Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Hamburg University of Applied Sciences

Bachelorarbeit

Lucas Marks

Analyse von Versuchsständen zur Technischen Mechanik durch Programmierung von Finite-Elemente-Modellen in MAPLE

Fakultät Technik und Informatik
Department Fahrzeugtechnik und Flugzeugbau

Faculty of Engineering and Computer Science
Department of Automotive and Aeronautical Engineering

Lucas Marks

Analyse von Versuchsständen zur Technischen Mechanik durch Programmierung von Finite-Elemente-Modellen in MAPLE

Bachelorarbeit eingereicht im Rahmen der Bachelorprüfung

im Studiengang Flugzeugbau
am Department Fahrzeugtechnik und Flugzeugbau
der Fakultät Technik und Informatik
der Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg

Erstprüfer: Prof. Dr.-Ing. Eckart Nast
Zweitprüfer: Prof. Dr.-Ing. Michael Seibel

Abgabedatum: 02.08.2016

Zusammenfassung

Name des Studierenden
Lucas Marks

Thema der Bachelorthesis
Analyse von Versuchsständen zur Technischen Mechanik durch Programmierung von Finite-Elemente-Modellen in MAPLE

Stichworte

- Finite Elemente Methode
- Fachwerk
- Stabelement
- Balkenelement
- MAPLE

Kurzzusammenfassung
Das Mechaniklabor der HAW dient mit diversen Versuchsständen zur Verbesserung der Lehre im Bereich der technischen Mechanik. Neben der experimentellen Auswertung und der Berechnung mit analytischen Methoden schafft die vorliegende Bachelorarbeit die Möglichkeit die Versuche zusätzlich durch die Finite-Elemente-Methode auszuwerten. Um die speziellen Anforderungen des Mechaniklabors abzudecken, wurden mehrere Programmierungen mit dem CAS-System MAPLE erstellt.

Name of Student
Lucas Marks

Title of the paper
Analysis of test rigs for technical mechanics by programming finite element models with MAPLE

Keywords

- Finite elements method
- Carcass
- Rod element
- Beam element
- MAPLE

Abstract
The Laboratory of Mechanics of the HAW includes several test rigs which seek to improve the quality of teaching in the subjects of technical mechanics. The following thesis creates the possibility of evaluating the test rigs with the method of finite elements in addition to the existing methods of experimental and analytical evaluation. Several programs were created in order to meet the special requirements of the Laboratory of Mechanics.

Aufgabenstellung

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Hamburg University of Applied Sciences

FAKULTÄT TECHNIK UND INFORMATIK
DEPARTMENT FAHRZEUGTECHNIK UND FLUGZEUGBAU
Professor NAST

Aufgabenstellung Abschlussarbeit

Name: Marks, Lucas

Thema: **Analyse von Versuchsständen zur Technischen Mechanik durch Programmierung von Finite-Elemente-Modellen in MAPLE**

1. Einführung:

Mit Unterstützung der Ditze-Stiftung, des Förderkreises Wagenbauschule sowie des Zukunftsprogramms der Fakultät TI wurden zur Verbesserung der Lehre im Bereich der Technischen Mechanik diverse Versuchsstände und Modelle im Department Fahrzeugtechnik und Flugzeugbau angeschafft.

Die Versuchsstände wurden bereits aufgebaut und messtechnisch analysiert. Bei einigen Versuchsständen erfolgte parallel dazu eine Berechnung von Lagerreaktionen, Verformungen und Schnittgrößen mit analytischen Methoden.

Im Rahmen dieser Bachelorarbeit sollen einzelne Versuchsstände zusätzlich mit der Methode der Finiten Elemente untersucht werden. Dafür ist das Computeralgebra-system MAPLE zu verwenden. Zu untersuchen sind sowohl Balkentragwerke als auch statisch bestimmte und statisch überbestimmte Fachwerke.

2. Aufgabenstellung in Arbeitsschritten:

- Einarbeitung in das Computeralgebrasystem MAPLE
- Erstellung von Stab- und Balkenelementen in MAPLE
- Analyse/Berechnung der Versuche SE 110.20 bis 110.22 und SE 110.44 mittels MAPLE
- Dokumentation der FE-Modelle und der Berechnungen

Hamburg, den 02. Juni 2016

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

MAPLE-Ausschnittsverzeichnis

Liste der verwendeten Formelzeichen

A	Fläche, Querschnittsfläche
α	Winkel
E	Elastizitätsmodul
F	Kraft, Lastvektor
I	Flächenmoment zweiter Ordnung
K	Steifigkeitsmatrix
L	Länge
M	Moment
P	Äußere Lasten
p	Äußere Lasten
φ	Verdrehung
Q	Zuordnungsmatrix
R	Reaktionskräfte
σ	Spannungen
u	Verschiebung, Verschiebungsvektor
v	Knotenverschiebungen, Knotenverschiebungsvektor
Z	Zuordnungsmatrix

Indizes

Tiefgestellt:

$_1$	Anfangsknoten
$_2$	Endknoten
$_{gesamt, global, lokal}$	Bezug des Koordinatensystems
$_{x,y,z}$	Bezugsachse

Hochgestellt:

$^{1,2,\ldots 6}$	Nummerierung der Elemente
$^{I,II,\ldots V}$	Nummerierung der Knoten

1 Einleitung und Motivation

Die Auswertung von Fachwerken und Rahmentragwerken ist wichtiger Bestandteil der Lehre im Gebiet der Technischen Mechanik. Zur Veranschaulichung der Lehrinhalte hat die HAW mit der Einrichtung des Mechaniklabors zahlreiche Versuchsstände zur experimentellen Untersuchung von Fachwerken und Rahmentragwerken angeschafft.

Die Ermittlung der Schnittkräfte, der Lagerreaktionen, sowie der Verformungen kann nun nicht nur mit analytischen Methoden, sondern auch messtechnisch erfolgen.

Eine weitere Möglichkeit der Auswertung ist die Analyse mit der Finiten-Elemente-Methode (FEM).

Die vorliegende Bachelorarbeit befasst sich mit der Erstellung einer FEM-Programmierung, die speziell auf die Anforderungen des Mechaniklabors zugeschnitten ist.

Dies beinhaltet:

- Die möglichst kostenfreie Verfügbarkeit des Programms für die Studierenden.
- Die Möglichkeit jeden Rechenschritt nachzuvollziehen und somit die Grundstruktur der Finite-Elemente-Methode erfassen zu können.
- Die Modifizierbarkeit der Programmierung, sodass sie an die verschiedenen Aufbauvarianten der Versuchsstände angepasst werden kann.
- Die Erweiterbarkeit der Programmierung.

Um die Anforderungen erfüllen zu können, wurde die Programmierung mit MAPLE durchgeführt. Als Computer-Algebra-System bietet es den Vorteil, dass grundliegende Funktionen der Matrizenrechnung oder der linearen Algebra schon vorhanden sind und nicht mit Zusatzaufwand programmiert werden müssen.

Außerdem bietet MAPLE weitere Vorteile: Die einzelnen Rechenschritte sind gut erkennbar und durch die umfangreichen Features sind Erweiterungen, zum Beispiel zur grafischen Ausgabe einfach möglich. Des Weiteren ist die kostenlose Verfügbarkeit durch eine Campus-Lizenz für alle Studierenden der HAW gewährleistet.

Für die vorliegende Bachelorarbeit wurde MAPLE 18 verwendet, da dies zum Erstellungszeitpunkt die aktuellste verfügbare Version über die Campus-Lizenz war.

Der im Rahmen der Bachelorarbeit erstellten Programmierung liegen folgende Versuchsstände zu Grunde:

- SE 110.20 Verformung von Rahmen
- SE 110.21 Kräfte in verschiedenen, ebenen Fachwerken
- SE 110.22 Kräfte im überbestimmten Fachwerk
- SE 110.44 Verformung von Fachwerken

Die vier Versuche werden durch ein Programm abgedeckt, dessen Grundstruktur auf die individuelle Problemstellung des jeweiligen Versuchsstands angepasst wurde. Entstanden sind drei Programmvarianten:

- Die erste Variante („Fachwerk_1“) verwendet ausschließlich Stabelemente und ist soweit anpassbar, dass nicht nur die vorliegenden Fachwerkversuchsstände, sondern jedes beliebige 2-dimensionale Fachwerk ausgewertet werden kann.

- Die zweite Variante („Fachwerk_2“) enthält eine Modifikation zur Modellierung von nicht homogenen Stabelementen, wie sie in Versuch SE 110.44 vorkommen.
- Die dritte Variante („Rahmen“) wurde für die Auswertung von Rahmentragwerken modifiziert. Analog zur ersten Variante kann nicht nur der Versuchstand SE 110.20, sondern jedes beliebige 2-dimensionale Rahmentragwerk ausgewertet werden.

Während sich der Großteil des Arbeitsaufwandes in der Erstellung der Programme konzentriert, legt die vorliegende schriftliche Ausarbeitung den Fokus auf die Erläuterung der Programmierung. Um eine Erweiterung der Programme zu erleichtern und ein tieferes Verständnis der Methode zu ermöglichen wird vor allem darauf eingegangen, wie die Mathematik, welche der Finiten-Elemente-Methode zugrunde liegt, programmtechnisch umgesetzt wurde. Hierzu wird der vollständige Programmcode eines Beispiels in den Kapiteln 3.2 und 4 abschnittweise erläutert.

Um den Erläuterungen folgen zu können, ist eine Kenntnis der grundlegenden Befehle in MAPLE vorausgesetzt. Diese kann mit geringem Aufwand über die MAPLE-Hilfe durch die Tutorien 1, 2 und 5 oder durch den „Quick Start Guide“ von MAPLE erworben werden. (Maplesoft, 2015)

2 Grundlagen der Finite-Elemente-Methode (FEM)

Die Methode der finiten Elemente ist eine weit verbreitete numerische Lösungsmethode physikalischer Aufgabenstellungen. Das Grundprinzip ist die Zerlegung einer Struktur in hinreichend kleine Teile, für die eine mathematische Beschreibung der physikalischen Eigenschaften bekannt ist. Dies ist der Prozess der „Diskretisierung“ oder auch „Elementierung“, da die einzelnen Teile Elemente genannt werden. Da sie endlich klein sind wird von „finiten“ Elementen gesprochen. Diese Elemente sind über sogenannte Knoten miteinander verbunden, in denen sie miteinander wechselwirken. Somit können die Auswirkungen auf die Gesamtstruktur über Veränderungen jedes einzelnen Elements ermittelt werden. (Finite-Elemente-Methode, 2016)

Zur Modellbildung in der FEM gehören

- die Beschreibung der Geometrie der Struktur
- die Feldgleichungen der Elemente
- die Randbedingungen und
- die Anfangsbedingungen (nur bei zeitabhängigen Problemstellungen).

In Rahmen dieser Bachelorarbeit betrachten wir eine mechanische Problemstellung. Die Diskretisierung ist in den vorliegenden Aufgabenstellungen schon vorgegeben, da im Fachwerk die Stäbe und im Rahmentragwerk die Balken die einzelnen Elemente bilden. Über die Knoten werden zwischen den Stäben ausschließlich Kräfte, zwischen den Balkenelementen zusätzlich ein Moment, übertragen.

Die Feldgleichung lässt sich allgemein in der Form

$$F = K * u$$

schreiben. F ist eine Spaltenmatrix, in der sämtliche Knotenkräfte (bei Balkenelementen zusätzlich Knotenmomente) zusammengefasst sind. Auch u ist eine Spaltenmatrix, allerdings beinhaltet diese alle Knotenverschiebungen (und Knotenverdrehungen bei Balkenelementen). K ist eine quadratische Matrix, welche die Steifigkeitsmatrix der gesamten Struktur darstellt. (Merkel & Öchsner, 2014)

Unter den Randbedingungen sind bei den hier betrachteten statischen Problemstellungen die Lagerbedingungen, sowie die von außen aufgebrachten Lasten zu verstehen. Lagerbedingungen werden mathematisch durch das Festhalten, also gleich Null setzen von Knotenverschiebungen interpretiert.

Da wir eine zeitunabhängige Aufgabenstellung bearbeiten, müssen keine Anfangsbedingungen betrachtet werden.

Das Ziel der Methode ist es, ein Gleichungssystem der oben genannten Form aufzustellen und nach den unbekannten Knotenverschiebungen, sowie Lagerreaktionen zu lösen. Aus den Knotenverschiebungen lassen sich dann über den linearelastischen Zusammenhang die Spannungen in den Elementen bestimmten.

Um das Gesamtgleichungssystem aufzustellen sind einige Zwischenschritte notwendig:

Im ersten Schritt wird die Steifigkeitsmatrix für jedes einzelne Element, bezogen auf das elementeigene Koordinatensystem, aufgestellt. Diese Matrix wird im nächsten Schritt in ein globales Koordinatensystem transformiert, sodass im dritten Schritt die Einzelsteifigkeitsmatrizen, entsprechend der Geometrie, in eine Gesamtsteifigkeitsmatrix eingeordnet werden können. Nach dem Einbeziehen der Lagerbedingungen sowie der äußeren Lasten kann das Gleichungssystem aufgestellt werden.

Betrachten wir als nächstes die Elemente, die zur Abbildung der vorliegenden Problemstellungen benötigt werden.

2.1 Das finite Element „Zugstab“

Für die Modellierung wird ein elastischer, grader Stab verwendet, wie er aus den Grundlagen der Fachwerkstatik bekannt ist. (Gross, Hauger, Schröder, & Wall, 2013)

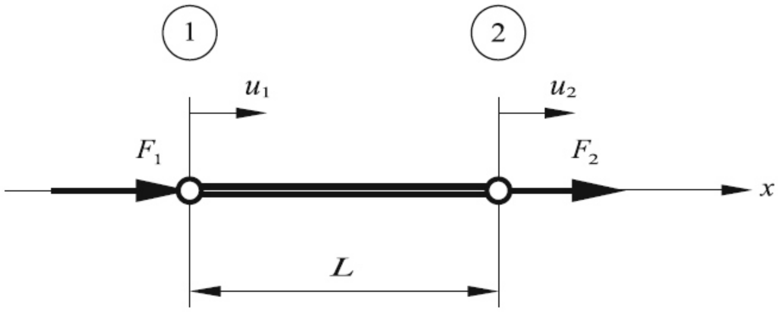


Abbildung 2.1: Das finite Element Zugstab (Merkel & Öchsner, 2014)

Das lokale Koordinatensystem hat seinen Ursprung am Anfang des Stabes und die x-Achse verläuft entlang der Stabachse. An den Enden des Stabes befinden sich die Knoten, an denen jeweils eine Kraft und eine Verschiebung in positive Koordinatenrichtung angenommen werden.

Kräfte und Verschiebungen hängen über das Hooksche Gesetz zusammen:

$$F_1 = \frac{E \cdot A}{L} \cdot (u_2 - u_1) \tag{1}$$

Zusammen gefasst in Matrixschreibweise:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Mit

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$K = \frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

und

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

lässt sich die Grundform der Feldgleichung $F = K \cdot u$ erkennen. (Mathiak, 2010)

2.2 Das finite Element „Balken“

Im Vergleich zum Zugstab treten beim ebenen Biegebalken weitere Kraft- und Verformungsgrößen in den Knoten auf:

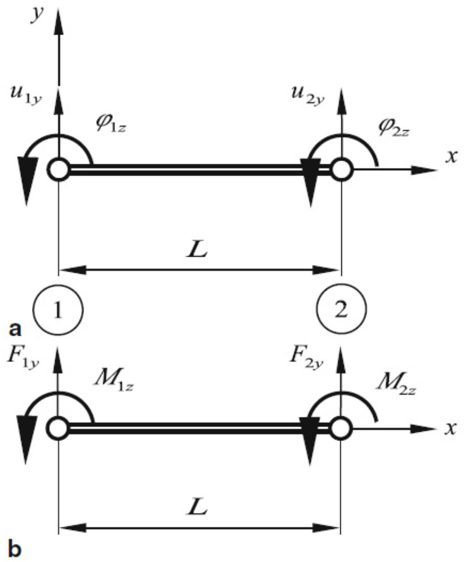


Abbildung 2.2: Kraft und Verschiebungsgrößen am Balken (Merkel & Öchsner, 2014)

Abbildung 2.2 zeigt im oberen Abschnitt (a) die zusätzlichen Verformungsgrößen u_y und φ_z. Im unteren Abschnitt (b) sind die zusätzlichen Kraftgrößen $F_y$und M_z zu erkennen. Nach der klassischen Balkenbiegetheorie ergeben sich für die Größen folgende Zusammenhänge (Betten, 2003):

$$\mathrm{u}_{1y} = \frac{F_{1y} \cdot L^3}{3E \cdot I_z} - \frac{M_{1z} \cdot L^2}{2E \cdot I_z} \tag{6}$$

$$\varphi_{1z} = -\frac{F_{1y} \cdot L^2}{2E \cdot I_z} + \frac{M_{1z} \cdot L}{E \cdot I_z} \tag{7}$$

und

$$\mathrm{u}_{2y} = \frac{F_{2y} \cdot L^3}{3E \cdot I_z} + \frac{M_{2z} \cdot L^2}{2E \cdot I_z} \tag{8}$$

$$\varphi_{2z} = \frac{F_{2y} \cdot L^2}{2E \cdot I_z} + \frac{M_{2z} \cdot L}{E \cdot I_z} \tag{9}$$

Aufgelöst nach den Kraftgrößen ergibt sich in Matrixschreibweise:

$$\begin{bmatrix} F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \end{bmatrix} = \frac{E \cdot I_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{u}_{1y} \\ \varphi_{1z} \\ \mathrm{u}_{2y} \\ \varphi_{2z} \end{bmatrix} \tag{10}$$

Nehmen wir die Elastizitätseigenschaften des Stabelementes hinzu, ergibt sich (Merkel & Öchsner, 2014):

$$\begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & -\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{E \cdot I_z}{L^3} & 6\frac{E \cdot I_z}{L^2} & 0 & -12\frac{E \cdot I_z}{L^3} & 6\frac{E \cdot I_z}{L^2} \\ 0 & 6\frac{E \cdot I_z}{L^2} & 4\frac{E \cdot I_z}{L} & 0 & -6\frac{E \cdot I_z}{L^2} & 4\frac{E \cdot I_z}{L} \\ -\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{E \cdot I_z}{L^3} & -6\frac{E \cdot I_z}{L^2} & 0 & 12\frac{E \cdot I_z}{L^3} & -6\frac{E \cdot I_z}{L^2} \\ 0 & 6\frac{E \cdot I_z}{L^2} & 4\frac{E \cdot I_z}{L} & 0 & -6\frac{E \cdot I_z}{L^2} & 4\frac{E \cdot I_z}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{u}_{1x} \\ \mathrm{u}_{1y} \\ \varphi_{1z} \\ \mathrm{u}_{2x} \\ \mathrm{u}_{2y} \\ \varphi_{2z} \end{bmatrix} \tag{11}$$

Analog zum Stabelement lässt sich auch hier die Gleichung $F = K \cdot u$ erkennen.

3 Das Beispielfachwerk SE 110.44

Der Aufbau der ersten Programmvariante (Fachwerks_1) soll Anhand des Beispiels aus der Versuchsanleitung SE110.44 „Verformung von Fachwerken“ beschrieben werden.

