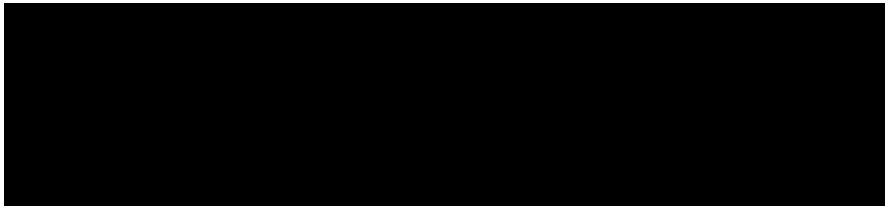




Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Hamburg University of Applied Sciences

Bachelorthesis



Titel:

**Entwicklung einer Methode zur Lösung eines
Transportproblems mit Fahrzeugkapazitäten unter
Verwendung von Tourenplanung**

Abgabedatum: 24.08.2015
Betreuender Professor: Herr Prof. Dr. Bradtke
Zweiter Prüfender: Herr Prof. Dr. Röhrs

Fakultät Wirtschaft und Soziales

Department Wirtschaft

Studiengang:

Logistik/Technische Betriebswirtschaftslehre

I. Inhaltsverzeichnis

I. Inhaltsverzeichnis.....	I
II. Abbildungsverzeichnis	III
III. Abkürzungsverzeichnis	V
IV. Zusammenfassung	VI
1. Einleitung	1
2. Grundlagen	2
2.1 Transportprobleme – Allgemeines.....	2
2.1.1 Eröffnungsverfahren.....	4
2.1.2 Optimierungsverfahren.....	6
2.2 Tourenplanungsprobleme – Allgemeines	7
2.2.1 Lösungsverfahren für Tourenplanungsprobleme.....	9
2.2.2 Konstruktionsverfahren	11
2.2.3 Verbesserungsverfahren	13
3. Entwicklung der Methode	13
3.1 Herleitung der Methode	13
3.2 Zwischenergebnis der Herleitung	24
3.3 Rahmenbedingungen	26
3.3.1 Fixierte Rahmenbedingungen	27
3.3.2 Situative Bedingungen – Varianten.....	27
3.3.3 Umfang: Zulässigkeit von Touren:	30
3.4 Ablauf der Methode	32
3.4.1 Schaffung der Voraussetzungen.....	33
3.4.2 Bearbeitung der Methode in endlich vielen Iterationsschritten	37
3.4.3 Errechnung der summierten Transportkosten	43

3.5 Beispiele.....	44
3.5.1 Beispiel 1: unabgeschlossene Touren	44
3.5.2 Beispiel 2: unabgeschlossene Touren und Fixkosten.....	52
3.5.3 Beispiel 3: geschlossene Touren	54
4. Schlussbetrachtung.....	59
V. Quellenverzeichnis	VII
VI. Eidesstattliche Erklärung.....	VIII
VII. Einverständniserklärung	VIII

II. Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Allgemeines Transporttableau eines klassischen Transportproblems.....	3
Abbildung 2 : Beispielhafte Transportmatrix für $n=3$ Ausgangsorte und $m=3$ Bestimmungsorte	5
Abbildung 3: Klassisches Transportproblem mit den Kosten c_{ij}	14
Abbildung 4: Spezielles Transportproblem mit den Kosten k_{yj}	14
Abbildung 5: Transporttableau mit beispielhaften Kosten k_{yj}	15
Abbildung 6: Transporttableau nach 1. Iteration.....	16
Abbildung 7: Transporttableau nach 2. Iteration.....	16
Abbildung 8: Transporttableau nach 3. Iteration.....	17
Abbildung 9: Transporttableau mit alternativer, unmethodisch verteilten Transportmengen x_{yj}	18
Abbildung 10: Gegenüberstellung der Fahrtenanzahl und Transportkosten	18
Abbildung 11: Maximal verfügbare Transportmengen $x_{yj \max 1}$, in Abhängigkeit der verfügbaren Angebote und Bedarfe im ersten Iterationsschritt.....	19
Abbildung 12: Variable Kosten pro Mengeneinheit $v_{yj 1}$, im ersten Iterationsschritt.....	20
Abbildung 13: Transporttableau(mit Kosten v_{yjs}) nach der ersten Iteration.....	21
Abbildung 14: Kosten $v_{yj 2}$ pro Mengeneinheit im zweiten Iterationsschritt	22
Abbildung 15: Transporttableau(mit Kosten v_{yjs}) nach der zweiten Iteration	23
Abbildung 16: Transporttableau(mit Kosten v_{yjs}) nach der dritten Iteration	23
Abbildung 17: Zweite Gegenüberstellung der Fahrtenanzahl und Transportkosten.....	24
Abbildung 18: Allgemeines Transporttableau für das formulierte Problem	25
Abbildung 19: Vergleich zweier Pendeltouren (grau) mit einer großen Tour (rot)	28
Abbildung 20: Darstellung gleicher Strecken zwischen Knotenpunkten mit unterschiedlicher Fahrtrichtung	29
Abbildung 21: Allgemeine Matrixdarstellung der Kosten für alle möglichen Fahrten zwischen zwei Knotenpunkten	33
Abbildung 22: Ausgangsmatrix bei unabgeschlossenen Touren.....	36
Abbildung 23: Ausgangsmatrix bei geschlossenen Touren	36
Abbildung 24: Maximale Transportmengen $x_{ijz \max s}$ auf jeder Tour	38
Abbildung 25: Variable Kosten v_{ijzs} pro Mengeneinheit auf jeder Tour	39
Abbildung 26: Kleinster und zweitkleinster Wert, sowie deren Differenz für jede Quelle und Senke	40

Abbildung 27: Finales Transporttableau in allgemeiner Form für unabgeschlossene Touren	43
Abbildung 28: Beispielhaftes Transportproblem mit Kosten k_{yj}	44
Abbildung 29: Symmetrische Kostenmatrix für das beispielhafte Transportproblem	45
Abbildung 30: Ausgangsmatrix für Beispiel 1	46
Abbildung 31: Maximale Transportmengen $x_{ijz \max 1}$ im ersten Iterationsschritt	47
Abbildung 32: Kosten $v_{ijz 1}$ pro Mengeneinheit im ersten Iterationsschritt	47
Abbildung 33: Abgleich der Kostendifferenzen im ersten Iterationsschritt	48
Abbildung 34: Transporttableau nach dem ersten Iterationsschritt	48
Abbildung 35: Maximale Transportmengen $x_{ijz \max 2}$ im zweiten Iterationsschritt	49
Abbildung 36: Kosten $v_{ijz 2}$ pro Mengeneinheit im zweiten Iterationsschritt	50
Abbildung 37: Finales Transporttableau nach dem zweiten Iterationsschritt	50
Abbildung 38: Beispielhafter Transportplan mit den Transportmengen x_{ijz}	51
Abbildung 39: Symmetrische Kostenmatrix (identisch mit Abb. 29)	52
Abbildung 40: Ausgangsmatrix für Beispiel 2	53
Abbildung 41: Symmetrische Kostenmatrix (identisch mit Abb. 29)	54
Abbildung 42: Ausgangsmatrix mit 16 geschlossenen Touren	55
Abbildung 43: Ausgangsmatrix mit 9 zulässigen geschlossenen Touren	55
Abbildung 44: Maximale Transportmengen $x_{ijz \max 1}$ im ersten Iterationsschritt	56
Abbildung 45: Kosten $v_{ijz 1}$ pro Mengeneinheit im ersten Iterationsschritt	56
Abbildung 46: Abgleich der Kostendifferenzen im ersten Iterationsschritt	57
Abbildung 47: Transporttableau nach der ersten Iteration	57
Abbildung 48: Maximale Transportmengen $x_{ijz \max 2}$ im zweiten Iterationsschritt	58
Abbildung 49: Finales Transporttableau nach der zweiten Iteration	59

III. Abkürzungsverzeichnis

A	Ausgangsort
Abb.	Abbildung
B	Bestimmungsort
Ebd.	ebenda
GE	Geldeinheiten
LP-Problem	lineares Optimierungsproblem
ME	Mengeneinheiten
S	Senke
Q	Quelle

IV. Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Entwicklung einer Methode zur Lösung eines speziellen Transportproblems, welches auf sprungfixen Kosten basiert. Diese entstehen für jede Fahrt der Transportmittel, welche über eine maximale Transortkapazität verfügen. Des Weiteren sollen Touren für den Transport der Waren möglich sein. Für die Entwicklung der Lösungsmethode werden zunächst einige der bekannten Methoden zur Lösung von Transport- und Tourenplanungsproblemen vorgestellt. Die Lösungsweise der Methode wird anschließend hergeleitet und dessen Rahmenbedingungen werden definiert. Im nachfolgenden Teil wird die Methode schrittweise und in mehreren kleinen Variationen, wie der Art der Tour und der Vorgehensweise, vorgestellt. Die Methode und ihre Varianten werden anschließend an einigen Beispielen vorgeführt.

Die entwickelte Methode liefert insgesamt gute Ergebnisse, insbesondere wenn die Vorgehensweise mittels der Variationen an die Ausgangsbedingungen angepasst wird. Der größte Nachteil ist im Aufwand und in der Komplexität der Methode zu sehen, welche dazu führen, dass auch schon Probleme mitgeringem Umfang einen großen Aufwand erfordern.

1. Einleitung

In der heutigen Fachliteratur zum Thema Logistik finden sich eine Vielzahl an Modellen und Methoden zur Lösung spezieller Probleme. Dem Autor ist dabei aufgefallen, dass viele Methoden nur unter sehr speziellen Rahmenbedingungen angewendet werden können. Manche dieser Rahmenbedingungen sind in der Realität nur sehr selten vorzufinden, oder wirken sogar unrealistisch. So setzt sich der Autor in dieser Arbeit mit Transportproblemen auseinander, welche in ihrer klassischen Form Kosten beinhalten, welche pro transportierter Einheit anfallen. In der Realität mag das der Fall sein, wenn jede dieser Mengeneinheiten komplett unabhängig von der nächsten transportiert wird. Dennoch bleibt dann die Frage, aus welchem Grund diese Mengeneinheiten überhaupt einzeln transportiert werden und ob es nicht eine Möglichkeit gibt, Größenvorteile für den Transport zu nutzen. Zumindest im Bereich der materiellen Güter sollten solche Größenvorteile oftmals nutzbar sein. Als mitunter einfachster Größenvorteil lässt sich der Transport von mehreren Gütern mit demselben Transportmittel nennen. Dabei ist davon auszugehen, dass dieses Transportmittel über eine begrenzte Ladekapazität verfügt. Die Kosten für eine Fahrt sind jedoch nur kaum abhängig davon, wie stark diese Ladekapazität ausgenutzt ist. Für einen beispielhaften LKW mit einer Ladekapazität von 10 Mengeneinheiten bedeutet das, dass der Transport von einer einzelnen Mengeneinheit zumindest nahezu genauso teuer ist, wie der Transport von 10 Einheiten. Müssen jedoch 11 Einheiten transportiert werden, sind mindestens 2 LKW-Fahrten erforderlich, wodurch sich die Kosten verdoppeln.

Obwohl dieser Sachverhalt in der in der Realität äußerst präsent ist, sind die bekannten Lösungsverfahren für Transportprobleme nicht auf diese Bedingungen ausgelegt. Daher hat sich der Autor zum Ziel gesetzt, ein spezielles Transportproblem zu formulieren, sowie ein Lösungsverfahren für dieses zu entwickeln. Dieses spezielle Transportproblem enthält Kosten, die, konträr zu einem klassischen Transportproblem, nicht für jede transportierte Mengeneinheit (ME) entstehen, sondern für jede Fahrt eines Transportmittels. Als weiterer zentraler Punkt in diesem Transportproblem ist die Kapazitätsbegrenzung der Transportmittel zu sehen. In Hinsicht auf dessen Verwendung, ist es sinnvoll, neben den Modellen zur Lösung eines Transportproblems, auch Elemente aus der Tourenplanung für die Entwicklung der Methode zu betrachten. So soll die Nutzung von Touren zur Verteilung von Waren

ebenfalls möglich sein, da diese, besonders bei kleinen Warenmengen, die Auslastung von Transportmitteln deutlich verbessern können.

Als eigentliches Ziel dieser Arbeit steht dann die Entwicklung einer Methode zur Lösung dieses speziellen Transportproblems.

2. Grundlagen

In diesem werden Teil werden die klassischen Transport- und Tourenplanungsprobleme erläutert, sowie einige der geläufigsten Lösungsmethoden vorgestellt. Diese sollen für die Entwicklung der Methode in Teil 3 als Grundlage dienen.

2.1 Transportprobleme – Allgemeines

Ein Transportproblem ist eine sehr spezielle Form eines linearen Optimierungsproblems (LP-Problem).¹ Ziel ist es, ein homogenes Gut möglichst kostengünstig von **Ausgangsorten** zu **Bestimmungsorten** zu bringen. Die Ausgangsorte A_1, \dots, A_m haben dabei eine begrenzte Menge a_1, \dots, a_m , welche sie von dem Gut bereitstellen können. Genauso haben die Bestimmungsorte B_1, \dots, B_n einen bestimmten Bedarf b_1, \dots, b_n .² Ist die Summe der Angebote a_i und Bedarfe b_j gleich, so spricht man von einem **geschlossenen Transportproblem**, während es ansonsten als **offen** bezeichnet wird.³ Für den Transport jeder Mengeneinheit des Gutes von einem Ausgangsort A_i zu einem Bestimmungsort B_j fallen Transportkosten in Höhe von c_{ij} an. Die zunächst unbekannte Transportmenge von A_i nach B_j wird als x_{ij} bezeichnet.⁴ Die bekannten Größen der Angebote und Bedarfe sowie der Transportkosten, können in ein **Transporttableau** (Abb. 1) eingetragen werden, in welches, sobald diese sukzessiv bekannt werden, auch die transportierten Mengen x_{ij} hinzugefügt werden.⁵

¹ Vgl. Gohout (2004) S. 85

² Ebd.

³ Vgl. Gohout (2004) S. 86

⁴ Ebenda (ebd.)

⁵ Vgl. Gohout (2004) S. 85 f.

Die Bearbeitung eines Transportproblems hat die Erstellung eines kostenoptimalen **Transportplans** zum Ziel, durch welchen alle Bedarfe befriedigt und alle Angebote ausgenutzt werden.⁶

	B₁		...		B_n		
A₁	x₁₁	c₁₁	x_{1n}	c_{1n}	a₁
...
A_m	x_{m1}	c_{m1}	x_{mn}	c_{mn}	a_m
	b₁		...		b_n		

Abbildung 1: Allgemeines Transporttableau eines klassischen Transportproblems

Mathematisch lässt sich das Transportproblem als spezielles lineares Optimierungsproblem wie folgt formulieren:⁷

$$\text{Minimiere } F(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

Mit den Nebenbedingungen:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad \text{für } i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad \text{für } j = 1, \dots, n$$

Zudem gilt die Nichtnegativitätsbedingung:

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{für alle } i \text{ und } j$$

⁶ Vgl. Domschke, Drexl (1995) S. 73

⁷ Vgl. Domschke, Drexl (1995) S. 73 f.

Für die Lösung von klassischen Transportproblemen gibt es unterschiedliche Verfahren, welche sich in zwei Kategorien einteilen lassen:

1. Eröffnungsverfahren zur Bestimmung einer zulässigen Basislösung
2. Optimierungsverfahren, welche, von einer zulässigen Basislösung ausgehend, eine optimale Lösung des Problems liefern

Im Rahmen dieser Arbeit werden einige Eröffnungsverfahren vorgestellt, mit dem Ziel, Elemente aus diesen für die Entwicklung der angestrebten Methode zu entnehmen.

2.1.1 Eröffnungsverfahren

Nordwesteckenregel

Die Nordwesteckenregel ist eine sehr einfache Methode zur Erstellung einer Basislösung. Die Methode weist den Transportmengen x_{ij} unabhängig der dazugehörigen Transportkosten ihre Werte zu. Dabei wird immer in der linken oberen Ecke (der nordwestlichen Ecke), also dem Feld x_{11} begonnen. Diesem wird die maximal zulässige Transportmenge zugeordnet, welche sich als Minimum des Angebotes a_1 und des Bedarfs b_1 bestimmt. Abhängig davon, ob das Angebot oder der Bedarf höher ist, wird das nächste Feld ausgewählt und dessen Werte zugewiesen. Allgemein gilt für jeden Iterationsschritt nach dem Start bei $i:=1; j:=1$.⁸

$$x_{ij} := \min(a_i, b_j); \quad a_i := a_i - x_{ij}; \quad b_j := b_j - x_{ij};$$

If $a_i = 0$ **then** $i := i + 1$ **else** $j := j + 1$;

gehe zur nächsten Iteration

Der Abbruch des Verfahrens erfolgt nach der ersten Zeile des Iterationsschritts, in welchem $i = m$ und $j = m$ gelten. Als Ergebnis ergibt sich eine zulässige Basislösung mit $m+n-1$ Basisvariablen.⁹ Die Basisvariablen sind alle in den Iterationsschritten bestimmten Transportmengen x_{ij} . Alle weiteren, bisher unbestimmten Felder bedeuten, dass auf dieser

⁸ Vgl. Domschke, Drexl (1995) S. 75 f.

⁹ Ebd.

