotropen Fall.

Isotroper Stofftensor

Liegen in einem Material hingegen unendlich viele Symmetrieebenen vor, wird isotropes Materialverhalten beschrieben. Der Stofftensor ist weiterhin mit 12 Elementen besetzt, wird jedoch durch zwei Größen beschrieben. Diese beschreibenden Größen werden als Lamé-Konstanten λ und μ bezeichnet, welche mit dem Elastizitätsmodul und der Querkontraktionszahl ν in folgendem Zusammenhang stehen

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad (\text{A.9})$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (\text{A.10})$$

Für den isotropen Stofftensor folgt

$$\mathbb{C} = \frac{\lambda}{\nu} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 - \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 - \nu & 0 & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

Auch für den isotropen Stofftensor tritt keine Zug-Schub-Kopplung auf. Des Weiteren ist das Materialverhalten vollständig richtungsunabhängig.

Koordinatentransformation

Um im weiteren Verlauf die Wellenausbreitungsrichtungen zu betrachten, die weder parallel noch orthogonal zur Faserrichtung verlaufen, wird eine Transformation des Stofftensors benötigt. Diese Transformation bildet den Stofftensor auf die vorliegende Betrachtung ab und ergibt sich nach [18, S. 11] aus

$$\mathbf{T}_{trans} = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & 0 & 0 & 0 & 2 \cos \varphi \sin \varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & 0 & 0 & 0 & -2 \cos \varphi \sin \varphi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ -\cos \varphi \sin \varphi & \cos \varphi \sin \varphi & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \end{bmatrix}, \quad (\text{A.12})$$

mit

$$\mathbb{C} = \mathbf{T}_{trans} \mathbb{C}_0 \mathbf{T}_{trans}^T, \quad \mathbb{C}_0 = \mathbb{C} \text{ für Faserwinkel } \varphi = 0^\circ. \quad (\text{A.13})$$

A.2. Herleitung der Dispersionsbeziehungen

Der nachfolgende Anhang beschreibt die Herleitung für die Dispersionsbeziehungen mit unterschiedlichem Materialverhalten. Die Dispersionsbeziehungen leiten sich auf Basis der linearen Wellenausbreitung und des linearisierten Verzerrungstensors ab. Das bedeutet, dass Ausgangs- und Momentankonfiguration nicht unterschieden werden müssen. Ausgehend von allgemeinen Ansätzen erfolgt die Betrachtung anisotropem Materialverhaltens hin zu isotropem. Die Ausführungen sind angelehnt an die Arbeiten von [2] und sind zudem in [10] zu finden.

Anisotrope Einzelschichten

Als allgemeiner Ansatz zur Beschreibungen in der Kontinuumsmechanik gelten die Bilanzgleichungen. Im speziellen Fall der Wellenausbreitung in Festkörpern erfolgt die Anwendung der Impulsbilanz, wie sie bereits in 2.2 beschrieben wurden.

Zur Beschreibung der Dispersionsbeziehung gilt im Allgemeinen der Ansatz, die Spannungen durch Verschiebungen auszudrücken. Im Falle anisotropen Materialverhaltens liegt ein allgemeines Stoffgesetz vor. Dieses berücksichtigt die Richtungsabhängigkeit des anisotropen Materials. Zur übersichtlichen Darstellung wird im Folgenden die Komponenten-Basis-Notation verwendet und die Einsteinsche Summenkonvention berücksichtigt. Die Impulsbilanz aus (2.25) bildet die Grundlage zur Beschreibung der Wellenausbreitung

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i. \quad (\text{A.14})$$

Ausgangspunkt für das allgemeine Stoffgesetz ist ein über den Ort konstanter Stofftensor C_{ijkl} , wodurch alle Ortsableitungen dessen zu Null werden. Das allgemeine Stoffgesetz ist beschrieben durch

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (\text{A.15})$$

Einsetzen des linearisierten Greenschen Verzerrungstensors (2.11) in das allgemeine Stoffgesetz (A.15) und weiter in die Impulsbilanz (A.14) führt auf

$$C_{ijkl} \left[\frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}) \right]_j + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i. \quad (\text{A.16})$$

Stoff- und Spannungstensor sind symmetrisch, weshalb die Indizes vertauscht werden können. Des Weiteren werden die Volumenkräfte vernachlässigt, was zu einer homogenen Differentialgleichung führt

$$C_{ijkl} u_{l,kj} - \rho \ddot{u}_i = 0. \quad (\text{A.17})$$

Als Ansatz für die Verschiebungen dient eine harmonische Welle für den dreidimensionalen Raum

$$u_i = A p_i e^{i(k_j x_j - \omega t)}. \quad (\text{A.18})$$

Dabei sei A die Amplitude, p_i der Polarisationsvektor, der die Richtung der Partikelbewegung angibt und k_j der Wellenzahlvektor, der die Ausbreitungsrichtung der Welle beschreibt. Abbildung A.3 zeigt, dass ohne Einschränkung der Allgemeinheit durch Koordinatentransfor-

mation das Koordinatensystem immer so gedreht werden kann, dass die Wellenausbreitung in der $x - z$ -Ebene liegt. Damit vereinfacht sich der Wellenzahlvektor zu

$$k_j = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = k_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = kn_j = k \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.19})$$