Dieser Versuch besteht aus einem Fachwerk mit sechs Stäben, die gemäß Abbildung 3.1

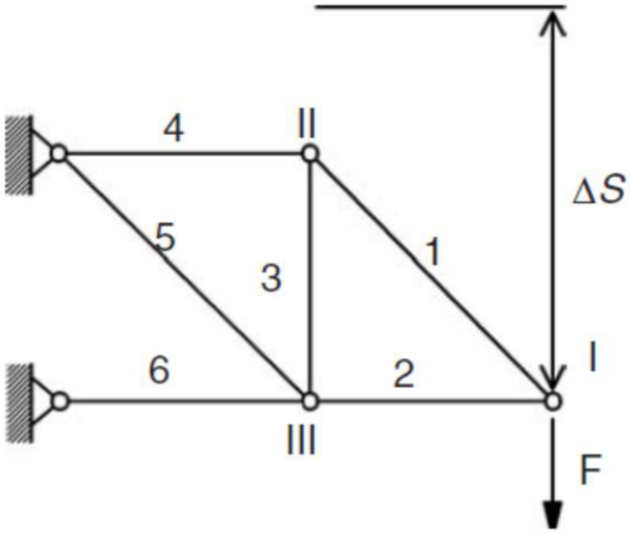


Abbildung 3.1: Beispielfachwerk SE 110.44 (G.U.N.T. Gerätebau, 2015)

angeordnet sind. Im Knoten I wird eine Kraft von $F = 200\ N$ „nach unten“ aufgebracht. Gesucht ist die Auslenkung des Knoten I „nach unten“.

Es wurde der Versuch SE 110.44 ausgewählt, da hier nicht nur die Stabkräfte, sondern auch die daraus resultierenden Verformungen untersucht werden. Somit lässt sich der Funktionsumfang der Programmierung anhand eines Anwendungsbeispiels demonstrieren. Außerdem können die Ergebnisse anhand der Referenzergebnisse aus der Versuchsanleitung auf Plausibilität überprüft werden.

3.1 Vorbereitung des Fachwerks zur Eingabe in MAPLE

Um die mechanische Problemstellung an das Programm übergeben zu können werden die Eingabedaten anhand des Fachwerks vorbereitet.

Die Eingabe beinhaltet die Geometrie, die Lagerbedingungen, sowie die von außen angreifenden Kräfte. Weiterhin müssen die Steifigkeitseigenschaften der Stabelemente, also die Querschnittsfläche A und das Elastizitätsmodul E eingegeben werden. Diese Werte gelten für alle Stabelemente. Die Stablänge, welche auch Teil der Elementsteifigkeit ist, wird später durch das Programm errechnet.

Die aus der Versuchsanleitung entnommene Aufbauskizze des Fachwerks wird um die Knotennummern für die Lagerungen ergänzt, sowie die Nomenklatur für die eingeprägte Kraft

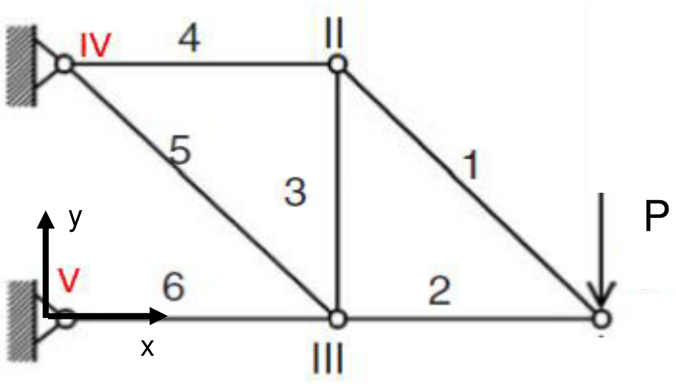


Abbildung 3.2: Beispielfachwerk SE 110.44 angepasst

in „P“ geändert, um Eindeutigkeit herzustellen.

Im Knoten V wird ein x-y-Koordinatensystem definiert.

Für die horizontalen und vertikalen Stäbe wird der Stab 3 (L=300mm) und für die Diagonalen der Stab 5 (L=424 mm) angenommen. (Für eine Auflistung der Stäbe mit ihren Längen siehe Anhang B).

Somit ergibt sich die sogenannte Knotendatei für die Knotenkoordinaten:

Knoten	X-Koordinate	Y-Koordinate
I	600	0
II	300	300
III	300	0
IV	0	300
V	0	0

Tabelle 3.1 Knotendatei

Die Zuordnung der Stäbe zu den Knoten ergibt die sogenannte Elementdatei in Tabelle 3.2:

Stab	Anfangsknoten	Endknoten
1	1	2
2	1	3
3	2	3
4	2	4
5	3	4
6	3	5

Tabelle 3.2 Elementdatei

Die Stabrichtung kann willkürlich gewählt werden, also Anfangs- und Endknoten können beliebig vertauscht werden.

Die Werte für die Querschnittsfläche und der Elastizitätsmodul sind mit $A = 80{,}3 mm^2$ und $E = 1540 N/mm^2$ der Versuchsanleitung zu entnehmen.

Hier ist ein Fehler zu erwarten, da diese in Wirklichkeit nicht homogen über die gesamte Stablänge herrschen. Mit diesem Problem setzt sich die zweite Programmvariante (Fachwerk_2) auseinander, welche in Kapitel 6 beschrieben ist.

Zusätzlich werden die Lagerbedingungen benötigt. Die beiden Festlager, die durch die Knoten IV und V dargestellt sind, werden als Knotenverschiebung von 0 in x- sowie y-Richtung interpretiert. Sollte eine einwertige Lagerung, die eine Verschiebbarkeit nicht parallel zu den Koordinatenachsen zulässt, modelliert werden müssen, ist die Lagerung durch eine Pendelstütze zu ersetzen.

Außerdem muss die aufgebrachte Last von 200 N am Knoten I in negative y-Richtung berücksichtigt werden. Würde die äußere Kraft nicht parallel zu den Koordinatenachsen angreifen, müsste diese in ihre x- und y-Komponente zerlegt werden.

3.2 Eingabe in die Programmierung

In diesem Abschnitt werden die zur Eingabe benötigten Code-Ausschnitte der MAPLE-Datei „Fachwerk_1 Beispiel SE 110.44.mw“ abgebildet.

Hinweise:

- Alle Stellen, an denen eine Eingabe vom Benutzer erforderlich ist, sind gelb hervorgehoben.
- Die Eingabe erfolgt einheitenlos. Darum ist auf ein kongruentes Einheitensystem zu achten. Im Beispiel wird mit [N] als Krafteinheit, [mm] als Längeneinheit, [Nmm] als Momenteneinheit und [N/mm²] als Spannungseinheit gearbeitet. Somit ist auch festgelegt, dass die Ausgabe der Ergebnisse in diesen Einheiten erfolgt.
- Als Dezimaltrennzeichen wird bei MAPLE ein Punkt „.“ verwendet.

Zunächst wird die Geometrie des Fachwerks festgelegt, dafür müssen folgende Dinge eingeben werden:

1. **Knoten/Elementanzahl**

```
Knotenanzahl := 5;
Elementanzahl := 6;
```

MAPLE-Ausschnitt 3.1: Basisdaten

Die Variablen Knotenanzahl und Elementanzahl werden mit dem jeweiligen Wert belegt.

2. **die Position der Knoten, durch Eingabe der Knotenkoordinaten**

```
Koordinaten := Matrix(Knotenanzahl, 2) :

Koordinaten[1, 1] := 600; Koordinaten[1, 2] := 0;
Koordinaten[2, 1] := 300; Koordinaten[2, 2] := 300;
Koordinaten[3, 1] := 300; Koordinaten[3, 2] := 0;
Koordinaten[4, 1] := 0; Koordinaten[4, 2] := 300;
Koordinaten[5, 1] := 0; Koordinaten[5, 2] := 0;
```

MAPLE-Ausschnitt 3.2: Knotendatei

Das Programm erstellt eine Matrix, deren Zeilenanzahl der Anzahl der Knoten entspricht. Die Spaltenanzahl beträgt 2, sodass x- und y-Koordinate untergebracht werden können. In konkreten Beispiel also eine 5x2-Matrix.

Nun werden die Koordinaten der Knoten gemäß Tabelle 3.1 eingetragen. Links die x-Koordinaten (diese werden in der 1. Spalte gespeichert) und rechts die y-Koordinaten (gespeichert in der zweiten Matrix Spalte).

Sollten mehr oder weniger als 5 Knoten vorhanden sein, muss die Eingabe entsprechend angepasst werden. Also zum Beispiel Zeilen nach dem Muster „*Koordinaten[6,1]:= …; Koordinaten[6,2]:= …;*“ hinzugefügt werden.

3. Die Information von wo nach wo die einzelnen Stabelemente verlaufen

$$Elemente := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

MAPLE-Ausschnitt 3.3: Elementdatei

Die Werte der Tabelle 3.2 Elementdatei werden mit Hilfe einer 6x2 Matrix eingegeben. Diese muss manuell erstellt werden, zum Beispiel mit Hilfe des Matrixmenüs auf der linken Bildschirmseite.

Ändert sich die Elementanzahl muss auch diese Matrix entsprechend verändert werden.

Es folgt die Eingabe der **Elementeigenschaften**:

$$A := 80.3$$

$$E := 1540$$

MAPLE-Ausschnitt 3.4: Elementeigenschaften

Lagerbedingungen:

$Knotenverschiebungen := Vector(2\,Knotenanzahl):$

for i **from** 1 **to** $Knotenanzahl$ **do**

$Knotenverschiebungen[2\,i-1] := vx_i;$

$Knotenverschiebungen[2\,i] := vy_i;$

od:

$vx_5 := 0;$

$vy_5 := 0;$

$vy_4 := 0;$

$vx_4 := 0;$

MAPLE-Ausschnitt 3.5: Lagerbedingungen

Zunächst wird ein Vektor für die Knotenverschiebungen erstellt. Dieser enthält doppelt so viele Zeilen, wie Knoten existieren, da jeder Knoten eine Verschiebungskomponente in x-und in y-Richtung besitzt. Die Elemente des Vektors werden entsprechend benannt: vx_1, vy_1, vx_2, … usw.

Dann werden die festgehaltenen Verschiebungen als 0 definiert.

Der letzte Teil der Eingabe beinhaltet die **äußeren Kräfte**:

```
P := Vector(2 Knotenanzahl) :
for i from 1 to Knotenanzahl do
 P[2 i − 1] := px[i]; P[2 i] := py[i];
od:
px[1] := 0 :
py[1] := −200 :
px[2] := 0 :
py[2] := 0 :
px[3] := 0 :
py[3] := 0 :
px[4] := 0 :
py[4] := 0 :
px[5] := 0 :
py[5] := 0 :
```

MAPLE-Ausschnitt 3.6: Äußere Kräfte

Analog zu den Knotenverschiebungen wird wieder zuerst ein Vektor erstellt dessen Elemente benannt werden. Da an jeden Knoten eine Kraftkomponente in x-und y-Richtung angreifen könnte, beinhaltet der Vektor wieder doppelt so viele Zeilen, wie Knoten existieren.

Die angreifende Kraft wird eingetragen und alle anderen Komponenten müssen als 0 definiert werden. (Bei mehr als 5 Komponenten müssen diese manuell hinzugefügt werden: z.B. „$px_6:=0$“)

Damit ist die Eingabe beendet und die Rechnung kann gestartet werden.

4 Berechnung

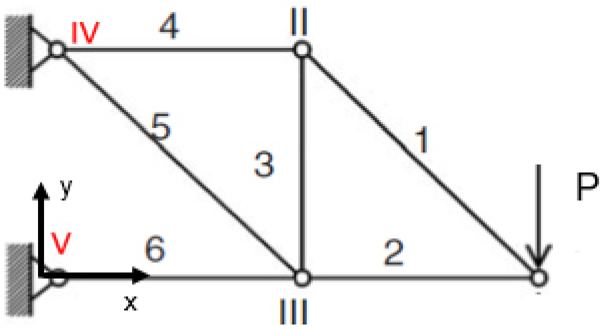
Die Rechenschritte zur Lösung des, im vorherigen Kapitel beschriebenen, mechanischen Problems sollen in diesem Kapitel anhand der verwendeten MAPLE-Befehle erläutert werden. Die folgenden Schritte sind zweigeteilt: Zuerst wird die mathematische Vorgehensweise erklärt und darauffolgend die programmtechnische Umsetzung mit Code-Ausschnitten zur direkten Gegenüberstellung aufgeführt. Zusammen mit den MAPLE-Ausschnitten aus Kapitel 3.2 ergibt sich durch Zusammenfügen des Codes eine funktionsfähige Programmierung.

Allerdings wurde aus Gründen der Übersicht auf die Abbildung der Ergebnisausgaben von MAPLE größtenteils verzichtet. Diese können der vollständig abgebildeten Programmierung im Anhang A oder der beigefügten Datei „Fachwerk_1 Beispiel SE 110.44.mw“ entnommen werden.

4.1 Vorbereitung

Nach dem Öffnen der MAPLE-Datei „Fachwerk_1 Beispiel SE 110.44.mw“ ist als erstes eine Abbildung des Fachwerkaufbaus zu erkennen. Ganz am Anfang steht der Befehl „restart“,

```
restart
```




```
with(LinearAlgebra) :
```

MAPLE-Ausschnitt 4.1: Beginn der Programmierung

hiermit wird der interne Speicher zurückgesetzt. Außerdem wird jetzt schon mit dem Befehl „with(LinearAlgebra)“ die Library für die Matrizenrechnung geladen, da sonst einige Operationen nicht durchgeführt werden können.

In unserem Beispiel haben die Stäbe unterschiedliche Längen. Aus den eingegebenen Koordinaten bestimmt die Programmierung zunächst die Länge der einzelnen Elemente.

```
AnfangsKnoten_der_Elemente := Matrix(Elementanzahl, 2) :
EndKnoten_der_Elemente := Matrix(Elementanzahl, 2) :

for i from 1 to Elementanzahl do
AnfangsKnoten_der_Elemente[i] := Koordinaten[Elemente[i, 1]];
EndKnoten_der_Elemente[i] := Koordinaten[Elemente[i, 2]]
end do:
KdE := ⟨AnfangsKnoten_der_Elemente|EndKnoten_der_Elemente⟩:

Laenge := Vector(Elementanzahl) :

for i from 1 to Elementanzahl do
Laenge[i] := sqrt((KdE[i, 3] − KdE[i, 1])^2 + (KdE[i, 4] − KdE[i, 2])^2);
end do
```

MAPLE-Ausschnitt 4.2: Längenberechnung

In zwei Schritten werden die Koordinaten der Anfangs-und Endknoten Elementweise in eine Matrix mit dem Namen „KdE“ geschrieben.

Ein leerer Vektor mit dem Namen „Laenge“ wird erstellt und gemäß

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{12}$$

mit den Längen der Elemente gefüllt.

4.2 Koordinatentransformation

Damit die Wechselwirkungen der Elemente miteinander berechnet werden können, müssen die Kräfte F sowie die Verschiebungen u in ein globales Koordinatensystem übertragen werden.

Betrachten wir als Beispiel das Stabelement, welches in Kapitel 2.1 eingeführt wurde, lassen sich die Kräfte entlang der Stabachse (lokales Koordinatensystem) durch ihre Komponente in x- und y-Richtung des globalen Koordinatensystems darstellen. Ist die Koordinatenachse des Stabelements um den Winkel α zur x-Achse des globalen Koordinatensystems verdreht, transformieren sich die Kräfte in den Knoten gemäß dem folgenden Zusammenhang:

$$F_1 = F_{1x} * \cos \propto + F_{1y} * \sin \alpha \tag{13}$$

$$F_2 = F_{2x} * \cos \propto + F_{2y} * \sin \alpha \tag{14}$$

Dargestellt in Matrizenschreibweise und den Abkürzungen $s = \sin \alpha$ und $c = \cos \alpha$ ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \end{bmatrix} \tag{15}$$

Für die Verschiebungen gilt derselbe Transformationszusammenhang:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \end{bmatrix} \tag{16}$$

Mit den Abkürzungen

$$F_{lokal} = \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_{lokal} = \begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \ F_{global} = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \end{bmatrix}, \ u_{global} = \begin{bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \end{bmatrix}, \tag{17}$$

sowie

$$T = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \tag{18}$$

und

$$K_{lokal} = \frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

ergibt sich:

$$F_{lokal} = K_{lokal} \cdot u_{lokal} \tag{20}$$

$$F_{lokal} = T \cdot F_{global} \tag{21}$$

$$u_{lokal} = T \cdot u_{global} \tag{22}$$

Für die Transformation von lokalen Koordinaten in globale Koordinaten:

$$F_{global} = T^T \cdot F_{lokal} \tag{23}$$

$$u_{global} = T^T \cdot u_{lokal} \tag{24}$$

Für die Transformationsmatrix gilt außerdem

$$T^{-1} = T^T \tag{25}$$

Somit lässt sich die Steifigkeitsbeziehung in globale Koordinaten überführen:

$$F_{lokal} = K_{lokal} \cdot u_{lokal} \tag{26}$$

$$T^{-1} \cdot T \cdot F_{global} = T^{-1} K_{lokal} \cdot T \cdot u_{global} \tag{27}$$

$$F_{global} = \ T^T \cdot K_{lokal} \cdot T \cdot u_{global} \tag{28}$$

Wird in der rechten Seite der Gleichung

$$T^T \cdot K_{lokal} \cdot T = K_{global} \tag{29}$$

zusammengefasst, ergibt sich das Elastizitätsgesetz in globalen Koordinaten:

$$F_{global} = K_{global} \cdot u_{global} \tag{30}$$

Das Ausmultiplizieren von Gleichung (22) ergibt die symmetrische Elementsteifigkeitsmatrix für ein Element mit zwei Knoten in globalen Koordinaten (Klein, 2012):

$$T^T \cdot K_{lokal} \cdot T = K_{global} = \frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} c^2 & s \cdot c & -c^2 & -s \cdot c \\ s \cdot c & s^2 & -s \cdot c & -s^2 \\ -c^2 & -s \cdot c & c^2 & s \cdot c \\ -s \cdot c & -s^2 & s \cdot c & s^2 \end{bmatrix} \tag{31}$$

4.2.1 Programmtechnische Umsetzung

Um die Elementsteifigkeitsmatrizen transformieren zu können, wird der Verdrehwinkel der einzelnen Elemente gegenüber dem globalen Koordinatensystem ermittelt. Um Probleme mit dem Vorzeichen der Winkel zu entgehen, werden sie pro Element durch ihren Sinus und Kosinus repräsentiert.

```
sinus := Vector(Elementanzahl) :
cosinus := Vector(Elementanzahl) :
for i from 1 to Elementanzahl do
sinus[i] := ((KdE[i, 4] - KdE[i, 2]) / Laenge[i])
 end do;
for i from 1 to Elementanzahl do
cosinus[i] := ((KdE[i, 3] - KdE[i, 1]) / Laenge[i])
 end do
```

MAPLE-Ausschnitt 4.3: Winkelberechnung

Es wird jeweils ein leerer Vektor mit dem Namen „sinus“ und dem Namen “cosinus“ erstellt. Diese werden über die Beziehungen $\sin \propto = \frac{y_2 - y_1}{L}$ und $\cos \propto = \frac{x_2 - x_1}{L}$ mit Werten belegt.