Verbindung keine Waren transportiert werden.¹⁰ Diese werden als Nichtbasisfelder bezeichnet und sind keine Basisvariablen.¹¹

	B₁		B₂		B₃		
A₁	x₁₁	c₁₁	x₁₂	c₁₃	x₁₃	c₁₃	a₁
A₂	x₂₁	c₂₁	x₂₂	c₂₂	x₂₃	c₂₃	a₂
A₃	x₃₁	c₃₁	x₃₂	c₃₂	x₃₃	c₃₃	a₃
	b₁		b₂		b₃		

Abbildung 2 : Beispielhafte Transportmatrix für n=3 Ausgangsorte und m=3 Bestimmungsorte

Vogelsche Approximationsmethode

Bei der Vogelschen Approximationsmethode wird die Zuweisung der x_{ij} -Werte abhängig von den Kosten c_{ij} pro Mengeneinheit vorgenommen. Dazu wird in Iterationsschritten für jede Quelle und jede Senke das Bedauern ermittelt und verglichen, welches entsteht, wenn die jeweils günstigste Möglichkeit, also das Feld mit den geringsten Kosten pro Einheit, nicht genutzt wird. Dieses Bedauern wird ausgedrückt als **Mindestkostenzuwachs** dz_i bzw. ds_j , welcher der Differenz zwischen den zweitkleinsten und kleinsten Einheitstransportkosten entspricht.¹² Für jede Spalte bzw. jeden Bestimmungsort wird also die Differenz ds_j und für jede Zeile bzw. jeden Ausgangsort die Differenz dz_i ermittelt. Aus allen Mindestkostenzuwächsen dz_i und ds_j wird anschließend der größte Wert ausgewählt.¹³ In dieser Zeile oder Spalte wäre somit das Bedauern über die Nichtnutzung des besten Feldes am größten. Dem Feld mit den minimalen Kosten in der ausgewählten Zeile oder Spalte wird

¹⁰ Vgl. Gohout (2004) S. 90 ff.

¹¹ Ebd.

¹² Vgl. Gohout (2004) S. 96

¹³ Ebd.

daher die maximal zulässige Transportmenge x_{ij} zugewiesen, welches sich als Minimum des Angebotes a_i und des Bedarfs b_j bestimmt.¹⁴ Die beteiligten Angebote und Bedarfe werden dann um die Menge x_{ij} reduziert.

Wird ein Angebot dabei komplett aufgebraucht, so wird diese Zeile für den Rest des Verfahrens gesperrt. Genauso wird eine Spalte gesperrt, wenn eine Bedarfsmenge komplett aufgebraucht ist.¹⁵ Im nächsten Iterationsschritt wird dieses Vorgehen wiederholt. Da jedoch mindestens eine Zeile oder Spalte gesperrt ist, müssen in jedem Schritt die Kostendifferenzen neu ermittelt werden. Das Verfahren endet sobald entweder alle Angebote oder Bedarfe aufgebraucht sind. In einem geschlossenen Problem ist dies gleichzeitig der Fall. Aus dem somit ermittelten zulässigen Transportprogramm können dann die gesamten Transportkosten errechnet werden.¹⁶

2.1.2 Optimierungsverfahren

Für die Optimierung eines klassischen Transportproblems gibt es verschiedene Methoden wie die Stepping-Stone-Methode oder die MODI-Methode, welche bei Bedarf in Literatur wie „Operations Research“ von Gohout (2004) nachgeschlagen werden können.

Die im Rahmen dieser Arbeit zu entwickelnde Methode soll eine zulässige Lösung erzeugen und nicht eine existierende optimieren. Aus Sicht der Transportplanung handelt es sich somit um ein Eröffnungsverfahren. Optimierungsverfahren verfolgen zudem spezielle Dynamiken, welche schwer bei abweichenden Voraussetzungen anwendbar sind. In dieser Arbeit wird eine Problemstellung behandelt, welche sich in hohem Maße von einem klassischen Transportproblem unterscheidet. Daher werden die Optimierungsverfahren im Rahmen dieser Arbeit nicht näher ausgeführt.

¹⁴ Ebd.

¹⁵ Ebd.

¹⁶ Vgl. Gohout (2004) S. 97 f.

2.2 Tourenplanungsprobleme – Allgemeines

Die Tourenplanung ist ein Teilaspekt der Transport- und Standortplanung¹⁷ und beschäftigt sich mit der Optimierung des Einsatzes von Fahrzeugflotten.¹⁸ Es gibt verschiedene Ausprägungen von Tourenplanungsproblemen, welche sich in zahlreichen Details unterscheiden.¹⁹

Es gibt zwei übergeordnete Gruppen von Tourenplanungsproblemen, zu welchen sich alle speziellen Tourenplanungsprobleme zuordnen lassen. **Knotenorientierte Probleme** sind Probleme, bei denen sich die Kunden an diskreten Punkten befinden.²⁰ Bei **Kantenorientierten Problemen** sind die Kunden gleichmäßig entlang von Kanten, z.B. Straßen verteilt.²¹

Eine weitere Einteilung kann in Tourenplanungsprobleme mit einem oder mehreren Fahrzeugen vorgenommen werden.²² Bei Problemen mit einem Fahrzeug, welche auch als **Traveling Salesman Probleme** bezeichnet werden, gibt es lediglich eine einzelne Tour, welche alle Standorte bzw. Kanten erreicht.²³ Ziel hierbei ist es, eine ideale **Route** zu finden, also den schnellsten, kürzesten oder kostengünstigsten Weg, der alle Punkte verbindet. Bei Problemen mit mehreren Fahrzeugen verhindern in der Regel Restriktionen, wie Kapazitätsrestriktionen, den Transport mit nur einem einzelnen Fahrzeug.²⁴ In diesem Fall müssen die Kunden zunächst zu Fahrten zugeordnet werden, für welche dann die ideale Route bestimmt wird.²⁵

Innerhalb der Tourenplanung spricht man beim Start- und Endpunkt von Fahrten von einem **Depot**. Bei einem Auslieferungsproblem werden am Depot Waren bereitgestellt, bei einem Sammelproblem werden die gesammelten Waren dort abgeladen.²⁶ Die **Kunden** sind die anzufahrenden Punkte, welche mit 1 beginnend aufsteigend nummeriert werden. Das Depot erhält im Allgemeinen die Nummer 0. Ein Kunde i hat innerhalb eines Zeitintervalls einen

¹⁷ Vgl. Vahrenkamp (2003) S. 233

¹⁸ Vgl. Thonemann (2005) S. 405

¹⁹ V 233ff.

²⁰ Vgl. Vahrenkamp (2003) S. 235

²¹ Ebd.

²² Vgl. Thonemann (2005) S. 407ff.

²³ Ebd.

²⁴ Vgl. Thonemann (2005) S. 417 ff.

²⁵ Vgl. Thonemann (2005) S. 417 f.

²⁶ Vgl. Vahrenkamp (2003) S. 232 ff.

Bedarf von b_i .²⁷ Die zulässigen Verbindungen zwischen dem Depot 0 und Kunde i , sowie die Verbindung der Kunden i zu j werden in einem vollständigen, bewerteten Digraph dargestellt. Dieser hat die Knotenmenge $V=\{0, 1, \dots, n\}$, wobei n der Anzahl Kunden entspricht.²⁸ Die **Entfernung** zwischen zwei Kunden i und j entspricht der Bewertung d_{ij} eines Pfeils $[i, j]$.²⁹

Als eine **Tour** wird die Menge Kunden bezeichnet, welche innerhalb einer an einem Depot beginnenden und endenden Fahrt erreicht werden. Die Tour wird als **geschlossen** bezeichnet, wenn die Tour beim gleichen Depot beginnt und endet, ansonsten handelt es sich um eine **offene Tour**. Die **Route** definiert sich als Reihenfolge, in welcher die Kunden angefahren werden. Ein **Tourenplan** ist eine Menge von Touren, durch welche jeder Kunde mit genau einer Tour erreicht wird.³⁰ Eine Voraussetzung für die Erstellung eines Tourenplans ist es somit, dass alle **Pendeltouren** $(0, i, 0)$; $1 \leq i \leq n$, also Touren, welche nur einen Kunden anfahren, die Kapazitäts- und Zeitrestriktionen nicht überschreiten.³¹ Der Periodenbedarf eines Kunden i darf also nicht die maximale Transportkapazität C überschreiten und die Fahrzeit der Pendeltour darf nicht die maximale Dauer TD einer Tour überschreiten.³²

$$\left. \begin{array}{l} b_i \leq C \\ t_{0i} + t_{i0} \leq TD \end{array} \right\} (i = 1, \dots, n)$$

Im Einzelnen kann es verschiedene Ziele für die Tourenplanung geben. Die zu minimierende Zielgröße kann die insgesamt anfallenden monetären Transportkosten beschreiben, jedoch auch die insgesamt zurückgelegte Strecke, die Fahrzeit oder die Anzahl der eingesetzten Fahrzeuge. Auch die Erreichung einer gleichmäßigen Auslastung der Fahrzeuge, sowie die Erhöhung des Lieferservicegrades können Ziel der Tourenplanung sein.³³

Diese Ziele sind unter anderem abhängig davon, in welcher Planungssituation die Tourenplanung durchgeführt wird.³⁴ Hier lässt sich eine tägliche Planung von der Konzeption von Standardtouren unterscheiden. Die tägliche Planung erfolgt typischerweise, wenn täglich wechselnde Aufträge vorliegen, welche erst kurzfristig bekannt werden. Die Planung muss somit kurzfristig, mit geringem Zeitfenster durchgeführt werden und ist jeden Tag individuell. Für die Planung von Standardtouren sollte es nur geringe Schwankungen innerhalb der

²⁷ Vgl. Vahrenkamp (2003) S. 236 f.

²⁸ Vgl. Vahrenkamp (2003) S. 236

²⁹ Ebd.

³⁰ Vgl. Vahrenkamp (2003) S. 240

³¹ Vgl. Vahrenkamp (2003) S. 240 f

³² Ebd.

³³ Vgl. Vahrenkamp (2003) S. 236

³⁴ Ebd.

Bedarfe geben. Die festgelegten Touren werden dann in regelmäßigen Zeitintervallen wiederholt.³⁵

Als ein sehr allgemeines Tourenplanungsproblem wird hier das **Auslieferungsproblem** dargestellt. Bei diesem gibt es eine bestimmte Anzahl von Kunden, welche von einer Quelle aus mit einem Gut zu beliefern sind. Die Bedarfe, sowie die Standorte der Kunden und des Depots, sind dabei bekannt. Die Lösung des Problems strebt die Minimierung der Zielgröße durch eine optimale Belieferung der Kunden an. Dabei sind sämtliche Restriktionen einzuhalten.³⁶ Die üblichsten Restriktionen sind die **Kapazitäts-** und die **Zeitrestriktion**.³⁷ Bei der Kapazitätsrestriktion ist die Kapazität der Transportmittel begrenzt durch ein maximales Ladegewicht oder –Volumen. Zu Zeitrestriktionen gehören die maximale zeitliche Dauer einer Tour oder tageszeitabhängige Restriktionen.

Zu den anderen Ausprägungen von Tourenplanungsproblemen, gehören unter anderem **Mehrdepot-Auslieferungsprobleme**. Bei diesen können die Kunden von mehreren Depots bzw. Quellen beliefert werden. Somit ist neben der Kapazitätsrestriktion auch die ideale Zuordnung von Touren zu Depots zu beachten. Möglich sind auch Restriktionen hinsichtlich der Zuteilbarkeit von Depots zu Kunden, zum Beispiel wenn bestimmte Kunden nur von bestimmten Depots aus beliefert werden können.³⁸

2.2.1 Lösungsverfahren für Tourenplanungsprobleme

Zur Lösung von Tourenplanungsproblemen werden meistens heuristische Verfahren verwendet, da der Rechenaufwand für die exakte Lösung von umfangreichen Problemen unverhältnismäßig groß ist. Das liegt daran, dass der Rechenaufwand im ungünstigsten Fall exponentiell zum Umfang des Problems wächst.³⁹ Daher werden an dieser Stelle einige heuristische Verfahren zur Konstruktion eines Tourenplans und zu dessen Verbesserung vorgestellt. Die Verfahren bearbeiten dabei die beiden Teilprobleme der Zuordnung von Kunden zu Touren und die Festlegung der Route auf dieser Tour.

³⁵ Vgl. Vahrenkamp (2003) S. 236

³⁶ Vgl. Vahrenkamp (2003) S. 233

³⁷ Vgl. Vahrenkamp (2003) S. 235

³⁸ Vgl. Vahrenkamp (2003) S. 234

³⁹ Vgl. Vahrenkamp (2003) S. 241

Da die Lösungsverfahren nur Näherungsverfahren sind, gibt es neben Verfahren zur Konstruktion von Tourenplänen auch Verfahren zur Verbesserung von diesen.⁴⁰ Im Folgenden wird zunächst das Traveling Salesman Problem näher betrachtet und anschließend werden einige Konstruktionsverfahren vorgestellt.

Lösung eines Traveling Salesman Problems

Für ein Traveling Salesman Problem, also ein Problem der Findung der idealen Route, welche das Depot 0 mit allen J (n) Kunden verbindet, lässt sich eine optimale Lösung mit dem folgenden mathematischen Programm errechnen:⁴¹

$$Z^* = \min_x \sum_{i=0}^J \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^J c_{ij} x_{ij}$$

Unter den Nebenbedingungen:⁴²

1. $\sum_{j \neq i}^J x_{ij} = 1$ $j=0, 1, \dots, J$
2. $\sum_{j \neq i}^J x_{ij} = 1$ $i=0, 1, \dots, J$
3. $y_0 = 0$
4. $1 \leq y_j \leq J$ $j=0, 1, \dots, J$
5. $y_i - y_j + 1 \leq J(1 - x_{ij})$ $i=1, 2, \dots, J, j=1, 2, \dots, J, j \neq i$
6. $x_{ij} \in \{0, 1\}$ $i=0, 1, \dots, J, j=0, 1, \dots, J, j \neq i$

Die Zielfunktion errechnet die gesamten Kosten als Summe der Fahrtkosten c_{ij} der einzelnen Strecken von einem Kunden i zum Kunden j .⁴³ Die Entscheidungsvariable x_{ij} beschreibt dabei, ob eine direkte Verbindung von i zu j vorhanden ist. Daher nimmt x_{ij} , wie in der 6. Nebenbedingung festgelegt, nur die Werte 1 = „direkte Fahrt“ oder 0 = „keine direkte Fahrt“ an.⁴⁴ Die ersten beiden Nebenbedingungen geben vor, dass jeder Kunde genau einmal

⁴⁰ Ebd.

⁴¹ Vgl. Thonemann (2005) S. 407 ff.

⁴² Ebd.

⁴³ Vgl. Thonemann (2005) S. 408 f.

⁴⁴ Ebd.

angefahren und genau einmal von einem Fahrzeug verlassen wird.⁴⁵ Die restlichen Nebenbedingungen stellen sicher, dass die Verbindungen einen einzigen Kreis bilden, welcher beim Depot startet und endet.⁴⁶ Dazu stellt die Variable y_i die Position innerhalb der Tour da.⁴⁷ Die 3. Nebenbedingung gibt daher für das Depot y_0 die Position 0, also den Startpunkt vor. Nebenbedingung vier grenzt die zulässigen Positionen ein, sodass es nur maximal so viele Positionen wie Kunden und Depots geben kann.⁴⁸ Mit der 5. Nebenbedingung wird sichergestellt, dass nur Rundreisen, die am Depot starten und enden, zulässig sind.⁴⁹

Dieses Lösungsverfahren ist ausschließlich zur Findung einer idealen Route zu verwenden. Die Konstruktion von Touren ist mit diesem Verfahren daher nicht möglich, insbesondere, da keine Kapazitäts- oder Zeitrestriktionen beachtet werden können. Die Findung einer idealen Route innerhalb einer konstruierten Tour ist jedoch Teil von anderen Konstruktionsverfahren, wie dem nachfolgenden Sweep-Algorithmus.

2.2.2 Konstruktionsverfahren

Der Sweep-Algorithmus

Der Sweep-Algorithmus von Gillett und Miller (1974) arbeitet mit den Koordinaten von Standorten, wobei davon ausgegangen wird, dass es nur ein Depot im Koordinatenursprung gibt.⁵⁰ Die Entfernung d_{ij} zwischen zwei Standorten kann als Luftlinienentfernung mithilfe der Koordinaten (x_i, y_i) bestimmt werden.⁵¹

Die Sortierung und Nummerierung der Kunden erfolgt nach aufsteigenden Polarwinkeln gegen den Uhrzeigersinn.⁵² Die Touren werden daraus sequentiell gebildet, indem, bei dem kleinsten Polarwinkel beginnend, Kunden mit aufsteigendem Polarwinkel der ersten Tour zugeordnet werden. Dieser Tour werden so lange weitere Kunden zugeordnet bis eine durch Restriktionen gesetzte Grenze erreicht wird. Diese kann die Kapazitätsgrenze des Fahrzeuges sein oder eine Überschreitung der maximalen Fahrtzeit, welche dafür abgeschätzt werden

⁴⁵ Ebd.

⁴⁶ Vgl. Thonemann (2005) S. 408 ff.

⁴⁷ Ebd.

⁴⁸ Ebd.

⁴⁹ Vgl. Thonemann (2005) S. 408 ff.