mit

$$\alpha = \tan \beta, \quad n_j \text{ Ausbreitungsrichtungsvektor.}$$

Durch das Bilden der Orts- und Zeitableitung des Ansatzes (A.18) folgt

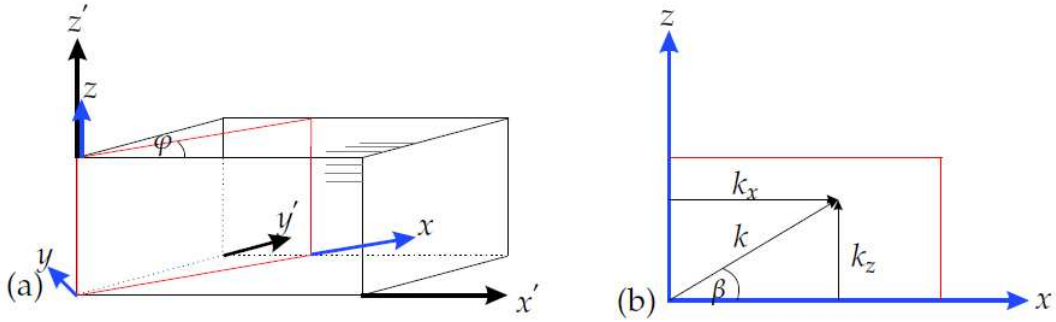


Abbildung A.3.: Koordinatentransformation für Wellenausbreitung in x - z -Ebene [2]

$$\begin{aligned} u_{l,kj} &= Ap_i e^{i(k_j x_j - \omega t)} \overset{-1}{\cancel{\gamma^2}} \overset{-1}{\cancel{k_k k_j}} \\ &= -u_l k^2 n_k n_j, \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

und

$$\begin{aligned} \ddot{u}_i &= Ap_i e^{i(k_j x_j - \omega t)} \overset{-1}{\cancel{\gamma^2}} (-\omega)^2 \\ &= -u_i \omega^2. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Einsetzen von (A.20) und (A.21) in (A.17) ergibt

$$\begin{aligned} \rho c_p^2 u_i - \gamma_{il} u_l &= 0, \\ \text{mit } c_p &= \frac{\omega}{k}, \quad \gamma_{il} = C_{ijkl} n_k n_j. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Unter Verwendung von

$$u_i = \delta_{il} u_l \begin{cases} \delta = 1, & \text{wenn } i = l, \\ \delta = 0, & \text{wenn } i \neq l, \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

und bei Berücksichtigung, dass nur nicht-triviale Lösungen gesucht werden, also $A e^{i(k_j x_j - \omega t)} \neq 0$, folgt die „Christoffelgleichung“

$$[\rho c_p^2 \delta_{il} - \gamma_{il}] p_l = 0. \quad (\text{A.24})$$

Das homogene Gleichungssystem lässt sich in Matrixschreibweise darstellen als

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} - \rho c_p^2 & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ & \gamma_{22} - \rho c_p^2 & \gamma_{23} \\ \text{sym.} & & \gamma_{33} - \rho c_p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.25})$$

mit

$$\gamma_{il} = C_{ijkl} n_k n_j. \quad (\text{A.26})$$

Dieses ist für nicht-triviale Lösungen ausschließlich erfüllt, wenn die Determinante zu Null wird. Das Aufstellen der Determinante führt im allgemein anisotropen Fall, durch den vollbesetzten Stofftensor auf ein Polynom sechsten Grades mit geraden und ungeraden Exponenten

$$f_o + f_1 \alpha + f_2 \alpha^2 + f_3 \alpha^3 + f_4 \alpha^4 + f_5 \alpha^5 + f_6 \alpha^6 = 0. \quad (\text{A.27})$$

Die Lösung dieses Problems fordert hohen numerischen Rechenaufwand. Die Betrachtung von Faserverbunden zeigt jedoch, dass Vereinfachungen vorgenommen werden können, in denen Materialsymmetrien den Rechenaufwand reduzieren. Die Komponenten des Polarisationsvektors p_1 , p_2 und p_3 geben die Richtung der Partikelbewegungen in x_1 , x_2 bzw. x_3 an. Es lässt sich somit erkennen, dass durch die Nebenelemente der Matrix eine Kopplung zwischen Partikelbewegungen in x_1, x_3 mit x_2 vorliegt. Die Partikelbewegungen in x_1, x_3 sind den LAMB-Wellen zugeordnet (vgl. Abbildung 2.5) und die in x_2 den SH-Wellen (vgl. Abbildungen 2.7, 2.6). Es liegt somit eine Kopplung zwischen LAMB- und SH-Wellen vor. Diese Kopplung folgt aus (A.26) bei einem Stofftensor nach (A.5). Es wird in den Vereinfachungen zwischen der Betrachtung von Kopplung und Entkopplung beider Wellenformen unterschieden.

Monokline Festkörper

Auch bei monoklinem Materialverhalten liegt durch die Nebenelemente im Stofftensor eine Kopplung zwischen LAMB- und SH-Wellen vor. Durch die Symmetrien vereinfacht sich jedoch das Polynom beim Aufstellen der Determinante zu einem sechsten Grades mit ausschließlich geraden Exponenten.

$$f_o + f_2 \alpha^2 + f_4 \alpha^4 + f_6 \alpha^6 = 0 \quad (\text{A.28})$$

Die Lösung liefert drei Wertepaare $\pm \alpha_i$, die den Eigenwerten der charakteristischen Gleichung entsprechen und aus dem Wellenausbreitungsvektor k aus (A.19) kommen. Dabei entsprechen $+\alpha_i$ den Eigenwerten der von der Unterseite in positive x_3 -Richtung laufenden Wellen. Analog dazu sind die $-\alpha_i$ den Eigenwerten der von der Oberseite in negative x_3 -Richtung laufenden Wellen zugeordnet. Ferner gilt

$$\alpha_{j+1} = -\alpha_j, \quad \text{mit } j = 1, 3, 5. \quad (\text{A.29})$$

Das Einsetzen der Eigenwerte in das homogene Gleichungssystem liefert die dazugehörigen Eigenvektoren, welche den Polarisationsvektoren entsprechen. Somit gibt es für jedes Wertepaar $\pm \alpha_i$ einen dazugehörigen Polarisationsvektor. Werden diese in den Ansatz aus (A.18) eingesetzt, folgt mit Kenntnis der Amplituden das Verschiebungsfeld des jeweiligen Zustandes. Da eine lineare Theorie vorausgesetzt ist, lässt sich mittels Superpositionsprinzip das gesamte Verschiebungsfeld bestimmen. Dabei steht ein hochgestelltes + für die Verschiebung

gen, die von der Unterseite in positive x_3 -Richtung verlaufen, ein $-$ für Verschiebungen, die von der Oberseite in negative x_3 -Richtungen verlaufen.