Für die Transformation wurde eine MAPLE-Prozedur erstellt:

$$
\begin{aligned}
&\mathit{Transform} := \mathbf{proc}(s, c, \mathit{Länge}, A, E)\\
&\mathbf{local}\ L, k, T, \mathit{Klo}, \mathit{Kglo};\\
&L := \mathit{Länge};\\
&k := \frac{E \cdot A}{L};\\
&T := \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix};\\
&T^{-1};\\
&\mathit{Klo} := \begin{bmatrix} k & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\\
&\mathit{Kglo} := T^{-1}.\mathit{Klo}.T;\\
&\mathbf{end\ proc};\\
&\\
&\mathit{KGlobal} := \mathit{Vector}(\mathit{Elementanzahl}):\\
&\\
&\mathbf{for}\ i\ \mathbf{from}\ 1\ \mathbf{to}\ \mathit{Elementanzahl}\ \mathbf{do}\\
&\mathit{KGlobal}[i] := \mathit{Transform}(\mathit{sinus}[i], \mathit{cosinus}[i], \mathit{Laenge}[i], A, E)\\
&\mathbf{end\ do}
\end{aligned}
$$

MAPLE-Ausschnitt 4.4: Koordinatentransformation

Die Prozedur benötigt als Eingabe den Sinus, den Kosinus, die Länge sowie die Querschnittsfläche und das Elastizitätsmodul. Daraus wird über den Zusammenhang (24) die globale Elementsteifigkeitsmatrix gebildet.

Als nächstes wird ein Vektor mit Namen „KGlobal“ und einer Zeilenanzahl, die der Elementanzahl entspricht, erstellt. Dieser wird im darauffolgenden Schritt mit dem Ergebnis der Prozedur gefüllt, sodass nun in jeder Zeile eine globale Elementsteifigkeitsmatrix steht.

4.3 Geometrische Kompatibilität

Für jedes Element lässt sich nun die Elastizitätsgleichung in der Form $F_{global} = K_{global} \cdot u_{global}$ aufstellen. Als Ergebnis erhält man ein Gleichungssystem mit voneinander unabhängigen Gleichungen. Somit ist dieses nicht lösbar. Dies wird auch deutlich, wenn das Gleichungssystem als Hypermatrix geschrieben wird. Es werden, wie im Beispiel, sechs Stabelemente verwendet:

$$
\begin{bmatrix}
K_{global}{}^{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & K_{global}{}^{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & K_{global}{}^{3} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & K_{global}{}^{4} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & K_{global}{}^{5} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{global}{}^{6}
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} u_{global}{}^{1} \\ u_{global}{}^{2} \\ u_{global}{}^{3} \\ u_{global}{}^{4} \\ u_{global}{}^{5} \\ u_{global}{}^{6} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} F_{global}{}^{1} \\ F_{global}{}^{2} \\ F_{global}{}^{3} \\ F_{global}{}^{4} \\ F_{global}{}^{5} \\ F_{global}{}^{6} \end{bmatrix}
\qquad (32)
$$

Es entsteht die Gesamtsteifigkeitsmatrix des freien unverbundenen Systems, welche nur auf der Hauptdiagonalen besetzt ist. Somit sind die einzelnen Gleichungen entkoppelt.

Bisher ist die Verbindung der Elemente untereinander nicht berücksichtigt. Durch die feste Kopplung der Elemente in den Knoten, muss die Verschiebung in den miteinander verbundenen Stabenden identisch sein. Die Information darüber, welche Stabenden miteinander verknüpft sind, ist der Elementdatei in Tabelle 3.2 zu entnehmen. Die Kopplung der Stabenden wird durch die gemeinsame Knotenverschiebung ausgedrückt. Als Beispiel betrachten wir Knoten III, in welchem sich die Enden der Stäbe 2 und 3 sowie der Anfang des Stabes 6 treffen (siehe auch Abbildung 3.1).

$$v^{III} = u_2^2 = u_2^3 = u_1^6 \tag{33}$$

Somit kann ein Knotenverschiebungsvektor eingeführt werden, der die Knotenverschiebungen aller Elemente beinhaltet:

$$v = \begin{bmatrix} v^I \\ v^{II} \\ v^{III} \\ v^{IV} \\ v^V \end{bmatrix} \tag{34}$$

Jede Komponente des Vektors ist wiederrum ein zweizeiliger Vektor, da ein x-und ein y-Wert enthalten sein muss.

Durch eine Zuordnungsmatrix Z lassen die Kopplungen der Stabendverschiebungen mit den Knotenverschiebungen wie folgt darstellen:

$$u_{global} = \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \\ u_1^4 \\ u_2^4 \\ u_1^5 \\ u_2^5 \\ u_1^6 \\ u_2^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v^I \\ v^{II} \\ v^{III} \\ v^{IV} \\ v^V \end{bmatrix} \tag{35}$$

Zusammengefasst in symbolischer Schreibweise:

$$u_{global} = Z \cdot v \tag{36}$$

Während jeder Eintrag im Verschiebungsvektor wieder einen x-und y-Komponente enthält, enthält die Zuordnungsmatrix für jede 1 und jede 0 eine Submatrix, damit die Dimensionen kompatibel bleiben (Mathiak, 2010):

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.3.1 Programmtechnische Umsetzung

```
ZuordnungMatrix := Matrix( 2 Elementanzahl, Knotenanzahl) :
for i from 1 to Elementanzahl do
 for j from 1 to Knotenanzahl do
 if j = Elemente[ i, 1 ]
 then ZuordnungMatrix[ 2 i − 1, j ] := 1
fi od od;
for i from 1 to Elementanzahl do
 for j from 1 to Knotenanzahl do
 if j = Elemente[ i, 2 ]
 then ZuordnungMatrix[ 2 i, j ] := 1
fi od od
```

MAPLE-Ausschnitt 4.5: Erstellung der Zuordnungsmatrix

Zunächst wird eine leere Matrix mit dem Namen „ZuordnungMatrix“ erstellt. Diese hat doppelt so viele Zeilen, wie Elemente vorhanden sind und so viele Spalten wie Knoten vorliegen. Durch die Informationen aus der Matrix „Elemente“ wird sie entsprechend der Zuordnung an den richtigen Stellen mit „1“ belegt.

4.4 Äußere Lasten

Zusätzlich zu den inneren Kräften, die über die Fachwerkknoten übertragen werden, können äußere Kräfte in den Knoten angreifen. Hierbei handelt es sich um eingeprägte Lasten, welche bekannt sein müssen, und Lagerreaktionskräfte, welche durch die Methode ermittelt werden sollen, also unbekannt sind.

Betrachtet werden an dieser Stelle zunächst die bekannten Knoten an denen die bekannten eingeprägten Kräfte wirken. Um die Gleichgewichtsbedingungen in den Knoten zu erfüllen, müssen die inneren Kräfte genauso groß wie äußeren Kräfte P sein. Betrachten wir den Knoten I (siehe Abbildung 3.1):

$$P^I = F_1^1 + F_1^2 \tag{37}$$

Wird die rechte Seite der Gleichung durch $p^I = F_1^1 + F_1^2$ ersetzt, ergibt sich

$$P^I = p^I \tag{38}$$

Analog zu dem Knotenverschiebungsvektor wird ein Knotenkraftvektor eingeführt:

$$p = \begin{bmatrix} p^I \\ p^{II} \\ p^{III} \\ p^{IV} \\ p^V \end{bmatrix} \tag{39}$$

wobei auch hier jeder Eintrag eine x-und eine y-Komponente enthält. Auch hier kann die Kopplung der Knoten mit den einzelnen Stabenden über eine Zuordnungsmatrix erfolgen:

$$p = \begin{bmatrix} p^{I} \\ p^{II} \\ p^{III} \\ p^{IV} \\ p^{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ F_1^2 \\ F_2^2 \\ F_1^3 \\ F_2^3 \\ F_1^4 \\ F_2^4 \\ F_1^5 \\ F_2^5 \\ F_1^6 \\ F_2^6 \end{bmatrix} \tag{40}$$

Die vorliegende Zuordnungsmatrix entspricht der transponierten Zuordnungsmatrix Z aus Kapitel 4.3. Damit ergibt sich als symbolische Darstellung (Mathiak, 2010):

$$p = Z^T \cdot F_{global} \tag{41}$$

4.5 Erstellung der Gesamtsteifigkeitsmatrix

Gleichung (23) wird in die Gleichung (34) eingesetzt:

$$p = Z^T \cdot K_{global} \cdot u_{global} \tag{42}$$

Und u_{global} wird durch Gleichung (29) ersetzt:

$$p = Z^T \cdot K_{global} \cdot Z \cdot v \tag{43}$$

Mit der Vereinfachung:

$$Z^T \cdot K_{global} \cdot Z = K_{gesamt} \tag{44}$$

ergibt sich die Gleichung

$$p = K_{gesamt} \cdot v \tag{45}$$

K_{gesamt} ist die Gesamtsteifigkeitsmatrix des ungebundenen Systems. Sie repräsentiert das Fachwerk, allerdings ohne die Lagerung. Es kann sich also in der Ebene mit drei Freiheitsgraden bewegen (zwei translatorische und ein rotatorischer Freiheitsgrad). Man spricht von den sogenannten Starrkörperverschiebungen.

Damit ist das Gleichungssystem noch immer nicht lösbar.

4.5.1 Programmtechnische Umsetzung

```
C := Matrix(Knotenanzahl, 2 Elementanzahl) :

for i from 1 to Knotenanzahl do for j from 1 to Elementanzahl do
 C[i, 2j − 1] := ZuordnungMatrix^+ [i, 2j − 1]·KGlobal[j][1 ..2, 1 ..2];
C[i, 2j] := ZuordnungMatrix^+ [i, 2j − 1]·KGlobal[j][1 ..2, 3 ..4];
 if ZuordnungMatrix^+ [i, 2j] = 1
 then C[i, 2j] := ZuordnungMatrix^+ [i, 2j]·KGlobal[j][3 ..4, 3 ..4];
 C[i, 2j − 1] := ZuordnungMatrix^+ [i, 2j]·KGlobal[j][3 ..4, 1 ..2]
fi od od
 C ZuordnungMatrix :
```

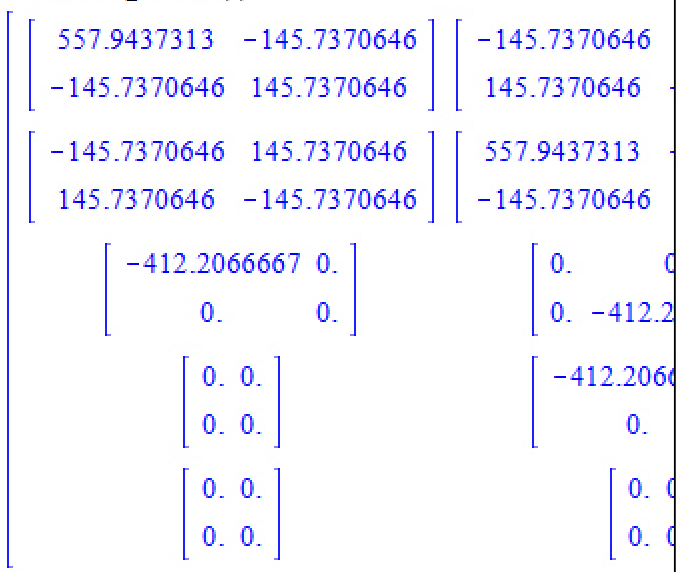
MAPLE-Ausschnitt 4.6: Gesamtsteifigkeitsmatrix

Zunächst wird eine Hilfsmatrix erstellt, die ausschließlich für einen Zwischenschritt benötigt wird. Sie hat den Namen „C“ und die Zeilenanzahl entspricht der Knotenanzahl, während die Spaltenanzahl dem Doppelten der Elementanzahlt entspricht.

Da eine direkte Matrixoperation aufgrund der unterschiedlichen Dimensionen in MAPLE nicht möglich ist („KGlobal“ ist ein Vektor), wird diese durch eine elementweise Multiplikation umgangen. Die Matrix „C“ enthält das Ergebnis der Multiplikation $Z^T \cdot K_{global}$. Danach kann eine Matrixmultiplikation zwischen der Matrix „C“ und der „ZuordnungMatrix“ per MAPLE-Operation erfolgen.

Das Ergebnis wird in einer weiteren Hilfsmatrix „X“ gespeichert, und vereinfacht.

```
X := simplify(evalf(C ZuordnungMatrix))
```



MAPLE-Ausschnitt 4.7: Ausschnitt Hilfsmatrix X

Allerdings ist das Ergebnis eine Verschachtelung von 2x2 Matrizen in einer größeren Matrix (in unserem Beispiel 5x5).

```
K := Matrix(2 Knotenanzahl, 2 Knotenanzahl) :
for i from 1 to Knotenanzahl do
 for j from 1 to Knotenanzahl do
 K[2 i − 1, 2 j − 1] := X[i, j][1, 1];
 K[2 i, 2 j − 1] := X[i, j][2, 1];
 K[2 i − 1, 2 j] := X[i, j][1, 2];
 K[2 i, 2 j] := X[i, j][2, 2];
 od od
```

MAPLE-Ausschnitt 4.9: Umschreibung in die Gesamtsteifigkeitsmatrix K

Um die weiteren Rechenschritte mit MAPLE zu vereinfachen und Probleme aufgrund unterschiedlicher Dimensionen der Vektoren und Matrizen zu vermeiden, werden die Werte der Matrix „X" in eine unverschachtelte Matrix geschrieben. Diese hat den Namen „K" und ist quadratisch mit dem Doppelten der Knotenanzahl als Dimension:

K

$$\begin{bmatrix} 557.9437313 & -145.7370646 & -145.7370646 & 145.737 \\ -145.7370646 & 145.7370646 & 145.7370646 & -145.73 \\ -145.7370646 & 145.7370646 & 557.9437313 & -145.73 \\ 145.7370646 & -145.7370646 & -145.7370646 & 557.943 \\ -412.2066667 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & -412.20 \\ 0. & 0. & -412.2066667 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. \end{bmatrix}$$

MAPLE-Ausschnitt 4.8: Gesamtsteifigkeitsmatrix des unverbundenen Systems

„K" entspricht K_{gesamt} und enthält die gleichen Informationen wie die Hilfsmatrix „X", allerdings in einer, für die Weiterverarbeitung geeigneteren Form.

4.6 Lagerbedingungen und Reaktionskräfte

Um die Starrkörperverschiebungen aus dem Modell zu eliminieren, muss die mechanische Lagerung mathematisch interpretiert werden. Dies wird dadurch umgesetzt, dass die Verschiebungen in den Knoten IV und V gleich null gesetzt werden. (Siehe Kapitel 3.2.)

Die Reaktionskräfte R, die als Unbekannte an den festgehaltenen Knoten auftreten, werden aufgrund der Gleichgewichtsbedingung zu den Kontenkräften p in den entsprechenden Knoten addiert:

$$R + p = K_{gesamt} \cdot v \tag{46}$$

4.6.1 Programmtechnische Umsetzung

Der Vektor „Reaktionskräfte" wird mit derselben Dimension, wie der Vektor „Knotenverschiebungen" (siehe Kapitel 3.2), also dem Doppelten der Knotenanzahl, erstellt.

```
Reaktionskräfte := Vector(2 Knotenanzahl) :
for i from 1 to Knotenanzahl do
Reaktionskräfte[2 i−1] := rx_i; Reaktionskräfte[2 i] := ry_i;
od:
for i from 1 to 2 Knotenanzahl do
 if Knotenverschiebungen[i] ≠ 0
then Reaktionskräfte[i] := 0
fi od:
PR := P + Reaktionskräfte
```

MAPLE-Ausschnitt 4.10: Reaktionskräfte

Im nächsten Schritt wird er mit den Bezeichnungen für die einzelnen Reaktionskräfte gefüllt.

Da nur an den Knoten, an denen eine Verschiebung festgehalten wird, eine Reaktionskraft auftreten kann, werden durch einen Abgleich mit dem Vektor „Knotenverschiebungen" alle Einträge bis auf die festgehaltenen Verschiebungen als Null definiert.

Als letztes werden die Vektoren „P" und „Reaktionskräfte" addiert und das Ergebnis im Vektor „PR" festgehalten.

4.7 Lösen des Gleichungssystems

Da nun die Starrkörperverschiebungen eliminiert sind, kann das Gleichungssystem gelöst werden:

$$R + p = K_{gesamt} \cdot v \tag{47}$$

In unserem Beispiel ergibt sich ein System mit zehn Gleichungen und zehn Unbekannten. Unbekannt sind die Knotenverschiebungen der Knoten I,II und III, sowie die Lagerreaktionen der Knoten IV und V, jeweils mit x-und y-Komponente.

4.7.1 Programmtechnische Umsetzung

Es ist möglich das vorliegende Gleichungssystem mit dem Befehl „solve" direkt zu lösen:

```
KK := K.Knotenverschiebungen:
 Lösung := solve( {KK[1] = PR[1],
KK[2] = PR[2],
 KK[3] = PR[3],
 KK[4] = PR[4],
 KK[5] = PR[5],
 KK[6] = PR[6],
 KK[7] = PR[7],
 KK[8] = PR[8],
 KK[9] = PR[9],
KK[10] = PR[10], })
```

MAPLE-Ausschnitt 4.11: Lösen mit „solve"

Dafür wird die Vektormultiplikation der Gesamtsteifigkeitsmatrix „K" mit dem Vektor „Knotenverschiebungen" durchgeführt und im Hilfsvektor „KK" gespeichert.

Nun werden die Vektoren „KK" und „PR" zeilenweise gleichgesetzt und über den Befehl „solve" gelöst.

Dies hat den Nachteil, dass nur Fachwerke mit fünf Knoten gelöst werden können, da nur dann die Vektoren „KK“ und „PR“ zehn Komponenten haben (für jeden Knoten zwei) und entsprechend genau zehn Gleichungen zum Lösen vorhanden sind. Bei abweichender Knotenanzahl und dementsprechender abweichender Gleichungsanzahl muss der Code an dieser Stelle, der Anzahl gemäß, angepasst werden.

Um diese zusätzlich notwendige Eingabe zu vermeiden, soll das Gleichungssystem mit dem Befehl „LinearSolve“ gelöst werden.

Dieser Befehl kann allerdings nur lineare Gleichungssysteme der Form $A \cdot x = b$ lösen, wobei A die Koeffizientenmatrix, b den Lösungsvektor und x den Vektor der Unbekannten darstellt. Da unser Gleichungssystem

$$R + p = K_{gesamt} \cdot v \tag{48}$$

unbekannte Größen auf beiden Seiten der Gleichung enthält, kann es nicht ohne weiteres in die Form $A \cdot x = b$ gebracht werden.

