

# Bachelorthesis

Hauke Pape

Simulation und Auswertung von  
Permanentmagneten für magnetoresistive  
Sensor-Arrays

Hauke Pape  
Simulation und Auswertung von  
Permanentmagneten für magnetoresistive  
Sensor-Arrays

Bachelorarbeit eingereicht im Rahmen der Bachelorprüfung  
im Studiengang Mechatronik  
am Department Fahrzeugtechnik und Flugzeugbau  
der Fakultät Technik und Informatik  
der Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg

Betreuender Prüfer: Prof. Dr. Klaus Jünemann  
Zweitgutachter: Prof. Dr.-Ing. Karl-Ragnar Riemschneider

Abgegeben am 4. July 2017

## **Hauke Pape**

### **Titel der Bachelorthesis**

Simulation und Auswertung von Permanentmagneten für magnetoresistive Sensor-Arrays

### **Stichworte**

Simulation von Magnetfeldern, Permanentmagnet, Messung von Magnetfeldern, magnetischer Dipol, Biot-Savart, AMR-Effekt, TMR-Effekt, Sensor-Array, Algorithmusentwurf

### **Kurzzusammenfassung**

Diese Arbeit umfasst die Entwicklung einer Simulationssoftware in Matlab für Magnetfelder von Permanentmagneten mit unterschiedlichen Geometrien. Hintergrund ist die Entwicklung eines magnetoresistiven Sensor-Arrays, das den Winkel eines rotierenden Magneten über dem Sensor erfassen soll. Die Simulation ist die Grundlage für den Entwurf eines Algorithmus für die Auswertung.

## **Hauke Pape**

### **Title of the bachelor thesis**

Simulation and evaluation of permanent magnets for magnetoresistive sensor arrays

### **Keywords**

Simulation of magnetic fields, permanent magnet, Measurement of magnetic fields, magnetic dipole, Biot-Savart, AMR-effect, TMR-effect sensor array, algorithm design

### **Abstract**

This project includes development of a simulation software programmed in Matlab to calculate the magnetic fields of permanent magnets with different geometries. The background is development of a magnetoresistive sensor array, which detects angle of the rotating magnet above the sensor. The simulation is the basis of designing an algorithm for further evaluation.

# Danksagung

Bei Herrn Prof. Dr. Klaus Jünemann, der mir als betreuender Prüfer ermöglicht hat, diese Bachelorarbeit zu erstellen, möchte ich mich für die gute und stets hilfreiche Zusammenarbeit bedanken. Weiterhin möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Ing Karl-Ragnar Riemschneider bedanken, für seine Arbeit als Zweitgutachter und darüber hinaus für die konstruktive Kritik.

Des Weiteren gilt mein Dank Herrn M.Sc. Thorben Schütthe für seinen fachlichen Rat. Mein Dank gilt natürlich auch dem gesamten Forschungsteam ISAR und BATSEN für die stets angenehme Arbeitsatmosphäre. Außerdem bedanke ich mich bei Herrn Dipl.-Ing. Günter Müller.

Meiner Familie danke ich für die Unterstützung während meines Studiums.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>IX</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>XI</b>
<b>Abkürzungen</b>	<b>XI</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>XIII</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Stand der Technik . . . . .	1
1.2 Ziel dieser Arbeit . . . . .	2
<b>2 Grundlagen</b>	<b>4</b>
2.1 Magnetismus . . . . .	4
2.1.1 Quellen von Magnetfeldern . . . . .	4
2.1.2 Magnetostatik . . . . .	7
2.2 Magnetische Winkelsensoren . . . . .	13
2.2.1 AMR-Sensoren . . . . .	13
2.2.2 TMR-Sensoren . . . . .	15
<b>3 Simulationssoftware in Matlab</b>	<b>16</b>
3.1 Implementierung eines einfachen magnetischen Dipols . . . . .	16
3.2 Bildung komplexer Geometrien von Magneten aus einzelnen Dipolen . . . . .	18
3.2.1 Stabmagnet . . . . .	19
3.2.2 Kugel . . . . .	22
3.2.3 Zylinder . . . . .	23
3.3 Analytische Berechnung des Magnetfeldes . . . . .	23
3.3.1 Stabmagnet . . . . .	24
3.3.2 Kugel . . . . .	26
3.3.3 Zylinder . . . . .	29
<b>4 Messtechnische Datenerfassung von Magnetfeldern</b>	<b>31</b>
4.1 Aufbau der Messanordnung . . . . .	31
4.2 Ergebnisse der Messungen und Vergleich mit der Simulation . . . . .	32
4.2.1 Ergebnisse mit der ersten Messanordnung . . . . .	33
4.2.2 Ergebnisse mit der zweiten Messanordnung . . . . .	36

---

<b>5</b>	<b>Algorithmus zur Berechnung der Position und des Winkels</b>	<b>40</b>
5.1	Berechnung des Winkels . . . . .	40
5.2	Bestimmung der Position des Dipols . . . . .	42
5.2.1	Berechnung der Nullstellen . . . . .	43
5.2.2	Bestimmung des Schnittpunkts . . . . .	43
5.3	Berechnung des Winkels zwischen Sensoren . . . . .	45
5.4	Anwendung des Algorithmus auf komplexe Geometrien . . . . .	47
5.5	Optimierungsverfahren . . . . .	51
<b>6</b>	<b>Tests zu den Anforderungen an den Algorithmus</b>	<b>53</b>
6.1	Fehllagen des Magneten . . . . .	53
6.2	Homogene Störfelder . . . . .	56
6.3	Messauflösung . . . . .	60
6.4	Rauschen . . . . .	63
6.5	Tests zum Optimierungsverfahren . . . . .	64
<b>7</b>	<b>Schlussfolgerungen</b>	<b>68</b>
7.1	Zusammenfassung . . . . .	68
7.2	Ausblick . . . . .	69
	<b>Literatur</b>	<b>70</b>
	<b>Anhang</b>	
<b>A</b>	<b>Vergleich Dipol und Analytisch</b>	<b>72</b>
<b>B</b>	<b>Auswertung</b>	<b>75</b>
	<b>Selbstständigkeitserklärung</b>	<b>80</b>

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Beispielhafter Aufbau eines Sensor-Array mit einem Permanentmagneten als Gebermagnet für die Erfassung des Winkels bei einer Rotation des Magneten um die z-Achse. . . . .	2
2.1	Eine stromdurchflossene Leiterschleife erzeugt ein Magnetfeld. Dieses ist abhängig vom Strom und dem Abstand zur Leiterschleife. Dies kann mit dem Gesetz von Biot-Savart beschrieben werden. . . . .	5
2.2	Aus vielen Kreisströmen entsteht ein äußerer Kreisstrom, da sich die inneren Ströme gegenseitig aufheben. . . . .	7
2.3	Darstellung der Feldlinienverläufe des $\vec{B}$ - und $\vec{H}$ -Feldes einer homogen magnetisierten Kugel. . . . .	10
2.4	Stabmagnet mit den Abmessungen $L_x$ , $L_y$ und $L_z$ und einer Magnetisierung in y-Richtung. . . . .	12
2.5	AMR-Prinzip. Ein Ferromagnetisches-Material das in y-Richtung Magnetisiert ist und von einem Strom $I$ durchflossen wird. Durch ein äußeres Magnetfeld ändert sich die Richtung der Magnetisierung $M$ und damit auch der Widerstand $R$ des Materials. . . . .	14
2.6	Zwei Wheatstone'sche Messbrücken die um $45^\circ$ zueinander verdreht sind. Durch ein äußeres Magnetfeld verändern sich die Widerstände. . . . .	14
3.1	Vergleich des Magnetfeldes aus der Berechnung mit Biot-Savart und der Dipol-Gleichung in Abhängigkeit des Radius $R$ und dargestellt über den Abstand $z$ vom Dipol zum Berechnungspunkt $\vec{r}$ . . . . .	17
3.2	Aufbau des des zu simulierenden Systems. Dargestellt ist der Magnet, die Messebene in denen die Sensoren (Koordinaten der Punkte an denen das Magnetfeld simuliert werden soll) liegen. . . . .	18
3.3	Beispiel für ein Stab-Meshgrid. Im Mittelpunkt jedes Kreises ist die Position eines magnetischen Dipols. . . . .	20
3.4	Kugel-Meshgrid mit verschiedenen Parametern. In der Abbildung (a) wurden zwei Halbkreise aufgrund von <code>thetaInc=2</code> mit jeweils vier Koordinaten. In Abbildung (b) sind es vier Halbkreise. . . . .	22
3.5	Zylindrisches Meshgrid mit verschiedenen Parametern. . . . .	23
3.6	Fehlerbetrachtung der verschiedenen Simulationen eines Stabmagneten. . . . .	24
3.7	Fehler in Abhängigkeit vom Abstand und der Anzahl an Dipolen. . . . .	25
3.8	Fehlerbetrachtung der verschiedenen Simulationen eines Kugelmagneten. Die Simulation der Überlagerung wurde mit der Funktion <code>textttsphere-Meshgrid()</code> durchgeführt. . . . .	26

3.9	Relativer durchschnittlicher Fehler mit zunehmendem Abstand zwischen Kugel und Messebene. . . . .	27
3.10	Fehlerbetrachtung der verschiedenen Simulationen eines Kugelmagneten. Die Simulation der Überlagerung wurde mit der Funktion <code>sphereMeshgrid2()</code> durchgeführt. . . . .	28
3.11	Relativer durchschnittlicher Fehler mit zunehmendem Abstand zwischen Kugel und Messebene. . . . .	29
3.12	Fehlerbetrachtung der verschiedenen Simulationen eines zylindrischen Magneten. Die Simulation der Überlagerung wurde mit der Funktion <code>cylindricalMeshgrid2()</code> durchgeführt. . . . .	30
4.1	Darstellung der Transversalsonde des Gaussmeters. . . . .	31
4.2	Darstellung der Axialsonde des Gaussmeters - Draufsicht. . . . .	31
4.3	Darstellung der Messanordnungen mit Magnet und Messsonde. . . . .	32
4.4	Simulation und Messergebnisse für die erste Messanordnung. Der Nordpol des Magneten zeigt in positive z-Richtung. Der Magnet hat eine Abmessung von 40 mm × 20 mm × 10 mm. Außerdem sind der absolute normierte Fehler und der relative Fehler dargestellt. Simulation mit 200 × 100 × 50 Dipolen. . . . .	34
4.5	Simulation und Messergebnisse für die erste Messanordnung eines Stabmagneten. Der Nordpol des Magneten zeigt in negative x-Richtung. Der Magnet hat eine Abmessung 40 mm × 20 mm × 10 mm. Außerdem sind der absolute normierte Fehler und der relative Fehler dargestellt. Simulation mit 200 × 100 × 50. . . . .	35
4.6	Messaufbau für einen Kugelmagneten. . . . .	36
4.7	Simulation und Messergebnisse für einen Kugelmagneten, mit einem Radius $r = 20$ mm. Der Nordpol zeigt in die positive y-Richtung. Die Simulation wurde mit <code>Magnet.n=20</code> durchgeführt. . . . .	37
4.8	Aufnahme für einen zylindrischen Magneten mit einem Radius $r = 5$ mm. . . . .	38
4.9	Simulation und Messergebnisse für einen zylindrischen Magneten, mit den Abmaßen $r = 5$ mm und $h = 5$ mm. Der Nordpol des Magneten zeigt in negative z-Richtung. Die Simulation wurde mit <code>nCircles=16</code> , <code>zLayer=64</code> und <code>innerCircN=8</code> durchgeführt. . . . .	39
5.1	Bestimmung der Nullstellen. In diesem Fall ist der Sensorwert B13 negativ und B12 positiv, sodass sich zwischen ihnen eine Nullstelle befindet. . . . .	43
5.2	Beispielverteilung der Nullstellen für ein magnetischen Dipol mit magnetischen Moment in x-Richtung . . . . .	44
5.3	Beispielverteilung der Nullstellen für ein magnetischen Dipol mit magnetischen Moment das gegenüber der x-Achse um 45° verdreht ist. . . . .	44
5.4	Sensorpositionen . . . . .	45
5.5	Sensoren mit Gewichtung. . . . .	46
5.6	Dipole in Rechteckanordnung. . . . .	47



---

5.7	Dipolanordnung mit Verkippung um $\theta$ in der $xz$ -Ebene . . . . .	49
6.1	Winkelfehler mit zunehmenden Abstand des Stördipols . . . . .	58
6.2	Winkelfehler mit zunehmenden Abstand des Stör-Dipols . . . . .	59
6.3	Fehler für unterschiedliche Auflösungen mit zunehmenden Abstand . . . . .	61
6.4	Rauscheinfluss auf die Genauigkeit der Winkelberechnung . . . . .	63
6.5	Fehlerdarstellung der Winkelberechnung für unterschiedliche Fehlarten. . . . .	66
6.6	Verlauf des Winkelfehlers mit Störfeld. . . . .	67
6.7	Verlauf des Winkelfehlers mit einem Rauschanteil von 0,5% . . . . .	67
A.1	Fehlerbetrachtung der verschiedenen Simulationen eines Stabmagneten. Dargestellt $H_y$ . . . . .	72
A.2	Fehlerbetrachtung der verschiedenen Simulationen eines Kugelmagneten. Dargestellt $H_x$ . Die Simulation der Überlagerung wurde mit der Funktion <code>sphereMeshgrid2()</code> durchgeführt. . . . .	73
A.3	Fehlerbetrachtung der verschiedenen Simulationen eines zylindrischen Ma- gneten. Die Simulation der Überlagerung wurde mit der Funktion <code>cylindricalMeshgrid2()</code> durchgeführt . . . . .	74

# Tabellenverzeichnis

3.1	Variablenamen und deren Bedeutung für die Berechnung eines Magnetfeldes. . . . .	19
3.2	Variablenamen und deren Bedeutung für die Initialisierung der Magneten. . . . .	21
6.1	Darstellung der Fehler für eine 180° Drehung eines Dipols bei $x = y = 0$ , ohne Verkippung. AG = Additive Gewichtung, MG = Multiplikative Gewichtung, QG = Quadranten-Gewichtung. . . . .	54
6.2	Darstellung der Fehler für die Positionsberechnung für eine 180° Drehung eines Dipols bei $x = y = 0$ , ohne Verkippung. . . . .	54
6.3	Zusammenfassung der Genauigkeiten der unterschiedlichen Verfahren zur Berechnung des Winkels bezogen auf Fehllagen . . . . .	56
6.4	Winkelberechnung mit Überlagerung durch ein homogenes Störfeld. Stördipol im Abstand $z = 10$ mm, $z = 20$ mm, $z = 30$ mm. Primärer Dipol im Abstand $z = 4$ mm . . . . .	59
6.5	Winkelberechnung mit Überlagerung durch ein homogenes Störfeld. Stördipol im Abstand $z = 10$ mm, $z = 20$ mm, $z = 30$ mm. Primärer Dipol im Abstand $z = 4$ mm . . . . .	60
6.6	Berechnung der Position mit Störfeld und Fehllage . . . . .	60
6.7	Positionsberechnung mit Begrenzung der Messauflösung . . . . .	62
B.1	Darstellung der Fehler für eine 180° Drehung eines Dipols mit Fehllage von $-0,23$ mm in x-Richtung und $-0,41$ mm in y-Richtung, ohne Verkippung. AG = Additive Gewichtung, MG = Multiplikative Gewichtung, QG = Quadranten Gewichtung . . . . .	75
B.2	Darstellung der Fehler für die Positionsberechnung für eine 180° Drehung eines Dipols mit Fehllage von $-0,23$ mm in x-Richtung und $-0,41$ mm in y-Richtung, ohne Verkippung. . . . .	75
B.3	Darstellung der Fehler für eine 180° Drehung eines Dipols ohne Verschiebung, mit Verkippung um 2°. AG = Additive Gewichtung, MG = Multiplikative Gewichtung, QG = Quadranten Gewichtung . . . . .	76
B.4	Darstellung der Fehler für die Positionsberechnung für eine 180° Drehung eines Dipols ohne Verschiebung, mit Verkippung um 2°. . . . .	76
B.5	Darstellung der Fehler für eine 180° Drehung eines Dipols ohne Verschiebung, mit Verkippung um 5°. AG = Additive Gewichtung, MG = Multiplikative Gewichtung, QG = Quadranten Gewichtung . . . . .	77
B.6	Darstellung der Fehler für die Positionsberechnung für eine 180° Drehung eines Dipols ohne Verschiebung, mit Verkippung um 5°. . . . .	77

---

B.7	Darstellung der Fehler für eine $180^\circ$ Drehung eines Dipols mit Fehllage von $-0,23$ mm in x-Richtung und $-0,41$ mm in y-Richtung, mit Verkippung um $5^\circ$ . AG = Additive Gewichtung, MG = Multiplikative Gewichtung, QG = Quadranten Gewichtung . . . . .	78
B.8	Darstellung der Fehler für die Positionsberechnung für eine $180^\circ$ Drehung eines Dipols mit Fehllage von $-0,23$ mm in x-Richtung und $-0,41$ mm in y-Richtung, mit Verkippung um $5^\circ$ . . . . .	78
B.9	Darstellung der Fehler für eine $180^\circ$ Drehung eines Dipols mit Fehllage von $-0,23$ mm in x-Richtung und $-0,41$ mm in y-Richtung, mit Verkippung um $5^\circ$ . Winkelberechnung mit genauer Position. AG = Additive Gewichtung, MG = Multiplikative Gewichtung, QG = Quadranten Gewichtung . . . . .	79

# Symbolverzeichnis

Symbol	Einheit	Beschreibung
$\vec{B}$	T	Vektor der magnetische Flussdichte
$B_x$	T	x-Komponente der magnetische Flussdichte
$B_y$	T	y-Komponente der magnetische Flussdichte
$B_z$	T	z-Komponente der magnetische Flussdichte
$\delta$		Delta-Funktion
$d\vec{s}$	m	Vektor eines Wegelements
$dx$	m	x-Komponente des Wegelements $d\vec{s}$
$dy$	m	y-Komponente des Wegelements $d\vec{s}$
$dz$	m	z-Komponente des Wegelements $d\vec{s}$
$\vec{e}_x$		Einheitsvektor in x-Richtung
$\vec{e}_y$		Einheitsvektor in y-Richtung
$\vec{e}_z$		Einheitsvektor in z-Richtung
$\vec{G}(\vec{r}, \vec{r}')$		Greensche Funktion
$\vec{H}$	A/m	Vektor der magnetische Feldstärke
$H_x$	A/m	x-Komponente der magnetische Feldstärke
$H_y$	A/m	y-Komponente der magnetische Feldstärke
$H_z$	A/m	z-Komponente der magnetische Feldstärke
$\vec{J}$	A/m <sup>2</sup>	Vektor der Stromdichte
$L_x$	m	Kantenlänge von einem Stabmagnet
$L_y$	m	Kantenlänge von einem Stabmagnet
$L_z$	m	Kantenlänge von einem Stabmagnet
$\vec{M}$	A/m	Vektor der Magnetisierung
$M_0$	A/m	Magnetisierung
$\vec{\mu}$	Am <sup>2</sup>	Vektor des magnetischen Moments
$\mu_x$	Am <sup>2</sup>	x-Komponente des magnetischen Moments
$\mu_y$	Am <sup>2</sup>	y-Komponente des magnetischen Moments
$\mu_z$	Am <sup>2</sup>	z-Komponente des magnetischen Moments
$\mu_0$	H/m	Magnetische Konstante, Permeabilität
$\mu_r$	H/m	relative Permeabilität
$\phi$	A	Skalares magnetisches Potential
$q$	C	Punktladung
$R$	$\Omega$	Elektrischer Widerstand
$\vec{r}$	m	Vektor vom Ursprung zum Berechnungspunkt
$\vec{r}'$	m	Vektor vom Ursprung zur Leiterschleife, zum Magneten etc.

---

Symbol	Einheit	Beschreibung
$\text{rect}$		Rechteck-Funktion
$r$	m	Zylinderkoordinate des Vektors $\vec{r}$
$r'$	m	Zylinderkoordinate des Vektors $\vec{r}'$
$\theta$	°	Zylinderkoordinate des Vektors $\vec{r}$
$\theta'$	°	Zylinderkoordinate des Vektors $\vec{r}'$
$\vec{v}$	m/s	Geschwindigkeit
$x$	m	kartesische Koordinate des Vektors $\vec{r}$
$x'$	m	kartesische Koordinate des Vektors $\vec{r}'$
$y$	m	kartesische Koordinate des Vektors $\vec{r}$
$y'$	m	kartesische Koordinate des Vektors $\vec{r}'$
$z$	m	kartesische Koordinate des Vektors $\vec{r}$
$z'$	m	kartesische Koordinate des Vektors $\vec{r}'$

# 1 Einleitung

Magnetische Sensoren spielen in der heutigen Zeit eine immer wichtigere Rolle. Sie werden unter anderem bei der berührungslosen Erfassung von Drehzahl und Winkel verwendet. Insbesondere bei Kraftfahrzeugen sind sie in sicherheitsrelevanten Systemen vorhanden wie zum Beispiel im Antiblockiersystem (ABS).

Die HAW Hamburg arbeitet in Kooperation mit Partnern an dem Forschungsprojekt „ISAR“<sup>1</sup>, das vom Bundesministerium für Bildung und Forschung gefördert wird. In dem Projekt soll ein magnetisches Sensor-Array mit der dazu gehörigen Signalverarbeitung und der Systemarchitektur entwickelt werden.

Mit den neuen Sensoren ist eine räumliche Erfassung des Magnetfeldes in einer Ebene möglich, wodurch eine Lagedetektion und Fehlerkorrektur denkbar ist. Außerdem wird eine Detektion und Kompensation von Störfeldern angestrebt. Dies ist mit der heutigen Generation von Magnetfeldsensoren nicht möglich, da sie das Magnetfeld nur an einem Punkt messen.

## 1.1 Stand der Technik

Die heutigen aktiven magnetischen Sensoren in der Automobilelektronik beruhen zum großen Teil auf dem Hall-Effekt oder dem anisotropen magnetoresistiven Effekt (AMR). Ein Bereich dieser Sensoren ist die Winkelerfassung eines rotierenden Magneten gegenüber dem Sensor. Dabei messen Sensoren die den AMR-Effekt nutzen, die x- und y-Komponente des Magnetfeldes an einem Punkt und aus dem Verhältnis dieser kann der Winkel berechnet werden. Diese Sensoren sind anfällig gegenüber äußeren Störfeldern, Fehllagen des Magneten zum Sensor und komplettem Ausfallen des Sensors, da er über keine Redundanz verfügt. In diesen Punkten wird mit dem Sensor-Array eine Verbesserung erhofft.

Zur Messung von Magnetfeldern gibt es zwei weitere magnetoresistive Effekte, den gigantischen magnetoresistiven Effekt (GMR) und den tunneltmagnetoresistive-Effekt (TMR). Der GMR-Effekt wurde 1988 und damit als letzter entdeckt und wird zum Teil für Sensoren genutzt wie zum Beispiel in Festplattenleseköpfen. Dieser konnte sich bisher gegenüber dem AMR-Sensor nicht durchsetzen [9]. Der TMR-Effekt wurde 1975 entdeckt, fand jedoch anfangs aufgrund seiner geringen relativen Widerstandsänderung wenig Beachtung. Dies änderte sich durch weitere Forschungsergebnisse mit der Zeit,

---

<sup>1</sup>Signalverarbeitung für **I**ntegrated **S**ensor-**A**Rrays basierend auf dem tunneltmagnetoresistiven-Effekt für den Einsatz in der Automobilelektronik

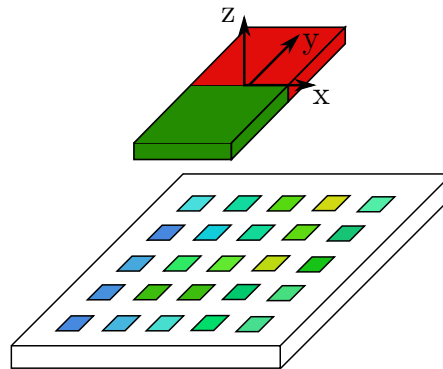


Abbildung 1.1: Beispielhafter Aufbau eines Sensor-Array mit einem Permanentmagneten als Gebermagnet für die Erfassung des Winkels bei einer Rotation des Magneten um die z-Achse.

sodass heute davon ausgegangen werden kann, dass dem TMR-Effekt eine größere Bedeutung in der Technik zukommt [9]. Und dies auch aufgrund der geringeren Fläche die dieser Effekt benötigt. So ist mit dem TMR-Effekt denkbar, ein Sensor-Array zu entwerfen, welcher die selbe Fläche benötigt wie herkömmliche Sensoren.

## 1.2 Ziel dieser Arbeit

Mit dem Sensor-Array sollen Magnetfelder ausgewertet werden. Ziel dieser Auswertung ist die Bestimmung des Winkels zwischen Magnet und Sensor bei einer Rotation des Magneten um die z-Achse. Hierfür muss ein passender Algorithmus entwickelt werden. Derzeit liegt kein fertiges Sensor-Array vor, welches den TMR-Effekt nutzt. Deshalb ist es hilfreich für die ersten Überlegungen und Algorithmusentwürfe, diese durch Magnetfeld Simulationen zu testen. Durch die Simulation ist es möglich, die ersten Entwürfe unter idealen Bedingungen zu betrachten. Zudem können mit einer Simulation verschiedene Versuchsaufbauten leicht nachgestellt werden. Deshalb soll in dieser Arbeit eine Simulationssoftware für Permanentmagneten in Matlab implementiert werden. Dabei sollen unterschiedliche Ansätze zur Simulation von Permanentmagneten getestet werden, um die Simulationsergebnisse untereinander vergleichen und anschließend diese mit Messungen verifizieren zu können. Ferner ist es Ziel, verschiedene Formen von Permanentmagneten nachbilden zu können. Der nächste Schritt ist der Entwurf von Algorithmen zur Auswertung des Sensor-Array, hier insbesondere die Bestimmung des Winkels zwischen Sensor-Array und Permanentmagnet. In Abbildung 1.1 ist der Aufbau dargestellt. Zum Schluss ist der Algorithmus simulativ auf unterschiedliche Bedingungen zu testen, um eventuelle Probleme oder Vorteile des Algorithmus aufzuzeigen. Nachfolgend sind die Aufgabenbereiche, die Gliederung und das Vorgehen zum Erreichen der genannten Ziele aufgelistet.

### 1. Einarbeitung Grundlagen

- 
- Magnetostatik
  - Magnetische Winkelsensoren
2. Erstellen einer Simulationssoftware in Matlab für Permanentmagneten
    - Implementierung eines einfachen Dipols mit dem Gesetz von Biot-Savart und mit der Dipol-Gleichung
    - Bildung komplexer Geometrien (Quader, Kugel, Zylinder, Ring)
    - Analytische Berechnungen von Magnetfeldern
  3. Messtechnische Datenerfassung von Magnetfeldern
    - Konstruktion einer Messanordnung für die Messung der Magnetfelder von Permanentmagneten
    - Durchführung der Messungen und Vergleich mit den Simulationsergebnissen
  4. Algorithmusentwurf anhand eines Dipols
    - Bestimmung der projizierten Position
    - Berechnung des Winkels zwischen Dipol und „Sensor“
  5. Testen des Algorithmus
    - Fehllagen des Magneten gegenüber des Sensors
    - Homogene Störfelder
    - Begrenzung der Messauflösung
    - Rauschen



## 2 Grundlagen

In diesem Kapitel werden die Grundlagen des Magnetismus die in dieser Arbeit genutzt wurden erläutert. Darunter fallen die Quellen von Magnetfeldern und die Grundlagen der Magnetostatik. Außerdem werden zwei Effekte zur Messung von Magnetfeldern erläutert.

### 2.1 Magnetismus

Es wird zuerst auf die Quellen von Magnetfeldern eingegangen. Dies ist wichtig, um grundlegende Effekte verstehen zu können. Des Weiteren wird ein Teilgebiet der Magnetostatik beschrieben, da die Gleichungen die daraus hervorgehen, Magnetfelder unterschiedlicher Art beschreiben können.

#### 2.1.1 Quellen von Magnetfeldern

In diesem Abschnitt wird das Magnetfeld von stromgeführten Leitern betrachtet und anschließend die magnetischen Eigenschaften in der Materie und deren Ursache.

##### Das Magnetfeld von Strömen

Eine bewegte Punktladung  $q$  erzeugt ein Magnetfeld. Betrachtet man eine Punktladung  $q$  die sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegt, so erzeugt diese an einem Punkt  $P$  ein Magnetfeld  $\vec{B}$ , das senkrecht zu  $\vec{v}$  und dem Einheitsvektor  $\hat{r}$  steht. Folgend die Gleichung die dies beschreibt:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q \vec{v} \times \hat{r}}{4\pi |\vec{r}|^2} \quad (2.1)$$

Der Vektor  $\vec{r}$  zeigt von der Punktladung  $q$  zum Punkt  $P$  und  $|\vec{r}|$  ist der Abstand von der Punktladung zum Punkt  $P$ .  $\mu_0$  ist die magnetische Feldkonstante. Sie ist definiert als [11]:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{NA}^{-2} \quad (2.2)$$

Mit dem Gesetz von Biot-Savart kann die magnetische Flussdichte  $\vec{B}$  einer stromdurchflossenen Leiterschleife berechnet werden. Es gilt:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (2.3)$$

In Abbildung 2.1 ist dies dargestellt.  $I$  ist der Strom der durch die Leiterschleife fließt,  $d\vec{s}$  beschreibt ein Wegelement auf der Leiterschleife,  $\vec{r}'$  weist vom Koordinatenursprung

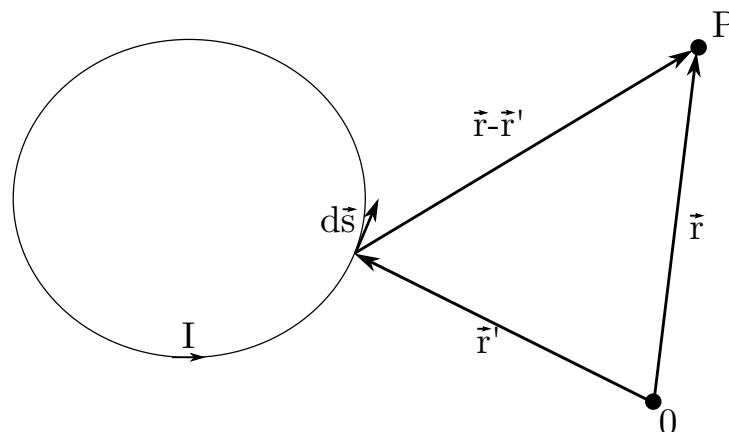


Abbildung 2.1: Eine stromdurchflossene Leiterschleife erzeugt ein Magnetfeld. Dieses ist abhängig vom Strom und dem Abstand zur Leiterschleife. Dies kann mit dem Gesetz von Biot-Savart beschrieben werden.

zum Weegelement  $d\vec{s}$ ,  $(\vec{r} - \vec{r}')$  ist der Vektor vom Weegelement  $d\vec{s}$  zum Punkt  $P$  an dem das Magnetfeld  $\vec{B}$  berechnet wird [5].