$$u_i = \sum_{n=1}^3 [A_n^+(p_i^+)_n e^{ik\alpha_n z} + A_n^-(p_i^-)_n e^{-ik\alpha_n z}] e^{i(kx - \omega t)} \quad (\text{A.30})$$

Das Einsetzen der Verschiebungsfeldgleichung in den Greenschen Verzerrungstensor ergibt mit dem monoklinen Stofftensor und einmaliger örtlicher Ableitung die vorliegenden Spannungen

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = ik C_{ijkl} \sum_{n=1}^3 [A_n^+(p_k^+)_n n_l^+ e^{ik(\alpha_n(z-z_u)+x)} + \dots \\ A_n^-(p_k^-)_n n_l^- e^{ik(\alpha_n(z_o-z)+x)}] e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Für die Spannungsrandbedingungen gilt, dass alle Spannungen σ_{ij} in Dickenrichtung $j = 3$ gleich Null sind. Daher wird $j = 3$ gesetzt. Unter Einbeziehen des Stofftensors in die Summe mit

$$(d_i^\pm)_n = C_{i3kl} n_l^\pm (p_k^\pm)_n, \quad (\text{A.32})$$

sowie Einsetzen der Koordinaten für den oberen und den unteren Rand folgt die Dispersionsbeziehung

$$\begin{bmatrix} (\sigma_i)_u \\ (\sigma_i)_o \end{bmatrix} = ik \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{ij}^+ & \mathbf{D}_{ij}^- \mathbf{H}_{jl}^{exp} \\ \mathbf{D}_{ij}^+ \mathbf{H}_{jl}^{exp} & \mathbf{D}_{ij}^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_l^+ \\ \mathbf{A}_l^- \end{bmatrix} e^{i(kx - \omega t)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.33})$$

mit

$$\mathbf{D}_{ij}^\pm = \begin{bmatrix} (d_i^\pm)_1 & (d_i^\pm)_2 & (d_i^\pm)_3 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.34})$$

$$\mathbf{H}_{ij}^{exp} = \begin{bmatrix} e^{ik\alpha_1(z_o-z_u)} & 0 & 0 \\ & e^{ik\alpha_2(z_o-z_u)} & 0 \\ sym & & e^{ik\alpha_3(z_o-z_u)} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.35})$$

$$\mathbf{A}_j^\pm = \begin{bmatrix} A_{u1}^\pm & A_{u2}^\pm & A_{u3}^\pm \end{bmatrix}, \quad (\text{A.36})$$

und unter Ausschluss der trivialen Lösung $ik \cdot e^{i(kx - \omega t)} = 0$. Durch Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems lassen sich die Amplituden und im weiteren Verlauf die Verschiebungen berechnen.

Transversal-isotrope Festkörper

Die in Abschnitt [Monokline Festkörper](#) angewandten Berechnungsschritte führen mit dem transversal-isotropen Stofftensor zu einem vereinfachten homogenen Gleichungssystem.

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} - \rho c_p^2 & 0 & \gamma_{13} \\ & \gamma_{22} - \rho c_p^2 & 0 \\ sym. & & \gamma_{33} - \rho c_p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.37})$$

Darin ist die Partikelbewegung in x_2 -Richtung entkoppelt von der in x_1 - und x_3 -Richtung. Es entstehen daher zwei charakteristische Gleichungen, in denen das Polynom vierten Grades den LAMB-Wellen und das zweiten Grades den SH-Wellen zugeordnet ist

$$f_o + f_2\alpha^2 + f_4\alpha^4 = 0, \quad (\text{A.38})$$

$$f_o^* + f_2^*\alpha^2 = 0. \quad (\text{A.39})$$

Die Verschiebungsfelder der Wellenformen ergeben sich mit den jeweiligen Wertepaaren aus den Polynomen. Für die LAMB-Wellen folgt damit

$$u_i = \sum_{n=1,3} [A_n^+(p_i^+) e^{ik\alpha_n z} + A_n^-(p_i^-) e^{-ik\alpha_n z}] e^{i(kx - \omega t)}, \quad (\text{A.40})$$

und für die SH-Wellen

$$u_2 = [A_{u2}^+(p_2^+) e^{ik\alpha_2 z} + A_{u2}^-(p_2^-) e^{-ik\alpha_2 z}] e^{i(kx - \omega t)}. \quad (\text{A.41})$$

Über die Bedingung der spannungsfreien Ränder und bei Zusammenfassen der Gleichungen für die Spannungen an dem oberen und unteren Rand folgt analog die Dispersionsbeziehung aus (A.33) mit der Belegung für die LAMB-Wellen

$$\mathbf{D}_{ij}^\pm = \left[(d_i^\pm)_1 \quad (d_i^\pm)_3 \right], \quad (\text{A.42})$$

$$\mathbf{H}_{ij}^{exp} = \begin{bmatrix} e^{ik\alpha_1(z_o - z_u)} & 0 \\ 0 & e^{ik\alpha_3(z_o - z_u)} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.43})$$

$$\mathbf{A}_j^\pm = \left[A_{u1}^\pm \quad A_{u3}^\pm \right], \quad (\text{A.44})$$

und für die SH-Wellen

$$\mathbf{D}_{ij}^\pm = \left[(d_i^\pm)_2 \right], \quad (\text{A.45})$$

$$\mathbf{H}_{ij}^{exp} = \left[e^{ik\alpha_2(z_o - z_u)} \right], \quad (\text{A.46})$$

$$\mathbf{A}_j^\pm = \left[A_{u2}^\pm \right]. \quad (\text{A.47})$$

Der transversal-isotrope Stofftensor ist in den gleichen Elementen besetzt wie der isotrope Stofftensor.