Aus diesem Grund werden zunächst alle Zeilen und Spalten der Matrix „K“ und des Vektors „PR“ in denen Reaktionskräfte auftreten gelöscht, sodass ein reduziertes Gleichungssystem, bestehend aus einer reduzierten Gesamtsteifigkeitsmatrix und einem reduzierten Kräftevektor, entsteht.

```
a := 0 : Kred := K :
for i from 1 to 2 Knotenanzahl do
if Knotenverschiebungen[i] = 0
then Kred := DeleteRow(Kred, [i - a]);
Kred := DeleteColumn(Kred, [i - a]); a := a + 1;
fi od

a := 0 : PRred := PR :
for i from 1 to 2 Knotenanzahl do
if Knotenverschiebungen[i] = 0
then PRred := DeleteRow(PRred, [i - a]); a := a + 1 :
fi od

Vred := LinearSolve(Kred, PRred)
```

MAPLE-Ausschnitt 4.12: Reduziertes Gleichungssystem

Es wird die Matrix „Kred“ erstellt, und alle Zeilen und Spalten gelöscht in denen die Knotenverschiebung 0 ist. Anschließend geschieht dasselbe mit dem Vektor „PRred“.

Nun kann der Befehl „LinearSolve“ ausgeführt werden. Das Ergebnis ist ein reduzierter Knotenverschiebungsvektor, welcher im Vektor „Vred“ gespeichert wird.

Um die Knotenverschiebungen weiterhin den einzelnen Knoten zuordnen zu können, werden sie an der richtigen Stelle in den Vektor „Knotenverschiebungen“ einsortiert:

```
a := 0 :
for i from 1 to 2 Knotenanzahl do
if Knotenverschiebungen[i] = 0
then a := a + 1; else Knotenverschiebungen[i] := Vred[i - a];
fi od
```

MAPLE-Ausschnitt 4.13: Knotenverschiebungen einsortieren

Das Ergebnis ist ein Vektor der alle Knotenverschiebung mit x-und y-Komponente enthält:

Die gesuchte Verschiebung der Knoten I in negative y-Richtung ist der zweiten Zeile mit ca. 6.14 mm zu entnehmen. (Zu entnehmen sind der Programmierung ausschließlich Längeneinheiten. Dass es sich hierbei um mm handelt wurde durch die Eingabe in Kapitel 3.2 festgelegt)

Um die Lösung für die verbleibenden Unbekannten, die Reaktionskräfte, zu ermitteln, wird die

Knotenverschiebungen

$$\begin{bmatrix} [-1.45558053391862] \\ [-6.14102355609772] \\ [0.485193511306206] \\ [-2.82791502239576] \\ [-0.970387022612414] \\ [-2.34272151108955] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

MAPLE-Ausschnitt 4.14: Knotenverschiebungen

Gesamtsteifigkeitsmatrix auf eine andere Weise reduziert. Es bleiben alle Einträge stehen, die bei der vorrangegangenen Reduzierung gelöscht wurden, und werden in der Matrix „Kred2“ gespeichert.

```
a := 0 : b := 0 : Kred2 := K :
for i from 1 to 2 Knotenanzahl do
if Knotenverschiebungen[i] ≠ 0
then Kred2 := DeleteRow(Kred2, [i − a]); a := a + 1;
else Kred2 := DeleteColumn(Kred2, [i − b]); b := b + 1 :
fi od
```

MAPLE-Ausschnitt 4.15: Reduzierung der "K"-Matrix

Durch die Multiplikation der Matrix „Kred2“ mit dem Vektor der bereits ermittelten Knotenverschiebungen „Vred“ ergeben sich die Reaktionskräfte im vorerst reduzierten Vektor „Reaktionskräftered“:

```
Reaktionskräftered := Kred2.Vred :
d := 0 :
for i from 1 to 2 Knotenanzahl do
if Reaktionskräfte[i] = 0
then d := d + 1;
else Reaktionskräfte[i] := Reaktionskräftered[i − d];
fi od
Reaktionskräfte
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ [-400.000000000000] \\ [200.000000000000] \\ [400.000000000001] \\ [0.] \end{bmatrix}$$

MAPLE-Ausschnitt 4.16: Reaktionskräfte

Analog zu den Knotenverschiebungen werden Komponente der Reaktionskräfte an die richtige Stelle im Gesamtvektor „Reaktionskräfte“ geschrieben.

Durch das hier verwendete Gleichungslösungsverfahren, kann das Gleichungssystem

$$R + p = K_{gesamt} \cdot v \tag{49}$$

unabhängig von der Anzahl der Gleichung gelöst werden.

4.8 Rückrechnung auf die Stabkräfte

Auch wenn an dieser Stelle die gesuchte Verformung bereits ermittelt ist, soll im folgenden Abschnitt auf die Ermittlung der Stabkräfte eingegangen werden. Zumal die Bestimmung der Stabkräfte der Inhalt der Versuchsaufbauten SE110.21 und SE110.22 ist, muss es Bestandteil der FEM-Programmierung sein. Der nachfolgende Prozess ist auch unter dem Begriff der Nachlaufrechnung bekannt.

Da die Knotenverschiebungen bekannt sind, lassen sich über das Elastizitätsgesetz die Stabkräfte ermitteln. Dafür müssen die Verschiebungen wieder in lokale Koordinaten transformiert werden.

$$F_{lokal} = K_{lokal} \cdot T \cdot u_{global} \tag{50}$$

Allerdings werden die Stabendverschiebungen benötigt, nicht die Knotenverschiebungen:

$$F_{lokal} = K_{lokal} \cdot T \cdot Q \cdot v \tag{51}$$

Die Zuordnungsmatrix Q filtert aus den Knotenverschiebungen die, dem entsprechenden Element zugeordneten, Stabendverschiebungen heraus. Als Beispiel betrachten wir Q für das Element 2:

$$Q^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{52}$$

Exemplarisch wird die Gleichung (45) für das Element 2 ausmultipliziert (Mathiak, 2010):

$$F_{lokal}{}^2 = K_{lokal}{}^2 \cdot T \cdot Q^2 \cdot v = \begin{bmatrix} F_1^2 \\ F_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ -200 \end{bmatrix} \tag{53}$$

Es handelt sich bei Stab 2 um einen Druckstab da F_1 welches der Koordinatenrichtung entgegen gerichtet ist, einen positiven Wert hat.

Um die im Stab auftretenden Spannungen zu ermitteln, wird die Stabkraft durch die Stabfläche geteilt.

$$\sigma^2 = \frac{F_2^2}{A} \tag{54}$$

4.8.1 Programmtechnische Umsetzung

Aus den Informationen der Matrix „Elemente“ werden Zuordnungsmatrizen erstellt.

```
Q := Vector(Elementanzahl) :
for i from 1 to Elementanzahl do
Q[i] := Matrix(4, 2 Knotenanzahl) :
Q[i][1, 2 Elemente[i, 1] − 1] := 1 :
Q[i][2, 2 Elemente[i, 1]] := 1 :
Q[i][3, 2 Elemente[i, 2] − 1] := 1 :
Q[i][4, 2 Elemente[i, 2]] := 1 :
od :
```

MAPLE-Ausschnitt 4.17: Zuordnungsmatrix Q

Diese werden in dem zuvor erstellten Vektor „Q“ gespeichert.

Für die Koordinatentransformation wird eine Prozedur mit dem Namen „Rücktransform“ verwendet. Diese benötigt als Übergabewerte, den Sinus, den Kosinus, die Länge, sowie die

$$
\begin{aligned}
&RückTransform := \mathbf{proc}(s, c, Länge, A, E)\\
&\mathbf{local}\, L, k, T, Klo, Kglo;\\
&L := Länge;\\
&k := \frac{E \cdot A}{L};\\
&T := \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix};\\
&Klo := \begin{bmatrix} k & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\\
&Kglo := Klo.T;\\
&\mathbf{end\ proc};\\
&HV1 := Vector(Elementanzahl):\\
&\mathbf{for}\ i\ \mathbf{from}\ 1\ \mathbf{to}\ Elementanzahl\ \mathbf{do}\\
&HV1[i] := RückTransform(sinus[i], cosinus[i], Laenge[i], A, E)\\
&\mathbf{od}:
\end{aligned}
$$

MAPLE-Ausschnitt 4.18: Rücktransformationsprozedur

Stabfläche und den E-Modul. Die Prozedur führt die Multiplikation $K_{lokal}{}^2 \cdot T$ aus Gleichung (47) durch. Das Ergebnis wird im Hilfsvektor „HV1“ gespeichert.

Ein weiterer Hilfsvektor „HV2“ wird mit dem Ergebnis der Multiplikation mit Q belegt.

$$
\begin{aligned}
&HV2 := Vector(Elementanzahl):\\
&\mathbf{for}\ i\ \mathbf{from}\ 1\ \mathbf{to}\ Elementanzahl\ \mathbf{do}\\
&HV2[i] := \mathrm{HV1}[i].Q[i]\\
&\mathbf{od}:
\end{aligned}
$$

MAPLE-Ausschnitt 4.19: Multiplikation mit Q

Die Stabkräfte ergeben sich nun aus der Multiplikation des Vektors „HV2“ mit dem Knotenverschiebungsvektor.

$$
\begin{aligned}
&Stabkräfte := Vector(Elementanzahl):\\
&\mathbf{for}\ i\ \mathbf{from}\ 1\ \mathbf{to}\ Elementanzahl\ \mathbf{do}\\
&Stabkräfte[i] := HV2[i].Knotenverschiebungen\\
&\mathbf{od}:
\end{aligned}
$$

MAPLE-Ausschnitt 4.20: Stabkräfte

Das Ergebnis ist ein vierzeiliger Vektor pro Element in der Form $\begin{bmatrix} -F \\ 0 \\ F \\ 0 \end{bmatrix}$. Aus Übersichtsgründen wird die dritte Zeile extrahiert und in den Vektor „Stabkräftered“ geschrieben.

$Stabkräftered := Vector(Elementanzahl)$:
for i **from** 1 **to** $Elementanzahl$ **do**
$Stabkräftered[i] := Stabkräfte[i][3]$
od:

MAPLE-Ausschnitt 4.22: Extrahierte Stabkräfte

Um die Ergebnisse der FEM-Programmierung übersichtlich ablesen zu können, werden zum

$Stabkräftered$
$Reaktionskräfte$
$$Stabspannungen := \frac{Stabkräftered}{A}$$
$Knotenverschiebungen$

MAPLE-Ausschnitt 4.21: Ergebnisvektoren

Abschluss der Programmierung die Ergebnisvektoren „Stabkräftered“, „Reaktionskräfte“, „Stabspannungen“ und „Knotenverschiebungen“ gesammelt ausgegeben.

5 Kritische Betrachtung des Programms „Fachwerk_1“

5.1 Auswertung

Vergleichen wir die Ergebnisse des in den Kapiteln 3 und 4 ausgewerteten Fachwerk mit der Beispielrechnung in der zugehörigen Versuchsanleitung (siehe Anhang B), stellen wir fest:

- Die Stabkräfte stimmen überein (siehe unten):

Stabkräftered

$$\begin{bmatrix} [282.842712614921] \\ [-200.000000000000] \\ [-200.000000000000] \\ [200.000000000000] \\ [282.842712614922] \\ [-400.000000000001] \end{bmatrix}$$

MAPLE-Ausschnitt 5.1: Ergebnis Stabkräfte

DTP_3
09/2013

SE 110.44 **VERFORMUNG VON FACHWERKEN**

Zusammenfassung der Stabkräfte						
Stab Nr.:	1	2	3	4	5	6
bezogene Kraft	1.41F	-F	-F	F	1.41F	-2F
bei F=200 N	282 N	-200	-200 N	200 N	282 N	-400 N

Abbildung 5.1: Stabkräfte (G.U.N.T. Gerätebau, 2013)

  Auch unabhängig von E-Modul und Querschnittsfläche ermittelt das Programm die Stabkräfte zuverlässig.

  Damit ist es für die Versuche SE110.21 und SE110.22 geeignet, da diese lediglich die Untersuchung der Kräfte zum Bestandteil haben.

- Der gesuchte Verschiebungswert des Knoten I in negative y-Richtung weicht um fast das doppelte ab:

  Während in der Versuchsanleitung ein Wert von 3,21mm errechnet und ein Wert von 3,50 mm gemessen wurden, ergibt die Auswertung der Programmierung einen Wert von 6,14mm.

  Damit eignet sich das Programm in der vorliegenden Form nicht für die Auswertung des Versuches SE 110.44.

5.2 Analyse der Abweichung

Die Abweichung ist dadurch zu erklären, dass die, als homogene Stabelemente modellierten, Stäbe in der Realität nicht annähernd homogen sind, wie schon in Kapitel 3.1 aufgefallen ist. Sie bestehen an den Enden aus jeweils einem Verbindungsstück aus Metall, zwischen dem sich das PVC-Rohr befindet, für welches das E-Modul und die Querschnittsfläche bekannt sind (siehe Abbildung 5.2).

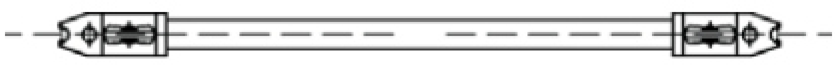


Abbildung 5.2: Beispielstab aus der Versuchsanleitung (G.U.N.T. Gerätebau, 2013)

Je nach Stablänge beträgt der Anteil der Länge des PVC-Rohrs nur ein Bruchteil der Gesamtlänge, wie dem folgenden Auszug der Versuchsanleitung in Abbildung 5.3 zu entnehmen ist.

SE 110.44 VERFORMUNG VON FACHWERKEN

6.2 Technische Daten

Stäbe - Stablängen

Stab	Länge	Einheitslänge	Länge	Länge	Anzahl
Nr.:	nominell		zw. Bolzen	PVC-Rohr	
	L_N		L_B	L_{PVC}	
1	150	L/2	90	6	2
2	259	$L\cdot\sqrt{3}/2$	199	131	5
3	300	L	240	136	7
4	397	$L\cdot\sqrt{7}/2$	337	233	1
5	424	$L\cdot\sqrt{2}$	364	260	3
6	520	$L\cdot\sqrt{3}$	460	356	1

PVC-Rohr: 16 x 1.8 mm
Material: PVC-U
Querschnittsfläche: 8.03×10^{-5} m²
gemessener PVC E-Modul: 1540 N/mm²
(bezogen auf tatsächliche PVC-Rohrlänge)

Abbildung 5.3: Stabeigenschaften (G.U.N.T. Gerätebau, 2013)

Die Rechnung in der Versuchsanleitung (vgl. (G.U.N.T. Gerätebau, 2013)) betrachtet den Metallanteil als dehnstarr und berücksichtigt nur die tatsächliche Länge des PVC-Rohrs, während die FEM-Rechnung den E-Modul und die von PVC über die gesamte Stablänge angenommen hat.

Auch die Rechnung der Versuchsanleitung unterliegt einem Fehler, da der Metallanteil in der Realität nicht dehnstarr ist. Allerdings ist die Dehnsteifigkeit der Metallstücke um mehrere Größenordnungen höher als die des PVC-Rohr, sodass diese Vernachlässigung zulässig ist.

5.3 Verbesserung der Modellierung

Zur Verbesserung der Modellierung im FEM-Programm sind mehrere Varianten vorstellbar, von denen drei im Folgenden diskutiert werden sollen:

5.3.1 „Verschmierter" E-Modul

Um realistischere Verschiebungswerte zu erhalten, wird ein, über die Stablänge gemittelter, E-Modul verwendet. Um die Programmstruktur nicht zu beeinflussen, besteht der eingegebene E-Modul aus dem Mittelwert der E-Module der verwendeten Stäbe.

Dies bietet den bereits erwähnten Vorteil, dass das Programm nicht verändert werden muss, und damit alle Fachwerke mit derselben Programmvariante ausgewertet werden können.

Dies bedeutet allerdings eine umfangreichere Vorbereitung der Werte bevor sie in das Programm eingegeben werden können. Ein weiterer Nachteil des verschmierten E-Moduls besteht in der schlechten Genauigkeit, die für die Knotenverschiebungswerte zu erwarten ist.

5.3.2 Anpassung der Stablänge

In der Variante wird die Vereinfachung verwendet, die in der Beispielrechnung zum Einsatz kam: Statt die berechnete Stablänge zu verwenden, wird der Eingabeabschnitt des Programms um die Eingabe der dehnungswirksamen Stablänge ergänzt. Die wirksame Stablänge wird dann zur Aufstellung der Elementsteifigkeitsmatrix verwendet.

Als Vorteil dieser Variante ist die hohe Genauigkeit zu nennen. Sie entspricht der Genauigkeit der Rechnung in der Versuchsanleitung, welche, wie oben dargelegt, einen sehr geringen Fehler beinhaltet. Des Weiteren ist eine Vergleichbarkeit zur Handrechnung zu erkennen. Dazu kommt, dass die benötigten Eingabewerte schon vorhanden sind, und der Versuchsanleitung direkt entnommen werden können.

Jedoch beinhaltet diese Variante eine Modifikation des Programms, sowie eine umfangreichere Eingabe.

5.3.3 Unterteilung des Stabelements

Durch eine Unterteilung des Stabelements in zwei Unterelemente, die mit unterschiedlichen Steifigkeitseigenschaften belegt werden können, kann der verwendete Fachwerkstab sehr realitätsnah modelliert werden. In einem Abschnitt steht die Steifigkeit des PVC-Abschnitts, während der andere die Metallsteifigkeit beinhaltet.

Während der Vorteil dieser Variante vor allem in der sehr hohen Genauigkeit liegt, bringt sie einen großen Mehraufwand in der Programmierung, sowie bei der Eingabe mit sich. Außerdem sind die Steifigkeitseigenschaften der Metallstücke der Stäbe nicht in der Versuchsanleitung erwähnt, und müssten zusätzlich ermittelt werden.

6 Modifikation der Programmierung

Als bester Kompromiss zwischen Genauigkeit, Benutzerfreundlichkeit und Aufwand erschient die Variante 5.3.2 „Anpassung der Stablänge“. Im Folgenden ist beschrieben, wie die Modifizierung programmtechnisch umgesetzt wurde und wie die zusätzliche Eingabe erfolgen muss. Das Ergebnis ist das Programm „Fachwerk_2“.

6.1 Eingabe

Der Vektor „Stablänge“ wird mit einer Zeile pro vorhandenem Element erstellt.