Eine stromdurchflossene Leiterschleife hat ein magnetisches Dipolmoment. Dieses beschreibt wie sich die Leiterschleife im Magnetfeld verhält. Wie von dem Namen abgeleitet werden kann, wirkt auf die Leiterschleife ein Drehmoment. Das Drehmoment hängt von dem Strom  $I$ , der Fläche  $A$  die die Leiterschleife umschließt und dem äußeren Magnetfeld ab. Die Abhängigkeit vom Strom und der Fläche kann zusammengefasst werden und wird als magnetisches Dipolmoment bezeichnet [11].

$$\vec{\mu} = IA\vec{n} \quad (2.4)$$

Mit  $\vec{n}$  als Normalenvektor der Fläche  $A$ .

## Magnetismus in der Materie

Wie in Kapitel 2.1.1 beschrieben, erzeugen bewegte Ladungen ein Magnetfeld. So erzeugen die Elektronen zum einen mit ihrer Bewegung um die Atome magnetische Dipolmomente, aber auch mit ihrem Spin. Der Spin ist eine Eigenschaft von Elektronen der mit der Quantenmechanik beschrieben werden kann. Die Eigenschaften von Materialien können in drei Klassen eingeteilt werden. Diese unterscheiden sich durch deren Verhalten der magnetischen Dipolmomente unter Einfluss eines äußeren Magnetfeldes. Man unterscheidet zwischen paramagnetischen, ferromagnetischen und diamagnetischen Materialien [11]. Folgend eine kurze Beschreibung dieser Eigenschaften.

**Paramagnetismus** Ist gekennzeichnet durch die Ausrichtung der atomaren magnetischen Momente durch ein äußeres Magnetfeld. Liegt kein äußeres Magnetfeld an, so

haben die magnetischen Momente keine bevorzugte Richtung und heben sich im räumlichen und zeitlichen Mittel gegenseitig auf. Die Ausrichtung der magnetischen Momente hängt zudem von der Stärke des äußeren Magnetfeldes und von der Temperatur ab. Eine höhere Feldstärke wirkt sich positiv auf die Ausrichtung aus, eine hohe Temperatur negativ [11].

**Ferromagnetismus** In ferromagnetischen Stoffen ist die Wirkung der magnetischen Momente untereinander stark, sodass diese sich gegenseitig beeinflussen und ausrichten. Auch durch schwache Magnetfelder kann ein großer Anteil der magnetischen Momente parallel ausgerichtet sein. Zudem hängt die Ausrichtung nicht nur vom äußeren Magnetfeld ab, sondern auch vom momentanen Zustand und deren Vorgeschichte [8].

**Diamagnetismus** Materialien mit ausschließlich diamagnetischen Eigenschaften haben ohne äußeres magnetisches Feld keine resultierenden magnetischen Momente. Erst durch ein sich zeitlich änderndes äußeres Magnetfeld werden Spannungen induziert und diese erzeugen Ströme, d.h. magnetische Momente. Aufgrund der Lenz'schen Regel sind sie der Ursache entgegengerichtet und schwächen das äußere Magnetfeld. Alle Substanzen zeigen diesen Effekt, jedoch wird er bei Para- und Ferromagneten von den dort beschriebenen stärkeren Effekten überlagert [8].

### Magnetisierung

Wie in Kapitel 2.1.1 beschrieben, werden in manchen Stoffen die magnetischen Momente durch äußere Magnetfelder ausgerichtet. Man spricht dabei von einer Magnetisierung des Materials. Diese Magnetisierung  $\vec{M}$  ist definiert als magnetische Momente pro Volumeneinheit:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{\mu}}{dV} \quad (2.5)$$

Denkt man sich die magnetischen Momente erzeugt durch Kreisströme, die die Bewegung der Elektronen und deren Spins darstellen ergibt, sich ein Bild wie in Abbildung 2.2 dargestellt. Abgebildet ist die Vorderansicht eines Zylinders. Zu erkennen ist, dass sich die inneren Kreisströme gegeneinander aufheben und nur ein äußerer Strom bleibt. Hat der Zylinder die Höhe  $dl$  so ergibt sich für das Volumen:

$$dV = A \cdot dl \quad (2.6)$$

Mit  $A$  als Grundfläche des Zylinders. Das magnetische Dipolmoment einer stromführenden Leiterschleife ist:

$$d\vec{\mu} = A \cdot dI\vec{n} \quad (2.7)$$

Setzt man die Gleichungen 2.6 und 2.7 in Gleichung 2.5 ein, so folgt:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{\mu}}{dV} = \frac{A \cdot dI}{A \cdot dl} \vec{n} = \frac{dI}{dl} \vec{n} \quad (2.8)$$

Mit  $\vec{n}$  als Normalenvektor senkrecht zur Fläche  $A$ . Damit ist die Einheit der Magnetisierung Ampere pro Meter [11].

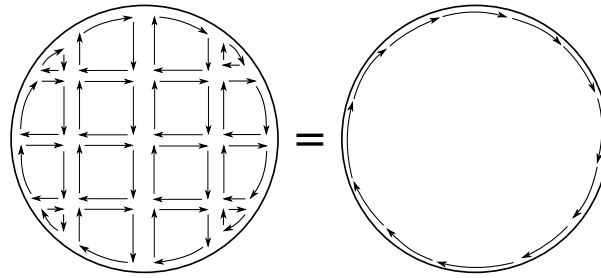


Abbildung 2.2: Aus vielen Kreisströmen entsteht ein äußerer Kreisstrom, da sich die inneren Ströme gegenseitig aufheben.

## 2.1.2 Magnetostatik

Wenn elektrische Ladungen sich bewegen bzw. ein Strom fließt wird dadurch ein Magnetfeld erzeugt. Ist dieser Strom nicht von der Zeit abhängig, so ist auch das erzeugte Magnetfeld nicht zeitabhängig, d.h. es ist stationär. Dies vereinfacht die Betrachtung, da hierdurch die Gleichungen der Magnetostatik verwendet werden können. Der Strom ist definiert als:

$$I = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}} = \frac{dq}{dt} \quad (2.9)$$

Des Weiteren kann der Strom pro Leiterquerschnitt als Stromdichte definiert werden:

$$J = \frac{\text{Strom}}{\text{Fläche}} = \frac{I}{A} \quad (2.10)$$

In der Magnetostatik gilt [6]:

$$J(\vec{r}, t) = J(\vec{r}) \quad (2.11)$$

### Grundgleichungen

Die zwei Grundgleichungen der Magnetostatik beruhen auf den Maxwell'schen Gleichungen. Diese sind:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.12)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (2.13)$$

Mit  $\nabla \cdot$  ist die Divergenz eines Vektorfeldes beschrieben, also in diesem Fall die Divergenz von  $\vec{B}$ :

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (2.14)$$

Und mit  $\nabla \times$  wird die Rotation beschrieben, für diesen Fall wäre es:

$$\nabla \times \vec{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \vec{J} \quad (2.15)$$

Die Gleichung 2.12 gibt an, dass das  $\vec{B}$ -Feld quellenfrei ist. Dies kann auch mit der Integralform beschrieben werden, diese lautet:

$$\oiint_A d\vec{B} = 0 \quad (2.16)$$

Diese Gleichung sagt aus, dass das Integral der magnetischen Flussdichte durch eine geschlossenen Hüllfläche Null ist. Somit sind die Feldlinien geschlossen und alle Feldlinien die in den Hüllkörper eintreten, treten auch wieder aus [5].

Der Zusammenhang zwischen  $\vec{B}$ - und  $\vec{H}$ -Feld ist allgemein:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2.17)$$

Mit  $\mu$  als Permeabilität. Diese setzt sich aus

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad (2.18)$$

zusammen.  $\mu_r$  ist die relative Permeabilität und hängt vom Material ab. Sie ist im Vakuum  $\mu_r = 1$  und damit

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (2.19)$$

Für magnetisierbare Medien gilt:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} \quad (2.20)$$

In magnetisierbaren Medien ist das  $\vec{B}$ -Feld abhängig von  $\vec{H}$  und der Magnetisierung  $\vec{M}$  des Mediums. Die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$  ist durch Gleichung 2.13 definiert. Wobei es sich hier genau genommen um „freie“ Ströme handelt und die Magnetisierung durch „gebundene“ Ströme hervorgerufen wird.

$$\nabla \times \vec{M} = \vec{J}_{\text{geb}} \quad (2.21)$$

Gebundene Ströme sind atomare Kreisströme. Diese führen zu keinem makroskopischen Stromfluss, erzeugen aber magnetische Momente. Freie Ströme sind makroskopische Ströme [8].

### Magnetischer Dipol

Der magnetische Dipol ist das einfachste magnetische Element. Er wird charakterisiert durch sein magnetisches Moment  $\vec{\mu}$ . Der Feldverlauf eines magnetischen Dipols wird durch die Gleichung

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{r}(\vec{\mu} \cdot \vec{r}) - \vec{\mu}|\vec{r}|^2}{|\vec{r}|^5} \quad (2.22)$$

beschrieben.

### Das Feld einer homogen magnetisierten Kugel

Es werden folgend die analytischen Gleichungen für eine homogen magnetisierte Kugel beschrieben. Die Gleichungen werden für eine Kugel mit dem Radius  $R$  und der Magnetisierung

$$\vec{M}(\vec{r}) = \begin{cases} M_0 \vec{e}_z & |\vec{r}| < R \\ 0 & |\vec{r}| > R \end{cases} \quad (2.23)$$

hergeleitet.  $M_0$  gibt die Höhe der Magnetisierung an. Die Kugel ist in z-Richtung magnetisiert. Außerhalb der Kugel hat sie das Feld eines Dipols mit dem Dipolmoment:

$$\vec{\mu} = \frac{4\pi R^3}{3} M_0 \vec{e}_z = V M_0 \vec{e}_z, \quad (2.24)$$

mit  $V = \frac{4\pi R^3}{3}$  dem Volumen der Kugel.

Außerhalb der Kugel im Vakuum unterscheiden sich  $\vec{B}$  und  $\vec{H}$ -Feld nur um den Faktor  $\mu_0$ . Im Inneren sind die beiden Felder entgegengesetzt orientiert und unterschiedlich groß. So gilt für das  $\vec{B}$ -Feld im Inneren der Kugel:

$$\vec{B} = \frac{2\mu_0}{3} M_0 \vec{e}_z \quad (2.25)$$

und für das  $\vec{H}$ -Feld:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B} - \vec{M}}{\mu_0} = -\frac{1}{3} M_0 \vec{e}_z \quad (2.26)$$

In der Abbildung 2.3 sind die Verläufe der Feldlinien von  $\vec{B}$  und  $\vec{H}$  veranschaulicht [2]. Zu erkennen ist, dass die Feldlinien des  $\vec{B}$ -Feldes geschlossen sind. Dies ist die Schlussfolgerung der Quellenfreiheit des  $\vec{B}$ -Feldes aus der Gleichung 2.12. Das  $\vec{H}$ -Feld ist nicht quellenfrei, denn:

$$\nabla \cdot \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \vec{B} - \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \vec{M} \quad (2.27)$$

Und mit Gleichung 2.12 ergibt sich:

$$\nabla \cdot \vec{H} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \vec{M} \quad (2.28)$$

Somit ist die Quelle des  $\vec{H}$ -Feldes die Divergenz der Magnetisierung [8].

### Das Feld eines homogen magnetisierten Stabmagneten

In diesem Abschnitt werden die analytischen Gleichungen zur Berechnung des Magnetfeldes von einem homogen magnetisierten Stabmagneten beschrieben. Die Gleichungen für den Stabmagneten werden hergeleitet, da im Gegensatz zum Kugelmagneten hierfür keine Referenzen gefunden werden konnten. Für einen Stabmagneten gilt:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \vec{J}_{\text{frei}} + \vec{J}_{\text{geb}} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{H} + \nabla \times \vec{M} \quad (2.29)$$

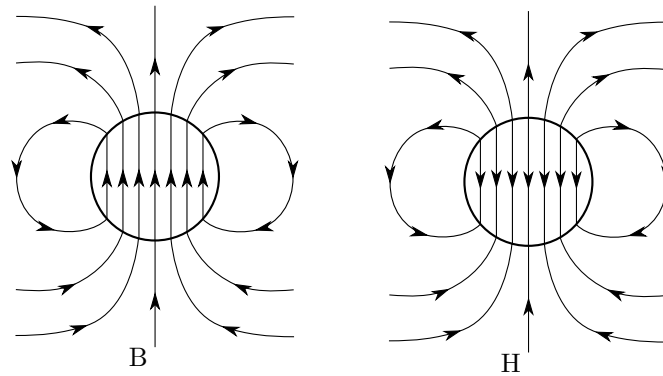


Abbildung 2.3: Darstellung der Feldlinienverläufe des  $\vec{B}$ - und  $\vec{H}$ -Feldes einer homogen magnetisierten Kugel.

Für den Stabmagneten soll gelten

$$\vec{J}_{\text{frei}} = \nabla \times \vec{H} = 0, \quad (2.30)$$

sodass das Magnetfeld nur durch die Magnetisierung entsteht:

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times \vec{M} = \vec{J}_{\text{geb}} \quad (2.31)$$

Und das  $\vec{H}$ -Feld durch die Gleichung 2.28 beschrieben wird. Durch Einführung des skalaren magnetischen Potentials das folgend definiert ist [8]:

$$\vec{H} = -\nabla\phi \quad (2.32)$$

Ergibt durch Bildung der Divergenz:

$$-\Delta\phi = \nabla \cdot \vec{H} \quad (2.33)$$

Mit dem Laplace-Operator  $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ . Dies ist die magnetische Poisson-Gleichung und kann mit Hilfe der Green'schen-Funktion

$$\vec{G}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.34)$$

gelöst werden. Damit ergibt sich für das skalare magnetische Potential:

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\nabla' \cdot \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.35)$$

Mit  $dr' = dx' dy' dz'$  und für das  $\vec{H}$ -Feld:

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3r' \nabla' \cdot \vec{M}(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (2.36)$$

**Dipol** Zur Überprüfung der Gleichungen 2.35 und 2.36 wird das Feld eines Dipols berechnet. Dafür wird für die Magnetisierung die Delta-Funktion verwendet. Diese stellt ein punktförmige Magnetisierung dar:

$$\vec{M}(\vec{r}') = \vec{\mu}\delta(\vec{r}') \quad (2.37)$$

Damit ist die Divergenz der Magnetisierung folgende:

$$\nabla \cdot \vec{M}(\vec{r}') = \mu_x \frac{\partial \delta(x')}{\partial x} \delta(y') \delta(z') + \mu_y \frac{\partial \delta(y')}{\partial y} \delta(x') \delta(z') + \mu_z \frac{\partial \delta(z')}{\partial z} \delta(x') \delta(y') \quad (2.38)$$

Die mehrdimensionale Delta-Funktion kann als Multiplikation von eindimensionalen Delta-Funktion geschrieben werden. Die Gleichung 2.38 eingesetzt in die Gleichung 2.35 ergibt:

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\mu_x \frac{\partial \delta(x')}{\partial x} \delta(y') \delta(z') + \mu_y \frac{\partial \delta(y')}{\partial y} \delta(x') \delta(z') + \mu_z \frac{\partial \delta(z')}{\partial z} \delta(x') \delta(y')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.39)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\mu_x}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\mu_y}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\mu_z}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \Big|_{x'=y'=z'=0} \quad (2.40)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{r}\vec{\mu}}{|\vec{r}|^3} \quad (2.41)$$

Dies ist das Potential eines Dipols. Die Ableitung der Delta-Funktion ist folgend definiert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta'(x - x_0) dx = -f'(x_0) \quad (2.42)$$

Das  $\vec{H}$ -Feld kann mit der Gleichung 2.32 bestimmt werden. In diesem Fall bedeutet  $\nabla\phi$  das der Gradient von einer skalaren Funktion gebildet wird. Dadurch entsteht ein Vektor. So ergibt sich für die einzelnen Komponenten vom  $\vec{H}$ -Feld:

$$H_x = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\mu_x x + \mu_y y + \mu_z z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{3x\vec{r}\vec{\mu}}{|\vec{r}|^5} - \frac{\mu_x}{|\vec{r}|^3} \right) \quad (2.43)$$

$$H_y = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\mu_x x + \mu_y y + \mu_z z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{3y\vec{r}\vec{\mu}}{|\vec{r}|^5} - \frac{\mu_y}{|\vec{r}|^3} \right) \quad (2.44)$$

$$H_z = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\mu_x x + \mu_y y + \mu_z z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{3z\vec{r}\vec{\mu}}{|\vec{r}|^5} - \frac{\mu_z}{|\vec{r}|^3} \right) \quad (2.45)$$

Und das ist die Dipol-Gleichung wie in 2.22.



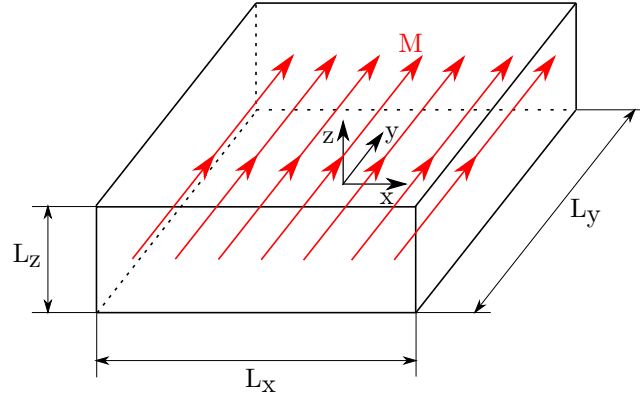


Abbildung 2.4: Stabmagnet mit den Abmessungen  $L_x$ ,  $L_y$  und  $L_z$  und einer Magnetisierung in  $y$ -Richtung.

**Stabmagnet** Im folgenden werden die Gleichungen für einen Stabmagnet hergeleitet. Der Stabmagnet hat die Abmessungen  $L_x$ ,  $L_y$  und  $L_z$ . Außerdem soll er homogen in  $y$ -Richtung magnetisiert sein. Interpretiert man die Magnetisierung als Dipoldichte, so würden bei einer homogenen Magnetisierung in  $y$ -Richtung alle magnetischen Momente parallel zur  $y$ -Achse ausgerichtet sein. Für die Magnetisierung wird folgende Annahme getroffen:

$$\vec{M}(\vec{r}) = M_0 \vec{e}_y \text{rect}\left(\frac{x}{L_x}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{L_y}\right) \text{rect}\left(\frac{z}{L_z}\right) \quad (2.46)$$

Die einzelnen Rechteckfunktion beschreiben den Bereich der Magnetisierung, siehe Abbildung 2.4. Anschließend wird die Divergenz der Magnetisierung bestimmt:

$$\nabla \cdot \vec{M} = M_0 \text{rect}\left(\frac{x}{L_x}\right) \text{rect}\left(\frac{z}{L_z}\right) (\delta(y + \frac{L_y}{2}) - \delta(y - \frac{L_y}{2})) \quad (2.47)$$

Die Gleichung 2.47 kann dann in Gleichung 2.36 eingesetzt werden. Dabei kann man  $\vec{H} = \vec{H}_1 - \vec{H}_2$  aufteilen, aufgrund von  $(\delta(y + \frac{L_y}{2}) - \delta(y - \frac{L_y}{2}))$ . So ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\vec{H}_1(\vec{r}) = -\frac{M_0}{4\pi} \int_{-L_x/2}^{L_x/2} dx' \int_{-L_z/2}^{L_z/2} dz' \frac{\begin{pmatrix} x - x' \\ y + L_y/2 \\ z - z' \end{pmatrix}}{((x - x')^2 + (y + L_y/2)^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \quad (2.48)$$

$$\vec{H}_2(\vec{r}) = -\frac{M_0}{4\pi} \int_{-L_x/2}^{L_x/2} dx' \int_{-L_z/2}^{L_z/2} dz' \frac{\begin{pmatrix} x - x' \\ y - L_y/2 \\ z - z' \end{pmatrix}}{((x - x')^2 + (y - L_y/2)^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \quad (2.49)$$

Diese Integrale könnten numerisch gelöst werden, beispielsweise in Matlab mit der `integral2()`-Funktion, aber auch analytisch durch Bestimmung der Stammfunktionen.

## Das Feld eines homogen magnetisierten Zylindermagneten

Folgend werden ähnlich wie beim Stabmagneten, die Gleichungen zur Berechnung des Magnetfeldes eines zylindrischen Permanentmagneten hergeleitet. Die Herleitung erfolgt auf denselben Grundlagen wie für den Stabmagneten, es wird lediglich die Green'sche-Funktion in Zylinderkoordinaten übertragen, diese sieht wie folgt aus:

$$\vec{G}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta') + (z - z')^2)}} \quad (2.50)$$

Mit  $r$  als Radius,  $\theta$  als Winkel der Zylinderkoordinaten und  $z$  als  $z$ -Koordinate. Diese Funktion kann dann in die Gleichung 2.35 anstatt der Green'schen-Funktion in kartesischen Koordinaten eingesetzt werden. Für das  $\vec{H}$ -Feld muss der Gradient der Green'schen-Funktion gebildet werden. So ergibt sich für  $\vec{H} = \vec{H}_1 - \vec{H}_2$  eines zylindrischen Magneten mit Magnetisierung  $\vec{M} = M_0 \vec{e}_z$  folgende Gleichungen:

$$\vec{H}_1(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{M_0}{4\pi} \int_0^R r' dr' \int_0^{2\pi} d\theta' \frac{\begin{pmatrix} r - r' \cos(\theta - \theta') \\ rr' \sin(\theta - \theta') \\ z + L_z/2 \end{pmatrix}}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta') + (z + L_z/2)^2)^{3/2}} \quad (2.51)$$

$$\vec{H}_2(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{M_0}{4\pi} \int_0^R r' dr' \int_0^{2\pi} d\theta' \frac{\begin{pmatrix} r - r' \cos(\theta - \theta') \\ rr' \sin(\theta - \theta') \\ z - L_z/2 \end{pmatrix}}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta') + (z - L_z/2)^2)^{3/2}} \quad (2.52)$$

Auch diese Gleichungen können numerisch gelöst werden.

## 2.2 Magnetische Winkelsensoren

### 2.2.1 AMR-Sensoren

Es gibt verschiedene magnetische Winkelsensoren, die auf unterschiedlichen Effekten beruhen. Dies sind der anisotrope magnetoresistive Effekt (AMR), der gigantische magnetoresistive Effekt (GMR) und der tunneltmagnetoresistive Effekt (TMR). Am häufigsten eingesetzt in Sensoren ist bisher der AMR-Effekt, obwohl hier die Widerstandsänderung nur wenige Prozent beträgt. Dies liegt an der einfacheren Umsetzung des Effekts in Sensoren [10]. Im Folgenden werden der AMR-Effekt und der TMR-Effekt erläutert. In ferromagnetischen Materialien kann der AMR-Effekt festgestellt werden. Diese Materialien können dauerhaft magnetisiert werden. Dadurch wird deren spezifischer Widerstand  $\rho$  beeinflusst. Der spezifische Widerstand hängt von der Richtung des Stroms und der Magnetisierung ab oder anders gesagt von dem Winkel  $\theta$  zwischen diesen, siehe Abbildung 2.5. Die Richtung der Magnetisierung kann durch ein äußeres Magnetfeld

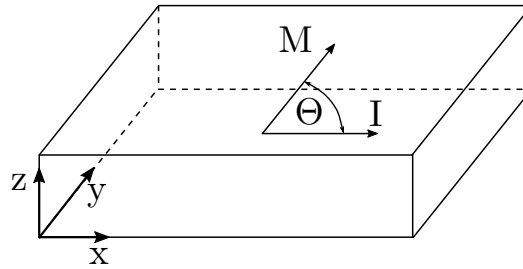


Abbildung 2.5: AMR-Prinzip. Ein Ferromagnetisches-Material das in y-Richtung Magnetisiert ist und von einem Strom  $I$  durchflossen wird. Durch ein äußeres Magnetfeld ändert sich die Richtung der Magnetisierung  $M$  und damit auch der Widerstand  $R$  des Materials.

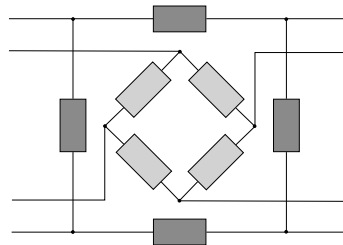


Abbildung 2.6: Zwei Wheatstone'sche Messbrücken die um  $45^\circ$  zueinander verdreht sind. Durch ein äußeres Magnetfeld verändern sich die Widerstände.

beeinflusst werden. Stehen Magnetisierung und Strom senkrecht zueinander ist der spezifische Widerstand  $\rho$  minimal, sind sie parallel ist der spezifische Widerstand maximal. Als Gleichung kann der Effekt folgend beschrieben werden:

$$R(\theta) = R_m + \frac{\Delta R}{2} \cos(2\theta) \quad (2.53)$$

Fließt der Strom in Streifenlängsrichtung so kann anstatt des spezifischen Widerstands auch der Widerstand  $R$  genutzt werden. In Gleichung 2.53 ist  $R$  der Widerstand in Abhängigkeit vom Winkel zwischen Strom und Magnetisierung,  $R_m$  ist der mittlere Widerstand und  $\Delta R$  ist die Differenz zwischen Widerstand in längs- und quer-Richtung. Zu erkennen ist außerdem, dass der Widerstand sich mit dem doppelten Winkel verändert. Damit kann der Winkel in  $180^\circ$  aufgelöst werden. In Sensoren werden mehrere solcher Widerstände zu einer Wheatstone'schen Messbrücke verschaltet. Damit wird der Aufbau gegenüber Temperatureinflüssen unempfindlicher. In AMR-Winkelsensoren sind zwei dieser Messbrücken verbaut. Diese sind um  $45^\circ$  zueinander verdreht [10]. Dies ist in Abbildung 2.6 dargestellt.

### 2.2.2 TMR-Sensoren

Der Tunnelmagnetoresistive-Effekt(TMR) basiert auf quantenmechanischen Effekten. Dieser besagt, dass Elektronen dünn-schichtige Isolatoren passieren können. Werden ferromagnetische Dünnschichten mit Isolationsschichten kombiniert, so ist der Tunnelstrom abhängig von der Richtung der Magnetisierung der ferromagnetischen Schichten. Außerdem ist der Widerstand abhängig von der Größe des Tunnelements. Je kleiner das Element, desto größer wird Widerstand. Dies ist ein entscheidender Unterschied zum AMR-Effekt, bei dem die Höhe des Widerstand auch mit der räumlichen Größe zunimmt. Außerdem können TMR-Sensoren den Winkel für eine komplette Drehung auch mit  $360^\circ$  auflösen [10].

## 3 Simulationssoftware in Matlab

Die Magnetfeldsimulationen werden mit Matlab von TheMathworks durchgeführt. Es werden eigene Funktionen und Scripte zur Berechnung des Magnetfeldes geschrieben. Dies hat den Vorteil gegenüber kommerziellen Magnetfeldsimulations-Programmen, dass die Simulation explizit an die Anforderungen angepasst werden. So muss das Magnetfeld immer nur in einer Ebene für eine bestimmte Anzahl an Punkten berechnet werden. Diese Punkte stellen die einzelnen Sensoren dar. Außerdem kann durch die Simulation in Matlab eine direkte Weiterverarbeitung der Daten vorgenommen werden, umso beispielsweise Algorithmen zu entwerfen.

Als erstes wird ein magnetischer Dipol, das einfachste magnetische Element, mit der Gleichung von Biot-Savart und der Dipol-Gleichung simuliert. Danach werden die Magnetfelder für komplexe Geometrien durch Überlagerung von vielen Dipolen berechnet. Diese Methode hat den Vorteil nicht perfekte Magnete nachbilden zu können. So können Magneten Luftbläschen enthalten oder Abplatzungen an der Oberfläche. Dies kann durch Weglassen von Dipolen in diesen Bereichen nachgebildet werden. Es könnte aber auch eine nicht homogene Magnetisierung durch magnetische Momente in unterschiedliche Richtungen abgebildet werden. Schließlich werden zur Verifikation der Dipol-Methode die Magnetfelder mit den Gleichungen aus dem Kapitel 2.1.2 analytisch berechnet.

### 3.1 Implementierung eines einfachen magnetischen Dipols

Die Grundlage der Simulation ist der einfache magnetische Dipol. Dieser kann mit dem Gesetz von Biot-Savart durch eine stromdurchflossene Leiterschleife oder durch die Gleichung für einen magnetischen Dipol beschrieben werden. Beide Verfahren werden implementiert und verglichen. Dabei können die korrekten Implementierungen und die Vorteile der einzelnen Methoden festgestellt werden. Die Gleichungen und ihre physikalischen Ursprünge wurden in Kapitel 2 beschrieben.

**Biot-Savart** Mit dem Gesetz von Biot-Savart kann das Magnetfeld einer stromdurchflossenen Leiterschleife berechnet werden. Das Magnetfeld hat die Eigenschaft eines magnetischen Dipols. Folgend nochmals die Gleichung:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{r}_C)}{|\vec{r} - \vec{r}_C|^3}$$

In Matlab kann das Linienintegral numerisch berechnet werden. Hierfür muss eine Schrittweite festgelegt werden, welche die Leiterschleife in äquidistante Schritte  $\Delta s_i$  unterteilt.