Isotrope Festkörper

Im Falle isotropem Materialverhaltens wird das Hookesche Gesetz mit den Lamé-Konstanten formuliert

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{spur}[\boldsymbol{\varepsilon}] \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (\text{A.48})$$

Einsetzen von (2.11) in (A.48) und anschließend in (2.25) führt zu der gekoppelten, linearen Lamé-Naviersche Differentialgleichung

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{u}) + \mu \operatorname{div}(\operatorname{grad} \mathbf{u}) + \rho \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}}. \quad (\text{A.49})$$

Die Lamé-Naviersche Differentialgleichung ist nur in Einzelfällen geschlossen lösbar. Ansonsten ist die Handhabung nur über die numerische Berechnung gegeben. Über das Helmholtz-Theorem wird folgender Ansatz in (A.49) eingesetzt

$$\mathbf{u} = \text{grad } \phi + \text{rot } \boldsymbol{\psi}, \text{ mit } \text{div } \boldsymbol{\psi} = 0. \quad (\text{A.50})$$

Als Ergebnis liegt unter Vernachlässigung der Volumenkräfte für beide Wellenformen je eine Differentialgleichung vor. Für die Longitudinalwelle ergibt sich

$$\text{div}(\text{grad } \phi) = \frac{1}{c_L^2} \ddot{\phi}. \quad (\text{A.51})$$

c_L ist die Phasengeschwindigkeit der Longitudinalwelle

$$c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}. \quad (\text{A.52})$$

Für die Transversalwelle folgt

$$\text{div}(\text{grad } \boldsymbol{\psi}) = \frac{1}{c_T^2} \ddot{\boldsymbol{\psi}}. \quad (\text{A.53})$$

Wobei c_T die Phasengeschwindigkeit der Transversalwelle ist

$$c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (\text{A.54})$$

Die Anwendung des Helmholtz-Theorems auf (A.50) führt für den ebenen Verzerrungszustand auf

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ u_3 \end{pmatrix} = \text{grad } \phi + \text{rot } \boldsymbol{\psi} = \begin{pmatrix} \phi_{,1} \\ \phi_{,2} \\ \phi_{,3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cancel{\psi_{3,2}} - \psi_{2,3} \\ \psi_{1,3} - \cancel{\psi_{3,1}} \\ \psi_{2,1} - \cancel{\psi_{1,2}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.55})$$

Die Komponenten ψ_1 und ψ_3 verschwinden, sodass zwei Gleichungen bleiben, in denen $\psi_2 = \psi$ gilt

$$u = u_1 = \phi_{,1} - \psi_{,3} \quad (\text{A.56})$$

$$v = u_2 = 0 \quad (\text{A.57})$$

$$w = u_3 = \phi_{,3} + \psi_{,1}. \quad (\text{A.58})$$

Um die Unbekannten ϕ und ψ zu beschreiben, erfolgt der Ansatz über eine stehende Welle in x_3 -Richtung bei Wellenausbreitung in x_1 -Richtung

$$\phi = \Phi(x_3)e^{i(kx_1 - \omega t)}, \quad (\text{A.59})$$

$$\psi = \Psi(x_3)e^{i(kx_1 - \omega t)}, \quad (\text{A.60})$$

mit

$$\Phi = A_{u1} \sin(px_3) + A_{u2} \cos(px_3), \quad (\text{A.61})$$

$$\Psi = B_{u1} \sin(qx_3) + B_{u2} \cos(qx_3), \quad (\text{A.62})$$

$$k = \frac{\omega}{c_p}. \quad (\text{A.63})$$

Für die Herleitung von p und q sei an dieser Stelle auf [2] verwiesen. Prinzipiell werden die Ansätze für die stehende Welle (A.59) in (A.51) und (A.60) in (A.53) eingesetzt. Für p und q ergeben sich daraus

$$p = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_L^2} - k^2}, \quad (\text{A.64})$$

$$q = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_T^2} - k^2}. \quad (\text{A.65})$$

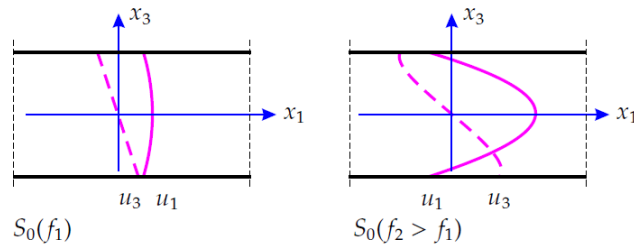
Das Einsetzen der Ansätze (A.59) und (A.60) in (A.56) und (A.58) führt nach Anwendung der partiellen Ableitungen zu den Verschiebungen u und w

$$u = (ik[A_{u1} \sin(px_3) + A_{u2} \cos(px_3)] - \dots [qB_{u1} \cos(qx_3) - qB_{u2} \sin(qx_3)])e^{i(kx_1 - \omega t)}, \quad (\text{A.66})$$

$$w = ([pA_{u1} \cos(px_3) - pA_{u2} \sin(px_3)] + \dots ik[B_{u1} \sin(qx_3) + B_{u2} \cos(qx_3)])e^{i(kx_1 - \omega t)}. \quad (\text{A.67})$$

Die Gesamtverschiebungen lassen sich nun in ihre Komponenten für symmetrische und antisymmetrische Moden zerlegen. Die Zuordnung der Komponenten erfolgt anhand der Wellenausbreitungscharakteristik und ist in Abbildung A.4 dargestellt.