```
Wirksame Stablänge
Stablänge := Vector(Elementanzahl) :
Stablänge[1] := 260;
Stablänge[2] := 136;
Stablänge[3] := 136;
Stablänge[4] := 136;
Stablänge[5] := 260;
Stablänge[6] := 136;
```

MAPLE-Ausschnitt 6.1: Eingabe der Stablänge

Die Werte der wirksamen Stablänge, welche der Versuchsanleitung zu entnehmen sind, werden durch den Benutzer eingetragen. Sollte die Elementanzahl abweichen, muss die Eingabe angepasst werden.

6.2 Berechnungsteil

Im Berechnungsteil wurden lediglich die Übergabevariablen der Transformationsmatrizen angepasst. Der Vektor „Laenge“ wurde durch den Vektor „Stablänge“ ersetzt.

6.3 Kritische Betrachtung des Programms „Fachwerk_2“

Um das Ergebnis der Modifikation des Programms beurteilen zu können, wird wieder der Vergleich mit den Berechnungen der Versuchsanleitung angestellt.

Als Verschiebung des Knotens I in negative y-Richtung ergibt sich diesmal aus der FEM-Programmierung ein Wert von 3,22mm. Die Handrechnung der Versuchsanleitung liefert 3,21mm. Die Abweichung der Ergebnisse beträgt 0,3% und ist auf Fehler bei der Rundung von Zwischenergebnissen zurückzuführen.

Damit ist das Programm für die Auswertung des Versuchsstands SE 110.44 geeignet.

7 Erweiterung um Balkenelemente

In den vorangegangenen Kapiteln wurde die Programmierung für die Auswertung von Fachwerken vorgestellt. In diesem Kapitel wird beschrieben, wie sie modifiziert wird, damit sie zur Auswertung der Rahmentragwerke gemäß der Aufgabenstellung SE110.20 geeignet ist. Das Ergebnis ist die Programmvariante „Rahmen".

Die Grundstruktur der Finite-Elemente-Methode, welche in den Kapiteln 3 und 4 ausführlich dargestellt wurde, bleibt unverändert und damit ist der Umfang der Modifikationen gering.

7.1 Erweiterung der Eingabe

Zur Aufstellung der Elementsteifigkeit wird, aufgrund der Übertragung der Biegemomente bei Balkenelementen, eine weitere Elementeigenschaft benötigt. Es handelt sich um das Flächenmoment zweiter Ordnung bezogen auf die z-Achse des Balkenelements I_z.

Kapitel 2.2 ist zu entnehmen, dass bei Balkenelementen in jedem Knoten zusätzlich eine Querkraft, sowie ein Moment übertragen wird. Dies führt dazu, dass bei der Eingabe der Lagerbedingungen zusätzlich ein Moment festgehalten werden kann. Dies ist die

```
Knotenverschiebungen := Vector(3 Knotenanzahl) :
for i from 1 to Knotenanzahl do
Knotenverschiebungen[3 i − 2] := vx_i;
Knotenverschiebungen[3 i − 1] := vy_i;
Knotenverschiebungen[3 i] := φ_i
od:

vx_1 := 0;
vy_1 := 0;
φ_1 := 0;
```

MAPLE-Ausschnitt 7.1: Feste Einspannung am Knoten I

mathematische Interpretation eines dreiwertigen Lagers, auch als feste Einspannung bekannt.

Auch bei den von außen aufgebrachten Lasten kann zusätzlich ein Moment wirken. Sollte keines vorhanden sein, muss dieses, analog zu den Kräften gleich Null gesetzt werden.

7.2 Modifizierung des Berechnungsteils

Sowohl die Elementsteifigkeitsmatrix als auch die Transformationsmatrix wurden angepasst (siehe Kapitel 2.2):

$$T := \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$T^{-1};$

$$Klo := \begin{bmatrix} \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & -\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E \cdot Iz}{L^3} & \frac{6E \cdot Iz}{L^2} & 0 & -\frac{12E \cdot Iz}{L^3} & \frac{6E \cdot Iz}{L^2} \\ 0 & \frac{6E \cdot Iz}{L^2} & \frac{4\,E \cdot Iz}{L} & 0 & -\frac{6E \cdot Iz}{L^2} & \frac{2E \cdot Iz}{L} \\ -\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12\,E \cdot Iz}{L^3} & -\frac{6E \cdot Iz}{L^2} & 0 & \frac{12E \cdot Iz}{L^3} & -\frac{6E \cdot Iz}{L^2} \\ 0 & \frac{6E \cdot Iz}{L^2} & \frac{2\,E \cdot Iz}{L} & 0 & -\frac{6E \cdot Iz}{L^2} & \frac{4\,E \cdot Iz}{L} \end{bmatrix};$$

MAPLE-Ausschnitt 7.2: Transformationsmatrix und Elementsteifigkeitsmatrix

Da das Moment, sowie der Verdrehwinkel durch eine Verdrehung der Koordinatensysteme nicht beeinflusst wird, wurde die Transformationsmatrix lediglich um die 1 erweitert.

Weiterhin wurden diverse Matrizen und Vektoren in ihrer Dimension erweitert, da pro Knoten nun drei statt zwei Eigenschaften übertragen werden müssen. Dies findet sich in der Modifikation der „do“-Schleifen wieder. Aufgrund der Dimensionsänderung, laufen alle Zählvariablen „i“ statt bis zum doppelten Wert der Knotenanzahl (vgl. Kapitel 4.7.1), bis zum dreifachen Wert der Knotenanzahl

for i **from** 1 **to** 3 $Knotenanzahl$ **do**

MAPLE-Ausschnitt 7.3: do-Schleife

Die Dimensionsänderung betrifft außerdem die erste Teilmultiplikation der Gleichung (38) und

$C[i, 2j-1] := ZuordnungMatrix^{+}[i, 2j-1] \cdot \mathrm{KGlobal}[j][1..3, 1..3];$
$C[i, 2j] := ZuordnungMatrix^{+}[i, 2j-1] \cdot KGlobal[j][1..3, 4..6];$

if $ZuordnungMatrix^{+}[i, 2j] = 1$
then $C[i, 2j] := ZuordnungMatrix^{+}[i, 2j] \cdot \mathrm{KGlobal}[j][4..6, 4..6];$
$C[i, 2j-1] := ZuordnungMatrix^{+}[i, 2j] \cdot \mathrm{KGlobal}[j][4..6, 1..3]$ **fi od od**

MAPLE-Ausschnitt 7.4: Erstellung der Hilfsmatrix "C"

den Einbau der Werte aus der Hilfsmatrix „X“ in die Gesamtsteifigkeitsmatrix „K“, (vgl. Kapitel 4.5.1)

```
K := Matrix(3 Knotenanzahl, 3 Knotenanzahl) :
for i from 1 to Knotenanzahl do
 for j from 1 to Knotenanzahl do
 K[3 i − 2, 3 j − 2] := X[i, j][1, 1];
 K[3 i − 1, 3 j − 2] := X[i, j][2, 1];
K[3 i, 3 j − 2] := X[i, j][3, 1];
K[3 i − 2, 3 j − 1] := X[i, j][1, 2];
K[3 i − 1, 3 j − 1] := X[i, j][2, 2];
K[3 i, 3 j − 1] := X[i, j][3, 2];
K[3 i − 2, 3 j] := X[i, j][1, 3];
K[3 i − 1, 3 j] := X[i, j][2, 3];
K[3 i, 3 j] := X[i, j][3, 3];
 od od
```

MAPLE-Ausschnitt 7.5: Erstellung der K-Matrix

sowie die Erstellung des Vektors „Reaktionskräfte“ (vgl. Kapitel 4.6.1).

```
Reaktionskräfte := Vector(3 Knotenanzahl) :
for i from 1 to Knotenanzahl do Reaktionskräfte[3 i − 2] := rx_i;
Reaktionskräfte[3 i −1] := ry_i; Reaktionskräfte[3 i ] := rm_i;
od:
for i from 1 to 3 Knotenanzahl do
 if Knotenverschiebungen[i] ≠ 0 then Reaktionskräfte[i] := 0
  fi od
```

MAPLE-Ausschnitt 7.6: Erstellung des Vektors Reaktionskräfte

Da der Versuch SE110.20 ausschließlich auf die Verformung der Rahmentragwerke eingeht, entfällt in dieser Programmierung die Nachlaufrechnung.

Die Ergebnisvektoren „Knotenverschiebungen“ und „Reaktionskräfte“, die am Ende der Programmierung stehen, werden aufgrund ihrer Größe von MAPLE nicht mehr angezeigt, sondern zusammengefasst. Durch Doppelklicken auf den Vektor öffnet sich ein Fenster, welches die Inhalte des Vektors in der Regel anzeigt. Dies funktioniert in diesem Fall nicht, und der Vektor scheint leer zu sein.

Um die Ergebnisse abzurufen, muss die einzelne Vektorkomponente extrahiert werden (in diesem Fall die Verschiebung des Knoten 3 in x-Richtung, welches die 7. Komponente ist):

```
Knotenverschiebungen
                         [ 1 .. 12 Vector_column   ]
                         [ Data Type: anything     ]
                         [ Storage: rectangular    ]
                         [ Order: Fortran_order    ]
evalf(Knotenverschiebungen[7])
                         [ 1.800006141 ]
```

MAPLE-Ausschnitt 7.7: Ergebnis extrahieren

7.3 Kritische Betrachtung des Programms „Rahmen“

Der Versuch SE 110.20 hat die Ermittlung der Verschiebung eines Rahmenpunktes aufgrund einer aufgebrachten Kraft zum Inhalt (siehe Versuchsanleitung SE110.20). Als Ergebnis wird ein Verschiebungswert von 2,02mm gemessen und ein Wert von 1,84mm berechnet. (G.U.N.T. Gerätebau, 2015)

Die FEM-Programmierung liefert einen Verschiebungswert von 1,80mm. Damit beträgt die Abweichung 2,2% zum Ergebnis der Handrechnung. Auch in diesem Fall können Rundungsfehler als Erklärung herangezogen werden.

Damit ist das Programm „Rahmen“ zur Auswertung des Versuchs SE 110.20 geeignet.

8 Hinweise zur Anwendung

Dieser Bachelorarbeit sind die programmierten MAPLE-Dateien in digitaler Form beigelegt.

Die einzelnen Eingabe- und Rechenschritte sind in den Dateien mit Kommentaren versehen. Dies dient nicht nur der Verbesserung der Benutzerfreundlichkeit, sondern ermöglicht auch ein leichteres Nachvollziehen der Rechenschritte. Somit ist ein Verändern und Erweitern der Programmierung leicht möglich.

Für jeden Versuchsstand ist eine Datei mit der geeigneten Programmvariante erstellt worden. Diese ist mit den Werten der Beispielrechnung aus der jeweiligen Versuchsanleitung vorausgefüllt. Da der Versuch SE 110.44 sowohl mit der Variante „Fachwerk_1" als auch mit „Fachwerk_2" ausgewertet wurde, sind für diesen Versuch beide Dateien vorhanden. Außerdem wurde zur Erstellung der Code-Ausschnitte eine Version des Programms „Fachwerk_1" ohne Kommentare erstellt.

Um die verschiedenen Aufbauvarianten eines Versuchsstandes auszuwerten, muss der Eingabeteil der Dateien angepasst werden. Dabei dienen die vorausgefüllten Zahlenwerte der Beispiele als Orientierung. Das Vorgehen ist in Kapitel 3 beispielhaft beschrieben. Als weitere Unterstützung sind die oben erwähnten Kommentare zu verstehen.

Insgesamt sind sechs MAPLE-Dateien angehängt. Diese lassen sich mithilfe ihres Dateinamens den Versuchsständen zuordnen, da dieser nach dem Muster „[Programmname] [Beispielname]" aufgebaut ist. Im Einzelnen sind dies:

- „Rahmen Beispiel SE 110.20.mw"
- „Fachwerk_1 Beispiel SE 110.21.mw"
- „Fachwerk_1 Beispiel SE 110.22.mw"
- „Fachwerk_1 Beispiel SE 110.44.mw"
- „Fachwerk_2 Beispiel SE 110.44.mw"
- „Fachwerk_1 Beispiel SE 110.21 ohne Kommentare.mw"

Die Datei „Fachwerk_1 Beispiel SE 110.44.mw" ist zusätzlich als Codeausdruck in schriftlicher Form angehängt.

9 Ausblick

Die erstellten Programme haben einen Leistungsumfang, der die Anforderungen der Aufgabenstellung übertrifft. Zur weiteren Verbesserung der Lehre lassen sich dennoch diverse Erweiterungsmöglichkeiten erkennen, deren Ansätze vorgestellt werden sollen. Diese lassen sich in die Bereiche Benutzerfreundlichkeit und Funktionsumfang unterteilen.

9.1 Verbesserung der Benutzerfreundlichkeit

Die Eingabe der Fachwerksdaten in die Programmierung ist aufwendig, unübersichtlich und wenig intuitiv, wenn keine Erfahrung im Umgang mit FEM-Programmen vorhanden ist. Außerdem erfordert sie als Vorbereitung die Erstellung der Knoten- und Elementdatei.

Dies kann durch das Einbinden eines grafischen Interface, welches die Eingabe der Geometrie, der Randbedingungen sowie der äußeren Lasten ermöglicht, verbessert werden. Als Anregung sei das Programm „Fachwerk" (GNU-GPL lizensiert) von Adrian Vontobel genannt. (Vontobel, 2016)

Auch die Ausgabe kann durch eine grafische Darstellung veranschaulicht werden. Die dafür erforderlichen Funktionen sind in MAPLE vorhanden.

Des Weiteren kann das Programm „Fachwerk_2" um eine Automatisierung der Zuordnung der wirksamen Stablänge zu den Elementen aufgrund der berechneten Länge erweitert werden.

9.2 Erweiterung des Funktionsumfangs

Die erstellten Programme sind auf die Auswertung der oben genannten Versuchsstände zugeschnitten. Eine Erweiterung des Funktionsumfangs ist für zwei verschiedene Anwendungsgebiete sinnvoll:

1. Die Anpassung der Programmierung an Versuchsstände, die durch das Mechaniklabor neu angeschafft werden.
2. Der Einsatz der Programmierung für Anwendungen außerhalb des Mechaniklabors, beispielsweise in Lehrveranstaltungen zur Technischen Mechanik oder zur FEM.

In beiden Fällen ist eine Ergänzung um weitere finite Elemente, sowie um eine 3-D-Modellierung sinnvoll. Für beides bietet die verwendete Grundstruktur die Möglichkeit der Integration. Für den zweiten Anwendungsfall ist außerdem die Erweiterung des Programms „Rahmen" nötig: Um eine Aussage über die Belastung eines Balkenelements treffen zu können, muss das Programm um eine Nachlaufrechnung zur Bestimmung der auftretenden Spannungen ergänzt werden. Auch erscheint eine selbstständige Berechnung des Flächenmoments zweiter Ordnung I aus der Balkengeometrie durch das Programm als sinnvolle Erweiterung.

Da auf dem Markt schon vielfältige Lösungen im Bereich der Finite-Elemente-Methode vorhanden sind, ist abzuwägen, ob der Aufwand für die zusätzliche Programmierung lohnenswert ist.

10 Literaturverzeichnis

Betten, J. (2003). *Finite Elemente für Ingenieure 1 - Grundlagen, Matrixmethoden, Elastisches Kontinuum.* Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag.

Finite-Elemente-Methode. (6. Juni 2016). Abgerufen am 6. Juli 2016 von Wikipedia - die freie Enzyklopädie: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Finite-Elemente-Methode&oldid=155042628

G.U.N.T. Gerätebau. (September 2013). Versuchsanleitung SE 110.44 Verformung von Fachwerken. Brunsbüttel.

G.U.N.T. Gerätebau. (September 2015). Versuchanleitung SE110.20 Verformung von Rahmen. Brunsbüttel.

Gross, D., Hauger, W., Schröder, J., & Wall, W. (2013). Fachwerke. In *Technische Mechanik 1 - Statik* (S. 151-171). Berlin/Heidelberg: Springer Verlag.

Klein, B. (2012). *FEM - Grundlagen un Anwendungen der Finite-Elemente-Methode im Maschinen- und Fahrzeugbau .* Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag / Springer Fachmedien.

Maplesoft. (2015). *Maple Quick Start.* Abgerufen am 6. Juni 2016 von https://www.maplesoft.com/support/training/coursecontent12/QuickStartGuide.pdf

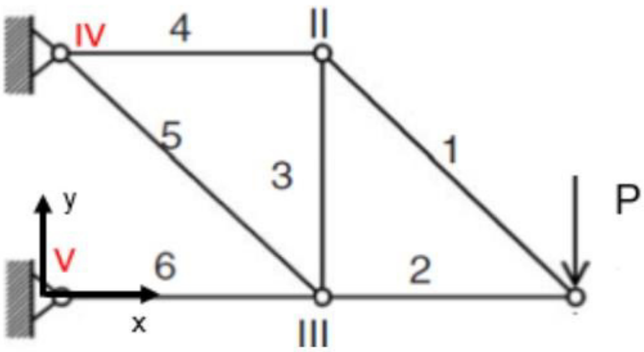
Mathiak, F. U. (2010). *Die Methode der finiten Elemente (FEM) - Einführung und Grundlagen.* Abgerufen am 6. Juni 2016 von Mechanik-Info.de: http://www.mechanik-info.de/dokumente/Skript_FEM.pdf

Merkel, M., & Öchsner, A. (2014). *Eindimensionale Finite Elemente - Ein Einstieg in die Methode.* Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag.

Vontobel, A. (20. Mai 2016). *Fachwerk.* Abgerufen am 05. Juli 2016 von Fachwerk: http://fachwerk.sourceforge.net/data/doc/Fachwerk-Intro.de.pdf

Anhang A: Code „Fachwerk_1 Beispiel SE110.44“

restart



with(*LinearAlgebra*) :

Eingabe:

Geometrie
1.
Knotenanzahl := 5;
Elementanzahl := 6;

5
6 **(1)**

2. Koordinaten der Knoten
Koordinaten := *Matrix*(*Knotenanzahl*, 2) :

 # Hier die x-und y-Koordinaten der Knoten eintragen
 # Sollten mehr oder weniger als 5 Knoten vorhanden sein, muss die Eingabe entsprechend angepasst werden. Also zum Beispiel Zeilen nach dem Muster „Koordinaten[6,1]: = ...; Koordinaten[6,2] : = ...;" hinzugefügt werden
Koordinaten[1, 1] := 600; *Koordinaten*[1, 2] := 0;
Koordinaten[2, 1] := 300; *Koordinaten*[2, 2] := 300;
Koordinaten[3, 1] := 300; *Koordinaten*[3, 2] := 0;
Koordinaten[4, 1] := 0; *Koordinaten*[4, 2] := 300;
Koordinaten[5, 1] := 0; *Koordinaten*[5, 2] := 0;

600
0
300
300

$$300$$
$$0$$
$$0 \qquad (2)$$

3. Zuordnung
 # Hier erfolgt die Zuordnung der Elemente zu den Knoten
 # Diese Matrix muss manuell erstellt werden, zum Beispiel mit Hilfe des Matrixmenüs auf der linken Bildschirmseite.
Ändert sich die Elementanzahl muss auch diese Matrix entsprechend verändert werden.

$$Elemente := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Elementeigenschaften
$A := 80.3$ *# Bei der Eingabe ist auf ein kongruentes Einheitensystem zu achten!*

$$80.3 \qquad (3)$$

$E := 1540$

$$1540 \qquad (4)$$

$Knotenverschiebungen := Vector(2\ Knotenanzahl)$:
for i **from** 1 **to** $Knotenanzahl$ **do** $Knotenverschiebungen[2\ i-1] := vx_i$; $Knotenverschiebungen[2\ i] := vy_i$;
#Hier muss die Lagerung eingegeben werden. Festgehaltene Verschiebungen werden :=0 definiert.
#eine schiefe Lagerung ist durch einen zusätzlichen Stab zu umschreiben.
od:
$vx_5 := 0$;
$vy_5 := 0$;
$vy_4 := 0$;
$vx_4 := 0$;

#Kraftvektoren der äußeren Kräfte eingeben

#Die angreifenden Kräfte werden eingetragen und alle anderen Komponenten müssen als 0 definiert werden. Bei mehr als 5 Komponenten müssen diese manuell hinzugefügt werden: z.B. "px_6:=0"
$P := Vector(2\ Knotenanzahl)$:
for i **from** 1 **to** $Knotenanzahl$ **do**
$P[2\ i-1] := px_i$; $P[2\ i] := py_i$; **od**:

$px_1 := 0 :$
$py_1 := -200 :$
$px_2 := 0 :$
$py_2 := 0 :$
$px_3 := 0 :$
$py_3 := 0 :$
$px_4 := 0 :$
$py_4 := 0 :$
$px_5 := 0 :$
$py_5 := 0 :$

Berechnung

AnfangsKnoten_der_Elemente := *Matrix*(*Elementanzahl*, 2) :
EndKnoten_der_Elemente := *Matrix*(*Elementanzahl*, 2) :

(5)

for *i* **from** 1 **to** *Elementanzahl* **do** *AnfangsKnoten_der_Elemente*[*i*] := *Koordinaten*[*Elemente*[*i*, 1]];
EndKnoten_der_Elemente[*i*] := *Koordinaten*[*Elemente*[*i*, 2]]
end do:
KdE := ⟨*AnfangsKnoten_der_Elemente*|*EndKnoten_der_Elemente*⟩ :

$$\begin{bmatrix} \textit{12 x 5 Matrix} \\ \textit{Data Type: anything} \\ \textit{Storage: rectangular} \\ \textit{Order: Fortran\_order} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Laenge := *Vector*(*Elementanzahl*) :

#Länge der Elemente ermitteln

(7)

for *i* **from** 1 **to** *Elementanzahl* **do**
$Laenge[i] := \mathrm{sqrt}\left(\left(KdE[i,3]-\mathrm{KdE}[i,1]\right)^2+\left(KdE[i,4]-\mathrm{KdE}[i,2]\right)^2\right);$
end do

$$300\sqrt{2}$$
$$300$$
$$300$$
$$300$$
$$300\sqrt{2}$$
$$300 \quad (8)$$

Laenge

$$\begin{bmatrix} 300\sqrt{2} \\ 300 \\ 300 \\ 300 \\ 300\sqrt{2} \\ 300 \end{bmatrix} \quad (9)$$

sinus := *Vector*(*Elementanzahl*) :
cosinus := *Vector*(*Elementanzahl*) :
\# *Winkel der Elemente ermitteln*
for *i* **from** 1 **to** *Elementanzahl* **do**

$$sinus[i] := \left(\frac{(KdE[i,4]-KdE[i,2])}{Laenge[i]}\right)$$

end do ;
for *i* **from** 1 **to** *Elementanzahl* **do**

$$cosinus[i] := \left(\frac{(KdE[i,3]-KdE[i,1])}{Laenge[i]}\right)$$

end do

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}$$
$$0$$
$$-1$$
$$0$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{2}$$
$$0$$
$$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$$
$$-1$$
$$0$$
$$-1$$
$$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$$
$$-1 \quad (10)$$

sinus

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

cosinus

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

#Stabelemente transformieren in globale Koordinaten, sodass sie zur Gesamtsteifigkeitsmatrix zusammengesfasst werden können.

$Transform := \mathbf{proc}(s, c, Länge, A, E)$
$\mathbf{local} L, k, T, Klo, Kglo;$
$L := Länge;$

$k := \frac{E \cdot A}{L};$

$$T := \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix};$$

$T^{-1};$

$$Klo := \begin{bmatrix} k & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$Kglo := T^{-1}.Klo.T;$

end proc;

$$\textbf{proc}(s, c, Länge, A, E) \tag{13}$$