⁵⁰ Vgl. Vahrenkamp (2003) S. 242

⁵¹ Vgl. Vahrenkamp (2003) S. 242

⁵² Ebd.

muss. Der erste Kunde, welcher die Restriktionen überschreitet, wird der zweiten Tour zugeordnet. Dieser werden wiederum weitere Kunden mit aufsteigenden Polarwinkeln zugeordnet. Der Ablauf wird so lange wiederholt, bis der letzte Kunde n einer Tour zugeordnet ist. Für die gebildeten Touren wird anschließend mit einem Lösungsverfahren des Traveling Salesman Problems eine optimale Route ermittelt.⁵³

Liegt das Depot im Verhältnis zu den Kunden relativ zentral und werden auf wenigen Touren jeweils eine relativ große Anzahl Kunden erreicht, so liefert der Sweep-Algorithmus relativ gute Ergebnisse.⁵⁴ Damit steht es im Gegensatz zum nachfolgend vorgestellten Savings-Verfahren, welches auch bei dezentralen Depots und insbesondere bei einer großen Anzahl Touren mit wenigen Kunden gute Ergebnisse liefert.⁵⁵

Savings-Verfahren

Im Gegensatz zum Sweep-Algorithmus ist das Savings-Verfahren ein Parallelverfahren, bei welchem die Zusammenstellung von Touren und die Bestimmung der genauen Routen parallel ablaufen.⁵⁶ Die Grundlage bildet eine symmetrische Entfernungsmatrix $D = (d_{ij})$ mit $i, j = 0, \dots, n$. Alternativ können die Entfernungen d_{ij} mittels derer Koordinaten als Luftlinienentfernung berechnet werden.⁵⁷ Als Start des Verfahrens dient eine Anfangslösung, bei der jeder Kunde i einzeln vom Depot angefahren wird, sich also auf einer sogenannten **Pendeltour** mit der Route $(0, i, 0)$ befindet.⁵⁸

Im Laufe des Verfahrens wird diese Anfangslösung sukzessiv durch die Verbindung von jeweils zwei Touren verbessert. Die jeweils ersten und letzten Kunden auf einer Tour werden als **Endkunden** bezeichnet.⁵⁹ Zwei Touren werden verknüpft, indem zwischen den Endkunden zweier Touren eine Verbindung gebildet wird, während diese Endkunden ihre Verbindung zum Depot 0 lösen. Die Verbindung zweier Touren ist dabei nur möglich, wenn die neu gebildete Tour sämtliche Restriktionen, wie die maximale Transportkapazität oder zulässige Dauer einer Tour, einhält.⁶⁰ Bei der Zusammensetzung von zwei Touren ergeben sich bis zu vier mögliche Touren, welche durch alle möglichen Kombinationen der

⁵³ Vgl. Vahrenkamp (2003) S. 242 f.

⁵⁴ Vgl. Vahrenkamp (2003) S. 243 f.

⁵⁵ Vgl. Vahrenkamp (2003) S. 249 f.

⁵⁶ Vgl. Vahrenkamp (2003) S. 247

⁵⁷ Ebd.

⁵⁸ Ebd.

⁵⁹ Ebd.

⁶⁰ Ebd.

Endkunden entstehen. Die Einsparung, welche durch die Verbindung zweier Endkunden i und j entsteht, wird als Saving s_{ij} bezeichnet und wie folgt berechnet:⁶¹ $s_{ij} := d_{oi} + d_{oj} - d_{ij}$

Die Savings werden für alle möglichen Verbindungen von zwei Touren errechnet und anschließend absteigend sortiert. Alle positiven Savings werden, beim größten beginnend, erst auf Einhaltung aller Restriktionen überprüft und anschließend, sofern die Verbindung der Touren zulässig ist, durchgeführt.

Das Savings-Verfahren erfordert die Errechnung von einer großen Menge an Savings-Werten, welche mit wachsender Anzahl von Kunden n exponentiell mehr werden. Da von den Savings gerade bei großen n nur eine geringe Anzahl tatsächlich genutzt werden kann, ist das Verfahren sehr unökonomisch.⁶²

2.2.3 Verbesserungsverfahren

Für Touren-Verbesserungsverfahren gilt das gleiche wie für die Optimierungsverfahren von Transportproblemen. Da die zu entwickelnde Methode aus Sicht der Tourenplanung ein Konstruktionsverfahren ist, wird auch auf diese Verfahren an dieser Stelle nicht weiter eingegangen. Erwähnenswert sind das 2-opt und 3-opt Verfahren, welche der Literatur, z.B. „Quantitative Logistik für das Supply Chain Management“ von Vahrenkamp (2003) entnommen werden können.

3. Entwicklung der Methode

3.1 Herleitung der Methode

Um eine einfache Herleitung der entwickelten Methode zu ermöglichen, wird die Nutzung der sprungfixen Fahrzeugkosten zunächst ohne die Zulassung von Touren angewendet. Hierzu wird das klassische Transportproblem (Abb. 3) umgewandelt in das in Abb. 4 zu sehende spezielle Transportproblem. Im weiteren Verlauf werden alle Ausgangsorte als **Quellen** und alle Bedarfsorte als **Senken** bezeichnet.

⁶¹ Vgl. Vahrenkamp (2003) S. 248

⁶² Vgl. Vahrenkamp (2003) S. 249

	Q_1	Q_2	...	Q_m
S_1	c_{11}	c_{21}	...	c_{m1}
S_2	c_{12}	c_{22}	...	c_{m2}
...
S_n	c_{1n}	c_{2n}	...	c_{mn}

Abbildung 3: Klassisches Transportproblem mit den Kosten c_{ij}

	Q_1	Q_2	...	Q_m
S_1	k_{11}	k_{21}	...	k_{m1}
S_2	k_{12}	k_{22}	...	k_{m2}
...
S_n	k_{1n}	k_{2n}	...	k_{mn}

Abbildung 4: Spezielles Transportproblem mit den Kosten k_{yj}

Beide Transportprobleme enthalten m Quellen und n Senken. Die Transportkosten im klassischen Transportproblem sind angegeben als c_{ij} und bezeichnen die Kosten für den Transport einer einzelnen Mengeneinheit von Quelle i zu Senke j . Im speziellen Transportproblem wird dieser Wert ersetzt durch die Kosten k_{yj} , welche für die Fahrt eines Transportmittels von Quelle y zu Senke j anfallen. Für einen direkten Vergleich werden die Gesamtkosten des Transportes von Quelle i bzw. y zu Senke j als K_{ij} bzw. K_{yj} bezeichnet. Wenn die transportierte Menge als x_{ij} bzw. x_{yj} bezeichnet wird und die maximale Transportkapazität als t , berechnen sich die Gesamtkosten wie folgt:

$$K_{ij} = x_{ij} * c_{ij} \quad \text{für das klassische Problem}$$

$$K_{yj} = \left\lceil \frac{x_{yj}}{t} \right\rceil * k_{yj} \quad \text{für das spezielle Problem}$$

$$\text{Mit: } x_{ij}, x_{yj} \geq 0 ; t > 0$$

Wenn die maximale Transportkapazität exakt einer Mengeneinheit $t=1$ entspricht und x_{yj} nur ganzzahlige positive Werte annehmen kann, sowie $i=y$ angenommen wird, so entsprechen sich die Transportprobleme. Durch die ersten beiden genannten Bedingungen nehmen die sprungfixen Kosten einen variablen Charakter an, da sie sich mit jeder vollen Mengeneinheit erhöhen. Die Kosten für den Transport einer Einheit entsprechen also den Kosten für die Fahrt eines Transportmittels. Unter diesen Bedingungen verwandelt sich das spezielle Transportproblem in ein klassisches Transportproblem, welches mit den in Teil 2.1.1 genannten Lösungsverfahren gelöst werden kann. Ziel dieser Arbeit ist es allerdings, eine Methode zu entwickeln, bei der eine maximale Transportkapazität von $t \neq 1$ zulässig ist. Die Angebote a_i und Bedarfe b_j dürfen diese Transportkapazität unter- oder überschreiten.

Im Folgenden wird an einem Beispiel (Abb. 5) mit m Quellen und n Senken die Vogelsche Approximationsmethode analog für das spezielle Transportproblem angewendet. Die Kosten für die Fahrt eines Transportmittels werden als k_{yj} angegeben. Als maximale Transportkapazität wird für dieses Beispiel $t = 10$ Mengeneinheiten (ME) festgelegt. Das Ziel ist es, die Tauglichkeit der Methode an dem abgewandelten Problem zu untersuchen.

Ausgangsproblem	Q ₁		Q ₂		Q ₃		Bedarf
	x_{11}	k_{11}	x_{21}	k_{21}	x_{31}	k_{31}	
S ₁		13		15		20	20
S ₂		17		16		19	8
S ₃		21		19		21	10
Angebot	9		20		9		

Abbildung 5: Transporttableau mit beispielhaften Kosten k_{yj}

Das Problem wird analog zu einem klassischen Transportproblem mit der Vogelschen Approximationsmethode in folgenden Iterationsschritten (Abb. 6-8) gelöst:

In den Seitenspalten bzw. -Zeilen „I 1“ bis „I 3“ werden die jeweiligen Abstände vom kleinsten Wert zur günstigsten Alternative in jedem Iterationsschritt angegeben.

1. Iteration	Q ₁		Q ₂		Q ₃		Bedarf	I ₁	I ₂	I ₃
S ₁	x ₁₁	k ₁₁	x ₂₁	k ₂₁	x ₃₁	k ₃₁	11	2		
	9	13		15		20				
S ₂	x ₁₂	k ₁₂	x ₂₂	k ₂₂	x ₃₂	k ₃₂	8	1		
	/	17		16		19				
S ₃	x ₁₃	k ₁₃	x ₂₃	k ₂₃	x ₃₃	k ₃₃	10	2		
	/	21		19		21				
Angebot	0		20		9					
I ₁	4		1		1					
I ₂										
I ₃										

Abbildung 6: Transporttableau nach 1. Iteration

2. Iteration	Q ₁		Q ₂		Q ₃		Bedarf	I ₁	I ₂	I ₃
S ₁	x ₁₁	k ₁₁	x ₂₁	k ₂₁	x ₃₁	k ₃₁	0	2	5	
	9	13	11	15	/	20				
S ₂	x ₁₂	k ₁₂	x ₂₂	k ₂₂	x ₃₂	k ₃₂	8	1	3	
	/	17		16		19				
S ₃	x ₁₃	k ₁₃	x ₂₃	k ₂₃	x ₃₃	k ₃₃	10	2	2	
	/	21		19		21				
Angebot	0		9		9					
I ₁	4		1		1					
I ₂	/		1		1					
I ₃										

Abbildung 7: Transporttableau nach 2. Iteration

3. Iteration	Q ₁		Q ₂		Q ₃		Bedarf	I ₁	I ₂	I ₃
S ₁	x ₁₁	k ₁₁	x ₂₁	k ₂₁	x ₃₁	k ₃₁	0	2	5	/
	9	13	11	15	/	20				
S ₂	x ₁₂	k ₁₂	x ₂₂	k ₂₂	x ₃₂	k ₃₂	0	1	3	3
	/	17	8	16	/	19				
S ₃	x ₁₃	k ₁₃	x ₂₃	k ₂₃	x ₃₃	k ₃₃	0	2	2	2
	/	21	1	19	9	21				
Angebot	0		0		0					
I ₁	4		1		1					
I ₂	/		1		1					
I ₃	/		3		2					

Abbildung 8: Transporttableau nach 3. Iteration

Neben der Lösung mit der Vogelschen Approximationsmethode wird ein weiterer Transportplan ohne Verwendung einer Methode erstellt, bei welchem die Anzahl von Fahrten minimiert wird. Diese alternative Verteilung wird in Abb. 9 dargestellt. Für beide Transportpläne werden anschließend die Gesamtkosten pro Verbindung K_{yj} und die summierten Transportkosten Z errechnet und in Abbildung 10 dargestellt.

Alternative Verteilung	Q 1		Q 2		Q 3		Bedarf
	x_{11}	k_{11}	x_{21}	k_{21}	x_{31}	k_{31}	
S 1	/	13	20	15	/	20	0
S 2	/	17	/	16	8	19	0
S 3	9	21	/	19	1	21	0
Angebot	0		0		0		

Abbildung 9: Transporttableau mit alternativ, unmethodisch verteilten Transportmengen x_{yj}

Feld	Vogelsche Approximationsmethode		Alternative Verteilung	
	Anzahl Fahrten	Kosten K_{yj}	Anzahl Fahrten	Kosten K_{yj}
x_{11}	$0 < 9 \leq 10 \Rightarrow 1$	$1 \times 13 = 13$	0	0
x_{21}	$10 < 11 \leq 20 \Rightarrow 2$	$2 \times 15 = 30$	$10 < 20 \leq 20 \Rightarrow 2$	$2 \times 15 = 30$
x_{31}	0	0	0	0
x_{12}	0	0	0	0
x_{22}	$0 < 8 \leq 10 \Rightarrow 1$	$1 \times 16 = 16$	0	0
x_{32}	0	0	$0 < 8 \leq 10 \Rightarrow 1$	$1 \times 19 = 19$
x_{13}	0	0	$0 < 9 \leq 10 \Rightarrow 1$	$1 \times 21 = 21$
x_{23}	$0 < 1 \leq 10 \Rightarrow 1$	$1 \times 19 = 19$	0	0
x_{33}	$0 < 9 \leq 10 \Rightarrow 1$	$1 \times 21 = 21$	$0 < 1 \leq 10 \Rightarrow 1$	$1 \times 21 = 21$
Ges	6	99	5	91

Abbildung 10: Gegenüberstellung der Fahrtenanzahl und Transportkosten

Die durch die Vogelsche Approximationsmethode errechnete Lösung liefert mit Gesamtkosten von 99 Geldeinheiten ein deutlich schlechteres Ergebnis als die alternative Verteilung mit 91 Geldeinheiten. Das liegt daran, dass die Kosten in diesem speziellen Transportproblem einen sprungfixen und keinen variablen Charakter haben. Ein kaum beladenes Fahrzeug verursacht somit deutlich höhere Kosten pro transportierter Einheit. Die Vogelsche Approximationsmethode wählt kostengünstigen Strecken, achtet jedoch nicht darauf, dass die Fahrzeuge auf den Strecken ausgelastet sind. Durch die Nutzung von unausgelasteten Fahrten können zusätzlich benötigte Fahrten hinzukommen, welche zu den hohen Kosten in diesem Beispiel führen.

Das Hauptproblem für die Anwendbarkeit der Vogelschen Approximationsmethode besteht also darin, dass diese auf variable Kosten ausgelegt ist. Daher werden in einem nächsten Schritt aus den Kosten k_{yj} pro Fahrt die Kosten pro transportierter Einheit v_{yjs} im Iterationsschritt s errechnet. Dafür wird für jedes Feld in der Matrix, also für jede Quelle-Senke Verbindung, die maximal versendbare Warenmenge $x_{yj \max s}$ bestimmt. Diese bestimmt sich wiederum als Minimum des Angebotes a_y und des Bedarfes b_j .

$$x_{ij \max} = \min(a_y; b_j)$$

Für das oben verwendete Beispiel (Abb. 5) wird die Vogelsche Approximationsmethode erneut analog unter Verwendung der Kosten v_{yjs} durchgeführt um festzustellen, ob sich ein besseres Ergebnis finden lässt.

Zunächst werden dafür die im ersten Iterationsschritt verfügbaren maximalen Transportmengen $x_{yj \max 1}$ bestimmt. (Abb. 11)

	Q 1	Q 2	Q 3	B
S 1	9	20	9	20
S 2	8	8	8	8
S 3	9	10	9	10
A	9	20	9	

Abbildung 11: Maximal verfügbare Transportmengen $x_{yj \max 1}$, in Abhängigkeit der verfügbaren Angebote und Bedarfe im ersten Iterationsschritt

Aus der transportierbaren Menge $x_{yj \max 1}$, den Kosten k_{yj} und der maximalen Fahrzeugkapazität t können nun die variablen Kosten pro Mengeneinheit $v_{yj 1}$ für den ersten Iterationsschritt $s=1$ berechnet werden.

$$v_{yj 1} = \frac{\left(\left\lfloor \frac{x_{yj \max 1}}{t} \right\rfloor * k_{yj} \right)}{x_{yj \max 1}}$$

Aus den in Abb. 11 dargestellten maximalen Transportmengen ergeben sich für dieses Beispiel im ersten Iterationsschritt die in Abb. 12 ersichtlichen variablen Kosten pro Mengeneinheit.