Verschiebungen bei symmetrischen Moden



Verschiebungen bei antisymmetrischen Moden

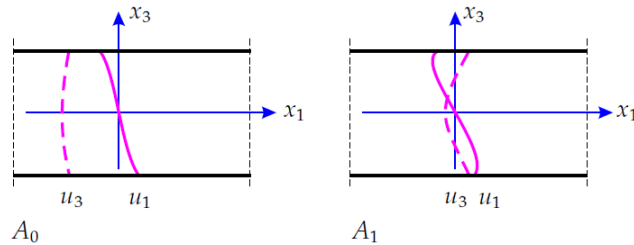


Abbildung A.4.: Zuordnung der Verschiebungskomponenten, nach [2]

Werden die Modenformen schematisch aufgetragen, lassen sich die Kosinus- und Sinusanteile aus den Gleichungen (A.66) und (A.67) den einzelnen Modenformen zuordnen. So ergibt sich in der symmetrischen Mode für die Verschiebungen u der Kosinus und für die Verschiebungen

w der Sinus. Entsprechendes gilt für die antisymmetrischen Moden. Daraus resultieren vier Gleichungen, mit denen jeweils die Verschiebungen u und w für die symmetrischen und antisymmetrischen Moden beschrieben sind. Für die symmetrischen Moden folgt

$$u^{sym} = [ikA_{u2} \cos(px_3) - qB_{u1} \cos(qx_3)]e^{i(kx_1 - \omega t)}, \quad (\text{A.68})$$

$$w^{sym} = [-pA_{u2} \sin(px_3) + ik[B_{u1} \sin(qx_3)]]e^{i(kx_1 - \omega t)}. \quad (\text{A.69})$$

Für die antisymmetrischen Moden folgt

$$u^{anti} = [ik[A_{u1} \sin(px_3) + qB_{u2} \sin(qx_3)]]e^{i(kx_1 - \omega t)}, \quad (\text{A.70})$$

$$w^{anti} = [pA_{u1} \cos(px_3) + B_{u2} \cos(qx_3)]e^{i(kx_1 - \omega t)}. \quad (\text{A.71})$$

Diese vier Gleichungen bilden die Verschiebungsfelder der Moden in dem Flächentragwerk ab. Sie sind bei einem vorgegebenem Verhältnis von Kreisfrequenz ω zu Phasengeschwindigkeit c_p (vgl. A.63) vom Ort x_1 , x_3 sowie der Zeit t abhängig. Um die Verschiebungsfelder berechnen zu können, müssen zunächst die Amplituden A_{u1} , A_{u2} , B_{u1} und B_{u2} der Verschiebungen ermittelt werden. Dafür werden die Verschiebungen (A.66) und (A.67) jeweils in den linearisierten Greenschen Verzerrungstensor aus (2.11) und anschließend in das Hookesche Gesetz (A.48) eingesetzt. Man erhält die Spannungen im vorliegenden Verzerrungszustand:

$$\begin{aligned} \sigma_{31}^{sym} &= \mu[-2ikpA_{u2} \sin(px_3) + \dots \\ &\quad (q^2 - k^2)B_{u1} \sin(qx_3)]e^{i(kx_1 - \omega t)}, \end{aligned} \quad (\text{A.72})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{sym} &= [-(\lambda(k^2 + p^2) + 2\mu p^2)A_{u2} \cos(px_3) + \dots \\ &\quad 2\mu ikqB_{u1} \cos(qx_3)]e^{i(kx_1 - \omega t)}, \end{aligned} \quad (\text{A.73})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{31}^{anti} &= \mu[2ikpA_{u1} \cos(px_3) + \dots \\ &\quad (q^2 - k^2)B_{u2} \cos(qx_3)]e^{i(kx_1 - \omega t)}, \end{aligned} \quad (\text{A.74})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{anti} &= [-(\lambda(k^2 + p^2) + 2\mu p^2)A_{u1} \sin(px_3) - \dots \\ &\quad 2\mu ikqB_{u2} \sin(qx_3)]e^{i(kx_1 - \omega t)}. \end{aligned} \quad (\text{A.75})$$

Unter Beachtung der Bedingung für spannungsfreie Ränder bei $x_3 = \pm \frac{d}{2}$ gilt $\sigma_{33} = \sigma_{31} = 0$, woraus sich die Dispersionbedingungen ergeben, die an dieser Stelle in Matrix-Schreibweise dargestellt sind. Für die symmetrischen Moden folgt

$$\begin{bmatrix} -2ikp \sin(pd) & (q^2 - k^2) \sin(qd) \\ -\mu(q^2 - k^2) \cos(pd) & 2\mu ikq \cos(qd) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{u2} \\ B_{u1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.76})$$

Für die antisymmetrischen Moden folgt

$$\begin{bmatrix} 2ikp \cos(pd) & (q^2 - k^2) \cos(qd) \\ -\mu(q^2 - k^2) \sin(pd) & -2\mu ikq \sin(qd) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{u1} \\ B_{u2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.77})$$