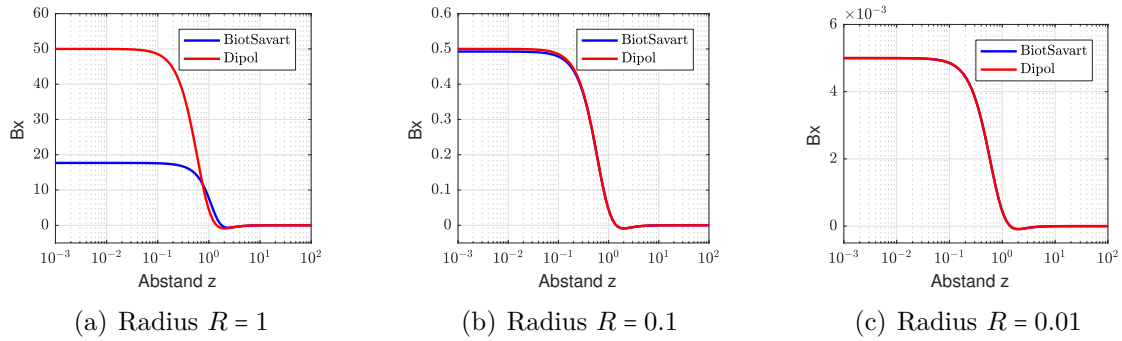


Abbildung 3.1: Vergleich des Magnetfeldes aus der Berechnung mit Biot-Savart und der Dipol-Gleichung in Abhängigkeit des Radius  $R$  und dargestellt über den Abstand  $z$  vom Dipol zum Berechnungspunkt  $\vec{r}$ .

Jeder Schritt beinhaltet eine Definition der Vektoren  $\Delta\vec{s}_i, \vec{r}, \vec{r}_C$ . Danach kann für jeden Schritt der Term

$$\frac{\Delta\vec{s}_i \times (\vec{r} - \vec{r}_C)}{|\vec{r} - \vec{r}_C|^3}$$

berechnet und anschließend die Summe gebildet werden. Das Integral wird in eine Summe überführt.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{i=0}^n \frac{\Delta\vec{s}_i \times (\vec{r}_i - \vec{r}_{Ci})}{|\vec{r}_i - \vec{r}_{Ci}|^3} \quad (3.1)$$

**Dipol-Gleichung** Die Gleichung für den Dipol kann in Matlab fast eins zu eins implementiert werden und ist in der Funktion `calcBPoint()` hinterlegt. Für die Berechnung müssen die Parameter wie das magnetische Moment  $\vec{\mu}$ , die Permeabilität  $\mu_0$  und der Vektor  $\vec{r}$  vorgeben werden.

**Vergleich-Dipol Gleichung mit Biot-Savart** Um einen direkten Vergleich zwischen den Berechnungen nach Biot-Savart und der Dipol-Gleichung zu haben, kann das magnetische Moment  $\vec{\mu}$  in der Dipol-Gleichung mit der Gleichung 2.4 bestimmt werden. In den Abbildungen 3.1 sind die Simulationen für unterschiedliche große Radien  $R$  der Leiterschleifen abgebildet. Dargestellt ist die x-Komponente des Magnetfeldes  $\vec{B}$  und berechnet wird ein Punkt unterhalb des Dipols mit zunehmenden Abstand  $z$ .  $\vec{r}$  ist deshalb:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Die Ergebnisse der y- und z-Komponente des Magnetfeldes  $\vec{B}$  sind vergleichbar mit den Ergebnissen der x-Komponente. Das magnetische Moment ist  $\vec{\mu} = \mu_x \vec{e}_x$ . Für die Berechnung mit Biot-Savart wurde die Leiterschleife in 360 Schritte unterteilt. Der Strom beträgt  $I = 100$  A.

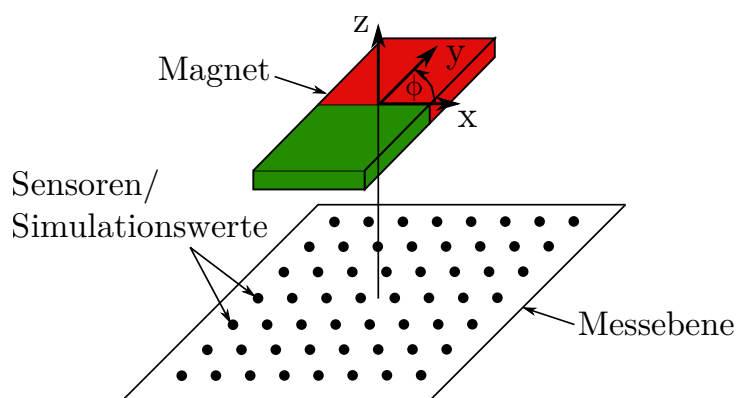


Abbildung 3.2: Aufbau des des zu simulierenden Systems. Dargestellt ist der Magnet, die Messebene in denen die Sensoren (Koordinaten der Punkte an denen das Magnetfeld simuliert werden soll) liegen.

Es ist eine deutliche Veränderungen zu erkennen. Umso kleiner die Leiterschleife, desto kleiner wird der Unterschied zwischen der Simulationen mit der Dipol-Gleichung und mit dem Gesetz von Biot-Savart und dies auch für geringe Abstände. Dies bestätigt die Funktionalität beider Simulationen. Die Berechnungen wurden mit dem Matlab-Skript `Dipol_BiotSavart.m` ausgeführt.

## 3.2 Bildung komplexer Geometrien von Magneten aus einzelnen Dipolen

Um auch real existierende Permanentmagneten simulieren zu können, werden diese mit vielen einzelnen Dipolen nachgebildet. So haben gängige Permanentmagneten die Geometrien Stab, Kugel, Zylinder(Tablette) oder Ring. Um die Strukturen nachzubilden muss ein „Meshgrid“ erzeugt werden. Das „Meshgrid“ beinhaltet die Punkte an denen sich ein Dipol befindet. Danach wird für jeden Dipol das magnetische Feld für eine bestimmte Fläche berechnet und darauf folgend werden die einzelnen Felder überlagert bzw. aufsummiert. Der Unterschied zwischen den einzelnen Geometrien ist die Erzeugung der „Meshgrids“. Die Überlagerung der Felder der einzelnen Dipole erfolgt dagegen immer nach dem selben Verfahren. Im folgenden wird auf die Erzeugung der „Meshgrids“ eingegangen. In der Abbildung 3.2 ist der zu simulierende Aufbau mit den Bezeichnungen verbildlicht. Weiterhin wird in dieser Arbeit der Begriff Sensor als Koordinate der Simulationenwerte verwendet.

Für die Berechnung der Magnetfelder gibt es die Funktionen `calcBField2D()` und `calcMagField()`. In `calcBField2D()` wird das Feld für einen Dipol in einem bestimmten Bereich in der Messebene berechnet und durch `calcMagField()` aufgerufen. Hier werden die einzelnen Felder der Dipole überlagert. Die Funktion `calcMagField()` benötigt als Eingang drei Strukturen. Diese müssen die Information über den Magneten, den Sensor

Tabelle 3.1: Variablenamen und deren Bedeutung für die Berechnung eines Magnetfeldes.

Struktur	Variablenname	Bedeutung
Magnet	<code>mue</code>	Vektor mit dem magnetischen Moment [ $\mu_x$ $\mu_y$ $\mu_z$ ]
	<code>mue0</code>	Magnetische Permeabilität
Sensor	<code>field</code>	Größe des Sensorfelds [ $x_{Länge}$ $y_{Länge}$ ]
	<code>resolution</code>	Anzahl der Sensoren [ $x_{Anzahl}$ $y_{Anzahl}$ ]
	<code>zPos</code>	z-Position der Messebene
	<code>pointsX</code>	x-Koordinaten der Sensoren/Simulationswerte
	<code>pointsY</code>	y-Koordinaten der Sensoren/Simulationswerte
Dipol-Meshgrid	<code>positionX</code>	x-Position der Dipole
	<code>positionY</code>	y-Position der Dipole
	<code>positionZ</code>	z-Position der Dipole

und das erzeugte „Meshgrid“ beinhalten. Der Name der Struktur ist variabel, an die Namen der Variablen muss sich gehalten werden. In der Tabelle 3.1 ist eine Übersicht zu den Strukturen und den Variablen abgebildet.

### 3.2.1 Stabmagnet

Zur Nachbildung eines Stabmagneten wird die Matlab-Funktion `meshgrid()` verwendet. Diese benötigt als Eingangsvariablen drei Zeilen-Arrays (`xgv`, `ygv`, `zgv`), um daraus durch Wiederholung der Zeilen-Arrays ein Rechteck-Gitter zu erzeugen. Nach der Erzeugung der Daten mit `meshgrid()` werden die  $3 \times 3 \times 3$  Arrays zu Spalten-Arrays umgeformt. Dies erleichtert die weitere Verarbeitung. Im Anschluss wird das „Meshgrid“, wenn angegeben, verdreht und verschoben. Ist dies nicht der Fall, wird das „Meshgrid“ symmetrisch um den Nullpunkt erzeugt. Die Bildung des Stab-Meshgrid ist in der Funktion `blockMeshgrid2()` hinterlegt. Die Eingangsvariablen sind die Kantenlängen des Magneten und die Anzahl der Dipole entlang einer Kantenlänge. Außerdem muss die Verdrehung und die Verschiebung des Magneten gegenüber seiner Ausgangslage beschrieben werden. In der Ausgangslage befindet sich der Magnetmittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems. Die Variablen werden in einer Struktur der Funktion übergeben. Wo bei sich auch hier an die Bezeichnung der Variablen, aber nicht an die Struktur, wie im Quellcode 3.1 beispielhaft beschrieben, gehalten werden muss. In der Tabelle 3.2 sind die Variablenamen und ihre Bedeutung für die verschiedenen „Meshgrids“ aufgeführt. In der Abbildung 3.3 ist beispielhaft ein Stab-Meshgrid gezeigt.



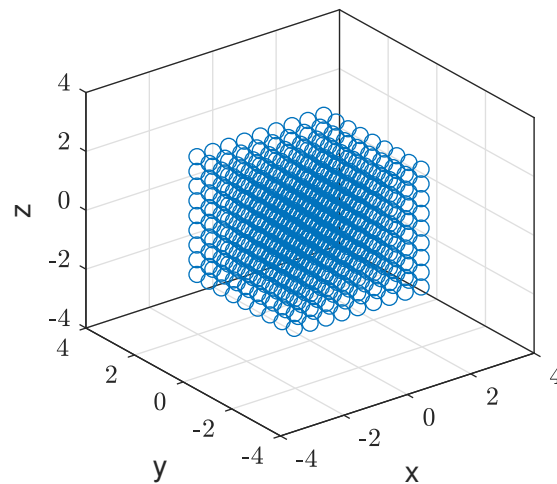


Abbildung 3.3: Beispiel für ein Stab-Meshgrid. Im Mittelpunkt jedes Kreises ist die Position eines magnetischen Dipols.

Quellcode 3.1: Auflistung der Werte für die Initialisierung des Magneteten.

```

1  %=====
   % Define square magnet
3  %=====
   Magnet.a      = 0.04; % edge length a in x-direction
5  Magnet.b      = 0.02; % edge length b in y-direction
   Magnet.c      = 0.01; % edge length c in z-direction
7  Magnet.an     = 20;  % number of dipols in x-direction
   Magnet.bn     = 10;  % number of dipols in y-direction
9  Magnet.cn     = 5;   % number of dipols in z-direction
   Magnet.rotate = [0 0 0]; % rootation of the magnet
11 Magnet.translate = [0 0 0]; % tranlation of the magnet
   Magnet.mue0   = 4*pi*10^-7; % magnetic constant
13 Magnet.mue    = [0; -1; 0]; % magnetic moment
   %=====
15 % Define Sensor
   %=====
17 Sensor.field = [0.08 0.09]; % edge length sensorfield
   Sensor.zPos  = -0.0141; % z-Position of the sensor
19 Sensor.resolution = [9 10]; % number of sensors
   Sensor.pointsX = linspace(-Sensor.field(1)/2,...
21     Sensor.field(1)/2, Sensor.resolution(1));
   Sensor.pointsY = linspace(-Sensor.field(2)/2,...
23     Sensor.field(2)/2, Sensor.resolution(2));

```

Tabelle 3.2: Variablenamen und deren Bedeutung für die Initialisierung der Magneten.

Magnetform	Variablenname	Bedeutung
Stab	a	Kantenlänge in x-Richtung
	b	Kantenlänge in y-Richtung
	c	Kantenlänge in z-Richtung
	an	Anzahl an Dipolen in x-Richtung
	bn	Anzahl an Dipolen in y-Richtung
	cn	Anzahl an Dipolen in z-Richtung
Kugel	radius	Radius der Kugel
	layer	Anzahl der Kugelschichten
	phiInc	Anzahl der Dipole für einen Halbkreis
	thetaInc	Anzahl der Halbkreise
	n	Anzahl Dipole für einen Quader/ Abstand zwischen den Dipolen
Zylinder	radius	Radius des Zylinders
	height	Höhe des Zylinders
	nCircles	Anzahl an Kreisen innerhalb des Radius
	zLayer	Anzahl Dipol-Schichten
	innerCircN	Anzahl an Dipolen auf dem inneren Kreis
Allgemein	rotate	Vektor mit den Verdrehungen [ $\phi$ $\theta$ $\psi$ ]
	translate	Vektor mit den Verschiebungen [ $x_{\text{trans}}$ $y_{\text{trans}}$ $z_{\text{trans}}$ ]

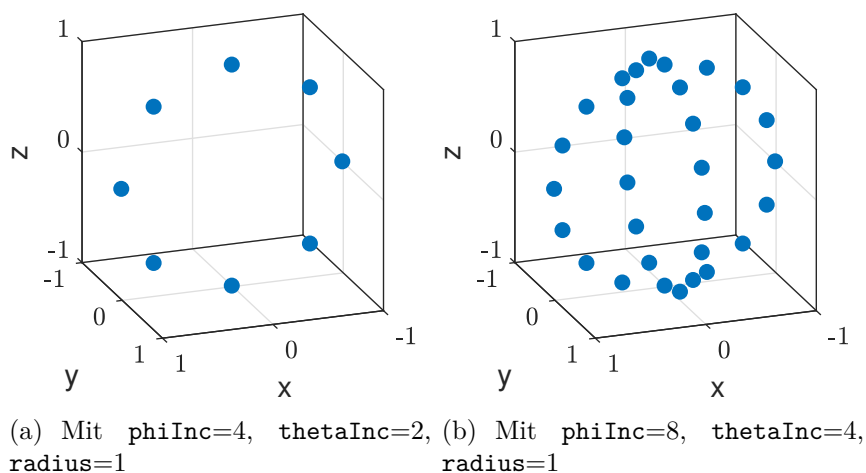


Abbildung 3.4: Kugel-Meshgrid mit verschiedenen Parametern. In der Abbildung (a) wurden zwei Halbkreise aufgrund von `thetaInc=2` mit jeweils vier Koordinaten. In Abbildung (b) sind es vier Halbkreise.

### 3.2.2 Kugel

Zur Bildung eines Kugel-Meshgrid sind zwei Verfahren implementiert. Das erste Verfahren benutzt die Kugel-Koordinaten und ist in der Funktion `sphereMeshgrid()` umgesetzt. Das zweite Verfahren erzeugt mittels der `meshgrid()`-Funktion ein Rechteckgitter und entfernt danach alle Koordinaten dessen Betrag größer als der Radius ist. Die Funktion ist in `sphereMeshgrid2()` implementiert. Auch hier dürfen die Variablenamen nicht abweichen.

Folgend eine Beschreibung der Funktion `sphereMeshgrid()` und deren Eingangsparameter. Mit `Magnet.radius` wird der äußere Radius der Kugel definiert, mit `Magnet.layer` wird die Anzahl der Kugelschichten beschrieben. So wird bei `Magnet.layer = 1` nur an der Oberfläche der Kugel ein „Meshgrid“ erzeugt, bei `Magnet.layer = 2` an der Oberfläche und auf der Hälfte des Radius. Der Parameter `Magnet.thetaInc` gibt die Anzahl an Halbkreisen auf denen die Koordinaten des „Meshgrid“ liegen. Mit `Magnet.phiInc` wird angegeben, wie viele Koordinaten auf einem erzeugtem Halbkreis liegen. In den Abbildungen 3.4(a) und 3.4(b) sind Beispiele für verschiedene Parameter dargestellt.

Bei der zweiten Funktion zur Bildung eines Kugel-Meshgrid gibt es zwei Parameter. Wie auch bei der ersten Funktion, muss der Radius der Kugel definiert werden. Zusätzlich muss mit `Magnet.n` die Anzahl an Meshpunkten für eine Kantenlänge des zuerst erzeugten Rechteck festgelegt werden. `Magnet.n` gibt damit auch den Abstand zwischen den einzelnen Meshpunkten an. So wäre bei einer Kugel mit `Magnet.radius = 0.5` und `Magnet.n = 10` der Abstand zwischen zwei Meshpunkten gleich  $0, \bar{1}$ .

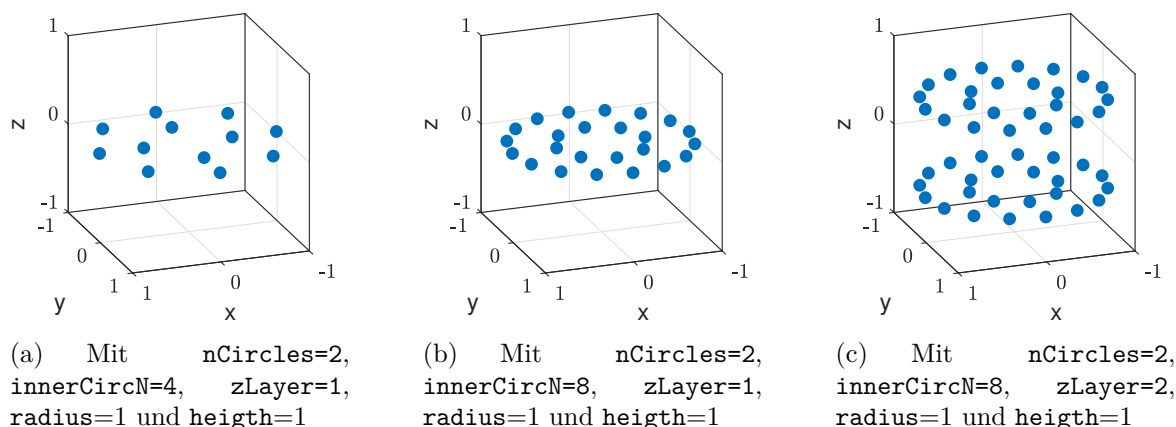


Abbildung 3.5: Zylindrisches Meshgrid mit verschiedenen Parametern.

### 3.2.3 Zylinder

Für die Erzeugung eines zylindrischen „Meshgrid“ werden zylindrische Koordinaten verwendet. Das Verfahren ist in der Funktion `cylindricalMeshgrid()` implementiert. Hierfür müssen die in der Tabelle 3.2 angegebenen Variablen definiert werden. Wie bei der Kugel wird durch `Magnet.radius` der Radius festgelegt, mit `Magnet.height` die Höhe, mit `Magnet.nCircles` die Anzahl an Kreise auf denen die Meshpunkte liegen, mit `Magnet.zLayer` wird die Anzahl der Kreisschichten beschrieben und mit `Magnet.innerCircN` die Anzahl der Meshpunkte auf dem innersten Kreis. In Abbildung 3.5 sind Beispiele für unterschiedliche Parameter dargestellt.

Wie in der Abbildung 3.5 zu sehen ist, steigt die Anzahl der Meshpunkte je weiter außen der Meshkreis liegt. So hat in Abbildung 3.5(a) der innere Meshkreis vier Meshpunkte und der äußere acht Meshpunkte. In Abbildung 3.5(b) hat der innere Meshkreis acht Meshpunkte und der äußere 16. Mit der Zunahme der Meshpunkte pro Meshkreis soll eine möglichst gleichmäßige Verteilung der Meshpunkte realisiert werden.

Ein Weiteres Verfahren ist in der Funktion `cylindricalMeshgrid2()` implementiert. Hier wird ähnlich wie bei `sphereMeshgrid2()` ein Rechteck-„Meshgrid“ erzeugt und alle Koordinaten entfernt dessen Betrag der x- und y-Koordinate größer ist als der Radius. Bei der Kugel ist es der Betrag aller Koordinaten.

## 3.3 Analytische Berechnung des Magnetfeldes

In diesem Abschnitt wird der Ansatz der Simulation der magnetischen Felder von Permanentmagneten durch Überlagerung von Dipolen mit analytischen Ansätzen verglichen, um den Ansatz der Überlagerung zu verifizieren. Mit den analytischen Ansätzen aus Kapitel 2, kann das Feld eines Kugelmagneten, eines Stabmagneten und eines zylindrischen Magneten berechnet werden. Die Gleichungen dafür wurden in Matlab implementiert.

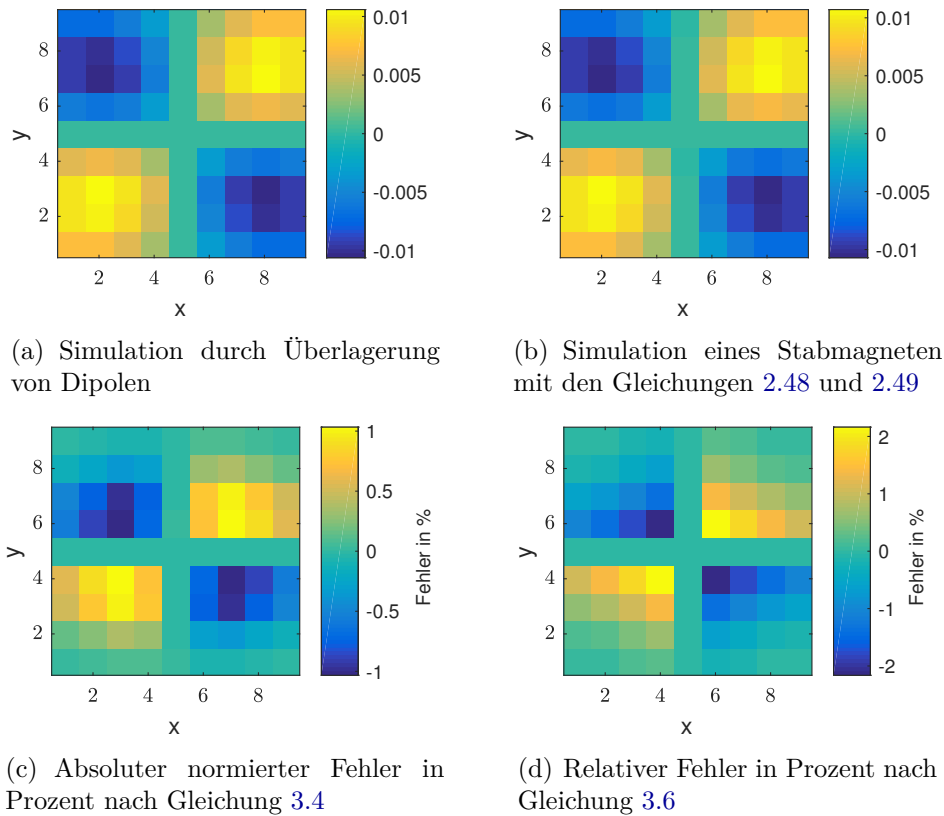


Abbildung 3.6: Fehlerbetrachtung der verschiedenen Simulationen eines Stabmagneten.

### 3.3.1 Stabmagnet

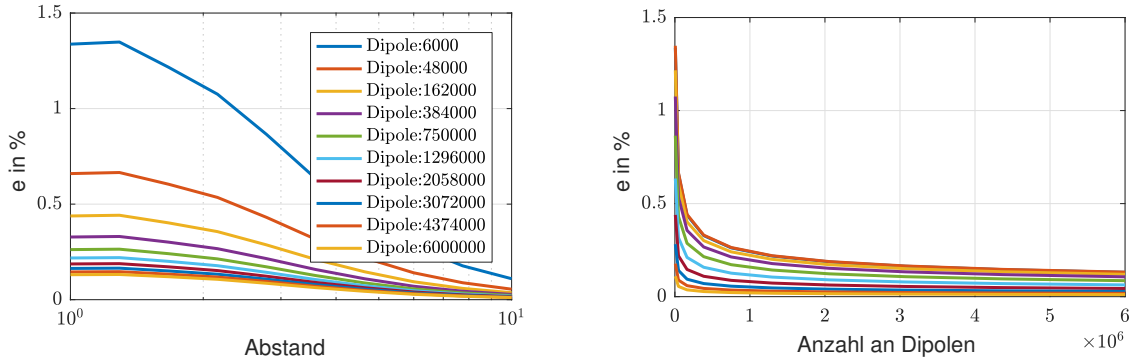
Die Ergebnisse der Simulation sind in den Abbildungen 3.6(a) bis 3.6(d) dargestellt. Die Simulationen wurden mit folgenden Parametern durchgeführt: Magnetisierung in  $y$ -Richtung  $\vec{M} = M_0 \vec{e}_y = 1$ , Magnetabmessungen  $2 \times 3 \times 1$ , Messfeld  $9 \times 9$  Sensoren und Abmessung  $4 \times 6$  an der Koordinate  $z = -2$ . Die Überlagerungs-Simulation wurde mit  $60 \times 90 \times 30 = 162\,000$  Dipolen durchgeführt. Das magnetische Moment für einen Dipol ergibt sich aus:

$$\vec{\mu} = \frac{M_0 V}{n_{\text{Dipole}}} \vec{e}_y \quad (3.3)$$

Dabei steht  $n_{\text{Dipole}}$  für die Anzahl der Dipole,  $M_0$  für die Magnetisierung und  $V$  für das Volumen des Stabmagneten.

In den Abbildungen 3.6(a) bis 3.6(d) wird die  $x$ -Komponente des Felds dargestellt und im Anhang befinden sich die Abbildungen für die  $y$ -Komponente (A.1(a) bis A.1(d)). Die Fehlerberechnung  $e$  wurde wie folgt durchgeführt, wobei  $N$  für die Anzahl an Simulationenwerten steht:

$$e = \frac{H_{\text{analytisch}} - H_{\text{Dipol}}}{\max(|H_{\text{analytisch}}|)} \quad (3.4)$$



(a) Absoluter durchschnittlicher Fehler normiert auf den maximalen Wert, berechnet mit Gleichung 3.5 mit zunehmenden Abstand zwischen Stabmagnet und Messfeld. „Dipole“ bezeichnet die Anzahl an Dipolen, die für die Simulation durch Überlagerung verwendet wurden.

(b) Absoluter durchschnittlicher Fehler normiert auf die Anzahl an Dipolen. Die einzelnen Kurven sind die verschiedenen Abstände.

Abbildung 3.7: Fehler in Abhängigkeit vom Abstand und der Anzahl an Dipolen.

$H_{\text{analytisch}}, H_{\text{Dipol}}$  und  $e$  sind Matrizen. Der Mittelwert wird aus der Summe der Elemente der Matrix  $e$  berechnet.

$$e_{\text{Mittel}} = \frac{1}{N} \sum_i |e_i| \quad (3.5)$$

Der relative Fehler wird berechnet in dem der Quotient elementweise aus der Differenz gebildet wird:

$$e_{\text{rel}} = \frac{H_{\text{analytisch}} - H_{\text{Dipol}}}{|H_{\text{analytisch}}|} \quad (3.6)$$

$$e_{\text{rel,Mittel}} = \frac{1}{N} \sum_i |e_{\text{rel},i}| \quad (3.7)$$

Der maximale absolute Fehler normiert auf den maximalen Wert, berechnet nach Gleichung 3.4 beträgt  $e = \pm 1,033\%$ . Der durchschnittliche Fehler  $e_{\text{Mittel}} = 0,368\%$ . Der maximale relative Fehler, berechnet nach Gleichung 3.6, beträgt  $e_{\text{rel}} = -205,201\%$ . Dieser hohe Wert entsteht durch Simulationenwerte nahe Null. Betrachtet man diese Werte nicht, dann liegt der maximale Fehler bei  $e_{\text{rel}} = \pm 2,162\%$ . In der Abbildung 3.6(c) ist der Fehler nach Gleichung 3.4 dargestellt und in 3.6(d) nach Gleichung 3.6. In der Abbildung 3.6(d) wurden Fehler über 50% nicht dargestellt, da diese durch Simulationenwerte nahe Null entstanden und die Abbildungen dadurch verzerrt dargestellt würde.

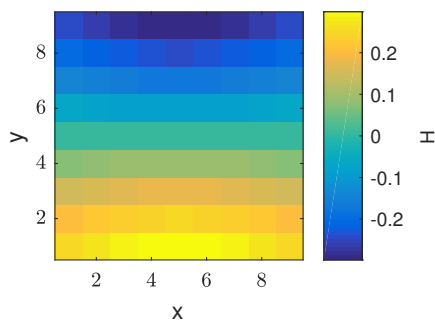
In der Abbildung 3.7(a) ist der Fehler über dem Abstand für eine unterschiedliche Anzahl an Dipolen dargestellt. Mit einem größeren Abstand zwischen Magnet und Messebene nimmt der Fehler ab. Auch mit einer größeren Anzahl an Dipolen wird der Fehler kleiner. Außerdem ist zu erkennen, dass bei einem größeren Abstand die Anzahl der Dipole an Bedeutung verliert. In der Abbildung 3.7(b) ist der Fehler über die Anzahl

an Dipolen zu sehen. Die einzelnen Kurven stehen für die unterschiedlichen Abstände. Der Fehlerverlauf ähnelt dem einer exponentiellen Funktion. Die oberste Kurve mit dem höchsten Fehler steht für den kleinsten Abstand zwischen Magnet und Messebene und die unterste Kurve für den größten Abstand.