	Q 1	Q 2	Q 3	B
S 1	1,4	1,5	2,2	20
S 2	2,1	2,0	2,4	8
S 3	2,3	1,9	2,3	10
A	9	20	9	

Abbildung 12: Variable Kosten pro Mengeneinheit $v_{yj 1}$, im ersten Iterationsschritt

Mit den errechneten Werten wird der erste Iterationsschritt durchgeführt (Abb. 13):

1. Iteration	Q ₁		Q ₂		Q ₃		Bedarf	I ₁	I ₂	I ₃
S ₁	x ₁₁	v ₁₁₁	x ₂₁	v ₁₂₁	x ₃₁	v ₁₃₁	11	0,1		
	9	1,4		1,5		2,2				
S ₂	x ₁₂	v ₂₁₁	x ₂₂	v ₂₂₁	x ₃₂	v ₂₃₁	8	0,1		
	/	2,1		2,0		2,4				
S ₃	x ₁₃	v ₃₁₁	x ₂₃	v ₃₂₁	x ₃₃	v ₃₃₁	10	0,4		
	/	2,3		1,9		2,3				
Angebot	0		20		9					
I ₁	0,7		0,4		0,1					
I ₂										
I ₃										

Abbildung 13: Transporttableau(mit Kosten v_{ys}) nach der ersten Iteration

Im ersten Iterationsschritt werden dem Feld x₁₁ 9 Mengeneinheiten zugeteilt, da die Kostendifferenz pro Einheit zur günstigsten Alternative bei Q₁ am höchsten ist. Dadurch ändern sich auch der Bedarf b₁ und das Angebot a₁. Da für die Berechnung der Kosten v_{ys} unter anderem x_{ys max s} und somit auch a_{is} und b_{js} benötigt werden, müssen im zweiten Iterationsschritt zunächst neue Kostensätze pro Mengeneinheit v_{ys2} berechnet werden. Dieses Vorgehen muss für jeden Iterationsschritt wiederholt werden. Allgemein muss am Anfang jedes Iterationsschritts Folgendes für alle y und j berechnet werden:

$$x_{ys \max s} = \min(a_{ys-1}, b_{js-1})$$

$$v_{ys} = \frac{\left(\left\lceil \frac{x_{ys \max s}}{t} \right\rceil * k_{yj} \right)}{x_{ys \max s}}$$

$$t > 0$$

$$x_{ys \max s}, a_{ys-1}, b_{js-1} \geq 0$$

Für den zweiten Iterationsschritt ergibt sich die in Abb. 14 ersichtliche Kostenmatrix.

	Q ₁	Q ₂	Q ₃	B
S ₁	/	2,7	2,2	11
S ₂	/	2,0	2,4	8
S ₃	/	1,9	2,3	10
A	0	20	9	

Abbildung 14: Kosten v_{yj2} pro Mengeneinheit im zweiten Iterationsschritt

Die hier angewandte Vorgehensweise, in Anlehnung an die Vogelsche Approximationsmethode, vergleicht in jedem Schritt s die geringsten Kosten pro Mengeneinheit v_{yjs} mit der günstigsten Alternative für jede Quelle Q_y und Senke S_j . Dadurch, dass die Zuweisung von Transportmengen x_{yj} auch die Kosten pro Einheit für andere Felder beeinflussen kann, ist es möglich, dass sich die Differenz zwischen dem günstigsten und zweitgünstigsten Wert nach einem Iterationsschritt drastisch verändert. Unter Umständen kann also die Wahl eines Feldes negative Konsequenzen für den späteren Ablauf der Methode haben. Das Ziel der Methode, das Bedauern zu minimieren, kann demnach unter Umständen nicht erzielt werden.

Die Kosten v_{212} haben sich im Vergleich zu v_{211} um 0,7 Geldeinheiten erhöht. Die Kosten v_{112} bis v_{132} entfallen, da das Angebot a_1 erschöpft ist. Die nachfolgenden Iterationsschritte werden im Folgenden direkt in Form des finalen Transporttableaus dargestellt (Abb. 15-16):

2. Iteration	Q ₁		Q ₂		Q ₃		Bedarf	I ₁	I ₂	I ₃
S ₁	x ₁₁ 9	v _{11 2} /	x ₂₁	v _{12 2} 2,7	x ₃₁ 9	v _{13 2} 2,2	2	0,1	0,5	
S ₂	x ₁₂ /	v _{21 2} /	x ₂₂	v _{22 2} 2,0	x ₃₂ /	v _{23 2} 2,4	8	0,1	0,4	
S ₃	x ₁₃ /	v _{31 2} /	x ₂₃	v _{32 2} 1,9	x ₃₃ /	v _{33 2} 2,3	10	0,4	0,4	
Angebot	0		20		0					
I ₁	0,7		0,4		0,1					
I ₂	/		0,1		0,1					
I ₃										

Abbildung 15: Transporttableau(mit Kosten v_{yj_s}) nach der zweiten Iteration

3. Iteration	Q ₁		Q ₂		Q ₃		Bedarf	I ₁	I ₂	I ₃
S ₁	x ₁₁ 9	v _{11 3} /	x ₂₁ 2	v _{12 3} 7,5	x ₃₁ 9	v _{13 3} /	0	0,1	0,5	
S ₂	x ₁₂ /	v _{21 3} /	x ₂₂ 8	v _{22 3} 2,0	x ₃₂ /	v _{23 3} /	0	0,1	0,4	
S ₃	x ₁₃ /	v _{31 3} /	x ₂₃ 10	v _{32 3} 1,9	x ₃₃ /	v _{33 3} /	0	0,4	0,4	
Angebot	0		0		0					
I ₁	0,7		0,4		0,1					
I ₂	/		0,1		0,1					
I ₃										

Abbildung 16: Transporttableau(mit Kosten v_{yj_s}) nach der dritten Iteration

Nach Abschluss des dritten Iterationsschrittes werden erneut die gesamten Kosten errechnet und mit den auf anderen Wegen berechneten Ergebnissen verglichen. (Abb. 17)

	Vogelsche Approximationsmethode		Alternative Verteilung		V. Approx.-methode mit var. Kosten	
Feld	Anzahl Fahrten	Kosten K_{yj}	Anzahl Fahrten	Kosten K_{yj}	Anzahl Fahrten	Kosten K_{yj}
x_{11}	$0 < 9 \leq 10 \Rightarrow 1$	$1 \times 13 = 13$	0	0	$0 < 9 \leq 10 \Rightarrow 1$	$1 \times 13 = 13$
x_{21}	$10 < 11 \leq 20 \Rightarrow 2$	$2 \times 15 = 30$	$10 < 20 \leq 20 \Rightarrow 2$	$2 \times 15 = 30$	$0 < 2 \leq 10 \Rightarrow 1$	$1 \times 15 = 15$
x_{31}	0	0	0	0	$0 < 9 \leq 10 \Rightarrow 1$	$1 \times 20 = 20$
x_{12}	0	0	0	0	0	0
x_{22}	$0 < 8 \leq 10 \Rightarrow 1$	$1 \times 16 = 16$	0	0	$0 < 8 \leq 10 \Rightarrow 1$	$1 \times 16 = 16$
x_{32}	0	0	$0 < 8 \leq 10 \Rightarrow 1$	$1 \times 19 = 19$	0	0
x_{13}	0	0	$0 < 9 \leq 10 \Rightarrow 1$	$1 \times 21 = 21$	0	0
x_{23}	$0 < 1 \leq 10 \Rightarrow 1$	$1 \times 19 = 19$	0	0	$0 < 10 \leq 10 \Rightarrow 1$	$1 \times 19 = 19$
x_{33}	$0 < 9 \leq 10 \Rightarrow 1$	$1 \times 21 = 21$	$0 < 1 \leq 10 \Rightarrow 1$	$1 \times 21 = 21$	0	0
Ges	6	99	5	91	5	83

Abbildung 17: Zweite Gegenüberstellung der Fahrtenanzahl und Transportkosten

Die letzte Methode, welche die Vorgehensweise der Vogelschen Approximationsmethode unter Verwendung der Kosten pro Mengeneinheit nutzt, bietet mit Gesamtkosten von 83 Geldeinheiten das bislang beste Ergebnis.

3.2 Zwischenergebnis der Herleitung

Die Herunterbrechung der Kosten auf die Kosten pro transportierter Einheit, also somit die Umwandlung der sprungfixen Kosten in variable Kosten für die Verwendung in der Methode, bringt ein gutes Ergebnis. Dennoch gibt es in jedem der Szenarien ein oder mehrere Fahrzeuge, die kaum beladen eine Strecke befahren, während in anderen Fahrzeugen noch ausreichend Kapazität für diese Lademengen vorhanden ist. In diesem beispielhaften Transportproblem lässt sich dies allerdings aufgrund der speziellen Verteilung der Angebote und Bedarfe nicht verhindern. Um die Kapazitäten der Fahrzeuge besser auslasten zu können, ist die Planung von Touren notwendig. Die in Teil 2.2 vorgestellten Methoden sehen für Tourenplanungsprobleme allerdings nur eine Quelle (Depot) vor.

Ziel ist daher die Verbindung eines Transportproblems mit m Quellen, welche über begrenzte Angebote a_y verfügen, mit einem Tourenplanungsproblem, welches über Kapazitätsgrenzen bei den Transportmitteln verfügt. Als Ausgangspunkt dafür wählt der Autor die Matrixdarstellung eines Transportproblems. Eine solche Matrix verfügt über ein Feld für jede mögliche Verbindung von einer Quelle zu einer Senke. Die Matrix muss an dieser Stelle erweitert werden um jene Verbindungen, welche durch die Verwendung von Touren möglich

werden. Um diese Darstellung zu ermöglichen, muss eine umfangreichere Kostenmatrix vorliegen, in welcher die Kosten für die Fahrten zwischen allen Standorten, also auch den Quellen und Senken untereinander, gegeben sind.

Ziel ist die Entwicklung eines Transporttableaus (Abb. 18), in welches die Transportmengen x_{ijz} für jede Tour X_{ijz} (i, y, j, z) bzw. (i, y, j, z, i) eingetragen werden können. Des Weiteren werden die Kosten k_{ijz} für die Fahrt eines Transportmittels auf einer Tour, sowie die Angebote a_{iy} und Bedarfe b_{jz} dieser Tour angegeben. Der Begriff einer **Tour** wird im Sinne dieser Arbeit verallgemeinert als ein Weg, welcher verschiedene Knotenpunkte in einer gewissen Reihenfolge verbindet. Die Methode zur sukzessiven Ausfüllung dieses Tableaus und dessen Voraussetzungen werden in den folgenden Teilen 3.3 und 3.4 ausgeführt.

	Q1Q1		...	Q1Qm		...	QmQ1		...	QmQm		Bedarf
S1S1	x_{1111}	k_{1111}	...	x_{1m11}	k_{1m11}	...	x_{m111}	k_{m111}	...	x_{mm11}	k_{mm11}	b_{11}

S1Sn	x_{111n}	k_{111n}	...	x_{1m1n}	k_{1m1n}	...	x_{m11n}	k_{m11n}	...	x_{mm1n}	k_{mm1n}	b_{1n}
...
SnS1	x_{11n1}	k_{11n1}	...	x_{1mn1}	k_{1mn1}	...	x_{m1n1}	k_{m1n1}	...	x_{mmn1}	k_{mmn1}	b_{n1}
...
SnSn	x_{11nn}	k_{11nn}	...	x_{1mnn}	k_{1mnn}	...	x_{m1nn}	k_{m1nn}	...	x_{mmnn}	k_{mmnn}	b_{nn}
Angebot	a_{11}		...	a_{1m}		...	a_{m1}		...	a_{mm}		

Abbildung 18: Allgemeines Transporttableau für das formulierte Problem

3.3 Rahmenbedingungen

Bevor die Entwicklung einer Methode möglich ist, muss klar gestellt werden, welches konkrete Ziel hinter der Entwicklung steht, also wieso ihre Entwicklung sinnvoll ist und in welcher Situation diese angewendet werden kann. Wie in der Einleitung geschildert, ist das Ziel dieser Arbeit, eine Methode für die Lösung eines Transportproblems zu entwickeln, welche mit realistischeren Auswahlkriterien arbeitet. Dieses Auswahlkriterium stellt sich in Form der Transportkosten dar, für welche anstatt einer variablen Bestimmung der Ansatz von Sprungfixen Kosten gewählt werden soll.

Die Erreichung dieses Ziels erfordert zunächst eine Bestimmung der Rahmenbedingungen, unter welchen die Methode Anwendung finden soll. Die Eingrenzung ist wichtig, da auch nur geringfügige Änderungen an den Rahmenbedingungen die Funktionalität einer Methode aushebeln und somit zu suboptimalen Ergebnissen führen können. Diese lassen sich unterteilen in **fixierte Rahmenbedingungen**, auf welchen der Grundablauf der Methode beruht, sowie in **situative Bedingungen**. Diese können die Ergebnisse und deren Güte beeinflussen, jedoch kann die Methode durch Anpassungen in der Vorgehensweise an diese Bedingungen angepasst werden. Da sich in der Realität Umweltbedingungen nur in wenigen Fällen tatsächlich ähneln und dann auch nur selten stabil sind, werden im Rahmen dieser Arbeit verschiedene Voraussetzungen betrachtet und deren Auswirkungen auf die Funktionalität der Methode reflektiert. Daraus werden Schlüsse für die Anpassung der Methode gezogen, um unter verschiedenen Bedingungen ein möglichst optimales Ergebnis zu erzielen.

Im folgenden Teil werden zunächst die fixierten Rahmenbedingungen festgelegt, woraufhin auf die unterschiedlichen situativen Bedingungen und die daraus folgenden Varianten eingegangen wird.

3.3.1 Fixierte Rahmenbedingungen

Beim behandelten Problem handelt es sich um ein Transportproblem, welches Elemente eines Tourenplanungsproblems aufweist. Anders ausgedrückt kann es auch bezeichnet werden als ein Tourenplanungsproblem, welches Elemente eines Transportproblems aufweist.

In jedem Fall handelt es sich um ein knotenorientiertes Problem mit m Quellen und n Senken. Jede Quelle Q_i verfügt über ein begrenztes Angebot a_i , jede Senke S_j über einen begrenzten Bedarf b_j . Die zu minimierende Zielgröße sind die **summierten Transportkosten** Z , wobei analog auch eine andere quantifizierbare Zielgröße wie Zeit oder Strecke verwendet werden kann. Das Problem unterliegt in jedem Fall einer Kapazitätsrestriktion, welche besagt, dass die **maximale Transportkapazität** t nicht überschritten werden kann. Im Gegensatz zu einem klassischen Tourenplanungsproblem können die Bedarfe b_{jz} und Angebote a_{iy} die maximale Transportkapazität t überschreiten und somit mehrere Fahrten erforderlich machen.

3.3.2 Situative Bedingungen – Varianten

Art der Tour

Die **Art der Tour** und deren Limitierungen sind ein entscheidender Faktor für die Entwicklung der Methode, da sie sowohl den Umfang als auch die Herangehensweise beeinflussen. Hier werden zwei verschiedene Ansätze für Touren vorgestellt und deren Auswirkungen betrachtet.

Bei **geschlossenen Touren** startet und endet die Tour bei der gleichen Quelle Q_i . Touren mit nur einem weiten Knoten werden als Pendeltouren bezeichnet. Die Kosten für diese betragen genau zweimal die Kosten für die Fahrt zwischen diesen beiden Punkten, da davon ausgegangen wird, dass der Hin- und Rückweg zwischen zwei Punkten gleichartig ist. In der Realität muss dies zwar nicht der Fall sein, da Verkehrsaufkommen variieren und nur in eine Richtung befahrbare Strecken vorliegen können. Im Rahmen dieser Arbeit soll jedoch von der vereinfachten Annahme ausgegangen werden, dass Strecken in entgegengesetzten Richtungen gleichartig sind und die Fahrten somit gleiche Kosten verursachen.

Wenn dies der Fall ist, so ist eine Tour, welche drei Knotenpunkte verbindet, mindestens genauso kosteneffizient wie die Pendeltouren von einem dieser Punkte zu den beiden anderen.

Diese Eigenschaft wird auch in der Savings-Methode genutzt, indem die Einsparungen durch die Verbindung von zwei Pendeltouren ermittelt werden. Im klassischen Tourenplanungsproblem existiert nur eine Quelle (Depot), welche an jeder Pendeltour beteiligt ist. Existiert jedoch mehr als eine Quelle, so sind Pendeltouren von verschiedenen Ausgangspunkten möglich. Die Verbindung zweier Pendeltouren mit unterschiedlichen Startpunkten zu einer größeren Tour ist dann nicht mehr zwangsläufig vorteilhaft, wie in Abb. 19 verdeutlicht wird.

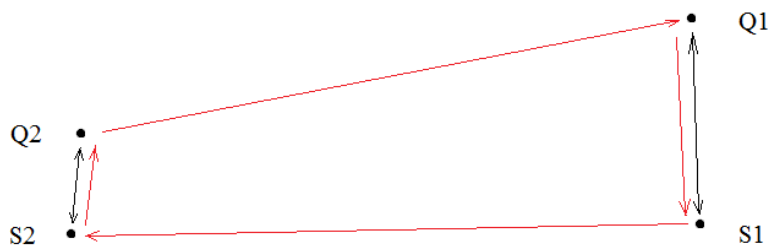


Abbildung 19: Vergleich zweier Pendeltouren (grau) mit einer großen Tour (rot)

Grundsätzlich ist die Schaffung einer größtmöglichen Tour somit nicht immer sinnvoll.

Aus der Gleichheit der Einzelstrecken ergibt sich zusätzlich die Tatsache, dass Touren, welche in genau umgekehrter Reihenfolge die gleichen Knotenpunkte anfahren, exakt die gleichen Kosten haben. Auch ein anderer Startpunkt ändert daran nichts, sofern dieselbe Reihenfolge von Knotenpunkten eingehalten wird. Alle Touren mit den gleichen drei Knotenpunkten verfügen somit zwangsläufig über dieselben Kosten, unabhängig davon, an welchem der drei Knotenpunkte die Tour startet und welcher Punkt als nächstes angefahren wird. Abbildung 20 soll dies für eine Tour mit drei Knotenpunkten verdeutlichen.