Ziel ist es nun Wellenzahlen k zu finden, die eine nicht-triviale Lösung der Matrixgleichung darstellen. Diese sind dann erfüllt, wenn die Determinante der Matrix zu null werden. Daraus ergibt sich eine Eigenwertberechnung. Sind die Wellenzahlen bekannt, in denen die Determinante zu Null wird, können mit den erhaltenen Eigenwerten die dazugehörigen Amplituden berechnet werden. Die Amplituden sind die Komponenten der Eigenvektoren des Eigenwertproblems

$$\mathbf{P}^{sym} = \begin{bmatrix} A_{u2} \\ B_{u1} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{anti} = \begin{bmatrix} A_{u1} \\ B_{u2} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.78})$$

Da es sich bei den Gleichungen (A.76) und (A.77) um homogene Gleichungssysteme handelt, kann je eine der Komponenten frei gewählt werden. Die zweite Komponente ergibt sich entsprechend nach Auflösen des Gleichungssystems. Mögliche Lösungen für A_{u1} , A_{u2} , B_{u1} und B_{u2} wären

$$A_{u1} = (q^2 - k^2) \cos(qd), \quad (\text{A.79})$$

$$B_{u1} = 2ikp \sin(pd), \quad (\text{A.80})$$

$$A_{u2} = (q^2 - k^2) \sin(qd), \quad (\text{A.81})$$

$$B_{u2} = -2ikp \cos(pd). \quad (\text{A.82})$$

Eingesetzt in die Gleichungen für die Verschiebungen (A.68) bis (A.71) resultieren daraus die Verschiebungsfelder für die jeweilige Wellenzahl. Alternativ lassen sich die Dispersionsbedingungen bei isotropem Material auch als „Rayleigh-Lamb-Wellengleichung“ schreiben

$$\frac{\tan(qd)}{\tan(pd)} = \left[\frac{-4k^2 pq}{(q^2 - k^2)^2} \right]^{\pm 1}, \quad \begin{cases} k_{sym} = +1 \\ k_{anti} = -1 \end{cases}. \quad (\text{A.83})$$

Mit Kenntnis der Wellenzahlen k , in denen die Determinante zu Null wird, sind auch die Phasengeschwindigkeiten c_p bekannt, die sich anschließend über der Frequenz auftragen lassen. Das entstehende Diagramm ist das Dispersionsdiagramm für Phasengeschwindigkeiten. Durch (2.28) folgt das Dispersionsdiagramm für Gruppengeschwindigkeiten.

A.3. Mess- und Auswertesignale

Nachfolgend sind die aufgenommenen Zeitsignale sowie die Wavelet-Koeffizienten der S_1 - und S_2 -Moden dargestellt. Abbildung A.5 zeigt die Zeitsignale aller Proben. Die Zeitsignale sind dabei bereits von den elektrischen Fehlsignalen zu Beginn der Messung bereinigt. Des Weiteren sind die Zeitsignale durch digitale Filter geglättet. Es ist zu erkennen, dass das erste Wellensignal jeweils bei ca. 2.8 s ankommt. Verglichen mit den zusätzlich angeregten Moden liegt für die primär-angeregte Mode sowie für die Höherharmonische die höchste Gruppengeschwindigkeit vor. Daher handelt es sich bei den ersten Signalen um solche aus der primär-angeregte Mode sowie der Höherharmonischen, welche sich mit der gleichen Gruppengeschwindigkeit ausbreiten. Reflexionen von den Rändern der Probe haben eine längere Strecke zurückzulegen und kommen daher erst nach dem Eintreffen des ersten Wellenpaketes an. Durch die geringeren Ausbreitungsgeschwindigkeiten der anderen Moden treffen auch diese erst zu einem späteren Zeitpunkt am Piezo-Sensor ein. Diese Signale sind jedoch nicht sauber von dem Ausschwingen der ersten Wellenpakete zu trennen, weshalb die Wavelet-Koeffizienten für das gesamte Signal berechnet werden.

In Abbildung A.6 sind die Wavelet-Koeffizienten der S_1 -Moden bezüglich ihrer Anregungsfrequenz dargestellt. Die S_1 -Mode verfügt in der theoretischen Betrachtung die höchste Gruppengeschwindigkeit, wodurch sie am frühesten an dem Piezo-Sensor detektiert wird. Dadurch ist das erste Signal in den Wavelet-Koeffizienten dieser Mode zuzuordnen. Jedoch kommt es aufgrund von Unregelmäßigkeiten in beispielsweise der Probendicke zu Abweichungen von der Theorie. Das hat zur Folge, dass die Anregungsfrequenz nicht exakt passend zu den Bedingungen der Internen Resonanz ist. Daher erfordert die Auswertung der Wavelet-Koeffizienten mehrere Iterationsschritte und setzt Erfahrung auf dem Gebiet voraus. In der Auswertung sind parallel die Wavelet-Koeffizienten der S_2 -Mode zu berücksichtigen, da die Zeiten, in denen beide Wellenpakete ankommen, nahezu identisch sein müssen. Grund dafür, dass in den meisten Fällen die S_2 -Mode verzögert eintrifft, sind die erwähnten Abweichungen von der theoretischen Betrachtung. Die Wavelet-Koeffizienten der S_2 -Mode sind in Abbildung A.7 dargestellt. Den Abbildungen ist zu entnehmen, dass die Amplituden der Höherharmonischen eine Größenordnung kleiner sind, als die der primär-angeregten Mode. Das entspricht den Erwartungen und zeigt den Nutzen des kumulativen Effektes auf die Messung der Amplituden.