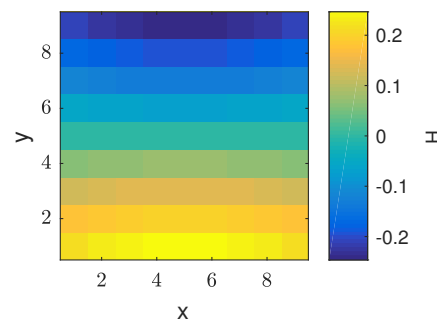
Die Berechnungen wurden mit Matlab-Skript `Stabmagnet_Dipol_Analytisch.m` durchgeführt

### 3.3.2 Kugel

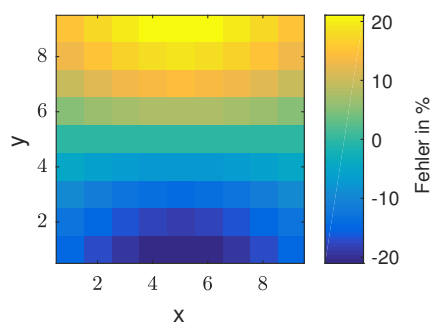
Eine analytische Form zur Berechnung eines Kugelmagneten ist die Berechnung über einen einfachen magnetischen Dipol, wie im Kapitel 2 beschrieben. Dieser hat das Feld eines Magneten mit Kugelgeometrie. Eigentlich bräuchte es keine Simulation, die auf der Überlagerung von Dipolen beruht, da das Magnetfeld einer Kugel über einen Dipol dargestellt werden kann. Dennoch kann hiermit die Simulation von Magnetfeldern mit der Überlagerung von Dipolen verifiziert werden. Folgend werden die zwei unterschiedli-



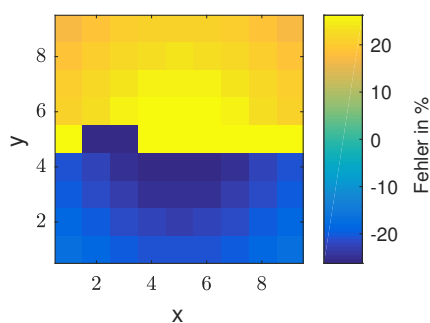
(a) Simulation durch Überlagerung



(b) Simulation eines einzelnen Dipols mit einem magnetischen Moment nach Gleichung 2.24



(c) Absoluter normierter Fehler in Prozent nach Gleichung 3.4



(d) Relativer Fehler in Prozent nach Gleichung 3.6

Abbildung 3.8: Fehlerbetrachtung der verschiedenen Simulationen eines Kugelmagneten. Die Simulation der Überlagerung wurde mit der Funktion `texttttsphere-Meshgrid()` durchgeführt.

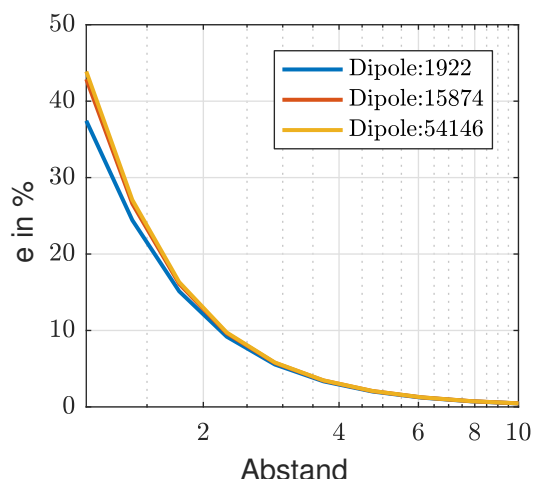


Abbildung 3.9: Relativer durchschnittlicher Fehler mit zunehmendem Abstand zwischen Kugel und Messebene.

chen Formen der Erzeugung des Meshgrids mit der analytischen Berechnung verglichen. Danach wird getestet, wie sich die Ergebnisse mit unterschiedlicher Anzahl an Dipolen verändern und für welche Abstände die Ergebnisse übereinstimmen. Die Simulationen werden für ein Messfeld mit  $9 \times 9$  Pixeln auf einer Fläche von  $1 \times 1$  durchgeführt. In den Abbildungen wird die y-Komponente dargestellt und im Anhand befinden sich die Abbildungen für die x-Komponente des Magnetfeldes. Die Berechnungen wurden mit den Matlab-Skripten `Kugel_Dipol_Analyitsch_1.m` und `Kugel_Dipol_Analyitsch_2.m` durchgeführt, jeweils für das entsprechende „Meshgrid“.

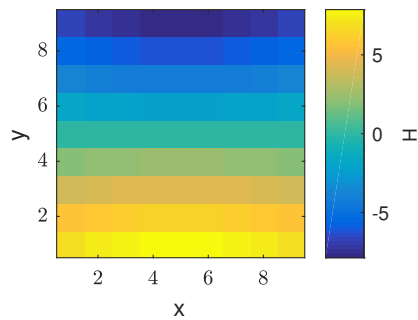
### Kugelkoordinaten-Meshgrid

In den Abbildungen 3.8 sind die Ergebnisse der Simulation mit einem einzelnen Dipol und mit der Simulation mit Kugelkoordinaten dargestellt. Der Magnet befindet sich in einem Abstand von  $d = -1$  zur Messebene, dementsprechend an der Koordinate  $z = -2$ . Der Kugelmagnet wurde mit folgenden Parametern definiert: `Magnet.r = 1`, `Magnet.layer = 8`, `Magnet.phiInc = 16` und `Magnet.thetaInc = 16`.

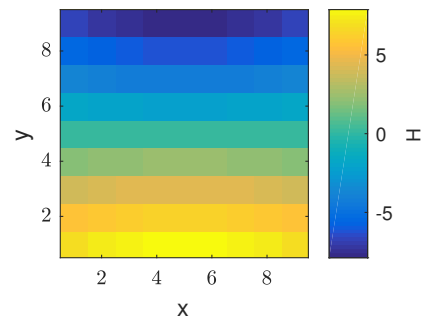
Die Simulationen unterscheiden sich in manchen Bereichen um mehr als 20 % und der durchschnittliche Fehler beträgt  $e_{\text{Mittel}} = 11,75\%$ , dies ist in Abbildung 3.8 zu erkennen. Der maximale relative Fehler beträgt  $e_{\text{rel}} = 26,259\%$  und der durchschnittliche Fehler  $e_{\text{rel,Mittel}} = 21,801\%$ .

In der Abbildung 3.9 ist der relative durchschnittliche Fehler über dem Abstand aufgetragen. Mit zunehmendem Abstand wird der Fehler kleiner. Bei kleinem Abstand ist der Unterschied zwischen den Simulationen hoch. Auch mit einer größeren Anzahl an Dipolen wird der Fehler nicht geringer, sondern größer. Dies liegt vermutlich an der ungleichmäßigen Verteilung der Dipole durch die Kugelkoordinaten. Dadurch entsteht eine nicht gleichmäßige Magnetisierung der Kugel.

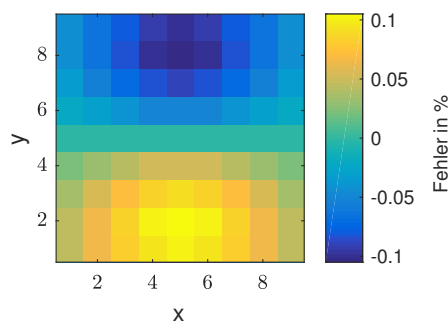




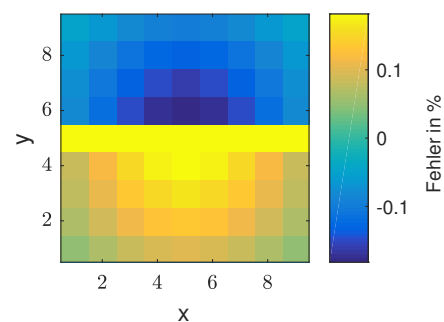
(a) Simulation durch Überlagerung



(b) Simulation eines einzelnen Dipols mit einem magnetischen Moment nach Gleichung 2.24



(c) Absoluter normierter Fehler in Prozent nach Gleichung 3.4



(d) Relativer Fehler in Prozent nach Gleichung 3.6

Abbildung 3.10: Fehlerbetrachtung der verschiedenen Simulationen eines Kugelmagneten. Die Simulation der Überlagerung wurde mit der Funktion `sphereMeshgrid2()` durchgeführt.

### Kugel-Meshgrid

Aufgrund der Ergebnisse der Kugelmagnetensimulation mit Kugelkoordinaten wurde ein weiteres Verfahren implementiert. Bei diesem Verfahren haben die Dipole einen äquidistanten Abstand zueinander und es wurde in Abschnitt 3.2.2 beschrieben. Die Ergebnisse für die y-Komponente sind in den Abbildungen 3.10(a) bis 3.10(d) dargestellt. Im Anhang befinden sich die Ergebnisse der x-Komponente (A.2(a) bis A.2(d)). Der Abstand zwischen Kugel und Messebene beträgt wieder  $d = -1$ . Die Parameter für die Simulation für die Überlagerung sind `Magnet.r = 1` und `Magnet.n = 50`.

Die Unterschiede zwischen den Simulationen sind deutlich geringer. So ist hier der maximale absolute Fehler 0,105% und der absolute normierte durchschnittliche Fehler beträgt  $e_{\text{Mittel}} = 0,056\%$ . Der maximale relative Fehler beträgt  $e_{\text{rel}} = 0,182\%$  und der durchschnittliche relative Fehler  $e_{\text{rel,Mittel}} = 0,109\%$ . Wird die Anzahl der Dipole vergrößert so sinkt auch der Fehler. Dies ist in Abbildung 3.11 zu sehen.

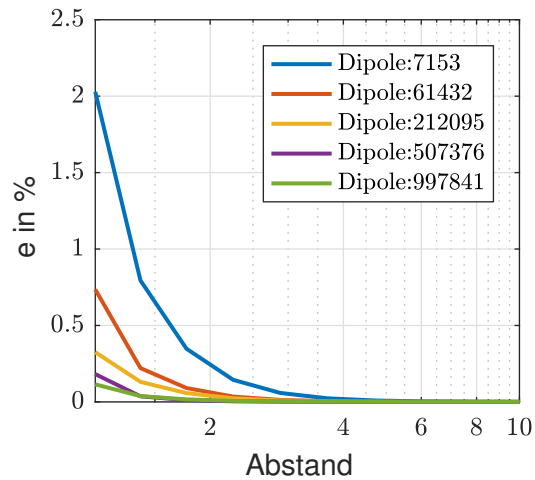


Abbildung 3.11: Relativer durchschnittlicher Fehler mit zunehmendem Abstand zwischen Kugel und Messebene.

### 3.3.3 Zylinder

Für einen Vergleich und zur Verifikation der Simulation durch Überlagerung für einen zylindrischen Magneten, wurden im Grundlagenkapitel 2.1.2 die analytischen Gleichungen 2.51 und 2.52 hergeleitet. Diese Gleichungen beinhalten ein Doppelintegral, können aber in Matlab mit der `integral2()`-Funktion gelöst werden. Nach der numerischen Berechnung des Integrals, müssen die Ergebnisse für das  $\vec{H}$ -Feld von Zylinderkoordinaten in kartesische Koordinaten überführt werden. Die Simulationen wurden mit folgenden Parametern durchgeführt: Magnetisierung in z-Richtung  $\vec{M} = M_0 \vec{e}_z = 1$ , Magnetabmessungen  $R = 1$  und  $h = 1$ , Messfeld  $9 \times 9$  Messpunkte, Abmessungen  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$  und die Messebene befindet sich bei  $z = -2$ . Die Überlagerungssimulation wurde mit `Magnet.n = 50` durchgeführt das entspricht 93800 Dipolen. Das magnetische Moment wurde mit der Gleichung 3.3 berechnet. Zur Fehlerberechnung wurden die Gleichung 3.4 bis 3.5 genutzt.

In den Abbildungen 3.12(a) bis 3.12(d) sind die Felder und die Fehler für die x-Komponente abgebildet. Die Abbildungen für die y-Komponente befinden sich im Anhang (A.3(a) bis A.3(d)). Der maximale absolute normierte Fehler beträgt 0,549% und der durchschnittliche absolute Fehler  $e_{\text{Mittel}} = 0,154\%$ . Der maximale relative Fehler beträgt  $e_{\text{rel}} = 0,722\%$  und der durchschnittliche Fehler  $e_{\text{rel,Mittel}} = 0,244\%$ . Wird die Anzahl der Dipole vergrößert, so sinkt auch der Fehler.

Mit der Funktion `cylindricalMeshgrid()`, in der das „Meshgrid“ mit Zylinderkoordinaten erzeugt wird, sind die Fehler höher. Hier wird wohl auch durch das Verfahren eine inhomogene Magnetisierung erzeugt.

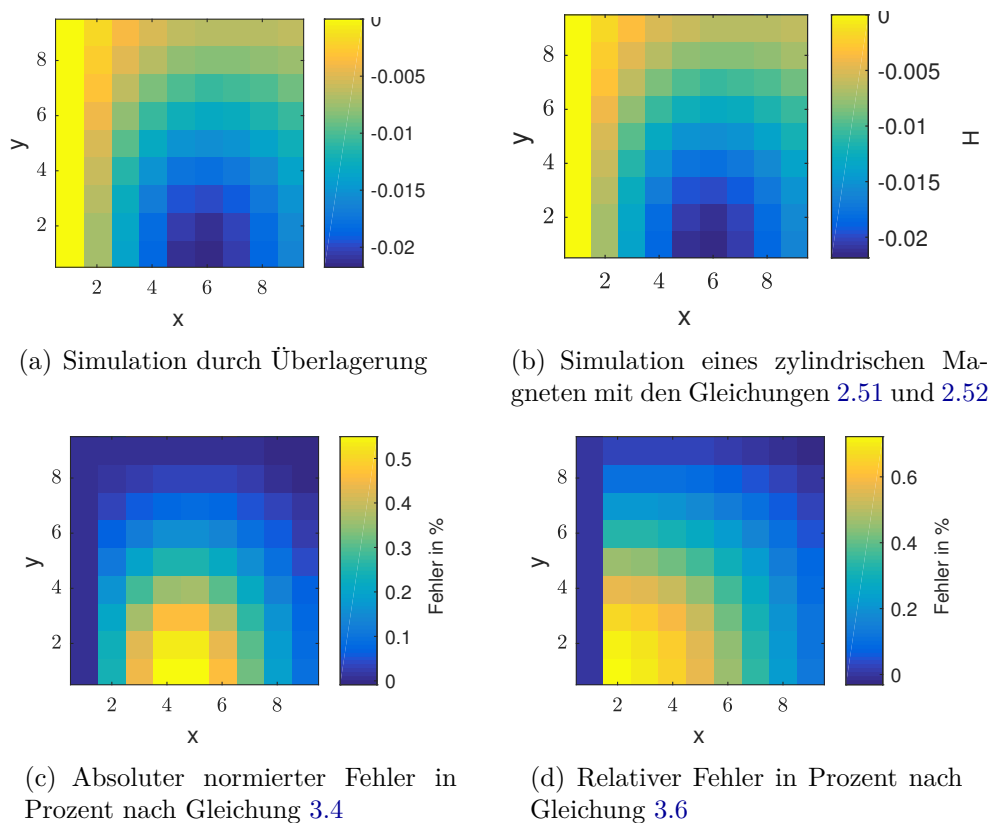


Abbildung 3.12: Fehlerbetrachtung der verschiedenen Simulationen eines zylindrischen Magneten. Die Simulation der Überlagerung wurde mit der Funktion `cylindricalMeshgrid2()` durchgeführt.

## 4 Messtechnische Datenerfassung von Magnetfeldern

In diesem Kapitel wird ein Verfahren für die Messung der magnetischen Feldstärke  $\vec{H}$  von Permanentmagneten beschrieben. Mit den Messungen sollen die Simulationsergebnisse verifiziert werden. Die Messungen werden mit dem Gaussmeter FH55 durchgeführt, danach sollen die Messungen mit einem Sensor-Array wiederholt werden.

An dem Gaussmeter können zwei verschiedene Messsonden angeschlossen. Beide beruhen auf dem Hall-Effekt. Sie unterscheiden sich in der Form und der Anwendung. In Abbildung 4.1 und 4.2 sind die beiden Sondenform dargestellt. Für die Messung wurde aufgrund ihrer zylindrischen Form die Axialsonde verwendet. Die Messsonden können das Magnetfeld in einer Richtung messen.

### 4.1 Aufbau der Messanordnung

Die Messanordnungen sind im Wesentlichen die selben, unterscheiden sich aber in der Herstellung. Der erste Aufbau wurde manuell gefertigt (bohren der Löcher an einer Standbohrmaschine), der zweite wurde mit FreeCad konstruiert und 3D gedruckt. FreeCad ist eine freie Software für die Konstruktion von Bauteilen.

Die erste Messanordnung besteht aus einer Holzplatte mit den Maßen 110 mm × 100 mm. Die Holzplatte hat Sackbohrungen in einem Abstand von 10 mm über die gesamte Platte. In diesen Bohrungen kann die Messsonde des Gaussmeters platziert werden. Die Bohrungen haben eine definierte Tiefe von 9 mm. In der Abbildung 4.3(a) ist die

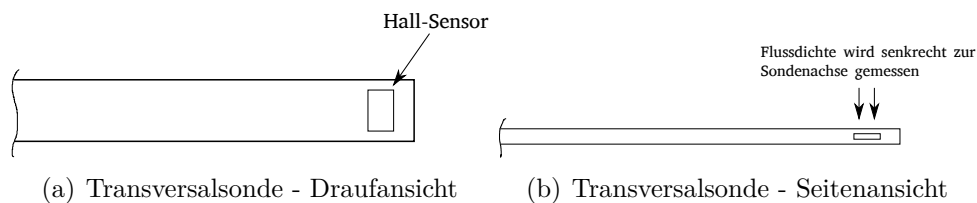


Abbildung 4.1: Darstellung der Transversalsonde des Gaussmeters.

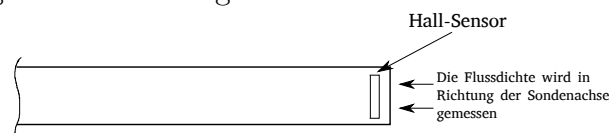


Abbildung 4.2: Darstellung der Axialsonde des Gaussmeters - Draufsicht.

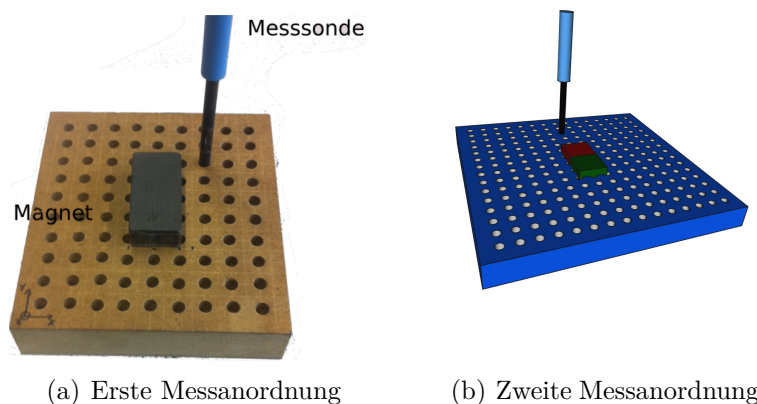


Abbildung 4.3: Darstellung der Messanordnungen mit Magnet und Messsonde.

Messplatte mit der Messsonde und einem Permanentmagneten dargestellt. Für eine vollständige Messung muss die Messsonde in jeder Bohrung platziert werden und der Wert vom Gaussmeter muss notiert werden.

Die zweite Messanordnung wurde 3D-gedrukt. Diese hat die Maße  $160\text{ mm} \times 160\text{ mm}$ . Die Tiefe der Bohrungen ist  $15\text{ mm}$ . In der Messanordnung liegt der Magnet nicht auf der Oberfläche, sondern etwas eingelassen in dem Messblock, um diesen genauer zu platzieren. Dies ist in Abbildung 4.3(b) dargestellt. Mit der zweiten Messanordnung wird eine erhöhte Messgenauigkeit erhofft, da die Fertigungstoleranzen geringer sind. Außerdem hat der Magnet eine definierte Position und es können Aufnahmen für verschiedene Magnetformen konstruiert werden.

## 4.2 Ergebnisse der Messungen und Vergleich mit der Simulation

Die Messergebnisse sind in Excel-Tabellen hinterlegt, jeweils mit einer kurzen Versuchsbeschreibung. Die Messdaten können in Matlab importiert werden um diese mit den simulierten Ergebnissen zu vergleichen oder um die Ergebnisse zu visualisieren. Im Folgenden werden die Ergebnisse der zwei Messanordnungen von Magneten mit unterschiedlichen Formen dargestellt und mit den Simulationsergebnissen verglichen. Das erzeugte Magnetfeld eines Permanentmagneten wird durch seine Größe, sein Material und die Stärke der Magnetisierung charakterisiert. In der Simulation wird die Stärke des Magneten durch das magnetische Moment  $\vec{\mu}$  angegeben. Um beide Ergebnisse vergleichen zu können muss das magnetische Moment  $\vec{\mu}$  an das des Permanentmagnet angepasst werden. Dazu kann eine Fehlerberechnung durchgeführt werden, die die Summe der relativen Fehler aller Werte bildet und daraus einen Faktor  $k$  berechnet bei dem der Fehler

minimal wird. Der Faktor  $k$  kann dann als das magnetische Moment  $\bar{\mu}$  angenommen werden. In der Dipol-Gleichung hat das magnetische Moment  $\bar{\mu}$  einen linear verstärkenden Einfluss auf das Feld. Die Fehlerberechnung wird folgend durchgeführt:

$$e = \sum \left| \frac{\text{Messwerte}_i - \text{Simulationswerte}_i \cdot k}{|\text{Messwerte}|} \right| \quad (4.1)$$

Ziel ist, den Faktor  $k$  zu bestimmen, sodass der Fehler  $e$  minimal wird. Dies wurde in Matlab mit der Funktion `fminsearch()` gelöst. Der Betrag wird gebildet damit sich positive und negative Fehler nicht gegenseitig aufheben.

Zudem kann auch die Anzahl der simulierten Dipole verändert werden, um Messungen und Simulation anzugleichen.

### 4.2.1 Ergebnisse mit der ersten Messanordnung

Nachkommend werden die Ergebnisse der Messungen und der Vergleich mit der Simulation für einen Stabmagneten in zwei unterschiedlichen Positionen dargestellt. In der Abbildung 4.4 ist das Simulationsergebnis und die Messung für den Stabmagneten mit den Abmessungen  $40 \text{ mm} \times 20 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$  und ist ein Ferritmagnet mit der Magnetisierung Y35. Der Magnet liegt mittig und ist in den Abbildungen als weiße Fläche dargestellt. Es werden jeweils das simulierte Feld und das gemessene Feld dargestellt und sowohl der Unterschied zwischen diesen mit zwei Fehlerberechnungen. Diese gleichen denen aus dem Kapitel 3.3.1. Anstatt des analytischen Felds wird das gemessene Feld zur Berechnung verwendet. Zudem wird in den Abbildungen der Fehlerbetrag dargestellt. Dadurch geht zwar die Information verloren in welcher Richtung der Fehler auftritt, es wird aber der Fehlerbereich eingeschränkt und damit lassen sich die Fehler mit ihrem Farbverlauf besser darstellen.

Die Berechnung der Fehler und die Visualisierung wurde mit dem Matlab-Skript `MagBlock.m` durchgeführt. Dafür müssen in dem Skript die Variablen an die Messungen angepasst werden. In dem Ordner „Messungen“ liegen die Daten der Messungen und die Parameter für das Matlab-Skript mit denen die Ergebnisse erzielt wurden.

#### Erste Position

Der Nordpol des Magneten zeigt in positive z-Richtung, wie in Abbildung 4.3(a) dargestellt. Für die Simulation wurden  $200 \times 100 \times 50$  Dipole verwendet. Das magnetische Moment für einen Dipol beträgt  $\mu_z = 2,8238 \cdot 10^{-6} \text{ Am}^2$ . Die Messdaten sind in der Datei `18_01_2017_Messung_Quader_4_2_1_Messung1.mat` gespeichert.

In den Abbildungen 4.4 sind die Ergebnisse der Simulation und der Messung dargestellt. Es sind Unterschiede in den Farbverläufen der Messungen und Simulation zu erkennen. In den Abbildungen 4.4(c) und 4.4(d) sind die Fehler dargestellt. In der Abbildung 4.4(c) ist der normierte absolute Fehler zu sehen. In dieser Darstellung sind die Unterschiede der Farbverläufe zu erkennen. So beträgt der mittlere Fehler  $e_{\text{Mittel}} = 2,48 \%$

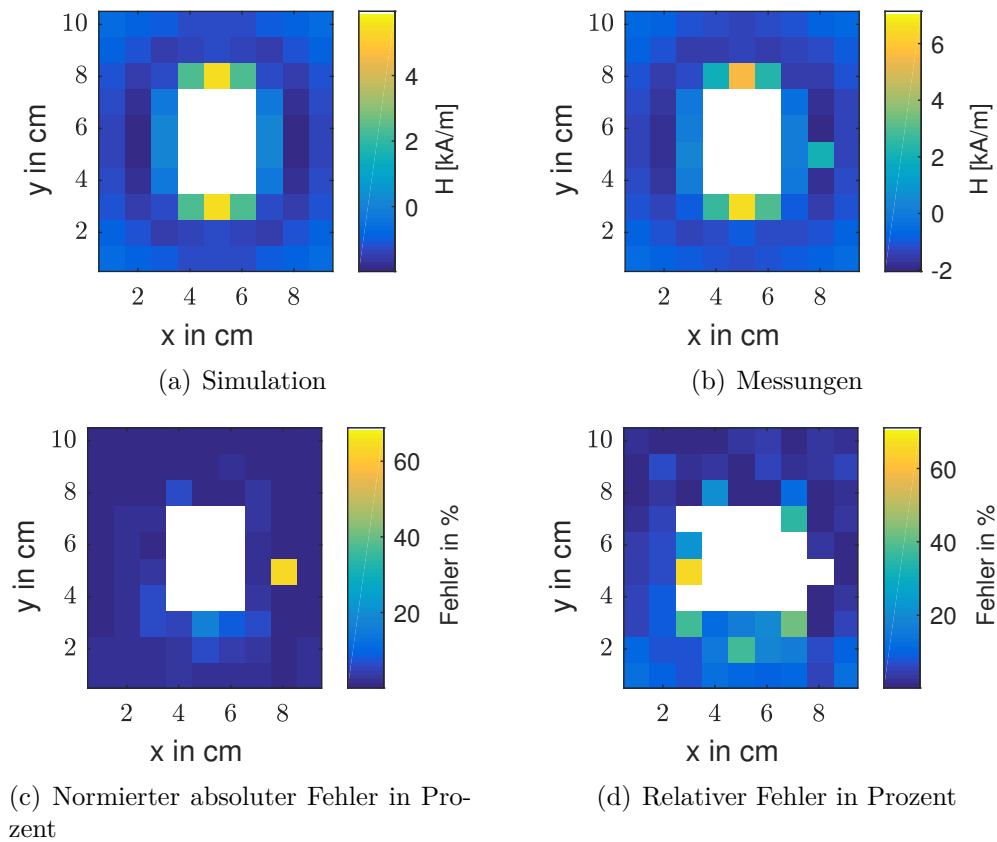


Abbildung 4.4: Simulation und Messergebnisse für die erste Messanordnung. Der Nordpol des Magneten zeigt in positive  $z$ -Richtung. Der Magnet hat eine Abmessung von  $40\text{ mm} \times 20\text{ mm} \times 10\text{ mm}$ . Außerdem sind der absolute normierte Fehler und der relative Fehler dargestellt. Simulation mit  $200 \times 100 \times 50$  Dipolen.

und der maximale Fehler  $e_{\max} = 62,56\%$ . Dieser Fehler ist in der Darstellung der gelbe Quadrant und vermutlich ein Messfehler, da dieser Wert auch in dem Bild 4.4(b) hervorsteht und von den umliegenden Werten abweicht. Der relative Fehler ist schwierig zu beurteilen. Die Ergebnisse sind zum Teil nahe Null, dadurch können schon geringe Abweichungen zu hohen relativen Fehlern führen. Dies ist insbesondere an den Messpositionen nah am Magnet zuerkennen. Hier ist der relative Fehler zum Teil größer als 100%. In der Abbildung 4.4(d) sind daher Fehler über 100% weiß gefärbt, wie auch der Magnet. Abgesehen von den deutlich hohen Fehlern in der Nähe des Magneten, ist ein Unterschied der Fehler im oberen Bereich also  $y > 8\text{ cm}$  zum unteren Bereich  $y < 3\text{ cm}$  zu erkennen. Im unteren Bereich liegen die relativen Fehler zwischen 10% und 20%. Im oberen ist der Fehler zwischen 0% und 7%. Dieser Fehler entsteht durch die Asymmetrie des gemessenen Magnetfeldes. Dies kann zum einen an einer fehlerhaften Positionierung des Magneten liegen oder an einer inhomogenen Magnetisierung des Magneten.

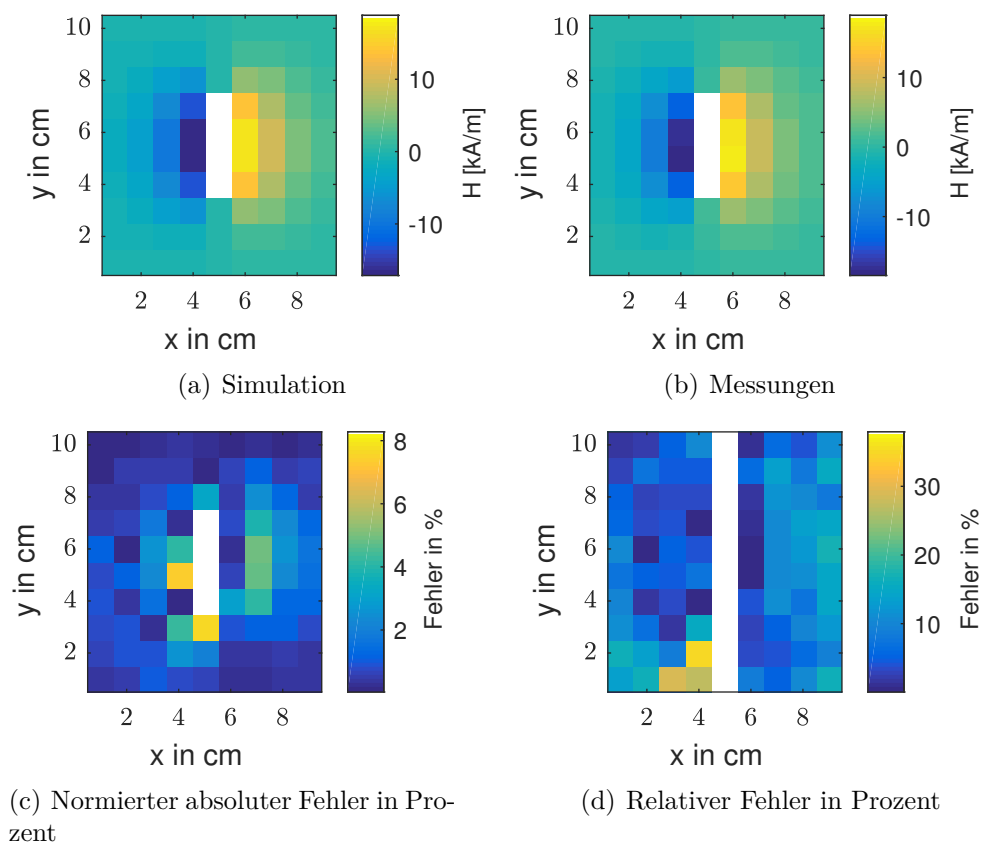


Abbildung 4.5: Simulation und Messergebnisse für die erste Messanordnung eines Stabmagneten. Der Nordpol des Magneten zeigt in negative x-Richtung. Der Magnet hat eine Abmessung  $40\text{ mm} \times 20\text{ mm} \times 10\text{ mm}$ . Außerdem sind der absolute normierte Fehler und der relative Fehler dargestellt. Simulation mit  $200 \times 100 \times 50$ .