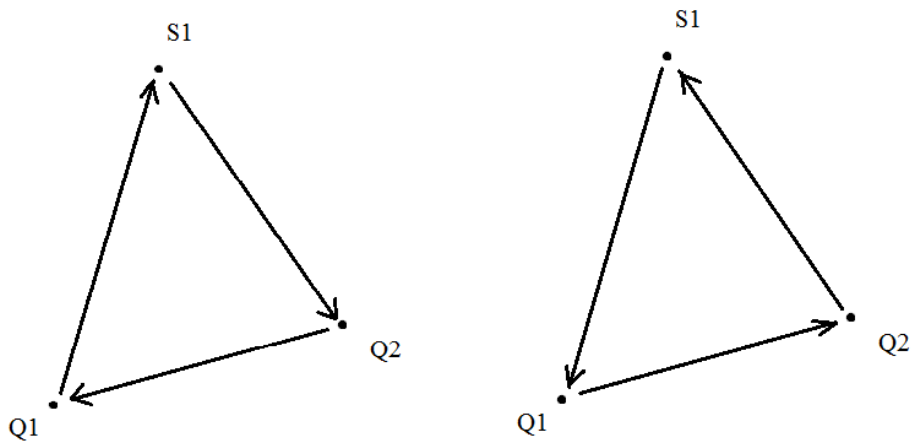


Abbildung 20: Darstellung gleicher Strecken zwischen Knotenpunkten mit unterschiedlicher Fahrtrichtung

Da die Methode in Anlehnung an die Vogelsche Approximationsmethode mit dem geringsten Bedauern für jede Quelle und Senke arbeiten soll, ist dieser Faktor sehr hinderlich. Wenn eine nicht-Pendeltour die geringsten Kosten aufweist, so ist die günstigste Alternative zu dieser in jedem Fall eine Tour, welche die Knotenpunkte in der gleichen oder genau umgekehrten Reihenfolge abfährt. Da die Kosten dieser Alternative ebenfalls dem Optimum entsprechen, ist das Bedauern 0.

Um diese Situation zu umgehen und gleichzeitig das Verfahren zu vereinfachen, muss die Menge der verfügbaren Touren eingeschränkt werden. Darauf wird im Teil 3.3.3 näher eingegangen.

Geschlossene Touren haben in der Realität die größte Relevanz, wenn die gleichen Touren regelmäßig durchgeführt werden und die dafür genutzten Transportmittel keiner anderen Bestimmung zugeführt werden. Somit können auch die Rückfahrten direkt den Kosten für den Transport der Waren zugeordnet werden. In internen, abgekapselten Supply-Chains ist eine solche Transportsituation am ehesten denkbar.

Als **unabgeschlossene Touren** werden im Folgenden Touren bezeichnet, welche nicht an einer Quelle Q_i enden, sondern an einer Senke S_z . Sie fallen damit nicht unter die in Teil 2.2 genannte Definition einer Tour und werden daher im Rahmen dieser Arbeit als unabgeschlossene Touren definiert.

Während eine geschlossene Tour mit drei Knotenpunkten in jedem Fall mindestens genauso gut ist wie die beiden Pendeltouren von einem der Punkte zu den anderen, gilt dies nicht

unbedingt bei unabgeschlossenen Touren. Die Erweiterung einer unabgeschlossenen Tour um einen Knotenpunkt ist somit nur dann sinnvoll, wenn die Strecke vom bisherigen Endpunkt der Tour bis zum zusätzlichen Knotenpunkt kostengünstiger ist als die Strecke von diesem Knotenpunkt zum Startpunkt.

Unabgeschlossene Touren wären für den Transport von Waren durch einen externen Dienstleister denkbar, welcher die Fahrzeuge am Zielpunkt anderen Bestimmungen zukommen lässt. Auch bei internen Supply-Chains, in denen das Transportmittel nach Abschluss der Fahrt anderweitig genutzt wird, macht eine Zuordnung der Rückfahrkosten zu den Transportkosten nicht unbedingt Sinn.

3.3.3 Umfang: Zulässigkeit von Touren:

Die Zulässigkeit von Touren für die Verwendung innerhalb der Methode ist ein entscheidender Punkt, da die Anzahl zulässiger, also somit für die Errechnung eines Ergebnisses einbezogenen, Touren maßgeblich für den Umfang des Rechenaufwands verantwortlich ist. Für ein Transportproblem mit m Quellen und n Senken ergeben sich für geschlossene und unabgeschlossene Touren $n * (n + m)^{n+m-2} * m$ Möglichkeiten, wenn der Startpunkt eine Quelle und der Zielpunkt eine Senke ist. Für ein Ausgangsproblem mit 3 Quellen und 3 Senken ergeben sich demnach $3 * 6^4 * 3 = 11664$ mögliche Touren. Der Aufwand wäre also schon bei kleinen Problemen enorm. Erschwerend kommt hinzu, dass alle Touren als Feld in einer Matrix abgebildet werden müssen. Es ist somit notwendig, eine Eingrenzung hinsichtlich der Zulässigkeit von Touren vorzunehmen.

Als erste Eingrenzung wird die maximale Anzahl von möglichen Knoten auf einer Tour von $n+m$ auf 4 reduziert. Somit haben Touren immer genau einen Startpunkt, einen Zielpunkt und zwei Zwischenstopps. Der Startpunkt ist dabei in jedem Fall eine Quelle und der Zielpunkt in jedem Fall eine Senke. Im Fall von geschlossenen Touren wird als Zielpunkt der letzte neue Knotenpunkt bezeichnet, von dem aus das Transportmittel zum Startpunkt zurückkehrt. Die daraus resultierende Anzahl Touren entspricht dann: $m * (n + m)^2 * n$. Für ein Problem mit 3 Quellen und 3 Senken ergeben sich somit noch $3 * 6^2 * 3 = 324$ mögliche Touren.

Aufgrund dieses noch immer enormen Aufwands wird als zweite Eingrenzung dem ersten Zwischenstopp eine Quelle und dem zweiten Zwischenstopp eine Senke zugewiesen. Dadurch

wird die Anzahl der möglichen Touren in diesem Schritt um drei Viertel reduziert. Die somit mögliche Anzahl Touren berechnet sich dann: $m * m * n * n$.

Bei geschlossenen Touren ist zusätzlich eine dritte Eingrenzung möglich und sogar erforderlich um die Funktionalität der Methode zu erhalten. Die dritte Eingrenzung sieht vor, für jede Zusammensetzung aus Knotenpunkten nur eine Tour zuzulassen. Somit sind die unter Punkt 3.3.2 genannten Touren mit gleichen Kosten jeweils nur einmal vertreten.

Die Anzahl von Touren reduziert sich somit auf:

$$\left(\frac{1}{2} n * (n + 1)\right) * \left(\frac{1}{2} m * (m + 1)\right)$$

Dabei bleibt für jede Konstellation von Knotenpunkten nur je eine Tour, welche diese verbindet. Somit entfällt für Konstellationen mit vier verschiedenen Knotenpunkten eine alternative Tour mit abweichenden Kosten. Im Gegenzug wird der Bearbeitungsaufwand durch die verminderten Möglichkeiten reduziert.

Neben der Art der Touren ergibt sich für diese Methode die Möglichkeit, **Fixkosten für die Fahrt eines Transportmittels** k_{fix} vorzugeben. Diese lassen sich optional für unabgeschlossene und geschlossene Touren vorsehen. Sie werden dabei nicht den Kosten jeder Einzelstrecke, sondern den Kosten jeder Tour hinzugefügt. Die Nutzung von wenigen, ausgelasteten Transportmitteln wird somit attraktiver.

Die Einberechnung von Fixkosten für die Fahrt eines Transportmittels macht in der Realität Sinn, wenn zusätzliche Kosten durch die Nutzung eines weiteren Transportmittels entstehen. So wäre es zum Beispiel denkbar, dass bei der Planung von Touren die Anschaffungskosten für die Transportmittel mit einberechnet werden sollen.

Wenn in der Realität der Fall vorliegt, dass so wenige Fahrzeuge wie möglich genutzt werden sollen, sei es durch die Existenz von Fixkosten, so kann eine weitere Restriktion eingesetzt werden. Diese wird als **Auslastungsrestriktion** bezeichnet und sieht eine Einschränkung der zugelassenen Transportmengen vor. Solange die Restriktion gilt, werden nur Transportmengen x_{ijyz} und maximale Transportmengen $x_{ijyz \max s}$ zugelassen, welche einem Vielfachen der maximalen Transportkapazität t entsprechen:

$$x_{ijyz \max s} = g * t \quad \text{mit } g \in \mathbb{N}$$

$$x_{ijyz} = g * t \quad \text{mit } g \in \mathbb{N}$$

Um der Restriktion gerecht zu werden, müssen also die maximalen Transportmengen $x_{ijz} \max_s$ so bereinigt werden, dass sie einem Vielfachen der Transportkapazität entsprechen und gleichzeitig weder Angebot noch Bedarf auf der jeweiligen Tour überschreiten. Die Werte werden also auf das nächst kleinere Vielfache der maximalen Transportkapazität abgerundet. Die Restriktion gilt nur solange, wie noch Touren vorhanden sind, auf welchen mindestens die maximale Transportkapazität transportiert werden kann. Die Restriktion wird also aufgehoben sobald die folgende Bedingung nicht mehr erfüllt ist:

$$a_{11s} \geq t \text{ ODER } a_{12s} \geq t \text{ ODER } \dots \text{ ODER } a_{mms} \geq t$$

$$\text{UND } b_{11s} \geq t \text{ ODER } b_{12s} \geq t \text{ ODER } \dots \text{ ODER } b_{nns} \geq t$$

Die Auslastungsrestriktion sorgt dafür, dass primär die Anzahl genutzter Touren minimiert wird. Die Nutzung der Auslastungsrestriktion macht daher nicht immer Sinn, wie im späteren Beispiel 1 (Teil 3.5.1) ersichtlich wird. Dennoch verbessert die Anwendung der Auslastungsrestriktion oft auch das Ergebnis. Dies gilt besonders bei hohen Fixkosten für die Fahrt eines Transportmittels, wie im späteren Beispiel 2 (Teil 3.5.2) erkenntlich wird.

Die Auslastungsrestriktion verhindert zudem, dass durch die Wahl einer unausgelasteten Tour eine zusätzliche Tour erforderlich wird. Dieser Fall kann ohne die Restriktion zum Beispiel eintreten, wenn die Summe aller Angebote bzw. Bedarfe genau einem Vielfachen der maximalen Transportkapazität entspricht. Dann führt eine nicht ausgelastete Tour zwangsläufig dazu, dass eine zusätzliche Tour benötigt wird. Wird die Auslastungsrestriktion genutzt, so können, nur wenn dies unvermeidlich ist, nicht ausgelastete Touren genutzt werden.

3.4 Ablauf der Methode

Mit den gegebenen Rahmenbedingungen kann im Folgenden der Ablauf der Methode dargestellt werden. Auf die Varianten, welche im vorhergehenden Teil 3.3 erläutert wurden, wird an gegebener Stelle verwiesen. Für die Erläuterungen wird davon ausgegangen, dass es sich um ein geschlossenes Transportproblem handelt, also dass die Summen der Angebote und Bedarfe übereinstimmen. Des Weiteren wird von einer symmetrischen Kostenmatrix ausgegangen, bei der also gleiche Fahrten in unterschiedliche Richtungen die gleichen Kosten verursachen.

Der Ablauf wird in drei Hauptschritte unterteilt:

- I. Schaffung der Voraussetzungen
- II. Bearbeitung der Methode in endlich vielen Iterationsschritten
- III. Errechnung der summierten Transportkosten

3.4.1 Schaffung der Voraussetzungen

Wie in Teil 3.2 erklärt, müssen die Kosten für die Fahrten eines Transportmittels von jedem Knoten, also jeder Quelle und Senke, zu jedem anderen Knoten vorliegen. Eine Darstellung für m Quellen und n Senken ist in Abb. 21 abgebildet. Diese Matrix lässt sich unterteilen in vier Einzelmatrixen, welche farblich markiert sind.

Die erste Matrix (blau hinterlegt) beschreibt die Kosten k_{yj} für die Fahrt eines Transportmittels von einer Quelle y zu einer Senke j . Die Zweite (rot hinterlegt) die Kosten k_{jz} der Fahrt von Senke j zu Senke z . Die Dritte (gelb hinterlegt) beschreibt die Kosten k_{ij} einer Fahrt von Quelle i zu Quelle j und die vierte Matrix (grün hinterlegt) die Kosten k_{zi} einer Fahrt von Senke z zu Quelle i .

		Von					
		Q_1	...	Q_m	S_1	...	S_n
Nach	S_1	k_{11}	...	k_{m1}	k_{11}	...	k_{n1}

	S_n	k_{1n}	...	k_{mn}	k_{1n}	...	k_{nn}
	Q_1	k_{11}	...	k_{m1}	k_{11}	...	k_{n1}

	Q_m	k_{1m}	...	k_{mm}	k_{1m}	...	k_{nm}

Abbildung 21: Allgemeine Matrixdarstellung der Kosten für alle möglichen Fahrten zwischen zwei Knotenpunkten

Aus diesen Kosten für die Einzelfahrten zwischen zwei Knoten können nun die Kosten für die zulässigen Touren berechnet werden. An dieser Stelle muss die Eingrenzung hinsichtlich der

Tourenzulässigkeit vorgenommen werden. Da die zulässigen Touren immer genau vier Knotenpunkte besitzen, können die Touren wie folgt bezeichnet werden:

Eine Tour mit der Quelle Q_i als Startpunkt, der Quelle Q_y als erster Zwischenstopp, der Senke S_j als zweiten Zwischenstopp und der Senke S_z als Zielpunkt, wird als X_{iyjz} bezeichnet. Auf dieser Tour X_{iyjz} wird die Warenmenge x_{iyjz} transportiert und die Kosten für die Fahrt eines Fahrzeuges auf dieser Tour werden als k_{iyjz} bezeichnet. Der Startpunkt kann dabei dem ersten Zwischenstopp und der Zielpunkt dem zweiten Zwischenstopp entsprechen. Daraus ergeben sich Touren mit zwei, drei oder vier individuellen Knotenpunkten.

Wenn $i=y$ und $j=z$ gilt, ergeben sich zwei individuelle Knotenpunkte, also eine Pendeltour. Wenn $i=y$ und $j \neq z$ oder $i \neq y$ und $j=z$ gelten, handelt es sich um Touren mit drei individuellen Knotenpunkten. Bei $i \neq y$ und $j \neq z$ ergeben sich Touren mit vier Knotenpunkten.

Für die Durchführung der Methode werden zuerst die Kosten k_{iyjz} für die Fahrt eines Fahrzeuges auf einer Tour benötigt. Die Art der Bestimmung, sowie der Umfang der benötigten Kosten hängen von der Art der Tour ab.

Unabgeschlossene Touren enden am Zielpunkt, wodurch sich ihre Kosten ohne Einberechnung von Fixkosten wie folgt bestimmen:

$$k_{iyjz} = k_{iy} + k_{yj} + k_{jz}$$

Dabei bezeichnet k_{iy} immer die Kosten vom Startpunkt (Quelle i) zum ersten Zwischenstopp (Quelle y), k_{yj} die Kosten vom ersten (Quelle y) zum zweiten (Senke j) Zwischenstopp und k_{jz} die Kosten der Strecke vom zweiten Zwischenpunkt (Senke j) zum Zielpunkt (Senke z).

Im Fall von **geschlossenen Touren** kommen die Kosten k_{zi} für die Strecke vom Zielpunkt (Senke z) zurück zum Startpunkt (Quelle i) hinzu. Die Kosten bestimmen sich dann wie folgt:

$$k_{iyjz} = k_{iy} + k_{yj} + k_{jz} + k_{zi}$$

Jede der Einzelmatrizen aus Abb. 21 liefert somit einen Teil der Kosten einer Tour. Wenn $i=y$ und $j=z$ gilt, so beschreiben die Kosten k_{iy} und k_{jz} die Kosten für den Transport über eine nicht existente Distanz und haben somit den Wert 0. Die Tour ist dann eine Pendeltour mit nur zwei individuellen Knotenpunkten.

Wenn fixe Kosten k_{fix} mit einberechnet werden sollen, so ändern sich die Gleichungen wie folgt:

Für unabgeschlossene Touren:

$$k_{iyjz} = k_{iy} + k_{yj} + k_{jz} + k_{fix}$$

Für geschlossene Touren:

$$k_{iyjz} = k_{iy} + k_{yj} + k_{jz} + k_{zi} + k_{fix}$$

Neben den Kosten werden auch die anfänglichen Angebote a_{iy0} und Bedarfe b_{jz0} benötigt, welche für jede Tour verfügbar bzw. erforderlich sind. Diese bestimmen sich wie folgt aus den anfänglichen Angeboten a_{i0} und Bedarfen b_{j0} :

$$\text{Für } i=y: \quad a_{iy0} = a_{i0}$$

$$\text{Für } i \neq y: \quad a_{iy0} = a_{i0} + a_{y0}$$

$$\text{Für } j=z: \quad b_{jz0} = b_{j0}$$

$$\text{Für } j \neq z: \quad b_{jz0} = b_{j0} + b_{z0}$$

Bei **unabgeschlossenen Touren** müssen die Kosten k_{iyjz} , Angebote a_{iy0} und Bedarfe b_{jz0} für alle i, y, j und z ermittelt werden. Dadurch ergibt sich eine Matrix mit m^2 Spalten und n^2 Zeilen. (Abb. 22)

Wenn es sich um **geschlossene Touren** handelt, müssen nicht sämtliche Werte bestimmt werden. Da nur Touren mit einzigartigen Knotenkombinationen zugelassen werden sollen, müssen alle folgenden Werte berechnet werden:

$$k_{iyjz} \text{ für alle } i, y, j, z \text{ mit: } \quad i \leq y ; j \leq z$$

$$a_{iy0} \text{ für alle } i, y \text{ mit: } \quad i \leq y$$

$$b_{jz0} \text{ für alle } j, z \text{ mit: } \quad j \leq z$$

Für geschlossene Touren ergibt sich somit eine Matrix mit $\left(\frac{1}{2} m * (m + 1)\right)$ Spalten und $\left(\frac{1}{2} n * (n + 1)\right)$ Zeilen. (Abb. 23)

Die Matrix, in welche die Kosten k_{ijz} für jede Tour, die Angebote a_{iy0} und die Bedarfe b_{jz0} eingetragen werden, bildet zusammen mit der **maximalen Transportkapazität eines Transportmittels t** die Grundlage für die weiteren Schritte.