```
    local L, k, T, Klo, Kglo;
    L := Länge;
    k := E * A/L;
    T := Matrix(1 ..4, 1 ..4, {(1, 1) = c, (1, 2) = s, (1, 3) = 0, (1, 4) = 0, (2, 1) = −s, (2, 2)
    = c, (2, 3) = 0, (2, 4) = 0, (3, 1) = 0, (3, 2) = 0, (3, 3) = c, (3, 4) = s, (4, 1) = 0, (4, 2)
    = 0, (4, 3) = −s, (4, 4) = c}, datatype = anything, storage = rectangular, order
    = Fortran_order, subtype = Matrix);
    1/T;
    Klo := Matrix(4, 4, {(1, 1) = k, (1, 2) = 0, (1, 3) = −k, (1, 4) = 0, (2, 1) = 0, (2, 2)
    = 0, (2, 3) = 0, (2, 4) = 0, (3, 1) = −k, (3, 2) = 0, (3, 3) = k, (3, 4) = 0, (4, 1) = 0, (4,
    2) = 0, (4, 3) = 0, (4, 4) = 0});
    Kglo := Typesetting:-delayDotProduct(Typesetting:-delayDotProduct(1/T, Klo), T)
end proc
```

$KGlobal := Vector(Elementanzahl)$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

for i **from** 1 **to** $Elementanzahl$ **do**
$KGlobal[i] := Transform(sinus[i], cosinus[i], Laenge[i], A, E)$
end do

$$\begin{bmatrix} 103.0516667\sqrt{2} & -103.0516667\sqrt{2} & -103.0516667\sqrt{2} & 103.0516667\sqrt{2} \\ -103.0516667\sqrt{2} & 103.0516667\sqrt{2} & 103.0516667\sqrt{2} & -103.0516667\sqrt{2} \\ -103.0516667\sqrt{2} & 103.0516667\sqrt{2} & 103.0516667\sqrt{2} & -103.0516667\sqrt{2} \\ 103.0516667\sqrt{2} & -103.0516667\sqrt{2} & -103.0516667\sqrt{2} & 103.0516667\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 412.206666700000 & 0. & -412.206666700000 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. \\ -412.206666700000 & 0. & 412.206666700000 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 412.206666700000 & 0. & -412.206666700000 \\ 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & -412.206666700000 & 0. & 412.206666700000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 412.206666700000 & 0. & -412.206666700000 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. \\ -412.206666700000 & 0. & 412.206666700000 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 103.0516667\sqrt{2} & -103.0516667\sqrt{2} & -103.0516667\sqrt{2} & 103.0516667\sqrt{2} \\ -103.0516667\sqrt{2} & 103.0516667\sqrt{2} & 103.0516667\sqrt{2} & -103.0516667\sqrt{2} \\ -103.0516667\sqrt{2} & 103.0516667\sqrt{2} & 103.0516667\sqrt{2} & -103.0516667\sqrt{2} \\ 103.0516667\sqrt{2} & -103.0516667\sqrt{2} & -103.0516667\sqrt{2} & 103.0516667\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 412.206666700000 & 0. & -412.206666700000 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. \\ -412.206666700000 & 0. & 412.206666700000 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. \end{bmatrix} \tag{15}$$

```
ZuordnungMatrix := Matrix( 2 Elementanzahl, Knotenanzahl) :
for i from 1 to Elementanzahl do
    #Es wird eine Zuordnungsmatrix erstellt, diese enthält die gelichen Informationen, wie die
    "Elemente"-Matrix, nur auf die Knoten bezogen
 for j from 1 to Knotenanzahl do
 if j = Elemente[i, 1]
 then ZuordnungMatrix[2 i − 1, j] := 1 fi od od;
for i from 1 to Elementanzahl do
 for j from 1 to Knotenanzahl do
 if j = Elemente[i, 2]
 then ZuordnungMatrix[2 i, j] := 1 fi od od
ZuordnungMatrix
```

```
C := Matrix(Knotenanzahl, 2 Elementanzahl) :

for i from 1 to Knotenanzahl do for j from 1 to Elementanzahl do
    #hier werden die Einzelsteifigkeitsmatrizen in die Gesamtsteifigkeitsmatrix an der richtigen
    Stelle (gemäß der Zuordnungsmatrix) eingebaut,
     indem sie mit der Zuordnungsmatrix multipliziert werden
    . Aufgrund des Dimensionenunterschieds nicht mit einer Matrixoperation.
```

$C[i, 2j-1] := ZuordnungMatrix^{+}[i, 2j-1] \cdot \mathrm{KGlobal}[j][1..2, 1..2];$
$C[i, 2j] := ZuordnungMatrix^{+}[i, 2j-1] \cdot KGlobal[j][1..2, 3..4];$
if $ZuordnungMatrix^{+}[i, 2j] = 1$ **then** $C[i, 2j] := ZuordnungMatrix^{+}[i, 2j] \cdot \mathrm{KGlobal}[j][3..4, 3..4];$
$C[i, 2j-1] := ZuordnungMatrix^{+}[i, 2j] \cdot \mathrm{KGlobal}[j][3..4, 1..2]$ **fi od od**

C

$$\begin{bmatrix} \textit{5 x 12 Matrix} \\ \textit{Data Type: anything} \\ \textit{Storage: rectangular} \\ \textit{Order: Fortran\_order} \end{bmatrix} \tag{16}$$

$C.ZuordnungMatrix:$
#(An dieser Stelle kann nun eine Matrizenoperration erfolgen, da die Dimensionen angepasst sind. Allerdings ist das ergebnis eine Verschachtelung von 2x2 Matrizen in einer 5x5 Matrix
$X := simplify(evalf(C.ZuordnungMatrix))$

$$\left[\left[\begin{bmatrix} 557.9437313 & -145.7370646 \\ -145.7370646 & 145.7370646 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -145.7370646 & 145.7370646 \\ 145.7370646 & -145.7370646 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -412.2066667 & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix}\right],\right.$$
$$\left[\begin{bmatrix} -145.7370646 & 145.7370646 \\ 145.7370646 & -145.7370646 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 557.9437313 & -145.7370646 \\ -145.7370646 & 557.9437313 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & -412.2066667 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -412.2066667 & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix}\right],$$
$$\left[\begin{bmatrix} -412.2066667 & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & -412.2066667 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 970.1503980 & -145.7370646 \\ -145.7370646 & 557.9437313 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -145.7370646 & 145.7370646 \\ 145.7370646 & -145.7370646 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -412.2066667 & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix}\right],$$
$$\left[\begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -412.2066667 & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -145.7370646 & 145.7370646 \\ 145.7370646 & -145.7370646 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 557.9437313 & -145.7370646 \\ -145.7370646 & 145.7370646 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix}\right],$$
$$\left.\left[\begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -412.2066667 & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 412.2066667 & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix}\right]\right] \tag{17}$$

$K := Matrix(2\,Knotenanzahl, 2\,Knotenanzahl):$
 # K ist die Gesamtsteifigkeitsmatrix des ungebundenen Systems,Um die weiteren Rechenschritte

mit MAPLE zu vereinfachen und Probleme aufgrund unterschiedlicher Dimensionen der Vektoren und Matrizen zu vermeiden, werden die Werte der Matrix „X" in eine unverschachtelte Matrix geschrieben

for i **from** 1 **to** *Knotenanzahl* **do**
for j **from** 1 **to** *Knotenanzahl* **do**
$K[2\,i-1, 2\,j-1] := X[i,j][1, 1];$
$K[2\,i, 2\,j-1] := X[i,j][2, 1];$
$K[2\,i-1, 2\,j] := X[i,j][1, 2];$
$K[2\,i, 2\,j] := X[i,j][2, 2];$
od od

#Reaktionskräfte werden in Abhängigkeit von den Knotenverschiebungen erstellt. Über all, wo eine Verschiebung =0 gesetzt wurde, entsteht die entsprechende Reaktionskraft.
Reaktionskräfte := *Vector*(2 *Knotenanzahl*) :
for i **from** 1 **to** *Knotenanzahl* **do** *Reaktionskräfte*$[2\,i-1] := rx_i$; *Reaktionskräfte*$[2\,i] := ry_i$; **od**:
for i **from** 1 **to** 2 *Knotenanzahl* **do if** *Knotenverschiebungen*$[i] \neq 0$ **then** *Reaktionskräfte*$[i] := 0$ **fi** **od**
Reaktionskräfte

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ rx_4 \\ ry_4 \\ rx_5 \\ ry_5 \end{bmatrix} \tag{18}$$

(19)

$PR := P + Reaktionskräfte$
 # die Reaktionskräfte werden mit den äußeren Kräften zusammengefasst

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -200 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ rx_4 \\ ry_4 \\ rx_5 \\ ry_5 \end{bmatrix} \tag{20}$$

(21)

$a := 0 : Kred := K$:*#Hier werden die entsprechenden Spalten und Zeilen in der K-Matrix gelöscht.*
for i **from** 1 **to** 2 *Knotenanzahl* **do**
if $Knotenverschiebungen[i] = 0$ **then** $Kred := DeleteRow(Kred, [i - a])$; $Kred := DeleteColumn(Kred, [i - a])$; $a := a + 1$;
fi od

$a := 0 : PRred := PR$:*#Hier werden die entsprechenden Zeilen im Verschiebungsvektor gelöscht.*
for i **from** 1 **to** 2 *Knotenanzahl* **do**
if $Knotenverschiebungen[i] = 0$ **then** $PRred := DeleteRow(PRred, [i - a])$; $a := a + 1$:
fi od

*#Da sich nun keine Unbekannten mehr auf der rechten Seite des Gleichungssystem (K*Vred= PRred), also dem Vektor PRred befinden kann die Lösung des Gleichungssystems mit dem Befehl LinearSolve erfolgen.*
$Vred := LinearSolve(Kred, PRred)$

$$\begin{bmatrix} -1.45558053391862 \\ -6.14102355609772 \\ 0.485193511306206 \\ -2.82791502239576 \\ -0.970387022612414 \\ -2.34272151108955 \end{bmatrix} \tag{22}$$

#Um die Knotenverschiebungen weiterhin den einzelnen Knoten zuordnen zu können, werden sie an der richtigen Stelle in den Vektor „Knotenverschiebungen" einsortiert
$a := 0$:
for i **from** 1 **to** 2 *Knotenanzahl* **do**
if $Knotenverschiebungen[i] = 0$ **then** $a := a + 1$; **else** $Knotenverschiebungen[i] := Vred[i - a]$; **fi**
od

Knotenverschiebungen

$$\begin{bmatrix} [-1.45558053391862] \\ [-6.14102355609772] \\ [0.485193511306206] \\ [-2.82791502239576] \\ [-0.970387022612414] \\ [-2.34272151108955] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{23}$$

#Wir haben nun die Verschiebungen, doch in dem Gleichungssystem sind die Reaktionskräfte noch unbekannt. Deshalb wird im Folgenden die K-Matrix auf die Werte (Zeilen/Spalten) reduziert, die im Schritt davor vernachlässigt wurden

$a := 0 : b := 0 : Kred2 := K :$
for i **from** 1 **to** 2 *Knotenanzahl* **do**
if $Knotenverschiebungen[i] \neq 0$
then $Kred2 := DeleteRow(Kred2, [i-a]); a := a+1;$
else $Kred2 := DeleteColumn(Kred2, [i-b]); b := b+1 :$
fi od

$Reaktionskräftered := Kred2.Vred$

$$\begin{bmatrix} -400.000000000000 \\ 200.000000000000 \\ 400.000000000001 \\ 0. \end{bmatrix} \tag{24}$$

#Analog zu den Knotenverschiebungen werden Komponente der Reaktionskräfte an die richtige Stelle im Gesamtvektor „Reaktionskräfte" geschrieben
$d := 0;$
for i **from** 1 **to** 2 *Knotenanzahl* **do**
if $Reaktionskräfte[i] = 0$ **then** $d := d+1;$ **else** $Reaktionskräfte[i] := Reaktionskräftered[i-d];$ **fi**
od

$$0 \tag{25}$$

Reaktionskräfte

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ [-400.000000000000] \\ [200.000000000000] \\ [400.000000000001] \\ [0.] \end{bmatrix} \tag{26}$$

$Q := Vector(Elementanzahl)$:

 # durch Q werdemjedem Element wieder die entsprechenden Verschiebungen zugeordnet, Q bezieht sich also genau wie die ZuordnungMatrix auf die Matrix Elemente, in der die Zuordnung eingeben werden musste.

for i **from** 1 **to** $Elementanzahl$ **do** $Q[i] := Matrix(4, 2\ Knotenanzahl)$:
$Q[i][1, 2\ Elemente[i, 1] - 1] := 1$:
$Q[i][2, 2\ Elemente[i, 1]] := 1$:
$Q[i][3, 2\ Elemente[i, 2] - 1] := 1$:
$Q[i][4, 2\ Elemente[i, 2]] := 1$:
od :

(27)

$RückTransform :=$ **proc**$(s, c, Länge, A, E)$

#Diese Prozedur erstellt die Elementsteifigkeitsmatrizen uns transformiert sie dahingehend, dass sie mit den Verschiebungen in globalen Koordinaten verrechnet werden können.

local $L, k, T, Klo, Kglo$;
$L := Länge$;
$k := \frac{E \cdot A}{L}$;
$T := \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}$;

$$Klo := \begin{bmatrix} k & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

```
Kglo := Klo.T;
 end proc;
proc(s, c, Länge, A, E)                                                        (28)
    local L, k, T, Klo, Kglo;
    L := Länge;
    k := E * A/L;
    T := Matrix(1 ..4, 1 ..4, {(1, 1) = c, (1, 2) = s, (1, 3) = 0, (1, 4) = 0, (2, 1) = − s, (2, 2)
     = c, (2, 3) = 0, (2, 4) = 0, (3, 1) = 0, (3, 2) = 0, (3, 3) = c, (3, 4) = s, (4, 1) = 0, (4, 2)
     = 0, (4, 3) = − s, (4, 4) = c}, datatype = anything, storage = rectangular, order
     = Fortran_order, subtype = Matrix);
    Klo := Matrix(4, 4, {(1, 1) = k, (1, 2) = 0, (1, 3) = − k, (1, 4) = 0, (2, 1) = 0, (2, 2)
     = 0, (2, 3) = 0, (2, 4) = 0, (3, 1) = − k, (3, 2) = 0, (3, 3) = k, (3, 4) = 0, (4, 1) = 0, (4,
    2) = 0, (4, 3) = 0, (4, 4) = 0});
    Kglo := Typesetting:-delayDotProduct(Klo, T)
end proc
HV1 := Vector(Elementanzahl) :
for i from 1 to Elementanzahl do
 HV1[i] := RückTransform(sinus[i], cosinus[i], Laenge[i], A, E)
od:

HV2 := Vector(Elementanzahl) :
 for i from 1 to Elementanzahl do
 HV2[i] := HV1[i].Q[i]
od:


Stabkräfte := Vector(Elementanzahl) :
for i from 1 to Elementanzahl do
 Stabkräfte[i] := HV2[i].Knotenverschiebungen
 od:
Stabkräftered := Vector(Elementanzahl) :
for i from 1 to Elementanzahl do
Stabkräftered[i] := Stabkräfte[i][3]
od:

Stabkräftered
```

$$\begin{bmatrix} [282.842712614921] \\ [-200.000000000000] \\ [-200.000000000000] \\ [200.000000000000] \\ [282.842712614922] \\ [-400.000000000001] \end{bmatrix} \quad (29)$$

Reaktionskräfte

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ [-400.000000000000] \\ [200.000000000000] \\ [400.000000000001] \\ [0.] \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$Stabspannungen := \frac{Stabkräftered}{A}$$

$$\begin{bmatrix} [3.52232518694852] \\ [-2.49066002400000] \\ [-2.49066002400000] \\ [2.49066002400000] \\ [3.52232518694853] \\ [-4.98132004800001] \end{bmatrix} \quad (31)$$

Knotenverschiebungen

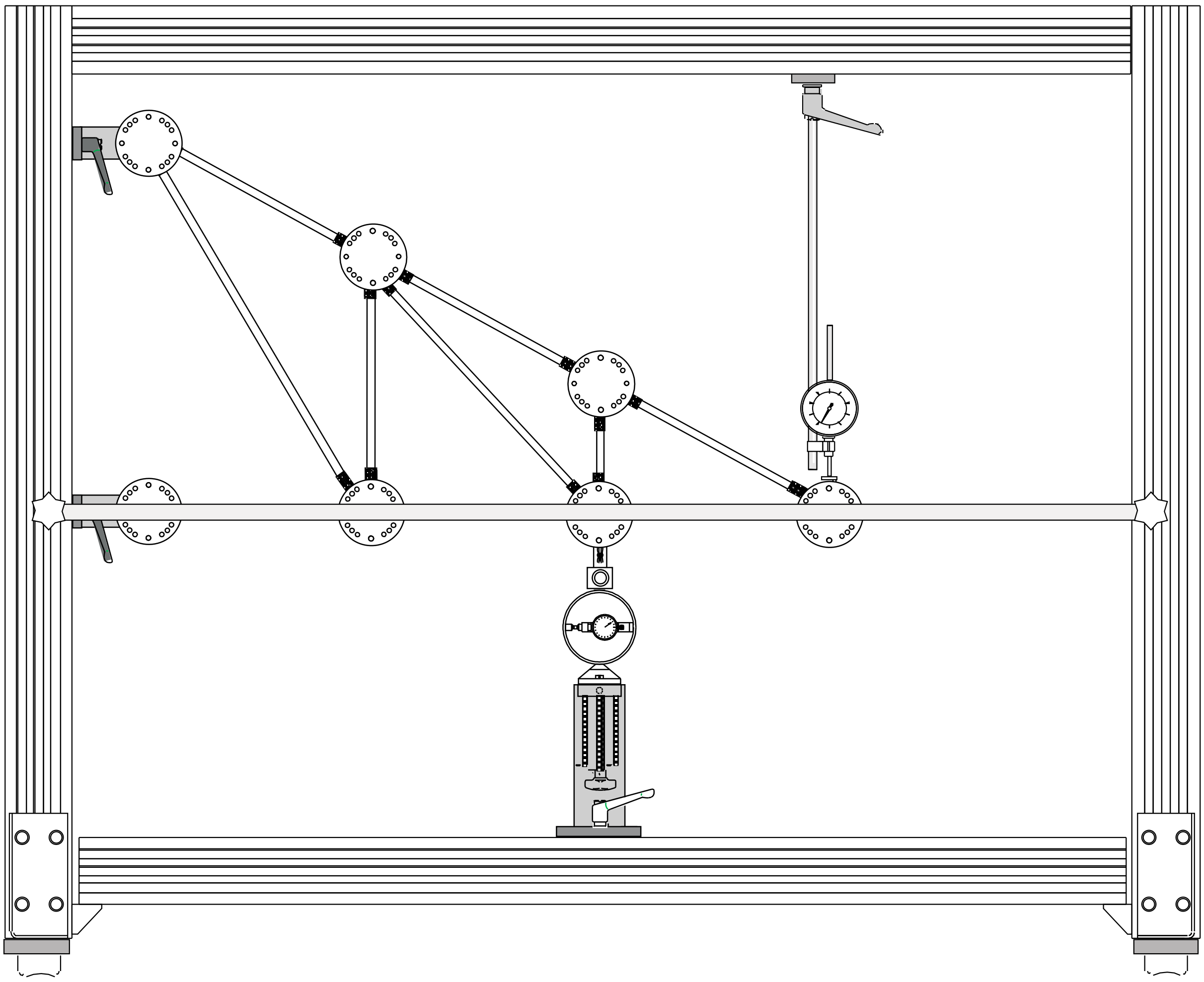
$$\begin{bmatrix} [-1.45558053391862] \\ [-6.14102355609772] \\ [0.485193511306206] \\ [-2.82791502239576] \\ [-0.970387022612414] \\ [-2.34272151108955] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{32}$$

Anhang B: Versuchsanleitung SE 110.44

Versuchsanleitung

SE 110.44 Verformung von Fachwerken

SE 110.44 VERFORMUNG VON FACHWERKEN



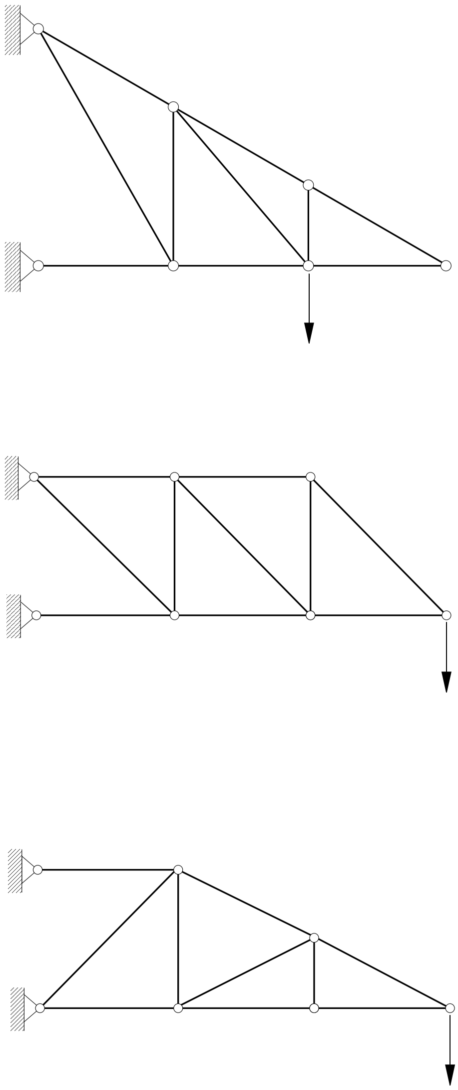
Versuchsanleitung

Bitte lesen Sie vor der ersten Inbetriebnahme die Sicherheitshinweise!

Publication-no.: 912.000 44 C 110 02 (A)

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung



Der Übungssatz **Verformung an Fachwerken SE 110.44** ist zur Verwendung mit dem Universal-Testrahmen **SE110** bestimmt.

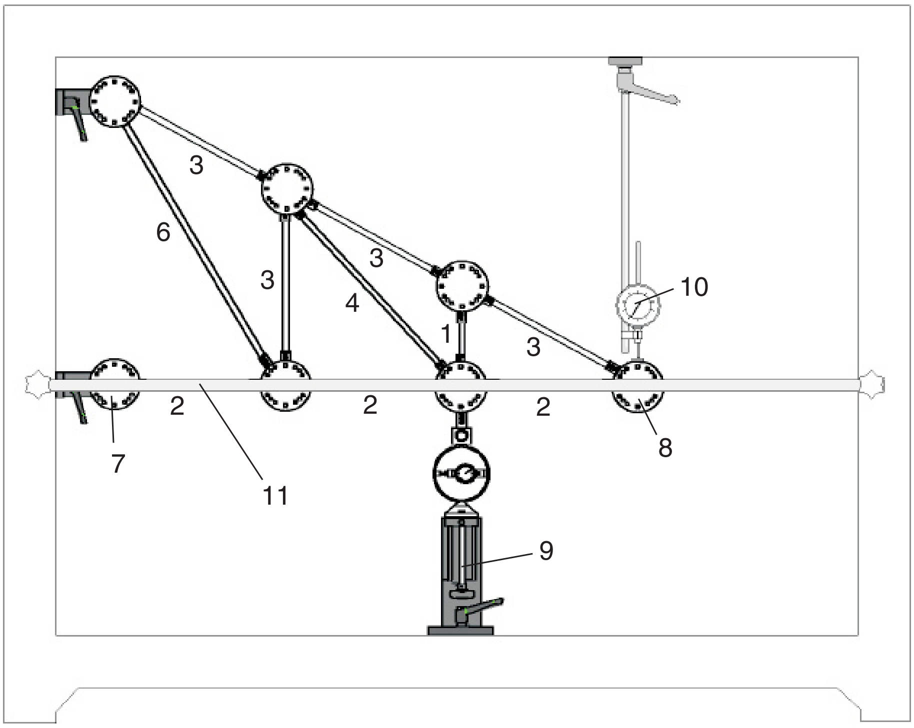
Der Übungssatz ermöglicht die experimentelle Untersuchung der Verformung an Fachwerken unter Belastung. Die Sätze von Castigliano können daran überprüft werden.

Der Übungssatz SE110.44 zeichnet sich durch folgende Eigenschaften aus:

- Aufbau unterschiedlichster Fachwerke mit einem Sortiment von Stäben in sinnvoller Längenabstufung.
- Durch feste Längen entfällt das zeitraubende Justieren der Stäbe.
- Leichte und schnelle Verbindung der Stäbe über spezielle Schnappverschlüsse und Knotenscheiben.
- Bis zu 12 Stäben in einem Knoten möglich.
- Belastungsvorrichtung mit Spindeltrieb und Ringkraftmesser.
- Stäbe kompatibel zum Fachwerk FL110

2 Gerätebeschreibung

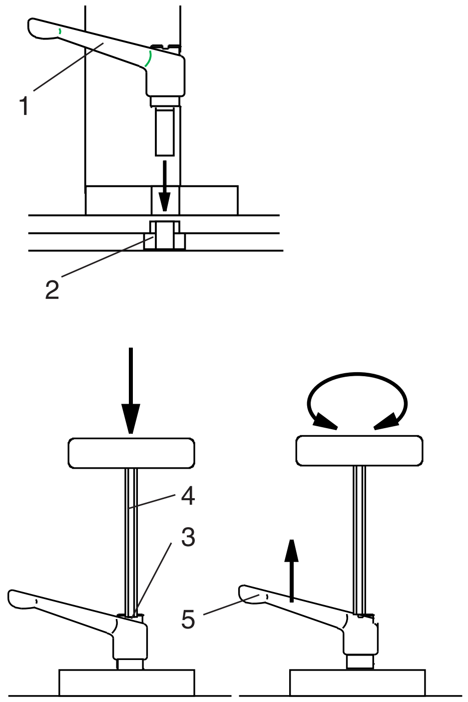
2.1 Geräteaufbau



1 Stab 1, 150 mm, L/2
2 Stab 2, 259 mm, $L\sqrt{3}/2$
3 Stab 3, 300 mm, L
4 Stab 4, 397 mm, $L\sqrt{7}/2$
5 Stab 5, 424 mm, $L\sqrt{2}$ (nicht abgebildet)
6 Stab 6, 520 mm, $L\sqrt{3}$
7 Auflager mit Knotenscheibe
8 Knotenscheiben
9 Belastungsvorrichtung mit Ringkraftmesser und Halter
10 Meßuhr
11 Traverse für die Seitenstabilität des Fachwerks

Abb. 2.1 Übungssatz SE 110.44 “Verformung an Fachwerken” dargestellt mit dem Rahmen SE 110

2.2 Aufbauhinweise beim Rahmen SE 110



Die Elemente werden auf den Grundrahmen gesetzt und mit Klemmhebeln befestigt. Die Zentrierung erfolgt durch die Nuten des Profils.

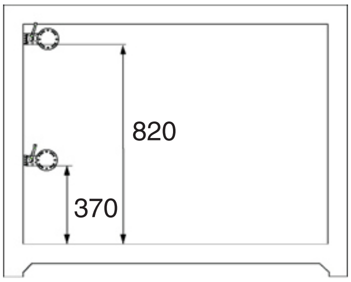
– Klemmhebel (1) von oben durch die Grundplatte in die in der Nut befindliche Nutmutter (2) schrauben.

Wenn der Klemmhebel nicht weit genug gedreht werden kann, ist wie folgt vorzugehen:

– Achse des Klemmhebels (3) durch Schraubendreher (4) kräftig nach unten drücken.
– Verbindung zwischen Handhebel und Achse lösen, indem Handhebel (5) nach oben gezogen wird.
– Mit dem Schraubendreher kann nun die Achse des Klemmhebels gedreht werden.
– Nach dem Loslassens des Handhebels rastet dieser wieder fest an der Achse ein.

Falls der Handhebel (4) beim Festziehen oder Lösen gegen einen Anschlag stößt, kann er durch Hochziehen und Verdrehen in eine andere Stellung gebracht werden.

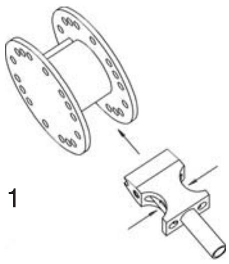
2.3 Aufbau des Fachwerks



Beide Auflager am vertikalen Rahmenteil montieren.

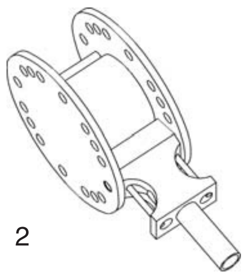
Oberes Auflager in 820 mm Höhe,

unteres Auflager in 370 mm Höhe.



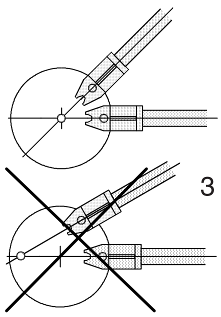
1

– Dazu Verbindungsbolzen des Schnappverschlusses mit den Fingern zusammendrücken und Schnappverschluß zwischen die Lochscheiben des Knotens schieben (1).



2

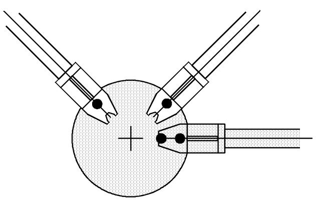
– Dann Verbindungsbolzen entsprechend dem Stabwinkel einrasten lassen (2).



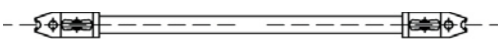
3

– Verlängerte Stabachsen müssen durch den Mittelpunkt der Knotenscheibe gehen (3).

ACHTUNG! Um ein stabiles Fachwerk aufzubauen, muß jeweils ein Stab eines Knotens in den Arretierstift der Knotenscheibe greifen. Damit wird die Knotenscheibe fest mit einem Stab verbunden.



2.4 Stäbe



Die Stäbe sind aus PVC-Rohr mit 16 mm Außendurchmesser und einer Wandstärke von 1.8 mm hergestellt.

Sie sind gestuft in Längen von :

150 mm,

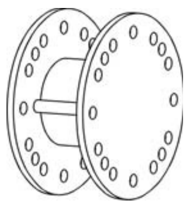
259 mm,

300 mm und

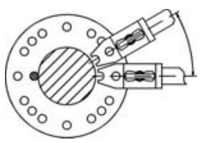
424 mm.

An den Enden der Stäbe befinden sich spezielle Schnappverschlüsse, die in die Knotenscheiben einrasten.

2.5 Knotenscheiben

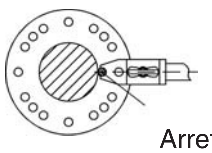


Die Knoten bestehen aus gelochten Kreisscheiben. In jeder Kreisscheibe befinden sich 16 Bohrungen, so daß eine 30°-Teilung und eine 45° Teilung möglich ist.



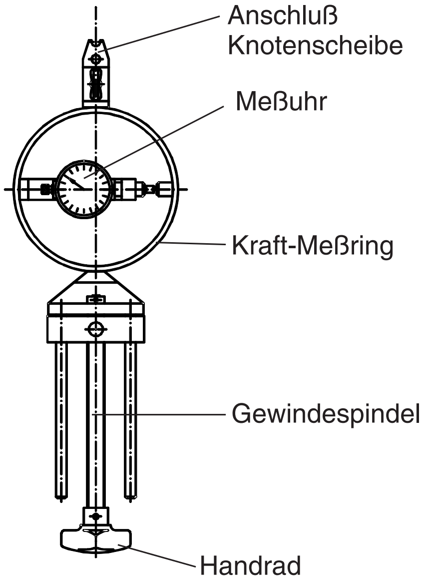
Der kleinste Winkelabstand zwischen zwei Stäben beträgt 30°. Damit können bis zu 12 Stäbe an einem Knoten angreifen.

Die Stäbe sind in der Fachwerksebene gelenkig angeschlossen. Senkrecht zur Fachwerksebene ist die Ablenkung momentenstarr, so daß das ebene Fachwerk genug seitliche Stabilität besitzt.



Jeweils ein Stab eines Knotens muß mit der Knotenscheibe über einen zweiten Arretierstift starr verbunden werden. Dies ist erforderlich um ein starres, statisch bestimmtes Fachwerk zu erhalten. Sonst würde die Knotenscheibe selbst durch die räumlich auseinanderliegenden Anlenkpunkte der verschiedenen Stäbe selbst zu einem zusätzlichen Stab des Fachwerks werden.

2.6 Kraftmeßeinrichtung

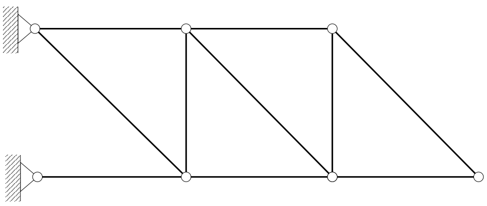


Über die Kraftmeßeinrichtung werden die äußeren Belastungen auf das Fachwerk aufgebracht und die Auflagerreaktionen gemessen. Kernstück ist ein Kraft-Meßring. Dieser verformt sich elastisch unter dem Einfluß einer äußeren Kraft. Diese Verformung wird mit einer Wegmeßuhr gemessen und ist ein direktes Maß für die Kraft.

Um eine Kraft erzeugen zu können, muß das jeweilige Versuchsobjekt (also das Fachwerk) zunächst vorgespannt werden. Dadurch wird Spiel in den Knoten ausgeschlossen. Das Vorspannen erfolgt über eine Feingewindespindel und ein Handrad.

Die Kraftmeßeinrichtung kann an beliebiger Stelle am Rahmen winkelbeweglich festgeklemmt werden. Mit ihr können Zug- und Druckkräfte bis zu 200 N aufgebracht und gemessen werden.

2.7 Beispiele für weitere Fachwerke

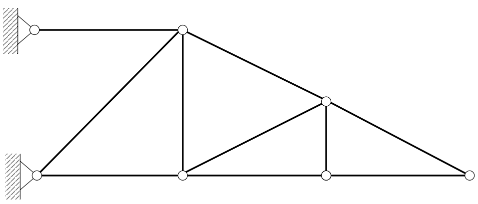


Benötigte Teile:

7 x Stab 3 (300 mm)

3 x Stab 5 (424 mm)

5 x Knotenscheibe



Benötigte Teile:

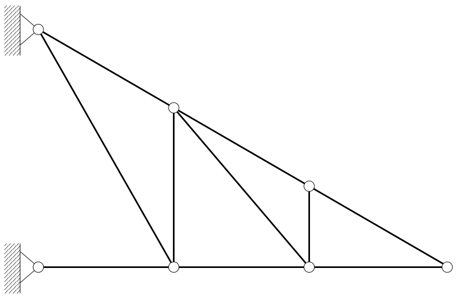
1 x Stab 1 (150 mm)

2 x Stab 2 (259 mm)

6 x Stab 3 (300 mm)

1 x Stab 5 (424 mm)

5 x Knotenscheibe



Benötigte Teile:

1 x Stab 1 (150 mm)

3 x Stab 2 (259 mm)

4 x Stab 3 (300 mm)

1 x Stab 4 (397 mm)

1 x Stab 6 (520 mm)

5 x Knotenscheibe

3 Sicherheit

3.1 Gefahren für Gerät und Funktion

Achtung! Fachwerk nicht überlasten.

Max. zulässige Last $\pm$ 200 *N*

4 Theorie

4.1 Formänderungsarbeit in Stabtragwerken und Federn

Bei der Belastung elastischer Systeme verformen sich diese proportional mit der Lastzunahme. Dabei leisten die äußeren Kräfte und Momente entlang der Verschiebung bzw. Verdrehung ihrer Angriffspunkte Arbeit. Diese Arbeit der äußeren Kräfte und Momente wird in elastischen Systemen gespeichert und als Formänderungsarbeit bezeichnet. Diese geht nicht verloren, sondern wird bei Entlastung wieder frei gegeben (z.B. Stahlfeder). Die Arbeit der äußeren Lasten infolge Temperaturdehnung wird nicht im mechanischen System gespeichert und bei einer Entlastung nicht frei gegeben, sie ist keine Formänderungsarbeit.

Formänderungsarbeit ist die im elastischen System gespeicherte Energie. Sie entspricht der Arbeit der äußeren Kräfte und Momente bei der lastabhängigen Verformung des elastischen Systems.

Arbeit einer Kraft ist das Produkt des Verschiebeweges mit der Kraftkomponente in Verschieberichtung.

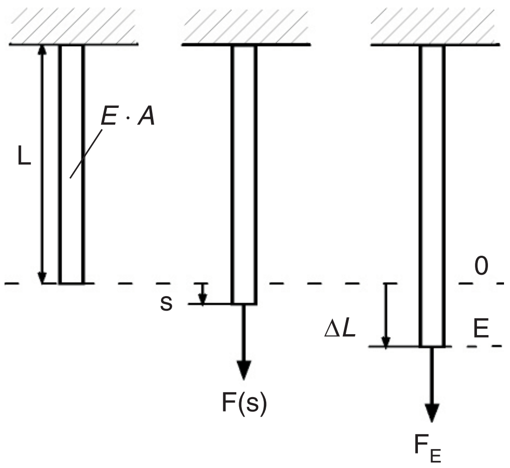
$$W = \int_{(s)} F(s)ds$$

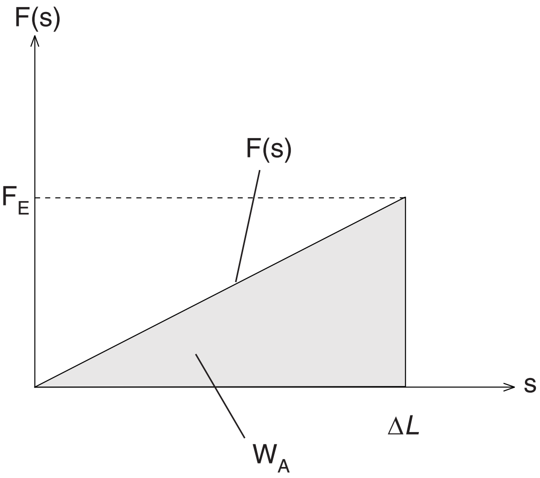
$F(s)$: Kraftkomponente in Verschieberichtung

Arbeit eines Momentes ist das Produkt des Verdrehwinkels in Bogenmaß mit der Momentenkomponente in Drehrichtung

$$W = \int_{(\varphi)} M(\varphi)d\varphi$$

$M(\varphi)$: Momentenkomponente in Drehrichtung





Beispiel: Zugstab

Die Kraft soll nicht sprunghaft aufgebracht werden, sondern von Null an mit einer Geschwindigkeit anwachsen, der der Stab folgen kann.

Die schraffierte Fläche im F-s - Diagramm entspricht der äußeren Arbeit W_A welche durch die Kraft F(s) bis zum Endwert F_E verrichtet wird. Diese Arbeit ist im Zugstab gespeichert und soll im folgenden durch die Schnittgröße F_L des Gleichgewichtszustandes ausgedrückt werden.

Es gilt:

$$s = \frac{F(s) \cdot L}{E \cdot A} \qquad F(s) = \frac{E \cdot A}{L} \cdot s$$

$$\Delta L = \frac{F_E \cdot L}{E \cdot A}$$

mit E = Elastizitätsmodul,(E-Modul)

A = Für Formänderung wirksamer Querschnitt

$$W_{0 \to E} = \int_{s=0}^{s=\Delta L} F(s) \cdot ds = \int_{s=0}^{s=\Delta L} \frac{E \cdot A}{L} \cdot s \cdot ds$$