## Zweite Position

In den Abbildungen 4.5 sind die Simulation und die Messwerte für denselben Magneten dargestellt, dessen Nordpol bei dieser Messung in Richtung negativer x-Achse zeigt. Für das magnetische Moment wurde der Wert  $\mu_z = 3,4835 \cdot 10^{-6} \text{ Am}^2$  berechnet. Die Messdaten sind in der Datei 18\_01\_2017\_Messung\_Quader\_4\_2\_1\_Messung3.mat gespeichert.

Zu erkennen sind keine großen Unterschiede der Farbverläufe der Simulation der Messergebnisse, diese sind in den Abbildungen 4.5(a) und 4.5(b) dargestellt. Bei den Fehlerberechnung sind aber durchaus Unterschiede erkennbar. So ist der mittlere normierte absolute Fehler  $e_{\text{Mittel}} = 1,25\%$  und damit geringer als bei der ersten Messanordnung. Der maximale Fehler beträgt  $e_{\text{max}} = 7,52\%$ . Der Verlauf des normierten absoluten Fehlers ist in Abbildung 4.5(c) zu sehen. Beim relativen Fehler sind die Bereiche in der die



Simulationsergebnisse null sind, sowie auch der Magnet weiß eingefärbt. In diesen Fall sind die Bereiche direkt unter und über dem Magneten. Hier sind die Simulationsergebnisse genau null, die Messergebnisse jedoch nicht, sodass hier ein hoher relative Fehler berechnet wird. Der mittlere relative Fehler beträgt  $e_{\text{rel,Mittel}} = 14,66\%$ . Auch hier ist zu erkennen, dass die Fehler nicht symmetrisch zum Magneten sind. Dies kann darauf hindeuten, dass die Fehler durch die Messungenauigkeit entstehen.

## 4.2.2 Ergebnisse mit der zweiten Messanordnung

Mit der zweiten Messanordnung können Magnete mit unterschiedlichen Formen vermessen werden. Es wurden Aufnahmen für einen zylindrischen Magneten und einen Kugelmagneten gefertigt. Diese Aufnahmen können dort platziert werden wo in Abbildung 4.3(b) der Stabmagnet liegt. Der Aufbau für einen Kugelmagneten ist in 4.6 veranschaulicht.

### Kugelmagnet

Bei einem Kugelmagneten ist die Ausrichtung im Messaufbau problematisch. Um Messung und Simulation miteinander vergleichen zu können, muss die Kugel im Messaufbau genau ausgerichtet werden. Das heißt der Nordpol sollte beispielsweise in Richtung der y-Achse zeigen. Die Ausrichtung erfolgte mit vier Messpunkten, die symmetrisch um die Kugel verteilt sind, sodass der Betrag des Werts derselbe sein sollte. Die vier Messpunkte haben zudem die Eigenschaft, dass sie sich schon bei kleinen Verdrehungen der Kugel stark verändern. Eine exakte Ausrichtung konnte dennoch nicht erreicht werden. Es wurden die inneren  $9 \times 9$  Messpunkte gemessen. Die Kugel hat einen Radius  $r_{\text{Kugel}} = 2\text{ cm}$  und ist ein NeoDym-Magnet mit einer Magnetisierung N40. Das N steht für die maximale Temperatur des Magneten und die 40 für die gespeicherte Energie pro Volumen.

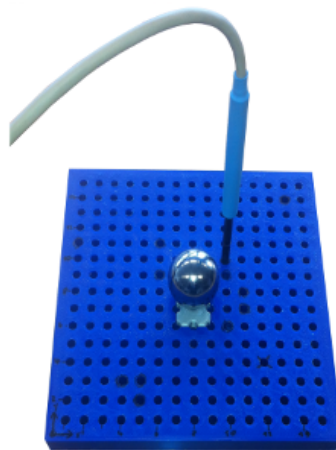


Abbildung 4.6: Messaufbau für einen Kugelmagneten.

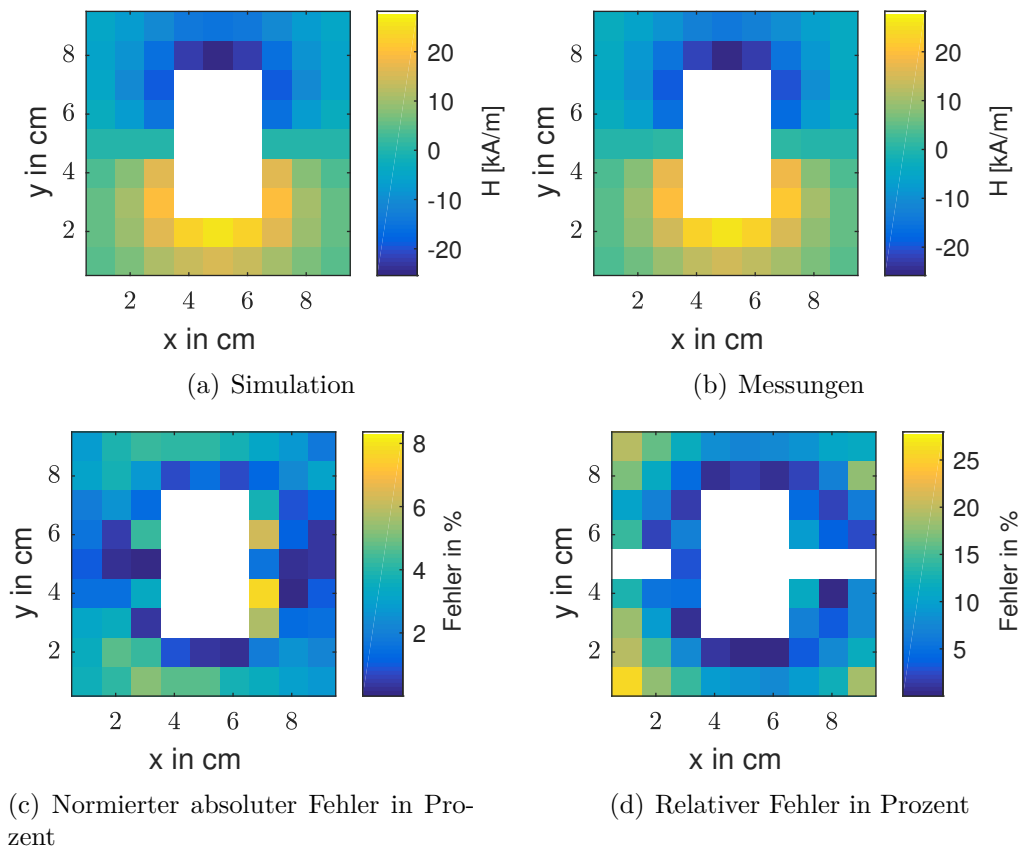


Abbildung 4.7: Simulation und Messergebnisse für einen Kugelmagneten, mit einem Radius  $r = 20$  mm. Der Nordpol zeigt in die positive  $y$ -Richtung. Die Simulation wurde mit `Magnet.n=20` durchgeführt.

Der Nordpol zeigt in die positive  $y$ -Richtung. Zudem liegt die Kugel ca. 13 mm über der Messebene. Die Simulation wurde mit `Magnet.n=20` durchgeführt und hat damit 3544 Dipole.

In den Abbildungen 4.7(a) und 4.7(b) sind die Ergebnisse der Simulation und der Messungen zu sehen. Zwischen den Darstellungen sind keine großen Unterschiede zu erkennen. In den Fehlern ist dennoch zu erkennen, dass Simulation und Messung nicht gleich sind. Dies ist den Abbildungen 4.7(c) und 4.7(d) zu entnehmen. Hier beträgt der mittlere absolute normierte Fehler  $e_{\text{Mittel}} = 2,49\%$  und der maximale absolute Fehler  $e_{\text{max}} = 7,6\%$ . Dieser Fehler liegt an einem der Messpunkte, mit dem die Kugel ausgerichtet wurde. Der relative Fehler ist an den Punkten an dem das Magnetfeld null ist am höchsten. Dieser Bereich wurden wieder aus der Darstellung des relativen Fehlers entfernt, damit das Bild nicht verzerrt wird. Des Weiteren ist der relative Fehler an den Rändern und teilweise in den Ecken am höchsten. Der mittlere relative Fehler beträgt  $e_{\text{Rel,Mittel}} = 8,38\%$ .

Die Berechnungen wurden mit dem Matlab-Skript `MagSphere.m` durchgeführt.



Abbildung 4.8: Aufnahme für einen zylindrischen Magneten mit einem Radius  $r = 5$  mm.

### Zylindrischer Magnet

Für die die Positionierung wurde ein Aufnahme gefertigt, in der der Magnet platziert werden kann. Diese ist in Abbildung 4.8 zu sehen. Der Magnet hat einen Radius  $r_{\text{zyl}} = 5$  mm und eine Höhe von  $h_{\text{zyl}} = 5$  mm. Der Nordpol zeigt bei der Messung in negative  $z$ -Richtung. Für die Messung wurden die inneren  $7 \times 7$  Messpunkte genutzt, weil an den äußeren Punkten die magnetische Feldstärke gering wäre.

In den Abbildungen 4.9(a) und 4.9(b) sind die Ergebnisse der Simulation und der Messung veranschaulicht. Hier sind Unterschiede in den Farbverläufen zu erkennen. Diese werden durch die Fehlerberechnungen verdeutlicht, siehe Abbildung 4.9(c) und 4.9(d). Der normierte absolute Fehler ist hoch an den Messpunkten in der Nähe des Magneten. Die Fehler sind nicht symmetrisch um den Magneten verteilt, da die Messung des Feldes nicht symmetrisch ist. Der mittlere absolute Fehler liegt bei  $e_{\text{Mittel}} = 1,96\%$  und der maximale Fehler bei  $e_{\text{max}} = 14,38\%$ . Der relative Fehler ist zum Teil in den Messpunkten am Magneten hoch an den Punkten, an denen der absolute Fehler dies auch ist. Außerdem weist er hohe Fehler an den äußeren Eckpunkten auf. Hier sind die Werte im Bereich um null. Der mittlere relative Fehler liegt bei  $e_{\text{Mittel}} = 6,21\%$ .

Die Berechnungen wurden mit dem Matlab-Skript `MagCylindrical.m` durchgeführt.

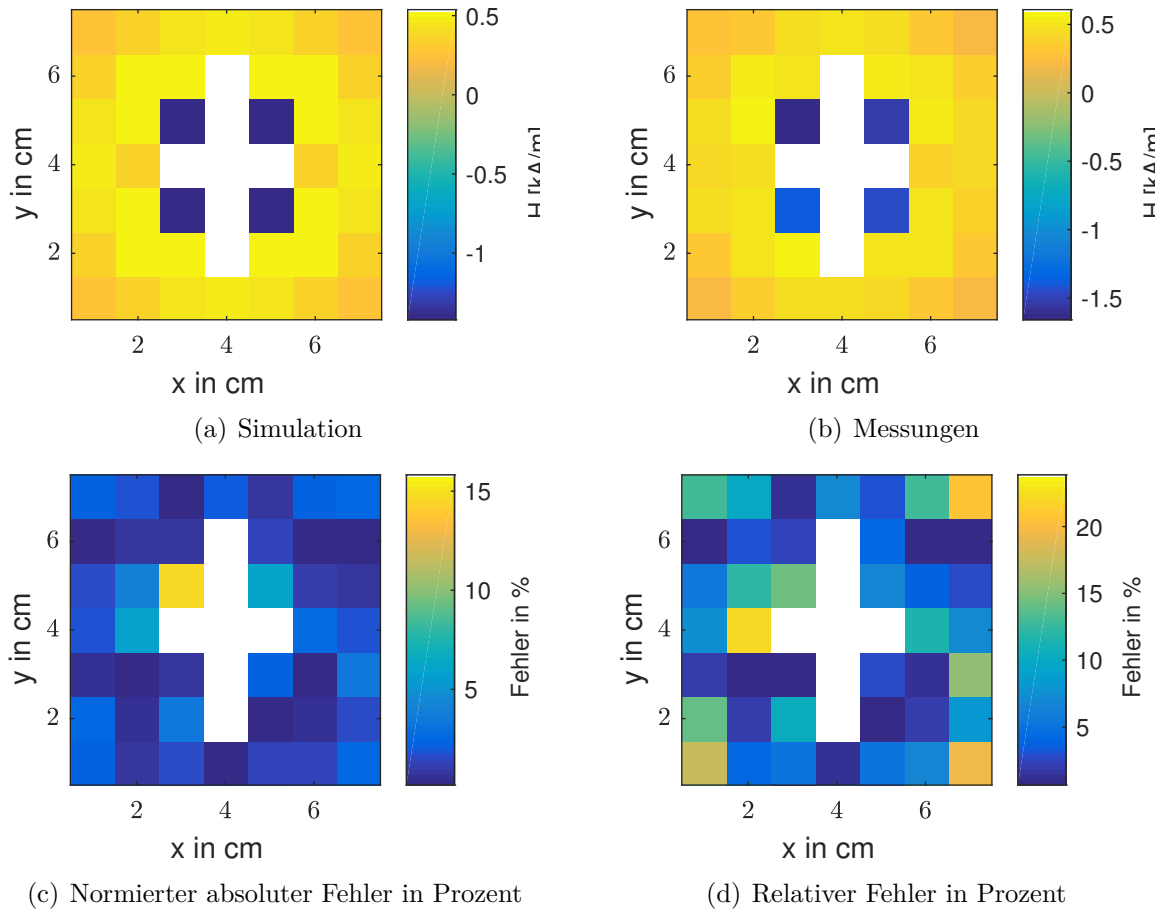


Abbildung 4.9: Simulation und Messergebnisse für einen zylindrischen Magneten, mit den Abmaßen  $r = 5$  mm und  $h = 5$  mm. Der Nordpol des Magneten zeigt in negative  $z$ -Richtung. Die Simulation wurde mit  $n_{\text{Circles}}=16$ ,  $z_{\text{Layer}}=64$  und  $\text{innerCircN}=8$  durchgeführt.

# 5 Algorithmus zur Berechnung der Position und des Winkels

Ein Ziel des Sensor-Array ist es, den Winkel  $\phi$  bei einer Rotation des Magneten um die z-Achse zwischen Magnet und Sensor zu bestimmen.

Deshalb wird in diesem Kapitel ein Algorithmus vorgestellt, der den Winkel und die Position eines Dipols durch Berechnung der partiellen Ableitungen des Magnetfeldes bestimmt. Die Idee ist, dass bei der Berechnung der partiellen Ableitungen konstante Terme wegfallen. Diese konstanten Terme könnten beispielsweise homogene Störfelder darstellen. Die Berechnung der projizierten Position, also die x- und y-Position des Dipols über dem Sensor ist dabei eine Hilfsgröße, um den Winkel berechnen zu können. Es wird im Folgenden zu erst beschrieben wie der Winkel durch Bildung der partiellen Ableitungen des Feldes berechnet werden kann und warum dafür die Position des Dipols benötigt wird. Anschließend wird die Berechnung der Position beschrieben. Im Algorithmus selbst wird zuerst die Position bestimmt und basierend auf dieser der Winkel berechnet.

Der Algorithmus ist für einen magnetischen Dipol ausgelegt, da hierfür die Gleichungen bekannt sind. Darauf folgend wird die Funktionalität des Algorithmus an komplexen Geometrien, wie einem Stabmagnet, hergeleitet.

## 5.1 Berechnung des Winkels

Bei den herkömmlichen Winkelsensoren kann der Winkel zwischen Sensor und Magnet über die Ausgangsspannungen  $U_{Bx}$  und  $U_{By}$  der einzelnen Brückenschaltungen berechnet werden. Dabei wird davon ausgegangen, dass sich die Feldkomponenten  $B_x$  und  $B_y$  ungefähr proportional zu den Ausgangsspannungen verhalten. Es gilt damit folgende Gleichung:

$$\tan \phi = \frac{U_{By}}{U_{Bx}} = \frac{B_y}{B_x} \quad (5.1)$$

Im Folgenden wird, wenn von einem Sensor gesprochen wird, angenommen, dass sich die Ausgangsspannungen proportional zu den Feldkomponenten verhalten. Außerdem werden die Sensoren als punktförmig betrachtet. Der Sensor wird also als ideal angenommen, sodass es keiner Simulation des Sensors benötigt. Die Feldkomponenten  $B_x$  und  $B_y$  der Magnetfeldsimulation stellen die Sensoren dar. Zudem wird als Nullposition eine Positionierung des Magneten mit magnetischem Moment  $\vec{\mu} = \mu_x \vec{e}_x$  angenommen.

Die Berechnung des Winkel aus den Feldkomponenten kann man sich auch anhand

der Dipol-Gleichungen erklären. Die Gleichungen haben bei  $x = y = 0$  folgende Form:

$$B_x = -\frac{\mu_0 \mu_x}{4\pi z^3} \quad (5.2)$$

und

$$B_y = -\frac{\mu_0 \mu_y}{4\pi z^3}. \quad (5.3)$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{B_y}{B_x} = \frac{\mu_y}{\mu_x}. \quad (5.4)$$

Somit ist das Verhältnis der Feldkomponenten gleich dem Verhältnis des magnetischen Moments. So ist das Ziel diese Winkelinformationen auch mit den partiellen Ableitungen zu bestimmen.

### Partielle Ableitung erster Ordnung

Die ersten partiellen Ableitungen der Dipol-Gleichung an  $x = y = 0$  sind folgende:

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial y} = \frac{3\mu_0 \mu_z}{4\pi z^4} \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0 \quad (5.6)$$

Diese Gleichungen haben keine Information über den Winkel.

### Partielle Ableitung zweiter Ordnung

Die zweiten partiellen Ableitungen an der Stelle  $x = y = 0$  sind

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} = \frac{9\mu_0 \mu_x}{4\pi z^5} \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} = \frac{3\mu_0 \mu_x}{4\pi z^5} \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} = \frac{9\mu_0 \mu_y}{4\pi z^5} \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} = \frac{3\mu_0 \mu_y}{4\pi z^5} \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial xy} = \frac{3\mu_0 \mu_y}{4\pi z^5}. \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial xy} = \frac{3\mu_0 \mu_x}{4\pi z^5} \quad (5.12)$$

Mit diesen Gleichungen lässt sich der Winkel mit neun Kombinationen berechnen. Beispielfähig sind nachstehend zwei Kombinationen aus den Gleichungen 5.9 und 5.7 und den Gleichungen 5.10 und 5.11 aufgeführt:

$$\tan \phi = \frac{\frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2}}{\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2}} \quad (5.13)$$

$$\tan \phi = \frac{\frac{\partial^2 B_x}{\partial xy}}{\frac{\partial^2 B_y}{\partial xy}} \quad (5.14)$$

Für die Winkelberechnungen mit den partiellen Ableitungen, aber auch mit der herkömmlichen Methode ist es wichtig, die Position des Dipols über dem Sensor-Array zu kennen. Die dargestellten Gleichungen 5.7-5.12 erlauben die Winkelberechnung unter der Bedingung, dass die Position  $x = y = 0$  ist.

Die Ableitungen werden in Matlab numerisch berechnet. Dafür wurden Matlab-Funktionen für die erste und die zweite Ableitung (`diff1()` und `diff2()`) geschrieben. Die erste Ableitung wird folgend berechnet [1]:

$$f'_k = \frac{1}{12h}(f_{k-2} - 8f_{k-1} + 8f_{k+1} - f_{k+2}) \quad (5.15)$$

Und die zweite Ableitung nach:

$$f''_k = \frac{1}{12h}(-f_{k-2} + 16f_{k-1} - 30f_k + 16f_{k+1} - f_{k+2}) \quad (5.16)$$

## 5.2 Bestimmung der Position des Dipols

Für die Bestimmung der Position können auch die partiellen Ableitungen genutzt werden. An der projizierten Position  $x = y = 0$  des Dipols auf dem Sensor-Array gelten die Gleichungen 5.6 und:

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0 \quad (5.17)$$

Das heißt, es müssen die Nullstellen der Gleichungen 5.6 und 5.17 berechnet werden, um die Position zu bestimmen. Denn dort, wo beide Funktionen null werden, befindet sich die projizierte Dipol-Position. Hiefür wird nachstehend ein Verfahren zur numerischen Bestimmung der Nullstellen vorgestellt.

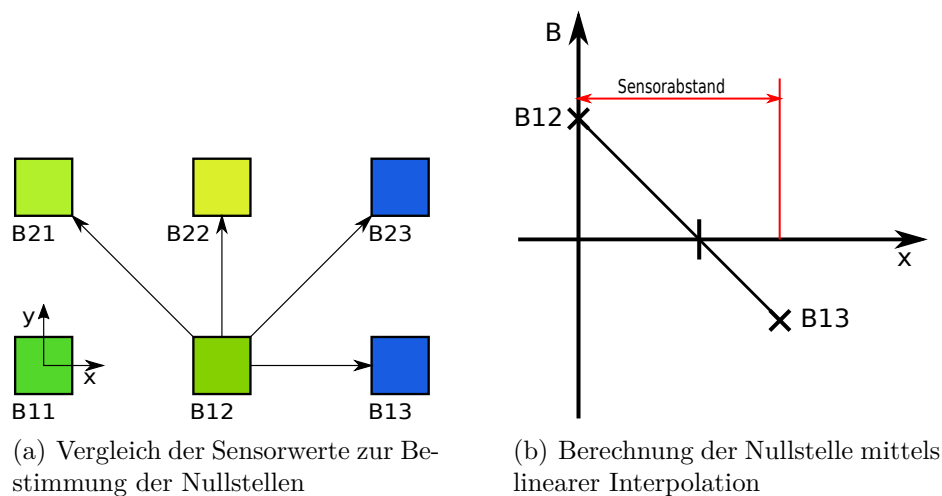


Abbildung 5.1: Bestimmung der Nullstellen. In diesem Fall ist der Sensorwert B13 negativ und B12 positiv, sodass sich zwischen ihnen eine Nullstelle befindet.

### 5.2.1 Berechnung der Nullstellen

Zur Berechnung der Nullstellen werden zwei nebeneinander liegende Sensorwerte miteinander verglichen. Haben die Werte unterschiedliche Vorzeichen, wird davon ausgegangen, dass zwischen den Sensoren ein Nulldurchgang ist. So wird jeder Sensor mit dem von ihm rechts, diagonal rechts über ihm, über ihm und diagonal links über ihm liegenden Sensor verglichen. In Abbildung 5.1(a) ist dies dargestellt. Hat ein Vorzeichenwechsel stattgefunden, wird dies gespeichert. Danach wird zwischen den Sensorpaaren, bei denen ein Vorzeichenwechsel vorliegt, linear interpoliert und die Nullstelle der linearen Funktion bestimmt. Dies ist in 5.1(b) abgebildet.

Die beiden Abbildungen 5.2 und 5.3 sind Beispiele für die Nullstellenverteilung der einzelnen Bedingungen. Die Nullstellen sind Kurvenverläufe und an dem Schnittpunkt der beiden Kurven befindet sich die projizierte Position des Dipols. Der Verlauf der Nullstellenkurven ändert sich bei Verdrehung und Verschiebung des Dipols, jedoch bleibt der Schnittpunkt an der projizierten Position des Dipols. Deshalb ist der nächste Schritt zu Bestimmung der Position die Bestimmung des Schnittpunkts der Nullstellenkurven. Das Verfahren zur Berechnung der Nullstellen ist in `getZero2()` hinterlegt. Übergabeparameter der Funktion ist die jeweilige Bedingung und Ausgabeparameter sind die Koordinaten der Nullstellen.

### 5.2.2 Bestimmung des Schnittpunkts

Die Lage des Schnittpunkts wird numerisch über den Vergleich der einzelnen Werte der Nullstellen ermittelt. Dort wo die Differenz von zwei Daten von den Kurven innerhalb eines Toleranzbereichs liegt, ist der Schnittpunkt. Die Nullstellen haben jeweils eine x-



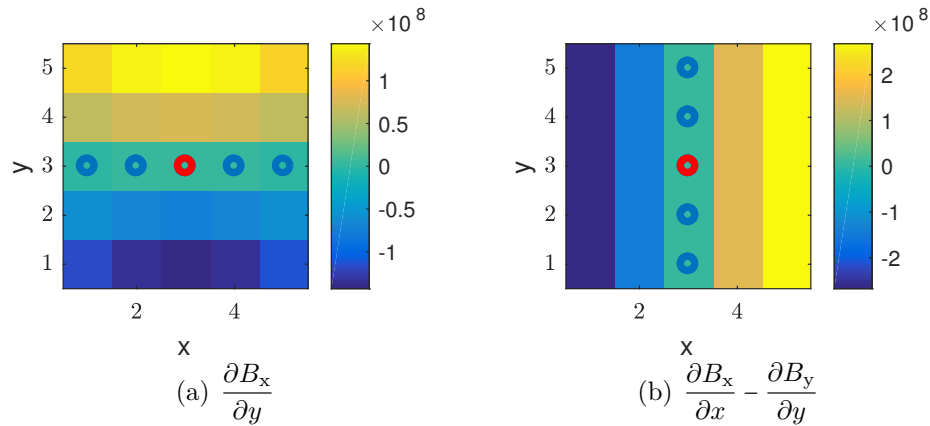


Abbildung 5.2: Beispielverteilung der Nullstellen für ein magnetischen Dipol mit magnetischen Moment in x-Richtung

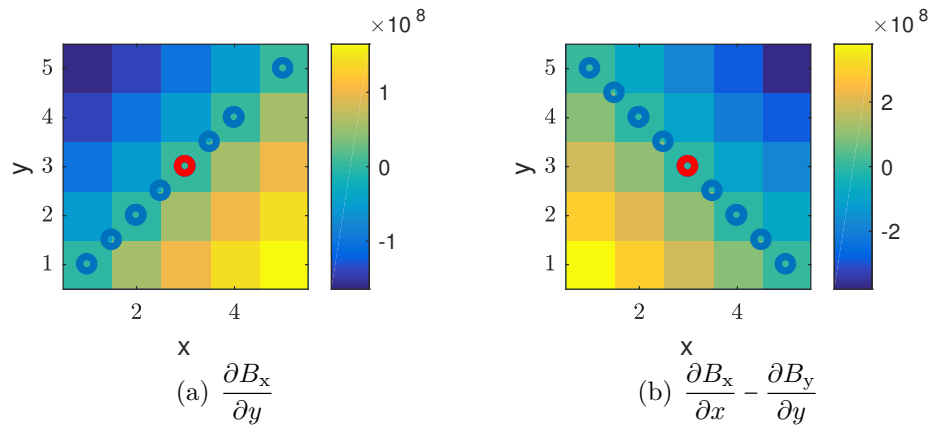


Abbildung 5.3: Beispielverteilung der Nullstellen für ein magnetischen Dipol mit magnetischen Moment das gegenüber der x-Achse um  $45^\circ$  verdreht ist.

und y-Koordinate. Beide müssen jeweils mit einem anderen Wertepaar verglichen werden. Dies beschreiben die folgenden Gleichungen:

$$(|f_x - g_x| + |f_y - g_y|) < \text{Toleranz} \Rightarrow \text{Schnittpunkt} \quad (5.18)$$

$$(|f_x - g_x| + |f_y - g_y|) \geq \text{Toleranz} \Rightarrow \text{kein Schnittpunkt} \quad (5.19)$$

In den Gleichungen 5.18 und 5.19 sind  $f$  und  $g$  die Nullstellenkurven. Jede Koordinate der einen Nullstellenkurve muss mit jeder Koordinate der anderen Nullstellenkurve verglichen werden und ist Gleichung 5.18 erfüllt, wird dies als Schnittpunkt gewertet. Die Wahl der Toleranz hängt von den Rahmenbedingungen der Simulation ab. Deshalb wird in der Funktion der Schnittpunkt mehrmals berechnet und bei jeder Berechnung der Toleranzwert verringert. Dieser wird solange verringert, bis nur noch vier Schnittpunkte vorliegen. Aus allen Wertepaaren, die innerhalb des Toleranzbereichs liegen wird der

Mittelwert gebildet. Mit diesem Wissen wird zwischen den Nullstellen, die am nächsten am vorberechneten Schnittpunkt liegen, linear interpoliert, um den Schnittpunkt genauer zu berechnen. Dies ist in manchen Fällen genauer als nur die Mittelwertbildung. Das Verfahren zur Bestimmung des Schnittpunkts ist in der Funktion `findIntersection()` implementiert. Übergabeparameter sind die Koordinaten der Nullstellen, der Toleranzwert und der Wert um den der Toleranzwert mit jedem Schleifendurchlauf verringert wird. Die Ausgabe der Funktion sind die Koordinaten des Schnittpunktes.