		Startpunkt	Q_1	...	Q_1	...	Q_m	...	Q_m	
		1. Zwischenstopp	Q_1	...	Q_m	...	Q_1	...	Q_m	
2. Zwischenstopp	Zielpunkt		Q_1Q_1	...	Q_1Q_m	...	Q_mQ_1	...	Q_mQ_m	Bedarf
S_1	S_1	S_1S_1	k_{1111}	...	k_{1m11}	...	k_{m111}	...	k_{mm11}	b_{110}
...
S_1	S_n	S_1S_n	k_{111n}	...	k_{1m1n}	...	k_{m11n}	...	k_{mm1n}	b_{1n0}
...
S_n	S_1	S_nS_1	k_{11n1}	...	k_{1mn1}	...	k_{m1n1}	...	k_{mmn1}	b_{n10}
...
S_n	S_n	S_nS_n	k_{11nn}	...	k_{1mnn}	...	k_{m1nn}	...	k_{mmnn}	b_{nn0}
		Angebot	a_{110}	...	a_{1m0}	...	a_{m10}	...	a_{mm0}	

Abbildung 22: Ausgangsmatrix bei un abgeschlossenen Touren

		Startpunkt	Q_1	...	Q_1	Q_2	...	Q_{m-1}	Q_m	
		1. Zwischenstopp	Q_1	...	Q_m	Q_2	...	Q_m	Q_m	
2. Zwischenstopp	Zielpunkt		Q_1Q_1	...	Q_1Q_m	Q_2Q_2	...	$Q_{(m-1)Q_m}$	Q_mQ_m	Bedarf
S_1	S_1	S_1S_1	k_{1111}	...	k_{1m11}	k_{2211}	...	$k_{(m-1)m11}$	k_{mm11}	b_{110}
...
S_1	S_n	S_1S_n	k_{111n}	...	k_{1m1n}	k_{221n}	...	$k_{(m-1)m1n}$	k_{mm1n}	b_{1n0}
S_2	S_2	S_2S_2	k_{1122}	...	k_{1m22}	k_{2222}	...	$k_{(m-1)m22}$	k_{mm22}	b_{220}
...
S_{n-1}	S_n	$S_{(n-1)S_1}$	$k_{11(n-1)n}$...	$k_{1m(n-1)n}$	$k_{22(n-1)n}$...	$k_{(m-1)m(n-1)n}$	$k_{mm(n-1)n}$	$b_{(n-1)n0}$
S_n	S_n	S_nS_n	k_{11nn}	...	k_{1mnn}	k_{22nn}	...	$k_{(m-1)mnn}$	k_{mmnn}	b_{nn0}
		Angebot	a_{110}	...	a_{1m0}	a_{220}	...	$a_{(m-1)m0}$	a_{mm0}	

Abbildung 23: Ausgangsmatrix bei geschlossenen Touren

3.4.2 Bearbeitung der Methode in endlich vielen Iterationsschritten

Mit den gegebenen Grundlagen kann die Methode in endlich vielen Iterationsschritten durchgeführt werden. In jedem Iterationsschritt wird mindestens eine Transportmenge x_{ijz} bekannt und kann in ein finales Transporttableau eingetragen werden. Jeder **Iterationsschritt** s wird dabei in mehreren Schritten bearbeitet. Es werden so lange weitere Iterationsschritte durchgeführt, wie es unbekannte Transportmengen x_{ijz} in der finalen Transportmatrix gibt. Im folgenden Teil wird der allgemeine Ablauf eines Iterationsschritts s beschrieben:

1. Zuerst wird für jedes Feld der Matrix, also für jede Tour X_{ijz} die maximal transportierbare Menge $x_{ijz \max s}$ bestimmt. Da auf einer Tour nicht mehr geliefert werden kann als verfügbar ist und nicht mehr als benötigt wird, ergibt sich diese als kleinerer Wert von $a_{iy s-1}$ und $b_{jz s-1}$. Somit ergibt sich für die Bestimmung der maximalen Transportmenge folgende Formel:

$$x_{ijz \max s} = \min(a_{iy s-1}, b_{jz s-1})$$

Wenn die Auslastungsrestriktion genutzt wird, so bestimmt sich die maximale Transportmenge wie folgt:

$$x_{ijz \max s} = \left\lfloor \frac{\min(a_{iy s-1}, b_{jz s-1})}{t} \right\rfloor * t$$

Unter der Bedingung:

$$a_{11s} \geq t \text{ ODER } a_{12s} \geq t \text{ ODER } \dots \text{ ODER } a_{mm s} \geq t$$

$$\text{UND } b_{11s} \geq t \text{ ODER } b_{12s} \geq t \text{ ODER } \dots \text{ ODER } b_{nn s} \geq t$$

Die Bedingungen besagen, dass mindestens ein auf Touren vorhandenes Angebot $a_{iy s}$ und mindestens ein Bedarf $b_{jz s}$ die maximale Transportkapazität t überschreiten oder gleich dieser sind. Sonst könnte keine Tour die Auslastungsrestriktion mit einem anderen Wert als $x_{ijz \max s}=0$ erfüllen.

Wenn eine der Bedingungen der Auslastungsrestriktion nicht mehr erfüllt ist, so bestimmt sich die maximale Transportmenge wieder mit der Formel:

$$x_{ijz \max s} = \min(a_{iy s-1}, b_{jz s-1})$$

Unabhängig davon, ob die Auslastungsrestriktion angewendet wird, können die errechneten maximalen Transportmengen in einer Matrix (Abb. 24) dargestellt werden.

	Q1Q1	...	Q1Qm	...	QmQ1	...	QmQm	Bedarf
S1S1	$x_{1111 \max s}$...	$x_{1m11 \max s}$...	$x_{m111 \max s}$...	$x_{mm11 \max s}$	$b_{11 s-1}$
...
S1Sn	$x_{111n \max s}$...	$x_{1m1n \max s}$...	$x_{m11n \max s}$...	$x_{mm1n \max s}$	$b_{1n s-1}$
...
SnS1	$x_{11n1 \max s}$...	$x_{1mn1 \max s}$...	$x_{m1n1 \max s}$...	$x_{mmn1 \max s}$	$b_{n1 s-1}$
...
SnSn	$x_{11nn \max s}$...	$x_{1mnn \max s}$...	$x_{m1nn \max s}$...	$x_{mmnn \max s}$	$b_{nn s-1}$
Angebot	$a_{11 s-1}$...	$a_{1m s-1}$...	$a_{m1 s-1}$...	$a_{mm s-1}$	

Abbildung 24: Maximale Transportmengen $x_{ijz \max s}$ auf jeder Tour

Die in Abb. 24 dargestellte Matrix bildet ein Problem mit un abgeschlossenen Touren ab. Im Fall von geschlossenen Touren kann die Matrix analog erstellt werden. Da die allgemeine Darstellung einer Matrix mit geschlossenen Touren größer und unübersichtlicher ist, wird in diesem allgemeinen Teil grundsätzlich die Darstellung für un abgeschlossene Touren verwendet. Die Matrizen für geschlossene Touren weichen nur in ihrem Aufbau ab, welcher in der Ausgangsmatrix (Abb. 23) ersichtlich ist.

- Im zweiten Schritt werden aus den in Schritt 1 errechneten maximalen Transportmengen, der maximalen Transportkapazität und den Kosten für jede Tour die Kosten pro transportierter Einheit wie folgt errechnet:

$$v_{ijz s} = \frac{\left(\left\lfloor \frac{x_{ijz \max s}}{t} \right\rfloor * k_{ijz} \right)}{x_{ijz \max s}}$$

Die errechneten Werte für können wiederum innerhalb einer Matrix (Abb. 25) dargestellt werden:

	Q1Q1	...	Q1Qm	...	QmQ1	...	QmQm	Bedarf
S1S1	v_{1111s}	...	v_{1m11s}	...	v_{m111s}	...	v_{mm11s}	b_{11s-1}
...
S1Sn	v_{111ns}	...	v_{1m1ns}	...	v_{m11ns}	...	v_{mm1ns}	b_{1ns-1}
...
SnS1	v_{11n1s}	...	v_{1mn1s}	...	v_{m1n1s}	...	v_{mmn1s}	b_{n1s-1}
...
SnSn	v_{11nns}	...	v_{1mnns}	...	v_{m1nns}	...	v_{mmnns}	b_{nns-1}
Angebot	a_{11s-1}	...	a_{1ms-1}	...	a_{m1s-1}	...	a_{mms-1}	

Abbildung 25: Variable Kosten v_{ijzs} pro Mengeneinheit auf jeder Tour

3. Im dritten Schritt muss, an die Vogelsche Approximationsmethode angelehnt, für jede Quelle die Tour mit den minimalen Kosten $v_{i \min}$, sowie dessen beste Alternative $v_{i \text{alt}}$ vermerkt werden. Für Senken müssen analog die Kosten $v_{(m+j) \min}$ und $v_{(m+j) \text{alt}}$ bestimmt werden. Dabei werden die Werte nicht für jede Zeile und Spalte ermittelt, sondern nur für jede Quelle Q_i und Senke S_j .

Dabei werden für jede Quelle die Kosten v_{ijz} von allen Touren verglichen, an denen diese Quelle beteiligt ist. Dies gilt analog für jede Senke.

Für eine Quelle Q_g gilt somit, dass der niedrigste $v_{g \min}$ und zweitniedrigste Wert $v_{g \text{alt}}$ aus der Menge M bestimmt werden muss. Dabei setzt sich die Menge M aus allen v_{ijz} zusammen, für die Folgendes gilt:

$$i=g \text{ oder } y=g$$

Aus den Minima und günstigsten Alternativen werden die Differenzen $v_{i \text{dif}}$ bzw.

$v_{(m+j) \text{dif}}$ wie folgt bestimmt:

$$v_{i \text{dif}} = v_{i \text{alt}} - v_{i \min}$$

$$v_{(m+j) \text{dif}} = v_{(m+j) \text{alt}} - v_{(m+j) \min}$$

In Abbildung 26 werden diese Schritte in Form einer Matrix aufgezeigt.

	Q_1	...	Q_m	S_1	...	S_n
Minimum	$v_{1 \text{ min}}$...	$v_{m \text{ min}}$	$v_{(m+1) \text{ min}}$...	$v_{(m+n) \text{ min}}$
günstigste Alternative	$v_{1 \text{ alt}}$...	$v_{m \text{ alt}}$	$v_{(m+1) \text{ alt}}$...	$v_{(m+n) \text{ alt}}$
Differenz:	$v_{1 \text{ dif}}$...	$v_{m \text{ dif}}$	$v_{(m+1) \text{ dif}}$...	$v_{(m+n) \text{ dif}}$

Abbildung 26: Kleinster und zweitkleinster Wert, sowie deren Differenz für jede Quelle und Senke

Aus den Differenzen $v_{i \text{ dif}}$ und $v_{(m+j) \text{ dif}}$ wird der maximale Wert markiert und der dazugehörige Minimumwert wird ausgewählt. Zudem wird die Quelle oder Senke, bei der diese Differenz entstanden ist, ebenfalls vermerkt. Die Transportmenge x_{ijz} der Tour X_{ijz} , welcher diese Kosten v_{ijz} zugeordnet sind, im aktuellen Iterationsschritt s wie folgt bestimmt:

$$x_{ijz} = x_{ijz \text{ max } s}$$

4. Der bekannt gewordene Wert x_{ijz} wird nun in ein finales Transporttableau (Abb. 27) eingetragen. Zudem müssen die nach diesem Schritt übrigen Angebote a_{iy} und Bedarfe b_{jz} ermittelt werden. Dazu wird das Angebot bzw. der Bedarf der in Schritt 3 vermerkten Quelle oder Senke, so weit wie dies durch x_{ijz} möglich ist, getilgt. Wenn das zu tilgende Angebot oder der Bedarf kleiner als die transportierte Menge ist, so wird der Rest von der anderen, an der Tour beteiligten, Quelle bzw. Senke getilgt. Allgemein ausgedrückt gibt es vier Möglichkeiten, nach denen sich die neuen Angebote und Bedarfe berechnen:

- a. Bei einer in Schritt 3 vermerkten Quelle g und der gewählten Transportmenge

$$x_{gyz}:$$

$$a_{gs} = a_{g \text{ s-1}} - \min(x_{gyz}, a_{g \text{ s-1}})$$

$$\text{wenn } g \neq y: \quad a_{ys} = a_{y \text{ s-1}} - (x_{gyz} - (a_{g \text{ s-1}} - a_{gs}))$$

$$b_{js} = b_{j \text{ s-1}} - \min(x_{gyz}, b_{j \text{ s-1}})$$

$$\text{wenn } j \neq z: \quad b_{zs} = b_{z \text{ s-1}} - (x_{gyz} - (b_{j \text{ s-1}} - b_{js}))$$

b. Bei einer in Schritt 3 vermerkten Quelle g und der gewählten Transportmenge

x_{igjz} :

$$a_{gs} = a_{gs-1} - \min(x_{igjz}, a_{gs-1})$$

wenn $g \neq i$:
$$a_{is} = a_{is-1} - (x_{igjz} - (a_{gs-1} - a_{gs}))$$

$$b_{js} = b_{js-1} - \min(x_{igjz}, b_{js-1})$$

wenn $j \neq z$:
$$b_{zs} = b_{zs-1} - (x_{igjz} - (b_{js-1} - b_{js}))$$

c. Bei einer in Schritt 3 vermerkten Senke g und der gewählten Transportmenge

x_{iygz} :

$$b_{gs} = b_{gs-1} - \min(x_{iygz}, b_{gs-1})$$

wenn $g \neq z$:
$$b_{zs} = b_{zs-1} - (x_{iygz} - (b_{gs-1} - b_{gs}))$$

$$a_{is} = a_{is-1} - \min(x_{iygz}, a_{is-1})$$

wenn $i \neq y$:
$$a_{ys} = a_{ys-1} - (x_{iygz} - (a_{is-1} - a_{is}))$$

d. Bei einer in Schritt 3 vermerkten Senke g und der gewählten Transportmenge

x_{iyjg} :

$$b_{gs} = b_{gs-1} - \min(x_{iyjg}, b_{gs-1})$$

wenn $g \neq j$:
$$b_{js} = b_{js-1} - (x_{iyjg} - (b_{gs-1} - b_{gs}))$$

$$a_{is} = a_{is-1} - \min(x_{iyjg}, a_{is-1})$$

wenn $i \neq y$:
$$a_{ys} = a_{ys-1} - (x_{iyjg} - (a_{is-1} - a_{is}))$$

e. Bei einer in Schritt 3 vermerkten Quelle g und der gewählten Transportmenge x

$ggjz$: Verwendung von Möglichkeit a. oder b.

f. Bei einer in Schritt 3 vermerkten Senke g und der gewählten Transportmenge x

$iygg$: Verwendung von Möglichkeit c. oder d.

Angebote und Bedarfe, deren Quellen oder Senken nicht auf der gewählten Tour liegen, bleiben gleich, also gilt:

$$a_{i s} = a_{i s-1}$$

$$b_{j s} = b_{j s-1}$$

Neben der in diesem Schritt bekannt gewordenen Transportmenge lassen sich noch weitere Transportmengen anhand der neuen Angebote $a_{i s}$ und Bedarfe $b_{j s}$ bestimmen. Nimmt das Angebot $a_{g s}$ der Quelle g den Wert 0 ME an, so können alle bis zu dem Punkt unbekannt Transportmengen mit $x_{g g j z} = 0$ ME bestimmt werden. Des Weiteren können den an dem Punkt unbekannt Transportmengen aller anderen Touren, an denen die Quelle g beteiligt ist, also $x_{g y j z}$ und $x_{i g j z}$, ebenfalls 0 ME zugeordnet werden. Auf diesen Touren kann zwar durch die andere Quelle noch ausreichend Angebot verfügbar sein, jedoch ist der Umweg über die angebotslose Quelle g dann sinnlos.

Analog gilt, dass die unbekannt Transportmengen aller Touren, an denen eine Senke g mit einem Bedarf von $b_{g s} = 0$ beteiligt ist, mit 0 ME bestimmt werden.