$$W_{0 \to E} = \frac{E \cdot A}{L} \cdot \frac{1}{2} \cdot s^2 \, \Big|_0^{\Delta L}$$

$$W_{0 \to E} = \frac{1}{2} \cdot \frac{E \cdot A}{L} \cdot \Delta L^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{F_E^2 \cdot L}{E \cdot A}$$

Bei voll aufgebrachter Kraft im Gleichgewichtszustand gilt $F_L = F_E$ und somit

$$W = W_{0 \to E} = \frac{1}{2} \cdot \frac{F_L^2 \cdot L}{E \cdot A}$$

4.2 Satz von Castigliano

(italienischer Baumeister 1847-1884)

Voraussetzungen:

- linear-elastisches Materialverhalten (Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes)
- keine Dehnungen infolge Temperaturänderungen

Satz von Castigliano:

- Die partielle Ableitung der gesamten Formänderungsarbeit eines Systems nach der äußeren Kraft ergibt die Verschiebungskomponente des Kraftangriffspunktes in Kraftrichtung infolge aller äußeren Lasten, die bei der Formulierung der Formänderungsarbeit berücksichtigt wurden.
- Die partielle Ableitung nach einem äußeren Moment ergibt die Verdrehwinkelkomponente des Momentenangriffspunktes in Bogenmaß.
- Die partielle Ableitung nach einer statisch unbestimmten Größe ist immer Null.

$$w_i = \frac{\partial U}{\partial F_i}; \quad \varphi_i = \frac{\partial U}{\partial \mathrm{M}_i}; \quad 0 = \frac{\partial U}{\partial X_i}$$

U: Formänderungsarbeit des Gesamtsystems

w_i: Verschiebungskomponente des Angriffspunktes von F_i in Richtung von F_i

φ_i: Verdehwinkel (in Bogenmaß) der Momentenangriffsstelle von M_i in Richtung von M_i

F_i: äußere Kraft

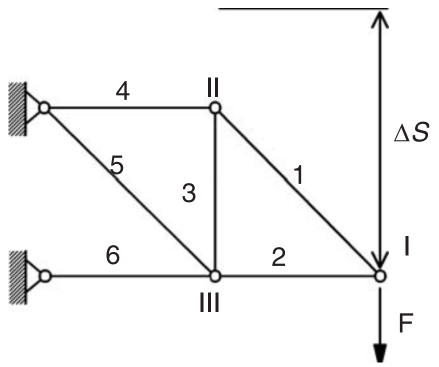
M_i: äußeres Moment

X_i: statisch unbestimmte Größe (Kraft oder Moment)

5 Experimente

Ermittlung der vertikalen Verschiebung (in Richtung der Last) des Fachwerks am Ort, wo eine Last von 200 N wirkt.

5.1 Aufbau des Fachwerks



In dem dargestellten Fachwerk soll die Verformung in y-Richtung des Knotens I durch eine Last F ermittelt werden. Dazu das Fachwerk unter Berücksichtigung der Hinweise von Kapitel 2.2 bis 2.6 aufbauen.

Belastungsvorrichtung direkt unter dem Knoten I montieren. (Achtung! Exakte Aussrichtung beeinflußt die Ergebnisse positiv)

Meßuhr zum bestimmen der Verschiebung über dem Knoten I anbringen und ausrichten.

5.2 Versuchsdurchführung

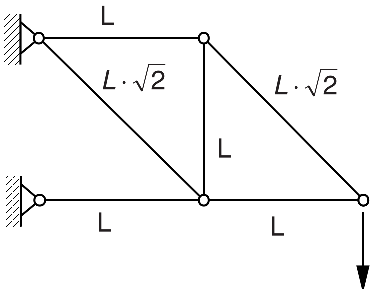
- Mit dem Handrad der Gewindespindel die Vorspannung soweit erhöhen, daß die Meßuhr der Kraftmeßeinrichtung gerade beginnt anzusprechen.
- Skalennullpunkt der Kraftmeßeinrichtung auf den Zeiger ausrichten.
- Last in Schritten von 20 N bis auf 200 N erhöhen.
- Verformungen und Kräfte notieren.

5.3 Messung

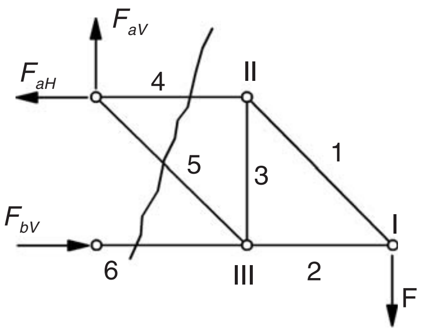
Kraftgeber		Verschiebung
F		Δw
Kraft [N]	Weg [0.01 mm]	Weg [0.01 mm]
0	0	0
20	2	
40	4	
60	6	
80	8	
100	10	209
120	12	
140	14	
160	16	
180	18	
200	20	350

Bei Beginn der Belastung ist zu beachten, daß die Fachwerkstäbe nicht ohne Spiel verbunden sind. Erst wenn sich das Spiel gesetzt hat gelten die Gesetzmäßigkeiten der elastischen Verformung.

5.4 Berechnung der Stabkräfte



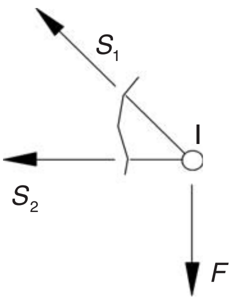
In diesem Beispiel sollen die Stabkräfte des nebenstehend abgebildeten Fachwerkes berechnet und mit den Versuchsergebnissen verglichen werden.



Zuerst wird ein Lageplan mit Stab- und Knotennummern aufgestellt.

Die Belastung F greife am Knoten I in vertikaler Richtung an.

Die Stabkräfte werden über Knotengleichgewichte und Ritterschnitt berechnet.



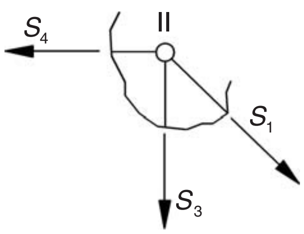
Knoten I:

$$\sum F_V = 0 = -F + S_1 \cdot \sin 45°$$

$$S_1 = \sqrt{2} \cdot F = 1.41 \cdot F$$

$$\sum F_H = 0 = S_2 + S_1 \cdot \cos 45°$$

$$S_2 = -F$$



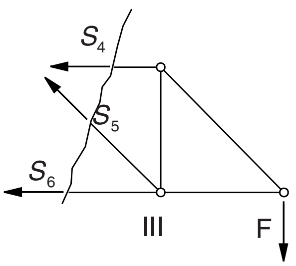
Knoten II:

$$\sum F_H = 0 = S_4 - S_1 \cdot \cos 45°$$

$$S_4 = F$$

$$\sum F_V = 0 = -S_3 - S_1 \cdot \sin 45°$$

$$S_3 = -F$$



Ritterschnitt 1

$$\sum F_V = 0 = -F + S_5 \cdot \cos 45°$$

$$S_5 = \sqrt{2} \cdot F = 1.41 \cdot F$$

$$\sum F_H = 0 = S_4 + S_5 \cdot \sin 45° + S_6$$

$$S_6 = -2 \cdot F$$

Zusammenfassung der Stabkräfte						
Stab Nr.:	1	2	3	4	5	6
bezogene Kraft	1.41F	-F	-F	F	1.41F	-2F
bei F=200 N	282 N	-200	-200 N	200 N	282 N	-400 N

5.5 Berechnung der Verschiebung nach Castigliano :

$$w_i = \frac{\partial U_F}{\partial F_i}$$

mit

w_i : Verschiebung durch F_i

U_F: Formänderungsenergie eines beliebigen linear elastischen Systems

F_i : generalisierte Einzelkraft

Für gelenkig gelagerte Stabsysteme (keine Momente, nur Normalkräfte) ist die Formänderungsenergie U_{F_i} als Funktion der Schnittgrößen.

$$U_F = \frac{1}{2}\sum_i \int_0^L \left[\frac{F^2(x)}{EA(x)}\right] dx$$

nach der partiellen Ableitung

$$U_F = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{E_i \cdot A_i} \cdot F_i \cdot L_i$$

mit den Bezeichnungen der Fachwerkstäbe

$$U_F = \frac{1}{A \cdot E_{PVC}} \cdot \left(L_1 \cdot F_1^2 + L_2 \cdot F_2^2 + L_3 \cdot F_3^2 + L_4 \cdot F_4^2 + L_5 \cdot F_5^2 + L_6 \cdot F_6^2\right)$$

Die Verschiebung durch F_i in Richtung von F_i laute:

$$w_i = \frac{1}{F_i} \cdot \left[\frac{1}{A \cdot E_{PVC}} \cdot \left(L_1 \cdot F_1^2 + L_2 \cdot F_2^2 + L_3 \cdot F_3^2 + L_4 \cdot F_4^2 + L_5 \cdot F_5^2 + L_6 \cdot F_6^2 \right) \right]$$

mit Werten

L : reine PVC-Stablänge in m

F: Stabkräfte in N

A: Für die Formänderung wirksamer Stabquerschnitt in m²

E: PVC E-Modul in N/m²

$$w_i = \frac{0.136\,m \cdot (200\,N)^2 + 0.136\,m \cdot (-200\,N)^2 + 0.136\,m \cdot (-400\,N)^2 + 0.26\,m \cdot (282\,N)^2 + 0.26\,m \cdot (282\,N)^2 + 0.136\,m \cdot (-200\,N)^2}{200\,N \cdot 8.03 \cdot 10^{-5} m^2 \cdot 1.54 \cdot 10^9 \,\frac{N}{m^2}}$$

$$w_i = 0.00321\,m$$

Nach Castigliano berechnete Verschiebung in Richtung der wirkenden Kraft: 3.21 mm

gemessene Verschiebung: 3.50 mm.

Verformungsberechnungen für Punkte, an denen keine äußere Belastung angreift können z.B. nach dem Hilfskraftverfahren berechnet werden.

6 Anhang

6.1 Arbeitsblätter

Versuch:		Datum:
		Name:
Belastungsvorrichtung (Ringkraftmesser)		Meßuhr
Ort:		Ort:
Kraft F	Weg	Verschiebung Δw
in Newton	in 0,01 mm	in 0.01 mm
0		
20		
40		
60		
80		
100		
120		
140		
160		
180		
200		

6.2 Technische Daten

Stäbe - Stablängen

Stab	Länge	Einheitslänge	Länge	Länge	Anzahl
Nr.:	nominell		zw. Bolzen	PVC-Rohr	
	L_N		L_B	L_{PVC}	
1	150	L/2	90	6	2
2	259	$L\cdot\sqrt{3}/2$	199	131	5
3	300	L	240	136	7
4	397	$L\cdot\sqrt{7}/2$	337	233	1
5	424	$L\cdot\sqrt{2}$	364	260	3
6	520	$L\cdot\sqrt{3}$	460	356	1

PVC-Rohr: 16 x 1.8 mm

Material: PVC-U

Querschnittsfläche: 8.03×10^{-5} m²

gemessener PVC E-Modul: 1540 N/mm²

(bezogen auf tatsächliche PVC-Rohrlänge)

Zugfestigkeit: $\sigma_z = 50 - 75 \dfrac{N}{mm^2}$

Druckfestigkeit: $\sigma_p = 80 \dfrac{N}{mm^2}$

Knotenscheiben

Anzahl: 5

Winkelabstufungen: 30°,45°, 60°, 90°

Belastungsvorrichtung

Prinzip: Ringkraftmesser

Kraftbereich:	max. 500 N
Auflösung:10	N/Skt.
Ablesebereich der Meßuhr:	0-3 mm
Skalierung:	1000 N/mm
Verstellweg:	90 mm

6.3 Formelzeichen

A: Querschnittsfläche
E: E-Modul
F: Kraft, Last
L: Stablänge
U: Formänderungsenergie, Arbeit
s: Strecke, Weg
M: Moment
w: Verschiebung

6.4 Literaturverweise

Hütte, Die Grundlagen der Ingenieurwissenschaften, 29.Auflage, Springer-Verlag

6.5 Lieferumfang

1 x Übungssatz
SE 110.44 Verformung von Fachwerken

1 x Versuchsanleitung SE 110.44

6.6 Stichwortverzeichnis

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Hamburg University of Applied Sciences

Erklärung zur selbstständigen Bearbeitung einer Abschlussarbeit

Gemäß der Allgemeinen Prüfungs- und Studienordnung ist zusammen mit der Abschlussarbeit eine schriftliche Erklärung abzugeben, in der der Studierende bestätigt, dass die Abschlussarbeit „– bei einer Gruppenarbeit die entsprechend gekennzeichneten Teile der Arbeit [(§ 18 Abs. 1 APSO-TI-BM bzw. § 21 Abs. 1 APSO-INGI)] – ohne fremde Hilfe selbständig verfasst und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt wurden. Wörtlich oder dem Sinn nach aus anderen Werken entnommene Stellen sind unter Angabe der Quellen kenntlich zu machen.“

Quelle: § 16 Abs. 5 APSO-TI-BM bzw. § 15 Abs. 6 APSO-INGI

Dieses Blatt, mit der folgenden Erklärung, ist nach Fertigstellung der Abschlussarbeit durch den Studierenden auszufüllen und jeweils mit Originalunterschrift als letztes Blatt in das Prüfungsexemplar der Abschlussarbeit einzubinden.
Eine unrichtig abgegebene Erklärung kann -auch nachträglich- zur Ungültigkeit des Studienabschlusses führen.

Erklärung zur selbstständigen Bearbeitung der Arbeit

Hiermit versichere ich,

Name: Marks

Vorname: Lucas

dass ich die vorliegende Bachelorarbeit bzw. bei einer Gruppenarbeit die entsprechend gekennzeichneten Teile der Arbeit – mit dem Thema:

Analyse von Versuchsständen zur Technischen Mechanik durch Programmierung von Finite-Elemente-Modellen in MAPLE

ohne fremde Hilfe selbständig verfasst und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Wörtlich oder dem Sinn nach aus anderen Werken entnommene Stellen sind unter Angabe der Quellen kenntlich gemacht.

- die folgende Aussage ist bei Gruppenarbeiten auszufüllen und entfällt bei Einzelarbeiten -

Die Kennzeichnung der von mir erstellten und verantworteten Teile der -bitte auswählen- ist erfolgt durch:

Hamburg	21.07.2016	
Ort	Datum	Unterschrift im Original