### 5.3 Berechnung des Winkels zwischen Sensoren

Befindet sich der Dipol direkt über einem Sensor, so kann der Winkel nur mit diesem Sensor berechnet werden. Ist der Dipol aber nicht direkt über einem Sensor, sondern zwischen mehreren Sensoren, entstehen Fehler bei der Winkelberechnung nur mit einem Sensor. Bei der herkömmlichen Methode mit einem Sensor wird dieses Problem versucht, mit einem Magneten, der in einem möglichst großem Bereich ein homogenes Magnetfeld erzeugt, zu lösen. Bei einem Sensorarray können mehrere Sensorwerte betrachtet werden und es ist denkbar, wenn der Dipol sich zwischen den Sensoren befindet, den Winkel aus den umliegenden Sensoren zu berechnen. Es werden folgend verschiedene Verfahren zur Berechnung des Winkels mit mehreren Sensoren vorgestellt.

Ein Verfahren ist die Berechnung des Mittelwerts aus den Winkeln der umliegenden Sensoren. Jeder Sensor berechnet den Winkel mit der Gleichung 5.1. Danach wird der Mittelwert von allen Winkeln gebildet. Dies ist in Gleichung 5.20 dargestellt.

$$\phi = \frac{\phi_{S1} + \phi_{S2} + \phi_{S3} + \phi_{S4}}{4} \quad (5.20)$$

Ein weiteres Verfahren ist die Addition der x- und y-Komponenten und danach die Berechnung des Winkels.

$$\phi = \arctan\left(\frac{B_{y,S1} + B_{y,S2} + B_{y,S3} + B_{y,S4}}{B_{x,S1} + B_{x,S2} + B_{x,S3} + B_{x,S4}}\right) \quad (5.21)$$

Die beiden Verfahren beziehen alle vier Sensoren in die Berechnung mit ein, aber die genaue Position wird nicht berücksichtigt. Um diese zu berücksichtigen, könnten die

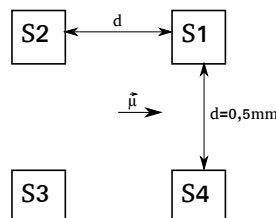


Abbildung 5.4: Sensorpositionen

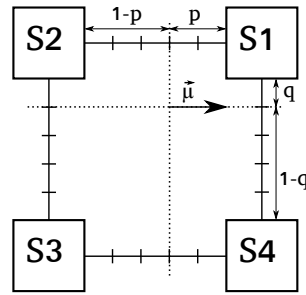


Abbildung 5.5: Sensoren mit Gewichtung.

einzelnen Sensoren im Bezug zu deren Abstand zur projizierten Position gewichtet werden. Dies wird in der Abbildung 5.5 dargestellt. Im Folgenden werden drei Methoden vorgestellt.

**Additive Gewichtung** Mit dieser Methode werden alle vier Sensoren in die Berechnung einbezogen und je nach Abstand wird die Magnetfeldstärke in die Winkelberechnung berücksichtigt. Folgend die Gleichung:

$$\tan \phi = \frac{B_{y,S1}(2-p-q) + B_{y,S2}(1+p-q) + B_{y,S3}(p+q) + B_{y,S4}(1-p+q)}{B_{x,S1}(2-p-q) + B_{x,S2}(1+p-q) + B_{x,S3}(p+q) + B_{x,S4}(1-p+q)} \quad (5.22)$$

Ein Nachteil dieser Methode ist, wenn der Dipol direkt über einem Sensor liegt, wird nicht nur mit diesem Sensor der Winkel berechnet. Zwar hat der Sensor den größten Anteil, aber die beiden neben liegenden Sensoren gehen in die Berechnung mit ein. Liegt der Dipol genau in der Mitte der Sensoren, so geht jeder Sensor mit dem gleichen Anteil in die Berechnung ein. Die Berechnung ist in der Funktion `calcAngleM1()` implementiert, der erste Ausgabeparameter entspricht dem Wert der Berechnung.

**Multiplikative Gewichtung** Um den den Nachteil der additiven Gewichtung, wenn der Dipol sich über einem Sensor befindet, auszugleichen, können die Gewichtungen multipliziert werden. So wird dann nur der Sensor ausgewertet über dem der Dipol liegt. Außerdem sollte die Berechnung auch für den Fall, wenn der Dipol genau zwischen den Sensoren liegt gelten. Folgend die Gleichung:

$$\tan \phi = \frac{B_{y,S1}(1-p) \cdot (1-q) + B_{y,S2}(1+p) \cdot (-q) + B_{y,S3}(p \cdot q) + B_{y,S4}(1-p) \cdot q}{B_{x,S1}(1-p) \cdot (1-q) + B_{x,S2}(1+p) \cdot (-q) + B_{x,S3}(p \cdot q) + B_{x,S4}(1-p) \cdot q} \quad (5.23)$$

Die Berechnung ist auch in der Funktion `calcAngleM1()` implementiert, der zweite Ausgabeparameter entspricht dem Wert der Berechnung.

**Quadranten Gewichtung** Diese Methode unterscheidet sich zu den zwei vorherigen, indem sie den Winkel nur aus drei Sensoren berechnet. Es wird festgestellt, in welchem Quadranten zwischen den Sensoren sich der Dipol befindet und je nach Quadrant wird

ein Hauptsensor festgelegt und zwei Nebensensoren. Dann wird der Winkel mit den folgenden Gleichungen berechnet.

Quadrant 1:

$$\tan\phi = \frac{B_{y,S1}(1-p) \cdot (1-q) + B_{y,S2} \cdot p + B_{y,S4} \cdot q}{B_{x,S1}(1-p) \cdot (1-q) + B_{x,S2} \cdot p + B_{x,S4} \cdot q} \quad (5.24)$$

Quadrant 2:

$$\tan\phi = \frac{B_{y,S2}(1-q) \cdot p + B_{y,S1} \cdot (1-p) + B_{y,S3} \cdot q}{B_{x,S2}(1-q) \cdot p + B_{x,S1} \cdot (1-p) + B_{x,S3} \cdot q} \quad (5.25)$$

Quadrant 3:

$$\tan\phi = \frac{B_{y,S3}(q \cdot p) + B_{y,S2} \cdot (1-q) + B_{y,S4} \cdot (1-p)}{B_{x,S3}(q \cdot p) + B_{x,S2} \cdot (1-q) + B_{x,S4} \cdot (1-p)} \quad (5.26)$$

Quadrant 4:

$$\tan\phi = \frac{B_{y,S4}(1-p) \cdot q + B_{y,S1} \cdot (1-q) + B_{y,S3} \cdot p}{B_{x,S4}(1-p) \cdot q + B_{x,S1} \cdot (1-q) + B_{x,S3} \cdot p} \quad (5.27)$$

Die Berechnung ist in der Funktion `calcAngleM2()` implementiert.

## 5.4 Anwendung des Algorithmus auf komplexe Geometrien

Die Grundlage des Algorithmus ist die Dipol-Gleichung und deren partielle Ableitungen. Die Frage ist, ob diese Gleichungen auch auf einen Quadermagnet übertragen werden können oder für welche Fälle dies nicht gilt. Mit einer Überlegung für einen Quadermagnet aus Dipolen wird dieses Problem verdeutlicht.

Als Modell für ein Quader kann sich Anhand von Dipolen in einer Rechteckanordnung gedacht werden. Dies ist sehr vereinfacht, kann aber einen Einblick geben wie sich die Gleichungen verhalten. In der Abbildung 5.6 ist diese Anordnung in der  $xy$ -Ebene zu sehen. Im Gegensatz zum Dipol hat der Quader eine räumliche Ausdehnung, deshalb soll hier der Mittelpunkt bestimmt werden. Die Gleichungen der vier Dipole werden überlagert. Die Ergebnisse können dann auf Anordnungen mit mehr als vier Dipolen übertragbar sein, solange die Dipole symmetrisch verteilt sind.

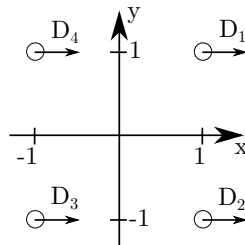


Abbildung 5.6: Dipole in Rechteckanordnung.

**Partielle Ableitung erster Ordnung**

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial y} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{12\mu_z z(z^2 - 3)}{(z^2 + 2)^{7/2}} \quad (5.28)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0 \quad (5.29)$$

Die Gleichungen sind denen von einem einfachen Dipol ähnlich. Die zwei Gleichungen zur Bestimmung der Position können hier auch verwendet werden.

**Partielle Ableitung zweiter Ordnung**

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{12\mu_x(-3z^4 + 18z^2 + 13)}{(z^2 + 2)^{9/2}} \quad (5.30)$$

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{12\mu_x(z^4 - 6z^2 + 19)}{(z^2 + 2)^{9/2}} \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{12\mu_y(-3z^4 + 18z^2 + 13)}{(z^2 + 2)^{9/2}} \quad (5.32)$$

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{12\mu_y(z^4 - 6z^2 + 19)}{(z^2 + 2)^{9/2}} \quad (5.33)$$

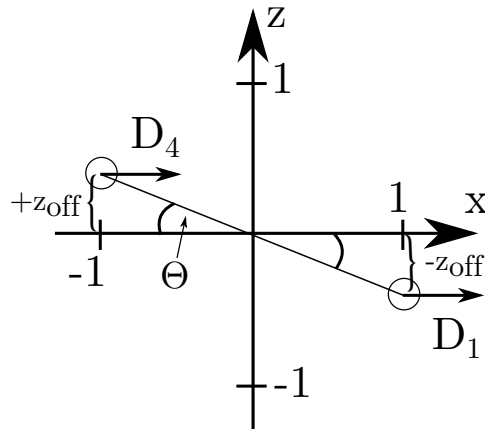
Die Gleichungen für die zweiten Ableitungen haben eine etwas andere Form, dennoch lässt sich hieraus der Winkel berechnen.

$$\tan \phi = \frac{\frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2}}{\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2}} \quad (5.34)$$

Für dieses Beispiel kann die Position und der Winkel mit den Gleichungen wie für einen einzelnen Dipol berechnet werden. Eine weitere Überlegung wäre, wie die Gleichungen für eine Verkippung aussehen und ob sich damit noch der Winkel berechnen lässt. Hierfür kann wieder eine Rechteckanordnung von Dipolen gewählt werden wie in 5.6, diesmal jedoch mit einer Verkippung um die y-Achse. In der xz-Ebene würde sich das Bild wie in 5.7 ergeben. Der Winkel  $\theta$  gibt die Verkippung an. In den Gleichungen kann eine Verkippung eine Verschiebung in  $z$  bedeuten. Bei den unteren Dipolen (D1 und D2) negativ, bei den oberen Dipolen (D3 und D4) positiv. In den Gleichungen würde es beispielhaft für die x-Komponente folgendermaßen aussehen

$$B_{xD1,2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3x(\mu_x x + \mu_y y + \mu_z(z - z_{\text{off}})) - \mu_x(x^2 + y^2 + (z - z_{\text{off}})^2)}{(x^2 + y^2 + (z - z_{\text{off}})^2)^{5/2}} \quad (5.35)$$

$$B_{xD3,4} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3x(\mu_x x + \mu_y y + \mu_z(z + z_{\text{off}})) - \mu_x(x^2 + y^2 + (z + z_{\text{off}})^2)}{(x^2 + y^2 + (z + z_{\text{off}})^2)^{5/2}} \quad (5.36)$$

Abbildung 5.7: Dipolanordnung mit Verkippung um  $\theta$  in der xz-Ebene.

Bildet man die Ableitungen der Gleichungen 5.35 und 5.36, so erhält man nicht die Ausdrücke wie ohne Verkippung. Viele Terme, die sich bei der Anordnung ohne Verkippung gegenseitig aufgehoben haben tun dies mit Verkippung nicht. Folgend ein Auszug für eine Ableitung als Beispiel:

$$\frac{\partial B_x}{\partial y} = -\frac{30\mu_y((z+z_{\text{off}})^2+2)^{7/2} - 30\mu_y((z-z_{\text{off}})^2+2)^{7/2} + \dots}{((z+z_{\text{off}})^2+2)^{7/2}((z-z_{\text{off}})^2+2)^{7/2}} \quad (5.37)$$

Aus der Gleichung 5.37 kann man erkennen, dass die Bedingungen bei einer Verkippung nicht mehr explizit zutreffen. Um die Position berechnen zu können sollte

$$\frac{\partial B_x}{\partial y} = 0$$

sein. Im Wesentlichen ist hier das Verhältnis zwischen dem Abstand  $z$  und der Verkippung  $z_{\text{off}}$  wichtig ob die Gleichung 5.37 ungefähr null wird. Die Größe von  $z_{\text{off}}$  wird auch von dem Abstand der Dipole zur y-Achse bestimmt.

**Allgemeine Herleitung der ersten partiellen Ableitungen** Die Gleichungen 5.6 und 5.17 für die ersten Ableitungen lassen sich auch allgemein für einen symmetrischen homogen magnetisierten Magneten herleiten. Das  $\vec{H}$ -Feld ist allgemein mit der Gleichung 2.36 beschrieben. Damit gilt für die x-Komponente der  $\vec{B}$ -Feldes außerhalb des Magneten:

$$B_x = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \nabla' \cdot \vec{M}(\vec{r}') \frac{x-x'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \quad (5.38)$$

Bildet man die Ableitung dieser Gleichung:

$$\frac{\partial B_x}{\partial y} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \nabla' \cdot \vec{M}(\vec{r}') (x-x') \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \quad (5.39)$$

$$= \frac{3\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \nabla' \cdot \vec{M}(\vec{r}') \frac{(x-x')(y-y')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^5} \quad (5.40)$$

Für  $x = y = 0$  ergibt sich dann:

$$\frac{\partial B_x}{\partial y} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \nabla' \cdot \vec{M}(\vec{r}') \frac{-3x'y'}{(x'^2 + y'^2 + (z - z')^2)^{5/2}} \quad (5.41)$$

Der zweite Faktor des Integranden ist eine ungerade Funktion. Das Integral verschwindet also, wenn  $\nabla' \cdot \vec{M}(\vec{r}')$  symmetrisch um den Punkt  $x = y = 0$  verteilt ist.

Für die Ableitungen  $\partial B_x/\partial x$  und  $\partial B_y/\partial y$  gilt:

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \nabla' \cdot \vec{M}(\vec{r}') \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \frac{-3(x - x')^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} \right) \quad (5.42)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial y} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \nabla' \cdot \vec{M}(\vec{r}') \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \frac{-3(y - y')^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} \right) \quad (5.43)$$

An  $x = y = 0$ :

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \nabla' \cdot \vec{M}(\vec{r}') \left( \frac{1}{(x'^2 + y'^2 + (z - z')^2)^{3/2}} + \frac{-3x'^2}{(x'^2 + y'^2 + (z - z')^2)^{5/2}} \right) \quad (5.44)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial y} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \nabla' \cdot \vec{M}(\vec{r}') \left( \frac{1}{(x'^2 + y'^2 + (z - z')^2)^{3/2}} + \frac{-3y'^2}{(x'^2 + y'^2 + (z - z')^2)^{5/2}} \right) \quad (5.45)$$

Berechnet man nun die Differenz:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial B_x}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial y} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \nabla' \cdot \vec{M}(\vec{r}') \left( \frac{-3x'^2}{(x'^2 + y'^2 + (z - z')^2)^{5/2}} - \frac{-3y'^2}{(x'^2 + y'^2 + (z - z')^2)^{5/2}} \right) \end{aligned} \quad (5.46)$$

$$= \frac{3\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \nabla' \cdot \vec{M}(\vec{r}') \frac{(x'^2 - y'^2)}{(x'^2 + y'^2 + (z - z')^2)^{5/2}} \quad (5.47)$$

Für einen in y-Richtung homogen magnetisierten Rechteckmagneten mit den Maßen  $L_x, L_y, L_z$  gilt:

$$\nabla' \vec{M}(\vec{r}') = M_0 \text{rect}\left(\frac{x}{L_x}\right) \text{rect}\left(\frac{z}{L_z}\right) \left( \delta\left(y + \frac{L_y}{2}\right) - \delta\left(y - \frac{L_y}{2}\right) \right) \quad (5.48)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial y} = \frac{3\mu_0}{4\pi} \int_{-L_x/2}^{L_x/2} dx' \int_{-L_z/2}^{L_z/2} dz' M_0 \frac{(x'^2 - (L_y/2)^2) - (x'^2 - (L_y/2)^2)}{(x'^2 + (L_y/2)^2 + (z - z')^2)^{5/2}} \quad (5.49)$$

$$= \frac{3\mu_0}{4\pi} \int_{-L_x/2}^{L_x/2} dx' \int_{-L_z/2}^{L_z/2} dz' M_0 \frac{0}{(x'^2 + (L_y/2)^2 + (z - z')^2)^{5/2}} = 0 \quad (5.50)$$

Für andere Geometrien kann die Gleichung 5.17 verallgemeinert werden zu:

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} - \alpha \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0 \quad (5.51)$$

Der Formfaktor  $\alpha$  könnte berechnet werden indem man die Integrale in den Gleichungen 5.44 und 5.45 numerisch löst.

## 5.5 Optimierungsverfahren

Eine weitere Methode zur Auswertung des Winkels zwischen Magnet und Sensor bieten Optimierungsverfahren. Dabei werden die Parameter von Ansatzfunktionen dahingehend optimiert, dass der Fehler zwischen den gemessenen (hier simulierten) und den angeglichenen Werten minimiert wird. Anschließend wird mit den angepassten Werten der Funktion der Winkel berechnet. In diesem Abschnitt wird ein Verfahren vorgestellt, welches auf der Idee des ersten Algorithmus basiert, in dem der Winkel über die zweiten Ableitungen berechnet wird. Gleich bleibt die numerische Berechnung der Ableitungen, jedoch werden danach ausgewählte Funktionen mit der Methode der kleinsten Quadrate an die Ableitungen angepasst. Es entfällt zudem die Bestimmung der Position. Im Folgenden die gewählten Ansatzfunktionen:

$$F_{x1}(x, y) = \frac{a_{x1}z^2 + a_{x2}x^2 + a_{x3}xy + a_{x4}x + a_{x5}y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{7/2}} \quad (5.52)$$

$$F_{y2}(x, y) = \frac{a_{y1}z^2 + a_{y2}y^2 + a_{y3}xy + a_{y4}y + a_{y5}x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{7/2}} \quad (5.53)$$

Aus den Gleichungen geht hervor, dass die z-Koordinate der Messebene/Sensor-Array benötigt wird. Im Folgenden wird angenommen, dass diese bekannt ist. Weiterhin ist zu testen inwieweit der Algorithmus anfällig auf Fehllagen der z-Koordinate ist. Es könnten auch andere Funktionen gewählt werden, wie beispielsweise:

$$F_{x2}(x, y) = \frac{a_{x1}z^2 + a_{x2}x^2 + a_{x3}xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{7/2}} + \frac{a_{x4}x^4 + a_{x5}x^3y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{9/2}} \quad (5.54)$$

$$F_{y2}(x, y) = \frac{a_{y1}z^2 + a_{y2}y^2 + a_{y3}xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{7/2}} + \frac{a_{y4}y^4 + a_{y5}y^3x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{9/2}} \quad (5.55)$$

Diese Ansatzfunktionen sind angelehnt an die Gleichungen der Ableitungen der Dipol-Gleichung. Angepasst werden die Ableitungen  $\partial^2 B_x / \partial x^2$  und  $\partial^2 B_y / \partial y^2$ , da mit diesen der Winkel berechnet werden kann (für  $x = y = 0$ ). Für die Ansatzfunktionen 5.52 und 5.53 ergibt sich dann:

$$\tan \phi = \frac{F_{y2}}{F_{x2}} = \frac{a_{y1}}{a_{x1}} \quad (5.56)$$

Es ist möglich den Winkel mit den Koeffizienten  $a_{x1}$  und  $a_{y1}$  zu berechnen. In Matlab kann die Methode der kleinsten Quadrate durch eine Matrixmultiplikation realisiert werden [4]. Im Quellcode 5.1 ist ein Auszug der Implementierung des Verfahrens dargestellt.



## Quellcode 5.1: Methode der kleinsten Quadrate.

```
1      % Methode der kleinsten Quadrate
      denomX7 = (x.^2+y.^2+Z^2).^(7/2);
3      % Ansatzfunktion
      AX = [(ones(length(x),1)*(Z)^2) (x.^2) (x.*y)];
5      AX = AX./denomX7
      % Berechnen der Koeffizienten
7      aX = (AX'*AX)^(-1) * AX' * MagField.d2Bxdx(:);
```

## 6 Tests zu den Anforderungen an den Algorithmus

In diesem Kapitel wird der Algorithmus, der in Kapitel 5 beschrieben wurde, unter verschiedenen Bedingungen getestet.

Darunter fallen die Fehlerempfindlichkeit durch Fehllagen des Magneten, wie eine Positionierung des Magneten nicht direkt über dem Mittelpunkt des Sensor-Array und eine Verkippung des Magneten. Danach wird die Anfälligkeit des Algorithmus auf magnetische Störfelder überprüft. Die Störfelder werden durch eine Simulation von einem Magneten erzeugt, der sich in einer größeren Entfernung zum Sensor und dem Nutzmagneten befindet. Hier sollte die Methode mit den partiellen Ableitungen, insbesondere bei homogene Störfeldern, gute Ergebnisse erzielen. Danach wird die Genauigkeit des Algorithmus bei einer Begrenzung der Auflösung der Simulationswerte getestet. Hierbei wird der Analog-Digital-Wandler nachgebildet. Außerdem wird der Algorithmus bezogen auf Rauschanfälligkeit getestet. Die Kriterien werden an einem magnetischen Dipol überprüft, für diesen der Algorithmus ausgelegt ist.

Bei der Fehlerberechnung werden unter anderem der maximale und der mittlere absolute Fehler betrachtet und dies für eine  $180^\circ$  Drehung des Dipols. Zudem wird die  $180^\circ$  Drehung für unterschiedliche Abstände wiederholt. Außerdem wird der Fehler der Positionsberechnung betrachtet. Dies ist wichtig um die Fehlerursache der Winkelberechnung einschätzen zu können.

Für die Simulation wird eine Sensorgröße von  $2\text{ mm} \times 2\text{ mm}$  mit  $9 \times 9$  Sensoren gewählt. Die Abstände des Magneten variieren je nach Testfall. Die Stärke des Magnetfeldes wird an die Mindestanforderungen für einen Sensor (KMZ60) angepasst. Im Datenblatt ist eine Feldstärke  $\vec{H}$  von mindestens  $20\text{ kA/m}$  angegeben [7]. Bei einem Dipol wird die Feldstärke mit dem magnetischen Moment bestimmt, dies beträgt mindestens  $|\vec{\mu}| = 5\text{ Am}^2$  um die Anforderungen zu erfüllen.

Die Tests wurden mit dem Matlab-Skript `Test_evaluation.m` ausgeführt.

### 6.1 Fehllagen des Magneten

Es wird zwischen Fehllagen der Rotation und der Translation unterschieden. Eine korrekte Positionierung ist gegeben, wenn sich der Dipol über dem Mittelpunkt des Sensor-Arrays befindet. Bei einem  $9 \times 9$  Array ist der Mittelpunkt dadurch genau über einem Sensor. Bei einer Fehllage der Position wird zwischen den Fehllagen, Dipol befindet sich über dem Sensor-Array und Dipol befindet sich nicht über dem Sensor-Array, unterschieden. Für letztere ist der Algorithmus nicht ausgelegt, da die Position des Dipols bekannt

Tabelle 6.1: Darstellung der Fehler für eine  $180^\circ$  Drehung eines Dipols bei  $x = y = 0$ , ohne Verkippung. AG = Additive Gewichtung, MG = Multiplikative Gewichtung, QG = Quadranten-Gewichtung.

Abstand	Methode	Mittelwert absoluter Fehler	Maximaler absoluter Fehler
2 mm	AG	0,0015°	0,0023°
	MG	0,0022°	0,0034°
	QG	0,0161°	0,0252°
4 mm	AG	0,0002°	0,0004°
	MG	0,0004°	0,0007°
	QG	0,0055°	0,0086°
6 mm	AG	$\approx 0^\circ$	0,0001°
	MG	0,0001°	0,0001°
	QG	0,0025°	0,0039°

Tabelle 6.2: Darstellung der Fehler für die Positionsberechnung für eine  $180^\circ$  Drehung eines Dipols bei  $x = y = 0$ , ohne Verkippung.

Abstand	Relativer Fehler der Positionsberechnung in x	Relativer Fehler der Positionsberechnung in y
2 mm	-0,0187 %	-0,0098 %
4 mm	-0,0052 %	-0,0105 %
6 mm	-0,0023 %	-0,0046 %

sein muss und die Position nur berechnet werden kann, wenn sich der Dipol über dem Sensor befindet. Außerdem fallen bei der Bildung der numerischen Ableitung jeweils die äußeren zwei Sensorwerte weg. Auch dies beschränkt die maximale zulässige Fehllage des Algorithmus. Bei Fehllagen der Rotation ist es abhängig von der Magnetform um wie viele Achsen dieser rotieren kann, damit sich das Magnetfeld ändert. Bei einem Dipol sind es zwei Achsen.

In diesem Abschnitt werden zudem auch die unterschiedlichen Winkelberechnungsverfahren miteinander verglichen. Dies sind die Verfahren die in Abschnitt 5.3 beschrieben wurden.

Es werden Fehllagen in x- und y-Richtung untersucht. Als erstes sind die Ergebnisse ohne Fehllagen in der Tabelle 6.1 und 6.2 dargestellt. Der Mittelwert des absoluten Fehlers sowie der maximale Fehler sind wie erwartet klein. Auch der Fehler der Positionsberechnung ist verschwindet gering. Für die weiteren Testfälle befinden sich die Ergebnisse in tabellarischer Form im Anhang.

**Fehllage der Translation** Da es nicht möglich ist, alle Fehllagen zu testen, wird folgend eine Fehllage betrachtet. Der Dipol ist um  $-0,23$  mm in x-Richtung aus dem Mittelpunkt verschoben und um  $-0,41$  mm in y-Richtung. Für diese Verschiebungen sind die Ergebnisse in der Tabelle B.1 zu sehen und für die Positionsberechnung in Tabelle B.2. Hier ist ein Unterschied zwischen den einzelnen Berechnungsverfahren zu erkennen. Bei allen Abständen ist der Fehler bei der additiven Gewichtung am geringsten. Ein deutlicher Sprung ist zwischen den Abständen  $z = 2$  mm und  $z = 4$  mm festzustellen. Bei der MG und QG sinkt der maximale absolute Fehler um mehr als  $2^\circ$ . Der Grund für den relativ hohen Fehler bei einem Abstand  $z = 2$  mm kann auch die fehlerhafte Berechnung der Position sein. Hier liegt der relative Fehler für die y-Position bei  $-3,3304\%$ , wird aber, wie auch die Fehler der Winkelberechnung, mit zunehmendem Abstand geringer.

**Fehllage der Rotation** Bei einem Dipol ist eine Rotationsfehllage nur um eine Achse möglich. In der Tabellen B.3 und B.4 sind die Fehler für eine Fehllage der Rotation um  $2^\circ$  dargestellt. Hier hat die Methode mit der multiplikativen Gewichtung für alle Abstände die niedrigsten Fehler wobei kein großer Unterschied zur Quadranten-Methode besteht. Die maximalen und mittleren absoluten Fehler sind nahe null. Die Fehler von genau  $0^\circ$  kommen durch Rundung zustande. Das additive Verfahren hat die höchsten Fehler. Eine mögliche Ursache für die hohen Fehler ist, dass bei diesem Testfall der Dipol genau über einem Sensor sich befindet. Jedoch wird durch die Berechnungsform dann nicht nur dieser Sensor zur Berechnung des Winkels genutzt wie es bei den anderen Methoden der Fall ist. Die Fehler der Positionsberechnung sind gering und betragen unter  $0,01\%$ . Wie schon in den vorherigen Simulationen werden die Fehler mit größerem Abstand kleiner.

In der Tabelle B.5 sind die Ergebnisse für eine Rotation  $5^\circ$  beschrieben. Es ist für die additive Gewichtung eine deutliche Zunahme der Fehler zu erkennen. Die Fehler der beiden anderen Methoden sind ungefähr in der gleichen Größenordnung wie für eine Rotation um  $2^\circ$ . Sie sind nahezu unabhängig gegenüber Fehllagen der Rotation. Dies gilt auch für die Positionsberechnung. Es sind gegenüber einer Fehllage von  $2^\circ$  keine wesentlichen Unterschiede festzustellen.

**Fehllagen der Translation und Rotation** Der letzte Test ist eine Kombination der Fehllagen. In der Tabelle sind Ergebnisse für eine Verschiebung aus dem Mittelpunkt um  $-0,23$  mm in x-Richtung, um  $-0,41$  mm in y-Richtung und eine Rotation von  $5^\circ$  gezeigt. Für diesen Testfall sind die Fehler für die Abstände  $z = 2$  mm und  $z = 4$  mm bei der additiven Gewichtung am kleinsten. Bei dem Abstand  $z = 6$  mm hat die multiplikative Gewichtung die kleinsten Fehler. Durch die starke Veränderung der Fehler und sogar eine Verringerung dieser bei der additiven Gewichtung gegenüber der Fehllage mit nur Verkippung lässt sich feststellen, dass die Fehler der Winkelberechnungsverfahren bei einer Fehllage der Rotation abhängig von der projizierten Position sind, unabhängig vom Verfahren. Zudem ist festzustellen, dass die Fehler bei der Positionsbestimmung zugenommen haben gegenüber den vorherigen Testfällen. Jedoch werden mit zunehmendem Abstand alle Fehler kleiner sowohl bei der Positionsbestimmung als auch bei der

Tabelle 6.3: Zusammenfassung der Genauigkeiten der unterschiedlichen Verfahren zur Berechnung des Winkels bezogen auf Fehllagen.

	Translation	Verkipfung	Kombination
AG	+	-	+
MG	o	+	o
QG	o	+	-

Winkelberechnung. Hier ist die Abnahme der Fehler besonders bei der multiplikativen Gewichtung und bei Quadranten-Gewichtung festzustellen.

Die Ergebnisse mit Verkipfung und Verschiebung lassen vermuten, dass die fehlerhafte Winkelberechnung auf die fehlerhafte Berechnung der Position zurückzuführen ist. In Tabelle B.9 sind daher die Berechnungen für dieselbe Verschiebung und Verkipfung dargestellt, allerdings mit korrekter Position. Es kann bei der additiven-Gewichtung eine Verbesserung bei den großen Fehlern der Positionsberechnung, von  $0,05^\circ$  der maximalen absoluten Fehler festgestellt werden und beim mittleren Fehler um ungefähr  $0,2^\circ$ . Die Fehler sind kleiner, insbesondere bei der multiplikativen Gewichtung ist ein Unterschied zu erkennen. Dennoch scheint die fehlerhafte Position nicht ausschließlich der Grund für die Winkelfehler zu sein.