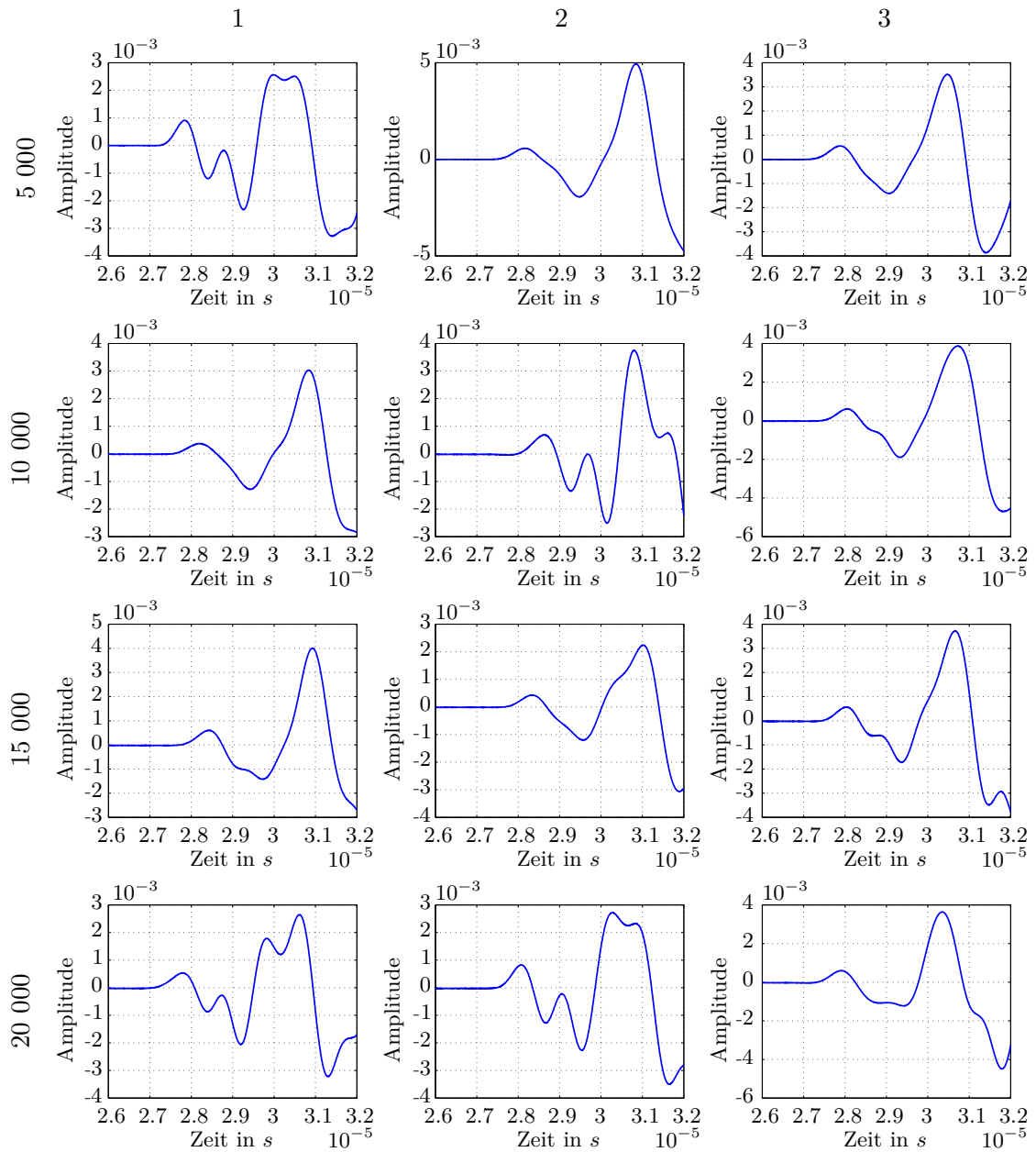


Abbildung A.5.: Aufgenommene und bereinigte Zeitsignale

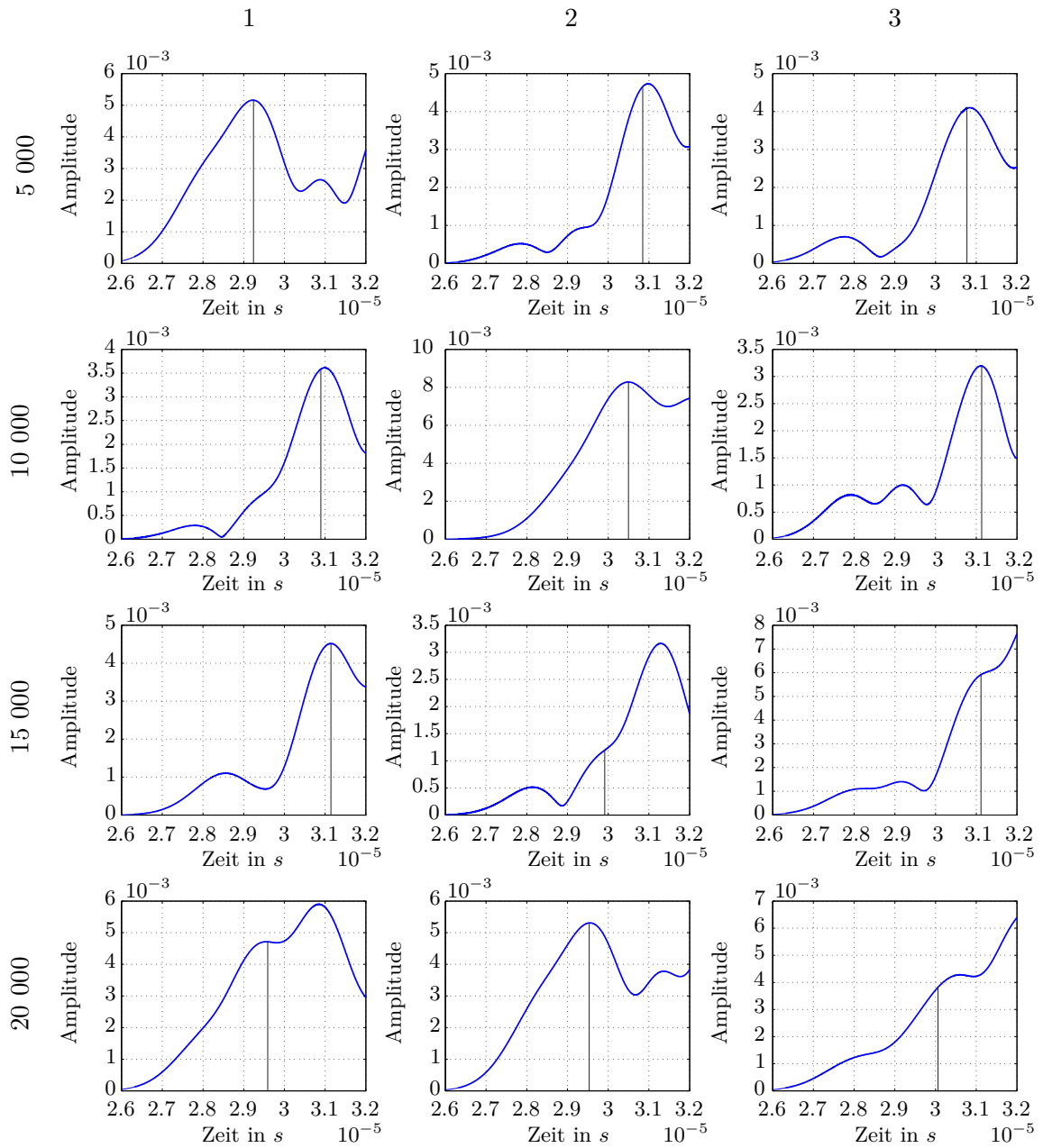