Im letzten Schritt werden die nach diesem Iterationsschritt s auf den Touren verfügbaren Angebote $a_{i y s}$ und Bedarfe $b_{j z s}$ wie folgt bestimmt und in das finale Transporttableau (Abb. 27) eingetragen.

$$\text{Für } i=y: \quad a_{i y s} = a_{i s}$$

$$\text{Für } i \neq y: \quad a_{i y s} = a_{i s} + a_{y s}$$

$$\text{Für } j=z: \quad b_{j z s} = b_{j s}$$

$$\text{Für } j \neq z: \quad b_{j z s} = b_{j s} + b_{z s}$$

		Startpunkt	Q_1	...	Q_1	...	Q_m	...	Q_m	
		1. Zwischenstopp	Q_1	...	Q_m	...	Q_1	...	Q_m	
2. Zwischenstopp	Zielpunkt		Q_1Q_1	...	Q_1Q_m	...	Q_mQ_1	...	Q_mQ_m	Bedarf
S_1	S_1	S_1S_1	x_{1111}	...	x_{1m11}	...	x_{m111}	...	x_{mm11}	b_{11s}
...
S_1	S_n	S_1S_n	x_{111n}	...	x_{1m1n}	...	x_{m11n}	...	x_{mm1n}	b_{1ns}
...
S_n	S_1	S_nS_1	x_{11n1}	...	x_{1mn1}	...	x_{m1n1}	...	x_{mmn1}	b_{n1s}
...
S_n	S_n	S_nS_n	x_{11nn}	...	x_{1mnn}	...	x_{m1nn}	...	x_{mmnn}	b_{nns}
		Angebot	a_{11s}	...	a_{1ms}	...	a_{m1s}	...	a_{mms}	

Abbildung 27: Finales Transporttableau in allgemeiner Form für unabgeschlossene Touren

Sofern noch unbekannte Werte für x_{ijz} vorhanden sind, wird ein weiterer Iterationsschritt $s = s + 1$ durchgeführt.

3.4.3 Errechnung der summierten Transportkosten

Die summierten Transportkosten Z ergeben sich aus den Gesamtkosten K_{ijz} für jede Tour X_{ijz} . Diese Kosten lassen sich entweder mittels der Kosten $v_{ijz s}$ pro Mengeneinheit oder mit den Kosten k pro genutztem Transportmittel bestimmen. Da sich die variablen Kosten mit jedem Schritt verändern können, ist es leichter, die Berechnung mit den Kosten pro Transportmittel wie folgt durchzuführen:

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{y=i}^m \sum_{j=1}^n \sum_{z=1}^n K_{ijz}$$

$$K_{ijz} = \left\lfloor \frac{x_{ijz}}{t} \right\rfloor * k_{ijz} \quad \text{für alle zulässigen } i, y, j, z$$

$$\Rightarrow Z = \sum_{i=1}^m \sum_{y=i}^m \sum_{j=1}^n \sum_{z=1}^n \left\lfloor \frac{x_{ijz}}{t} \right\rfloor * k_{ijz}$$

3.5 Beispiele

Im Folgenden wird die Methode in mehreren Varianten an einigen Beispielen angewendet. Für diese Beispiele ist ein einfacher Aufbau gewählt, welcher dazu beitragen soll, die Funktionsweisen innerhalb der Varianten zu verstehen.

3.5.1 Beispiel 1: unabgeschlossene Touren

Im ersten Beispiel werden unabgeschlossene Touren und die Auslastungsrestriktion verwendet. Fahrzeugfixkosten werden nicht einberechnet. Das Beispiel wird nach den in 3.4 genannten Schritten I-III gelöst.

I. Schaffung der Voraussetzungen

Ausgangspunkt ist die 2x2 Matrix eines klassischen Transportproblems (Abb. 28), welche die Kosten pro Fahrzeug k_{yj} , sowie die Angebote a_{i0} und Bedarfe b_{j0} der Standorte anzeigt.

	Q_1	Q_2	Bedarf
S_1	2	5	15
S_2	4	7	5
Angebot	7	13	20

Abbildung 28: Beispielhaftes Transportproblem mit Kosten k_{yj}

Da die einfache Matrix nur die Kosten für die Direktverbindungen von Quelle zu Senke beinhaltet, reicht diese Matrix nicht als Grundlage aus. Benötigt wird zusätzlich die in Abb. 29 dargestellte Kostenmatrix, welche die Kosten für sämtliche Einzelverbindungen k_{ij} , k_{yj} , k_{jz} und k_{zi} enthält. Neben dieser symmetrischen Kostenmatrix muss auch die maximale Transportkapazität gegeben sein, welche in diesem Beispiel mit $t=10$ ME festgelegt wird.

		Von			
		Q ₁	Q ₂	S ₁	S ₂
Nach	S ₁	2	5	0	4
	S ₂	4	7	4	0
	Q ₁	0	4	2	4
	Q ₂	4	0	5	7

Abbildung 29: Symmetrische Kostenmatrix für das beispielhafte Transportproblem

Die grau hinterlegten Felder sind in diesem Beispiel nicht benötigt, da es sich um unabgeschlossene Touren handelt. Mithilfe der Transportkosten für die einzelnen Strecken, können nun die Transportkosten k_{ijz} , sowie die anfänglichen Angebote a_{iy0} und Bedarfe b_{jz0} für alle Touren bestimmt werden. Die Werte für a_{110} , a_{120} und k_{1211} werden hier mit den in Teil 3.4.1 angegebenen Formeln beispielhaft errechnet:

Für a_{110} : $i=1; y=1 \Rightarrow i=y$; $a_{110} = a_{10} = 7$ ME

Für a_{120} : $i=1; y=1 \Rightarrow i \neq y$; $a_{110} = a_{10} + a_{20} = 7+13 = 20$ ME

Für k_{1211} : $k_{1211} = k_{12}(k_{iy}) + k_{21}(k_{yj}) + k_{11}(k_{jz}) = 4+5+0 = 9$ GE

Als Ergebnis entsteht die in Abb. 30 dargestellte Matrix, anhand welcher die nachfolgenden Iterationsschritte durchgeführt werden können. Die abgebildeten Touren haben immer genau einen Startpunkt, einen Zielpunkt und zwei Zwischenstopps. Der Startpunkt kann dabei dem ersten Zwischenstopp und der Zielpunkt dem zweiten Zwischenstopp entsprechen. Somit ergeben sich Touren mit zwei (rot hinterlegt), drei (gelb hinterlegt) oder vier (grün hinterlegt) beteiligten Standorten. Der in rot umrandete Bereich in Abb. 30 entspricht der ursprünglichen Matrix, also einem Transportproblem, welches keine Touren zulässt. Wie im Teil 3.3.3 beschrieben, werden nur Touren zugelassen, welche zuerst zwei Quellen und dann erst zwei Senken anfahren. In diesem Beispiel wären ansonsten 48 weitere Touren möglich, also die vierfache Anzahl. Der Mehrwert der neu verfügbaren Touren könnte den Mehraufwand daher kaum rechtfertigen.

		Startpunkt	Q ₁	Q ₂	Q ₁	Q ₂		
		1. Zwischenstopp	Q ₁	Q ₂	Q ₂	Q ₁		
2. Zwischenstopp	Zielpunkt		Q1Q1	Q2Q2	Q1Q2	Q2Q1	Bedarf	
S ₁	S ₁	S1S1	2	5	9	6	15	
S ₂	S ₂	S2S2	4	7	11	8	5	
S ₁	S ₂	S1S2	6	9	13	10	20	
S ₂	S ₁	S2S1	8	11	15	12	20	
		Angebot	7	13	20	20	20	

Abbildung 30: Ausgangsmatrix für Beispiel 1

II. Bearbeitung der Methode in endlich vielen Iterationsschritten

1. Durchführung von Iterationsschritt s=1:

1.1 Bestimmung der maximal transportierbaren Menge $x_{ijyz \max 1}$ für jede Tour unter Berücksichtigung der Auslastungsrestriktion:

Die Berechnung wird erneut beispielhaft für $x_{1111 \max 1}$ und $x_{1211 \max 1}$ durchgeführt:

$$x_{1111 \max 1} = \left\lfloor \frac{\min(a_{110}, b_{110})}{t} \right\rfloor * t = \left\lfloor \frac{\min(7, 15)}{10} \right\rfloor * 10 = \left\lfloor \frac{7}{10} \right\rfloor * 10 = 0 * 10 = 0$$

$$x_{1211 \max 1} = \left\lfloor \frac{\min(a_{120}, b_{110})}{t} \right\rfloor * t = \left\lfloor \frac{\min(20, 15)}{10} \right\rfloor * 10 = \left\lfloor \frac{15}{10} \right\rfloor * 10 = 1 * 10 = 10$$

	Q1Q1	Q2Q2	Q1Q2	Q2Q1	Bedarf
S1S1	0	10	10	10	15
S2S2	0	0	0	0	5
S1S2	0	10	20	20	20
S2S1	0	10	20	20	20
Angebot	7	13	20	20	20

Abbildung 31: Maximale Transportmengen $x_{ijz \max 1}$ im ersten Iterationsschritt

1.2 Berechnung der Kosten pro transportierter Einheit $v_{ijz 1}$ für alle zulässigen Touren:

Der beispielhafte Wert für $v_{1211 1}$ berechnet sich wie folgt:

$$v_{1211 1} = \frac{\left(\left\lceil \frac{x_{1211 \max 1}}{t} \right\rceil * k_{1211}\right)}{x_{1211 \max 1}} = \frac{\left(\left\lceil \frac{1}{1} \right\rceil * 9\right)}{10} = 0,9$$

	Q1Q1	Q2Q2	Q1Q2	Q2Q1	Bedarf
S1S1	/	0,5	0,9	0,6	15
S2S2	/	/	/	/	5
S1S2	/	0,9	1,3	1	20
S2S1	/	1,1	1,5	1,2	20
Angebot	7	13	20	20	20

Abbildung 32: Kosten $v_{ijz 1}$ pro Mengeneinheit im ersten Iterationsschritt

1.3 Bestimmung der minimalen Transportkosten je transportierter Einheit für jede Quelle und jede Senke, sowie der Differenz zur jeweils günstigsten Alternative:

	Q ₁	Q ₂	S ₁	S ₂
Minimum	0,6	0,5	0,5	0,9
günstigste Alternative	0,9	0,6	0,6	1
Differenz	0,3	0,1	0,1	0,1

Abbildung 33: Abgleich der Kostendifferenzen im ersten Iterationsschritt

Da die Differenz zur günstigsten Alternative am höchsten ist, wird das Feld mit $v_{2111} = 0,6$ gewählt. Der Wert x_{2111} wird somit als 10 bekannt und kann in das finale Transporttableau eingetragen werden. Zusätzlich wird Quelle 1 vermerkt.

1.4 Eintragung der bekannt gewordenen Werte in das Transporttableau und Bestimmung der verbleibenden Angebote und Bedarfe:

			i=1; y=1	i=2; y=2	i=1; y=2	i=2; y=1	
			Q1Q1	Q2Q2	Q1Q2	Q2Q1	Bedarf
j=1; z=1	S1S1	0		0	10	5	
j=2; z=2	S2S2	0		0	0	5	
j=1; z=2	S1S2	0		0	0	10	
j=2; z=1	S2S1	0		0	0	10	
	Angebot	0	10	10	10	10	

Abbildung 34: Transporttableau nach dem ersten Iterationsschritt

Der Wert für $x_{2111} = 10$ wird eingetragen. Da die größte Differenz in Schritt 1.3 bei Q1 entstanden ist, wird das Angebot von Q1 so weit wie möglich getilgt. Das Angebot a_{11} beträgt somit 0 ME im Vergleich zu a_{10} mit 7 ME. Die verbleibenden 3 ME, welche dem Feld x_{2111} zugeordnet worden sind, werden nun vom Angebot der anderen, an der Tour beteiligten Quelle Q2 entnommen. Somit sinkt das Angebot von $a_{20} = 13$ ME auf $a_{21} = 10$ ME. Da die Tour x_{2111} nur die Senke S1 beliefern kann, reduziert sich dessen Bedarf von $b_{10} = 15$ ME auf $b_{11} = 5$ ME. Der verbleibende Bedarf b_{11} bleibt unverändert. Somit

können die Angebote a_{iy1} und Bedarfe b_{jz1} der Touren nach den in Teil 3.4 genannten Formeln berechnet werden. Diese sind in der Angebotszeile und der Bedarfsspalte von Abb. 34 aufgeführt.

Da das Angebot a_{11} von Q1 auf 0 ME gesunken ist, werden allen Touren X_{ijz} , an denen Q1 beteiligt ist und deren Transportmenge x_{ijz} noch unbekannt ist, mit 0 ME belegt. Das betrifft alle x_{1ijz} und x_{i1jz} außer x_{2111} , da dieses Feld bereits belegt ist.

2. Mit den neuen Angeboten a_{iy1} und Bedarfen b_{jz1} wird der nächste Iterationsschritt $s=2$ durchgeführt.

2.1 Bestimmung von $x_{ijz \max 2}$:

Da sowohl noch Angebote a_{iy1} und Bedarfe b_{jz1} vorhanden sind, welche die maximale Transportmenge t übersteigen oder gleich dieser sind, gilt weiterhin die Auslastungsrestriktion.

	Q1Q1	Q2Q2	Q1Q2	Q2Q1	Bedarf
S1S1	0	0	0	0	5
S2S2	0	0	0	0	5
S1S2	0	10	10	10	10
S2S1	0	10	10	10	10
Angebot	0	10	10	10	10

Abbildung 35: Maximale Transportmengen $x_{ijz \max 2}$ im zweiten Iterationsschritt

Die grau hinterlegten Touren in Abb. 35 erfüllen zwar die Auslastungsrestriktion, ihre Transportmenge x_{ijz} wurde allerdings bereits in Schritt 1.4 bestimmt. Daher werden sie im Folgenden nicht beachtet.

2.2 Berechnung von v_{iyjz} :

	Q1Q1	Q2Q2	Q1Q2	Q2Q1	Bedarf
S1S1	/	/	/	/	5
S2S2	/	/	/	/	5
S1S2	/	0,9	1,3	1	10
S2S1	/	1,1	1,5	1,2	10
Angebot	0	10	10	10	10

Abbildung 36: Kosten v_{iyjz} pro Mengeneinheit im zweiten Iterationsschritt

2.3 Da, wie in Abbildung 36 erkenntlich, nur zwei Touren zur Wahl stehen, kann direkt das Feld v_{2212} ausgewählt werden, da es die geringen Kosten aufweist. Somit wird $x_{2212} = 10$ bekannt.

2.4 Als finales Transporttableau ergibt sich:

			i=1; y=1	i=2; y=2	i=1; y=2	i=2; y=1	
			Q1Q1	Q2Q2	Q1Q2	Q2Q1	Bedarf
j=1; z=1	S1S1	0	0	0	0	10	0
j=2; z=2	S2S2	0	0	0	0	0	0
j=1; z=2	S1S2	0	10	0	0	0	0
j=2; z=1	S2S1	0	0	0	0	0	0
Angebot		0	0	0	0	0	0

Abbildung 37: Finales Transporttableau nach dem zweiten Iterationsschritt

Die Angebote und Bedarfe werden komplett durch die Tour X_{2212} aufgebraucht. Somit werden die übrigen Transportmengen mit 0 ME bestimmt.

III. Errechnung der summierten Gesamtkosten

Die gesamten Transportkosten Z können mithilfe des finalen Transporttableaus wie folgt errechnet werden:

$$Z = \sum_{i=1}^2 \sum_{y=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{z=1}^2 k_{iyjz} * \left\lceil \frac{x_{iyjz}}{t} \right\rceil = 6 * \left\lceil \frac{10}{10} \right\rceil + 9 * \left\lceil \frac{10}{10} \right\rceil = 15 \text{ GE}$$

Aufgrund der Auslastungsrestriktion wird primär die Fahrzeuganzahl minimiert, wodurch nur zwei Fahrzeuge für den Transport genutzt werden. Da allerdings unabgeschlossene Touren gefahren werden, hat eine Tour nicht zwangsläufig einen Vorteil gegenüber den entsprechenden Einzelfahrten. In diesem Beispiel sind die Kosten für den direkten Transport von einer Quelle zu einer Senke sehr gering gewählt. Daher ist die mit dieser Methode errechnete Lösung nicht ideal. Eine Lösung mit mehr genutzten Fahrzeugen kann hier bessere Ergebnisse liefern. So kommt der folgende beispielhafte Transportplan (Abb. 38) mit 14 GE auf ein besseres Ergebnis:

$$Z = \sum_{i=1}^2 \sum_{y=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{z=1}^2 k_{iyjz} * \left\lceil \frac{x_{iyjz}}{t} \right\rceil = 2 * \left\lceil \frac{7}{10} \right\rceil + 5 * \left\lceil \frac{8}{10} \right\rceil + 7 * \left\lceil \frac{5}{10} \right\rceil = 14 \text{ GE}$$

		i=1; y=1	i=2; y=2	i=1; y=2	i=2; y=1	
		Q1Q1	Q2Q2	Q1Q2	Q2Q1	Bedarf
j=1; z=1	S1S1	7	8	0	0	0
j=2; z=2	S2S2	0	5	0	0	0
j=1; z=2	S1S2	0	0	0	0	0
j=2; z=1	S2S1	0	0	0	0	0
Angebot		0	0	0	0	0

Abbildung 38: Beispielhafter Transportplan mit den Transportmengen x_{iyjz}

3.5.2 Beispiel 2: unabgeschlossene Touren und Fixkosten

Dieses Beispiel hat exakt die gleiche Ausgangssituation wie das vorangehende Beispiel 1. So werden ebenfalls unabgeschlossene Touren mit Auslastungsrestriktion verwendet. In diesem Beispiel kommen jedoch für jede gefahrene Tour Fixkosten von $k_{\text{fix}} = 5$ hinzu. Bei einer gleichen Kostenmatrix (Abb. 39) ergibt sich somit eine neue Ausgangsmatrix (Abb. 40), welche die Kosten k_{ijz} für jede Tour darstellt.