In der Tabelle 6.3 sind die Ergebnisse zu den Fehllagen zusammengefasst und nach der Genauigkeit der Verfahren bewertet.

## 6.2 Homogene Störfelder

Die wesentliche Idee, den Winkel über die partiellen Ableitungen zu berechnen ist die Filterung von homogenen Störfeldern. Ziel dieses Abschnitts ist darzustellen, welche Störfelder herausgefiltert werden können. Dazu wird in der Simulation ein zweiter Dipol implementiert, dieser stellt das Störfeld da. Dieser Dipol wird in einer größeren Entfernung zum Sensor-Array platziert. Umso größer der Abstand zwischen Dipol und Sensor, desto homogener wird das Feld am Sensor-Array. Es werden verschiedene Fälle getestet. Bei allen Testfällen wird eine  $180^\circ$  Drehung des Nutzdipols simuliert. Das magnetische Moment des Stördipols zeigt in x-Richtung  $\vec{\mu}_{\text{Stör}} = \vec{e}_x \mu_{x,\text{Stör}}$ . Das Sensor-Array hat eine Größe von  $2\text{ mm} \times 2\text{ mm}$  mit  $9 \times 9$  Sensoren. Als erstes wird der Fall für einen festen Abstand  $z = 4\text{ mm}$  des Nutzdipols und unterschiedlichen Abständen des Stördipols getestet. Zuletzt wird getestet, wie sich Störfelder mit unterschiedlicher Intensität, aber gleicher Inhomogenität, auswirken. Dafür kann das magnetische Moment  $\vec{\mu}_{\text{Stör}}$  variiert werden.

Um die Inhomogenität des Störfeldes einschätzen zu können, wird an jedem Sensor der Winkel mit der x- und y-Komponente berechnet und daraus die Standardabweichung

gebildet [3].

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (A_i - \mu)^2} \quad (6.1)$$

Mit  $\mu$  in diesem Fall als Mittelwert

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A_i \quad (6.2)$$

und

$$A_i = \arctan\left(\frac{B_{y,i}}{B_{x,i}}\right) \quad (6.3)$$

$A_i$ ,  $B_{y,i}$  und  $B_{x,i}$  sind Matrizen. Für die Berechnung wird der Quotient von  $B_{y,i}$  und  $B_{x,i}$  elementweise berechnet. Diese Berechnung wird ausgeführt, wenn das magnetische Moment  $\vec{\mu}$  vom Stördipol und des Nutzdipols dieselbe Richtung haben, also:

$$\frac{\mu_{y,\text{Nutz}}}{\mu_{x,\text{Nutz}}} = \frac{\mu_{y,\text{Stör}}}{\mu_{x,\text{Stör}}} \quad (6.4)$$

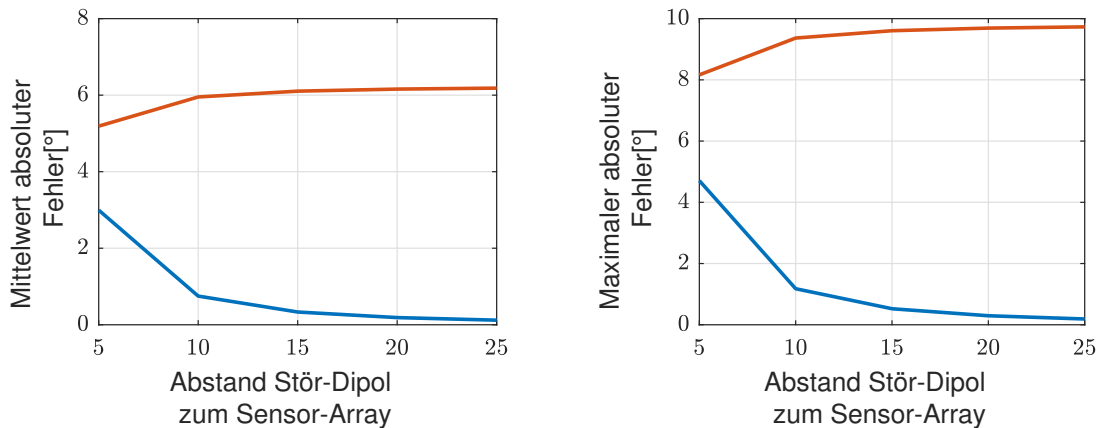
Umso höher der Wert von  $\sigma$ , desto inhomogener ist das Feld. Um ein Maß für die unterschiedlichen Intensitäten der der Felder zu haben wird der Quotient des Betrags der Felder berechnet. Auch dieser wird einmal berechnet, wenn Gleichung 6.4 erfüllt ist.

$$\text{Betrag} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|\vec{B}_{\text{Nutz},i}|}{|\vec{B}_{\text{Stör},i}|} \quad (6.5)$$

Hier sind  $|\vec{B}_{\text{Nutz},i}|$  und  $|\vec{B}_{\text{Stör},i}|$  Matrizen und es wird elementweise der Quotient gebildet. Der Dipol befindet sich idealerweise mittig über dem Sensor-Array und ist nicht verkippt. Die Berechnung des Winkels wird daher nicht mit einer der im Abschnitt 6.1 getesteten Methoden berechnet, sondern mit der Gleichung 5.13. Damit wird ausschließlich die Winkelberechnung getestet. Anschließend wird separat die Positionsberechnung mit einer Fehllage und einem Störfeld getestet.

**Fester Abstand des Nutzdipols** In diesem Abschnitt wird der Testfall beschrieben, in dem sich der Nutzdipol in einem festen Abstand zur Messebene befindet. Diese befindet sich an  $z = 4$  mm, der Nutzdipol an  $z = 0$  mm und der Stördipol liegt in den Abständen  $z_0 = 5$  mm,  $z_0 = 10$  mm,  $z_0 = 15$  mm,  $z_0 = 20$  mm und  $z_0 = 25$  mm zur Messebene. Der Stördipol wird nur auf der  $z$ -Achse verschoben. Bei steigendem Abstand verringert sich die Intensität des Magnetfeldes, um aber die unterschiedliche Fälle miteinander vergleichen zu können, sollte die Intensität des Magnetfeldes nicht variieren. Deshalb steigt für diesen Fall das magnetische Moment des Störfeldes  $\vec{\mu}_{\text{Stör}}$  abhängig vom Abstand mit  $z^3$ , sodass die Intensität bei unterschiedlichen Abständen ungefähr dieselbe ist.

In den Abbildungen 6.1(a) und 6.1(b) ist der maximale absolute Fehler und der mittlere absolute Fehler der beiden Berechnungen dargestellt. In der Tabelle 6.4 sind die



(a) Mittelwert absoluter Fehler. In blau Winkelberechnung mit partiellen Ableitungen, in rot ohne partielle Ableitung

(b) Maximaler absoluter Fehler. In blau Winkelberechnung mit partiellen Ableitungen, in rot ohne partielle Ableitung

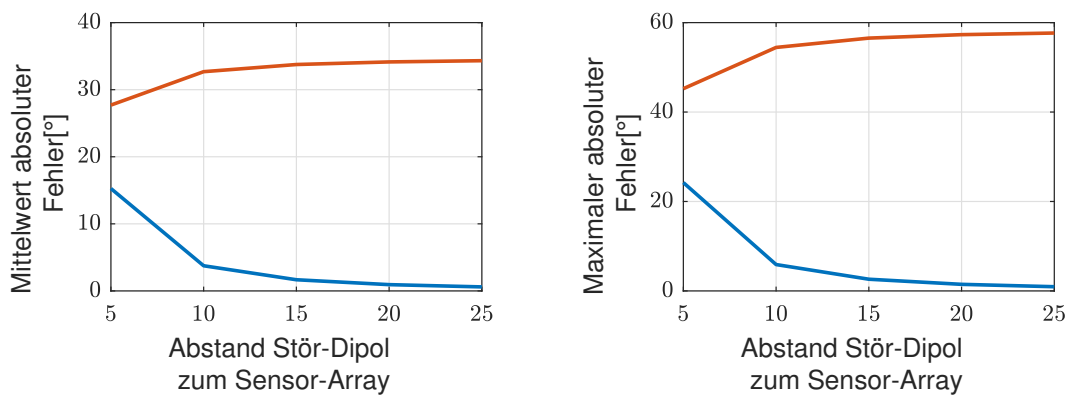
Abbildung 6.1: Winkelfehler mit zunehmenden Abstand des Stördipols.

Ergebnisse für den Quotienten der Beträge sowie Standardabweichung der Winkel abgebildet. In diesem Fall ist das primäre Feld zwischen dem 6,6fachen und dem 4,9fachen größer. Zu erkennen ist, dass bei der Standardabweichung der Winkel des Störfeldes ein großer Unterschied zwischen  $z = 5$  mm und  $z = 10$  mm ist. Dieser Unterschied ist auch in den Fehlern für die Berechnung der Winkel mit den partiellen Ableitungen zu sehen (in den Abbildungen in blau). Der maximale absolute Fehler fällt hier von über  $4^\circ$  auf unter  $2^\circ$ . Es ist also wie erwartet ein Zusammenhang zwischen der Inhomogenität des Störfeldes und der Genauigkeit der Winkelberechnung mit den partiellen Ableitungen festzustellen. Bei der Berechnung des Winkels ohne die partiellen Ableitungen ist eine Veränderung in die entgegengesetzte Richtung zu sehen. Dies hängt vermutlich nicht mit der Inhomogenität des Störfeldes zusammen, sondern mit der Intensität des Störfeldes. Diese nimmt im Verhältnis zum Nutzfeld mit zunehmenden Abstand zu, obwohl das magnetische Moment  $\vec{\mu}_{\text{Stör}}$  abhängig vom Abstand ist. Da aber mit dem Abstand sich auch der Verlauf des Feldes ändert, ist das Verhältnis der Beträge nicht konstant. Die Standardabweichung der Winkel des Nutzmagnetfeldes ist konstant, weil das Feld für jeden Abstand dasselbe ist.

In der Abbildung 6.2(a) und 6.2(b) sind die Fehler für denselben Testfall wie zuvor aufgelistet, aber mit höheren Intensitäten des Störfeldes. In diesem Fall hat das Störfeld in etwa dieselbe Größe wie das Nutzfeld. Dies ist an dem Verhältnis der Beträge zu erkennen. Die Standardabweichung der Winkel, also die Inhomogenität der Felder sind gleich wie in dem vorherigen Testfall, sowie auch der ungefähre Verlauf der maximalen und mittleren absoluten Fehler. Jedoch sind die Fehler größer, als bei niedrigerer Intensität des Störfeldes. Der mittlere Fehler beträgt für die Berechnung mit den partiellen Ableitungen ungefähr  $15^\circ$  bis mit größeren Abstand abfallend auf ungefähr  $0,6^\circ$ . Der maximale absolute Fehler beträgt maximal  $24,22^\circ$  und minimal  $0,94^\circ$ . Es ist zu verzeichnen,

Tabelle 6.4: Winkelberechnung mit Überlagerung durch ein homogenes Störfeld. Stördipol im Abstand  $z = 10$  mm,  $z = 20$  mm,  $z = 30$  mm. Nutzdipol im Abstand  $z = 4$  mm.

Abstand	Betrag	$\sigma$ Nutzfeld	$\sigma$ Störfeld
5 mm	6,6308	20,3372°	12,6587°
10 mm	5,2642	20,3372°	2,9654°
15 mm	5,0394	20,3372°	1,2978°
20 mm	4,963	20,3372°	0,7259°
25 mm	4,928	20,3372°	0,4634°



(a) Mittelwert absoluter Fehler. In blau Winkelberechnung mit partiellen Ableitungen, in rot ohne partielle Ableitung

(b) Maximaler absoluter Fehler. In blau Winkelberechnung mit partiellen Ableitungen, in rot ohne partielle Ableitung

Abbildung 6.2: Winkelfehler mit zunehmenden Abstand des Stör-Dipols.

dass die Inhomogenität und die Intensität des Störfeldes einen Einfluss auf die Winkelberechnung haben. Bei einer hohen Inhomogenität und Intensität ist auch der Winkelfehler hoch. Dennoch können bei Intensitäten des Störfeldes mit ungefähr derselben Größe des Nutzfeldes und einer niedrigen Inhomogenität, kleine Winkelfehler erzielt werden. Eine hohe Intensität des Störfeldes verstärkt die Fehler durch die Inhomogenität.

**Positionsberechnung mit Störfeld** Es wird die Berechnung der Position unter Einfluss eines Störfeldes und mit einer Fehllage der Translation betrachtet. Die Rahmenbedingungen für die Simulation sind dieselben wie beim ersten Störfeldtest, dadurch gilt die Tabelle 6.4. Jedoch ist der Nutzdipol um  $-0,23$  mm in x-Richtung aus dem Mittelpunkt verschoben und um  $-0,41$  mm in y-Richtung. In der Tabelle 6.6 sind die Ergebnisse für die Positionsberechnung dargestellt. Abgebildet sind die relativen Fehler in x- und y-Richtung für verschiedene Abstände des Stördipols zum Sensor-Array. Die Fehler für die Berechnung der x-Position liegen unter  $0,1\%$  und die Fehler für die Berechnung



Tabelle 6.5: Winkelberechnung mit Überlagerung durch ein homogenes Störfeld. Stördipol im Abstand  $z = 10$  mm,  $z = 20$  mm,  $z = 30$  mm. Nutzdipol im Abstand  $z = 4$  mm.

Abstand	Betrag	$\sigma$ Nutzfeld	$\sigma$ Störfeld
5 mm	1,3262	20,3372°	12,6587°
10 mm	1,0528	20,3372°	2,9654°
15 mm	1,0079	20,3372°	1,2978°
20 mm	0,9926	20,3372°	0,7259°
25 mm	0,9856	20,3372°	0,4634°

Tabelle 6.6: Berechnung der Position mit Störfeld und Fehllage.

Abstand	Relativer Fehler der Positionsberechnung in x	Relativer Fehler der Positionsberechnung in y
5 mm	-0,058 %	0,1691 %
10 mm	-0,0586 %	0,1708 %
15 mm	-0,0591 %	0,1723 %
20 mm	-0,0594 %	0,1729 %
25 mm	-0,0595 %	0,1732 %

der y-Position unter 0,2 %. Für beide Positionsberechnungen ist ein leichter Anstieg des Fehlers mit zunehmenden Abstand zu erkennen. Dies unterscheidet sich zur Winkelberechnungen, bei denen der Fehler für einen größeren Abstand des Stördipols geringer wird.

### 6.3 Messauflösung

In diesem Abschnitt wird die Auflösung der Mess- bzw. Simulationenwerte begrenzt. Die Genauigkeit der Messwerte hängt von unterschiedlichen Faktoren ab, wie beispielsweise von der Auflösung des Analog-Digital-Wandlers. In dem Sensor-Array werden die analogen Messwerte in digitale Werte umgewandelt. Dabei wird die Messauflösung auf  $n$  Bit begrenzt. Dieses Phänomen wird in der Simulation versucht nachzubilden indem zuerst der maximale und minimale Messwert bei einer  $360^\circ$  Drehung bestimmt wird, um damit den Messbereich festzulegen:

$$\text{Auflösung} = 2 \cdot \frac{\max}{2^{n_{\text{bit}}}} \quad (6.6)$$

Da der minimale und maximale Wert betragsmäßig gleich sind, reicht es den maximalen Wert zu verdoppeln. Danach wird die Auflösung mit folgender Gleichung festgelegt, hier

beispielsweise für  $B_x$ .

$$B_x = \text{round}\left(\frac{B_x}{\text{Aufloesung}}\right) \cdot \text{Aufloesung} \quad (6.7)$$

Die Gleichungen wurden so in Matlab implementiert. Mit dem Runden wird die Auflösung begrenzt. Es wird auf die nächste Dezimalstelle gerundet.

Auch hier wurde ein Sensor-Array mit der Größe von  $2\text{ mm} \times 2\text{ mm}$  und  $9 \times 9$  Sensoren gewählt. Es werden verschiedene Auflösungen zwischen 8 Bit bis 14 Bit getestet und dies für eine  $180^\circ$  Drehung. Der Dipol befindet sich dabei in den verschiedenen Abständen von 1 mm bis 6 mm zum Sensor-Array und idealerweise mittig über dem Sensor-Array und damit auch über dem mittleren Sensor. Zudem werden unterschiedliche Intensitäten des Feldes getestet. Dabei werden der maximale absolute Fehler und der mittlere absolute Fehler betrachtet.

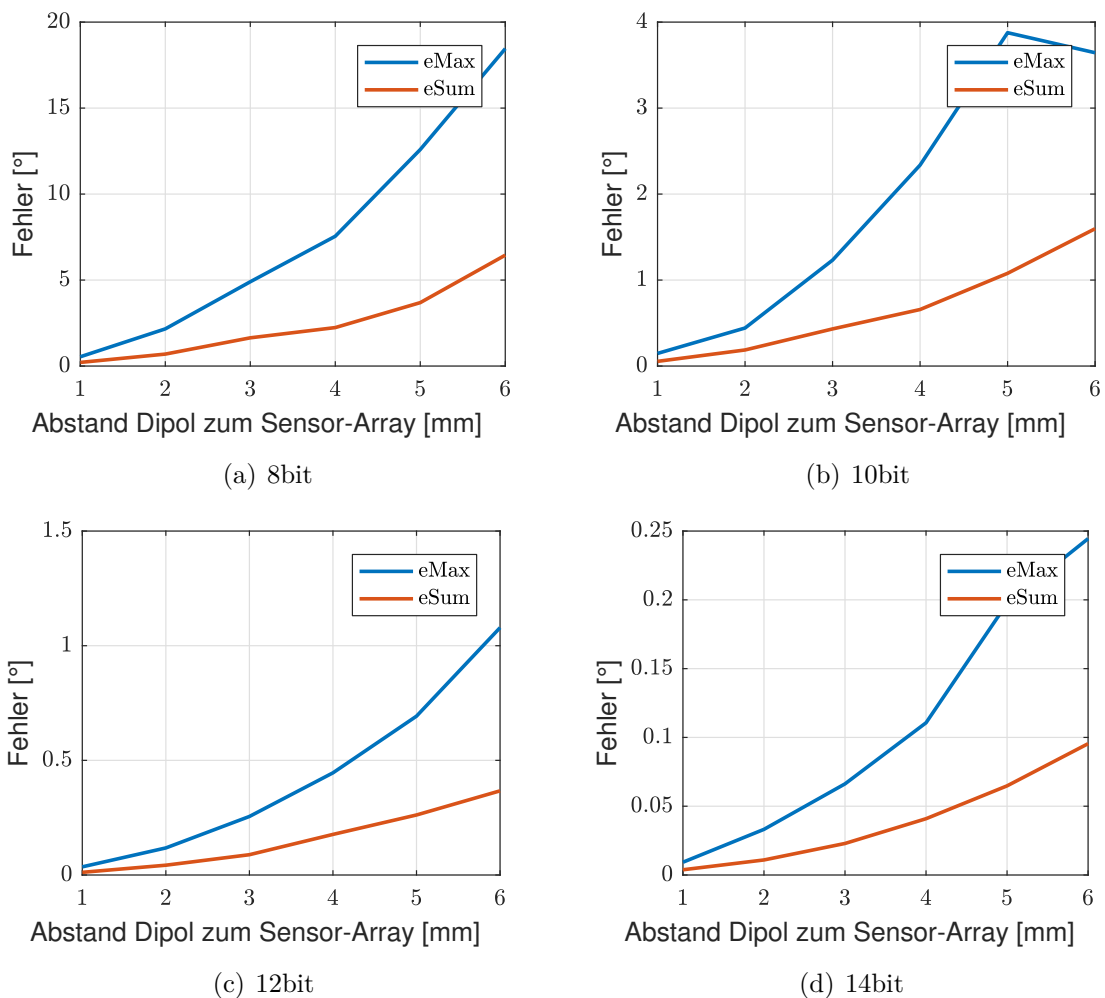


Abbildung 6.3: Fehler für unterschiedliche Auflösungen mit zunehmenden Abstand.

Tabelle 6.7: Positionsberechnung mit Begrenzung der Messauflösung.

Abstand	Relativer Fehler der Positionsberechnung in x	Relativer Fehler der Positionsberechnung in y
1 mm	-0,2207 %	+3,3633 %
2 mm	-0,1926 %	-3,2528 %
3 mm	-0,1589 %	-1,4494 %
4 mm	+0,0021 %	+0,2172 %
5 mm	-0,1555 %	+0,1606 %
6 mm	-0,1074 %	-0,3552 %

In den Abbildungen 6.3(a)- 6.3(d) sind die Fehler für unterschiedliche Auflösungen mit zunehmendem Abstand dargestellt. Es ist zu erkennen, dass mit höherer Auflösung die Fehler der Winkelberechnungen kleiner werden, d.h. sowohl der maximale als auch der mittlere absolute Fehler. Zusätzlich fällt auf, dass der Fehler mit zunehmendem Abstand zunimmt. Mit größerem Abstand nimmt die Intensität des Feldes ab, aber auch die Inhomogenität. Es könnte also ein Zusammenhang zwischen größerem Fehler und der abnehmenden Intensität und/oder der Inhomogenität bestehen. Die Zunahme der Fehler bei größerem Abstand steht im Kontrast zu den Ergebnissen aus Abschnitt 6.1, dort nahm der Fehler mit höherem Abstand ab. Die Ergebnisse für eine Auflösung mit 8 bit haben große Fehler, sodass damit manche Winkel auch für kleine Abstände wie bei  $z = 2\text{ mm}$  nicht genauer als  $2,2^\circ$  berechnet werden können. Erst ab 12 Bit liegen die maximalen absoluten Fehler bis  $z = 4\text{ mm}$  unter  $0,5^\circ$ .

Weitere Tests ergeben, dass die Zunahme der Fehler mit größerem Abstand nicht mit der Intensität des Feldes zusammenhängt. Die Zunahme der Fehler liegt vermutlich an der Abnahme der Inhomogenität oder an den kleineren Veränderungen des Feldes. Umso weiter der Dipol vom Sensor entfernt ist, desto weniger inhomogen und so weniger Veränderungen sind im Feld. Das hat zur Folge, dass die Informationen in den numerisch berechneten partiellen Ableitungen in kleineren Differenzen liegt. Durch Begrenzung der Auflösung werden die kleinen Differenzen zusätzlich geglättet. Der prozentuale Fehler durch die Auflösungsbegrenzung wird größer, je kleiner die Differenzen für Berechnung der Ableitung sind. Der Messbereich sollte also so weit wie möglich ausgenutzt werden, damit dieser Effekt verkleinert wird. Dies kann über den Abstand zwischen Sensor und Dipol beeinflusst werden oder durch die räumliche Größe des Sensor-Arrays.

**Positionsberechnung mit Begrenzung der Messauflösung** Es wird die Positionsberechnung mit einer Begrenzung der Messauflösung getestet. Die Rahmenbedingungen sind dieselben wie schon beschrieben. In Tabelle 6.7 wird die Positionsberechnung für 12 Bit Auflösung dargestellt. Hier ist zuerst eine Abnahme der relativen Fehler mit zunehmendem Abstand festzustellen. Bei der Berechnung der x-Position ist ab  $z = 5\text{ mm}$

eine Zunahme des Fehlers zu sehen und auch bei der Berechnung der y-Position nimmt der Fehler bei  $z = 6$  mm zu. Dennoch liegt der Fehler ab  $z = 4$  mm unter 0,5 %.

## 6.4 Rauschen

In diesem Kapitel wird die Anfälligkeit der partiellen Ableitungen bezogen auf das Rauschen der Messsignale getestet. Hierfür wird das berechnete magnetische Feld mit Rauschen überlagert. Das Rauschen wird prozentual vom maximalen Wert berechnet, dies ist auch der maximale Wert der für die Begrenzung der Messauflösung berechnet wird. Danach wird das Rauschen zum eigentlichen Signal addiert.

$$B_{x,R} = B_x + \text{Rauschen}_x \quad (6.8)$$

$$B_{y,R} = B_y + \text{Rauschen}_y \quad (6.9)$$

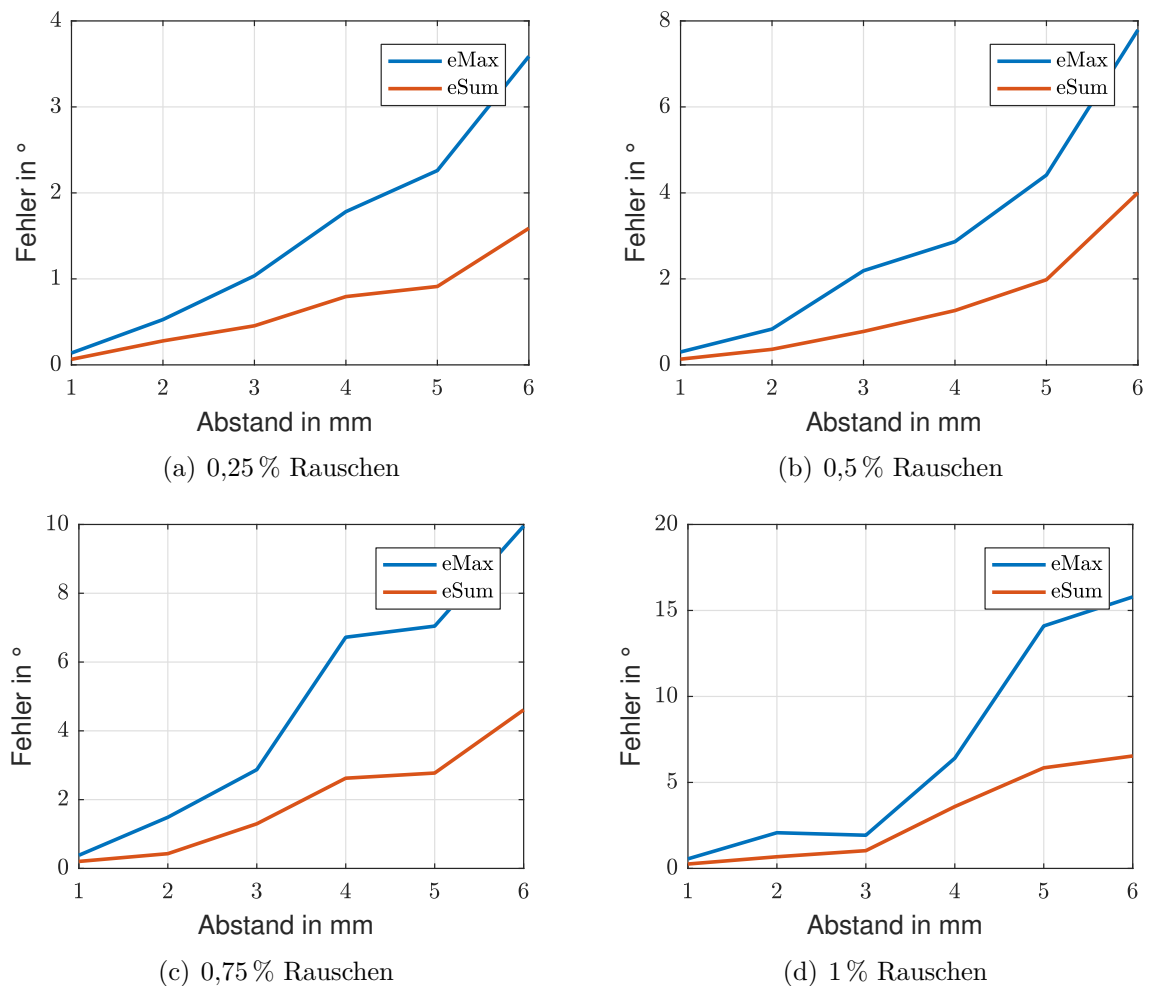


Abbildung 6.4: Rauscheinfluss auf die Genauigkeit der Winkelberechnung.

Das Rauschen wird in Matlab mit `rand()`-Funktion erzeugt. Die Rahmenbedingung für die Simulation sind dieselben wie in Abschnitt 6.3. Die Simulationen werden mit einer Auflösung von 12 bit durchgeführt. Es werden vier Fälle getestet mit unterschiedlichem prozentuaalem Anteil an Rauschen. Hierfür werden wieder der maximale absolute und der mittlere absolute Fehler berechnet und dies für verschiedene Abstände.

In den Abbildungen 6.4(a) - 6.4(d) sind die Ergebnisse dargestellt. Die Fehler der Winkelberechnung werden mit größerem Rauschen höher. Bei 1 % Rauschen liegt der maximale Fehler nur bei einem Abstand von  $z = 1$  mm unter  $1^\circ$  und auch bei 0,25 % liegt der Fehler nur bis zu einem Abstand von  $z = 2$  mm unter  $1^\circ$ . Außerdem ist auffällig, dass der Verlauf der maximalen Fehler teilweise unregelmäßig ist. Dies ist in Abbildung 6.4(d) zu sehen. Dies liegt an dem zufällig erzeugtem Rauschen. Dadurch sind die Ergebnisse nicht vollständig reproduzierbar.

## 6.5 Tests zum Optimierungsverfahren

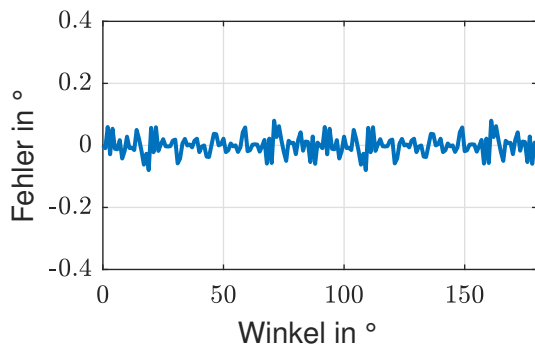
Ähnlich wie in den vorherigen Kapiteln wird der Algorithmus basierend auf einem Optimierungsverfahren wie in Kapitel 5.5 anhand bestimmter Kriterien getestet. Diese sind: Fehllagen (auch der z-Koordinate), Störfelder, Begrenzung der Messauflösung und Rauschen. Die Rahmenbedingungen sind dieselben wie am Anfang des Kapitels beschrieben. Der Algorithmus wird für eine z-Koordinate  $z = -4$  mm getestet und für eine Auflösung von 12 Bit. Getestet werden hier die Ansatzfunktionen der Gleichungen 5.52 und 5.53.