Abbildung A.6.: Wavelet-Koeffizienten der S_1 -Mode

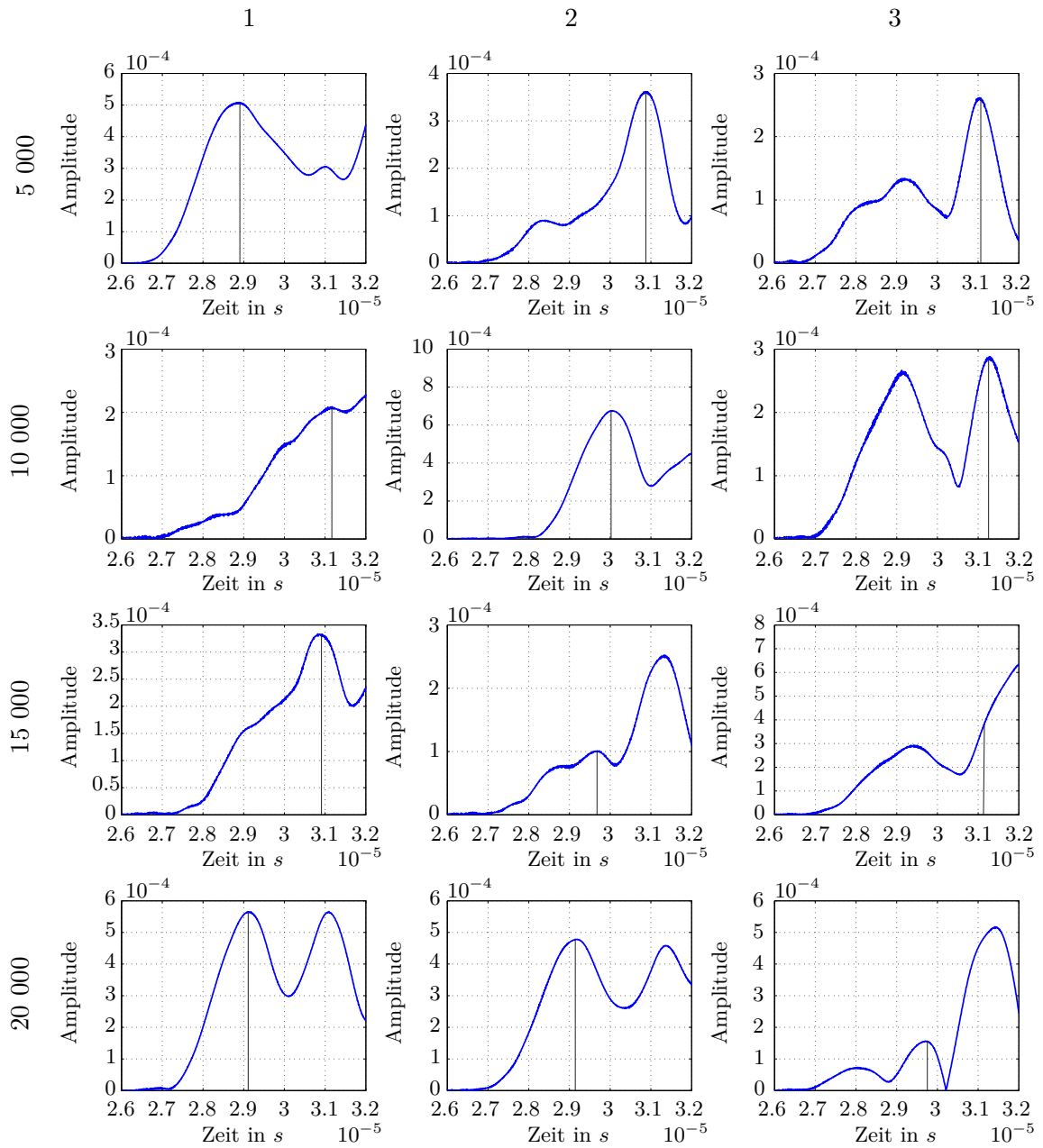


Abbildung A.7.: Wavelet-Koeffizienten der S_2 -Mode