Die Angebote und Bedarfe sind exakt wie in Beispiel 1 zu errechnen. Beispielhaft wird auch hier die Rechnung für die Kosten k_{1211} aufgezeigt:

$$k_{1211} = k_{12}(k_{iy}) + k_{21}(k_{yj}) + k_{11}(k_{jz}) + k_{\text{fix}} = 4 + 5 + 0 + 5 = 14 \text{ GE}$$

		Von			
		Q ₁	Q ₂	S ₁	S ₂
Nach	S ₁	2	5	0	4
	S ₂	4	7	4	0
	Q ₁	0	4	2	4
	Q ₂	4	0	5	7

Abbildung 39: Symmetrische Kostenmatrix (identisch mit Abb. 29)

		Startpunkt	Q ₁	Q ₂	Q ₁	Q ₂		
		1. Zwischenstopp	Q ₁	Q ₂	Q ₂	Q ₁		
2. Zwischenstopp	Zielpunkt		Q1Q1	Q2Q2	Q1Q2	Q2Q1	Bedarf	
S ₁	S ₁	S1S1	7	10	14	11	15	
S ₂	S ₂	S2S2	9	12	16	13	5	
S ₁	S ₂	S1S2	11	14	18	15	20	
S ₂	S ₁	S2S1	13	16	20	17	20	
		Angebot	7	13	20	20	20	

Abbildung 40: Ausgangsmatrix für Beispiel 2

Die folgenden Iterationsschritte verlaufen analog zum vorigen Beispiel 1, da die Kostendifferenzen exakt gleich sind. Daher kommt es, obwohl die Kosten pro transportierter Einheit v_{ijz} abweichend sind, zu exakt gleichen Transportmengen x_{ijz} . Somit ergibt sich das gleiche finale Transporttableau (Abb. 37) wie in Beispiel 1.

Die gesamten Transportkosten Z bestimmen sich somit wie folgt:

$$Z = \sum_{i=1}^2 \sum_{y=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{z=1}^2 k_{ijyz} * \left\lceil \frac{x_{ijyz}}{t} \right\rceil = 11 * \left\lceil \frac{10}{10} \right\rceil + 14 * \left\lceil \frac{10}{10} \right\rceil = 25 \text{ GE}$$

In diesem Fall ist jedoch aufgrund der Fixkosten die Nutzung von wenigen Fahrzeugen deutlich wichtiger. Die im vorigen Beispiel 1 erwähnte alternative Lösung (Abb. 38) kommt in diesem Fall auf deutlich schlechtere Transportkosten:

$$Z = \sum_{i=1}^2 \sum_{y=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{z=1}^2 k_{ijyz} * \left\lceil \frac{x_{ijyz}}{t} \right\rceil = 7 * \left\lceil \frac{7}{10} \right\rceil + 10 * \left\lceil \frac{8}{10} \right\rceil + 12 * \left\lceil \frac{5}{10} \right\rceil = 29 \text{ GE}$$

3.5.3 Beispiel 3: geschlossene Touren

In diesem Beispiel wird erneut dieselbe symmetrische Kostenmatrix (Abb. 41) verwendet, jedoch werden in dieser Variante geschlossene Touren mit Auslastungsrestriktion, jedoch ohne Fixkosten genutzt.

I. Schaffung der Voraussetzungen

		Von			
		Q ₁	Q ₂	S ₁	S ₂
Nach	S ₁	2	5	0	4
	S ₂	4	7	4	0
	Q ₁	0	4	2	4
	Q ₂	4	0	5	7

Abbildung 41: Symmetrische Kostenmatrix (identisch mit Abb. 29)

Somit ändert sich die Formel zur Bestimmung der Kosten k_{ijz} für die Fahrt eines Transportmittels auf einer Tour. Dies soll erneut an den Kosten k_{1211} beispielhaft gezeigt werden:

$$k_{1211} = k_{12}(k_{iy}) + k_{21}(k_{yj}) + k_{11}(k_{jz}) + k_{11}(k_{zi}) = 4+5+0+2= 11 \text{ GE}$$

Zudem reduziert sich auch die Anzahl der zulässigen Touren von 16 auf 9. Abbildung 42 zeigt die Ausgangsmatrix mit 16 Touren. Davon erfüllen die rot umrahmten Touren nicht die Bedingung $i \leq y$ oder $j \leq z$ und sind daher unzulässig. Durch diese Eingrenzung fallen vier Touren mit drei individuellen Knotenpunkten (gelb hinterlegt) und drei Touren mit vier individuellen Knotenpunkten (grün hinterlegt) weg. Wie in Teil 3.3.2 erklärt, ist dies für die vier Touren mit drei Knotenpunkten ideal, da für jede dieser weggefallenen Touren eine weitere mit gleichen Kosten zurückbleibt. Bei den Touren mit vier verschiedenen Knotenpunkten fallen jedoch drei der vier Möglichkeiten weg, obwohl nur je zwei von ihnen gezwungenermaßen gleiche Kosten haben. So haben die Touren X_{2112} und X_{1221} (in roter Schriftfarbe) dieselben Kosten, sind jedoch beide ungültig. In diesem Beispiel haben nur durch Zufall alle vier Touren mit vier individuellen Knotenpunkten die gleichen Kosten.

		Startpunkt	Q ₁	Q ₂	Q ₁	Q ₂		
		1. Zwischenstopp	Q ₁	Q ₂	Q ₂	Q ₁		
2. Zwischenstopp	Zielpunkt		Q1Q1	Q2Q2	Q1Q2	Q2Q1	Bedarf	
S ₁	S ₁	S1S1	4	10	11	11	15	
S ₂	S ₂	S2S2	8	14	15	15	5	
S ₁	S ₂	S1S2	10	16	17	17	20	
S ₂	S ₁	S2S1	10	16	17	17	20	
		Angebot	7	13	20	20	20	

Abbildung 42: Ausgangsmatrix mit 16 geschlossenen Touren

Die Ausgangsmatrix der zulässigen Touren wird in Abb. 43 dargestellt. Dabei werden die Angebote und Bedarfe analog zu den vorhergehenden Beispielen bestimmt.

		Startpunkt	Q ₁	Q ₂	Q ₁		
		1. Zwischenstopp	Q ₁	Q ₂	Q ₂		
2. Zwischenstopp	Zielpunkt		Q1Q1	Q2Q2	Q1Q2	Bedarf	
S ₁	S ₁	S1S1	4	10	11	15	
S ₂	S ₂	S2S2	8	14	15	5	
S ₁	S ₂	S1S2	10	16	17	20	
		Angebot	7	13	20	20	

Abbildung 43: Ausgangsmatrix mit 9 zulässigen geschlossenen Touren

II. Bearbeitung der Methode in endlich vielen Iterationsschritten

1. Durchführung von Iterationsschritt s=1:

1.1 Die Bestimmung der maximalen Transportmenge $x_{ijz \max 1}$ kann im ersten Schritt analog zum Beispiel 1 vorgenommen werden:

	Q1Q1	Q2Q2	Q1Q2	Bedarf
S1S1	0	10	10	15
S2S2	0	0	0	5
S1S2	0	10	20	20
Angebot	7	13	20	20

Abbildung 44: Maximale Transportmengen $x_{ijz \max 1}$ im ersten Iterationsschritt

1.2 Berechnung der Kosten pro transportierter Einheit $v_{ijz 1}$ für alle zugelassenen Touren:

Für $v_{1211 1}$ ergibt sich beispielhaft:

$$v_{1211 1} = \frac{\left(\left\lceil \frac{x_{1211 \max 1}}{t} \right\rceil * k_{1211}\right)}{x_{1211 \max 1}} = \frac{\left(\left\lceil \frac{1}{1} \right\rceil * 11\right)}{10} = 1,1$$

	Q1Q1	Q2Q2	Q1Q2	Bedarf
S1S1	/	1	1,1	15
S2S2	/	/	/	5
S1S2	/	1,6	1,7	20
Angebot	7	13	20	20

Abbildung 45: Kosten $v_{ijz 1}$ pro Mengeneinheit im ersten Iterationsschritt

1.3 Bestimmung der minimalen Transportkosten je transportierter Einheit für jede Quelle und jede Senke, sowie der jeweiligen Differenz zur jeweils günstigsten Alternative:

	Q1	Q2	S1	S2
Minimum	1,1	1	1	1,6
günstigste Alternative	1,7	1,1	1,1	1,7
Differenz	0,6	0,1	0,1	0,1

Abbildung 46: Abgleich der Kostendifferenzen im ersten Iterationsschritt

Da die Differenz zur günstigsten Alternative am höchsten ist, wird das Feld mit $v_{1211} = 1,1$ gewählt. Somit wird $x_{1211} = 10$ bekannt und kann in das finale Transporttableau eingetragen werden. Zusätzlich wird Quelle 1 vermerkt, da für sie die höchste Differenz vorliegt.

1.4 Eintragung der bekannt gewordenen Werte in das Transporttableau und Bestimmung der verbleibenden Angebote und Bedarfe:

		i=1; y=1	i=2; y=2	i=1; y=2	
		Q1Q1	Q2Q2	Q1Q2	Bedarf
j=1; z=1	S1S1	0		10	5
j=2; z=2	S2S2	0		0	5
j=1; z=2	S1S2	0		0	10
	Angebot	0	10	10	10

Abbildung 47: Transporttableau nach der ersten Iteration

Der Wert für $x_{1211} = 10$ wird eingetragen. Da in Schritt 1.3 Quelle Q1 vermerkt wurde, werden folgende Schritte vorgenommen:

$$a_{11} = a_{10} - \min(x_{1211}, a_{10}) = 7 - 7 = 0$$

$$a_{21} = a_{20} - (x_{1211} - (a_{10} - a_{11})) = 13 - (10 - (7 - 0)) = 10$$

$$b_{11} = b_{10} - \min(x_{1211}, b_{10}) = 15 - 10 = 5$$

Da $j=z$ gilt, folgt keine weitere Rechnung. Die verbleibenden Angebote und Bedarfe bleiben also unverändert. Die Angebote a_{iy1} und Bedarfe b_{jz1} der Touren können somit berechnet und in das finale Transporttableau eingetragen werden.

Da die das Angebot a_{11} von Quelle 1 auf 0 ME gesunken ist, werden allen Touren X_{ijz} , an denen Q_1 beteiligt ist und deren Transportmenge x_{ijz} noch unbekannt ist, die Transportmenge 0 ME zugeordnet. Das betrifft alle x_{1yz} und x_{ilz} außer x_{1211} , da diese bereits bekannt ist.

2. Mit den neuen Angeboten a_{iy1} und Bedarfen b_{jz1} wird der nächste Iterationsschritt $s=2$ durchgeführt:

2.1 Die maximalen Transportmengen $x_{ijz \max 2}$ werden bestimmt. Dabei gilt weiterhin die Auslastungsrestriktion, da deren Bedingung noch erfüllt ist. Es ergibt sich die in Abb. 48 dargestellte Matrix.

	Q1Q1	Q2Q2	Q1Q2	Bedarf
S1S1	0	0	0	5
S2S2	0	0	0	5
S1S2	0	10	10	10
Angebot	0	10	10	10

Abbildung 48: Maximale Transportmengen $x_{ijz \max 2}$ im zweiten Iterationsschritt

Durch die Auslastungsrestriktion gibt es nur zwei zulässige Touren X_{2212} und X_{1212} . Da die Transportmenge der grau hinterlegten Tour X_{1212} jedoch in Schritt 1.4 bereits mit 0 bestimmt wurde, bleibt X_{2212} als einzige mögliche Tour übrig. Somit können die Schritte 2.2 und 2.3 übersprungen werden und die Transportmenge x_{2212} kann im Schritt 2.4 in das finale Transporttableau eingetragen werden.

2.4 Die verbleibenden Angebote und Bedarfe werden errechnet und gemeinsam mit den bekannt gewordenen Transportmengen in das finale Transporttableau (Abb. 49) eingetragen:

		i=1; y=1	i=2; y=2	i=1; y=2	
		Q1Q1	Q2Q2	Q1Q2	Bedarf
j=1; z=1	S1S1	0	0	10	0
j=2; z=2	S2S2	0	0	0	0
j=1; z=2	S1S2	0	10	0	0
Angebot		0	0	0	0

Abbildung 49: Finales Transporttableau nach der zweiten Iteration

III. Errechnung der summierten Transportkosten:

Die summierten Transportkosten ergeben sich wie folgt:

$$Z = \sum_{i=1}^2 \sum_{y=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{z=1}^2 k_{iyjz} * \left\lceil \frac{x_{iyjz}}{t} \right\rceil = 11 * \left\lceil \frac{10}{10} \right\rceil + 16 * \left\lceil \frac{10}{10} \right\rceil = 27 \text{ GE}$$

4. Schlussbetrachtung

Als Ergebnis dieser Arbeit steht eine Methode, welche das anfänglich formulierte Problem lösen kann. Der Autor sieht somit das Ziel dieser Arbeit als erreicht an, wenn auch nur unter einigen Vorbehalten. Die Problemstellung bildet, zusammen mit ihren Varianten, nur einen relativ kleinen Teil der Realität ab. In der Realität sind weit mehr Faktoren zu beachten und zudem sind besonders die gesetzten Voraussetzungen höchstens in Einzelfällen in dieser Form vorhanden. Dennoch erschließt diese Methode durch ihre Varianten mehrere Szenarien, welche zumindest näherungsweise in der Realität vorhanden sein können. So können zwei verschiedene Arten von Touren abgebildet und Fixkosten einberechnet werden. Zudem eröffnet die Auslastungsrestriktion die Möglichkeit, unter gewissen Bedingungen bessere Ergebnisse zu erzielen.

Das Hauptproblem der entwickelten Methode ist ganz klar in dessen Aufwand und der Komplexität einiger Schritte zu sehen. Diese sind zwar in den meisten Fällen an die Vogelsche Approximationsmethode angelehnt, gewinnen jedoch durch die speziellen Anforderungen enorm an Komplexität. Für eine regelmäßige Anwendung, gerade bei einer größeren Anzahl von beteiligten Quellen und Senken, wäre eine Softwarelösung nahezu unabdinglich. Selbst mit dieser ergibt sich jedoch ein enormer Rechenaufwand, welcher sich exponentiell zum Umfang des Problems erhöht. Gerade im Vergleich zu einem klassischen Transportproblem ist der Umfang des modifizierten Problems selbst mit Einschränkungen enorm. Während ein klassisches Transportproblem über $n * m$ Felder verfügt, so sind es beim modifizierten Problem $(n * m)^2$ Felder. Auch für die Variante mit geschlossenen Touren reduziert sich diese Anzahl nur geringfügig. Als Fazit für die Methode lässt sich daher sagen, dass sie zwar gute Ergebnisse liefert, jedoch im Einzelfall entschieden werden muss, ob diese Ergebnisse den Aufwand rechtfertigen. Das in Teil 3.1 durchgeführte Lösungsverfahren für ein Transportproblem, welches keine Touren zulässt, liefert für dessen eingeschränktes Anwendungsgebiet ebenfalls vernünftige Ergebnisse. Während dieses Verfahren die Vorteile der Tourenplanung nicht ausnutzen kann, ist es deutlich einfacher und schneller in der Durchführung. Als Zwischenform der entwickelten Methode und der klassischen Methoden ist dessen Anwendung in der Realität durchaus denkbar.

Für die Zukunft wäre es interessant zu untersuchen, ob die Entwicklung einer allgemeingültigen und dennoch relativ einfachen Methode möglich ist. Auch eine weitere Vereinfachung der hier entwickelten Methode wäre denkbar. Aufgrund der Erfahrungen mit der Entwicklung dieser Methode schätzt der Autor die Entwicklung einer allgemeingültigen Methode als sehr schwer ein. Eine Vielzahl einzelner, spezieller und idealerweise einfacher Methoden wäre daher eher denkbar. Auch die Verwendung von Varianten, um einen möglichst breiten Teil der Realität abzubilden, ist vorstellbar und bietet für die Zukunft Ausbaumöglichkeiten.

V. Quellenverzeichnis

Domschke, Wolfgang; Drexl, Andreas (1995): *Einführung in Operations Research*, 3. Auflage, Berlin [u. a.]

Gohout, Wolfgang (2004): *Operations Research*, 2., erweiterte Auflage, München

Thonemann, Ulrich (2005): *Operations Management*, München

Vahrenkamp, Richard (2003): *Quantitative Logistik für das Supply Chain Management*, München

VI. Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit ohne fremde Hilfe selbstständig verfasst und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Wörtlich oder dem Sinn nach aus anderen Werken entnommene Stellen sind unter Angabe der Quelle kenntlich gemacht.

Ort, Datum

Unterschrift / Stefan Fortmann

VII. Einverständniserklärung

Ich erkläre mich damit einverstanden, dass ein Exemplar meiner Bachelor-Thesis in die Bibliothek des Fachbereichs aufgenommen wird;
Rechte Dritter werden dadurch nicht verletzt.

Ort, Datum

Unterschrift / Stefan Fortmann