**Fehllagen** In den Abbildungen 6.5(a) - 6.5(e) ist der absolute Fehler für eine  $180^\circ$  Drehung über dem Winkel aufgetragen. In der Abbildung 6.5(a) ist der Dipol ideal über dem Sensor-Array platziert. Die Fehler sind gering und schwanken innerhalb  $\pm 0,1^\circ$ . In der Abbildung 6.5(b) ist der Dipol aus dem Mittelpunkt um  $-0,23$  mm in x-Richtung und um  $-0,41$  mm in y-Richtung verschoben. Hier ist eine Zunahme des Fehlers zu erkennen, jedoch ist dieser betragsmäßig kleiner als  $\pm 0,2^\circ$ . Außerdem ist zu verzeichnen, dass der Fehler sinusförmig verläuft. Weiterhin ist in der Abbildung 6.5(c) der Fehlerverlauf dargestellt bei dem der Dipol um  $5^\circ$  verkippt ist. Die Verkipfung hat in diesem Fall keinen negativen Einfluss auf die Winkelberechnung. In der nächsten Abbildung ist der Fehlerverlauf einer Kombination von einer Verkipfung um  $5^\circ$  und Verschiebungen aus dem Mittelpunkt um  $-0,23$  mm in x-Richtung und um  $-0,41$  mm in y-Richtung verschoben dargestellt. Für diesen Fall ist der mittlere Betragsfehler am höchsten, dennoch innerhalb  $\pm 0,4^\circ$ . In der Abbildung 6.5(e) ist der Fehlerverlauf für eine falsche Annahme der z-Koordinate, also dem Abstand zwischen Dipol und Messebene. In diesem Fall wurde in der Ansatzfunktion für  $z = -5$  mm angenommen anstatt  $z = -4$  mm. Es ist kein deutlich Fehlerzunahme zu erkennen.

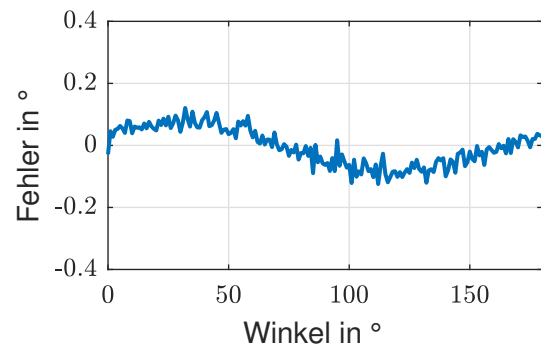
**Störfelder** Die Störfeldsimulation wird mit einem Nutzdipol und einem Stördipol durchgeführt. Der Nutzdipol befindet sich in einem Abstand von 4 mm zur Messebene und der Stördipol in 20 mm und 25 mm zur Messebene. In diesem Fall wird eine  $360^\circ$  Drehung

simuliert. Damit ergibt sich mit Gleichung 6.5 für einen Abstand Stördipol in 20 mm, dass das Nutzfeld im Mittel um das 4,963-fache größer ist als das Störfeld. Die Standardabweichung als Maß für die Inhomogenität nach der Gleichung 6.1 beträgt für das Nutzfeld  $\sigma = 20,3372^\circ$  und für das Störfeld  $\sigma = 0,7259^\circ$ . Für den Abstand 25 mm ist das Nutzfeld um das 4,928-fache größer. Die Standardabweichung für das Nutzfeld ist die selbe, für das Störfeld beträgt sie  $\sigma = 0,4634^\circ$ . In der Abbildung 6.6(a) ist Verlauf des Fehlers dargestellt. Dieser ist sinusförmig und schwingt mit einer Amplitude von ungefähr  $0,4^\circ$ . Für einen Abstand von 25 mm ist der Verlauf in 6.6(b) dargestellt. Hier schwingt der Fehler mit einer Amplitude von ungefähr  $0,25^\circ$ . Auch hier ist festzustellen, dass so weniger inhomogen das Störfeld ist, desto besser wird es herausgefiltert.

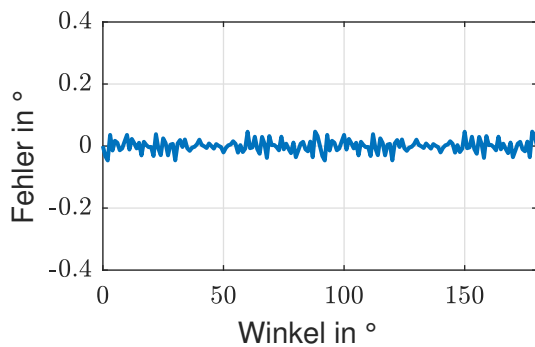
**Rauschen** Wie im Kapitel 6.4 wird das Rauschen simuliert. In der Abbildung 6.7 ist der Verlauf des Fehlers für 0,5% zu sehen. Der Verlauf des Fehlers schwankt hier stark und ist teilweise größer als  $0,5^\circ$ .



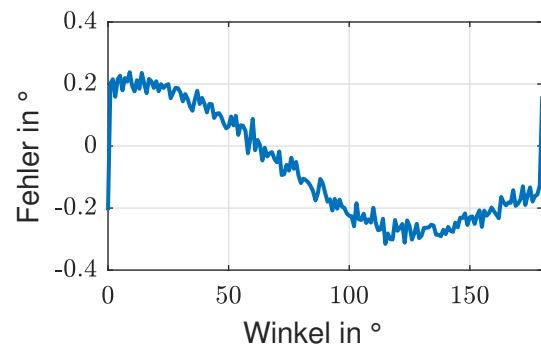
(a) Absoluter Fehler der Winkelberechnung mit dem Optimierungsverfahren Methode der kleinsten Quadrate. Der Dipol befindet sich ideal mittig über dem Sensor.



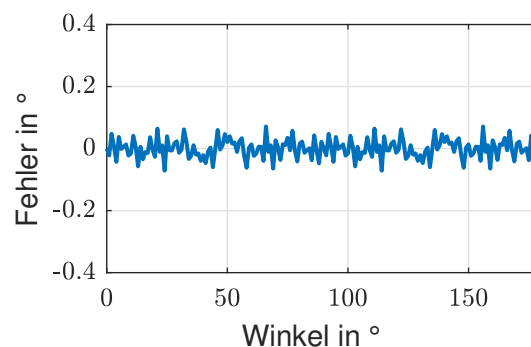
(b) Absoluter Fehler der Winkelberechnung mit dem Optimierungsverfahren Methode der kleinsten Quadrate. Der Dipol ist aus dem Mittelpunkt um  $-0,23$  mm in x-Richtung und um  $-0,41$  mm in y-Richtung verschoben.



(c) Absoluter Fehler der Winkelberechnung mit dem Optimierungsverfahren Methode der kleinsten Quadrate. Der Dipol befindet sich mittig über dem Sensor und ist um  $5^\circ$  verkippt

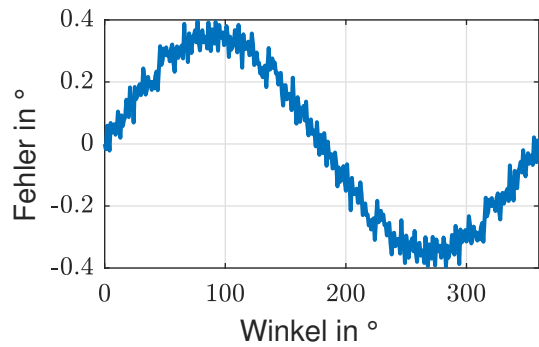


(d) Absoluter Fehler der Winkelberechnung mit dem Optimierungsverfahren Methode der kleinsten Quadrate. Der Dipol ist aus dem Mittelpunkt um  $-0,23$  mm in x-Richtung und um  $-0,41$  mm in y-Richtung verschoben und ist um  $5^\circ$  verkippt

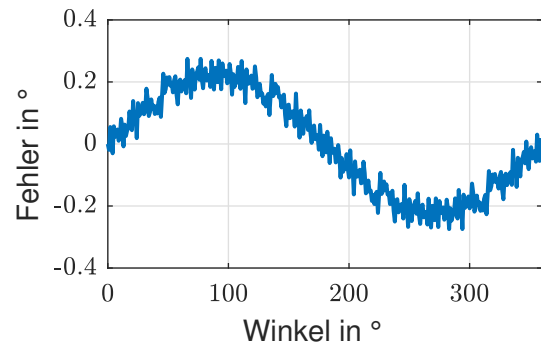


(e) Absoluter Fehler der Winkelberechnung mit dem Optimierungsverfahren Methode der kleinsten Quadrate. Für eine falsche Annahme der z-Koordinate in der Ansatzfunktion. Hier für  $z = -5$  mm.

Abbildung 6.5: Fehlerdarstellung der Winkelberechnung für unterschiedliche Fehlarten.



(a) Stördipol in einem Abstand von 20 mm zur Messebene



(b) Stördipol in einem Abstand von 25 mm zur Messebene

Abbildung 6.6: Verlauf des Winkelfehlers mit Störfeld.

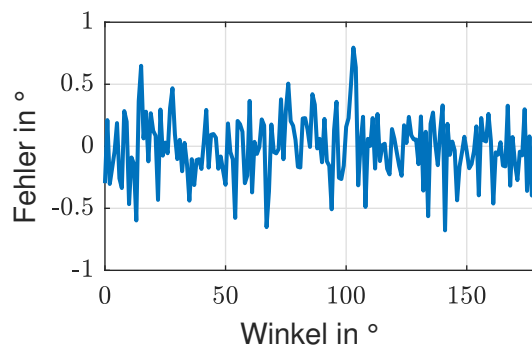


Abbildung 6.7: Verlauf des Winkelfehlers mit einem Rauschanteil von 0,5%.



## 7 Schlussfolgerungen

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefasst und dargestellt welche Ziele erreicht werden konnten. Anschließend wird beschrieben, in welchen Punkten die Arbeiten fortgeführt werden können und welche weiteren Ideen sich ergeben haben.

### 7.1 Zusammenfassung

Ein wesentliches Ziel dieser Arbeit war die Erstellung einer Software zur Simulation der magnetischen Felder von Permanentmagneten, angepasst an die Anforderungen, die durch den Aufbau eines Sensor-Arrays gegeben sind (das Magnetfeld muss in einer Ebene berechnet werden und dies für eine bestimmte Anzahl an „Sensoren“). Dabei war gefordert, dass die Permanentmagnete unterschiedliche Geometrien annehmen können, von einem einfachen magnetischen Dipol über einen Stabmagnet bis zur zylindrischen Form. Die Simulation, so war die Idee, sollte durch Überlagerung der Felder vieler magnetischer Dipole realisiert werden. Diese Ziele konnten erreicht werden. Es gibt für die unterschiedlichen Geometrien Matlab-Funktionen. Mit diesen Funktionen können die „Meshgrids“ für die unterschiedlichen Geometrien erzeugt werden und mit weiteren Funktionen werden die Felder überlagert.

Des Weiteren wurde die Simulation von Magnetfeldern durch analytische Berechnungen und Messungen verifiziert. Insbesondere im Vergleich zu den analytischen Berechnungen konnte eine hohe Übereinstimmung erzielt werden. Im Vergleich zur Messtechnik sind die Unterschiede im Gegensatz zur analytischen Berechnung höher ausgefallen. Der grundsätzliche Feldverlauf ist gegeben, dennoch weisen die simulierten und gemessenen Felder in einzelnen Punkten Unterschiede auf. Da die Simulation durch Überlagerung von Dipolen mit den analytischen Simulationen übereinstimmen, ist davon auszugehen, dass die Simulation korrekte Ergebnisse produziert. Dazu basieren die Simulationen auf unterschiedlichen Ansätzen. Die Unterschiede der Messtechnik und der Simulation werden auf mangelnde Präzision der Messtechnik zurückgeführt und/oder auf eine inhomogene Magnetisierung der Magneten.

Ein weiteres Ziel war der Entwurf eines Algorithmus für die Auswertung des Magnetfeldes. Der Algorithmus sollte dabei basierend auf der Idee des Sensor-Arrays entworfen werden und die dadurch entstehenden Vorteile nutzen. Es liegt ein Entwurf für einen Algorithmus vor, der durch Berechnung der partiellen Ableitungen und anschließender Auswertung die projizierte Position eines magnetischen Dipols bestimmen kann und dann den Winkel berechnet. Darauf folgend wurde der Algorithmus auf unterschiedliche Kriterien getestet, um so Vor- und Nachteile aufzuzeigen. Hier ergab sich, dass die

Idee den Algorithmus auf der Basis der partiellen Ableitungen zu entwerfen, homogene Störfelder wie erwartet herausfiltert. Zudem ist es möglich, die projizierte Position des Magneten auf dem Sensor-Array zu bestimmen. Dies ist ein umfangreicheres Verfahren, muss aber nur einmalig ausgeführt werden. Ein weiterer Punkt ist die Berechnung des Winkels. In dieser Arbeit wurden verschiedene Verfahren zur Berechnung vorgestellt, wenn der Dipol sich nicht genau über einem „Sensor“ befindet. Alle Verfahren haben sowohl Vor- als auch Nachteile, sodass die Ergebnisse nicht vollends zufriedenstellend sind. Ein allgemeiner Nachteil des Algorithmus ist die numerische Berechnung der Ableitungen. Diese Berechnung ist anfällig für verrauschte Signale und einer Begrenzung der Auflösung (Bitbreite).

Weiterhin wurde ein Algorithmusansatz vorgestellt. Dieser nutzt das Optimierungsverfahren der kleinsten Quadrate um Funktionsparameter anzupassen. Es konnte gezeigt werden, dass auch mit diesem Ansatz der Winkel berechnet werden kann. Zudem zeigen die Tests, dass die Nachteile durch eine Begrenzung der Messauflösung des ersten Algorithmus mit dem Optimierungsverfahren verbessert werden können.

## 7.2 Ausblick

Offene Punkte sind die Verifizierung der Simulation durch eine präzisere Messtechnik. Hier bleibt die Frage unbeantwortet, auf welche Art die Unterschiede zustande kommen. Dies könnte durch weitere Messungen, beispielsweise an dem im Labor des Forschungsprojektes vorhandenen Rotationsmessplatz, überprüft werden. Weiterhin wäre ein Vergleich zu einer kommerziellen Simulationssoftware für Magnetfelder sinnvoll.

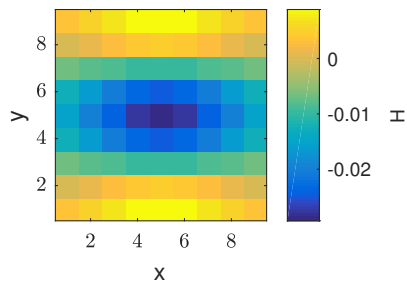
Weitere Punkte wären die Verbesserung des Algorithmus. Hier könnte insbesondere die Berechnung des Winkels, wenn der Dipol sich nicht genau über einem „Sensor“ befindet, verbessert werden. Des Weiteren kann der Ansatz der Optimierungsverfahren umfangreicher umgesetzt werden.

## Literatur

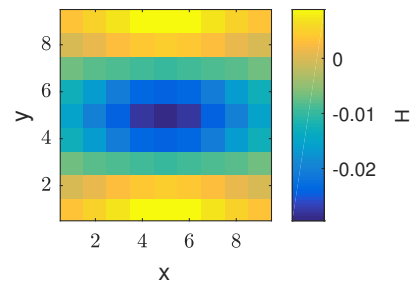
- [1] Milton Abramowitz und Irene Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, Mathematical Tables*. Dover Publications, 1965.
- [2] Matthias Bartelmann u. a. *Theoretische Physik*. Springer, 2015.
- [3] Ehrhard Behrends. *Elementare Stochastik*. Springer, 2013.
- [4] Bronstein u. a. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, 2012.
- [5] Jürgen Donnevert. *Die Maxwell'schen Gleichungen*. Springer, 2015.
- [6] Torsten Fließbach. *Elektrodynamik*. Springer, 2012.
- [7] *KMZ60 Angle sensor with integrated amplifier*. NXP Semiconductors. 2014.
- [8] Günther Lehner. *Elektromagnetische Feldtheorie*. Springer, 2010.
- [9] Marcus Prochaska und Karl-Ragmar Riemscheider. „Signalverarbeitung für Integrated Sensor-Arrays basierend auf dem Tunnel-Magnetoresistiven Effekt für den Einsatz in der Automobilelektronik“. 2015.
- [10] Thomas Tille. *Automobil-Sensorik*. Springer, 2016.
- [11] Paul A. Tipler, Gene Mosca und Jenny Wagner. *Physik*. Springer, 2015.

# Anhang

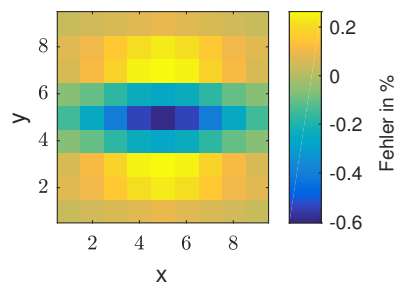
# A Vergleich Dipol und Analytisch



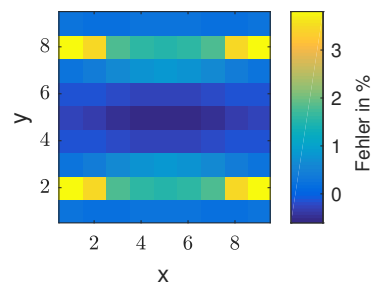
(a) Simulation durch Überlagerung.  
Dargestellt  $H_y$ .



(b) Simulation eines Stabmagneten  
mit den Gleichungen 2.48 und 2.49.  
Dargestellt  $H_y$ .

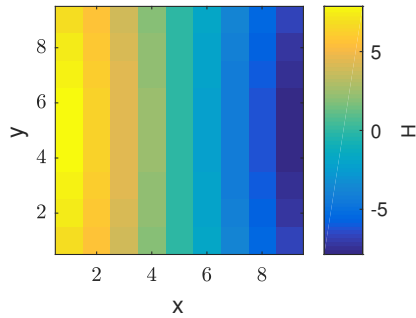


(c) Absoluter normierter Fehler in  
Prozent nach Gleichung 3.4

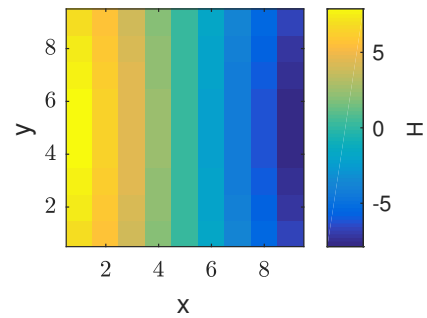


(d) Relativer Fehler in Prozent  
nach Gleichung 3.6

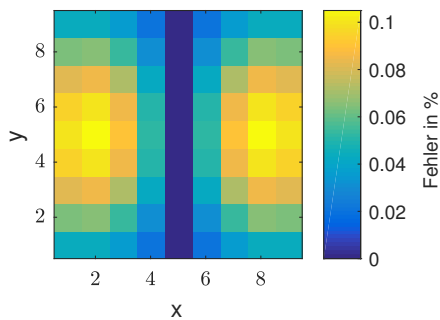
Abbildung A.1: Fehlerbetrachtung der verschiedenen Simulationen eines Stabmagneten.  
Dargestellt  $H_y$ .



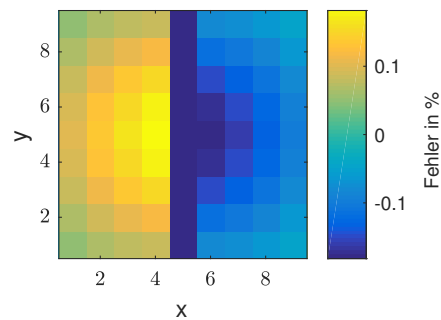
(a) Simulation durch Überlagerung. Dargestellt  $H_x$ .



(b) Simulation eines einzelnen Dipols mit einem magnetischen Moment nach Gleichung 2.24. Dargestellt  $H_x$ .

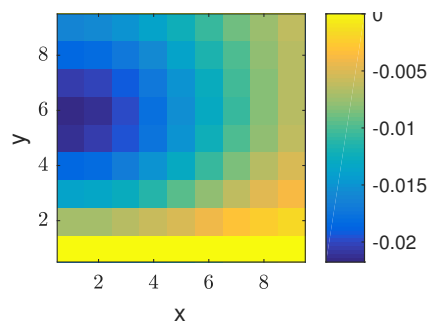


(c) Absoluter normierter Fehler in Prozent nach Gleichung 3.4

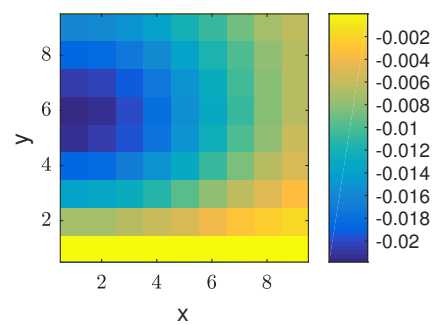


(d) Relativer Fehler in Prozent nach Gleichung 3.6

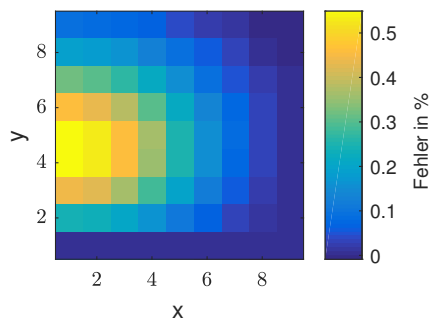
Abbildung A.2: Fehlerbetrachtung der verschiedenen Simulationen eines Kugelmagneten. Dargestellt  $H_x$ . Die Simulation der Überlagerung wurde mit der Funktion `sphereMeshgrid2()` durchgeführt.



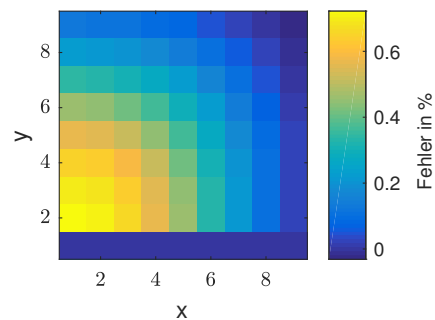
(a) Simulation durch Überlagerung



(b) Simulation eines zylindrischen Magneten mit den Gleichungen 2.51 und 2.52



(c) Absoluter normierter Fehler in Prozent nach Gleichung 3.4



(d) Relativer Fehler in Prozent nach Gleichung 3.6

Abbildung A.3: Fehlerbetrachtung der verschiedenen Simulationen eines zylindrischen Magneten. Die Simulation der Überlagerung wurde mit der Funktion `cylindricalMeshgrid2()` durchgeführt

## B Auswertung

Tabelle B.1: Darstellung der Fehler für eine 180° Drehung eines Dipols mit Fehllage von  $-0,23$  mm in x-Richtung und  $-0,41$  mm in y-Richtung, ohne Verkippung. AG = Additive Gewichtung, MG = Multiplikative Gewichtung, QG = Quadranten Gewichtung

Abstand	Methode	Mittelwert absoluter Fehler	Maximaler absoluter Fehler
2 mm	AG	$0,5037^\circ$	$0,7919^\circ$
	MG	$1,7521^\circ$	$2,7546^\circ$
	QG	$1,8856^\circ$	$2,9771^\circ$
4 mm	AG	$0,0152^\circ$	$0,024^\circ$
	MG	$0,2957^\circ$	$0,4646^\circ$
	QG	$0,4051^\circ$	$0,6379^\circ$
6 mm	AG	$0,003^\circ$	$0,0048^\circ$
	MG	$0,1295^\circ$	$0,2035^\circ$
	QG	$0,1788^\circ$	$0,2812^\circ$

Tabelle B.2: Darstellung der Fehler für die Positionsberechnung für eine 180° Drehung eines Dipols mit Fehllage von  $-0,23$  mm in x-Richtung und  $-0,41$  mm in y-Richtung, ohne Verkippung.

Abstand	Relativer Fehler der Positionsberechnung in x	Relativer Fehler der Positionsberechnung in y
2 mm	$-0,203 \%$	$-3,3304 \%$
4 mm	$-0,0597 \%$	$+0,1739 \%$
6 mm	$-0,027 \%$	$+0,0783 \%$



Tabelle B.3: Darstellung der Fehler für eine  $180^\circ$  Drehung eines Dipols ohne Verschiebung, mit Verkippung um  $2^\circ$ . AG = Additive Gewichtung, MG = Multiplikative Gewichtung, QG = Quadranten Gewichtung

Abstand	Methode	Mittelwert absoluter Fehler	Maximaler absoluter Fehler
2 mm	AG	$0,4789^\circ$	$0,7549^\circ$
	MG	$0,0002^\circ$	$0,0003^\circ$
	QG	$0,0016^\circ$	$0,0026^\circ$
4 mm	AG	$0,271^\circ$	$0,4264^\circ$
	MG	$\approx 0^\circ$	$\approx 0^\circ$
	QG	$0,0005^\circ$	$0,001^\circ$
6 mm	AG	$0,1845^\circ$	$0,2902^\circ$
	MG	$\approx 0^\circ$	$\approx 0^\circ$
	QG	$0,0002^\circ$	$0,0005^\circ$

Tabelle B.4: Darstellung der Fehler für die Positionsberechnung für eine  $180^\circ$  Drehung eines Dipols ohne Verschiebung, mit Verkippung um  $2^\circ$ .

Abstand	Relativer Fehler der Positionsberechnung in x	Relativer Fehler der Positionsberechnung in y
2 mm	$-0,0019\%$	$-0,001\%$
4 mm	$-0,0005\%$	$-0,0009\%$
6 mm	$-0,0002\%$	$-0,0004\%$

Tabelle B.5: Darstellung der Fehler für eine  $180^\circ$  Drehung eines Dipols ohne Verschiebung, mit Verkippung um  $5^\circ$ . AG = Additive Gewichtung, MG = Multiplikative Gewichtung, QG = Quadranten Gewichtung

Abstand	Methode	Mittelwert absoluter Fehler	Maximaler absoluter Fehler
2 mm	AG	$1,1938^\circ$	$1,8913^\circ$
	MG	$0,0001^\circ$	$0,0003^\circ$
	QG	$0,0016^\circ$	$0,0027^\circ$
4 mm	AG	$0,677^\circ$	$1,0685^\circ$
	MG	$\approx 0^\circ$	$\approx 0^\circ$
	QG	$0,0005^\circ$	$0,0011^\circ$
6 mm	AG	$0,4613^\circ$	$0,727^\circ$
	MG	$\approx 0^\circ$	$\approx 0^\circ$
	QG	$0,0002^\circ$	$0,0006^\circ$

Tabelle B.6: Darstellung der Fehler für die Positionsberechnung für eine  $180^\circ$  Drehung eines Dipols ohne Verschiebung, mit Verkippung um  $5^\circ$ .

Abstand	Relativer Fehler der Positionsberechnung in x	Relativer Fehler der Positionsberechnung in y
2 mm	$-0,0018\%$	$-0,001\%$
4 mm	$-0,0005\%$	$-0,0007\%$
6 mm	$-0,0002\%$	$-0,0002\%$

Tabelle B.7: Darstellung der Fehler für eine  $180^\circ$  Drehung eines Dipols mit Fehllage von  $-0,23$  mm in x-Richtung und  $-0,41$  mm in y-Richtung, mit Verkippung um  $5^\circ$ . AG = Additive Gewichtung, MG = Multiplikative Gewichtung, QG = Quadranten Gewichtung

Abstand	Methode	Mittelwert absoluter Fehler	Maximaler absoluter Fehler
2 mm	AG	$0,4701^\circ$	$0,8357^\circ$
	MG	$2,5834^\circ$	$3,8712^\circ$
	QG	$2,6941^\circ$	$4,9992^\circ$
4 mm	AG	$0,2062^\circ$	$0,4123^\circ$
	MG	$0,4733^\circ$	$0,709^\circ$
	QG	$0,7607^\circ$	$1,4817^\circ$
6 mm	AG	$0,2068^\circ$	$0,3284^\circ$
	MG	$0,1336^\circ$	$0,2111^\circ$
	QG	$0,3975^\circ$	$0,7744^\circ$

Tabelle B.8: Darstellung der Fehler für die Positionsberechnung für eine  $180^\circ$  Drehung eines Dipols mit Fehllage von  $-0,23$  mm in x-Richtung und  $-0,41$  mm in y-Richtung, mit Verkippung um  $5^\circ$ .

Abstand	Relativer Fehler der Positionsberechnung in x [%]	Relativer Fehler der Positionsberechnung in y [%]
2 mm	$0,1619\%$	$-5,8561\%$
4 mm	$0,0788\%$	$-1,9426\%$
6 mm	$0,0457\%$	$0,052\%$

Tabelle B.9: Darstellung der Fehler für eine 180° Drehung eines Dipols mit Fehllage von  $-0,23$  mm in x-Richtung und  $-0,41$  mm in y-Richtung, mit Verkippung um  $5^\circ$ . Winkelberechnung mit genauer Position. AG = Additive Gewichtung, MG = Multiplikative Gewichtung, QG = Quadranten Gewichtung

Abstand	Methode	Mittelwert absoluter Fehler	Maximaler absoluter Fehler
2 mm	AG	0,2534°	0,7872°
	MG	1,4289°	2,22°
	QG	2,2002°	4,1897°
4 mm	AG	0,2849°	0,4721°
	MG	0,3194°	0,498°
	QG	0,7042°	1,3874°
6 mm	AG	0,2056°	0,3269°
	MG	0,1361°	0,2126°
	QG	0,3978°	0,7748°

# Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, Hauke Pape, dass ich die vorliegende Arbeit im Sinne der Prüfungsordnung nach §16(5) APSO-TI-BM ohne fremde Hilfe selbstständig verfasst und nur die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Wörtlich oder dem Sinn nach aus anderen Werken entnommene Stellen habe ich unter Angabe der Quellen kenntlich gemacht.

Hamburg, 4. Juli 2017

Ort, Datum

---

Unterschrift

---